

Universidade Estadual de Campinas  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO  
CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# A Dinâmica por trás da Seqüência Espectral

Mariana Rodrigues da Silveira

Doutorado em Matemática

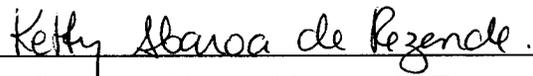
Orientadora: Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende

Campinas - 2008

# A dinâmica por trás da seqüência espectral

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Mariana Rodrigues da Silveira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de abril de 2008.



**Prof. Dra. Ketty Abaroa de Rezende**

Banca examinadora:

Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende

Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira

Prof. Dr. Maria Alice Bertolim

Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros

Prof. Dr. Ozírides Manzoli Neto

Tese, apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutora em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP  
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

Silveira, Mariana Rodrigues da  
Si94d            A dinâmica por trás da seqüência espectral / Mariana Rodrigues  
da Silveira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Ketty Abaroa de Rezende

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Seqüências espectrais (Matemática). 2. Topologia algébrica. 3.  
Sistemas dinâmicos. 4. Morse, Teoria de. I. Rezende, Ketty Abaroa de.  
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: The dynamic behind the spectral sequence.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Spectral sequences (Mathematics). 2. Algebraic  
topology. 3. Dynamical systems. 4. Morse theory.

Área de concentração: Matemática – Geometria e Topologia – Sistemas Dinâmicos

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora:

Profª. Dra. Ketty Abaroa de Rezende (IMECC-UNICAMP)

Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira (IMECC-UNICAMP)

Profª. Dra. Maria Alice Bertolim (Regensburg University – Alemanha)

Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros (IMECC-UNICAMP)

Prof. Dr. Ozirides Manzoli Neto (ICMC-São Carlos/USP)

Data da defesa: 30/04/2008

Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática

**Tese de Doutorado defendida em 30 de abril de 2008 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

*Ketty A. de Rezende.*

**Prof(a). Dr(a). KETTY ABAROA DE REZENDE**

*Maria Alice Bertolim*

**Prof(a). Dr(a). MARIA ALICE BERTOLIM**

*oz mt*

**Prof(a). Dr(a). OZIRÍDE MANZOLI NETO**

*[Handwritten signature]*

**Prof(a). Dr(a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA**

*Caio José Colletti Negreiros*

**Prof(a). Dr(a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS**

*Aos meus pais João Ba-  
tista e Maria Hermínia  
e à minha tia Lúcia.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus que me deu a vida e que me amparou em todos os meus passos.

À minha orientadora Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende pelos ensinamentos, pela confiança e amizade.

Aos professores Dr. Marco Antônio Teixeira, Dra. Maria Alice Bertolim e Dr. Pedro J. de Rezende pela grande ajuda e paciência.

Aos meus pais João Batista e Maria Hermínia pelo exemplo de vida, apoio, amor, pela compreensão e por torcerem por mim sempre.

Às minhas queridas irmãs, Marina e Joana que estiveram sempre do meu lado me apoiando e torcendo por mim.

À minha querida tia Lúcia pelo amor, apoio, carinho e pelas orações.

Aos meus tios queridos tia Célia Maria, tio Toni, tia Celinha, tio Reginaldo, tia Tata e meus primos Paulinha, Breno, José Augusto e Bruna por estarem sempre torcendo por mim.

Às pessoas maravilhosas que conheci em Montreal, em especial Graham, Ana e Amanda.

Aos meus queridos amigos da UNICAMP, em especial Eduardo Marafon, Fábio, Feodor, Hérica, Igor, Kaline, Luciana Elias, Luci Any, Marcelinho, Olivaine e Ricardo pela atenção, ajuda, amizade e pelo carinho sempre.

A todos os professores e funcionários do Instituto Matemática, Estatística e Computação Científica pela gentileza e atenção diariamente prestados.

À Fapesp pela bolsa de estudo concedida e à Unicamp.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

# Resumo

Neste trabalho, apresentamos um algoritmo para um complexo de cadeias  $C$  e sua diferencial dada por uma matriz de conexão  $\Delta$  que determina uma seqüência espectral associada  $(E^r, d^r)$ . Mais especificamente, um sistema gerador de  $E^r$  em termos da base original de  $C$  é obtido bem como a identificação de todas as diferenciais  $d_p^r : E_p^r \rightarrow E_{p-r}^r$ . Explorando a implicação dinâmica da diferencial não nula, mostramos a existência de um caminho unindo a singularidade que gera  $E_p^0$  e a singularidade que gera  $E_{p-r}^0$  no caso em que a conexão direta pelo fluxo não existe. Este caminho é composto pela justaposição de órbitas do fluxo e do fluxo reverso e prova ser importante em algumas aplicações.

# Abstract

In this work, we present an algorithm for a chain complex  $C$  and its differential given by a connection matrix  $\Delta$  which determines an associated spectral sequence  $(E^r, d^r)$ . More specifically, a system spanning  $E^r$  in terms of the original basis of  $C$  is obtained as well as the identification of all differentials  $d_p^r : E_p^r \rightarrow E_{p-r}^r$ . In exploring the dynamical implication of a nonzero differential, we prove the existence of a path joining the singularities generating  $E_p^0$  and  $E_{p-r}^0$  in the case that a direct connection by a flow line does not exist. This path is made up of juxtaposed orbits of the flow and of the reverse flow and which proves to be important in some applications.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>xv</b>
<b>1 Preliminares - Teoria de Conley e Seqüências Espectrais</b>	<b>1</b>
1.1 Fluxos . . . . .	1
1.2 Ordens parciais . . . . .	3
1.3 Índice de Conley . . . . .	4
1.4 Decomposição de Morse . . . . .	6
1.5 Continuação . . . . .	9
1.6 Matriz de Conexão . . . . .	10
1.6.1 Matriz de conexão do Par atrator-repulsor . . . . .	12
1.6.2 Matriz de conexão para decomposições de Morse . . . . .	15
1.6.3 Matriz de Conexão em fluxos de Morse . . . . .	29
1.7 Seqüências Espectrais . . . . .	36
1.7.1 Definição e propriedades básicas . . . . .	36
1.7.2 Seqüência Espectral num complexo de cadeias filtrado . . . . .	39
<b>2 Método da Varredura</b>	<b>43</b>
2.1 Contextualização . . . . .	43
2.2 Construção da família $\Delta^r$ . . . . .	46
2.3 Propriedades de $\Delta^r$ . . . . .	63

<b>3</b>	<b>Os Módulos <math>E_p^r</math> da Seqüência Espectral</b>	<b>67</b>
3.0.1	Filtrações mais grossas . . . . .	78
<b>4</b>	<b>As Diferenciais da Seqüência Espectral</b>	<b>83</b>
<b>5</b>	<b>Análise da Seqüência Espectral para a existência de órbitas conectantes</b>	<b>97</b>
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>110</b>
	Referências . . . . .	120

# Introdução

O papel de técnicas algébricas e topológicas em sistemas dinâmicos tem sido muito significativo, como se pode comprovar com a teoria de Lusternik-Schnirelmann, a teoria de Morse, e mais recentemente a teoria de Conley. A teoria de Conley está amplamente difundida em trabalhos como [Co], [F1], [F2], [Sa1] e [Sa2].

Um resultado fundamental da teoria de Conley é que todo fluxo em um espaço métrico compacto pode ser decomposto em uma parte recorrente por cadeias e uma parte do tipo gradiente. O conjunto recorrente por cadeias é um conjunto compacto invariante que contém o conjunto não errante e os pontos que se tornam recorrentes quando pequenos erros são introduzidos no fluxo. Na parte restante do espaço o fluxo é do tipo gradiente, ou seja, existe uma função de Lyapunov contínua que é estritamente decrescente nas órbitas que não estão no conjunto recorrente por cadeias. Se as componentes do conjunto recorrente por cadeias são identificadas a pontos, o espaço quociente é do tipo gradiente. Portanto, o problema de fornecer uma descrição qualitativa do fluxo se divide em duas partes, a descrição das componentes do conjunto recorrente por cadeias e a descrição de como tais componentes se conectam umas as outra.

Na teoria de Conley utiliza-se a noção de decomposição de Morse de um conjunto invariante isolado  $S$ . Uma decomposição de Morse de  $S$  é uma coleção finita de conjuntos invariantes compactos disjuntos, chamados conjuntos de Morse, cuja união contém o conjunto recorrente por cadeias de  $S$ . Uma vez que uma decomposição de Morse é fixada, os conjuntos de Morse são descritos pelo índice de Conley, que fornece uma descrição topológica da dinâmica local. A conexão entre conjuntos de Morse pode ser encontrada construindo-se filtrações com conjuntos

positivamente invariantes e estudando a topologia destes conjuntos. A teoria de matrizes de conexão é uma ferramenta importante nesse estudo. Esta teoria está desenvolvida em [Fr1], [Fr2] e [Fr3]. As entradas da matriz de conexão registram a existência de órbitas conectantes em  $\varphi$ . Dada uma decomposição de Morse com  $m$  conjuntos de Morse, a matriz de conexão é uma matriz  $m \times m$  cujas entradas são homomorfismos entre os índices homológicos de Conley associados aos conjuntos de Morse. Essas aplicações são definidas por seqüências exatas em homologia.

O objetivo deste trabalho é começar a explorar uma ferramenta algébrica chamada *seqüência espectral* no contexto em que descrevemos acima. Explorar a informação dinâmica dada pela seqüência espectral de Conley é uma abordagem nova, apesar de existirem trabalhos utilizando seqüências espectrais de Morse, veja [C2] e [C1], bem como em teoria de Floer, veja [BaC], onde a utilização é bem diferente da encontrada em nosso trabalho.

Para entender como funciona esta ferramenta em nosso contexto lembremos que, usando pares atrator-repulsor apropriados, decompomos  $S$  em conjuntos de Morse cada vez "menores". A idéia por trás desta abordagem é que ao entender a dinâmica em conjuntos menores podemos utilizar esta informação para entender conjuntos mais complicados obtidos conectando conjuntos de Morse via órbitas cada vez mais longas. Do ponto de vista algébrico-topológico, este processo se parece muito com aquele codificado algebricamente pelas seqüências espectrais.

As seqüências espectrais foram introduzidas por Leray nos anos 50 e são extensivamente usadas em álgebra homológica, topologia e geometria algébrica. Podemos definir uma seqüência espectral para um complexo de cadeia  $(C, \partial)$  com uma filtração crescente  $F^p C$  tal que  $\partial(F^p C) \subset F^p C$  e  $F^{-1} C = 0$ , ver [Sp]. A seqüência espectral associada a  $C$  é uma seqüência de módulos bigraduados  $(E^r, d^r)$  onde  $d^r$  tem bi-grau  $(-r, r - 1)$  e cada etapa contém informação sobre diferenciais cada vez mais longas. Em outras palavras, a queda em filtração vai aumentando a medida que  $r$  cresce. A diferencial  $d^0$  do complexo é a parte de  $\partial$  que não decresce na filtração,  $d^1$  diz respeito à parte de  $\partial$  que reduz a filtração por não mais do que um e assim por diante. Temos ainda que  $H(E^r, d^r) = E^{r+1}$ .

Neste trabalho consideramos um fluxo e uma função de Lyapunov associada produzindo

uma filtração apropriada. O interessante é que agora as seqüências espectrais não são mais apenas ferramentas para cálculo, mas sim interessantes objetos por si próprios. As suas diferenciais mais altas codificam algebricamente informações significantes nas trajetórias "longas" do sistema. Esta forma de ver seqüências espectrais pode também ser encontrada em [C3] e [BaC].

Dois pontos são abordados. O primeiro consiste na detecção de ciclos. Mais precisamente, os geradores do complexo  $C$  mencionado acima são específicos, por exemplo, são singularidades no caso Morse. O domínio  $E_{p,q}^r$  de  $d_{p,q}^r$ , com  $p+q=k$ , é um certo quociente de um sub-módulo de  $C$ . Elementos deste domínio são representados por elementos de  $C$  chamados  $k$ -ciclos, cujas classes apropriadas estão no núcleo de todas as diferenciais anteriores  $d^s$ ,  $s < r$ . Encontrar um sistema de  $k$ -ciclos que gerem  $E^r$  em termos da base original de  $C$  é não trivial na prática, mas é necessário em aplicações, por exemplo, em topologia simplética, veja [L]. Neste trabalho desenvolvemos um algoritmo de varredura que produz esse sistema de geradores. No Teorema 3.0.6 mostramos que os espaços  $E^r$  são determinados aplicando-se o método da varredura à matriz de conexão associada ao fluxo.

O segundo ponto é uma outra aplicação do método da varredura. Assumindo que nessa "seqüência espectral dinâmica" possamos identificar uma diferencial não nula longa, quais as conseqüências que isso pode acarretar? É verdade que neste caso existem "órbitas longas" entre um conjunto invariante e um outro distante? Não é difícil ver que isto não é verdade em geral, ou seja, nem sempre existem órbitas conectando conjuntos invariantes. No entanto, mostramos no Teorema 5.0.16 que, associado a uma diferencial não nula da seqüência espectral, existe um caminho unindo dois conjuntos invariantes. Este caminho é constituído de curvas que coincidem com as linhas de fluxo, onde alguns de seus arcos correspondem a linhas do fluxo reverso. Este resultado é chamado de Teorema do Zig-Zag. Isto é importante porque órbitas longas têm alta energia, ou seja, a variação do funcional ação ao longo de uma órbita é grande. Detectar órbitas com alta energia é significante geometricamente, veja [BaC].

No Capítulo 1 introduzimos os conceitos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Apresentamos conceitos das Teorias de Conley e da seqüência espectral.

No Capítulo 2 apresentamos o método da varredura, bem como alguns resultados que seguem deste método.

Nos Capítulos 3 e 4 demonstramos os Teoremas 3.0.6 e 4.0.14, que conectam a mudança algébrica de geradores de  $\mathbb{Z}$ -módulos da seqüência espectral a uma família particular de mudanças de base sobre  $\mathbb{Q}$  da matriz de conexão  $\Delta$ . Estes resultados podem ser enunciados de forma resumida como segue.

**Teorema** *As matrizes  $\Delta^r$  obtidas do método de varredura aplicado a  $\Delta$  determinam geradores para os espaços  $E_p^r$ . Além disso, se  $E_p^r$  e  $E_{p-r}^r$  são ambos não nulos, então a aplicação  $d_p^r : E_p^r \rightarrow E_{p-r}^r$  é induzida por  $\Delta^r$ , ou seja, é induzida pela multiplicação pela entrada  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  quando a mesma é um pivô primário, um pivô mudança de base ou uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo.*

No Capítulo 5 mostramos o Teorema 5.0.16, que prova a existência de um caminho de linhas de fluxo  $\varphi$  conectando duas singularidades consecutivas. Mais especificamente,

**Teorema** *Seja  $(E^r, d^r)$  uma seqüência espectral induzida por um complexo de cadeias de Morse Conley  $(C, \Delta)$  de um fluxo  $\varphi$  onde  $\Delta$  é uma matriz de conexão sobre  $\mathbb{Z}$ . Se a diferencial  $d_p^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$  é não nula, então existe um caminho de órbitas conectantes de  $\varphi$  unindo  $h_k \in F_p \setminus F_{p-1}$  a  $h_{k-1} \in F_{p-r} \setminus F_{p-r-1}$ .*

# Capítulo 1

## Preliminares - Teoria de Conley e Seqüências Espectrais

### 1.1 Fluxos

Seja  $M$  uma variedade compacta suave  $n$ -dimensional e  $\varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  um fluxo contínuo em  $M$ . Veja Salamon [Sa1] para mais detalhes e demonstrações.

**Definição 1.1.1.** Um conjunto  $S \subset M$  é *invariante* sob o fluxo  $\varphi$  se para todo  $\gamma \in S$ ,  $\varphi(\gamma, t) \in S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Se  $S$  é invariante sob  $\varphi$ , então  $\overline{S}$  (fecho de  $S$ ) e  $S^c$  (complementar de  $S$ ) são invariantes. Além disso, a união e a intersecção de conjuntos invariante é também invariante. Um conjunto é invariante se, e somente se, é a união de órbitas.

Seja  $N$  um subconjunto de  $M$ . Denotamos por  $Inv(N)$  o subconjunto invariante maximal de  $N$ , ou seja,

$$Inv(N) = \{\gamma \in N / \varphi(\gamma, t) \in N \forall t \in \mathbb{R}\}$$

**Definição 1.1.2.** Um conjunto invariante  $S$  é *invariante isolado* se existe uma vizinhança compacta  $N$  de  $S$  tal que  $S$  é o invariante maximal em  $N$  ou seja,  $S = Inv(N)$ . Neste caso,  $N$  é chamado de *vizinhança isolante* de  $S$ .

**Definição 1.1.3.** Dado  $Y \subset M$ , o conjunto  $\omega$ -limite de  $Y$ , denotado por  $\omega(Y)$ , é o conjunto

$$\omega(Y) = \text{Inv}(\overline{\varphi(Y, [0, \infty))})$$

Analogamente, o conjunto  $\omega^*$ -limite de  $Y$  é

$$\omega^*(Y) = \text{Inv}(\overline{\varphi(Y, (-\infty, 0])})$$

e é também denotado por  $\alpha(Y)$ .

O conjunto  $\omega$ -limite de uma união finita é a união dos conjuntos  $\omega$ -limite correspondentes. Em particular, se  $z \in Y$ ,  $\omega(z) \subset \omega(Y)$ . No entanto, em geral  $\omega(Y)$  é maior do que a união dos  $\omega(y)$  para  $y \in Y$ .

Se  $S$  é um conjunto invariante fechado compacto em  $M$  e  $Y \subset S$  então  $\omega(Y)$  e  $\omega^*(Y)$  são por definição conjuntos invariantes não vazios. Além disso, estes conjuntos são compactos em  $S$ , já que são fechados em  $S$ .

**Definição 1.1.4.** Um subconjunto  $A \subset S$  é um *atrator* com relação a  $S$  se existe uma vizinhança  $U$  de  $A$  em  $S$  tal que  $\omega(U) = A$ . Analogamente,  $A \subset S$  é um *repulsor* com relação a  $S$  se existe uma vizinhança  $U^*$  de  $A$  em  $S$  tal que  $\omega^*(U^*) = A$ .

O Lema 1.1.5 é uma caracterização dos atratores.

**Lema 1.1.5.** *Sejam  $S$  um conjunto compacto invariante sob o fluxo  $\varphi$  e  $A$  um subconjunto compacto invariante em  $S$ . Então  $A$  é um atrator em  $S$  se e somente se existe uma vizinhança  $U$  de  $A$  em  $S$  tal que  $\gamma \in U \setminus A$  implica  $\varphi(\gamma, (-\infty, 0]) \not\subset U$ .*

Todo atrator é um compacto invariante e todo repulsor é um atrator para o fluxo reverso.

Seja  $S$  um conjunto invariante compacto e seja  $A$  um atrator em  $S$ . Considere o conjunto  $A^* = \{\gamma \in S / \omega(\gamma) \cap A = \emptyset\}$ .  $A^*$  é um repulsor, que chamamos de *repulsor complementar de  $A$  em  $S$* .  $A^*$  é o maior subconjunto invariante de  $S$  disjunto do atrator  $A$ .

**Proposição 1.1.6.** *Seja  $S$  um conjunto invariante compacto e seja  $A \subset S$ . Se  $A'$  é um atrator em  $A$  e  $A$  é um atrator em  $S$ , então  $A'$  é um atrator em  $S$ .*

**Demonstração:** Seja  $U$  tal que  $\omega(U) = A$ . Como  $A'$  é um atrator em  $A$ , existe  $U'$  vizinhança de  $A'$  em  $S$ ,  $U' \subset U$ , tal que  $\omega(U' \cap A) = A'$ .

Seja  $\gamma \in U'$  tal que  $\varphi(\gamma, (-\infty, 0]) \subset U'$ . Então  $\varphi(\gamma, (-\infty, 0]) \subset U$  e portanto  $\gamma \in \omega(U) = A$ . Segue que  $\varphi(\gamma, (-\infty, 0]) \subset U' \cap A$  e, portanto,  $\gamma \in \omega(U' \cap A) = A'$ .

Assim, dado  $\gamma \in U'$  tal que  $\varphi(\gamma, (-\infty, 0]) \subset U'$  então  $\gamma \in A'$ . Pelo Lema 1.1.5,  $A'$  também é atrator em  $S$ . ■

Se  $A$  e  $B$  são conjuntos invariantes compactos em  $M$ , então  $C(A, B)$  é o conjunto das órbitas conectando  $B$  a  $A$  em  $M$ , ou seja, o conjunto  $\{\gamma \in M \mid \omega(\gamma) \subset A \text{ and } \omega^*(\gamma) \subset B\}$ . Em particular, se  $A \subset M$  é um atrator e  $A^*$  é seu complementar repulsor, então o par atrator repulsor  $(A, A^*)$  em  $M$  decompõe  $M$  na união  $M = A \cup C(A, A^*) \cup A^*$ .

## 1.2 Ordens parciais

Consideremos  $P$  um conjunto indexante finito com  $m$  elementos. As principais referências para esta seção são [Fr1], [Fr2] e [Fr3].

- Uma *ordem parcial* em  $P$  é uma relação  $<$  entre os elementos de  $P$  satisfazendo:

- (a)  $\pi < \pi$  nunca vale para  $\pi \in P$
- (b)  $\pi < \pi'$  e  $\pi' < \pi''$  implicam  $\pi < \pi''$ .

- Uma *ordem total* em  $P$  é uma ordem parcial em  $P$  que também satisfaz:

- (c) Para cada  $\pi$  e  $\pi'$  em  $P$ , ou  $\pi < \pi'$  ou  $\pi' < \pi$ .

Se  $\pi$  e  $\pi'$  são tais que nem  $\pi < \pi'$  e nem  $\pi' < \pi$  então  $\pi$  e  $\pi'$  são não comparáveis.

Seja  $<$  uma ordem parcial em  $P$ . Uma *extensão* de  $<$  é uma ordem parcial  $<'$  em  $P$  tal que  $\pi < \pi'$  implica  $\pi < \pi'$ . Se  $<'$  é uma ordem total em  $P$  então  $<'$  é uma extensão linear de  $<$ .

Se  $\bar{P} \subset P$ , então  $<$  induz uma ordem parcial em  $\bar{P}$  chamada de *restrição* de  $<$  a  $\bar{P}$ .

Um *intervalo* em  $P$  é um subconjunto  $I \subset P$  para o qual  $\pi, \pi' \in I$  e  $\pi < \pi'' < \pi'$  implicam  $\pi'' \in I$ . O conjunto de intervalos em  $<$  é denotado por  $I(<)$ . Um intervalo  $I$  em  $I(<)$  é um *intervalo atrator* se  $\pi \in I$  e  $\pi' < \pi$  implicam  $\pi' \in I$ . O conjunto dos intervalos atratores de  $<$  é denotado por  $A(<)$ . Dois elementos  $\pi, \pi'$  são *adjacentes* se  $\{\pi, \pi'\} \in I(<)$ .

No que segue,  $<$  denota a ordem parcial em  $P$  e também a ordem usual nos inteiros  $\mathbb{Z}$ .

Uma *s-upla adjacente* de intervalos em  $<$  é uma coleção ordenada  $(I_1, \dots, I_s)$  de intervalos mutuamente disjuntos em  $<$  satisfazendo:

- $\cup_{i=1}^s I_i \in I(<)$ ,
- $\pi \in I_j, \pi' \in I_k, j < k$  implica  $\pi' \not< \pi$ , ou seja,  $\pi < \pi'$  ou  $\pi$  e  $\pi'$  são não comparáveis.

A coleção de *s-uplas adjacentes* de intervalos em  $<$  é denotada por  $I_s(<)$ . Note que  $I(<) = I_1(<)$ . É fácil ver que se  $<'$  é uma extensão de  $<$  ou uma restrição de  $<$  a um intervalo em  $<$  então  $I_s(<') \subset I_s(<)$ . Se  $(I, J)$  é um par adjacente de intervalos então denotamos o intervalo  $I \cup J$  por  $IJ$ . Se  $(I, J)$  e  $(J, I)$  são ambos pares adjacentes de intervalos, então  $I$  e  $J$  são *não comparáveis*. Se  $(I_1, \dots, I_s) \in I_s(<)$  e  $\cup_{i=1}^s I_i = I$ , então  $(I_1, \dots, I_s)$  é chamada uma *decomposição* de  $I$ . É claro que se  $(I, J, K)$  é uma tripla adjacente de intervalos, então  $(I, J)$ ,  $(J, K)$ ,  $(IJ, K)$ ,  $(I, JK)$  são todos pares adjacentes de intervalos.

### 1.3 Índice de Conley

Nesta seção definimos o índice de Conley e destacamos suas principais propriedades. As referências para esta seção são [Co] e [Sa1].

**Definição 1.3.1.** Seja  $N$  um subconjunto compacto de  $M$ . Um subconjunto  $K$  é *positivamente invariante* em  $N$  se

$$\gamma \in K, t \geq 0, \varphi(\gamma, [0, t]) \subset N \implies \varphi(\gamma, t) \in K$$

Consequentemente  $\varphi(\gamma, [0, t]) \subset K$ .

**Definição 1.3.2.** Seja  $S \subset M$  um conjunto invariante isolado. Um par  $(N_1, N_0)$  de conjuntos compactos em  $M$  é um *par-índice* para  $S$  em  $M$  se  $N_0 \subset N_1$  e

- i)  $N_1 \setminus N_0$  é uma vizinhança de  $S$  em  $M$  e  $S = \text{Inv}(\overline{N_1 \setminus N_0})$ ,
- ii)  $N_0$  é positivamente invariante em  $N_1$ ,
- iii) Se  $\gamma \in N_1$  é tal que  $\varphi(\gamma, [0, \infty)) \not\subset N_1$  então existe  $t \geq 0$  tal que  $\varphi(\gamma, [0, t]) \subset N_1$  e  $\varphi(\gamma, t) \in N_0$ .

O par-índice existe para vizinhanças isolantes arbitrárias do conjunto invariante isolado  $S$ . A propriedade mais importante de par-índice é que o tipo de homotopia do espaço pontuado  $N_1/N_0$  independe da escolha do par-índice e, portanto, só depende do comportamento do fluxo numa vizinhança do conjunto invariante isolado  $S$ . As demonstrações destes fatos podem ser encontradas em [Sa1]. Logo podemos definir o índice de Conley.

**Definição 1.3.3.** Seja  $S$  um conjunto invariante isolado em  $M$ . Então o tipo homotópico  $c(S) = [N_1/N_0]$  do espaço pontuado  $N_1/N_0$ , onde  $(N_1, N_0)$  é um par-índice para  $S$  em  $M$  é chamado *índice homotópico de Conley* de  $S$  em  $M$ .

**Exemplo 1.3.4.** O índice homotópico de uma singularidade hiperbólica do fluxo em uma variedade é o tipo de homotopia da esfera pontuada de dimensão igual a da variedade instável da singularidade.

Como conseqüência da existência e da invariância do par-índice temos o Corolário 1.3.5, que generaliza a idéia de um par-índice de  $S$  para um trio-índice  $(N_0, N_1, N_2)$  de um par atrator-repulsor  $(A, A^*)$  em  $S$ .

**Corolário 1.3.5.** *Sejam  $S$  um conjunto invariante isolado em  $M$ ,  $(A, A^*)$  um par atrator-repulsor em  $S$  e  $(N_2, N_0)$  um par-índice para  $S$ . Então existe uma filtração  $N_0 \subset N_1 \subset N_2$  de conjuntos compactos em  $M$  tais que  $(N_1, N_0)$  é um par-índice para  $A$  e  $(N_2, N_1)$  é um par-índice para  $A^*$ .*

Conley introduz em [Co] a idéia de trios e Kurland provou sua existência em [K].

**Proposição 1.3.6.** *Considere o trio  $N_0 \subset N_1 \subset N_2$ . Se  $(N_1, N_0)$  é par-índice para  $A$  e  $(N_2, N_0)$  é par-índice para  $S$ , então  $(N_2, N_1)$  é um par-índice para  $A^*$ .*

Não faremos uso da estrutura completa do índice de Conley no que segue. Ao invés disso, vamos utilizar algo mais fraco, porém mais algébrico. A maioria dos objetos algébricos associados a espaços em topologia algébrica são invariantes homotópicos. Por exemplo, os  $\mathbb{Z}$ -módulos de homologia singular de um espaço dependem somente do tipo de homotopia. O índice homológico de  $S$ ,  $H(c(S))$ , é o  $\mathbb{Z}$ -módulo graduado  $\{H_q(c(S)), q = 1, \dots\}$ , onde  $H_q(c(S))$  é o  $q$ -ésimo  $\mathbb{Z}$ -módulo de homologia singular de qualquer um dos quocientes  $N_1/N_0$ , onde  $(N_1, N_0)$  é um par-índice para  $S$ . O *índice homológico* de uma singularidade hiperbólica com variedade instável de dimensão  $d$  é  $H_d(c(S)) = \mathbb{Z}$ ,  $H_q(c(S)) = 0$  para  $q \neq d$ . Geralmente é mais fácil calcular o índice homológico do que o índice homotópico. No entanto perdemos algumas informações quando consideramos o índice homológico.

## 1.4 Decomposição de Morse

Sejam  $A \subset M$  é um atrator e  $A^*$  é seu complementar repulsor. Sabemos que o par atrator repulsor  $(A, A^*)$  em  $M$  decompõe  $M$  na união  $M = A \cup C(A, A^*) \cup A^*$ . A generalização desta idéia é uma decomposição de Morse de  $M$ . As referências para esta seção são [Co], [Fr1], [Fr2], [Fr3] e [Sa1].

**Definição 1.4.1.** Seja  $<$  uma ordem parcial num conjunto finito  $P$ . Uma *decomposição de Morse  $<$ -ordenada* de  $M$  é uma coleção  $\mathcal{D}(M) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$  de subconjuntos compactos invariantes de  $M$  mutuamente disjuntos tais que se  $\gamma \in M \setminus \cup_{\pi \in P} M_\pi$ , então existe  $\pi < \pi'$  com  $\gamma \in C(M_\pi, M_{\pi'})$ .

Assim, uma decomposição de Morse de  $\varphi$  é uma coleção finita de conjuntos invariantes compactos disjuntos  $M_\pi$  que juntos contém todo o comportamento recorrente por cadeias

de  $\varphi$ , ou seja, o conjunto recorrente por cadeias é precisamente o conjunto dos pontos que pertencem a todas as decomposições de Morse.

**Definição 1.4.2.** Um subconjunto de  $M$  que pertence a alguma decomposição de Morse é chamado *conjunto de Morse*.

A proposição seguinte é uma consequência imediata da definição de decomposição de Morse.

**Proposição 1.4.3.** *Se  $<_1$  é uma ordem parcial em  $P$ , então  $\mathcal{D}(M) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$  é uma decomposição de Morse  $<_1$ -ordenada de  $M$  se e somente se  $C(M_\pi, M_{\pi'}) \neq \emptyset$  implica  $\pi <_1 \pi'$  para cada  $\pi, \pi' \in P$ .*

A ordem parcial  $<$  em  $P$  induz uma ordem parcial em  $\mathcal{D}(M)$ . Esta ordem parcial, também denotada por  $<$ , é chamada uma ordem admissível da decomposição de Morse. O fluxo em  $M$  define uma ordem parcial natural em  $P$  chamada *ordem do fluxo* de  $\mathcal{D}(M)$ , denotada  $<_\varphi$ . A ordem do fluxo é definida considerando  $\pi <_\varphi \pi'$  se e somente se existe uma seqüência de elementos distintos de  $P : \pi = \pi_1, \dots, \pi_\ell = \pi'$  com  $C(M_{\pi_j}, M_{\pi_{j+1}}) \neq \emptyset$  para cada  $j = 1, \dots, \ell - 1$ . Em outras palavras,  $\pi <_\varphi \pi'$  sempre que  $C(M_\pi, M_{\pi'}) \neq \emptyset$  e estendemos usando a transitividade. Segue da Proposição 1.4.3 que  $<_\varphi$  é uma ordem parcial em  $P$  e  $\mathcal{D}(M)$  é uma decomposição de Morse  $<_\varphi$ -ordenada de  $M$ . A ordem do fluxo  $<_\varphi$  é uma ordem minimal em  $\mathcal{D}(M)$ , ou seja, tem o menor número de relações entre todas as outras ordens admissíveis.

**Proposição 1.4.4.** *Toda ordem admissível em  $\mathcal{D}(M)$  é uma extensão da ordem do fluxo  $<_\varphi$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $\pi <_\varphi \pi'$ . Então existe uma seqüência  $\pi = \pi_1, \dots, \pi_\ell = \pi'$  tal que  $C(M_{\pi_j}, M_{\pi_{j+1}}) \neq \emptyset$  para cada  $j = 1, \dots, \ell - 1$ . Pela Proposição 1.4.3,  $\pi_{j-1} < \pi_j$  para  $j = 1, \dots, \ell - 1$ . Portanto  $\pi < \pi'$  e o resultado segue. ■

Uma outra ordem admissível que merece nossa atenção é a *ordem da filtração*. Dado um fluxo contínuo em  $M$  com uma decomposição de Morse finita  $\{M_i\}_{i=1}^m$  e uma função de Lyapunov tal que  $f^{-1}(c_i) = M_i$  então a filtração

$$\{f^{-1}(c_i - \epsilon, c_i + \epsilon)\}_{i=1}^m$$

define uma ordem admissível em  $M$  chamada ordem da filtração e denotada por  $<_f$ . Esta ordem é uma ordem total em  $M$ .

O problema de usarmos a ordem da filtração para definirmos a matriz de conexão é que esta é uma ordem muito forte e, portanto temos bem menos pares adjacentes.

Associada a uma ordem admissível  $<$  de  $\mathcal{D}(M)$  existe uma coleção de conjuntos de Morse de  $<$

$$M_I = (\cup_{\pi \in I} M_\pi) \cup (\cup_{\pi, \pi' \in I} C(M_{\pi'}, M_\pi))$$

para cada  $I \in I(<)$ . Como uma ordem admissível  $<$  de  $\mathcal{D}(M)$  é uma extensão da ordem do fluxo, então  $I(<) \subset I(<_\varphi)$ . Segue que a coleção de conjuntos de Morse da ordem do fluxo contém os conjuntos de Morse de qualquer outra ordem admissível.

**Proposição 1.4.5.** 1. Se  $J \in I(<)$  então existem intervalos  $K \in A(<)$  tais que  $(K \setminus J, J)$  é uma decomposição de  $K$  e  $K \setminus J \in A(<)$ .

2. Se  $I$  é um intervalo atrator em  $<$ , então  $M_I$  é um atrator em  $S$  com complementar repulsor  $M_{P \setminus I}$ .

### Demonstração:

1.  $K = \{\pi \in P \mid \text{existe } \pi' \in J \text{ com } \pi < \pi' \text{ ou } \pi = \pi'\}$  é um exemplo.
2. Demonstramos (2) por indução sobre a ordem da decomposição de Morse  $\mathcal{D}(M)$ . Se  $\mathcal{D}(M)$  é uma decomposição de Morse com apenas um conjunto então o resultado vale. Suponhamos que o resultado vale para toda decomposição de Morse de ordem  $m - 1$  e seja  $\mathcal{D}(M)$  uma decomposição de Morse de ordem  $m$ .

Consideremos  $I$  um intervalo em  $A(<)$ . Seja  $\theta$  um elemento minimal de  $I$ , ou seja, não existe  $\pi \in I$  com  $\pi < \theta$ . Mostremos que  $M_\theta$  é um atrator em  $S$ . Seja  $U$  uma vizinhança compacta de  $M_\theta$  em  $S$  disjunta de  $\cup_{\pi \in P \setminus \theta} M_\pi$ .

Seja  $\gamma \in U \setminus M_\theta$ . Então  $\omega^*(\gamma) \subset \cup_{\pi \in P \setminus \theta} M_\pi$ . De fato, se  $\omega^*(\gamma) \not\subset \cup_{\pi \in P \setminus \theta} M_\pi$  então  $\omega^*(\gamma) \subset M_\theta$ . Seja  $\pi$  tal que  $\omega(\gamma) \subset M_\pi$ . Como  $\theta$  é minimal então  $\pi$  não pode estar em

$I \setminus \theta$  e como  $I$  é um intervalo atrator então  $\pi$  não pode estar em  $P \setminus I$ . Logo  $\pi = \theta$ , ou seja  $\omega(\gamma) \subset M_\theta$ . Mas isso contradiz o fato de  $\gamma \in U \setminus M_\theta$ . Logo  $\omega^*(\gamma) \subset \cup_{\pi \in P \setminus \theta} M_\pi$ . Segue que  $\omega^*(\gamma) \not\subset U$  e, pelo Lema 1.1.5,  $M_\theta$  é um atrator em  $S$ .  $M_{P \setminus \theta}$  é o repulsor complementar de  $M_\theta$  em  $S$ .

Seja  $<_*$  a restrição de  $<$  a  $P \setminus \theta$ . Então  $\{M_\pi \mid \pi \in P \setminus \theta\}$  é uma decomposição de Morse  $<_*$  ordenada. Por hipótese de indução  $M_{I \setminus \theta}$  é um atrator em  $M_{P \setminus \theta}$ .  $M_{P \setminus I}$  é o repulsor complementar de  $M_{I \setminus \theta}$  em  $M_{P \setminus \theta}$ . Como  $M_{P \setminus \theta}$  é repulsor em  $S$  e  $M_{P \setminus I}$  é repulsor em  $M_{P \setminus \theta}$  então pela Proposição 1.1.6  $M_{P \setminus I}$  é repulsor em  $S$ . Logo  $M_I$  é atrator em  $S$ .

Franzosa mostra em [Fr1] que todo conjunto de Morse é um invariante compacto. Como consequência disso podemos restringir decomposições de Morse a conjuntos de Morse e podemos engrossar decomposições de Morse usando conjuntos de Morse. Logo temos a proposição seguinte.

**Proposição 1.4.6.** *Seja  $\mathcal{D}(M) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$  uma decomposição de Morse em  $S$  e  $I \in I(<)$ .*

*Então*

1.  $\{M_\pi\}_{\pi \in I}$  é uma decomposição de Morse  $<_I$ -ordenada de  $M_I$ , onde  $<_I$  é a restrição de  $<$  a  $I$ .
2.  $\{M_\pi\}_{\pi \in P \setminus I} \cup M_I$  é uma decomposição de Morse de  $S$ .

Como consequência da Proposição 1.4.6 temos o corolário seguinte.

**Corolário 1.4.7.** *Se  $(I, J) \in I_2(<)$ , então  $(M_I, M_J)$  é um par atrator-repulsor em  $M_{IJ}$ .*

## 1.5 Continuação

A principal propriedade do índice de Conley é a sua invariância por continuação. Ver [Sa1].

**Definição 1.5.1.** Uma família parametrizada de fluxos sobre uma variedade  $M$  é uma coleção de fluxos  $\{\varphi_t^\lambda \mid \lambda \in I\}$  indexados por  $I = [0, 1]$  tal que  $\Phi_t(x, \lambda) = (\varphi_t^\lambda x, \lambda)$  é um fluxo suave

sobre  $M \times I$ . Dizemos que  $\mathcal{S}^0$ , um conjunto invariante para  $\varphi_t^0$ , e  $\mathcal{S}^1$ , um conjunto invariante para  $\varphi_t^1$ , estão *relacionados por continuação* se existe um conjunto invariante isolado  $\mathcal{S} \subset M \times I$  para  $\Phi_t$  tal que  $\mathcal{S}^0 = \mathcal{S} \cap \{(x, 0)\}$  e  $\mathcal{S}^1 = \mathcal{S} \cap \{(x, 1)\}$ .

Se  $N$  é uma vizinhança isolante para  $\varphi_t^\lambda$  para todo  $\lambda \in I$ , seja  $\mathcal{S} = \text{Inv}(N \times I)$  em  $\Phi_t$ . Então  $\mathcal{S}$  define uma continuação de  $\mathcal{S}^0$  para  $\mathcal{S}^1$ .

Como já foi dito, conjuntos relacionados por continuação têm o mesmo índice de Conley.

**Exemplo 1.5.2.** Consideremos a seguinte família de equações diferenciais ordinárias parametrizadas pela variável  $\lambda > 0$ .

$$\dot{x} = +y \quad \dot{y} = +\lambda y - x(x - 1/3)(1 - x)$$

Exibimos o conjunto completo das soluções limitadas  $\mathcal{S}^\lambda$  destas equações para valores de  $\lambda$  próximo de 0 e para valores de  $\lambda$  grandes na Figura 1.1. Para  $\lambda > 0$  o conjunto das soluções limitadas é um conjunto invariante isolado e a coleção  $M_\lambda = \{M_\lambda^i\}$  é uma decomposição de Morse de  $\mathcal{S}^\lambda$ . Os conjuntos  $M_\lambda^1$ ,  $M_\lambda^2$  e  $M_\lambda^3$  são os pontos no plano  $xy$   $(1/3, 0)$ ,  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  respectivamente.

Franzosa mostra em [Fr3] que existe um parâmetro  $\lambda^*$  para o qual existe uma órbita conectante de  $M_{\lambda^*}^3$  para  $M_{\lambda^*}^2$ . Comentaremos sobre este caso mais adiante. Veja 1.2.

O fluxo nas Figuras 1.1 e 1.2 pode ser esquematizado como na Figura 1.3.

Assim,  $\mathcal{S}^\lambda$ ,  $\lambda < \lambda^*$  e  $\mathcal{S}^\lambda$ ,  $\lambda > \lambda^*$  são continuações de  $\mathcal{S}^{\lambda^*}$ .

## 1.6 Matriz de Conexão

Nesta seção definimos uma matriz de conexão para uma decomposição de Morse. A teoria desenvolvida aqui pode ser encontrada em [Fr1], [Fr2], [Fr3], [MC], [MCR], [Mo], [R1], [R2]. As entradas na matriz de conexão registram a existência de órbitas conectantes em  $\varphi$ . Dada uma decomposição  $\mathcal{D}(M) = \{M_\pi\}$  com  $m$  conjuntos de Morse  $M_\pi$ , a matriz de conexão é uma matriz  $m \times m$  cujas entradas são homomorfismos entre os índices homológicos de Conley associados aos

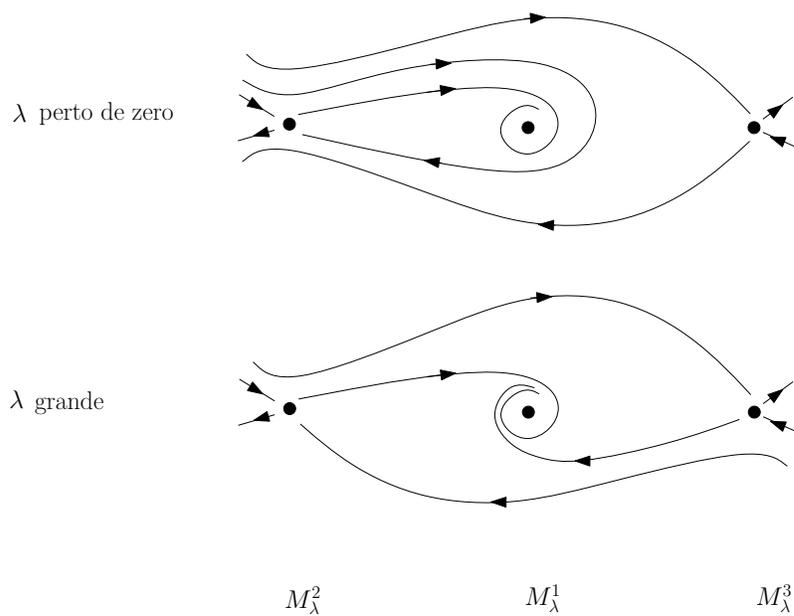


Figura 1.1: Conjunto das soluções limitadas  $S_\lambda$ .

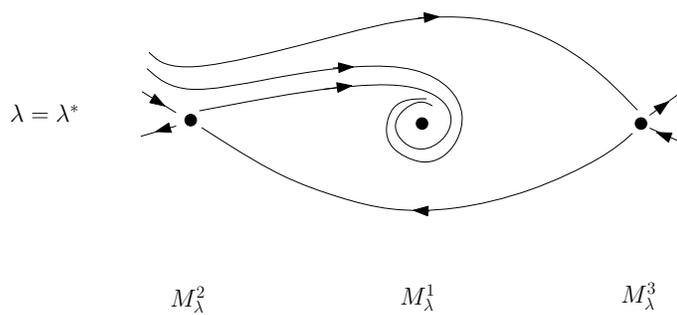


Figura 1.2: Conjunto das soluções limitadas  $S_{\lambda^*}$ .

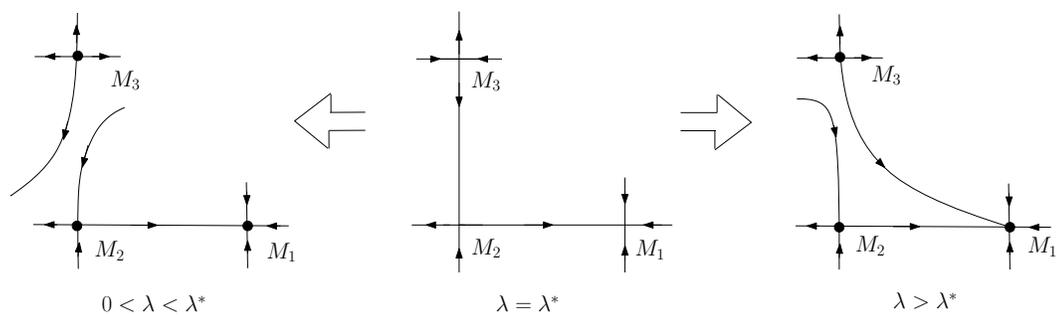


Figura 1.3: Retrato qualitativo do fluxo.

conjuntos  $M_\pi$ . Essas aplicações são definidas por seqüências exatas em homologia. Nesta seção, os índices homológicos são computados com coeficientes em um módulo sobre um domínio de ideais principais. Em nossas aplicações, usaremos coeficientes em  $\mathbb{Z}$ . Se não existem órbitas conectantes entre dois dados conjuntos de Morse, então a entrada correspondente da matriz será a aplicação trivial.

Antes de considerarmos uma decomposição de Morse, consideremos o caso de um atrator-repulsor.

### 1.6.1 Matriz de conexão do Par atrator-repulsor

Nesta seção vamos introduzir a aplicação bordo definida pelo fluxo para um par atrator-repulsor. Este conceito é fundamental para a definição de matriz de conexão. Além disso, vamos definir a matriz de conexão para o caso mais simples de decomposição de Morse que é o par atrator-repulsor.

Sejam  $(A, A^*)$  um par atrator-repulsor em  $M$  e  $N_0 \subset N_1 \subset N_2$  conjuntos compactos tais que  $(N_1, N_0)$  é um par-índice para  $A$ ,  $(N_2, N_0)$  é um par-índice para  $M$ ,  $(N_2, N_1)$  é um par-índice para  $A^*$ . Temos então as aplicações induzidas

$$0 \longrightarrow N_1/N_0 \xrightarrow{i} N_2/N_0 \xrightarrow{p} N_2/N_1 \longrightarrow 0$$

e, portanto, temos a seguinte seqüência de complexos de cadeias associada

$$0 \longrightarrow C_*(N_1/N_0) \xrightarrow{i} C_*(N_2/N_0) \xrightarrow{p} C_*(N_2/N_1) \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

A proposição seguinte e sua demonstração podem ser encontradas em [Fr2].

**Proposição 1.6.1.** *Consideremos uma seqüência de complexos de cadeias*

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{i} C_2 \xrightarrow{p} C_3 \longrightarrow 0$$

tal que

- $i$  é injetiva e  $p \circ i = 0$

- $\rho : C_2/Im\,i \rightarrow C_3$  é uma aplicação de cadeias definida por  $p$  que induz um isomorfismo em homologia.

Então existe um homomorfismo  $\partial : H_*(C_3) \rightarrow H_*(C_1)$  de grau  $-1$  tal que

$$\cdots \longrightarrow H_*(C_1) \xrightarrow{i} H(C_2) \xrightarrow{p} H_*(C_3) \xrightarrow{\partial} H(C_1) \longrightarrow \cdots$$

é exata.

Notemos que a aplicação quociente  $p : N_2/N_0 \rightarrow \frac{N_2/N_0}{N_1/N_0} \approx N_2/N_1$  define a aplicação de cadeias  $\rho : C_*(N_2/N_0, N_1/N_0) \rightarrow C_*(N_2/N_1)$  que induz um isomorfismo  $\rho^* : H_*(N_2/N_0, N_1/N_0) \rightarrow H_*(N_2/N_1)$ . Como  $i$  é injetiva e  $p \circ i = 0$  a seqüência de complexos de cadeias (1.1) satisfaz a Proposição 1.6.1 e, portanto, temos a seqüência exata longa em homologia associada

$$\cdots \longrightarrow H_*(N_1/N_0) \longrightarrow H_*(N_2/N_0) \longrightarrow H_*(N_2/N_1) \xrightarrow{\partial} H_*(N_1/N_0) \longrightarrow \cdots$$

Segue da invariância do par-índice que

$$\cdots \longrightarrow H(c(A)) \xrightarrow{i} H(c(M)) \xrightarrow{p} H(c(A^*)) \xrightarrow{\partial(A^*, A)} H(c(A)) \longrightarrow \cdots \quad (1.2)$$

A seqüência exata (1.2) é chamada de *seqüência do índice homológico do par atrator-repulsor*  $(A, A^*)$ . Para mais detalhes veja [K] e [Fr1].

**Definição 1.6.2.** A aplicação  $\partial(A^*, A) : H(c(A^*)) \rightarrow H(c(A))$  de grau  $-1$  é chamada *aplicação bordo* definida pelo fluxo e a seqüência 1.2 é chamada de seqüência exata do índice homológico do par atrator-repulsor.

A importância da aplicação bordo definida pelo fluxo é dada pela seguinte proposição.

**Proposição 1.6.3.** *Se  $\partial(A^*, A) \neq 0$  então  $C(A, A^*) \neq \emptyset$ .*

A idéia da prova é que se  $C(A, A^*) = \emptyset$ , então  $M = A \cup A^*$  e, portanto,  $H(c(M)) = H(c(A)) \oplus H(c(A^*))$ . Pela seqüência (1.2)  $\partial(A^*, A)$  é a aplicação nula. Assim, se  $\partial(A^*, A) \neq 0$ , então  $C(A, A^*) \neq \emptyset$ .

Segue diretamente da Proposição 1.6.3 que  $C(A, A^*) = \emptyset$  implica  $\partial(A^*, A) = 0$ . Além disso, como (1.2) é exata então  $H(c(M)) = 0$  implica que  $\partial(A^*, A)$  é um isomorfismo. Note que a aplicação  $\partial(A^*, A)$  contém informação sobre a estrutura do par atrator-repulsor  $(A^*, A)$  em  $M$ .

No caso de singularidades hiperbólicas transversais,  $\partial$  conta o número de órbitas conectantes "com orientação".

No caso de usarmos homologia com coeficientes  $\mathbb{Z}_2$ , McCord mostra em [MC] que dadas duas singularidades hiperbólicas  $A$  e  $A^*$  tais que a variedade instável de  $A^*$  e a variedade estável de  $A$  são transversais, então a aplicação definida pelo fluxo  $\partial(A^*, A)$  conta o número de órbitas conectantes de  $A^*$  para  $A$  (mod 2).

Consideremos agora o complexo de cadeias

$$C\Delta(M) = H(c(A)) \oplus H(c(A^*))$$

e a aplicação bordo definida pela matriz

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H(c(A)) \\ H(c(A^*)) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} H(c(A)) \\ H(c(A^*)) \end{pmatrix}$$

É fácil ver que  $\Delta$  é um aplicação bordo. Fazendo a restrição apropriada em  $C\Delta(M)$  e  $\Delta$  definimos complexos de cadeia  $C\Delta(A) = H(c(A))$  e  $C\Delta(A^*) = H(c(A^*))$  com aplicações bordo  $\Delta(A)$  e  $\Delta(A^*)$  respectivamente que, por sua vez, são triviais. Assim,  $(C\Delta(A), \Delta(A)) = (H(c(A)), 0)$  e  $(C\Delta(A^*), \Delta(A^*)) = (H(c(A^*)), 0)$  são subcomplexos de  $C\Delta(M)$ . Então temos uma seqüência exata curta definida

$$0 \longrightarrow C\Delta(A) \xrightarrow{i} C\Delta(M) \xrightarrow{p} C\Delta(A^*) \longrightarrow 0 \quad (1.3)$$

onde  $i$  é a inclusão e  $p$  é a projecção. Esta seqüência é a mesma que

$$0 \longrightarrow H(c(A)) \longrightarrow H(c(A)) \oplus H(c(A^*)) \xrightarrow{p} H(c(A^*)) \longrightarrow 0$$

Sejam  $H\Delta(M)$ ,  $H\Delta(A)$  e  $H\Delta(A^*)$  as homologias dos complexos  $C\Delta(M)$ ,  $C\Delta(A)$  e  $C\Delta(A^*)$  respectivamente.

Passando (1.3) para a homologia obtemos a seguinte seqüência exata em homologia

$$\cdots \longrightarrow H\Delta(A) \xrightarrow{i} H\Delta(M) \xrightarrow{p} H\Delta(A^*) \xrightarrow{\bar{\partial}} H\Delta(A) \longrightarrow \cdots$$

Como  $\Delta(A) = \Delta(A^*) = 0$  então  $H\Delta(A) = H(c(A))$ ,  $H\Delta(A^*) = H(c(A^*))$  e  $\partial = \bar{\partial}$ . Portanto temos o seguinte diagrama comutativo de módulos de homologia e aplicações:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H\Delta(A) & \xrightarrow{i} & H\Delta(M) & \xrightarrow{p} & H\Delta(A^*) & \xrightarrow{\partial} & H\Delta(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow id & & \downarrow \Phi & & \downarrow id & & \downarrow id & & \\ \cdots & \longrightarrow & H(c(A)) & \xrightarrow{i} & H(c(M)) & \xrightarrow{p} & H(c(A^*)) & \xrightarrow{\partial} & H(c(A)) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Segue do Five Lemma que as aplicações  $\Phi : H\Delta(M) \rightarrow H(c(M))$  que fazem o diagrama comutar são isomorfismos.

Assim, o complexo  $(H(c(A)) \oplus H(c(A^*)), \Delta)$  induz uma seqüência exata em homologia que é isomorfa a seqüência do índice homológico. Além disso,  $\Delta$  contém informações sobre o conjunto de órbitas conectantes  $C(A^*, A)$ , já que  $\partial(A, A^*) \neq 0$  implica  $C(A^*, A) \neq \emptyset$ . A matriz  $\Delta$  é chamada de matriz de conexão do par atrator-repulsor  $(A, A^*)$ .

## 1.6.2 Matriz de conexão para decomposições de Morse

O par-índice para um conjunto invariante isolado é generalizado pela filtração-índice para uma ordem admissível em uma decomposição de Morse. Franzosa mostra em [Fr1] que a filtração-índice sempre existe.

**Definição 1.6.4.** Uma *filtração-índice* para uma ordem admissível  $<$  de  $\mathcal{D}(M)$  é uma coleção de conjuntos compactos  $\mathcal{N} = \{N_I\}_{I \in A(<)}$  satisfazendo:

- i) Para cada  $I \in A(<)$ ,  $(N_I, N_\emptyset)$  é um par-índice para o atrator  $M_I$ .
- ii) Para  $I_1, I_2 \in A(<)$ ,  $N_{I_1 \cap I_2} = N_{I_1} \cap N_{I_2}$  e  $N_{I_1 \cup I_2} = N_{I_1} \cup N_{I_2}$ .

A Proposição 1.6.5 mostra que uma filtração-índice determina pelo menos um par-índice para cada conjunto de Morse da decomposição  $\mathcal{D}(M)$ .

**Proposição 1.6.5.** *Seja  $\mathcal{N}$  uma filtração-índice para a ordem admissível  $<$  de  $\mathcal{D}(M)$ . Se  $J \in I(<)$  e  $(I, J)$  é uma decomposição de um intervalo atrator  $K \in A(<)$ , então segue que  $I \in A(<)$  e  $(N_K, N_I)$  é um par-índice para o conjunto de Morse  $M_J$  de  $\mathcal{D}(M)$ .*

**Demonstração:** A propriedade (ii) da Definição 1.6.4 implica que  $N_\emptyset \subset N_I \subset N_K$  e a propriedade (i) da Definição 1.6.4 implica que  $(N_I, N_\emptyset)$  e  $(N_K, N_\emptyset)$  são pares índices para  $M_I$  e  $M_K$  respectivamente. Pelo Corolário 1.4.7  $(M_I, M_J)$  é um par atrator repulsor em  $M_K$ . Segue da Proposição 1.3.6 que  $(N_K, N_I)$  é um par-índice para  $M_J$ . ■

Pelas Proposições 1.4.5 (1) e 1.6.5 a filtração-índice define um par-índice para cada conjunto de Morse da ordem admissível. Além disso, dados dois pares  $(N_K, N_I)$  e  $(N_{\bar{K}}, N_{\bar{I}})$  para  $M_J$ , existe uma equivalência de homotopia entre os espaços  $N_K/N_I$  e  $N_{\bar{K}}/N_{\bar{I}}$ .

Sejam  $I, J \in I(<)$  e  $C(N_K/N_I, \mathbb{Z})$  as cadeias singulares do espaço índice  $N_K/N_I$  com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ . Note que poderíamos escolher coeficientes em qualquer módulo  $G$ . Definimos então o complexo de cadeias  $C_{\mathcal{N}}(c(M_J); \mathbb{Z})$  também denotado por  $C(c(M_J))$  que é naturalmente isomorfo a  $C(N_K/N_I, \mathbb{Z})$ . Passando para a homologia em  $C(c(M_J))$  obtemos  $H_*(c(M_J); \mathbb{Z})$ , a homologia singular com coeficientes em  $\mathbb{Z}$  do índice de Conley  $c(M_J)$  de  $M_J$ .

Fransoza mostra em [Fr1] que, dada uma filtração-índice  $\mathcal{N}$  para uma ordem admissível  $<$ , existe uma coleção de complexos de cadeias, que denotamos por  $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(<)$ , e aplicações satisfazendo:

1. Para cada  $I \in I(<)$  existe um complexo de cadeias  $C(I)$ ;
2. Dados  $(I, J) \in I_2(<)$  existem aplicações cadeia

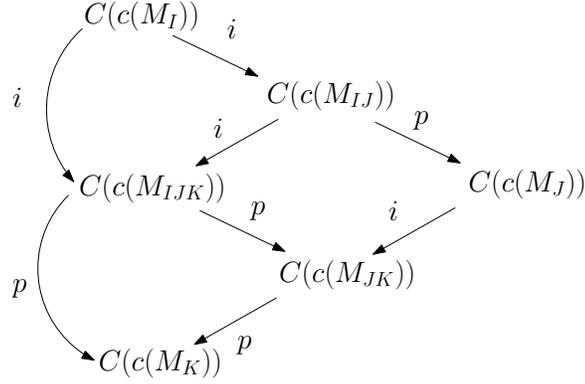
$$0 \longrightarrow C(c(M_I)) \xrightarrow{i(I, IJ)} C(c(M_{IJ})) \xrightarrow{p(IJ, J)} C(c(M_J)) \longrightarrow 0 \quad (1.4)$$

com a propriedade que

- (i)  $i(I, IJ)$  é injetiva e  $p(IJ, J)i(I, IJ) = 0$ .
- (ii) A aplicação cadeia  $p(IJ, J)$  define  $\rho : \frac{C(c(M_{IJ}))}{\text{Im } i(I, IJ)} \rightarrow C(c(M_J))$  que induz um isomorfismo em homologia.

(iii) Se  $I$  e  $J$  são não comparáveis, então  $p(JI, I)i(I, IJ) = id|C(c(M_I))$

(iv) Se  $(I, J, K) \in I_3(<)$  então o diagrama abaixo comuta



Uma coleção de complexos com as propriedades de  $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(<)$  é chamada de trança de complexos de cadeias.

Pela Proposição 1.6.1 temos a seqüência exata longa de índices homológicos do par atrator-repulsor  $(M_I, M_J)$ :

$$\dots \longrightarrow H(c(M_I)) \xrightarrow{i(I, IJ)} H(c(M_{IJ})) \xrightarrow{p(IJ, J)} H(c(M_J)) \xrightarrow{\partial(J, I)} H(c(M_I)) \longrightarrow \dots \quad (1.5)$$

com as seguintes propriedades:

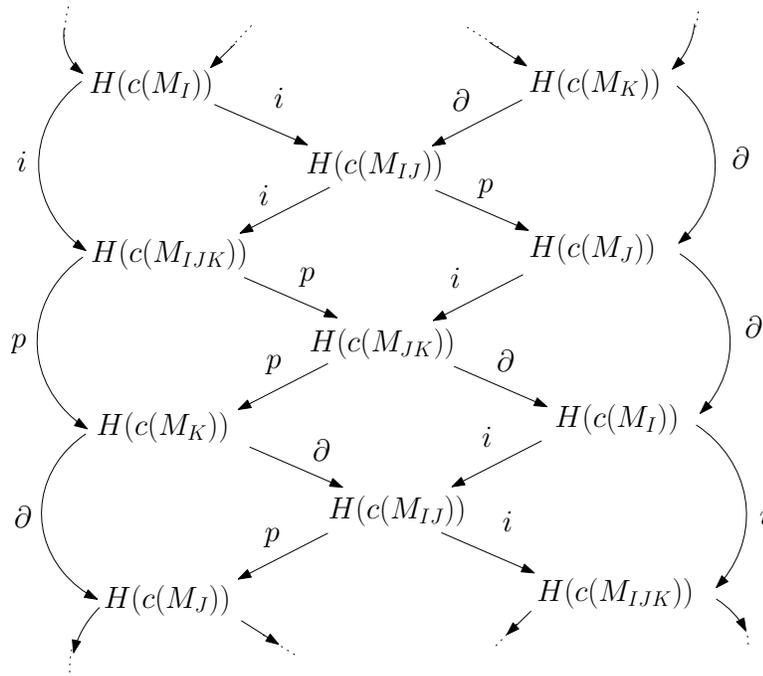
(i) (1.5) independe da filtração-índice  $\mathcal{N}$

(ii) Se  $I$  e  $J$  são não comparáveis então  $p(JI, I)i(I, IJ) = id|H(c(M_I))$

(iv) Se  $(I, J, K) \in I_3(<)$  então o diagrama abaixo comuta

Assim, passando para a homologia, uma trança de complexos de cadeias define o que chamamos de trança de módulos graduados.

O homomorfismo  $\partial(J, I) : H(c(M_J)) \rightarrow H(c(M_I))$  é a aplicação bordo ou aplicação de conexão do par adjacente  $(M_I, M_J)$ .  $\partial(J, I)$  é trivial quando não existem órbitas conectantes de  $M_J$  para  $M_I$ . De fato, se não existem órbitas conectando  $M_I$  a  $M_J$  então o conjunto de Morse  $M_{IJ}$  é a união dos primeiros. Neste caso, a seqüência exata acima representa



$H(c(M_{IJ}))$  como soma direta de  $H(c(M_I))$  e  $H(c(M_J))$ . Segue que a aplicação bordo  $\partial(J, I)$  é o homomorfismo trivial. Portanto, uma aplicação bordo não trivial implica na existência de uma órbita conectante.

Dado um intervalo  $I \subset P$ , definimos

$$C\Delta(I) = \bigoplus_{\pi \in I} H(c(M_\pi))$$

Para  $I, J \in I(<)$  seja  $\Delta(J, I) : C\Delta(J) \rightarrow C\Delta(I)$  a aplicação dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & \Delta(\pi', \pi) & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}_{\pi \in I, \pi' \in J}$$

Então  $\Delta(I) : C\Delta(I) \rightarrow C\Delta(I)$  é da forma:

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & \Delta(\pi', \pi) & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}_{\pi, \pi' \in I} : \begin{pmatrix} \vdots \\ H(c(M_\pi)) \\ \vdots \end{pmatrix}_{\pi \in I} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ H(c(M_\pi)) \\ \vdots \end{pmatrix}_{\pi \in I}$$

tal que cada  $\Delta(\pi', \pi)$  é uma aplicação de  $H(c(M_{\pi'}))$  em  $H(c(M_{\pi}))$  localizada na  $\pi$ -ésima linha e na  $\pi'$ -ésima coluna da matriz.

**Definição 1.6.6.** • Dizemos que  $\Delta(I)$  é *triangular superior* se  $\Delta(\pi', \pi) = 0$  quando  $\pi \not\prec \pi'$ .

- $\Delta(I)$  é uma *aplicação bordo* se cada  $\Delta(\pi', \pi)$  tem grau -1 e  $\Delta(I)^2 = 0$ .

Se  $\Delta(P)$  é uma aplicação bordo triangular superior, então sua restrição  $\Delta(I)$  também é, para qualquer intervalo  $I$ . De fato, é claro que  $\Delta(I)$  é triangular superior e de grau -1. Além disso, dado  $I \subset P$ , considere os intervalos  $J$  e  $K$  tais que  $J \cup I \cup K = P$  e  $(I, J, K)$  é uma tripla de intervalos. Logo, podemos decompor  $\Delta$  como

$$\Delta(P) = \begin{pmatrix} \Delta(J) & \Delta(I, J) & \Delta(K, J) \\ 0 & \Delta(I) & \Delta(K, I) \\ 0 & 0 & \Delta(K) \end{pmatrix}$$

Na equação  $\Delta(P)^2 = 0$  a composição da linha do meio com a coluna do meio nos dá  $\Delta(I)^2 = 0$ . Logo, dado  $I \in I(<)$ ,  $(C\Delta(I), \Delta(I))$  é um complexo de cadeias. Denotamos por  $H\Delta(I)$  a homologia desse complexo.

Assim, dados  $I, J \in I_2(<)$  com a inclusão e a projeção óbvias temos uma seqüência exata curta de complexos de cadeia

$$0 \longrightarrow C\Delta(I) \xrightarrow{i(I, IJ)} C\Delta(IJ) \xrightarrow{p(IJ, J)} C\Delta(J) \longrightarrow 0$$

onde  $i$  é a inclusão e  $p$  é a projeção.

**Proposição 1.6.7.** *As aplicações  $i(I, IJ)$  e  $p(IJ, J)$  são aplicações de cadeias.*

**Demonstração:** Podemos considerar  $i$  e  $p$  como sendo da forma

$$i = \begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix} : C\Delta(I) \rightarrow \begin{pmatrix} C\Delta(I) \\ C\Delta(J) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta(I) & \Delta(J, I) \\ 0 & \Delta(J) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} C\Delta(I) \\ C\Delta(J) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} C\Delta(I) \\ C\Delta(J) \end{pmatrix}$$

Fazendo tais identificações temos  $i\Delta(I) = \Delta(IJ)i$  e portanto  $i$  é um aplicação de cadeias. A demonstração para  $p$  é análoga. ■

**Proposição 1.6.8.** *Dada uma aplicação bordo triangular superior*

$$\Delta(P) : \bigoplus_{\pi \in P} H(c(M_\pi)) \rightarrow \bigoplus_{\pi \in P} H(c(M_\pi))$$

a coleção de complexos  $(C\Delta(I), \Delta(I))$ ,  $I \in I(<)$  e as aplicações de cadeias  $i(I, IJ)$  e  $p(IJ, J)$  para  $(I, J) \in I_2(<)$  é um uma trança de complexos de cadeias.

Passando para a homologia obtemos então uma trança de módulos graduados

$$\dots \longrightarrow H\Delta(I) \xrightarrow{i} H\Delta(IJ) \xrightarrow{p} H\Delta(J) \xrightarrow{\Delta(J, I)} H\Delta(I) \longrightarrow \dots$$

Uma pergunta natural é se existe uma aplicação bordo triangular superior  $\Delta(P)$  tal que  $H\Delta(P)$  seja isomorfo a  $H(c(M))$ .

**Definição 1.6.9.** Seja  $\mathcal{D}(M) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$  uma decomposição de Morse de  $M$  com ordem admissível  $<$  e seja  $\Delta = \Delta(P) : \bigoplus_{\pi \in P} H(c(M_\pi)) \rightarrow \bigoplus_{\pi \in P} H(c(M_\pi))$  tal que

- (1)  $\Delta$  é uma aplicação bordo triangular superior.
- (2) Para cada intervalo  $I \subset P$  existe um homomorfismo  $\Phi(I) : H\Delta(I) \rightarrow H(c(M_I))$  satisfazendo as seguintes condições:

- Dado  $\pi \in P$ ,  $\Phi(\pi) : H\Delta(\pi) = H(c(M_\pi)) \rightarrow H(c(M_\pi))$  é a identidade;
- para cada  $(I, J) \in I_2(<)$  o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H\Delta(I) & \xrightarrow{i} & H\Delta(IJ) & \xrightarrow{p} & H\Delta(J) & \xrightarrow{\Delta(J, I)} & H\Delta(I) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \Phi(I) & & \downarrow \Phi(IJ) & & \downarrow \Phi(J) & & \downarrow \Phi(I) & & \\ \dots & \longrightarrow & H(c(M_I)) & \xrightarrow{i} & H(c(M_{IJ})) & \xrightarrow{p} & H(c(M_J)) & \xrightarrow{\partial(J, I)} & H(c(M_I)) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Então  $\Delta$  é chamada matriz de conexão de  $\mathcal{D}(M)$ . Denotamos as matrizes de conexão por  $(\mathcal{CM}(\mathcal{D}(M), <))$ .

Por indução e pelo Five Lemma segue que para todo intervalo  $I$  as aplicações  $\Phi(I) : H\Delta(I) \rightarrow H(c(M_I))$  que fazem o diagrama comutar, são isomorfismos. A condição (2) diz que se  $J = \pi'$  e  $I = \pi$  então  $\Delta(\pi', \pi) = \partial(\pi', \pi)$ , isto é, as entradas da matriz de conexão cujas colunas e linhas correspondem a conjuntos de Morse adjacentes são aplicações bordo definidas pelo fluxo.

Note que a diagonal da matriz de conexão é zero. Além disso, a matriz de conexão é triangular superior, já que não há órbitas conectantes de um conjunto de Morse para um outro que esteja mais alto na ordem do fluxo.

As entradas correspondentes a conjuntos adjacentes são calculadas pela seqüência exata em homologia. As outras entradas podem ser calculadas construindo seqüências exatas de triplas escolhidas apropriadamente. Mais especificamente, a informação usada para definir  $\Delta(\pi', \pi)$  é a informação produzida pelas aplicações bordo  $\partial(J, I)$  definidas pelo fluxo satisfazendo  $\pi' \in J$  e  $\pi \in I$ . Não trataremos deste problema em detalhes neste trabalho.

O Exemplo clássico 1.6.10 está em [Fr1] é uma ilustração simples da construção destas matrizes de conexão.

**Exemplo 1.6.10.** Voltemos ao Exemplo 1.5.2. Consideremos o caso  $\lambda = \lambda^*$ . Lembremos que, qualitativamente, o fluxo pode ser representado como na Figura 1.4. O conjunto  $S_{\lambda^*}$  consiste de 3 singularidades juntamente com as órbitas que conectam as mesmas. A Figura 1.5 ilustra uma filtração-índice para essa ordem admissível.

O índice de Conley de cada um dos conjuntos de Morse é calculado escolhendo-se um par-índice apropriado da filtração-índice. Temos que

- $H_0(c(M_1)) = \mathbb{Z}$  ,  $H_1(c(M_1)) = 0$ ,
- $H_0(c(M_2)) = 0$  ,  $H_1(c(M_2)) = \mathbb{Z}$ ,
- $H_0(c(M_3)) = 0$  ,  $H_1(c(M_3)) = \mathbb{Z}$ ,

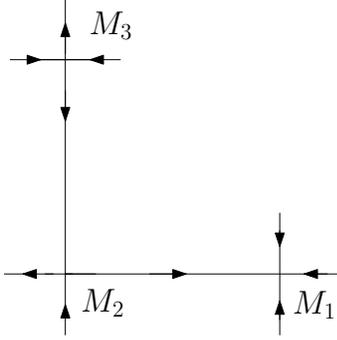


Figura 1.4: Representação qualitativa de  $S_{\lambda^*}$ .

- $H_0(c(M_{12})) = H_1(c(M_{12})) = 0$ ,
- $H_0(c(M_{23})) = 0$ ,  $H_1(c(M_{23})) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ,
- $H_0(c(M_{123})) = 0$ ,  $H_1(c(M_{123})) = \mathbb{Z}$ ,

A ordem do fluxo é  $1 <_{\varphi} 2$ ,  $1 <_{\varphi} 3$  e  $2 <_{\varphi} 3$ .

Definamos a matriz de conexão. Como  $\Delta$  é triangular superior, então  $\Delta(j, i) = 0$  se  $j < i$  ou  $j = i$ . Note que os pares de intervalos  $(1, 2)$  e  $(2, 3)$  são adjacentes. Logo, as aplicações  $\Delta(2, 1)$  e  $\Delta(3, 2)$  são definidas pelo fluxo, ou seja  $\Delta(2, 1) = \partial(2, 1)$  e  $\Delta(3, 2) = \partial(3, 2)$ . Temos

$$0 \longrightarrow H_1(c(M_{12})) \xrightarrow{p} H_1(c(M_2)) \xrightarrow{\partial(2,1)} H_0(c(M_1)) \xrightarrow{i} H_0(c(M_{12}))^p \longrightarrow 0$$

que é equivalente a

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial(2,1)} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Logo  $\Delta(2, 1)$  é um isomorfismo. Ainda,

$$0 \longrightarrow H_1(c(M_3)) \longrightarrow H_1(c(M_{23})) \longrightarrow H_1(c(M_3)) \xrightarrow{\partial(3,2)} H_0(c(M_2)) \longrightarrow 0$$

que é equivalente a

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial(3,2)} 0$$

Portanto  $\Delta(3, 2) = 0$ . A aplicação  $\Delta(3, 1)$  não está definida pelo fluxo. Como  $H_1(c(M_{123}))$

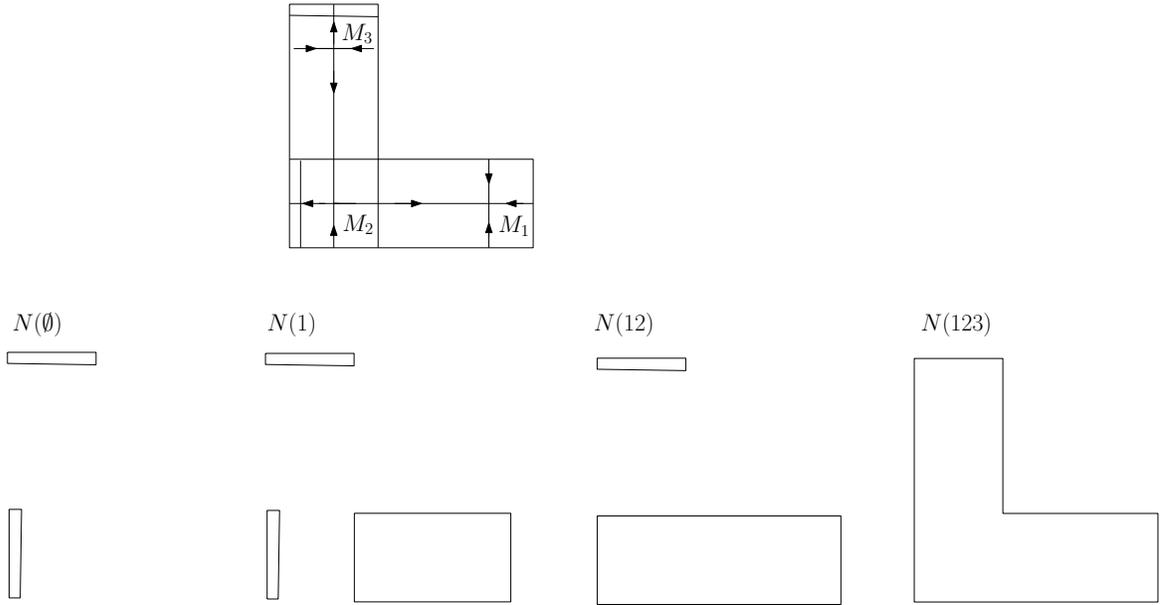


Figura 1.5: Filtração-índice.

tem dimensão 1 então o posto de  $\Delta$  é 1. Neste exemplo,  $\Delta^2 = 0$  e posto de  $\Delta = 1$  não ajudam a determinar  $a$ . Veja 1.6. Vamos então considerar as seqüências de triplas de intervalos.

Primeiramente, consideremos o complexo  $(C\Delta(23), \Delta(23)) = (H(c(M_2)) \oplus H(c(M_3)), \Delta(23))$  onde

$$\Delta(23) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(3,2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é a aplicação trivial. Então  $H\Delta(23) = H(c(M_2)) \oplus H(c(M_3))$ . Se  $\Delta$  é uma matriz de conex-

$$\Delta = \begin{matrix} & \begin{matrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_0 & M_1 \\ F_1 & M_2 \\ F_2 & M_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \approx & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Figura 1.6: Matriz de conexão de  $S_{\lambda^*}$ .

xãõ então devemos ter o isomorfismo  $\phi(23) : H(c(M_2)) \oplus H(c(M_3)) \rightarrow H(c(M_{23}))$  tal que o diagrama (1.6) comuta

$$\begin{array}{ccc}
H(c(M_2)) \oplus H(c(M_3)) & & H(c(M_3)) \\
\parallel & & \parallel \\
H\Delta(23) & \xrightarrow{p} & H\Delta(3) \\
\downarrow_{\phi(23)} & & \downarrow_{id} \\
H(c(M_{23})) & \xrightarrow{p} & H(c(M_3))
\end{array} \tag{1.6}$$

Consideremos agora o complexo  $C\Delta(123) = H(c(M_1)) \oplus H(c(M_2)) \oplus H(c(M_3))$  com aplicação bordo  $\Delta$ . Como  $\Delta$  é matriz de conexão então a seqüência exata curta de complexo de cadeias

$$0 \longrightarrow C\Delta(1) \xrightarrow{i} C\Delta(123) \xrightarrow{p} C\Delta(23) \longrightarrow 0$$

que é equivalente a

$$0 \longrightarrow H(c(M_1)) \longrightarrow H(c(M_1)) \oplus H(c(M_2)) \oplus H(c(M_3)) \longrightarrow H(c(M_3)) \oplus H(c(M_2)) \longrightarrow 0$$

induz uma seqüência exata em homologia

$$0 \longrightarrow H\Delta(1) \xrightarrow{i} H\Delta(123) \xrightarrow{p} H\Delta(23) \xrightarrow{\bar{\Delta}} H\Delta(1) \longrightarrow 0$$

onde  $H\Delta(1) = H(c(M_1))$ ,  $H\Delta(23) = H(c(M_2)) \oplus H(c(M_3))$ . Logo,

$$\bar{\Delta} = \Delta(2,1) + \Delta(3,1) : H(c(M_2)) \oplus H(c(M_3)) \rightarrow H(c(M_1))$$

e como  $\Delta$  é matriz de conexão o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc}
H(c(M_2)) \oplus H(c(M_3)) & \xrightarrow{\Delta(2,1) + \Delta(3,1)} & H(c(M_1)) \\
\parallel & & \parallel \\
H\Delta(23) & \xrightarrow{\bar{\Delta}} & H\Delta(1) \\
\downarrow_{\phi(23)} & & \downarrow_{id} \\
H(c(M_{23})) & \xrightarrow{\partial(23,1)} & H(c(M_1))
\end{array} \tag{1.7}$$

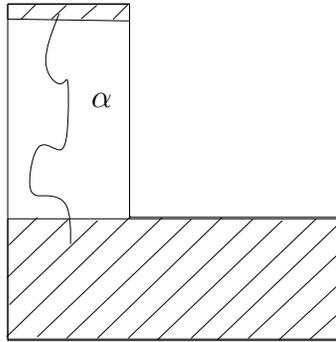


Figura 1.7: Gerador de  $H(c(M_3))$ .

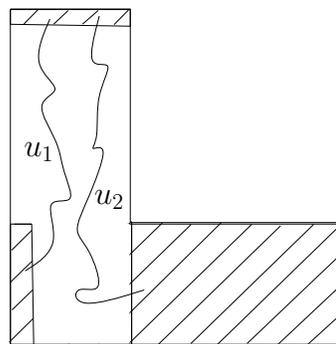


Figura 1.8: Imagem do gerador de  $H(c(M_3))$  por  $\phi(23)$ .

Vamos agora definir  $\Delta(3, 1)$ . Um par-índice para  $M_3$  é  $(N(123), N(12))$ . Tomemos  $\alpha$  um gerador de  $H(c(M_3))$ . Veja Figura 1.7. Para fazer o diagrama 1.6 comutar é necessário que  $p \circ \phi(23)(\alpha) = id \circ p(\alpha)$ , ou seja,  $p \circ \phi(23)(\alpha) = \alpha$ . A Figura 1.9 facilita a visualização do diagrama 1.6. Observando 1.9 vemos que existem duas escolhas possíveis para  $\phi(23)(\alpha)$  em  $H(c(M_{23}))$  que são  $u_1$  e  $u_2$ . Agora veja Figura 1.8. Como o diagrama 1.7 é comutativo, então  $\Delta(3, 1)(\alpha) = \bar{\Delta} \circ \phi(23)(\alpha)$ . A Figura 1.10 facilita a visualização do diagrama 1.7. Se  $\phi(23)(\alpha) = u_1$  então  $\Delta(3, 1) = 0$ . Se  $\phi(23)(\alpha) = u_2$  então  $\Delta(3, 1)(\alpha)$  é um gerador de  $H(c(M_1))$  e, portanto  $\Delta(3, 1)$  é um isomorfismo. Portanto existem duas matrizes de conexão para esta decomposição de Morse.

Como todos os  $\mathbb{Z}$ -módulos são graduados, então podemos pensar numa seqüência de matrizes  $\Delta_k$  que levam a homologia de grau  $k$  na homologia de grau  $k - 1$ . Frequentemente os módulos  $H(M_\pi)$  têm dimensão 1 em algum grau e 0 nos outros graus. Neste caso as aplicações

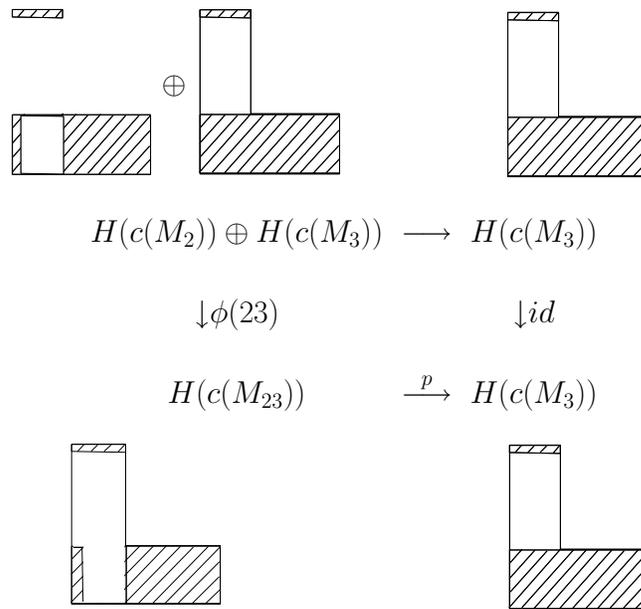


Figura 1.9: Esquema para visualização de (1.6).

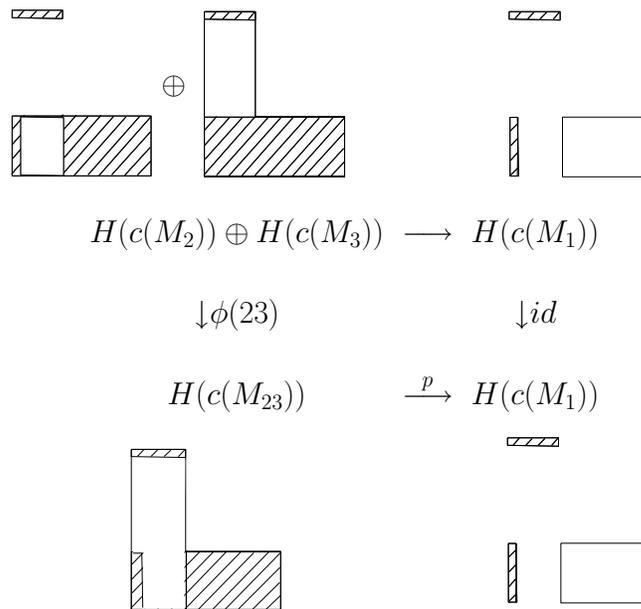


Figura 1.10: Esquema para visualização de (1.7).

$\Delta(\pi', \pi)$  podem ser vistas como números inteiros e  $\Delta$  é apenas uma matriz numérica no sentido usual.

Seja  $\mathcal{CM}(\mathcal{D}(M), <)$  o conjunto das matrizes de conexão com a ordem parcial  $<$ . A ordem que estamos interessados é a ordem definida pelo fluxo  $<_\varphi$ . As outras ordens são importante na teoria de continuação para matrizes de conexão. Ver [Fr2], [Fr4], [R1].

Franzosa mostra em [Fr3] a existência das matrizes de conexão.

**Teorema 1.6.11.** *Seja  $(\mathcal{D}(M), <)$  uma decomposição de Morse em  $M$ . Então*

$$\mathcal{CM}(\mathcal{D}(M), <) \neq \emptyset.$$

A matriz produz informações sobre a estrutura de  $M$  (ver [Fr3]).

**Proposição 1.6.12.** *Se  $\Delta \in \mathcal{CM}(\mathcal{D}(M), <_\varphi)$ ,  $\pi$  e  $\pi'$  são adjacentes na ordem do fluxo, e  $\Delta(\pi', \pi) \neq 0$ , então  $C(M_{\pi'}, M_\pi) \neq \emptyset$ .*

**Demonstração:**  $\Delta(\pi', \pi) \neq 0$  implica  $\pi <_\varphi \pi'$ . Segue da definição de ordem do fluxo que existe uma seqüência de elementos distintos  $P : \pi = \pi_0, \dots, \pi_n = \pi'$  com  $C(M_{\pi_j}, M_{\pi_{j-1}}) \neq \emptyset$  para cada  $j = 1, \dots, n$ . Como  $\pi$  e  $\pi'$  são adjacentes na ordem do fluxo então  $n = 1$ , ou seja,  $C(M_\pi, M_{\pi'}) \neq \emptyset$ . ■

**Observação 1.6.13.** Suponha que para alguma matriz de conexão em  $\mathcal{CM}(\mathcal{D}(M), <_\varphi)$  a composição  $\Delta(\pi', \pi)\Delta(\pi'', \pi')$  é não trivial e que  $\pi$  e  $\pi'$  bem como  $\pi'$  e  $\pi''$  são adjacentes na ordem do fluxo. Pela Proposição 1.6.12 ambos  $C(M_{\pi''}, M_{\pi'})$  e  $C(M_{\pi'}, M_\pi)$  são não vazios. Além disso, se  $\Pi := \{\pi, \pi', \pi''\}$ , então  $\Delta(\Pi)^2 \neq 0$ . Segue que  $\Pi$  não é um intervalo na ordem do fluxo. Portanto mais estrutura está presente. Isto implica que  $C(M_{\pi''}, M_\pi) \neq \emptyset$  e, além disso que existe um intervalo  $I$  na ordem do fluxo tal que  $\pi \notin I$  e ambos  $C(M_{\pi''}, M_I)$  e  $C(M_I, M_\pi)$  são não vazios.

Algumas decomposições de Morse têm várias matrizes de conexão. Se a ordem parcial de uma decomposição é fraca, então existe um grande número de pares adjacentes e de intervalos. Por outro lado, se a ordem parcial é muito forte, existirão mais matrizes de conexão devido a

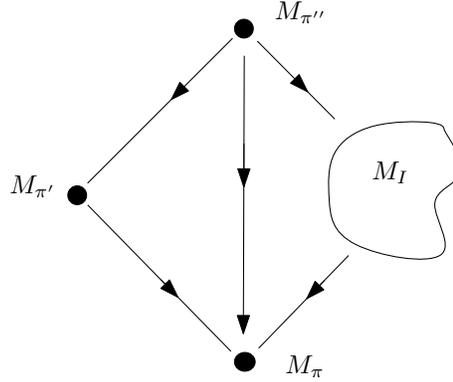


Figura 1.11:  $\Delta(\Pi)^2 \neq 0$  implica que  $\Pi$  não é um intervalo.

falta de conhecimento da ordem do fluxo. Portanto, a não unicidade da matriz de conexão está algumas vezes ligada ao uso de uma ordem parcial muito forte. No entanto, mesmo usando a ordem do fluxo, podem existir várias matrizes de conexão. Isto pode ser uma consequência da ocorrência de conexões instáveis entre os conjuntos de Morse, veja Exemplo 1.5.2.

No caso de uma decomposição de Morse com a ordem do fluxo tal que os conjuntos de Morse são singularidades hiperbólicas com variedades estáveis e instáveis transversais, Reineck mostrou em [R1] que a matriz de conexão é única.

**Teorema 1.6.14** (Reineck). *Suponha que  $W^s(M_{\pi})$  e  $W^u(M_{\pi'})$  se interceptam transversalmente para  $\pi, \pi' \in P$ . Então a matriz de conexão  $\Delta$  considerando-se a ordem parcial determinada pelo fluxo é única.*

**Demonstração:** Sejam  $\pi$  e  $\pi' \in P$  tais que  $\pi <_{\varphi} \pi'$ .

Suponhamos primeiramente que  $\pi$  e  $\pi'$  são adjacentes em  $P$ . Então a aplicação  $\Delta(M_{\pi}, M_{\pi'})$  é definida pela seqüência

$$\cdots \longrightarrow H_q(c(M_{\pi} \cup C(M_{\pi}, M_{\pi'}) \cup M_{\pi'})) \longrightarrow H_q(c(M_{\pi'})) \longrightarrow H_{q-1}(c(M_{\pi})) \longrightarrow \cdots$$

e, portanto, é única.

Suponhamos agora que  $\pi$  e  $\pi'$  não são adjacentes e mostremos que  $\Delta(M_{\pi}, M_{\pi'}) = 0$ . Como  $\pi$  e  $\pi'$  não são adjacentes então existe  $\pi''$ , com  $\pi' <_{\varphi} \pi'' <_{\varphi} \pi$ . Sejam  $i, j$  e  $k$  tais que  $c(M_{\pi}) = \Sigma^i$ ,

$c(M_{\pi''}) = \Sigma^j$  e  $c(M_{\pi'}) = \Sigma^k$ . Como  $\pi' <_{\varphi} \pi''$  e  $W^s(M_{\pi'})$  intercepta  $W^u(M_{\pi''})$  transversalmente temos que  $i < j$ , ou seja,  $i \leq j - 1$ . Analogamente,  $j \leq k - 1$ , então  $i \leq k - 2$ . A aplicação  $\Delta(M_{\pi}, M_{\pi'})$  é uma aplicação de grau  $-1$  de  $H_*(\Sigma^k, pt)$  em  $H_*(\Sigma^i, pt)$  onde  $i \leq k - 2$ . A única aplicação possível é  $\Delta(M_{\pi}, M_{\pi'}) = 0$ .

Assim, cada aplicação  $\Delta$  é ou zero ou definida unicamente pelo fluxo. ■

### 1.6.3 Matriz de Conexão em fluxos de Morse

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta suave de dimensão  $n$  e  $\varphi$  o fluxo gradiente de uma função de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . As referências para esta seção são [F2], [M2] e [Sa1]. É claro que  $f$  decresce nas órbitas de  $\varphi$  e as singularidades de  $\varphi$  são os pontos críticos de  $f$ . Como  $f$  é de Morse, então todas as singularidades de  $\varphi$  são hiperbólicas, ou seja, a Hessiana de  $f$  é não singular em todos os pontos críticos de  $f$ . Dado  $x$  uma singularidade hiperbólica em  $M$ , sejam  $W^s(x) = \{y \in M \mid \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi^s(y) = x\}$  e  $W^u(x) = \{y \in M \mid \lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi^s(y) = x\}$  as variedades estável e instável de  $x$ . Como  $f$  é de Morse, as variedades estável e instável são transversais e a imagem por  $f$  de quaisquer duas singularidades distintas é também distinta.

Se  $x \in M$  é uma singularidade hiperbólica então sabemos que existem coordenadas locais  $(a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_{n-k})$  numa vizinhança de  $x$  tais que

$$f(a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_{n-k}) = f(x) - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_k^2 + b_1^2 + b_2^2 \dots + b_{n-k}^2$$

O inteiro  $k$  é chamado de *índice de Morse de  $x$*  e coincide com a dimensão de  $W^u(x)$ . Denotemos por  $\text{ind}(x)$  o índice de Morse de  $x$ .

Seja  $\mathcal{D}(M) = \{M_{\pi}\}_{\pi \in P}$  uma decomposição de Morse  $<$ -ordenada de  $M$  tal que cada  $M_{\pi}$  é uma singularidade hiperbólica de  $\varphi$ .

Então o índice de Conley de cada conjunto é o tipo de homotopia de uma esfera pontuada  $\Sigma^k$ , onde  $k$  é a dimensão da variedade instável de  $x$ .

Vamos agora fazer uma construção que foi formalizada por Floer no caso gradiente, mas que já estava implícita em teoria de Morse. Para mais detalhes ver [Sa2] e [M1]. Primeiramente, escolhemos uma orientação para o espaço vetorial  $E^u(x) = T_x W^u(x)$  para todo ponto crítico

de  $f$  e denotamos por  $\langle x \rangle$  o par consistindo de um ponto crítico  $x$  e sua orientação. Para todo  $k = 0, 1, \dots, n$  denotamos

$$C_k = \bigoplus_x \mathbb{Z}\langle x \rangle$$

onde  $x$  varia entre todos os pontos críticos de índice  $k$ . Como  $f$  é uma função de Morse, então  $W^u(x) \cap W^s(y)$  tem dimensão 1 e consiste de um número finito de órbitas se  $\text{ind}(x) - \text{ind}(y) = 1$ . Neste caso, podemos definir um inteiro  $n(x, y)$  associando um número  $+1$  ou  $-1$  a todas as órbitas conectantes e considerando a soma. Seja  $\gamma(s)$  uma órbita conectante com  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \gamma(s) = x$  e  $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = y$ . Então  $\langle x \rangle$  induz uma orientação no complementar ortogonal  $E_\gamma^u(x)$  de  $v = \lim_{s \rightarrow -\infty} \dot{\gamma}(s) |\dot{\gamma}(s)|^{-1}$  em  $E^u(x)$ . No caso em que  $\text{ind}(x) = k$  e  $\text{ind}(y) = k - 1$ , o fluxo tangente induz um isomorfismo entre  $E_\gamma^u(x)$  e  $E^u(y)$  e definimos  $n_\gamma$  como sendo  $+1$  ou  $-1$  de acordo com o fato de o isomorfismo preservar a orientação ou reverter a orientação respectivamente. Definimos então

$$n(x, y) = \sum_\gamma n_\gamma$$

onde a soma varia entre todas as órbitas de  $\varphi$  que conectam  $x$  a  $y$ . Então o operador bordo  $\partial_k^c : C_k \rightarrow C_{k-1}$  do complexo de cadeias, conhecido como operador bordo de Witten, é definido como

$$\partial^c \langle x \rangle = \sum_y n(x, y) \langle y \rangle$$

onde a soma varia sobre todas as singularidades de índice  $k - 1$ .

Denotemos este complexo de cadeias graduado de Morse por

$$(\mathbb{Z}\langle \text{crit } f \rangle, \partial^c)$$

**Teorema 1.6.15** (R.Thom, S. Smale, J. Milnor, C. Conley, E. Witten).  $\partial_k^c \circ \partial_{k+1}^c = 0$  e o módulo de homologia  $H(C) = \text{Ker} \partial_k^c / \text{Im} \partial_{k+1}^c$  é isomorfo ao módulo de homologia do índice de Conley  $H(c(M))$ .

Mostremos agora que o operador bordo de Witten  $\partial^c$  representa um caso especial de matriz de conexão. Uma consequência deste fato é que o Teorema 1.6.15 segue dos trabalhos de Franzosa [Fr1], [Fr3] e [Mo].

Se  $M$  é uma variedade orientada então o conjunto de nível

$$M_c = \{x \in M \mid f(x) = c\}$$

é uma subvariedade de  $M$  para todo valor regular  $c$ . Mais precisamente, uma base  $\xi_2, \dots, \xi_n$  de  $T_x M_c$  é positivamente orientada se  $-\nabla f(x), \xi_2, \dots, \xi_n$  define uma base positiva para  $T_x M$ . Além disso, a orientação  $\langle x \rangle$  de  $E^u(x) = T_x W^u(x)$  induz uma orientação em  $E^s(x) = T_x W^s(x)$ , pois  $T_x M = E^u(x) \oplus E^s(x)$ . Segue que a esfera  $W_c^u(x) = W^u(x) \cap M_c$  herda uma orientação de  $W^u(x)$  e a esfera  $W_c^s(y) = W^s(y) \cap M_c$  herda uma orientação de  $W^s(y)$ . O inteiro  $n(x, y)$  no operador bordo de Witten coincide com o número de intersecção de  $W_c^u(x)$  e  $W_c^s(y)$  em  $M_c$ .

Descrevemos então uma matriz de conexão para o caso de um fluxo Morse gradiente. Para cada ponto crítico  $x$  de  $f$ , seja  $(N_x, L_x)$  um par-índice para  $x$ . Se  $\text{ind}(x) = k$  então uma orientação de  $E^u(x) = T_x W^u(x)$  determina um gerador de  $H_k(N_x, L_x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ . Então o  $\mathbb{Z}$ -módulo  $C_k$  pode ser identificado com

$$C_k = \oplus_x H_k(N_x, L_x; \mathbb{Z})$$

onde a soma varia entre todos os pontos críticos de índice  $k$ .

Seguindo Floer definimos

$$M(x, y) = W^u(y) \cap W^s(x)$$

união das órbitas conectando  $x$  a  $y$ . Esse conjunto é uma subvariedade de  $M$  de dimensão  $\text{ind}(x) - \text{ind}(y)$  já que  $\varphi$  é Morse. Além disso, se  $\text{ind}(x) - \text{ind}(y) = 1$

$$S(x, y) = M(x, y) \cup \{x, y\}$$

é um conjunto invariante isolado. Seja  $(N_2, N_0)$  um par-índice para  $S(x, y)$  e definamos  $N_1 = N_0 \cup (N_2 \cap M_c)$ , onde  $f(y) < c < f(x)$ . Então  $(N_2, N_1)$  é um par-índice para  $x$  e  $(N_1, N_0)$  é um par-índice para  $y$ . Definamos o homomorfismo

$$\Delta_k(x, y) : H_k(N_x, L_x) \rightarrow H_{k-1}(N_y, L_y)$$

como sendo a composição

$$H_k(N_x, L_x) \longrightarrow H_k(N_2, N_1) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(N_1, N_0) \longrightarrow H_{k-1}(N_y, L_y)$$

onde o primeiro e o terceiro isomorfismos são induzidos pela equivalência de homotopia entre dois pares índices de um mesmo conjunto invariante isolado. Isto determina um homomorfismo

$$\Delta_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$$

que é um caso especial de matriz de conexão.

Mostremos que este operador coincide com o operador de Milnor e Witten.

**Lema 1.6.16.**  $\partial^c = \Delta$ .

**Demonstração:** Alterando a função  $f$  fora de uma vizinhança isolante de  $S(x, y)$ , podemos assumir que  $x$  e  $y$  são os únicos pontos críticos em  $f^{-1}(a, b)$ , onde  $a = f(y)$  e  $b = f(x)$ . Mais precisamente, seja  $\mathfrak{S}$  o conjunto de todos os pontos críticos  $z \neq x$  com  $\text{ind}(z) \geq \text{ind}(x)$  juntamente com suas órbitas conectantes. Então  $\mathfrak{S}$  é um repulsor e, portanto, existe uma função  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $N = g^{-1}([0, \infty))$  é uma vizinhança isolante para  $\mathfrak{S}$  e  $dg(z)\nabla f(z) > 0$  para  $z \in \partial N = g^{-1}(0)$ .

Seja  $\varepsilon$  suficientemente pequeno e  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  satisfazendo  $\rho(r) = 0$  para  $r \leq 0$  e  $\rho(r) = 1$  para  $r \geq \varepsilon$ . Definimos  $f_C : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_C(z) = f(z) + C\rho(g(z))$$

Então  $f_C$  tem os mesmos pontos críticos que  $f$  para todo valor positivo  $C$ . Tomando  $\varepsilon$  suficientemente pequeno podemos assumir que  $g(z) \geq \varepsilon$  para todo  $z \in \mathfrak{S}$  e portanto  $\rho(g(z)) = 1$ . Então dado  $z \in \mathfrak{S}$ , escolhemos  $C > b - \text{inf}(f)$  e então temos

$$f_C(z) = f(z) + C > f(z) + b - \text{inf}(f) > b$$

e, portanto,  $\mathfrak{S} \subset f_C^{-1}((b, \infty))$ . Um argumento análogo pode ser usado para singularidades  $z \neq y$  com  $\text{ind}(z) \leq \text{ind}(y)$ . Tais alterações não afetam os homomorfismos  $\partial_c$  e  $\Delta$ .

Dados  $a < c < b$ , um  $\varepsilon$  suficientemente pequeno e um  $T$  suficientemente grande, definimos:

$$N_x = \{z \in M \mid f(\varphi^{-T}(z)) \leq b + \varepsilon, f(z) \geq c\}$$

$$N_y = \{z \in M \mid f(\varphi^T(z)) \geq a - \varepsilon, f(z) \leq c\}$$

$$L_x = \{z \in N_x \mid f(z) = c\}$$

$$L_y = \{z \in N_y \mid f(\varphi^T(z)) = a - \varepsilon\}$$

Então um trio-índice para o par atrator-repulsor  $y, x$  no conjunto invariante isolado  $S(x, y)$  é dado por

$$N_2 = N_y \cup N_x, \quad N_1 = N_y \cup L_x, \quad N_0 = L_y \cup \overline{L_x \setminus N_y}$$

Note que  $N_x$  pode ser contraído para  $W^u(x) \cap \{f \geq c\}$  tomando  $T \rightarrow \infty$ . Da mesma forma  $N_y$  é uma vizinhança tubular de  $W^s(y) \cap \{f \leq c\}$  cuja largura converge a zero quando  $T \rightarrow \infty$ . Como  $W^u(x)$  e  $W^s(y)$  se intersectam transversalmente, então  $N_y \cap W^u(x) \cap \{f = c\}$  é constituído por finitas componentes  $V_1, \dots, V_m$ , cada uma contendo um único ponto  $z_j \in M(x, y) \cap V_j$ . Mais precisamente, seja  $D^{k-1}$  a bola fechada em  $\mathbb{R}^{k-1}$ . Existe um difeomorfismo

$$\psi_y : N_y \rightarrow D^{k-1} \times D^{n-k+1}$$

tal que

$$\psi_y(L_y) = \partial D^{k-1} \times D^{n-k+1}$$

$$\psi_y(W^s(y) \cap N_y) = \{0\} \times D^{n-k+1}$$

$$\psi_y(V_j) = D^{k-1} \times \{\theta_j\}$$

onde  $\theta_j \in \partial D^{n-k+1}$ . Em particular,  $V_j$  é uma  $k-1$  variedade com bordo  $W_j = V_j \cap L_y$ , difeomorfa a  $D^{k-1}$  via  $\psi_j = \pi_1 \circ \psi_y|_{V_j} : V_j \rightarrow D^{k-1}$ . A aplicação  $\pi_1 \circ \psi_y : N_y \rightarrow D^{k-1}$  induz um isomorfismo em homologia

$$H_{k-1}(N_y, L_y) \cong H_{k-1}(D^{k-1}, \partial D^{k-1}) \cong H_{k-1}(V_j, W_j)$$

A orientação dada em  $E^u(y)$  determina um gerador da homologia  $\alpha \in H_{k-1}(N_y, L_y) \cong \mathbb{Z}$  que, pelo isomorfismo acima é levado em  $\alpha_j \in H_{k-1}(V_j, W_j)$ . A classe de homologia de  $\alpha_j$

é determinada pela orientação de  $T_{z_j}V_j$  herdada pela orientação de  $E^u(y)$  via o isomorfismo definido pelo fluxo  $T_{z_j}V_j \rightarrow E^u(y)$  que pode ou não coincidir com aquela herdada de  $W^u(x)$  via a injeção

$$T_{z_j}V_j = T_{z_j}W^u(x) \cap \nabla f(z_j)^\perp \subset T_{z_j}W^u(x)$$

(tomando  $-\nabla f(z_j)$  como primeiro vetor da base). Assim, ambas as orientações coincidem se e somente se  $n_j = 1$ , onde  $n_j \in \{-1, +1\}$  é o sinal associado à órbita conectante  $\gamma_j(s) = \varphi^s(z_j)$ .

Escolhemos uma triangulação para as  $k-1$ -variedades  $V_j$  e estendemos a uma triangulação para a  $k$  variedade  $W^u(x) \cap \{f \geq c\}$  com bordo  $W^u(x) \cap \{f = c\}$ . Juntamente com a orientação de  $W^u(x)$ , isto determina um gerador

$$\beta_j \in H_k(W^u(x) \cap N_x, W^u(x) \cap L_x) \cong H_k(N_x, L_x)$$

A classe de homologia de  $\partial\beta_j \in H_{k-1}(W^u(x) \cap L_x, \overline{W^u(x) \cap L_x \setminus V_j}) \cong H_{k-1}(V_j, W_j)$  é representada pela triangulação original de  $V_j$  junto com a orientação herdada de  $W^u(x)$  e, portanto, coincide com  $n_j\alpha_j$ . Pelo isomorfismo  $H_{k-1}(N_y, L_y) \cong H_{k-1}(V_j, W_j)$  obtemos

$$\Delta\beta = \sum_{j=1}^m n_j\alpha = n(x, y)\alpha \in H_{k-1}(N_y, L_y).$$

■

Detalhes da demonstração do Teorema 1.6.15 bem como uma discussão sobre sua história se encontram em [Sa2].

**Demonstração:** [do Teorema 1.6.15] Para  $j \leq k$ , seja  $S_{kj}$  a união dos conjuntos  $M(x, y)$  de todos os pares de pontos críticos de  $f$  com  $j \leq \text{ind}(y) \leq \text{ind}(x) \leq k$ . Estes conjuntos são compactos, já que o fluxo gradiente é do tipo Morse-Smale.

Temos que o conjunto  $S_{kj}$  é um invariante isolado para  $j \leq k$ . Em particular,  $S_{n0} = M$  e  $S_{kk}$  são todos os pontos críticos de índice  $k$ . Então existe uma filtração-índice  $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n$  tal que  $N_n = M$  e  $(N_k, N_{j-1})$  é um par-índice para  $S_{kj}$  com  $j \leq k$  e  $N_{-1} = \emptyset$ .

Segue do Lema 1.6.16 temos que existe um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}^c} & C_k & \xrightarrow{\partial_k^c} & C_{k-1} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_{k+1}(N_{k+1}, N_k) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & H_k(N_k, N_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_k} & H_{k-1}(N_{k-1}, N_{k-2})
 \end{array}$$

onde os isomorfismos verticais são dados pela invariância do par-índice. Segue que

$$\partial_k^c \circ \partial_{k+1}^c = 0.$$

Como  $H_j(N_k, N_{k-1}) = 0$  para  $j \neq k$ , segue da seqüência exata em homologia que a aplicação induzida pela inclusão  $H_j(N_k) \rightarrow H_j(N_{k+1})$  é um isomorfismo para  $j \neq k, k+1$ . Isso mostra  $H_j(N_k) \rightarrow H_j(M)$  é um isomorfismo para  $j < k$  e  $H_j(N_k) = 0$  para  $j > k$ . A última igualdade mostra que no diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & H_k(N_k) & \longrightarrow & H_k(N_k, N_{k-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(N_{k-1}) \\
 & & & & \searrow \partial & & \downarrow \\
 & & & & & & H_{k-1}(N_{k-1}, N_{k-2})
 \end{array}$$

a seqüências horizontais e verticais são exatas. Em particular o homomorfismo  $H_{k-1}(N_{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(N_{k-1}, N_{k-2})$  é injetivo e, portanto, o núcleo dos homomorfismos bordo coincidem. Estes são isomorfos a ambos  $H_k(N_k)$  e  $\text{Ker } \partial_k^c \subset C_k$ . Concluimos que a seqüência exata em homologia

$$0 \longrightarrow H_{k+1}(N_{k+1}, N_k) \xrightarrow{\partial_{k+1}^c} H_k(N_k) \longrightarrow H_k(N_{k+1}) \longrightarrow 0$$

é isomorfa à seqüência exata

$$0 \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}^c} \text{Ker } \partial_{k+1}^c \longrightarrow H_k(M) \longrightarrow 0$$

e portanto  $H_k(M) \approx \frac{\text{Ker } \partial_k^c}{\text{Im } \partial_{k+1}^c}$ .

■

Note que o Teorema vale se  $\mathbb{Z}$  é substituído por qualquer grupo  $G$ .

## 1.7 Seqüências Espectrais

Leray introduziu em 1946 as seqüências espectrais como uma técnica computacional para o estudo de propriedades de homologia e cohomologia. Esta ferramenta passou a ter muitas outras aplicações na topologia algébrica e, posteriormente, na teoria de Morse e na teoria de Floer. Uma seqüência espectral é uma seqüência de complexos de cadeia tal que cada um dos quais é o módulo de homologia do anterior. Existe um módulo limite associado e a seqüência espectral é vista como uma seqüência de aproximações para este módulo limite. As referências para esta seção são [B], [D] e [Sp].

### 1.7.1 Definição e propriedades básicas

Um módulo bigraduado  $E^r$  sobre um domínio de ideais principais  $R$  é uma coleção indexada de  $R$ -módulos  $E_{p,q}^r$  para todo par de inteiros  $p$  e  $q$ . Uma diferencial  $d^r$  de bi-grau  $(-r, r-1)$  é uma coleção de homomorfismos  $d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$  para todo  $p$  e  $q$ , tal que  $(d^r)^2 = 0$ . O módulo de homologia  $H(E^r)$  é um módulo bigraduado definido por

$$H_{p,q}(E^r) = \frac{\text{Ker}d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r}{\text{Im}d^r : E_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r}$$

Notemos que  $d$  define um homomorfismo

$$\partial : \bigoplus_{p+q=k} E_{p,q} \rightarrow \bigoplus_{p+q=k-1} E_{p,q}$$

tal que  $\{\bigoplus_{p+q=k} E_{p,q}, \partial\}$  é um complexo de cadeias. Além disso, o  $k$ -ésimo módulo de homologia desse complexo de cadeias é igual a  $\bigoplus_{p+q=k} H_{p,q}(E)$ .

**Definição 1.7.1.** Uma *seqüência espectral*  $\{E^r, d^r\}$ ,  $r \geq 0$ , é uma seqüência de complexos de cadeia onde cada complexo  $E^r$  é o módulo de homologia do anterior, ou seja,

1.  $E^r$  é um módulo bigraduado e  $d^r$  é uma diferencial de bi-grau  $(-r, r-1)$  em  $E^r$ ;
2. Para  $r \geq 0$  existe um isomorfismo  $H(E^r) \approx E^{r+1}$ .



objetos um espaço para baixo. Quando  $r$  é um, a diferencial move objetos um espaço para esquerda, semelhante à diferencial em um complexo de cadeias. Quando  $r$  é dois, a diferencial move objetos assim como o cavalo se move no xadrez. Para  $r$  maior, a diferencial age como movimento de cavalos generalizados.

Observemos que se  $E_{p,q}^r = 0$  para algum par fixado  $(p, q)$  então  $E_{p,q}^{r+\xi} = 0$  para todo  $\xi \geq 0$ .

Um *homomorfismo*  $\psi : E \rightarrow E'$  de uma seqüência espectral  $E$  para uma  $E'$  é uma coleção de homomorfismos  $\psi^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p,q}^{r'}$  para todos os  $p$  e  $q$  que comutam com as diferenciais e tal que  $\psi_*^r : H(E^r) \rightarrow H(E'^r)$  corresponde a  $\psi^{r+1} : E^{r+1} \rightarrow E'^{r+1}$  pelos isomorfismos  $H(E^r) \approx E^{r+1}$  da seqüência espectral.

Para definir o termo *limite* de uma seqüência espectral, seja  $Z^0$  o módulo bigraduado  $Z_{p,q}^0 = \text{Ker } d_{p,q}^0 : E_{p,q}^0 \rightarrow E_{p,q-1}^0$  e  $B^0$  o módulo bigraduado  $B_{p,q}^0 = \text{Im } d_{p,q+1}^0 : E_{p,q+1}^0 \rightarrow E_{p,q}^0$ . Então  $B^0 \subset Z^0$  e  $E^1 = Z^0/B^0$ . Sejam  $Z(E^1)_{p,q} = \text{Ker } d_{p,q}^1 : E_{p,q}^1 \rightarrow E_{p-1,q}^1$  e  $B(E^1)_{p,q} = \text{Im } d_{p+1,q}^1 : E_{p+1,q}^1 \rightarrow E_{p,q}^1$ . Pelo Teorema do isomorfismo de Noether, existem submódulos bigraduados  $Z^1$  e  $B^1$  de  $Z^0$  contendo  $B^0$  tais que  $Z(E^1)_{p,q} = Z_{p,q}^1/B_{p,q}^0$  e  $B(E^1)_{p,q} = B_{p,q}^1/B_{p,q}^0$  para todo  $p$  e  $q$ . Segue que  $B^1 \subset Z^1$  e temos

$$B^0 \subset B^1 \subset Z^1 \subset Z^0$$

Utilizando o mesmo raciocínio e continuando por indução obtemos submódulos

$$B^0 \subset B^1 \subset \dots \subset B^r \subset \dots \subset Z^r \subset \dots \subset Z^1 \subset Z^0$$

tais que  $E^{r+1} = Z^r/B^r$ . Definimos então os módulos bigraduados  $Z^\infty = \bigcap_r Z^r$ ,  $B^\infty = \bigcup_r B^r$  e  $E^\infty = Z^\infty/B^\infty$ . O módulo bigraduado  $E^\infty$  é chamado de limite da seqüência espectral  $\{E^r, d^r\}$  e os termos  $E^r$  da seqüência espectral são aproximações sucessivas de  $E^\infty$ .

Uma seqüência espectral é *convergente* se dados  $p$  e  $q$  existe um inteiro  $r(p, q) \geq 0$  tal que para  $r \geq r(p, q)$ ,  $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$  é trivial.

Uma seqüência espectral é *fortemente convergente* se dados  $p$  e  $q$  existe  $r(p, q) \geq 0$  tal que  $E_{p,q}^r \approx E_{p,q}^\infty$  para todo  $r \geq r(p, q)$ . Por exemplo, se  $\{E^r, d^r\}$  tem a propriedade de que para algum  $r$  existem inteiros  $N$  e  $N'$  tais que  $E_{p,q}^r = 0$  para  $p < N$  ou  $q < N'$ , então a seqüência

espectral é fortemente convergente. De fato, se  $E_{p,q}^r = 0$  para  $p < N$  ou  $q < N'$  então  $E_{p,q}^{r'} = 0$  para todo  $r' > r$ . Então, dados  $p$  e  $q$ , escolhamos  $r'$  tal que  $r' > \sup(p - N, q - N' + 1)$ . Assim temos

$$E_{p+r',q-r'+1}^{r'} \xrightarrow{d^{r'}} E_{p,q}^{r'} \xrightarrow{d^{r'}} E_{p-r',q+r'-1}^{r'}$$

onde o primeiro módulo é igual a zero, pois  $q - r' + 1 > N'$  e o último módulo é igual a zero pois  $p - r' < N$ . Portanto

$$E_{p,q}^{r'} \approx E_{p,q}^{r'+1} \approx \dots \approx E_{p,q}^\infty.$$

### 1.7.2 Seqüência Espectral num complexo de cadeias filtrado

Seja  $R$  um domínio de ideais principais.

**Definição 1.7.2.** Uma *filtração crescente*  $F$  em um  $R$ -módulo  $A$  é uma seqüência de submódulos  $F_p A$  para todos os inteiros  $p$  tal que  $F_p A \subset F_{p+1} A$ . Se  $A$  é um módulo graduado, ou seja,  $A = \{A_q\}$  é uma coleção de  $R$ -módulos indexada por inteiros, a filtração deve ser compatível com a graduação, ou seja,  $F_p A$  é graduado por  $\{F_p A_q\}$ .

Dada uma filtração  $F$  em  $A$ , o *módulo graduado associado*  $G(A)$  é definido por

$$G(A)_p = \frac{F_p A}{F_{p-1} A}$$

Se  $A$  é um módulo graduado, o módulo associado  $G(A)$  é um módulo bigraduado

$$G(A)_{p,q} = \frac{F_p A_{p+q}}{F_{p-1} A_{p+q}}$$

A filtração  $F$  é *convergente* se  $\cap_p F_p A = 0$  e  $\cup_p F_p A = A$ . A filtração  $F$  é *finita* se  $F_p A = 0$  para algum  $p$  e  $F_{p'} A = A$  para algum  $p'$ . É claro que toda filtração finita é convergente. Nas filtrações convergentes, o módulo graduado associado  $G(A)$  está mais amarrado a  $A$  do que em filtrações arbitrárias. No entanto, mesmo no caso das filtrações finitas, o módulo associado  $G(A)$  não determina  $A$ . Em uma filtração finita:

- i- Se  $G(A) = 0$  então  $A = 0$ .

- ii- Se  $R$  é um corpo e  $A$  é um espaço vetorial de dimensão finita, então cada  $F_p$  é um subespaço e  $G(A)$  e  $A$  têm a mesma dimensão. Portanto, neste caso  $G(A)$  determina  $A$  a menos de isomorfismo. O mesmo vale para  $R$  mais geral se cada  $G(A)_p$  é livre.

Uma filtração  $F$  em um complexo de cadeias  $C$  é uma filtração compatível com a graduação de  $C$  e com a diferencial de  $C$ , ou seja, cada  $F_p C$  é um subcomplexo de  $C$  da forma  $\{F_p C_q\}$ . A filtração  $F$  em  $C$  induz uma filtração  $F$  em  $H_*(C)$  definida por

$$F_p H_*(C) = \text{Im}[H_*(F_p C) \rightarrow H_*(C)].$$

Uma filtração  $F$  no módulo graduado  $A$  é limitada inferiormente se, dado  $q$ , existe  $p(q)$  tal que  $F_{p(q)} A_q = 0$ . Se  $F$  é uma filtração limitada inferiormente em um complexo de cadeias  $C$ , então a filtração induzida em  $H_*(C)$  também é limitada inferiormente. Portanto, se  $F$  é uma filtração convergente em  $C$  e limitada inferiormente, ou seja, dado  $q$  existe  $p(q)$  tal que  $F_{p(q)} C_q = 0$ , então o mesmo é verdade para a filtração induzida em  $H_*(C)$ .

O teorema seguinte associa uma seqüência espectral a uma filtração em um complexo de cadeias. Sua demonstração se encontra em [Sp].

**Teorema 1.7.3.** *Seja  $F$  uma filtração convergente limitada inferiormente em um complexo de cadeias  $(C, \partial)$ . Existe uma seqüência espectral convergente com*

$$E_{p,q}^0 = F_p C_{p+q} / F_{p-1} C_{p+q} = G(C)_{p,q}$$

$$E_{p,q}^1 \approx H(p+q)(F_p C_{p+q} / F_{p-1} C_{p+q})$$

e  $E^\infty$  é isomorfa ao módulo  $GH_*(C)$ .

A idéia da demonstração é definir para cada  $r$  arbitrário

$$Z_p^r = \{c \in F_p C \mid \partial c \in F_{p-r} C\}$$

$$Z_p^\infty = \{c \in F_p C \mid \partial c = 0\}$$

que são módulos graduados com

$$Z_{p,q}^r = \{c \in F_p C_{p+q} \mid \partial c \in F_{p-r} C_{p+q}\}$$

$$Z_{p,q}^\infty = \{c \in F_p C_{p+q} \mid \partial c = 0\}.$$

Temos então uma seqüência de módulos graduados

$$\dots \subset \partial Z_{p-1}^{-1} \subset \partial Z_p^0 \subset \partial Z_{p+1}^1 \subset \dots \subset \partial C \cap F_p C \subset Z_p^\infty \subset \dots \subset Z_p^1 \subset Z_p^0 = F_p C.$$

Com isso definimos os módulos bigraduados

$$E_p^r = Z_p^r / (Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1})$$

$$E_p^\infty = Z_p^\infty / (Z_{p-1}^\infty + \partial C \cap F_p C).$$

A aplicação  $\partial$  manda  $Z_p^r$  em  $Z_{p-r}^r$  e  $Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1}$  em  $\partial Z_{p-1}^{r-1}$ . Portanto  $\partial$  induz o homomorfismo

$$d^r : E_p^r \rightarrow E_{p-r}^r.$$

Notemos que  $E^\infty$  não determina  $H_*(C)$  completamente, mas temos

$$E_{p,q}^\infty \approx GH_*(C)_{p,q} = \frac{F_p H_{p+q}(C)}{F_{p-1} H_{p+q}(C)}.$$

# Capítulo 2

## Método da Varredura

### 2.1 Contextualização

Sejam  $M$  uma variedade compacta suave Riemanniana  $n$ -dimensional e  $\mathcal{D}(M) = \{M_p\}_{p=1}^m$  uma decomposição de Morse de  $M$ . Consideremos o caso em que um complexo de cadeias de Conley com a filtração mais fina é na verdade um complexo de Morse, ou seja, cada conjunto de Morse  $M_p$  é uma singularidade hiperbólica do fluxo  $\varphi$  gradiente de uma função de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Dados  $x$  uma singularidade de índice  $k$  e  $y$  uma singularidade de índice  $k - 1$  o conjunto das órbitas conectantes é finito. Orientamos as variedades instável e estável.

Seja  $C = \{C_k\}$  o  $\mathbb{Z}$ -módulo graduado gerado pelas singularidades e graduado por seus índices, ou seja,

$$C_k = \bigoplus \mathbb{Z}\langle x \rangle$$

onde  $x$  percorre o conjuntos dos pontos críticos de  $f$  tais que  $ind(x) = k$ .

Consideremos  $\Delta$  a matriz de conexão associada a  $\mathcal{D}(M)$  construída como no Capítulo 1, ou seja,

- $\Delta$  é dada pelas aplicações  $\Delta_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$  via

$$\Delta_k(x) = \sum n(x, y)\langle y \rangle$$



ésima coluna intercepta a submatriz  $\Delta_k$ , então  $M_{p+1}$  e  $M_{p+1-r}$  são singularidades de Morse com índices  $k$  e  $k-1$  respectivamente, as quais denotamos por  $h_k$  e  $h_{k-1}$ . Estas singularidades estão nas filtrações  $F_p \setminus F_{p-1}$  e  $F_{p-r} \setminus F_{p-r-1}$  respectivamente. Logo dizemos que o par  $(h_k, h_{k-1})$  tem gap  $r$ . Assim, a  $r$ -ésima diagonal auxiliar quando interceptada por  $\Delta_k$  registra informação de singularidades numericamente consecutivas de índices de Morse  $k$  e  $k-1$ . Usamos a mesma notação para indicar a cadeia elementar de  $C$ .

A uma cadeia elementar  $h_k \in F_p \setminus F_{p-1}$  associamos a  $(p+1)$ -ésima coluna de  $\Delta$ . Notemos que a numeração das colunas está deslocada por um com relação ao índice  $p$  da filtração  $p$ .

Neste trabalho, explicamos como a matriz de conexão  $\Delta$  determina a seqüência espectral, ou seja, como  $\Delta$  determina os espaços  $E^r$  e como induz as diferenciais  $d^r$ .

Como vimos na Seção 1.7, o complexo de cadeias filtrado graduado  $C$  determina uma seqüência espectral  $(E^r, d^r)$  tal que  $E^r$  é o módulo bigraduado sobre  $\mathbb{Z}$

$$E_{p,q}^r = Z_{p,q}^r / (Z_{p-1,q+1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,q-r+2}^{r-1})$$

onde,

$$Z_{p,q}^r = \{c \in F_p C_{p+q} \mid \partial c \in F_{p-r} C_{p+q-1}\}$$

e  $d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$  é uma diferencial de bi-grau  $(-r, r-1)$ .

Em alguns casos omitiremos a referência a  $q$ , pois seu papel é importante quando consideramos uma decomposição de Morse mais geral. Quando o conjunto de Morse é uma singularidade de índice  $k$ , o único  $q$  tal que  $E_{p,q}^r$  é não nulo é  $q = k - p$ . Portanto, nestes casos fica entendido que  $E_p^r$  é de fato  $E_{p,k-p}^r$ .

Assim, o módulo  $Z_p^r$  consiste de cadeias em  $F_p C$  cujos bordos estão em  $F_{p-r} C$ . É natural olhar para as cadeias associadas a colunas da matriz de conexão que estão à esquerda da  $(p+1)$ -ésima coluna (incluindo a mesma). Isto garante que qualquer combinação linear de cadeias respeita a filtração. Além disso, como os bordos das cadeias devem estar em  $F_{p-r} C$ , devemos considerar as colunas ou combinações lineares das mesmas que respeitem a filtração e que tenham a propriedade de que as entradas em linhas  $i > (p-r+1)$  sejam todas nulas.

Conforme  $r$  cresce, os  $\mathbb{Z}$ -módulos  $E_p^r$  mudam de geradores. Afim de conectar esta mudança algébrica de geradores de  $\mathbb{Z}$ -módulos da seqüência espectral a uma família particular de matrizes  $\{\Delta^r\}$  obtidas por mudanças de base sobre  $\mathbb{Q}$  a partir da matriz de conexão  $\Delta$ , apresentamos o algoritmo de varredura para a matriz de conexão associada ao complexo de Morse  $C$ . O método da varredura destaca algumas entradas não nulas importantes na  $r$ -ésima diagonal auxiliar de  $\Delta^r$  que chamamos de *pivôs primários* e *pivôs mudança de base*. Tais entradas determinam uma matriz do próximo estágio,  $\Delta^{r+1}$ , e são significativas na determinação dos geradores de  $E^r$  em termos da base original de  $C$  e das diferenciais  $d_p^r : E_p^r \rightarrow E_{p-r}^r$ . A cada passo,  $\Delta^{r+1}$  é uma mudança de base sobre  $\mathbb{Q}$  de  $\Delta^r$ .

Dada uma entrada não nula  $\Delta_{p-r+1,p+1}$  em  $\Delta$ , existe uma órbita conectante unindo duas singularidades. Por outro lado, se  $\Delta_{p-r+1,p+1}$  é zero, as técnicas desenvolvidas nesse trabalho nos permitem verificar que existe um caminho unindo as singularidades  $h_k \in F_p$  e  $h_{k-1} \in F_{p-r}$  quando  $\Delta_{p-r+1,p+1}$  corresponde a  $d_p^r \neq 0$ .

## 2.2 Construção da família $\Delta^r$

Nesta seção apresentamos o método da varredura, que constrói recursivamente uma família de matrizes  $\Delta^r$  para  $r \geq 0$ , tais que  $\Delta^0 = \Delta$  é uma matriz de conexão, considerando no  $r$ -ésimo passo a  $r$ -ésima diagonal auxiliar. Esta família de matrizes é usada para determinar a seqüência espectral  $(E^r, d^r)$ .

Observemos que o método da varredura, bem como todos os outros teoremas neste trabalho, não exige que as colunas da matriz  $\Delta$  estejam ordenadas com relação a  $k$ , ou seja, que as singularidades  $h_k$  estejam ordenadas com relação à filtração. Sem perda de generalidade, assumimos que as singularidades estejam ordenadas com relação à filtração no intuito de simplificar a notação permitindo que os índices referentes às colunas cresçam de um em um. No entanto, em uma situação mais geral, podemos introduzir uma notação de subseqüência para as colunas, considerando apenas a intersecção das diagonais auxiliares com as colunas associadas a singularidades de índice  $k$ . Por simplicidade, em nossos exemplos também mantemos as

singularidades ordenadas com relação à filtração.

Fixada uma diagonal auxiliar  $r$ , o método descrito abaixo deve ser aplicado para todo  $k$  simultaneamente.

## Passo Inicial

1. Considere todas as colunas  $h_k$  junto com todas as linhas  $h_{k-1}$  em  $\Delta$ . Sejam  $\Delta_{k_i,j}$  as entradas de  $\Delta$  tais que a  $i$ -ésima linha é  $h_{k-1}$  e a  $j$ -ésima coluna é  $h_k$ .

Seja  $\xi_1$  a primeira diagonal auxiliar de  $\Delta$  que contém entradas não nulas  $\Delta_{k_i,j}$ . Tais entradas serão chamadas de  $k$  pivôs primários. Assim, para cada  $\Delta_{k_i,j}$  não nulo em  $\xi_1$  as entradas  $\Delta_{k_s,j}$  para  $s > i$  são todas nulas, pois caso contrário as mesmas teriam sido detectadas como pivôs primários em uma diagonal auxiliar  $\xi$  para  $\xi < \xi_1$ .

Encerramos este primeiro passo definindo  $\Delta^{\xi_1}$  como sendo  $\Delta$  com todos os  $k$  pivôs primários da  $\xi_1$ -ésima diagonal auxiliar marcados.

2. Consideremos a matriz  $\Delta^{\xi_1}$  e sejam  $\Delta_{k_i,j}^{\xi_1}$  as entradas em  $\Delta^{\xi_1}$  tais que a  $i$ -ésima linha é  $h_{k-1}$  e a  $j$ -ésima coluna é  $h_k$ . Seja  $\xi_2$  a primeira diagonal auxiliar maior que  $\xi_1$  que contém entradas não nulas  $\Delta_{k_i,j}^{\xi_1}$ . Construimos a matriz  $\Delta^{\xi_2}$  seguindo o procedimento abaixo:

Dada uma entrada  $\Delta_{k_i,j}^{\xi_1}$  não nula na  $\xi_2$ -ésima diagonal auxiliar de  $\Delta^{\xi_1}$

- (a) se não existem pivôs primários na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna, marque  $\Delta_{k_i,j}^{\xi_1}$  como um  $k$  pivô primário e o valor numérico desta entrada permanece o mesmo, ou seja,  $\Delta_{k_i,j}^{\xi_2} = \Delta_{k_i,j}^{\xi_1}$ .
- (b) caso contrário, considere as entradas na  $j$ -ésima coluna e na  $s$ -ésima linha com  $s > i$  em  $\Delta^{\xi_1}$ .
  - (b1) Se existe um  $k$  pivô primário em uma entrada na  $j$ -ésima coluna e na  $s$ -ésima linha, com  $s > i$ , então o valor numérico de  $\Delta_{k_i,j}^{\xi_1}$  permanece o mesmo e tal entrada não é marcada, ou seja,  $\Delta_{k_i,j}^{\xi_2} = \Delta_{k_i,j}^{\xi_1}$ .

(b2) Se não existem pivôs primários na  $j$ -ésima coluna abaixo de  $\Delta_{k_i,j}^{\xi_1}$  então existe um  $k$  pivô primário na  $i$ -ésima linha, digamos na  $t$ -ésima coluna de  $\Delta^{\xi_1}$ , com  $t < j$ . Neste caso, o valor numérico da entrada  $\Delta_{k_i,j}^{\xi_1}$  permanece o mesmo, mas no entanto este é marcado como pivô mudança de base, ou seja,  $\Delta_{k_i,j}^{\xi_2} = \Delta_{k_i,j}^{\xi_1}$ .

Notemos que  $\Delta^{\xi_2}$  é na verdade igual a  $\Delta^{\xi_1}$  exceto pelas entradas da  $\xi_2$ -ésima diagonal auxiliar marcadas com pivôs primários e mudanças de base. Veja Figura 2.2.

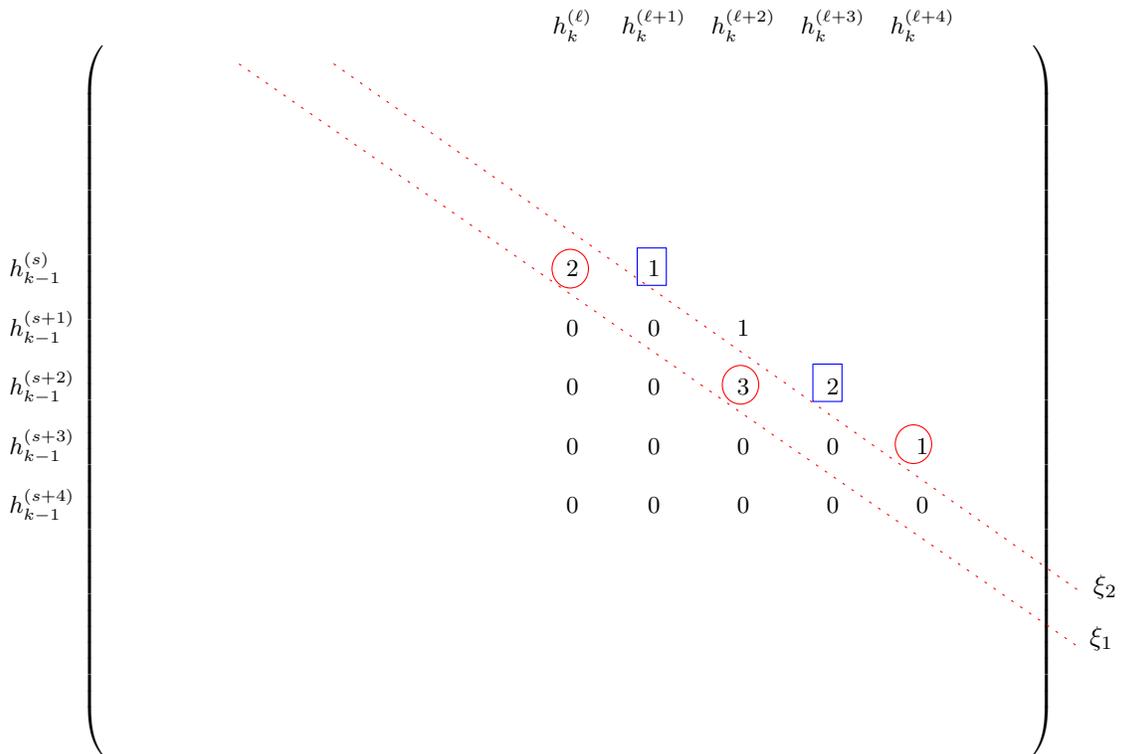


Figura 2.2: Diagonais Auxiliares  $\xi_1$  e  $\xi_2$

## Passo Intermediário

Neste passo, consideramos a matriz  $\Delta^r$  com os pivôs primários e mudanças de base marcados na  $\xi$ -ésima diagonal auxiliar para todo  $\xi \leq r$ . Vamos descrever agora como a

matriz  $\Delta^{r+1}$  é definida. Sem perda de generalidade, podemos supor que existe pelo menos um pivô mudança de base na  $r$ -ésima diagonal auxiliar, pois caso contrário  $\Delta^{r+1} = \Delta^r$  com a  $(r+1)$ -ésima diagonal auxiliar marcada com pivôs primários e pivôs mudança de base.

## Mudança de Base

Suponhamos que  $\Delta_{k_i,j}^r$  é um pivô mudança de base. Então realizamos uma mudança de base em  $\Delta^r$  adicionando uma combinação linear em  $\mathbb{Q}$  de todas as  $h_k$  colunas  $\ell$  de  $\Delta^r$ , com  $\kappa \leq \ell < j$ , onde  $\kappa$  é a primeira coluna de  $\Delta^r$  associada a uma  $k$ -cadeia, a um múltiplo inteiro positivo  $u \neq 0$  da  $j$ -ésima coluna de  $\Delta^r$ , com o objetivo de zerar a entrada  $\Delta_{k_i,j}^r$  sem introduzir entradas não nulas da forma  $\Delta_{k_s,j}^r$  para  $s > i$ . Além disso, a combinação linear resultante deve ser da forma  $\beta^\kappa h_k^{(\kappa)} + \dots + \beta^{j-1} h_k^{(j-1)} + \beta^j h_k^{(j)}$  com  $\beta^\ell$  inteiro para  $\ell = \kappa, \dots, j$ . A notação  $h_k^{(\ell)}$  indica a  $k$ -cadeia elementar associada a  $\ell$ -ésima coluna de  $\Delta$ .

O inteiro  $u$  é chamado coeficiente líder da mudança de base. Se mais que uma combinação linear for possível, escolhemos aquela que minimiza  $u$ . Seja  $u$  o coeficiente líder minimal de uma mudança de base. Uma vez que a mudança de base é feita, obtemos uma  $k$ -cadeia associada a  $j$ -ésima coluna de  $\Delta^{r+1}$  que é uma combinação linear em  $\mathbb{Q}$  das  $\ell$ -ésimas  $h_k$  colunas  $\kappa \leq \ell < j$  de  $\Delta^r$  mais um múltiplo inteiro  $u$  da  $j$ -ésima coluna de  $\Delta^r$  tal que  $\Delta_{k_i,j}^{r+1} = 0$ . Além disso esta combinação linear é também uma combinação linear inteira de colunas  $h_k$  de  $\Delta$  a à esquerda da  $j$ -ésima coluna.

Observe que se a  $\bar{\ell}$ -ésima coluna de  $\Delta^r$  é uma  $h_k$  coluna, então corresponde a uma combinação linear inteira  $\sigma_k^{(\bar{\ell}),r} = \sum_{\ell=\kappa}^{\bar{\ell}} c_{\ell}^{\bar{\ell},r} h_k^{(\ell)}$  de  $h_k$  colunas de  $\Delta$  tal que a  $\kappa$ -ésima coluna é a primeira coluna de  $\Delta$  associada a uma  $k$ -cadeia. A notação de  $\sigma_k^{(\bar{\ell}),r}$  indica índice de Morse  $k$  e a  $\bar{\ell}$ -ésima coluna de  $\Delta^r$ . Portanto, se a  $j$ -ésima coluna  $\Delta^{r+1}$  é uma  $h_k$  coluna,

então será da forma

$$\sigma_k^{(j),r+1} = u \underbrace{\sum_{\ell=\kappa}^j c_\ell^{j,r} h_k^{(\ell)}}_{\sigma_k^{(j),r}} + q_{j-1} \underbrace{\sum_{\ell=\kappa}^{j-1} c_\ell^{j-1,r} h_k^{(\ell)}}_{\sigma_k^{(j-1),r}} + \cdots + q_{\kappa+1} \underbrace{(c_\kappa^{\kappa+1,r} h_k^{(\kappa)} + c_{\kappa+1}^{\kappa+1,r} h_k^{(\kappa+1)})}_{\sigma_k^{(\kappa+1),r}} + q_\kappa \underbrace{c_\kappa^{\kappa,r} h_k^{(\kappa)}}_{\sigma_k^{(\kappa),r}} \quad (2.1)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} & (uc_\kappa^{j,r} + q_{j-1}c_\kappa^{j-1,r} + \cdots + q_\kappa c_\kappa^{\kappa,r})h_k^{(\kappa)} + (uc_{\kappa+1}^{j,r} + q_{j-1}c_{\kappa+1}^{j-1,r} + \cdots + q_{\kappa+1}c_{\kappa+1}^{\kappa+1,r})h_k^{(\kappa+1)} + \cdots \\ & \cdots + (uc_{j-1}^{j,r} + q_{j-1}c_{j-1}^{j-1,r})h_k^{(j-1)} + uc_j^{j,r}h_k^{(j)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

com  $c_\kappa^{\kappa,r} = 1$  e

$$c_\kappa^{j,r+1} = uc_\kappa^{j,r} + q_{j-1}c_\kappa^{j-1,r} + \cdots + q_\kappa c_\kappa^{\kappa,r} \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

$$c_{\kappa+1}^{j,r+1} = uc_{\kappa+1}^{j,r} + q_{j-1}c_{\kappa+1}^{j-1,r} + \cdots + q_{\kappa+1}c_{\kappa+1}^{\kappa+1,r} \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

⋮

$$c_{j-1}^{j,r+1} = uc_{j-1}^{j,r} + q_{j-1}c_{j-1}^{j-1,r} \in \mathbb{Z} \quad (2.5)$$

$$c_j^{j,r+1} = uc_j^{j,r} \in \mathbb{Z} \quad (2.6)$$

É claro que a primeira coluna de qualquer  $\Delta_k$  não pode sofrer nenhuma mudança de base, já que não existem  $h_k$  colunas a sua esquerda, o que explica o porque  $c_\kappa^{\kappa,r} = 1$ .

Notemos que  $q_{\bar{\ell}} = 0$  em  $q_{\bar{\ell}} \sum_{\ell=1}^{\bar{\ell}} c_\ell^{\bar{\ell},r} h_k^{(\ell)}$  quando a  $\bar{\ell}$ -ésima coluna tem um pivô primário em uma linha  $s$  para  $s > i$ .

Se o pivô primário da  $i$ -ésima linha está na  $t$ -ésima coluna então o número racional  $q_t$  é não nulo em  $\sum_{\ell=1}^t c_\ell^{t,r} h_k^{(\ell)}$  e é tal que

$$\Delta_{k_{i,j}}^{r+1} = u\Delta_{k_{i,j}}^r + q_t\Delta_{k_{i,t}}^r = 0.$$

Como  $u \geq 1$  é único, então  $q_t$  é unicamente definido.

Uma vez que o processo acima é feito para todos os pivôs mudança de base da  $r$ -ésima diagonal auxiliar de  $\Delta^r$ , podemos então definir uma matriz mudança de base.

Portanto a matriz  $\Delta^{r+1}$  tem valores numéricos determinados por uma mudança de base em  $\mathbb{Q}$  de  $\Delta^r$ . Em particular, todos os pivôs mudança de base na  $r$ -ésima diagonal auxiliar de  $\Delta^r$  são iguais a zero em  $\Delta^{r+1}$ . Veja as Figuras 2.3 e 2.4.

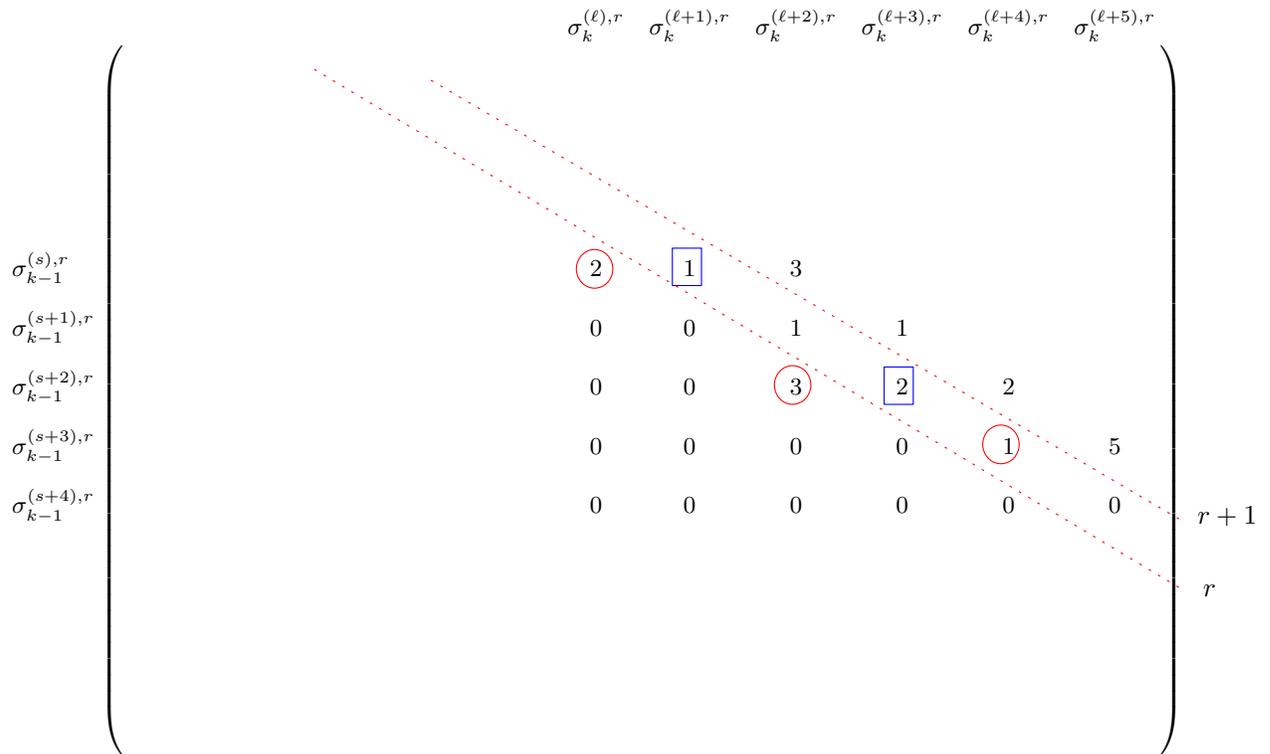


Figura 2.3: Método da varredura:  $\Delta^r$ .

### Marcando a $(r + 1)$ -ésima diagonal de $\Delta^{r+1}$

Consideremos a matriz  $\Delta^{r+1}$  definida no passo anterior. Marcamos a  $(r + 1)$ -ésima diagonal auxiliar com pivôs primários e mudança de base como segue:

Dada uma entrada não nula  $\Delta_{k_i,j}^{r+1}$

1. se não existem pivôs primários na  $i$ -ésima linha e nem na  $j$ -ésima coluna, marcamos  $\Delta_{k_i,j}^{r+1}$  como um pivô primário de índice  $k$ .

2. se este não é o caso, consideremos as entradas na  $j$ -ésima coluna e na  $s$ -ésima linha com  $s > i$  em  $\Delta^{r+1}$ .

(b1) Se existe um  $k$  pivô primário na  $j$ -ésima coluna abaixo de  $\Delta_{k,i,j}^{r+1}$  então este não é marcado.

(b2) Se não existem  $k$  pivôs primários na  $j$ -ésima coluna abaixo de  $\Delta_{k,i,j}^{r+1}$  então existe um  $k$  pivô primário na  $i$ -ésima linha e em uma coluna  $t$  de  $\Delta^{r+1}$ , com  $t < j$ . Neste caso, marque  $\Delta_{k,i,j}^{r+1}$  como um pivô mudança de base. Veja a Figura 2.4.

## Passo Final

Repetimos o procedimento acima até que todas as diagonais auxiliares tenham sido consideradas.

Figura 2.4: Método Varredura:  $\Delta^{r+1}$ .

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \sigma_k^{(\ell),r+1} & \sigma_k^{(\ell+1),r+1} & \sigma_k^{(\ell+2),r+1} & \sigma_k^{(\ell+3),r+1} & \sigma_k^{(\ell+4),r+1} & \sigma_k^{(\ell+5),r+1} \\
 \left( \begin{array}{cccccc}
 \sigma_{k-1}^{(s),r+1} & & \textcircled{2} & 0 & 3 & & & \\
 \sigma_{k-1}^{(s+1),r+1} & & 0 & 0 & 1 & \textcircled{1} & & \\
 \sigma_{k-1}^{(s+2),r+1} & & 0 & 0 & \textcircled{3} & 0 & 2 & \\
 \sigma_{k-1}^{(s+3),r+1} & & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & \boxed{5} \\
 \sigma_{k-1}^{(s+4),r+1} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right. & r+1 \\
 & & & & & & & r
 \end{array}$$

**Exemplo 2.2.1.** Seja  $\Delta$  como na Figura 2.5. Aplicando o método varredura em  $\Delta$  obtemos as matrizes  $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4, \Delta^5, \Delta^6, \Delta^7$  e  $\Delta^8$  dadas pelas Figuras 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12 e 2.13 respectivamente.

O leitor pode facilmente notar que o cálculo da família de matrizes produzidas pelo método varredura é trabalhoso. Portanto, ao longo deste trabalho, ilustramos vários de nossos resultados utilizando este único exemplo.

$$\begin{array}{c}
 F_0 \ h_0 \\
 F_1 \ h_{k-1}^{(2)} \\
 F_2 \ h_{k-1}^{(3)} \\
 F_3 \ h_k^{(4)} \\
 F_4 \ h_k^{(5)} \\
 F_5 \ h_k^{(6)} \\
 F_6 \ h_k^{(7)} \\
 F_7 \ h_k^{(8)} \\
 F_8 \ h_k^{(9)} \\
 F_9 \ h_{k+1}^{(10)} \\
 F_{10} \ h_{k+1}^{(11)} \\
 F_{11} \ h_{k+1}^{(12)} \\
 F_{12} \ h_{k+1}^{(13)} \\
 F_{13} \ h_n
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\
 h_0 & h_{k-1}^{(2)} & h_{k-1}^{(3)} & h_k^{(4)} & h_k^{(5)} & h_k^{(6)} & h_k^{(7)} & h_k^{(8)} & h_k^{(9)} & h_{k+1}^{(10)} & h_{k+1}^{(11)} & h_{k+1}^{(12)} & h_{k+1}^{(13)} & h_n
 \end{pmatrix}$$

Figura 2.5:  $\Delta$ .

Para a construção de  $\Delta^1$  marcamos a primeira diagonal auxiliar e as entradas não nulas nesta diagonal  $\Delta_{3,4}^1$  e  $\Delta_{9,10}^2$  serão pivôs primários. Veja 2.6.

$$\begin{array}{c}
h_0 \\
h_{k-1}^{(2)} \\
h_{k-1}^{(3)} \\
h_k^{(4)} \\
h_k^{(5)} \\
h_k^{(6)} \\
h_k^{(7)} \\
h_k^{(8)} \\
h_k^{(9)} \\
h_{k+1}^{(10)} \\
h_{k+1}^{(11)} \\
h_{k+1}^{(12)} \\
h_{k+1}^{(13)} \\
h_n
\end{array}
\begin{pmatrix}
h_0 & h_{k-1}^{(2)} & h_{k-1}^{(3)} & h_k^{(4)} & h_k^{(5)} & h_k^{(6)} & h_k^{(7)} & h_k^{(8)} & h_k^{(9)} & h_{k+1}^{(10)} & h_{k+1}^{(11)} & h_{k+1}^{(12)} & h_{k+1}^{(13)} & h_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Figura 2.6:  $\Delta^1$ .

Para a construção de  $\Delta^2$  marcamos a segunda diagonal auxiliar e analisamos todas as entradas não nulas nesta diagonal. Notemos que  $\Delta_{2,4}^2$  e  $\Delta_{8,10}^2$  são entradas acima de pivôs primários e, portanto, não são marcadas. Por outro lado,  $\Delta_{3,5}^2$  e  $\Delta_{9,11}^2$  não estão acima de pivô primário mas existem pivôs primários à esquerda dos mesmos. Portanto tais entradas são pivôs mudança de base. Veja 2.7.

Como temos pivôs mudança de base em  $\Delta^2$  então será feita uma mudança de base em  $\Delta^2$  para a construção da matriz do próximo passo  $\Delta^3$ .

$$\begin{array}{c}
h_0 \\
h_{k-1}^{(2)} \\
h_{k-1}^{(3)} \\
h_k^{(4)} \\
h_k^{(5)} \\
h_k^{(6)} \\
h_k^{(7)} \\
h_k^{(8)} \\
h_k^{(9)} \\
h_{k+1}^{(10)} \\
h_{k+1}^{(11)} \\
h_{k+1}^{(12)} \\
h_{k+1}^{(13)} \\
h_n
\end{array}
\begin{pmatrix}
h_0 & h_{k-1}^{(2)} & h_{k-1}^{(3)} & h_k^{(4)} & h_k^{(5)} & h_k^{(6)} & h_k^{(7)} & h_k^{(8)} & h_k^{(9)} & h_{k+1}^{(10)} & h_{k+1}^{(11)} & h_{k+1}^{(12)} & h_{k+1}^{(13)} & h_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & -2 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 3 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Figura 2.7:  $\Delta^2$ .

Esta mudança de base deve obedecer às seguintes regras:

- 1- Cada coluna mudada é uma combinação linear sobre  $\mathbb{Z}$  das colunas de  $\Delta$  (de  $h_k$ 's).
- 2- A mudança de base zera a entrada do pivô mudança de base sem acrescentar entradas não nulas abaixo.
- 3- A mudança respeita a filtração, ou seja, só podemos fazer operações com colunas à esquerda.

Assim

- $\sigma_k^{(5),3} = 2h_k^{(5)} - 3h_k^{(4)}$
- $\sigma_{k+1}^{(11),3} = h_{k+1}^{(11)} + h_{k+1}^{(10)}$

$$\begin{array}{l}
\sigma_0^{(1),3} = h_0 \\
\sigma_{k-1}^{(2),3} = h_{k-1}^{(2)} \\
\sigma_{k-1}^{(3),3} = h_{k-1}^{(3)} \\
\sigma_k^{(4),3} = h_k^{(4)} \\
\sigma_k^{(5),3} = 2h_k^{(5)} - 3h_k^{(4)} \\
\sigma_k^{(6),3} = h_k^{(6)} \\
\sigma_k^{(7),3} = h_k^{(7)} \\
\sigma_k^{(8),3} = h_k^{(8)} \\
\sigma_k^{(9),3} = h_k^{(9)} \\
\sigma_{k+1}^{(10),3} = h_{k+1}^{(10)} \\
\sigma_{k+1}^{(11),3} = h_{k+1}^{(11)} + h_{k+1}^{(10)} \\
\sigma_{k+1}^{(12),3} = h_{k+1}^{(12)} \\
\sigma_{k+1}^{(13),3} = h_{k+1}^{(13)} \\
\sigma_n^{(14),3} = h_n
\end{array}
\begin{pmatrix}
\sigma_0^{(1),3} & \sigma_{k-1}^{(2),3} & \sigma_{k-1}^{(3),3} & \sigma_k^{(4),3} & \sigma_k^{(5),3} & \sigma_k^{(6),3} & \sigma_k^{(7),3} & \sigma_k^{(8),3} & \sigma_k^{(9),3} & \sigma_{k+1}^{(10),3} & \sigma_{k+1}^{(11),3} & \sigma_{k+1}^{(12),3} & \sigma_{k+1}^{(13),3} & \sigma_n^{(14),3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 5/2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -5 & 1 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & -2 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Figura 2.8:  $\Delta^3$ .

Assim como antes, para a construção de  $\Delta^3$  marcamos a terceira diagonal auxiliar e analisamos todas as entradas não nulas nesta diagonal. Veja 2.8. Novamente, a existência de pivôs primários em  $\Delta^3$  indica que haverá mudança de base em  $\Delta^3$  para a construção de  $\Delta^4$ .

- $$\begin{aligned}
\bullet \sigma_k^{(6),4} &= \sigma_k^{(6),3} - \frac{1}{2}\sigma_k^{(5),3} - \frac{1}{2}\sigma_k^{(4),3} \\
&= h_k^{(6)} - \frac{1}{2}(2h_k^{(5)} - 3h_k^{(4)}) - \frac{1}{2}h_k^{(4)} \\
&= h_k^{(6)} - h_k^{(5)} + h_k^{(4)}
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
\bullet \sigma_{k+1}^{(12),4} &= 2\sigma_{k+1}^{(12),3} - 3\sigma_{k+1}^{(10),3} \\
&= 2h_{k+1}^{(12)} - 3h_{k+1}^{(10)}
\end{aligned}$$

Notemos que as novas colunas de  $\Delta^4$  combinação linear sobre  $\mathbb{Q}$  das colunas de  $\Delta^3$  que minimizam o coeficiente líder. Seguindo este raciocínio varremos todas as diagonais.



Figura 2.10:  $\Delta^5$ .

$$\begin{array}{l}
 \sigma_0^{(1),5} = h_0 \\
 \sigma_{k-1}^{(2),5} = h_{k-1}^{(2)} \\
 \sigma_{k-1}^{(3),5} = h_{k-1}^{(3)} \\
 \sigma_k^{(4),5} = h_k^{(4)} \\
 \sigma_k^{(5),5} = 2h_k^{(5)} - 3h_k^{(4)} \\
 \sigma_k^{(6),5} = h_k^{(6)} - h_k^{(5)} + h_k^{(4)} \\
 \sigma_k^{(7),5} = h_k^{(7)} \\
 \sigma_k^{(8),5} = h_k^{(8)} \\
 \sigma_k^{(9),5} = h_k^{(9)} \\
 \sigma_{k+1}^{(10),5} = h_{k+1}^{(10)} \\
 \sigma_{k+1}^{(11),5} = h_{k+1}^{(11)} + h_{k+1}^{(10)} \\
 \sigma_{k+1}^{(12),5} = 2h_{k+1}^{(12)} - 3h_{k+1}^{(10)} \\
 \sigma_{k+1}^{(13),5} = h_{k+1}^{(13)} + h_{k+1}^{(12)} - h_{k+1}^{(10)} \\
 \sigma_n^{(14),5} = h_n
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 \sigma_0^{(1),5} & \sigma_{k-1}^{(2),5} & \sigma_{k-1}^{(3),5} & \sigma_k^{(4),5} & \sigma_k^{(5),5} & \sigma_k^{(6),5} & \sigma_k^{(7),5} & \sigma_k^{(8),5} & \sigma_k^{(9),5} & \sigma_{k+1}^{(10),5} & \sigma_{k+1}^{(11),5} & \sigma_{k+1}^{(12),5} & \sigma_{k+1}^{(13),5} & \sigma_n^{(14),5} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 6 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -5 & 11 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & -13 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$



Figura 2.12:  $\Delta^7$ .

$$\begin{array}{l}
 \sigma_0^{(1),7} = h_0 \\
 \sigma_{k-1}^{(2),7} = h_{k-1}^{(2)} \\
 \sigma_{k-1}^{(3),7} = h_{k-1}^{(3)} \\
 \sigma_k^{(4),7} = h_k^{(4)} \\
 \sigma_k^{(5),7} = 2h_k^{(5)} - 3h_k^{(4)} \\
 \sigma_k^{(6),7} = h_k^{(6)} - h_k^{(5)} + h_k^{(4)} \\
 \sigma_k^{(7),7} = h_k^{(7)} - h_k^{(6)} + h_k^{(5)} - h_k^{(4)} \\
 \sigma_k^{(8),7} = h_k^{(8)} + 2h_k^{(6)} - 2h_k^{(5)} + h_k^{(4)} \\
 \sigma_k^{(9),7} = h_k^{(9)} - h_k^{(5)} + h_k^{(4)} \\
 \sigma_{k+1}^{(10),7} = h_{k+1}^{(10)} \\
 \sigma_{k+1}^{(11),7} = h_{k+1}^{(11)} + h_{k+1}^{(10)} \\
 \sigma_{k+1}^{(12),7} = 2h_{k+1}^{(12)} - 3h_{k+1}^{(10)} \\
 \sigma_{k+1}^{(13),7} = 5h_{k+1}^{(13)} + 5h_{k+1}^{(12)} + h_{k+1}^{(11)} - 4h_{k+1}^{(10)} \\
 \sigma_n^{(14),7} = h_n
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 \sigma_0^{(1),7} & \sigma_{k-1}^{(2),7} & \sigma_{k-1}^{(3),7} & \sigma_k^{(4),7} & \sigma_k^{(5),7} & \sigma_k^{(6),7} & \sigma_k^{(7),7} & \sigma_k^{(8),7} & \sigma_k^{(9),7} & \sigma_{k+1}^{(10),7} & \sigma_{k+1}^{(11),7} & \sigma_{k+1}^{(12),7} & \sigma_{k+1}^{(13),7} & \sigma_n^{(14),7} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & -13 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

Figura 2.13:  $\Delta^8$ .

$$\begin{array}{l}
 \sigma_0^{(1),8} = h_0 \\
 \sigma_{k-1}^{(2),8} = h_{k-1}^{(2)} \\
 \sigma_{k-1}^{(3),8} = h_{k-1}^{(3)} \\
 \sigma_k^{(4),8} = h_k^{(4)} \\
 \sigma_k^{(5),8} = 2h_k^{(5)} - 3h_k^{(4)} \\
 \sigma_k^{(6),8} = h_k^{(6)} - h_k^{(5)} + h_k^{(4)} \\
 \sigma_k^{(7),8} = h_k^{(7)} - h_k^{(6)} + h_k^{(5)} - h_k^{(4)} \\
 \sigma_k^{(8),8} = h_k^{(8)} + 2h_k^{(6)} - 2h_k^{(5)} + h_k^{(4)} \\
 \sigma_k^{(9),8} = h_k^{(9)} + h_k^{(6)} - 2h_k^{(5)} + 2h_k^{(4)} \\
 \sigma_{k+1}^{(10),8} = h_{k+1}^{(10)} \\
 \sigma_{k+1}^{(11),8} = h_{k+1}^{(11)} + h_{k+1}^{(10)} \\
 \sigma_{k+1}^{(12),8} = 2h_{k+1}^{(12)} - 3h_{k+1}^{(10)} \\
 \sigma_{k+1}^{(13),8} = 5h_{k+1}^{(13)} + 5h_{k+1}^{(12)} + h_{k+1}^{(11)} - 4h_{k+1}^{(10)} \\
 \sigma_n^{(14),8} = h_n
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 \sigma_0^{(1),8} & \sigma_{k-1}^{(2),8} & \sigma_{k-1}^{(3),8} & \sigma_k^{(4),8} & \sigma_k^{(5),8} & \sigma_k^{(6),8} & \sigma_k^{(7),8} & \sigma_k^{(8),8} & \sigma_k^{(9),8} & \sigma_{k+1}^{(10),8} & \sigma_{k+1}^{(11),8} & \sigma_{k+1}^{(12),8} & \sigma_{k+1}^{(13),8} & \sigma_n^{(14),8} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & -13 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

## 2.3 Propriedades de $\Delta^r$

As proposições nesta seção descrevem propriedades básicas das matrizes  $\Delta^r$  produzidas pelo método da varredura. Estas serão usadas nas demonstrações dos resultados principais. Mais especificamente, nossa atenção estará voltada para a caracterização de propriedades associadas aos pivôs primários e pivôs mudança de base, que por sua vez são essenciais na determinação da seqüência espectral.

É fácil ver que cada matriz  $\Delta^r$  é triangular superior e tem quadrado zero, já que é recursivamente obtida de uma matriz de conexão inicial  $\Delta$  por mudanças de base sobre  $\mathbb{Q}$ .

Para simplificar a notação, quando não for necessário, a referência ao índice  $k$  na matriz  $\Delta_k^r$  será omitida.

**Proposição 2.3.1.** *Se a entrada  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é identificada pelo método da varredura como um pivô primário ou um pivô mudança de base então  $\Delta_{s,p+1}^r = 0$  para todo  $s > p - r + 1$ .*

**Demonstração:** Pelo método da varredura  $\Delta_{s,p+1}^r$  não pode ser um pivô primário para todo  $s > p - r + 1$ . Como entradas não nulas abaixo da  $r$ -ésima diagonal de  $\Delta^r$  que não são pivô primário somente ocorrem em colunas acima de um pivô primário então  $\Delta_{s,p+1}^r = 0$  para todo  $s > p - r + 1$ . ■

Observe que se  $\Delta_{k_i,j}^r$  é um pivô primário, então não existem combinações lineares de colunas à esquerda da  $j$ -ésima coluna que, adicionadas a um múltiplo da  $j$ -ésima coluna zerariam esta entrada mantendo todas as entradas  $\Delta_{k_s,j}^r$  iguais a zero para  $s > i$ . De fato, existem três tipos de colunas  $h_k$  à esquerda da  $j$ -ésima coluna. Ou o pivô primário está acima da  $i$ -ésima linha, ou abaixo, ou a coluna não tem um pivô primário em  $\Delta^r$ . No último caso, a coluna tem todas as entradas abaixo da  $r$ -ésima diagonal iguais a zero. Este também é o caso quando o pivô primário está acima da  $i$ -ésima linha já que todas as entradas abaixo do pivô primário são iguais a zero. Assim, esses três tipos de colunas não podem contribuir em uma combinação linear que tem por objetivo zerar a entrada  $\Delta_{k_i,j}^r$ .

A Proposição 2.3.2 afirma que não podemos ter mais do que um pivô primário em uma linha ou coluna fixada. Além disso, se existe um pivô primário em uma linha  $i$  então não existe

pivô primário na coluna  $i$  e vice versa.

**Proposição 2.3.2.** *Seja  $\{\Delta^r\}$  a família de matrizes produzidas pelo método da varredura aplicado a uma matriz de conexão  $\Delta$ . Dados quaisquer dois pivôs primários  $\Delta_{k_i,j}^r$  e  $\Delta_{k_m,\ell}^r$  temos que  $\{i, j\} \cap \{m, \ell\} = \emptyset$ .*

**Demonstração:** O único caso não trivial que precisa ser considerado é quando  $\bar{k} = k+1$  e, neste caso, temos que mostrar que  $j \neq m$ . Suponha que existe um pivô primário na  $j$ -ésima coluna e outro na  $j$ -ésima linha de  $\Delta^r$ , isto é,  $\Delta_{k_i,j}^r$  e  $\Delta_{k+1,j,\ell}^r$  são pivôs primários. Então  $\Delta_{k_s,j}^r = 0$  para todo  $s > i$  e  $\Delta_{k+1,s,\ell}^r = 0$  para todo  $s > j$ .

Sejam  $\sigma_k^{(j),r}$ ,  $\sigma_{k-1}^{(i),r}$  e  $\sigma_{k+1}^{(\ell),r}$  cadeias associadas à  $j$ -ésima, à  $i$ -ésima e à  $\ell$ -ésima colunas de  $\Delta^r$  respectivamente.

Como  $\Delta^r$  tem quadrado zero,  $V_1 = \{\sigma_{k-1}^{(i),r}, \sigma_k^{(j),r}, \sigma_{k+1}^{(\ell),r}\}$  não pode ser um intervalo já que  $\Delta^r(V_1)^2 \neq 0$ . Portanto, deve existir um  $\sigma_k^{(j_2),r}$  associado à  $j_2$ -ésima coluna de  $\Delta^r$  tal que  $\sigma_k^{(j_2),r} \neq \sigma_k^{(j),r}$ ,  $\Delta_{k_i,j_2}^r \neq 0$  e  $\Delta_{k+1,j_2,\ell}^r \neq 0$ . Notemos que  $j_2 < j$ , pois  $\sigma_k^{(j_2),r} \neq \sigma_k^{(j),r}$  e todas as entradas abaixo de um pivô primário são iguais a zero.

A entrada  $\Delta_{k_i,j_2}^r$  não pode ser um pivô primário, pois a  $i$ -ésima linha já tem um pivô primário. Portanto, o pivô primário da  $j_2$ -ésima coluna deve estar abaixo da entrada  $\Delta_{k_i,j_2}^r$ , ou seja, existe um  $\sigma_{k-1}^{(i_2),r}$  associado à  $i_2$ -ésima linha de  $\Delta^r$ , com  $i_2 > i$ , tal que  $\Delta_{k_{i_2},j_2}^r$  é um pivô primário. Segue que  $\Delta_{k_s,j_2}^r = 0$  para todo  $s > i_2$ . Veja a Figura 2.14.

Analogamente,  $V_2 = \{\sigma_{k-1}^{(i_2),r}, \sigma_k^{(j_2),r}, \sigma_{k+1}^{(\ell),r}\}$  não pode ser um intervalo já que  $\Delta^r$  tem quadrado zero e  $\Delta^r(V_2)^2 \neq 0$ . Portanto, existe  $\sigma_k^{(j_3),r}$  na  $j_3$ -ésima coluna de  $\Delta^r$  tal que  $\sigma_k^{(j_3),r} \neq \sigma_k^{(j_2),r}$ ,  $j_3 \leq j$ ,  $\Delta_{k_{i_2},j_3}^r \neq 0$  e  $\Delta_{k+1,j_3,\ell}^r \neq 0$ .

Mostremos que  $\sigma_k^{(j_3),r} \neq \sigma_k^{(j),r}$ . Pela construção de  $\sigma_k^{(j_3),r}$  temos que  $\Delta_{k_{i_2},j_3}^r \neq 0$  com  $i_2 > i$ . Portanto, se  $j_3$  fosse igual a  $j$  então teríamos uma entrada  $\Delta_{k_{i_2},j}^r \neq 0$  abaixo do pivô primário  $\Delta_{k_i,j}^r$ . Mas isso contradiz o fato que  $\Delta_{k_s,j}^r = 0$  para todo  $s > i$ .

Repetindo os passos acima e sempre usando o fato que  $\Delta^r$  tem quadrado zero, eventualmente se esgotarão as linhas ou as colunas para continuar os argumentos acima. Veja Figura 2.15. Se as  $h_k$  colunas se esgotarem, então teremos um intervalo  $V$  com  $\Delta(V)^2 \neq 0$ , o que contradiz o

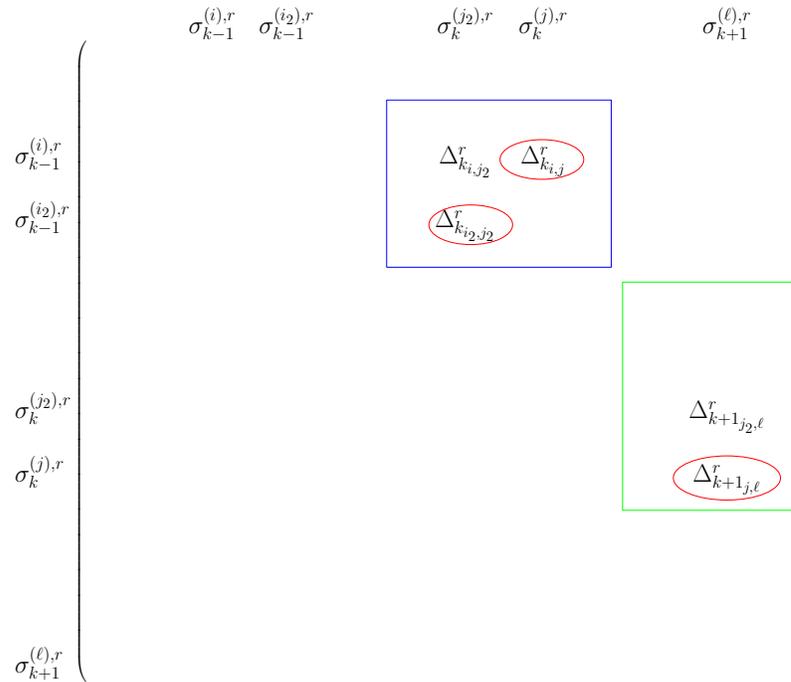


Figura 2.14: Impossibilidade de pivôs primários na  $j$ -ésima linha e na  $j$ -ésima coluna simultaneamente.

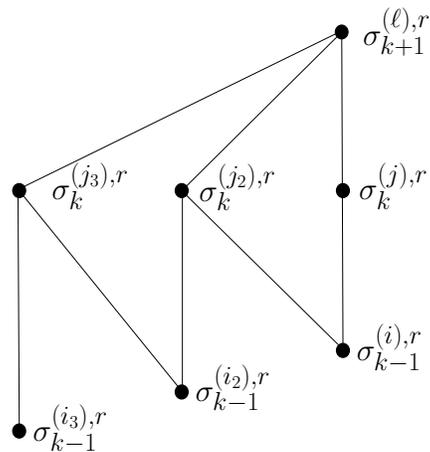


Figura 2.15: Construção de uma seqüência finita de singularidades.

fato de  $\Delta^r$  ter quadrado zero. Por outro lado, se não existem mais  $h_{k-1}$  linhas então teremos uma entrada não nula em  $\Delta^r$  abaixo da  $r$ -ésima diagonal auxiliar que não é um pivô primário e nem uma entrada acima de um pivô primário. Isto contradiz o fato de que as únicas entradas não nulas em  $\Delta^r$  abaixo da  $r$ -ésima diagonal auxiliar são pivôs primários ou entradas acima de pivôs primários. ■

## Capítulo 3

# Os Módulos $E_p^r$ da Seqüência Espectral

Nesta seção, mostramos como os  $\mathbb{Z}$ -módulos  $E_p^r$  são determinados quando aplicamos o método da varredura à matriz  $\Delta$ . Os pivôs primários e pivôs mudança de base de  $\Delta^r$  produzidos pelo método da varredura têm um papel importante no processo de determinar os geradores de  $Z_p^r$ , daí a necessidade de mostrar que os pivôs são sempre inteiros.

Lembre que

$$E_p^r = Z_p^r / (Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1}^{r-1})$$

onde

$$Z_p^r = \{c \in F_p C \mid \partial c \in F_{p-r} C\}.$$

Cada  $h_k$  coluna da matriz de conexão  $\Delta$  representa conexões de uma cadeia elementar  $h_k$  de  $C_k$  a uma cadeia elementar  $h_{k-1}$  de  $C_{k-1}$ .

O  $\mathbb{Z}$ -módulo  $Z_{p,k-p}^r = \{c \in F_p C_k; \partial c \in F_{p-r} C_{k-1}\}$  é gerado por  $k$ -cadeias contidas em  $F_p C_k$  com bordos em  $F_{p-r} C_{k-1}$ . Isto corresponde na matriz  $\Delta$  a todas as  $h_k$  colunas à esquerda da  $(p+1)$ -ésima coluna <sup>1</sup> ou combinações lineares destas  $h_k$  colunas, tais que seus bordos (entradas não nulas) estão acima da  $(p-r+1)$ -ésima linha.

---

<sup>1</sup>As expressões "acima da linha" e "à esquerda da coluna" pressupõem a inclusão da linha e da coluna em questão enquanto que as expressões "abaixo da linha" e "à direita da coluna" não incluem a linha e a coluna em questão

Analogamente  $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} = \{c \in F_{p-1}C_k; \partial c \in F_{p-r}C_{k-1}\}$  corresponde na matriz  $\Delta$  a todas as  $h_k$  colunas à esquerda da  $p$ -ésima coluna ou combinações lineares destas  $h_k$  colunas cujos bordos estão acima da  $(p-r+1)$ -ésima linha.

Finalmente,

$$\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} = \partial\{c \in F_{p+r-1}C_{k+1}; \partial c \in F_p C_k\}$$

é o conjunto de todos os bordos de elementos em  $Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$ , o que corresponde na matriz de conexão  $\Delta$  a todas as  $h_k$  colunas à esquerda da  $(p+1)$ -ésima coluna (ou equivalentemente todas as  $h_k$ -linhas acima da  $(p+1)$ -ésima linha) que são bordos de  $h_{k+1}$  colunas que estão à esquerda da  $(p+r)$ -ésima coluna.

A singularidade de índice  $k$  em  $F_p C_k \setminus F_{p-1} C_k$  corresponde a uma  $k$  cadeia associadas à  $(p+1)$ -ésima coluna de  $\Delta$ . Denotamos tal singularidade por  $h_k^{(p+1)}$ .

A Proposição 3.0.3 estabelece uma fórmula para  $Z_{p,k-p}^r$ .

**Proposição 3.0.3.**  $Z_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r} \sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}]$  onde  $\kappa$  é a primeira coluna de  $\Delta$  associada a uma  $k$ -cadeia e  $\mu^{(j),\zeta} = 1$  quando o pivô primário na  $j$ -ésima coluna esta acima da  $j-\zeta$ -ésima linha e  $\mu^{(j),\zeta} = 0$  quando o pivô primário da  $j$ -ésima coluna está abaixo da  $j-\zeta$ -ésima linha.

**Demonstração:** Observemos uma cadeia  $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$  pertence à matriz  $\Delta^\xi$  e, por definição,  $\mu^{(p+1-\xi),r-\xi} = 1$  se e somente se o pivô primário na  $(p+1-\xi)$ -ésima coluna esta acima da linha  $(p+1-\xi) - (r-\xi) = p-r+1$ . É fácil verificar que as cadeias correspondentes a colunas cujos pivôs primários estão abaixo da  $(p-r+1)$ -ésima linha não representam geradores de  $Z_{p,k-p}^r$ . Consideremos então a  $k$ -cadeia  $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ , com  $\xi \in \{0, \dots, p+1-\kappa\}$ , associada à  $(p+1-\xi)$ -ésima coluna de  $\Delta^{r-\xi}$  tal que o pivô primário da  $(p+1-\xi)$ -ésima coluna de  $\Delta^{r-\xi}$  esteja acima da  $(p-r+1)$ -ésima linha. Mostremos primeiramente que  $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$  é uma  $k$ -cadeia que corresponde a um gerador de  $Z_p^r$ . É claro que  $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$  está na filtração  $F_p C_k$  para  $\xi \geq 0$ . Além disso, o método varredura na  $(r-\xi)$ -ésima diagonal auxiliar zerou todos os pivôs mudança de base abaixo da  $(r-\xi)$ -ésima diagonal, ou seja, as entradas não nulas da coluna  $(p+1-\xi)$  de  $\Delta^{r-\xi}$  estão acima da  $(p+1-\xi) - (r-\xi) = (p-r+1)$ -ésima linha.

Portanto, o bordo de  $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$  está em  $F_{p-r}C_{k-1}$ .

Mostremos agora que qualquer elemento em  $Z_{p,k-p}^r$  é uma combinação linear inteira dos  $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ ,  $\xi = 0, \dots, p+1-\kappa$  tal que o inteiro múltiplo de  $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$  só pode ser diferente de zero quando o pivô primário da  $(p+1-\xi)$ -ésima coluna está acima da  $(p-r+1)$ -ésima linha. Mostremos por indução em  $p$  e  $r$ .

- Consideremos a filtração  $\kappa-1$ , onde  $\kappa$  é a primeira coluna de  $\Delta$  associada a uma  $k$ -cadeia. Seja  $\xi$  tal que o bordo de  $h_k^{(\kappa)}$  está em  $F_{\kappa-1-\xi}C_k \setminus F_{\kappa-1-\xi-1}C_k$ .

1.  $Z_{\kappa-1}^r$  é gerado por  $k$ -cadeias contidas em  $F_{\kappa-1}C_k$  cujos bordos estão em  $F_{\kappa-1-r}C_{k-1}$ .

Notemos que existe apenas uma cadeia  $h_k^{(\kappa)}$  em  $F_{\kappa-1}C_k$ . Assim

(a) Se  $\xi < r$  então  $\partial h_k^{(\kappa)} \notin F_{\kappa-1-r}C_{k-1}$  e, portanto,  $Z_{\kappa-1}^r = 0$

(b) Se  $\xi > r$  então  $\partial h_k^{(\kappa)} \in F_{\kappa-1-r}C_{k-1}$  e, portanto,  $Z_{\kappa-1}^r = [h_k^{(\kappa)}]$

2. Por outro lado,  $\sigma_k^{(\kappa),r}$  é a  $k$ -cadeia associada à  $\kappa$ -ésima coluna de  $\Delta^r$ . Como não há mudanças de base na primeira coluna de  $\Delta_k$  então  $\sigma_k^{(\kappa),r} = h_k^{(\kappa)}$ . Além disso,  $\mu^{(\kappa),r} = 1$  se e somente se o bordo de  $h_k^{(\kappa)} = \sigma_k^{(\kappa),r}$  está acima da diagonal  $r$ . Assim

(a) Se  $\xi < r$  então  $\mu^{(\kappa),r} = 0$  e, portanto,  $[\mu^{(\kappa),r}\sigma_k^{(\kappa),r}] = 0$

(b) Se  $\xi > r$  então  $\mu^{(\kappa),r} = 1$  e, portanto,  $[\mu^{(\kappa),r}\sigma_k^{(\kappa),r}] = [\sigma_k^{(\kappa),r}] = [h_k^{(\kappa)}]$ .

Portanto  $Z_{\kappa-1}^r = [\mu^{(\kappa),r}\sigma_k^{(\kappa),r}]$ .

- Consideremos agora a diagonal auxiliar  $\xi_1$ , primeira em  $\Delta$  que intercepta  $\Delta_k$ , ou seja, as colunas de  $\Delta$  correspondentes às cadeias  $h_k^{(p+1)}, \dots, h_k^{(\kappa)}$  tem entradas não nulas acima da diagonal  $\xi_1$  e, portanto acima da  $(p-\xi_1+1)$ -ésima linha de  $\Delta$ .

1. Temos que  $Z_p^{\xi_1}$  é gerado pelas  $k$ -cadeias contidas em  $F_pC_k$  cujos bordos estão em  $F_{p-\xi_1}C_{k-1}$ . Como as colunas de  $\Delta$  correspondentes às cadeias  $h_k^{(p+1)}, \dots, h_k^{(\kappa)}$  tem entradas não nulas acima da  $(p-\xi_1+1)$ -ésima linha, então os bordos das cadeias  $h_k^{(p+1)}, \dots, h_k^{(\kappa)}$  estão na filtração  $F_{p-\xi_1}C_{k-1}$ , ou seja,

$$Z_p^{\xi_1} = [h_k^{(p+1)}, \dots, h_k^{(\kappa)}]$$

2. Como os bordos das cadeias  $h_k^{(p+1)}, \dots, h_k^{(\kappa)}$  estão todos acima de  $\xi_1$  então  $\sigma_k^{(j), \xi_1} = h_k^{(j)}$ ,  $j = \kappa, \dots, p+1$  e  $\mu^{(j), \xi_1} = 1$ ,  $j = \kappa, \dots, p+1$ . Logo,

$$[\mu^{(p+1), \xi_1} \sigma_k^{(p+1), r}, \dots, \mu^{(\kappa), \kappa-p+1+\xi_1} \sigma_k^{(\kappa), \kappa-p+1+\xi_1}] = [h_k^{(p+1)}, \dots, h_k^{(\kappa)}]$$

Portanto  $Z_p^{\xi_1} = [\mu^{(p+1), \xi_1} \sigma_k^{(p+1), r}, \dots, \mu^{(\kappa), \kappa-p+1+\xi_1} \sigma_k^{(\kappa), \kappa-p+1+\xi_1}]$ .

- Suponhamos que os geradores de  $Z_{p-1}^{r-1}$  correspondam as  $k$ -cadeias  $\sigma_k^{(p+1-\xi), r-\xi}$ ,  $\xi = 1, \dots, p+1-\kappa$  tais que o pivô primário da  $(p+1-\xi)$ -ésima coluna está acima da  $(p-r+1)$ -ésima linha. Se o pivô primário da  $(p+1)$ -ésima coluna está abaixo da  $(p-r+1)$ -ésima linha então  $Z_p^r = Z_{p-1}^{r-1}$  e este é o caso em que  $\mu^{(p+1), r} = 0$ . Suponhamos agora que o pivô primário da  $(p+1)$ -ésima coluna está acima da  $(p-r+1)$ -ésima linha. Seja  $\mathfrak{h}_k = b^{p+1} h_k^{(p+1)} + \dots + b^\kappa h_k^{(\kappa)}$  uma  $k$ -cadeia correspondente a um elemento de  $Z_{p, k-p}^r$ . Sabemos que  $\mathfrak{h}_k$  está em  $F_p C_k$  e seu bordo está acima da  $(p-r+1)$ -ésima linha. Se  $b^{p+1} = 0$  então  $\mathfrak{h}_k \in Z_{p-1}^{r-1}$  e o resultado segue da hipótese de indução. Suponhamos então que  $b^{p+1} \neq 0$ .

Pelo método da varredura,  $\sigma_k^{(p+1), r}$  tem  $c_{p+1}^{p+1, r}$  como coeficiente líder minimal. Mostremos que, como  $c_{p+1}^{p+1, r}$  é minimal então  $b^{p+1} = \alpha_1 c_{p+1}^{p+1, r}$ ,  $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$ . Suponhamos que  $b^{p+1}$  não é um inteiro múltiplo de  $c_{p+1}^{p+1, r}$ . Seja  $v > 0$  um inteiro de forma que  $vc_{p+1}^{p+1, r}$  é o maior múltiplo de  $c_{p+1}^{p+1, r}$  tal que  $vc_{p+1}^{p+1, r} < b^{p+1}$ . Assim temos  $vc_{p+1}^{p+1, r} < b^{p+1} < (v+1)c_{p+1}^{p+1, r}$ , ou seja,  $0 < b^{p+1} - vc_{p+1}^{p+1, r} < c_{p+1}^{p+1, r}$ . Segue que a  $k$ -cadeia  $\mathfrak{h}_k - v\sigma_k^{(p+1), r}$  tem coeficiente líder  $b^{p+1} - vc_{p+1}^{p+1, r} < c_{p+1}^{p+1, r}$ , o que contradiz o fato de  $c_{p+1}^{p+1, r}$  ser coeficiente líder minimal. Portanto  $b^{p+1} = \alpha_1 c_{p+1}^{p+1, r}$ ,  $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$ .

Dessa forma podemos reescrever  $\mathfrak{h}_k$  como

$$\mathfrak{h}_k = \alpha_1 \sigma_k^{(p+1), r} + (b^p - \alpha_1 c_p^{p+1, r}) h_k^{(p)} + \dots + (b^\kappa - \alpha_1 c_\kappa^{p+1, r}) h_k^{(\kappa)}.$$

Notemos que  $\mathfrak{h}_k - \alpha_1 \sigma_k^{(p+1), r} = (b^p - \alpha_1 c_p^{p+1, r}) h_k^{(p)} + \dots + (b^\kappa - \alpha_1 c_\kappa^{p+1, r}) h_k^{(\kappa)} \in F_{p-1}$ . Além disso, como  $\mathfrak{h}_k$  e  $\sigma_k^{(p+1), r}$  têm seus bordos acima da  $(p-r+1)$ -ésima linha então o bordo de  $\mathfrak{h}_k - \alpha_1 \sigma_k^{(p+1), r}$  está acima da  $(p-r+1)$ -ésima linha. Portanto,  $\mathfrak{h}_k - \alpha_1 \sigma_k^{(p+1), r} \in$

$Z_{p-1}^{r-1}$ . Por hipótese de indução temos que  $\mathfrak{h}_k - \alpha_1 \sigma_k^{(p+1),r} = \alpha_2 \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1} + \dots + \alpha_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}$  ou seja,

$$\mathfrak{h}_k = \alpha_1 \sigma_k^{(p+1),r} + \alpha_2 \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1} + \dots + \alpha_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}.$$

■

Notemos que as matrizes  $\Delta^r$  podem ter algumas entradas que não são números inteiros. No entanto, a Proposição 3.0.4 mostra que todos os pivôs na  $r$ -ésima diagonal de  $\Delta^r$  são sempre números inteiros.

**Proposição 3.0.4.** *Suponha que  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô primário ou um pivô mudança de base. Então  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um inteiro.*

**Demonstração:** Como  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô primário ou um pivô mudança de base então  $\Delta_{s,p+1}^r = 0$  para todo  $s > p - r + 1$ . Portanto,  $\sigma_k^{(p+1),r} \in Z_p^r$  e

$$\partial \sigma_k^{(p+1),r} = \Delta_{p-r+1,p+1}^r \sigma_{k-1}^{(p-r+1),r} + \dots + \Delta_{\kappa^*,p+1}^r \sigma_{k-1}^{(\kappa^*),r}$$

onde  $\kappa^*$  é a primeira coluna associada a uma  $(k-1)$ -cadeia. Segue que

$$\partial \sigma_k^{(p+1),r} \in \partial Z_p^r \subset Z_{p-r}^{r+1} = \mathbb{Z}[\mu^{(p-r+1),r+1} \sigma_k^{(p-r+1),r+1}, \mu^{(p-r),r} \sigma_k^{(p-r),r}, \dots, \mu^{(\kappa),2r-p+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),2r-p+\kappa}].$$

Portanto, o coeficiente  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r c_{p-r+1}^{p-r+1,r}$  de  $h_{k-1}^{(p-r+1)}$  em  $\partial \sigma_k^{(p+1),r}$  tem que ser um múltiplo  $\alpha$  do coeficiente  $c_{p-r+1}^{p-r+1,r+1}$  de  $h_{k-1}^{(p-r+1)} \in Z_{p-r}^{r+1}$ , ou seja,

$$\Delta_{p-r+1,p+1}^r c_{p-r+1}^{p-r+1,r} = \alpha c_{p-r+1}^{p-r+1,r+1}$$

onde  $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Assim temos

$$\Delta_{p-r+1,p+1}^r = \frac{\alpha c_{p-r+1}^{p-r+1,r+1}}{c_{p-r+1}^{p-r+1,r}}$$

Segue de (2.6) que  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um inteiro.

■

O próximo lema será usado no Teorema 3.0.6. Este lema detecta o aparecimento de torção na seqüência espectral.

**Lema 3.0.5.** *Suponha que  $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$ . Então*

$$Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} = \mathbb{Z}[\ell \sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}]$$

onde  $\ell = \text{mdc}\{\mu^{(r+p),r-1} c_{p+1}^{p+1,r-1} \Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1} c_{p+1}^{p+1,\bar{\kappa}-p-1} \Delta_{p+1,\bar{\kappa}}^{r-1}\} / c_{p+1}^{p+1,r}$ ,  $\kappa$  é a primeira coluna associada a uma  $k$ -cadeia e  $\bar{\kappa}$  é a primeira coluna associada a uma  $(k+1)$ -cadeia.

**Demonstração:** Como estamos supondo que  $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$  então  $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$  é um subconjunto de

$$Z_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r} \sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}]$$

mas por outro lado não é um subconjunto de

$$Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} = \mathbb{Z}[\mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1}, \mu^{(p-1),r-2} \sigma_k^{(p-1),r-2}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}].$$

Então  $\mu^{(p+1),r} = 1$  e  $Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$  contém um múltiplo inteiro  $\ell$  de  $\sigma_k^{(p+1),r}$ , ou seja,  $Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$  é igual a

$$\mathbb{Z}[\ell \sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1}, \mu^{(p-1),r-2} \sigma_k^{(p-1),r-2}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}].$$

Vamos agora determinar o inteiro  $\ell$ . Temos que

$$Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} = \mathbb{Z}[\mu^{(p+r),r-1} \sigma_{k+1}^{(p+r),r-1}, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1} \sigma_{k+1}^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1}]$$

Logo,

$$\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} = \mathbb{Z}[\mu^{(p+r),r-1} \partial \sigma_{k+1}^{(p+r),r-1}, \mu^{(p+r-1),r-2} \partial \sigma_{k+1}^{(p+r-1),r-2}, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1} \partial \sigma_{k+1}^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1}] \quad (3.1)$$

onde  $\mu^{(p+1-\xi),r-1-\xi} = 0$  quando o pivô primário da  $(p+1-\xi)$ -ésima coluna está abaixo da  $(p+1)$ -ésima linha. Para  $\xi = 0, \dots, p+r-\kappa$  com  $\mu^{(p+1-\xi),r-1-\xi} = 1$  temos  $\Delta_{s,p+r-\xi}^{r-1-\xi} = 0$  para todo  $s > i$  e portanto,

$$\partial \sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi} = \Delta_{p+1,p+r-\xi}^{r-1-\xi} \sigma_k^{(p+1),r-1-\xi} + \dots + \Delta_{\kappa,p+r-\xi}^{r-1-\xi} \sigma_k^{(\kappa),r-1-\xi}$$

já que os bordos  $\partial\sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi}$  com  $\Delta_{i,p+r-\xi}^{r-1-\xi} \neq 0$  para algum  $i > p + 1$  correspondem exatamente às linhas que têm pivôs primários abaixo  $(p + 1)$ -ésima linha e neste caso temos  $\mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi} = 0$ .

Assim, para  $\xi = 0, \dots, p + r - \kappa$ , quando  $\mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi} = 1$  temos

$$Z_{p-1}^{r-1} + [\partial\sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi}] = Z_{p-1}^{r-1} + [\Delta_{p+1,p+r-\xi}^{r-1-\xi}\sigma_k^{(p+1),r-1-\xi} + \dots + \Delta_{\kappa,p+r-\xi}^{r-1-\xi}\sigma_k^{(\kappa),r-1-\xi}] \quad (3.2)$$

Por outro lado,  $Z_{p-1}^{r-1} + [\partial\sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi}] \subset Z_{p-1}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$  implica que

$$Z_{p-1}^{r-1} + [\partial\sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi}] = [\ell_\xi\sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1}\sigma_k^{(p),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa}\sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}] \quad (3.3)$$

O coeficiente de  $h_k^{(p+1)}$  no conjunto de geradores do  $\mathbb{Z}$ -módulo em (3.2) é  $\Delta_{p+1,p+r-\xi}^{r-1-\xi}c_{p+1}^{p+1,r-1-\xi}$ . Por outro lado, o coeficiente de  $h_k^{(p+1)}$  no conjunto de geradores do  $\mathbb{Z}$ -módulo em (3.3) é  $\ell_\xi c_{p+1}^{p+1,r}$ . Segue que  $\ell_\xi = \Delta_{p+1,p+r-\xi}^{r-1-\xi}c_{p+1}^{p+1,r-1-\xi}/c_{p+1}^{p+1,r}$ .

Portanto, temos que  $\ell = \text{mdc}\{\mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi}\ell_\xi\}$  onde  $\xi = 0, \dots, p + r - \bar{\kappa}$ , ou seja,

$$\ell = \text{mdc}\{\mu^{(r+p),r-1}c_{p+1}^{p+1,r-1}\Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}),\bar{\kappa}-p-1}c_{p+1}^{p+1,\bar{\kappa}-p-1}\Delta_{p+1,\bar{\kappa}}^{\bar{\kappa}-p-1}\}/c_{p+1}^{p+1,r}$$

■

**Teorema 3.0.6.** *A matriz  $\Delta^r$  obtida no método da varredura aplicado a  $\Delta$  determina  $E_p^r$ .*

**Demonstração:** Mostremos que

$$E_{p,k-p}^r = \frac{Z_{p,k-p}^r}{Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} + \partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}}$$

é zero ou um módulo finitamente gerado cujo gerador corresponde a uma  $k$ -cadeia associada à  $(p + 1)$ -ésima coluna de  $\Delta^r$ .

Notemos que  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  está na  $r$ -ésima diagonal e tem um papel crucial no processo de determinar  $E_{p,k-p}^r$ . Vamos então identificar o efeito que as entradas na  $r$ -ésima diagonal auxiliar e  $\Delta^r$  têm em determinar os geradores dos  $\mathbb{Z}$ -módulos  $E_p^r$ .

Uma entrada não nula na  $r$ -ésima diagonal auxiliar pode ser um pivô primário, um pivô mudança de base ou estar em uma coluna acima de um pivô primário. Uma entrada nula pode estar numa coluna acima de um pivô primário ou todas as entradas abaixo da mesma são também iguais a zero.

1. Suponha que a entrada  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  tenha sido identificada pelo método varredura como um pivô primário. Segue da Proposição 2.3.1 que  $\Delta_{s,p+1}^r = 0$  para todo  $s > p - r + 1$ .

Portanto, a cadeia associada à  $(p + 1)$ -ésima coluna em  $\Delta^r$  corresponde a um gerador de  $Z_{p,k-p}^r$ . Esta cadeia é uma combinação linear sobre  $\mathbb{Q}$  de cadeias associadas às  $h_k$  colunas de  $\Delta^{r-1}$  à esquerda da  $(p + 1)$ -ésima coluna tal que o coeficiente da  $(p + 1)$ -ésima  $h_k$  coluna é um inteiro não nulo. Pelo método da varredura esta cadeia também é uma combinação linear sobre  $\mathbb{Z}$  das  $h_k$  colunas de  $\Delta$  à esquerda da  $(p + 1)$ -ésima coluna. Esta cadeia é  $\sigma_k^{(p+1),r}$  e, como o coeficiente de  $h_k^{(p+1)}$  é um inteiro não nulo,  $\sigma_k^{(p+1),r}$  não está contido nos geradores de  $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$ .

Afirmção 1: Se  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  foi identificado pelo método da varredura como um pivô primário, então  $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$ .

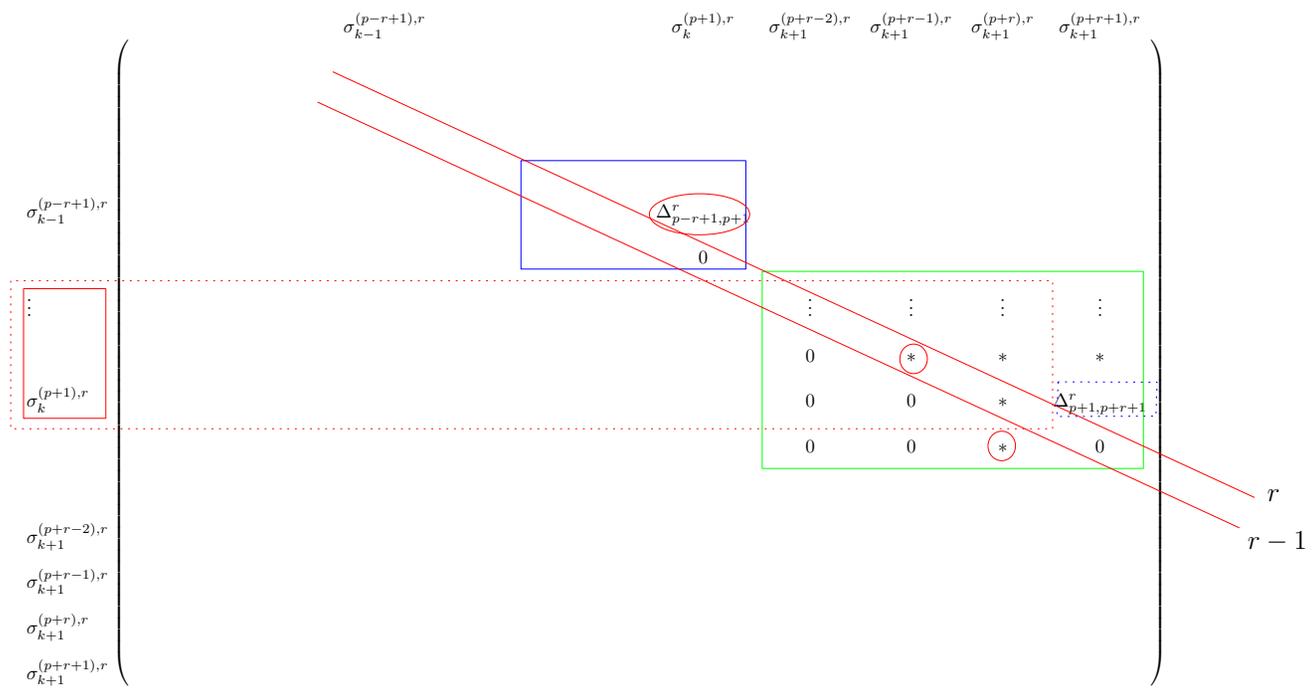
Os geradores de  $Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$  devem corresponder às  $(k+1)$ -cadeias associadas às  $h_{k+1}$  colunas com a propriedade que seus bordos estão acima da  $(p + 1)$ -ésima linha e conseqüentemente todas as entradas abaixo da  $(p + 1)$ -ésima linha são iguais a zero. Portanto, as entradas destas  $h_{k+1}$  colunas na  $(p + 1)$ -ésima linha devem, pelo método da varredura, ser um pivô primário ou uma entrada nula. Veja a Figura 3.1.

Segue da Proposição 2.3.2 que a  $(p + 1)$ -ésima linha não pode conter um pivô primário, já que assumimos que a  $(p + 1)$ -ésima coluna tem um pivô primário. Portanto, as entradas destas  $h_{k+1}$  colunas na  $(p + 1)$ -ésima linha devem ser nulas. Dessa forma  $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$  não contém em seu conjunto de geradores um múltiplo do gerador  $\sigma_k^{(p+1),r}$ . A afirmação segue.

Pela Proposição 3.0.3 temos que  $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ .

2. Se a entrada  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  foi identificada pelo método da varredura como um pivô mudança de base então o método garante que  $\Delta_{p-r+1,p+1}^{r+1} = 0$ . Além disso,  $\Delta_{s,p+1}^r = 0$  para todo  $s > p - r + 1$  pela Proposição 2.3.1.

Figura 3.1:  $\partial Z^{r-1}_{p+r-1, (k+1)-(p+r-1)} \subseteq Z^{r-1}_{p-1, k-(p-1)}$ .



Portanto, assim como no caso anterior, o gerador correspondente à  $k$ -cadeia associada à  $(p+1)$ -ésima coluna  $\sigma_k^{(p+1),r}$  de  $\Delta^r$  é um gerador de  $Z_{p,k-p}^r$ .

Portanto, temos que analisar a  $(p+1)$ -ésima linha. Veja 3.2.

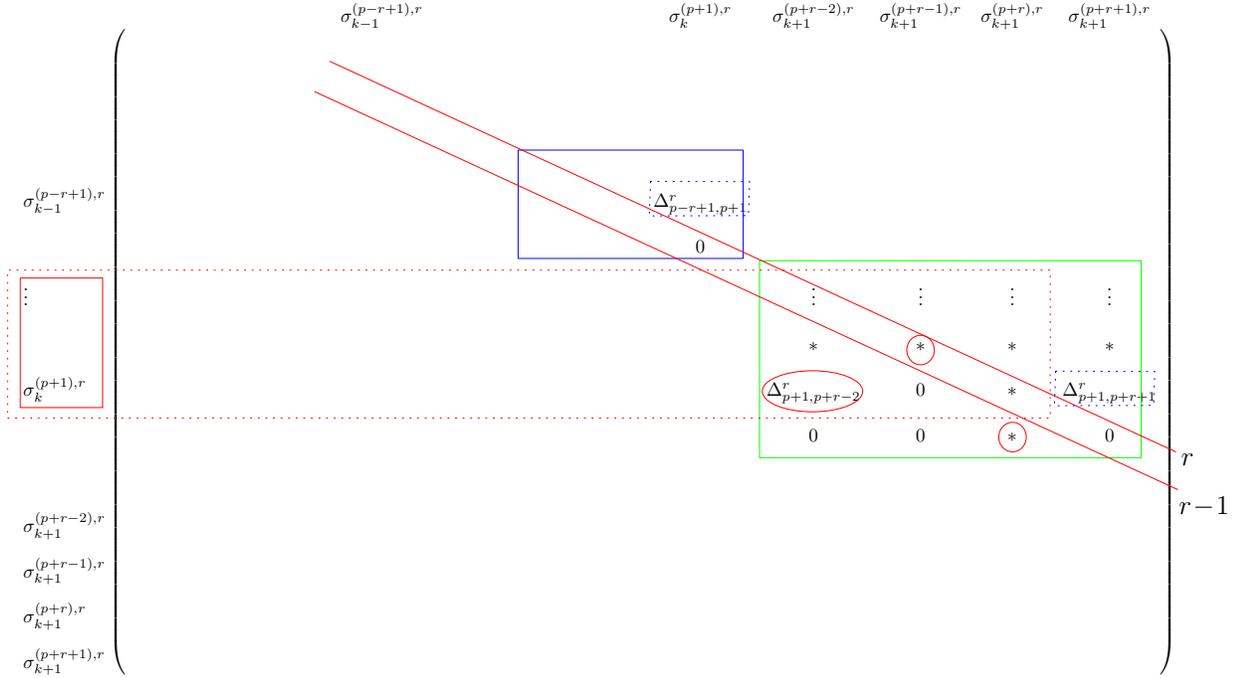


Figura 3.2:  $\partial Z_{p+r-1, (k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1, k-(p-1)}^{r-1}$ .

Existem duas possibilidades:

- (a)  $\partial Z_{p+r-1, (k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1, k-(p-1)}^{r-1}$ , ou seja, todos os bordos de elementos em  $Z_{p+r-1, (k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$  estão acima da  $p$ -ésima linha.

Neste caso, assim como antes, pela Proposição 3.0.3  $E_{p, k-p}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1), r}]$ .

- (b)  $\partial Z_{p+r-1, (k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1, k-(p-1)}^{r-1}$ , ou seja, existem elementos que estão em  $Z_{p+r-1, (k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$  cujo bordo tem uma entrada não nula na  $(p+1)$ -ésima linha. Esta, por sua vez, é necessariamente um pivô primário.

Pelo Lema 3.0.5  $E_{p, k-p}^r = \frac{\mathbb{Z}}{\ell\mathbb{Z}}[\sigma_k^{(p+1), r}]$ .

3. Se a entrada  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é não nula, mas não é um pivô primário nem um pivô mudança de base então deve ser uma entrada acima de um pivô primário. Em outras palavras, existe  $s > p - r + 1$  tal que  $\Delta_{s,p+1}^r$  é um pivô primário. Segue que  $\sigma_k^{(p+1),r}$  não está em  $Z_{p,k-p}^r$ . Logo  $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} = Z_{p,k-p}^r$  e, portanto,  $E_{p,k-p}^r = 0$ .

4. Se a entrada  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é uma entrada nula então temos as seguintes possibilidades:

(a) Existe um pivô primário abaixo de  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ , ou seja, existe  $s > p - r + 1$  tal que  $\Delta_{s,p+1}^r$  é um pivô primário. Neste caso o gerador correspondente à  $k$ -cadeia associada à  $(p+1)$ -ésima coluna  $\sigma_k^{(p+1),r}$  não é um gerador de  $Z_p^r$  e, portanto,  $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} = Z_{p,k-p}^r$ . Segue que  $E_{p,k-p}^r = 0$ .

(b)  $\Delta_{s,p+1}^r = 0$  para todo  $s > p - r + 1$ . Neste caso, o gerador correspondente à  $k$ -cadeia associada à  $(p+1)$ -ésima coluna  $\sigma_k^{(p+1),r}$  em  $\Delta^r$  é um gerador de  $Z_{p,k-p}^r$ . Portanto, devemos analisar a  $(p+1)$ -ésima linha. Temos as seguintes possibilidades:

i.  $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$ , ou seja, todos os bordos de elementos em  $Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$  estão associados a colunas cujas entradas não nulas estão acima da  $p$ -ésima linha.

Neste caso, assim como antes, pela Proposição 3.0.3  $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ .

ii.  $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$ , ou seja,  $Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$  contém elementos cujo bordo está associado a uma coluna que tem uma entrada não nula na  $(p+1)$ -ésima linha. Pela Proposição 3.0.3 e pelo Lema 3.0.5  $E_{p,k-p}^r = \frac{\mathbb{Z}}{\ell\mathbb{Z}}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$ .

5. A entrada  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  não está em  $\Delta_k^r$ . Isto inclui o caso em que  $p - r + 1 < 0$ , ou seja,  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  não está na matriz  $\Delta^r$ .

A análise de  $E_p^r$  é muito semelhante ao caso anterior, ou seja, existem duas possibilidades:

(a) Existe um pivô primário na  $(p+1)$ -ésima coluna em uma diagonal auxiliar  $\bar{r} < r$ .

Neste caso o gerador correspondente à  $k$ -cadeia associada à  $(p+1)$ -ésima coluna  $\sigma_k^{(p+1),r}$  não é um gerador de  $Z_{p,k-p}^r$ . Portanto  $Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1} = Z_{p,k-p}^r$  e  $E_{p,k-p}^r = 0$ .

(b) Todas as entradas em  $\Delta^r$  na  $(p+1)$ -ésima coluna em diagonais auxiliares menores que  $r$  são nulas, ou seja, o gerador correspondente à  $k$ -cadeia associada à  $(p+1)$ -ésima coluna  $\sigma_k^{(p+1),r}$  em  $\Delta^r$  é um gerador de  $Z_{p,k-p}^r$ . Então temos que analisar a  $(p+1)$ -ésima linha.

- i. Se  $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$  então, pela Proposição 3.0.3,  $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ .
- ii. Se  $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \not\subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$  então, pelo Lema 3.0.5,  $E_{p,k-p}^r = \frac{\mathbb{Z}}{\ell\mathbb{Z}}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ .

■

O Teorema 3.0.6 mostra que a seqüência de matrizes produzida pelo método da varredura determina os geradores dos espaços  $E_p^r$ . A demonstração deste teorema mostra como isto acontece. As  $k$ -cadeias associadas as colunas de  $\Delta_k^r$  à esquerda da  $p$ -ésima coluna geram o  $\mathbb{Z}$ -módulo  $Z_p^r$ .

### 3.0.1 Filtrações mais grossas

O primeiro passo para a generalização dos nossos resultados para uma decomposição de Morse é considerar que cada conjunto de Morse  $M_p$  da decomposição não contém apenas uma singularidade, mas uma união finita de singularidades e as órbitas conectando as mesmas. Inicialmente, consideramos uma filtração mais grossa  $\mathcal{F}$  no complexo de Morse  $(\mathbb{Z}\langle \text{crit } f \rangle, \Delta)$  associado a uma função de Morse  $f$  e uma filtração  $F$ . Isto propõe um modelo de uma decomposição de Morse com filtração mais fina  $\mathcal{F}$  e uma matriz de conexão como na Figura 3.3.

Consideremos a filtração  $\mathcal{F}$  dada por  $\mathcal{F}_0 = \{F_0, \dots, F_{m_1}\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{F_0, \dots, F_{m_1}\}$ ,  $\mathcal{F}_2 = \{F_0, \dots, F_{m_2}\}$ ,  $\dots$ ,  $\mathcal{F}_m = \{F_0, \dots, F_m\}$  com  $m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m$ , onde  $F = \{F_0, F_1, \dots, F_m\}$  é tal que só existe uma singularidade  $h_k^{(p)} \in F_p \setminus F_{p-1}$ . Veja Figura 3.3. Assim  $\mathcal{F}_P \setminus \mathcal{F}_{P-1} = F_{m_P} \setminus F_{m_{P-1}}$ . Seja  $J_P = \{m_{P-1} + 1, \dots, m_P\}$ . Note que os intervalos  $J_P \subset \{1, \dots, m\}$  são todos disjuntos e seus elementos indexam a filtração  $F$ . Lembrando que cada  $F_p$  está representado na matriz de conexão pelas colunas à esquerda da coluna  $p+1$ , temos

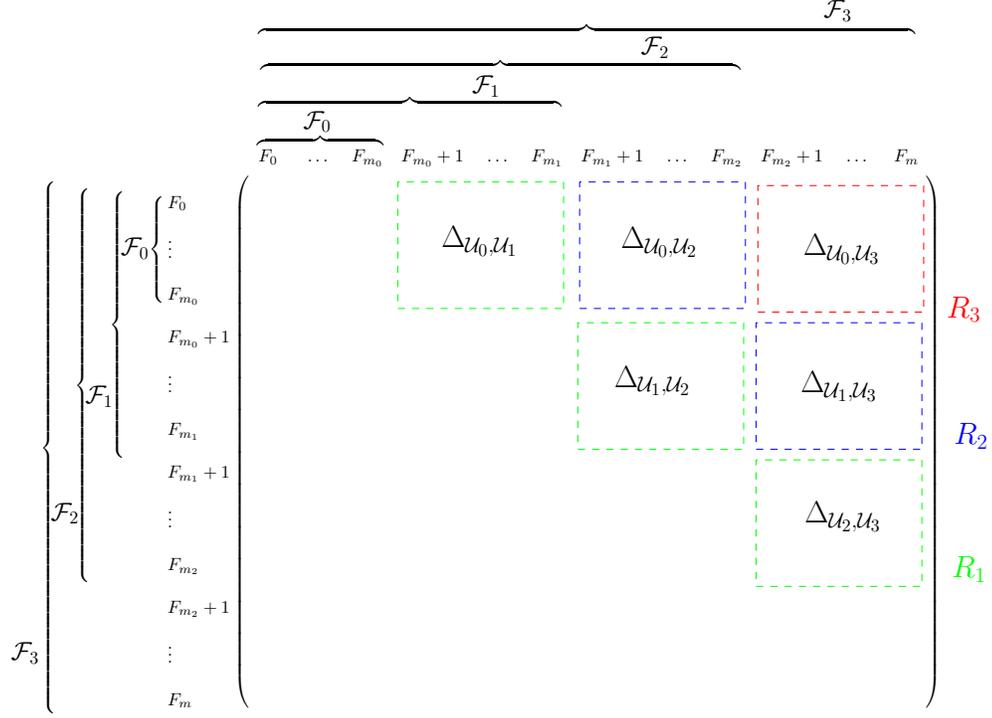


Figura 3.3: Filtração mais grossa.

que levar em conta a translação por 1. Assim, dado um conjunto  $J_P$ , considere o conjunto transladado  $\mathcal{J}_P = \{m_{P-1} + 2, \dots, m_P + 1\}$ .

Consideremos o complexo  $C$  com a filtração  $\mathcal{F}$ . Neste caso, para cada  $P$ ,  $M_P = \{h_k^{(p)} \in \mathcal{F}_P \setminus \mathcal{F}_{P-1}\} = \{h_k^{(p)}, p \in \mathcal{J}_P\}$  e, portanto, existe uma outra seqüência espectral  $(E_{P,Q}^R, \Delta)$ .

Temos que  $\mathcal{F}_P C \setminus \mathcal{F}_{P-1} C$  corresponde na matriz de conexão a

$$\Delta_{\mathcal{J}_{P-1}, \mathcal{J}_P} = (\Delta_{s,\ell}) \quad \begin{array}{l} s \in \mathcal{J}_{P-1} \\ \ell \in \mathcal{J}_P \end{array}$$

Consideremos  $\mathcal{F}_P = \{F_1, \dots, F_{m_P}\}$ ,  $\mathcal{F}_{P-1} = \{F_1, \dots, F_{m_{P-1}}\}$  e  $\mathcal{F}_{P-R} = \{F_1, \dots, F_{m_{P-R}}\}$ . Seja  $Q$  tal que  $P + Q = k$ .

Podemos supor que existem pontos críticos de índice  $k$  em  $\mathcal{F}_P \setminus \mathcal{F}_{P-R}$ . Temos que

$$\begin{aligned} Z_{P,Q}^R &= \{c \in \mathcal{F}_P C_k \mid \partial c \in \mathcal{F}_{P-R} C_{k-1}\} \\ &= \{c \in F_{m_P} C_k \mid \partial c \in F_{m_{P-R}} C_{k-1}\} \\ &= Z_{m_P, k-m_P}^{m_P-m_{P-R}} \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.0.3

$$Z_{P,Q}^R = \mathbb{Z}[\mu^{(m_P+1), m_P-m_{P-R}} \sigma_k^{(m_P+1), m_P-m_{P-R}}, \dots, \mu^{(\kappa), \kappa-m_{P-R}-1} \sigma_k^{(\kappa), \kappa-m_{P-R}-1}]$$

onde  $\kappa$  é a primeira coluna de  $\Delta$  associada a uma coluna  $h_k$ . Note que as singularidades não precisam estar ordenadas em ordem crescente com respeito ao índice. Analogamente,

$$\begin{aligned} Z_{P-1, Q+1}^{R-1} &= \{c \in \mathcal{F}_{P-1} C_k \mid \partial c \in \mathcal{F}_{P-R} C_{k-1}\} \\ &= \{c \in F_{m_{P-1}} C_k \mid \partial c \in F_{m_{P-R}} C_{k-1}\} \\ &= Z_{m_{P-1}, k-m_{P-1}}^{m_{P-1}-m_{P-R}} \end{aligned}$$

Logo,

$$Z_{P-1, Q+1}^{R-1} = \mathbb{Z}[\mu^{(m_{P-1}+1), m_{P-1}-m_{P-R}} \sigma_k^{(m_{P-1}+1), m_{P-1}-m_{P-R}}, \dots, \mu^{(\kappa), \kappa-m_{P-R}-1} \sigma_k^{(\kappa), \kappa-m_{P-R}-1}].$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} Z_{P+R-1, Q-R+2}^{R-1} &= \{c \in \mathcal{F}_{P+R-1} C_k \mid \partial c \in \mathcal{F}_P C_{k-1}\} \\ &= \{c \in F_{m_{P+R-1}} C_{k+1} \mid \partial c \in F_{m_{P-R}} C_k\} \\ &= Z_{m_{P+R-1}, k+1-m_{P+R-1}}^{m_{P+R-1}-m_P} \end{aligned}$$

e, portanto,  $Z_{P+R-1, Q-R+2}^{R-1}$  é dado por

$$\mathbb{Z}[\mu^{(m_{P+R-1}+1), m_{P+R-1}-m_{P-R}} \sigma_k^{(m_{P+R-1}+1), m_{P+R-1}-m_{P-R}}, \dots, \mu^{(\bar{\kappa}), \bar{\kappa}-m_{P-R}-1} \sigma_k^{(\bar{\kappa}), \bar{\kappa}-m_{P-R}-1}].$$

Dessa forma ficam determinados os espaços  $E_{P,Q}^R$  da seqüência espectral associada a  $\mathcal{F}$ . Provamos então o resultado seguinte.

**Teorema 3.0.7.** *Seja  $\varphi$  o fluxo gradiente de uma função de Morse  $f$ ,  $\mathcal{D}(M, \langle \varphi \rangle) = \{M_P, p = 1, \dots, \mathfrak{M}\}$  uma decomposição de Morse de  $M$ ,  $(C, \Delta)$  onde  $\Delta$  é a matriz de conexão de  $\mathcal{D}(M, \langle \varphi \rangle)$  e uma filtração  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_P\}_{i=1}^{\mathfrak{M}}$  com  $\mathcal{F}_P = \{F_1, \dots, F_{m_P}\}$ , tal que, para cada  $P$ ,  $M_P = \{h_k^{(p)}, p \in \mathcal{J}_P\}$ . Seja  $(E_{P,Q}^R, d_{P,Q}^R)$  a seqüência espectral associada a  $C$  quando consideramos a filtração  $\mathcal{F}$ . Então os geradores dos espaços  $E_{P,Q}^R$  são determinados pelas matrizes de conexão  $\Delta^r$  obtidas pelo método da varredura aplicado a  $\Delta$ .*

# Capítulo 4

## As Diferenciais da Seqüência Espectral

Neste capítulo mostramos como o método da varredura aplicado a  $\Delta$  induz as diferenciais  $d_p^r : E_p^r \rightarrow E_{p-r}^r$  da seqüência espectral. Quando  $E_p^r$  e  $E_{p-r}^r$  são ambos não nulos, a entrada  $\Delta_{p-r+1, p+1}^r$  em  $\Delta^r$  é um pivô primário, um pivô mudança de base ou um zero com uma coluna de entradas nulas abaixo. Neste caso  $\Delta_{p-r+1, p+1}^r$  induz  $d_p^r$ . Nós denotamos por  $\kappa$  a primeira coluna da matriz de conexão associada a uma  $k$ -cadeia e por  $\bar{\kappa}$  a primeira coluna associada a uma  $(k+1)$ -cadeia.

No Capítulo 2 definimos  $\sigma_k^{(p+1), r+1}$  como uma combinação linear inteira de  $\{h_k\}$ 's onde  $c_{p+1}^{p+1, r}$  é o menor coeficiente líder. A próxima proposição mostra que tal combinação linear é também uma combinação linear de  $\sigma_k^{(j), \xi} \in \Delta^\xi$ ,  $j = \kappa, \dots, p+1$ ,  $\xi = r-p-1+\kappa, \dots, r$  para  $j - \xi = p-r+1$ . Em ambos os casos as combinações lineares minimizam  $u$ .

**Proposição 4.0.8.** *Dado um pivô mudança de base  $\Delta_{p-r+1, p+1}^r$ , existem inteiros  $b_{p+1}, b_p, \dots, b_\kappa$  tais que o bordo de*

$$b_{p+1}\sigma_k^{(p+1), r} + b_p\mu^{(p), r-1}\sigma_k^{(p), r-1} + \dots + b_\kappa\mu^{(\kappa), r-p-1+\kappa}\sigma_k^{(\kappa), r-p-1+\kappa}$$

*está acima da  $(p-r+1)$ -ésima linha. Além disso, o menor  $b_{p+1}$  que satisfaz tal propriedade é  $u$ .*

**Demonstração:** Como  $\Delta_{p-r+1, p+1}^r$  é um pivô mudança de base,  $\Delta_{s, p+1}^r = 0$  para todo

$s > p - r + 1$  e  $\Delta_{p-r+1,p+1}^{r+1} = 0$ . Portanto,  $\sigma_k^{(p+1),r+1} \in Z_p^{r+1} \subset Z_p^r$ . Pela Proposição 3.0.3

$$Z_p^r = \mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r} \sigma_k^{(p+1),r}, \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}]$$

em outras palavras,

$$\sigma_k^{(p+1),r+1} = b_{p+1} \mu^{(p+1),r} \sigma_k^{(p+1),r} + b_p \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1} + \dots + b_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}$$

com  $b_{p+1}, \dots, b_\kappa$  inteiros. Como  $c_{p+1}^{p+1,r+1} = u c_{p+1}^{p+1,r}$  então neste caso  $b_{p+1} = u$ . Isto mostra que os inteiros  $b_{p+1}, b_p, \dots, b_\kappa$  existem e que  $u$  é um possível valor para  $b_{p+1}$ .

Finalmente, mostremos que  $u$  é o menor inteiro positivo tal que  $b_p, \dots, b_\kappa$  existem, ou seja, o menor  $b_{p+1}$  é  $u$ . Suponhamos que  $\bar{u} < u$  é um inteiro positivo tal que existem  $\bar{b}_p, \dots, \bar{b}_\kappa$  com

$$\sigma_k^{(p+1),r+1} = \bar{u} \mu^{(p+1),r} \sigma_k^{(p+1),r} + \bar{b}_p \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1} + \dots + \bar{b}_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}.$$

Então

$$\begin{aligned} \sigma_k^{(p+1),r+1} &= \bar{u} \mu^{(p+1),r} c_{p+1}^{p+1,r} h_k^{(p+1)} + (\bar{u} \mu^{(p+1),r} c_p^{p+1,r} + \bar{b}_p \mu^{(p),r-1} c_p^{p,r-1}) h_k^{(p)} + \dots \\ &\dots + (\bar{u} \mu^{(p+1),r} c_\kappa^{p+1,r} + \bar{b}_p \mu^{(p),r-1} c_\kappa^{p,r-1} + \dots + \bar{b}_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} c_\kappa^{\kappa,r-p-1+\kappa}) h_k^{(\kappa)} \end{aligned}$$

o que contradiz a propriedade de minimalidade de  $u$  como foi definido em (2.2). Portanto  $u$  é o menor inteiro positivo tal que  $b_p, \dots, b_\kappa$  existe. ■

A próxima proposição estabelece uma fórmula para  $u$  quando a entrada  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô mudança de base. Em todos os outros casos  $u = 1$ .

**Proposição 4.0.9.** *Suponhamos que  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô mudança de base e seja  $u = \frac{c_{p+1}^{p+1,r+1}}{c_{p+1}^{p+1,r}}$  o inteiro definido em (2.1). Se*

$$v = \text{mdc}\{\mu^{(p),r-1} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-1} \Delta_{p-r+1,p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),\kappa-p+r-1} c_{p-r+1}^{p-r+1,\kappa-p+r-1} \Delta_{p-r+1,\kappa}^{\kappa-p+r-1}\} / c_{p-r+1}^{p-r+1,r}$$

e  $\lambda = \frac{v}{\text{mdc}\{\Delta_{p-r+1,p+1}^r, v\}}$  então  $u = \lambda$ .

**Demonstração:** Segue da Proposição 4.0.8 que  $u$  em (2.1) é o menor inteiro positivo tal que existem inteiros  $b_p, \dots, b_\kappa$  com

$$\sigma_k^{(p+1),r+1} = u\mu^{(p+1),r}\sigma_k^{(p+1),r} + b_p\mu^{(p),r-1}\sigma_k^{(p),r-1} + \dots + b_\kappa\mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa}\sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}.$$

Como  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô mudança de base, então  $\Delta_{s,p+1}^r = 0$  para todo  $s > p - r + 1$  e, portanto,  $\mu^{(p+1),r} = 1$ . Calculando o bordo de ambos os lados da equação temos que

$$\partial\sigma_k^{(p+1),r+1} = u\partial\sigma_k^{(p+1),r} + b_p\mu^{(p),r-1}\partial\sigma_k^{(p),r-1} + \dots + b_\kappa\mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa}\partial\sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \quad (4.1)$$

Como  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô mudança de base então  $\Delta_{p-r+1,p+1}^{r+1} = 0$ . Portanto, o coeficiente de  $h_{k-1}^{(p-r+1)}$  em  $\partial\sigma_k^{(p+1),r+1}$  é zero. Além disso,

$$\begin{aligned} \partial\sigma_k^{(p+1),r} &= \Delta_{p-r+1,p+1}^r c_{p-r+1}^{p-r+1,r} h_{k-1}^{(p-r+1)} + \dots \\ \partial\sigma_k^{(p),r-1} &= \Delta_{p-r+1,p}^{r-1} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-1} h_{k-1}^{(p-r+1)} + \dots \\ &\vdots \\ \partial\sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa} &= \Delta_{p-r+1,\kappa}^{r-p-1+\kappa} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-p-1+\kappa} h_{k-1}^{(p-r+1)} + \dots \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de  $h_{k-1}^{(p-r+1)}$  em ambos os lados da equação (4.1) temos

$$0 = u\Delta_{p-r+1,p+1}^r c_{p-r+1}^{p-r+1,r} + b_p\mu^{(p),r-1}\Delta_{p-r+1,p}^{r-1} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-1} + \dots + b_\kappa\mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa}\Delta_{p-r+1,\kappa}^{r-p-1+\kappa} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-p-1+\kappa}$$

Assim,

$$\begin{aligned} u\Delta_{p-r+1,p+1}^r c_{p-r+1}^{p-r+1,r} &= -[b_p\mu^{(p),r-1}\Delta_{p-r+1,p}^{r-1} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-1} + \dots + b_\kappa\mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa}\Delta_{p-r+1,\kappa}^{r-p-1+\kappa} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-p-1+\kappa}] \\ u\Delta_{p-r+1,p+1}^r &= \frac{-[b_p\mu^{(p),r-1}\Delta_{p-r+1,p}^{r-1} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-1} + \dots + b_\kappa\mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa}\Delta_{p-r+1,\kappa}^{r-p-1+\kappa} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-p-1+\kappa}]}{c_{p-r+1}^{p-r+1,r}} \end{aligned}$$

Segue da Proposição 4.0.8, sobre a propriedade de minimalidade de  $u$  que

$$u\Delta_{p-r+1,p+1}^r c_{p-r+1}^{p-r+1,r} = \text{mdc}\{\mu^{(p),r-1}\Delta_{p-r+1,p}^{r-1} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa}\Delta_{p-r+1,\kappa}^{r-p-1+\kappa} c_{p-r+1}^{p-r+1,r-p-1+\kappa}\}$$

i.e,  $u\Delta_{p-r+1,p+1}^r = v$ . Portanto,

$$\text{mmc}\{u\Delta_{p-r+1,p+1}^r, \Delta_{p-r+1,p+1}^r\} = \text{mmc}\{\Delta_{p-r+1,p+1}^r, v\}.$$

Equivalentemente,

$$u\Delta_{p-r+1,p+1}^r = mmc\{\Delta_{p-r+1,p+1}^r, v\}.$$

Dividindo ambos os lados da igualdade pelo produto  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r \cdot v$  a equação se torna

$$\frac{u}{v} = \frac{mmc\{\Delta_{p-r+1,p+1}^r, v\}}{\Delta_{p-r+1,p+1}^r \cdot v}$$

que é equivalente a

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{mdc\{\Delta_{p-r+1,p+1}^r, v\}}$$

ou seja,

$$u = \frac{v}{mdc\{\Delta_{p-r+1,p+1}^r, v\}} = \lambda.$$

■

**Lema 4.0.10.** *Seja  $E_p^r = \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]$  onde*

$$t = \frac{mdc\{\mu^{(r+p),r-1} c_{p+1}^{p+1,r-1} \Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{k}),\bar{k}-p-1} c_{p+1}^{p+1,\bar{k}-p-1} \Delta_{p+1,\bar{k}}^{\bar{k}-p-1}\}}{c_{p+1}^{p+1,r}}$$

e suponha que  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô mudança de base.

1. Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é um pivô mudança de base, então

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{mdc\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$$

2. Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo, ou seja,  $\Delta_{s,p+r+1}^r = 0$  para  $s > p+1$ , então

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{t\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$$

Analogamente, se  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo então as fórmulas acima valem para  $u = 1$ .

**Demonstração:** Como  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô mudança de base ou uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo então  $\Delta_{p-r+1,p+1}^{r+1} = 0$  e, portanto,  $\sigma_k^{(p+1),r+1} \in Z_p^{r+1}$ . Segue do Lema 3.0.5 que  $E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{s\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$  onde  $s$  é igual a

$$\frac{\text{mdc}\{\mu^{(p+r+1),r} c_{p+1}^{p+1,r} \Delta_{p+1,p+r+1}^r, \mu^{(r+p),r-1} c_{p+1}^{p+1,r-1} \Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{k}),\bar{k}-p-1} c_{p+1}^{p+1,\bar{k}-p-1} \Delta_{p+1,\bar{k}}^{\bar{k}-p-1}\}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}} =$$

$$c_{p+1}^{p+1,r} \frac{\text{mdc}\{\mu^{(p+r+1),r} \Delta_{p+1,p+r+1}^r, \frac{\text{mdc}\{\mu^{(r+p),r-1} c_{p+1}^{p+1,r-1} \Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{k}),\bar{k}-p-1} c_{p+1}^{p+1,\bar{k}-p-1} \Delta_{p+1,\bar{k}}^{\bar{k}-p-1}\}}{c_{p+1}^{p+1,r}}\}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}}$$

Como  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é um pivô mudança de base ou uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo então  $\mu^{(p+r+1),r} = 1$ . Logo

$$s = c_{p+1}^{p+1,r} \frac{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}}$$

Como  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô mudança de base então

$$\frac{c_{p+1}^{p+1,r}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}} = \frac{1}{u}$$

Substituindo o valor de  $s$  na expressão de  $E_{p,k-p}^{r+1}$  obtemos (1) e (2).

Por outro lado, é fácil ver que se  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo então não ocorre mudança de base e portanto  $c_{p+1}^{p+1,r} = c_{p+1}^{p+1,r+1}$ , ou seja,  $u = 1$ . ■

**Observação 4.0.11.** Como uma consequência direta da prova do Lema 4.0.10 temos que quando  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô mudança de base,  $u \leq \text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\} \leq t$ .

**Lema 4.0.12.** Seja  $E_p^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$  e suponha que  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô mudança de base.

Então

1. Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é um pivô primário, então

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{\Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$$

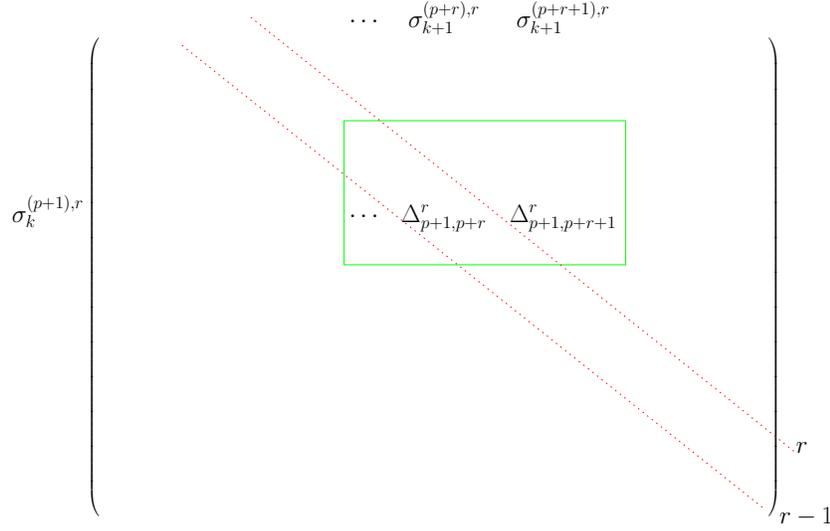


Figura 4.1: Diferença entre  $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$  e  $\partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r$ .

2. Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo, então

$$E_{p,k-p}^{r+1} = u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]$$

Analogamente, se  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo então as fórmulas acima valem para  $u = 1$ .

**Demonstração:** Como  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô mudança de base ou uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo então  $\Delta_{p-r+1,p+1}^{r+1} = 0$  e, portanto,  $\sigma_k^{(p+1),r+1} \in Z_p^{r+1}$ . Segue que  $Z_{p-1,k-(p-1)}^r \subsetneq Z_{p,k-p}^{r+1}$ . Além disso, como  $E_p^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$  então temos que  $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1} \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$ , isto é, para todo  $\sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi}$ ,  $\xi = 0, \dots, p+r-\bar{k}$ , temos duas possibilidades: ou  $\partial \sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi} \in Z_{p-1,k-(p-1)}^{r-1}$  e logo  $\Delta_{p+1,p+r-\xi}^{r-1-\xi} = 0$  ou  $\sigma_{k+1}^{(p+r-\xi),r-1-\xi}$  tem um pivô primário abaixo da  $(p+1)$ -ésima linha e logo  $\mu^{(p+r-\xi),r-1-\xi} = 0$ . Mas a diferença entre  $\partial Z_{p+r-1,(k+1)-(p+r-1)}^{r-1}$  e  $\partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r$  é que este último inclui o bordo da  $(p+r+1)$ -ésima coluna. Veja Figura 4.1. Mas a hipótese é que o elemento na  $(p+r+1)$ -ésima coluna e  $(p+1)$ -ésima linha é  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ . Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é um pivô mudança de base então  $E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{s\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$

onde  $s$  é dado por

$$\begin{aligned} & \frac{\text{mdc}\{\mu^{(p+r+1),r} c_{p+1}^{p+1,r} \Delta_{p+1,p+r+1}^r, \mu^{(p+r),r-1} c_{p+1}^{p+1,r-1} \Delta_{p+1,p+r}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{k}),\bar{k}-p-1} c_{p+1}^{p+1,\bar{k}-p-1} \Delta_{p+1,\bar{k}}^{\bar{k}-p-1}\}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}} \\ &= \frac{\mu^{(p+r+1),r} c_{p+1}^{p+1,r} \Delta_{p+1,p+r+1}^r}{c_{p+1}^{p+1,r+1}} \\ &= \frac{\Delta_{p+1,p+r+1}^r}{u} \end{aligned}$$

Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r = 0$  então  $\partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r \subseteq Z_{p-1,k-(p-1)}^r$  e  $E_p^{r+1} = u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ . ■

O Lema seguinte segue de álgebra elementar e será utilizado na demonstração do resultado central desta seção.

**Lema 4.0.13.** *Suponha que  $\mathbf{m}$  é multiplicação por um inteiro não nulo  $m$  e seja  $\lambda = \frac{v}{\text{mdc}\{m, v\}}$ .*

1. Se  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{m}} \mathbb{Z}_v$  então  $\text{Ker } \mathbf{m} = \lambda\mathbb{Z}$  e  $\text{Im } \mathbf{m} = \frac{\mathbb{Z}}{\lambda\mathbb{Z}} = \frac{\text{mdc}\{m, v\}\mathbb{Z}}{v\mathbb{Z}}$
  2. Se  $\mathbb{Z}_t \xrightarrow{\mathbf{m}} \mathbb{Z}_v$  e  $t \geq \lambda$  então  $\text{Ker } \mathbf{m} = \frac{\lambda\mathbb{Z}}{t\mathbb{Z}}$  e  $\text{Im } \mathbf{m} = \frac{\mathbb{Z}}{\lambda\mathbb{Z}} = \frac{\text{mdc}\{m, v\}\mathbb{Z}}{v\mathbb{Z}}$
- 

**Teorema 4.0.14.** *Se  $E_p^r$  e  $E_{p-r}^r$  são ambos não nulos, então a aplicação  $d_p^r : E_p^r \rightarrow E_{p-r}^r$  é induzida por  $\delta_p^r$ , ou seja, multiplicação pela entrada  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  quando a mesma é um pivô primário, um pivô mudança de base ou uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo.*

**Demonstração:** Suponha que  $E_p^r$  e  $E_{p-r}^r$  são ambos não nulos. Mostremos que em cada um dos casos seguintes

$$\frac{\text{Ker } \delta_p^r}{\text{Im } \delta_{p+r}^r} = E_p^{r+1}.$$

É necessário analisar os casos em que  $E_p^r$  e  $E_{p-r}^r$  são ambos não nulos pois caso contrário  $d_p^r$  é zero. Segue do Teorema 3.0.6 que precisamos considerar três casos para a entrada  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ : pivô primário, pivô mudança de base e uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo.

1.  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô primário. Neste caso, sabemos pelo Teorema 3.0.6 que  $E_p^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ . Além disso,  $E_{p-r}^r = \mathbb{Z}[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}]$ . De fato,  $E_{p-r}^r$  não poderia ser  $\mathbb{Z}_t[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}]$  porque isso implicaria na existência de um pivô primário na  $(p-r+1)$ -ésima linha em uma diagonal abaixo da  $r$ -ésima diagonal auxiliar.

Temos a seguinte seqüência:

$$\dots \longleftarrow \mathbb{Z}[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}] \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] \xleftarrow{\delta_{p+r}^r} E_{p+r}^r \longleftarrow \dots \quad (4.2)$$

- (a) Suponhamos que  $E_{p+r}^r = 0$

Como  $\delta_p^r : \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}]$  é multiplicação por  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r \neq 0$  então  $\text{Ker}\delta_p^r = 0$ . Logo  $\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = 0$ .

- (b) Suponha  $E_{p+r}^r \neq 0$ . Assim como no caso anterior,  $\delta_p^r : \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}]$  é multiplicação por  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r \neq 0$  e portanto  $\text{Ker}\delta_p^r = 0$ .

Como  $E_{p+r}^r \neq 0$ , vamos considerar três possibilidades para  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ . Tal entrada pode ser um pivô primário, um pivô mudança de base ou uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo. No entanto, como  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô primário, pela Proposição 2.3.2 não existe pivô primário na  $(p+1)$ -ésima linha. Assim,  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  não pode ser um pivô primário e nem um pivô mudança de base. Portanto,  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é um zero. Segue que  $\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = 0$ .

Por outro lado, em ambos os casos acima, como  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô primário então  $\sigma_k^{(p+1),r+1} = \sigma_k^{(p+1),r}$ . Notemos que seu bordo restrito à  $(p-r+1)$ -ésima linha é  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r \neq 0$  e portanto, seu bordo não está acima da  $(p-r+1)$ -ésima linha. Segue que  $\sigma_k^{(p+1),r+1} \notin Z_p^{r+1}$  e, portanto,  $Z_p^{r+1} = Z_{p-1}^r$  e  $E_p^{r+1} = 0$ .

2.  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é um pivô mudança de base. Então existe um pivô primário na  $(p-r+1)$ -ésima linha em uma diagonal abaixo da  $r$ -ésima diagonal auxiliar. Segue do Teorema

3.0.6 2(b) que  $E_{p-r}^r = \mathbb{Z}_v[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}]$ , onde

$$v = \text{mdc}\{\mu^{(p)}c_{p-r+1}^{p-r+1,r-1}\Delta_{p-r+1,p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\kappa)}c_{p-r+1}^{p-r+1,\kappa-p+r-1}\Delta_{p-r+1,\kappa}^{\kappa-p+r-1}\}/c_{p-r+1}^{p-r+1,r}$$

Seja  $\lambda = \frac{v}{\text{mdc}\{\Delta_{p-r+1,p+1}^r, v\}}$ . Pela Proposição 4.0.9 temos que  $\lambda = u$ .

- (a) Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r \neq 0$  é um pivô primário, segue da Proposição 2.3.2 que não existe nem um pivô primário na  $(p+1)$ -ésima linha ou coluna e nem na  $(p+r+1)$ -ésima linha ou coluna em uma diagonal abaixo da  $r$ -ésima diagonal auxiliar. Assim, pelo Teorema 3.0.6 2(a) e (1),  $E_p^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$  e  $E_{p+r}^r = \mathbb{Z}[\sigma_{k+1}^{(p+r+1),r}]$ . Neste caso temos

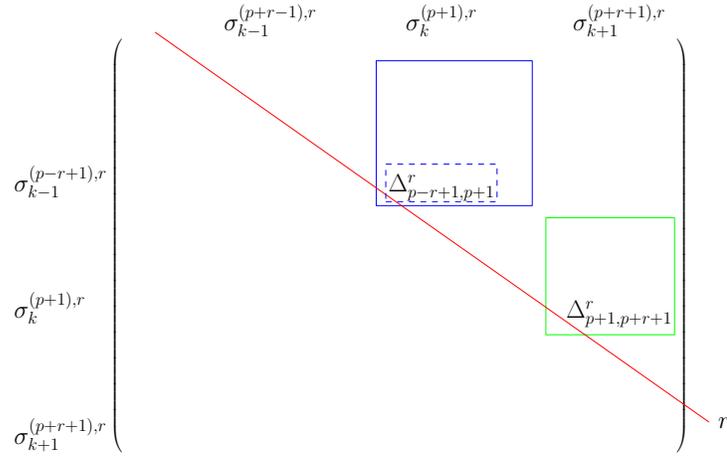


Figura 4.2:  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r \neq 0$  pivô mudança de base.

$$\dots \longleftarrow \mathbb{Z}_v[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}] \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] \xleftarrow{\delta_{p+r}^r} \mathbb{Z}[\sigma_{k+1}^{(p+r+1),r}] \longleftarrow \dots \quad (4.3)$$

Então  $\text{Im}\delta_{p+r}^r = \Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$  e, pelo Lema 4.0.13  $\text{Ker}\delta_p^r = \lambda \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ . Logo

$$\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = \frac{\lambda \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{\Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]} = \frac{u \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{\Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}$$

Por outro lado, como  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é um pivô primário, segue do Lema 4.0.12 que

$$E_p^{r+1} = \frac{u \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{\Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$$

(b) Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r = 0$  com uma coluna de zeros abaixo então  $\text{Im}\delta_{p+r}^r = 0$ . Portanto

$$\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = \text{Ker}\delta_p^r$$

i.  $E_p^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ . Neste caso segue do Lema 4.0.13 que

$$\text{Ker}\delta_p^r = \lambda\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] = u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$$

Por outro lado, pelo Lema 4.0.12 temos que  $E_p^{r+1} = u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]$ .

ii.  $E_p^r = \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]$ . Temos pelo Lema 4.0.13 que

$$\text{Ker}\delta_p^r = \frac{\lambda\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{t\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]} = \frac{u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{t\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}$$

Por outro lado, segue do Lema 4.0.10 que  $E_p^{r+1} = u\mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r+1}]$ .

(c) Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r \neq 0$  é um pivô mudança de base então existe um pivô primário na  $(p+1)$ -ésima linha e numa diagonal auxiliar abaixo de  $r$ . Segue do Teorema 3.0.6

2(b) que  $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]$  onde

$$t = \text{mdc}\{\mu^{(r+p),r-1}c_{p+1}^{p+1,r-1}\Delta_{p+1,r+p}^{r-1}, \dots, \mu^{(\bar{k}),\bar{k}-p-1}c_{p+1}^{p+1,\bar{k}-p-1}\Delta_{p+1,\bar{k}}^{\bar{k}-p-1}\}/c_{p+1}^{p+1,r}.$$

Seja  $\bar{\lambda} = \frac{t}{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}}$ .

$$\dots \longleftarrow \mathbb{Z}_v[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}] \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}] \xleftarrow{\delta_{p+r}^r} E_{p+r}^r \longleftarrow \dots \quad (4.4)$$

Temos que  $E_{p+r}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+r),r}]$  ou  $E_{p+r}^r = \mathbb{Z}_w[\sigma_k^{(p+r),r}]$ . No entanto, sabemos pela Observação 4.0.11 e pela Proposição 4.0.9 que  $\lambda = u \leq t$  e  $\bar{\lambda} = c_{p+r}^{p+r,r+1}/c_{p+r}^{p+r,r} \leq w$ .

Segue do Lema 4.0.13 que

$$\text{Ker}\delta_p^r = \frac{\lambda\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{t\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]} \text{ and } \text{Im}\delta_{p+r}^r = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{\bar{\lambda}\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]} = \frac{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{t\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}$$

Então

$$\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = \frac{\lambda\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}$$

Por outro lado, como  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é um pivô mudança de base, segue do Lema 4.0.10

que  $E_p^{r+1} = \frac{u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$  onde  $u = \lambda$  pela Proposição 4.0.9.

(d) Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é uma entrada acima de um pivô primário então existe um pivô primário na  $(p+r+1)$ -ésima coluna abaixo de  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$ . Portanto,  $\mu^{(p+r+1),r} = 0$  e  $\sigma_{k+1}^{(p+r+1),r} \notin Z_{p+r}^r$ . Logo  $E_{p+r}^r = 0$  e, portanto,  $\text{Im}\delta_{p+r}^r = 0$ . Então

$$\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = \text{Ker}\delta_p^r$$

i. Se  $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$ , temos a seqüência

$$\dots \longleftarrow \mathbb{Z}_v[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}] \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] \xleftarrow{\delta_{p+r}^r} 0 \longleftarrow \dots \quad (4.5)$$

e, pelo Lema 4.0.13

$$\text{Ker}\delta_p^r = \lambda\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] = u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$$

ii. Se  $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]$ , então

$$\dots \longleftarrow \mathbb{Z}_v[\sigma_{k-1}^{(p-r+1),r}] \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}] \xleftarrow{\delta_{p+r}^r} 0 \longleftarrow \dots \quad (4.6)$$

e, pelo Lema 4.0.13 temos

$$\text{Ker}\delta_p^r = \frac{\lambda\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{t\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]} = u\mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]$$

Por outro lado, sabemos pelo Lema 3.0.5 que  $E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{s\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$  onde  $s$  é dado por

$$\begin{aligned} & \frac{\text{mdc}\{\mu^{(p+r+1),r} c_{p+1}^{p+1,r} \Delta_{p+1,p+r+1}^r, \dots, \mu^{(\bar{k}),\bar{k}-p-1} c_{p+1}^{p+1,\bar{k}-p-1} \Delta_{p+1,\bar{k}}^{\bar{k}-p-1}\}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}} \\ &= c_{p+1}^{p+1,r} \frac{\text{mdc}\{\mu^{(p+r+1),r} \Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}}{c_{p+1}^{p+1,r+1}} \end{aligned}$$

Como  $\mu^{(p+r+1),r} = 0$  então  $s = t/u$ . Quando  $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]$  como em (ii),

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{t\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$$

Quando  $E_{p,k-p}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$  como em (i) tomamos  $t = 0$  e, portanto,  $E_p^{r+1} = u\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]$ .

3.  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r = 0$  com uma coluna de zeros abaixo. Neste caso  $\text{Ker}\delta_p^r = E_p^r$ . Além disso,  $\sigma_k^{(p+1),r} = \sigma_k^{(p+1),r+1}$ , logo  $u = 1$ .

- (a) Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é uma entrada acima de pivô primário então como em 2.(d) temos  $\mu^{(p+r+1),r} = 0$  e  $E_{p+r}^r = 0$ . Logo  $\text{Im}\delta_{p+r}^r = 0$  e então

$$\frac{\text{Ker } \delta_p^r}{\text{Im } \delta_{p+r}^r} = E_p^r$$

Por outro lado, como  $\mu^{(p+r+1),r} = 0$  então  $E_p^{r+1} = E_p^r$ .

- (b) Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r = 0$  com uma coluna de zeros abaixo então  $\text{Im } \delta_{p+r}^r = 0$  e

$$\frac{\text{Ker } \delta_p^r}{\text{Im } \delta_{p+r}^r} = E_p^r$$

Por outro lado, segue dos Lemas 4.0.10 e 4.0.12 que  $E_p^{r+1} = E_p^r$ .

- (c) Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r \neq 0$  é um pivô primário então não existe um pivô primário na  $(p+1)$ -ésima linha e nem na  $(p+r+1)$ -ésima coluna em uma diagonal auxiliar abaixo de  $r$ . Logo  $E_p^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]$  e  $E_{p+r}^r = \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+r+1),r}]$ .

$$\dots \longleftarrow E_{p-r}^r \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}] \xleftarrow{\delta_{p+r}^r} \mathbb{Z}[\sigma_{k+1}^{(p+r+1),r}] \longleftarrow \dots \quad (4.7)$$

Portanto,

$$\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{\Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}$$

Por outro lado, como  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é um pivô primário, pelo Lema 4.0.12

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{\Delta_{p+1,p+r+1}^r \mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$$

- (d) Se  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é um pivô mudança de base, então existe um pivô primário na  $(p+1)$ -ésima linha em uma diagonal auxiliar abaixo de  $r$ . Portanto,  $E_p^r = \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}]$ .

$$\dots \longleftarrow E_{p-r}^r \xleftarrow{\delta_p^r} \mathbb{Z}_t[\sigma_k^{(p+1),r}] \xleftarrow{\delta_{p+r}^r} E_{p+r}^r \longleftarrow \dots \quad (4.8)$$

$E_{p+r}^r$  pode ser  $\mathbb{Z}[\sigma_{k+1}^{(p+r+1),r}]$  ou  $\mathbb{Z}_w[\sigma_{k+1}^{(p+r+1),r}]$ . Sejam  $\bar{\lambda} = \frac{t}{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}}$  e  $\tilde{u} = \frac{c_{p+r+1}^{p+r+1,r}}{c_{p+r+1}^{p+r+1,r+1}}$ . Como  $\Delta_{p+1,p+r+1}^r$  é um pivô mudança de base, então pela Proposição 4.0.9 e pela Observação 4.0.11 para  $(p+r)$  temos

$$\bar{\lambda} = \tilde{u} \leq \text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, w\} \leq w$$

ou seja,  $\bar{\lambda} \leq w$ . Pelo Lema 4.0.13

$$\text{Im}\delta_{p+r}^r = \frac{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{t\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}$$

Logo

$$\frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r}]}$$

Por outro lado, como  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  é uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo, segue do Lema 4.0.10 que

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}{\text{mdc}\{\Delta_{p+1,p+r+1}^r, t\}\mathbb{Z}[\sigma_k^{(p+1),r+1}]}$$

Assim, vimos que para todos os casos

$$\frac{\text{Ker}d_p^r}{\text{Im}d_{p+r}^r} = E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{\text{Ker}\delta_p^r}{\text{Im}\delta_{p+r}^r}$$

■

**Observação 4.0.15.** Considere novamente uma filtração  $\mathcal{F}$  mais grossa como na Seção 3.0.1.

Neste caso a candidata à aplicação  $\delta_{P,Q}^R$  que induz a diferencial  $d_{P,Q}^R$  é

$$\Delta_{\mathcal{J}_{P-R}, \mathcal{J}_P}^R \begin{pmatrix} \Delta_{m_{P-R-1}+1, m_{P-1}+1}^{m_{P-1}-m_{P-R-1}} & \cdots & \Delta_{m_{P-R-1}+1, m_P}^{m_P-m_{P-R-1}-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{m_{P-R}, m_{P-1}+1}^{m_{P-1}-m_{P-R}+1} & \cdots & \Delta_{m_{P-R}, m_P}^{m_P-m_{P-R}} \end{pmatrix}$$

Note que cada entrada desta matriz é da forma  $\Delta_{i,j}^r$  com  $j-i=r$  o que implica que a mesma pertence à diagonal  $r$  de  $\Delta^r$ .

# Capítulo 5

## Análise da Seqüência Espectral para a existência de órbitas conectantes

Neste capítulo, analisamos as implicações dinâmicas das diferenciais não nulas  $d^r$  em uma seqüência espectral associada a um fluxo Morse  $\varphi$ . Mostramos que, embora nem sempre tenhamos uma órbita conectante no fluxo  $\varphi$  associada a  $d^r$ , sempre existe um caminho formado por órbitas de  $\varphi$  determinado por  $d^r$ .

**Teorema 5.0.16.** *Sejam  $\varphi$  um fluxo gradiente de uma função de Morse  $f$  e  $\Delta$  a matriz de conexão sobre  $\mathbb{Z}$  da decomposição de Morse tal que cada conjunto de Morse é uma singularidade não degenerada. Seja  $(E^r, d^r)$  uma seqüência espectral induzida pelo complexo de cadeias de Morse Conley  $(\mathbb{Z}\langle \text{crit}f \rangle, \Delta)$ . Dada uma diferencial não nula  $d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$  da seqüência espectral, existe um caminho de órbitas conectantes  $\varphi$  unindo a singularidade  $h_k^{(p+1)}$  que gera  $E_{p,q}^1$  à singularidade  $h_{k-1}^{(p-r+1)}$  que gera  $E_{p-r,q+r-1}^1$ .*

Adotamos a seguinte definição para um caminho em um fluxo. Um *caminho associado a  $d^r$*  é a justaposição de curvas que coincidem com as órbitas conectantes tais que as órbitas representadas na matriz  $\Delta^\xi$  por um pivô primário ou um pivô mudança de base  $\Delta_{i,j}^\xi$  para  $\xi < r$  podem ser consideradas na direção reversa.

Mais precisamente, seja  $\gamma_{i,j}$  um caminho entre as singularidades  $h_k^{(j)}$  e  $h_{k-1}^{(i)}$ . Se  $\gamma_{i,j}$  corres-

ponde a uma órbita conectante no fluxo, dizemos que  $\gamma_{i,j}$  é um caminho elementar e definimos o comprimento de  $\gamma_{i,j}$  como  $\ell(\gamma_{i,j}) = (j - i)$ . No entanto, quando  $\gamma_{i,j}$  não corresponde a uma órbita conectante no fluxo,  $\gamma_{i,j}$  pode ser escrito como uma seqüência de caminhos elementares. Esta construção é feita recursivamente definindo

$$\gamma_{i,j} = [\gamma_{i,j}^{\bar{i}}, -\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}, \gamma_{i,\bar{j}}]$$

onde  $\bar{j} < j$  e  $\bar{i} > i$ , isto é,  $h_k^{(\bar{j})}$  está associada a uma coluna de  $\Delta$  à esquerda de  $h_k^{(j)}$  e  $h_{k-1}^{(\bar{i})}$  está associado a uma linha de  $\Delta$  abaixo de  $h_{k-1}^{(i)}$ .

O sinal negativo indica que  $\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}$  é considerado na direção reversa. Se  $\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}$  é um caminho elementar, a órbita conectante correspondente é considerada na orientação invertida. Se  $\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}$  não corresponde a uma órbita conectante então é um caminho

$$\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}} = [\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}, -\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}, \gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}]$$

onde  $\bar{\bar{j}} < \bar{j}$  e  $\bar{\bar{i}} > \bar{i}$ , e definimos

$$-\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}} = -[\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}, -\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}, \gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}] = [-\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}, \gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}, -\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}]$$

O comprimento de  $\gamma_{i,j} = [\gamma_{i,j}^{\bar{i}}, -\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}, \gamma_{i,\bar{j}}]$  é definido como  $\ell(\gamma_{i,j}) = \ell(\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}}) + \ell(\gamma_{i,\bar{j}}) + \ell(\gamma_{i,\bar{j}}^{\bar{i}})$ .

No lema seguinte, mostramos que certas colunas não precisam ser consideradas nas mudanças de base do método da varredura.

**Lema 5.0.17.** *Seja  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  um pivô mudança de base. A escolha das colunas de  $\Delta^r$  que farão parte da combinação linear do método da varredura que determinará a  $(p+1)$ -ésima coluna de  $\Delta^{r+1}$  não precisa levar em consideração nenhuma coluna correspondente a uma cadeia cujo bordo esteja acima da  $(p-r+1)$ -ésima linha, ou seja, se existe uma combinação linear do método envolvendo uma coluna cujo bordo está acima da  $(p-r+1)$ -ésima linha então existe uma outra combinação linear que não envolve tal coluna e que pode ser escolhida.*

**Demonstração:** Sabemos que

$$E_{p,k-p}^{r+1} = \frac{Z_{p,k-p}^{r+1}}{Z_{p-1,k-(p-1)}^r + \partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r}$$

onde

$$\begin{aligned} Z_{p,k-p}^{r+1} &= \mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r+1} \sigma_k^{(p+1),r+1}, \mu^{(p),r} \sigma_k^{(p),r}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p+\kappa}] \\ Z_{p-1,k-p+1}^r &= \mathbb{Z}[\mu^{(p),r} \sigma_k^{(p),r}, \mu^{(p-1),r-1} \sigma_k^{(p-1),r-1}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p+\kappa}] \end{aligned}$$

Além disso, pela Proposição 4.0.8 temos que

$$\sigma_k^{(p+1),r+1} = u \mu^{(p+1),r} \sigma_k^{(p+1),r} + b_p \mu^{(p),r-1} \sigma_k^{(p),r-1} + \dots + b_\kappa \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p-1+\kappa}.$$

Suponhamos que para algum  $\xi \in \{1, 2, \dots, p+1-\kappa\}$ ,  $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$  seja tal que  $\partial \sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$  é zero na  $(p-r+1)$ -ésima linha e  $\mu^{(p+1-\xi),r-\xi} = 1$ , isto é,  $\Delta_{p-r+1,p+1-\xi}^{r-\xi} = 0$  e  $\Delta_{s,p+1-\xi}^{r-\xi} = 0$  para todo  $s > p+r-1$ . Neste caso,  $\partial \sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$  está acima da  $(p-r)$ -ésima linha e, portanto  $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi} = \sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi+1} \in Z_{p-1,k-(p-1)}^r$ . Pela fórmula temos que

$$\begin{aligned} E_{p,k-p}^{r+1} &= \frac{\mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r+1} \sigma_k^{(p+1),r+1}, \dots, \sigma_k^{(p+1-\xi),r+1-\xi}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p+\kappa}]}{\mathbb{Z}[\mu^{(p),r} \sigma_k^{(p),r}, \dots, \sigma_k^{(p+1-\xi),r+1-\xi}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p+\kappa}] + \partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r} \\ &= \frac{\mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r+1} \sigma_k^{(p+1),r+1} - \sigma_k^{(p+1-\xi),r+1-\xi}, \dots, \sigma_k^{(p+1-\xi),r+1-\xi}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p-1+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p+\kappa}]}{\mathbb{Z}[\mu^{(p),r} \sigma_k^{(p),r}, \dots, \sigma_k^{(p+1-\xi),r+1-\xi}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p+\kappa}] + \partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r} \\ &= \frac{\mathbb{Z}[\mu^{(p+1),r+1} \sigma_k^{(p+1),r+1} - \sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p+\kappa}]}{\mathbb{Z}[\mu^{(p),r} \sigma_k^{(p),r}, \dots, \mu^{(\kappa),r-p+\kappa} \sigma_k^{(\kappa),r-p+\kappa}] + \partial Z_{p+r,(k+1)-(p+r)}^r} \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato que o gerador  $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi+1}$  pode ser substituído pelo gerador  $\sigma_k^{(p+1-\xi),r-\xi}$ .

A conseqüência disto é que não há perda de generalidade em escolher a mudança de base que não soma as colunas que têm uma entrada nula na  $(p+r-1)$ -ésima linha e zeros abaixo da mesma. ■

Seja  $\Delta^0 = \Delta$ . Mostramos que o método da varredura produz uma seqüência de matrizes  $\Delta^r$  tal que a matriz  $\Delta^{r+1}$  é obtida a partir de uma mudança de base em  $\Delta^r$ , ou seja, existe uma seqüência de matrizes mudança de base  $M_0, \dots, M_{m-1}$  tais que

$$\Delta^{r+1} = M_r^{-1} \Delta^r M_r = M_r^{-1} M_{r-1}^{-1} \dots M_0^{-1} \Delta M_0 \dots M_{r-1} M_r$$

para  $r = 0, \dots, m-1$ .

Para cada  $r \in \{0, \dots, m-1\}$  definimos  $\overline{\Delta}^r$  como sendo a matriz  $\Delta M_0 \dots M_{r-1} M_r$ . Portanto, se  $\kappa^*$  é a primeira  $h_{k-1}$  coluna de  $\Delta$  e  $\tilde{\kappa}$  é a última  $h_{k-1}$  coluna de  $\Delta$  então podemos escrever

$$\partial\sigma^{(j),r} = \overline{\Delta}_{\tilde{\kappa},j}^r h_{k-1}^{(\tilde{\kappa})} + \dots + \overline{\Delta}_{\kappa^*,j}^r h_{k-1}^{(\kappa^*)}$$

onde  $\overline{\Delta}_{s,j}^r \in \mathbb{Z}$  para  $s = \kappa^*, \dots, \tilde{\kappa}$ .

**Proposição 5.0.18.**  $\overline{\Delta}_{s,j}^r = 0$  para todo  $s > i$  se e somente se  $\Delta_{s,j}^r = 0$  para todo  $s > i$ .

**Demonstração:** Sabemos que

$$\partial\sigma^{(j),r} = \overline{\Delta}_{\tilde{\kappa},j}^r h_{k-1}^{(\tilde{\kappa})} + \dots + \overline{\Delta}_{\kappa^*,j}^r h_{k-1}^{(\kappa^*)} \quad \text{e} \quad \partial\sigma^{(j),r} = \Delta_{\tilde{\kappa},j}^r \sigma_{k-1}^{(\tilde{\kappa}),r} + \dots + \Delta_{\kappa^*,j}^r \sigma_{k-1}^{(\kappa^*),r}.$$

Suponha que  $\overline{\Delta}_{s,j}^r = 0$  para todo  $s > i$ , ou seja,

$$\partial\sigma^{(j),r} = \overline{\Delta}_{i,j}^r h_{k-1}^{(i)} + \dots + \overline{\Delta}_{\kappa^*,j}^r h_{k-1}^{(\kappa^*)}.$$

Como o coeficiente de  $h_{k-1}^{(\tilde{\kappa})}$  é sempre não nulo em  $\sigma_{k-1}^{(\tilde{\kappa}),r}$  e não está em nenhum outro  $\sigma_{k-1}^{(s),r}$  para  $s < \tilde{\kappa}$  então  $\Delta_{\tilde{\kappa},j}^r = 0$ , ou seja,

$$\partial\sigma^{(j),r} = \Delta_{\tilde{\kappa}-1,j}^r \sigma_{k-1}^{(\tilde{\kappa}-1),r} + \dots + \Delta_{\kappa^*,j}^r \sigma_{k-1}^{(\kappa^*),r}.$$

Da mesma forma, o coeficiente de  $h_{k-1}^{(\tilde{\kappa}-1)}$  é sempre não nulo em  $\sigma_{k-1}^{(\tilde{\kappa}-1),r}$  e não está em nenhum outro  $\sigma_{k-1}^{(s),r}$  para  $s < \tilde{\kappa} - 1$  então  $\Delta_{\tilde{\kappa}-1,j}^r = 0$ , ou seja,

$$\partial\sigma^{(j),r} = \Delta_{\tilde{\kappa}-2,j}^r \sigma_{k-1}^{(\tilde{\kappa}-2),r} + \dots + \Delta_{\kappa^*,j}^r \sigma_{k-1}^{(\kappa^*),r}.$$

Repetimos este mesmo raciocínio para todo  $h_{k-1}^{(s)}$ ,  $s = \tilde{\kappa}, \dots, i+1$ .

Portanto,  $\Delta_{s,j}^r = 0$  para todo  $s > i$ , ou seja,

$$\partial\sigma^{(j),r} = \Delta_{i,j}^r \sigma_{k-1}^{(i),r} + \dots + \Delta_{\kappa^*,j}^r \sigma_{k-1}^{(\kappa^*),r}.$$

A recíproca é completamente análoga. ■

Como uma consequência direta da Proposição 5.0.18 temos que  $\Delta_{p-r,p}^r$  é um pivô se e somente se  $\overline{\Delta}_{p-r,p}^r \neq 0$  e  $\overline{\Delta}_{s,p}^r = 0$  para todo  $s > p - r$ .

É claro que  $\overline{\Delta}^r$  não tem necessariamente quadrado zero. No entanto, a mesma será usada como matriz auxiliar para mostrar o resultado central da Seção 5.

A prova do Teorema 5.0.16 é uma consequência direta do lema seguinte.

**Lema 5.0.19.** *Seja  $\Delta$  uma matriz de conexão. Aplicando o método da varredura em  $\Delta$ , seja  $\Delta^r$  a matriz obtida depois que a  $r$ -ésima diagonal foi varrida. Se  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r \neq 0$  para algum  $\xi$ , então existe um caminho  $\gamma_{j-\xi,j} = [\gamma_{j-\bar{r},j}, -\gamma_{j-\bar{r},j-\xi}, \gamma_{j-\xi,j-\xi}]$  para algum  $\bar{r}$  e  $\xi$  menor do que  $r$  no fluxo  $\varphi$  formado por órbitas conectantes unindo a singularidade  $h_k^{(j)}$  à singularidade  $h_{k-1}^{(j-\xi)}$ .*

**Demonstração:** Provemos por indução em  $r$  e  $\xi$ .

1.  $r = 1$ . Como  $\sigma_k^{(j),1} = h_k^{(j)}$  então  $\overline{\Delta}_{s,j}^1 = \Delta_{s,j}$  para  $s = \kappa^*, \dots, \tilde{\kappa}$  onde  $\kappa^*$  e  $\tilde{\kappa}$  são a primeira e a última coluna associadas a uma  $(k-1)$ -cadeia. Assim, todas as entradas não nulas  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^1$  para todo  $\xi$  representam a existência de órbitas conectantes entre  $h_k^{(j)}$  e  $h_{k-1}^{(j-\xi)}$ . Para cada  $\xi$  temos um caminho no fluxo  $\varphi$  que é uma órbita conectante.
2. Suponhamos agora que  $\xi$  seja a primeira diagonal que intercepta  $\Delta_k$  e  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r \neq 0$ . Então  $\overline{\Delta}_{s,j}^r = 0$  para todo  $s < j - \xi$  e todo  $r$  e  $\overline{\Delta}_{j-\xi,\ell}^r = 0$  para todo  $\ell < j$  e todo  $r$ . Como  $\overline{\Delta}_{j-\xi,\ell}^r = 0$  para todo  $\ell < j$  então a coluna  $j$  não sofreu nenhuma mudança de base e  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r = \overline{\Delta}_{j-\xi,j}^1$ . Como  $\overline{\Delta}_{s,j}^r = 0$  para todo  $s < j - \xi$  então  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r = c_{j-\xi}^{j-\xi,r} \Delta_{j-\xi,j}^r$  para todo  $r$ . Logo  $\Delta_{j-\xi,j} \neq 0$  e temos um caminho no fluxo  $\varphi$  que é uma órbita conectante.
3. Suponha que o lema vale para todo  $r' < r$  e  $\xi' < \xi$  e seja  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r \neq 0$ . Se existe uma órbita conectante entre  $h_k^{(j)}$  e  $h_{k-1}^{(j-\xi)}$  então nada precisa ser mostrado. Em particular, é esse o caso quando  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^1 \neq 0$ , pois  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^1 = \Delta_{j-\xi,j}$  e, neste caso existe uma órbita conectante entre  $h_k^{(j)}$  e  $h_{k-1}^{(j-\xi)}$ . Assim, suponhamos que  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^1 = 0$  e que não existem órbitas conectantes entre  $h_k^{(j)}$  e  $h_{k-1}^{(j-\xi)}$  e mostremos que se  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r \neq 0$ , então existe um caminho de órbitas conectantes unindo tais singularidades.

Como  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^r \neq 0$  e  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^1 = 0$  então existe  $\bar{r} < r$ ,  $\bar{r} < \xi$ , tal que  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}} = 0$  e  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}+1} \neq 0$ , ou seja,  $\sigma_k^{(j),\bar{r}} \neq \sigma_k^{(j),\bar{r}+1}$ . Note que  $\bar{r}$  não precisa ser único. No caso de existir mais de um elemento com a mesma propriedade, podemos escolher aleatoriamente qual usar na demonstração da existência de um caminho. A escolha de  $\bar{r}$  é importante quando tratamos da minimização do comprimento do caminho. Abordamos este assunto no Capítulo 6.

O método da varredura afirma que uma mudança de base somente ocorre na  $j$ -ésima coluna de uma matriz quando um pivô mudança de base está presente na mesma. Neste caso, a mudança acontece precisamente quando o método da varredura passa por uma diagonal como  $\bar{r}$  em  $\Delta^{\bar{r}}$ . Assim, existe um pivô mudança de base na  $j$ -ésima coluna e na  $\bar{r}$ -ésima diagonal auxiliar de  $\Delta^{\bar{r}}$ . Este pivô mudança de base é  $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}}$  e está na  $(j - \bar{r})$ -ésima linha de  $\Delta^{\bar{r}}$ . Pela Proposição 5.0.18  $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}} \neq 0$  e tem uma coluna de zeros abaixo, ou seja,  $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}} = c_{j-\bar{r}}^{j-\bar{r},\bar{r}} \Delta_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}} \neq 0$ .

Sabemos pelo Lema 4.0.8 que

$$\partial \sigma_k^{(j),\bar{r}+1} = u \mu^{(j),\bar{r}} \partial \sigma_k^{(j),\bar{r}} + b_{j-1} \mu^{(j-1),\bar{r}-1} \partial \sigma_k^{(j-1),\bar{r}-1} + \dots + b_\kappa \mu^{(\kappa),\bar{r}-j+\kappa} \partial \sigma_k^{(\kappa),\bar{r}-j+\kappa} \quad (5.1)$$

Igualando os coeficientes de  $h_{k-1}^{(j-\bar{r})}$  em ambos os lados da equação (5.1) (ou seja, restringindo-a a a  $(j - \bar{r})$ -ésima linha de  $\overline{\Delta}$ ) obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}+1} &= u \mu^{(j),\bar{r}} \overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}} + b_{j-1} \mu^{(j-1),\bar{r}-1} \overline{\Delta}_{j-\bar{r},j-1}^{\bar{r}-1} + \dots \\ &\dots + \mu^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta} b_{j-\zeta} \overline{\Delta}_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} + \dots + b_\kappa \mu^{(\kappa),\bar{r}-j+\kappa} \overline{\Delta}_{j-\bar{r},\kappa}^{\bar{r}-j+\kappa} \end{aligned}$$

Sabemos que quando um pivô primário de uma coluna correspondente a uma cadeia  $\sigma^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta}$  está abaixo da  $(j - \bar{r})$ -ésima linha então  $\mu^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta} = 0$ . Em outras palavras,  $\mu^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta} = 1$  somente quando na  $(j - \bar{r})$ -ésima linha de  $\Delta^{\bar{r}-\zeta}$  existe um pivô primário, um pivô mudança de base ou uma entrada nula com uma coluna de zeros abaixo.

Pelo Lema 5.0.17 podemos assumir sem perda de generalidade que em uma mudança de base, colunas com entradas nulas na  $(j - \bar{r})$ -ésima linha de  $\Delta^{\bar{r}-\zeta}$  e zeros abaixo não são

consideradas. Portanto,  $\mu^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta} = 1$  e  $b_{j-\zeta} \neq 0$  somente quando  $\Delta_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta}$  é um pivô primário ou um pivô mudança de base. Pela Proposição 5.0.18  $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} \neq 0$  e tem uma coluna de zeros abaixo, ou seja,  $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} = c_{j-\bar{r}}^{j-\bar{r},\bar{r}-\zeta} \Delta_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} \neq 0$ .

Igualando os coeficientes de  $h_{k-1}^{(j-\xi)}$  em ambos os lados da equação (5.1) (ou seja, restringindo a equação à  $(j-\xi)$ -ésima linha de  $\overline{\Delta}$ ) temos que

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}+1} &= u\mu^{(j),\bar{r}}\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}} + b_{j-1}\mu^{(j-1),\bar{r}-1}\overline{\Delta}_{j-\xi,j-1}^{\bar{r}-1} + \cdots \\ &\cdots + \mu^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta}b_{j-\zeta}\overline{\Delta}_{j-\xi,j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} + \cdots + b_{\kappa}\mu^{(\kappa),\bar{r}-j+\kappa}\overline{\Delta}_{j-\xi,\kappa}^{\bar{r}-j+\kappa} \end{aligned}$$

Como  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}+1} \neq 0$  e  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}} = 0$ , então existe  $\zeta \in \{1, j-\kappa\}$  tal que  $\mu^{(j-\zeta),\bar{r}-\zeta} = 1$ ,  $b_{j-\zeta} \neq 0$  e  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} \neq 0$ .

- Como  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} \neq 0$  é tal que  $\xi - \zeta < \xi$  e  $\bar{r} - \zeta < r$  então por hipótese de indução existe um caminho  $\gamma_{j-\xi,j-\zeta}$  de órbitas conectantes unindo  $h_k^{(j-\zeta)}$  a  $h_{k-1}^{(j-\xi)}$ ;
- Como  $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} \neq 0$  é tal que  $\bar{r} - \zeta < \xi$  e  $\bar{r} - \zeta < r$  então por hipótese de indução existe um caminho  $\gamma_{j-\bar{r},j-\zeta}$  de órbitas conectantes unindo  $\bar{h}_k^{(j-\zeta)}$  a  $h_{k-1}^{(j-\bar{r})}$ ;
- Como  $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}} \neq 0$  é tal que  $\bar{r} < \xi$  e  $\bar{r} < r$  então por hipótese de indução existe um caminho  $\gamma_{j-\bar{r},j}$  de órbitas conectantes unindo  $h_k^{(j)}$  a  $h_{k-1}^{(j-\bar{r})}$ .

Portanto,  $\gamma_{j-\xi,j} = [\gamma_{j-\bar{r},j}, -\gamma_{j-\bar{r},j-\zeta}, \gamma_{j-\xi,j-\zeta}]$  é um caminho unindo  $h_k^{(j)}$  a  $h_{k-1}^{(j-\xi)}$ .

Assim, mostramos que  $\overline{\Delta}_{j-\xi,j}^{\bar{r}} \neq 0$  corresponde a um caminho no fluxo  $\varphi$ . ■

**Demonstração:** [do Teorema 5.0.16] Seja  $d_p^r \neq 0$ . Segue do Teorema 4.0.14 que toda diferencial  $d^r \neq 0$  é induzida por multiplicação pela entrada  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$ , que é um pivô primário ou um pivô mudança de base. Pela Proposição 5.0.18,  $\overline{\Delta}_{p-r+1,p+1}^r \neq 0$  e todas as entradas na  $(p+1)$ -ésima coluna abaixo da  $(p-r+1)$ -ésima linha são nulas, ou seja,  $\overline{\Delta}_{p-r+1,p+1}^r = c_{p-r+1}^{p-r+1,r} \Delta_{p-r+1,p+1}^r \neq 0$ . Pelo Lema 5.0.19 existe um caminho no fluxo formado por órbitas conectantes unindo a singularidade  $h_k^{(p+1)}$  a singularidade  $h_{k-1}^{(p-r+1)}$ . ■

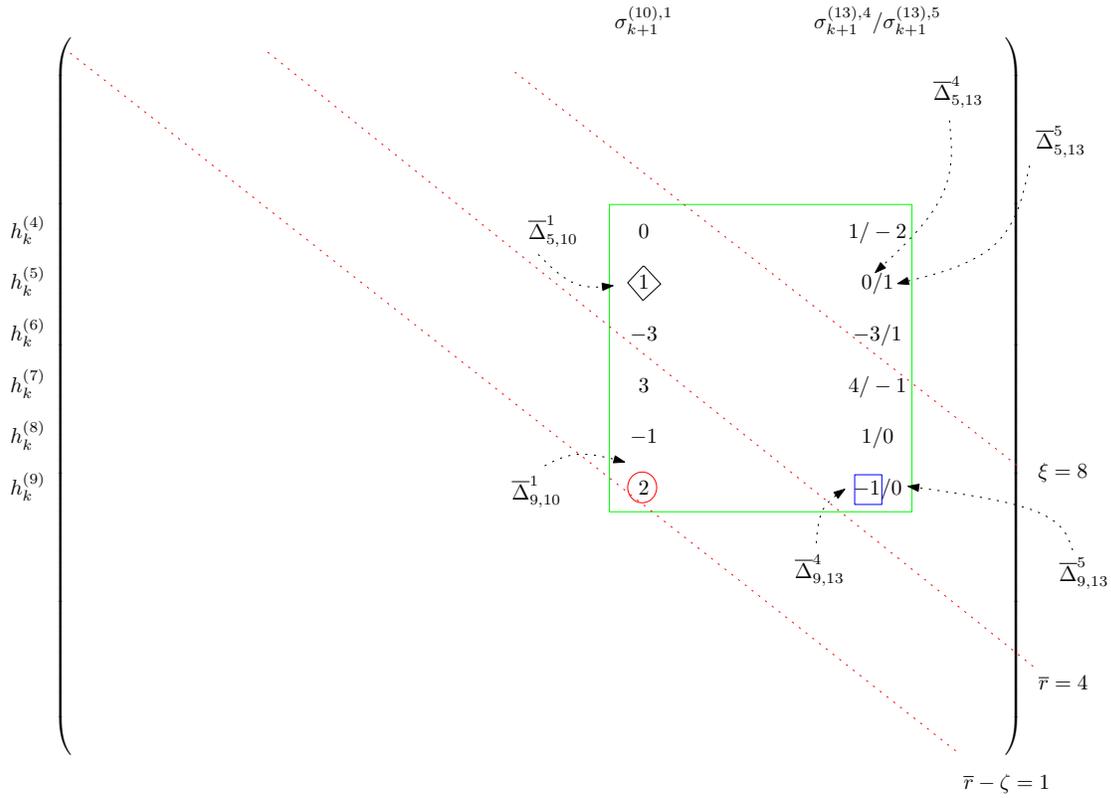


Figura 5.1: Representação esquemática do caminho  $\gamma_{5,13}$ .

**Exemplo 5.0.20.** Considere o Exemplo 2.2.1. Notemos que a entrada  $\Delta_{5,13}^8 = 3$  é um pivô primário em  $\Delta^8$  que tinha sua entrada original em  $\Delta$  igual a zero, ou seja,  $\Delta_{5,13} = 0$ . Portanto, não há necessariamente uma órbita conectante entre  $h_{k+1}^{(13)}$  e  $h_k^{(5)}$ . No entanto, vamos agora determinar um caminho de órbitas conectantes entre tais singularidades.

Notemos que

$$\partial\sigma_{k+1}^{(13),4} = -h_k^{(9)} + h_k^{(8)} + 4h_k^{(7)} - 3h_k^{(6)} + h_k^{(4)}$$

$$\partial\sigma_{k+1}^{(13),5} = -h_k^{(7)} + h_k^{(6)} + h_k^{(5)} - 2h_k^{(4)}$$

e portanto  $\bar{\Delta}_{5,13}^4 = 0$  e  $\bar{\Delta}_{5,13}^5 = 1 \neq 0$ . Portanto, consideremos  $\bar{r} = 4$ . Representamos o caminho esquematicamente usando uma matriz como na Figura 5.1. Calculando as entradas da prova do Lema 5.0.19 temos

- $\bar{\Delta}_{j-\bar{r},j}^{\bar{r}} = \bar{\Delta}_{13-4,13}^4 = \bar{\Delta}_{9,13}^4 \neq 0$ .

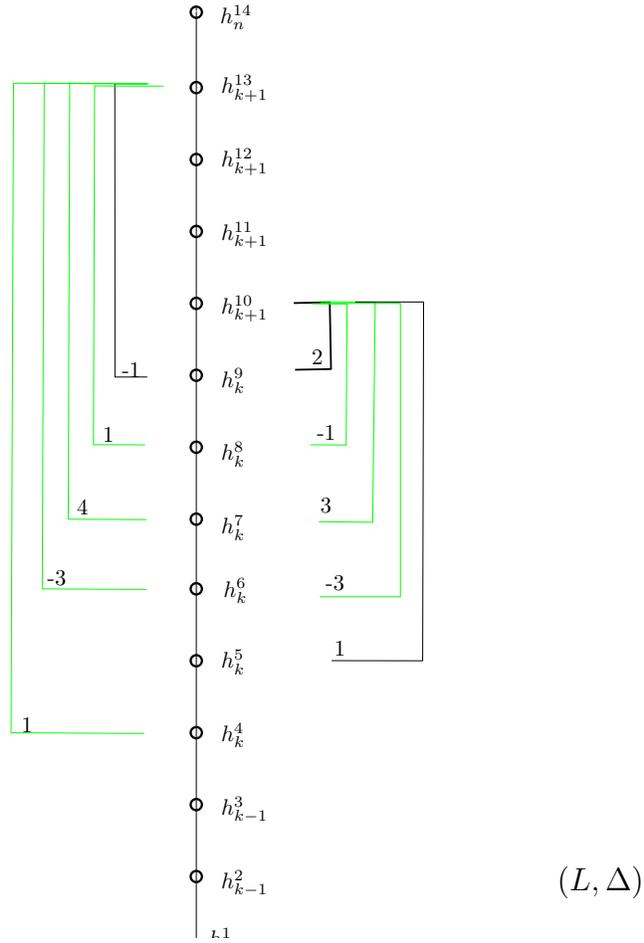


Figura 5.2: Caminho  $\gamma_{5,13}$

- $\overline{\Delta}_{j-\bar{r},j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} = \overline{\Delta}_{13-4,13-3}^{4-3} = \overline{\Delta}_{9,10}^1 \neq 0$
- $\overline{\Delta}_{j-\xi,j-\zeta}^{\bar{r}-\zeta} = \overline{\Delta}_{13-8,13-3}^{4-3} = \overline{\Delta}_{5,10}^1 \neq 0$

Pelo Lema 5.0.19, um caminho entre  $h_{k+1}^{(13)}$  em  $h_k^{(5)}$  é  $\gamma_{5,13} = [\gamma_{9,13}, -\gamma_{9,10}, \gamma_{5,10}]$ . Veja Figura 5.2.

O comprimento de  $\gamma_{5,13}$  é  $\ell(\gamma_{5,13}) = \ell(\gamma_{9,13}) + \ell(\gamma_{9,10}) + \ell(\gamma_{5,10}) = 4 + 1 + 5 = 10$ .

Notemos que poderíamos escolher o caminho composto pelas conexões que correspondem às entradas  $\overline{\Delta}_{7,13}^6 \neq 0$ ,  $\overline{\Delta}_{7,11}^4 \neq 0$  e  $\overline{\Delta}_{5,11}^4 \neq 0$ , ou seja,  $\gamma'_{5,13} = [\gamma'_{7,13}, -\gamma'_{7,11}, \gamma'_{5,11}]$ . Veja Figura 5.3.

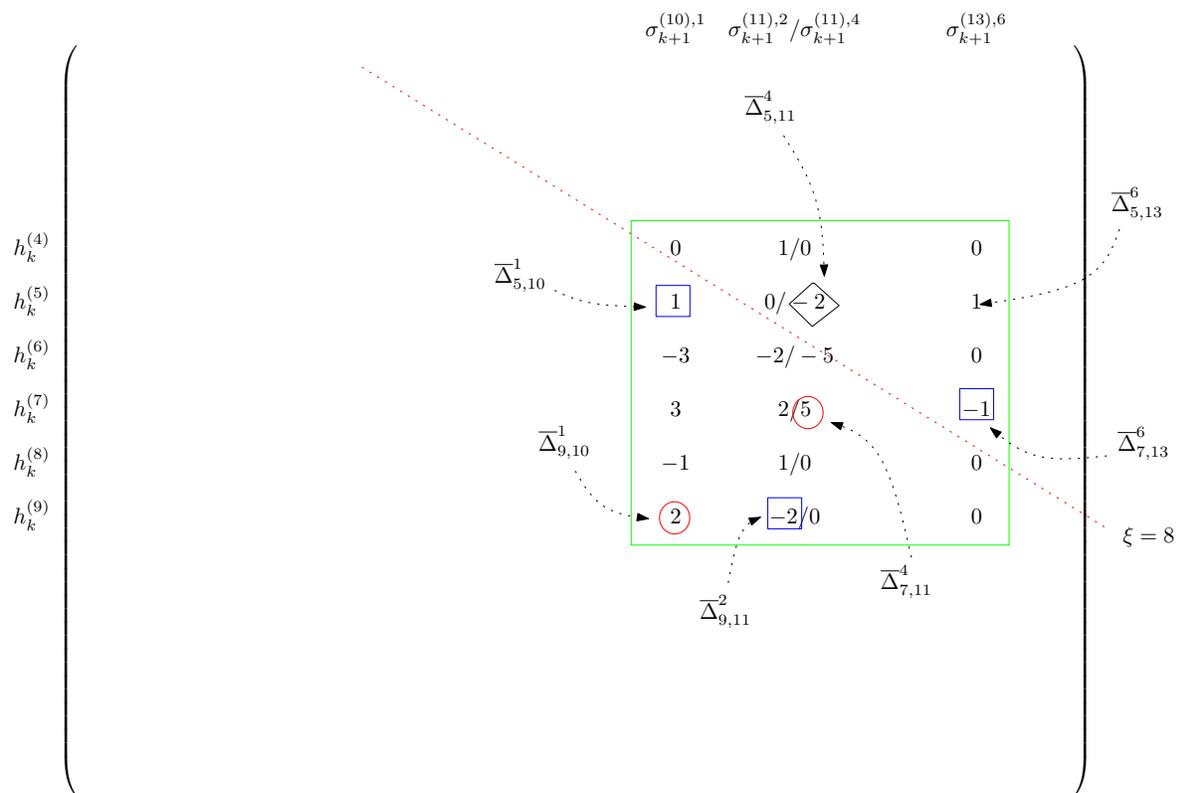


Figura 5.3: Representação esquemática do caminho  $\gamma'_{5,13}$ .

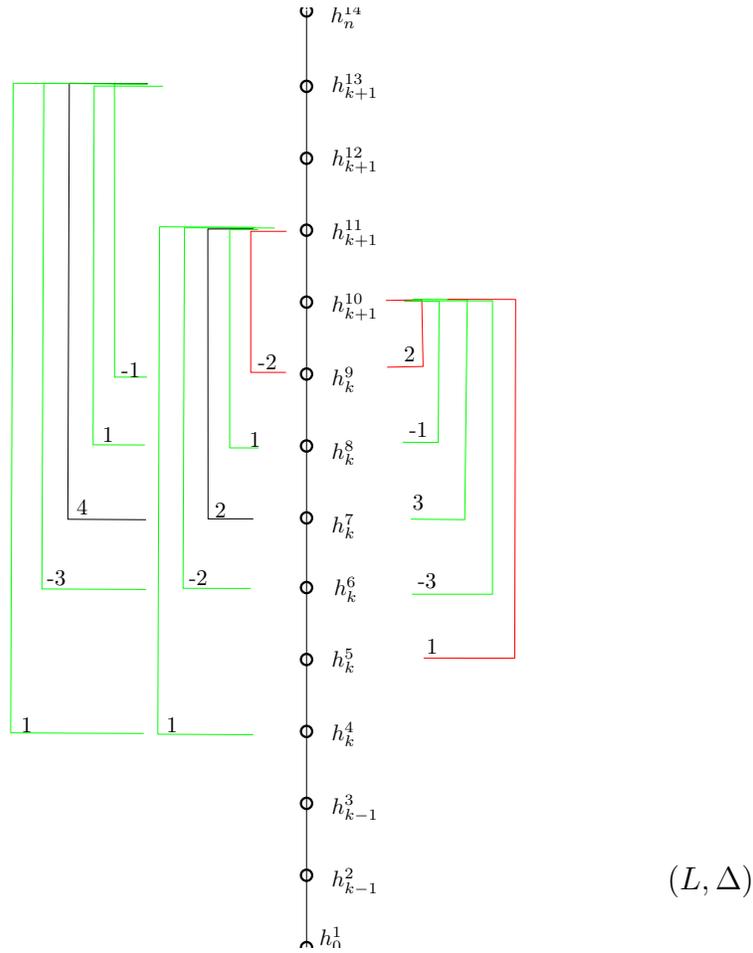


Figura 5.4: Caminho  $\gamma'_{5,13}$ .

As entradas  $\bar{\Delta}_{7,13}^6$  e  $\bar{\Delta}_{7,11}^4$  correspondem a órbitas conectantes em  $\varphi$ , pois  $\bar{\Delta}_{7,13}^1 \neq 0$  e  $\bar{\Delta}_{7,11}^1 \neq 0$ . Por outro lado,  $\bar{\Delta}_{5,11}^1 = 0$ , ou seja, não existe necessariamente uma órbita conectante entre  $h_{k+1}^{(11)}$  e  $h_k^{(5)}$ . No entanto, existe um caminho  $\gamma'_{5,11}$  entre  $h_{k+1}^{(11)}$  e  $h_k^{(5)}$  composto por órbitas conectantes correspondentes às entradas  $\bar{\Delta}_{9,11}^2 \neq 0$ ,  $\bar{\Delta}_{9,10}^1 \neq 0$  e  $\bar{\Delta}_{5,10}^1 \neq 0$ , ou seja

$$\gamma'_{5,13} = [\gamma'_{7,13}, -\gamma'_{7,11}, [\gamma'_{9,11}, -\gamma'_{9,10}, \gamma'_{5,10}]]$$

Veja Figura 5.4.

O comprimento de  $\gamma'_{5,13}$  é  $\ell(\gamma'_{5,13}) = \ell(\gamma'_{7,13}) + \ell(\gamma'_{7,11}) + \ell(\gamma'_{9,11}) + \ell(\gamma'_{9,10}) + \ell(\gamma'_{5,10}) = 6 + 4 + 2 + 1 + 5 = 18$ .

Isto mostra que o caminho entre duas singularidades muitas vezes não é único. Mesmo para um comprimento fixado o caminho não é necessariamente único.

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho começamos a explorar a seqüência espectral e suas implicações dinâmicas. A medida que  $r$  cresce, o  $\mathbb{Z}$ -módulo  $E_p^r$  muda de geradores. Através dos Teoremas 3.0.6 e 4.0.14, a varredura conecta esta mudança de geradores dos  $\mathbb{Z}$ -módulos  $E_p^r$  às mudanças de base sobre  $\mathbb{Q}$  da matriz de conexão  $\Delta$ . Na varredura, destacam-se entradas importantes da diagonal auxiliar  $r$  de  $\Delta^r$  que determinam a matriz do próximo estágio  $\Delta^{r+1}$ . Tais entradas são chamadas de pivôs primários e pivôs mudança de base (veja Seção 2). Cabe destacar a integralidade destes pivôs durante toda a varredura, mostrada na Proposição 3.0.4. São precisamente estas entradas que determinam os módulos  $E_p^r$ . Estas matrizes são obtidas da anterior por mudanças de base sobre os racionais  $\mathbb{Q}$ . No entanto, permanece em aberto a questão da interpretação das matrizes intermediárias deste processo. Em particular o que significam dinamicamente as entradas de tais matrizes que são racionais porém não inteiras.

Apesar das matrizes intermediárias do método da varredura possivelmente terem entradas fracionárias, observamos nos exemplos que a matriz correspondente à estabilização da seqüência espectral (última matriz da varredura) tem entradas inteiras. Uma pergunta em aberto é se este fato sempre ocorre e, se sim, qual a relação do fluxo inicial com o fluxo associado à matriz correspondente a estabilização, ou seja, qual o efeito da mudança de base provocada pela varredura nas matrizes de conexão. Vários exemplos indicam que podemos ter uma continuação.

**Exemplo 6.0.21.** Voltemos ao Exemplo 1.5.2. Consideremos primeiramente o caso em que  $0 < \lambda < \lambda^*$ . Neste caso a ordem do fluxo é tal que  $1 <_{\varphi} 2$  é a única relação. Como a matriz de conexão é triangular superior com diagonal principal nula, então somente  $\Delta(2, 1)$  pode ser não nula. Além disso,

- $H_0(c(M_1)) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1(c(M_1)) = 0$ ,
- $H_0(c(M_2)) = 0$ ,  $H_1(c(M_2)) = \mathbb{Z}$ ,
- $H_0(c(M_{21})) = H_1(c(M_{21})) = 0$ .

Temos então a seqüência exata em homologia

$$0 \longrightarrow H_1(c(M_{21})) \xrightarrow{p} H_1(c(M_2)) \xrightarrow{\partial(2,1)} H_0(c(M_1)) \xrightarrow{i} H_0(c(M_{21}))^p \longrightarrow 0$$

que é equivalente a

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial(2,1)} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Logo  $\Delta(2, 1)$  é um isomorfismo. A representação qualitativa do fluxo, bem como sua matriz de conexão estão na Figura 6.1.

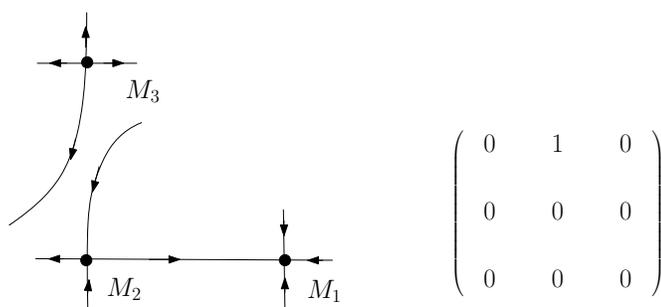


Figura 6.1: Representação do fluxo e sua matriz de conexão -  $0 < \lambda < \lambda^*$ .

Consideremos agora  $\lambda > \lambda^*$ . Neste caso a ordem do fluxo é dada pelas relações  $1 <_{\varphi} 2$  e  $1 <_{\varphi} 3$ . Como a matriz de conexão é triangular superior com diagonal principal nula, então somente  $\Delta(2, 1)$  e  $\Delta(3, 1)$  podem ser não nulas. Por um argumento idêntico ao anterior temos

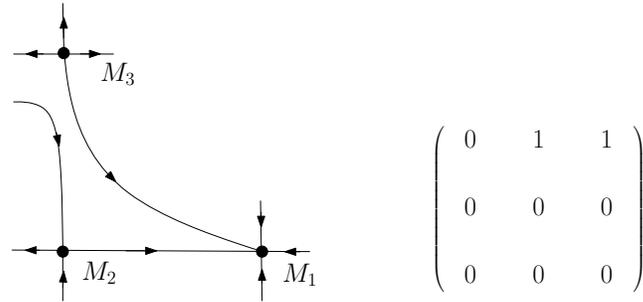


Figura 6.2: Representação do fluxo e sua matriz de conexão -  $\lambda > \lambda^*$ .

que  $\Delta(2, 1)$  e  $\Delta(3, 1)$  são isomorfismos. A representação qualitativa do fluxo, bem como sua matriz de conexão estão na Figura 6.2.

Aplicamos o método da varredura na matriz de conexão associada à  $M_\lambda$  para  $\lambda > \lambda^*$ . Veja Figura 6.3. A matriz de conexão associada à estabilização é exatamente a matriz associada à

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(1),1} = h_0 & \begin{pmatrix} \sigma_0^{(1),1} & \sigma_1^{(2),1} & \sigma_1^{(3),1} \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_0^{(1),2} = h_0 & \begin{pmatrix} \sigma_0^{(1),2} & \sigma_1^{(2),2} & \sigma_1^{(3),2} \\ 0 & \textcircled{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_1^{(2),1} = h_1^{(2)} & & \sigma_1^{(2),2} = h_1^{(2)} & & \\ \sigma_1^{(3),1} = h_1^{(3)} & & \sigma_1^{(3),2} = h_1^{(3)} & & \end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(1),3} = h_0 & \begin{pmatrix} \sigma_0^{(1),3} & \sigma_1^{(2),3} & \sigma_1^{(3),3} \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_1^{(2),3} = h_1^{(2)} & & \\ \sigma_1^{(3),3} = h_1^{(3)} - h_1^{(2)} & & \end{aligned}$$

Figura 6.3: Varredura.

$M_\lambda$  para  $\lambda < \lambda^*$ .

Assim como este, há outros exemplos que indicam que devemos ter uma continuação da decomposição de Morse inicial.

Uma pergunta interessante que surge na investigação desta *seqüência espectral dinâmica* é a interpretação do aparecimento de torção. Este trabalho foi desenvolvido para seqüências espectrais cujos espaços  $E^r$  são  $\mathbb{Z}$ -módulos. Desta forma, pode aparecer torção na seqüência espectral antes do cancelamento algébrico de um  $\mathbb{Z}$ -módulo  $E_p^r$  e as vezes a torção permanece na estabilização. Que significado dinâmico tem essa torção nos dois diferentes casos? A investigação do significado dinâmico do aparecimento de torção nos  $\mathbb{Z}$ -módulos da seqüência espectral no seu processo de estabilização é uma pergunta em aberto. Em particular quando esta torção provoca o cancelamento algébrico de um  $\mathbb{Z}$  no próximo estágio da seqüência. Que significado tem a estabilização? Em que casos representa a homologia da variedade?

Outra motivação para a investigação da seqüência espectral dinâmica é o estudo das órbitas longas do fluxo. Estas órbitas têm energia alta, ou seja, a variação do funcional ação ao longo de tais órbitas é grande. Detectar energia alta é significativo geometricamente, [BaC]. Neste trabalho atingimos este objetivo provando o Teorema 5.0.16 do caminho Zig-zag ao longo do fluxo. Mostramos a existência de um caminho de linhas de fluxo  $\varphi$  conectando duas singularidades consecutivas. Dada uma entrada não nula  $\Delta_{p-r+1,p+1}$  em  $\Delta$ , existe uma órbita conectante unindo duas singularidades. Por outro lado, se  $\Delta_{p-r+1,p+1}$  é zero, mostramos que existe um caminho unindo as singularidades  $h_k \in F_p$  e  $h_{k-1} \in F_{p-r}$  quando  $\Delta_{p-r+1,p+1}^r$  corresponde a uma diferencial não nula da seqüência espectral, ou seja,  $d_p^r \neq 0$ .

Isto significa que, quando a diferencial  $d^r$  é não nula, existe uma curva feita de arcos de órbitas do fluxo, onde alguns desses arcos podem ser percorridos no sentido reverso ao fluxo. Constituem problemas em aberto a minimização do tempo em que se anda no fluxo reverso bem como a caracterização do tipo de órbita em que isso é possível.

A dificuldade em determinar caminhos minimais é que entradas nulas  $\Delta_{i,j}$  podem corresponder a órbitas conectantes juntando  $h_k^{(j)}$  e  $h_{k-1}^{(i)}$ . Isto é possível já que cada entrada é o número de intersecções das esferas instável e estável contadas com orientação. Nosso método permite determinar, neste contexto, caminhos minimais na ausência de entradas nulas correspondentes a órbitas conectantes.

Seja  $F(\gamma_{i,j})$  e  $R(\gamma_{i,j})$  o conjunto de todos os caminhos elementares que correspondem a

linhas de fluxo de  $\varphi_t$  e  $-\varphi_t$  respectivamente e que fazem parte de  $\gamma_{i,j}$ . Definamos

$$\ell^+(\gamma_{i,j}) = \sum_{\gamma \in F(\gamma_{i,j})} \ell(\gamma) \text{ and } \ell^-(\gamma_{i,j}) = \sum_{\gamma \in R(\gamma_{i,j})} \ell(\gamma)$$

É claro que  $\ell(\gamma_{i,j}) = \ell^+(\gamma_{i,j}) + \ell^-(\gamma_{i,j})$  e  $\ell^+(\gamma_{i,j}) - \ell^-(\gamma_{i,j}) = j - i$ .

Na presença de vários caminhos entre  $h_k^{(j)}$  e  $h_{k-1}^{(i)}$  escolhemos aquele cujo  $\ell^-(\gamma_{i,j})$  é minimal. Definimos  $\mathcal{L}_{ij}$  como o conjunto de todos os caminhos entre  $h_k^{(j)}$  e  $h_{k-1}^{(i)}$ . Notemos que um caminho  $\gamma_{i,j} \in \mathcal{L}_{ij}$  tem comprimento mínimo se e somente se  $\ell^-(\gamma_{i,j})$  é minimal. De fato,  $\gamma_{i,j}$  tem comprimento mínimo em  $\mathcal{L}_{ij}$ , ou seja,  $\ell(\gamma_{i,j}) < \ell(\theta_{ij}) \forall \theta_{ij} \in \mathcal{L}_{ij}$  se e somente se

$$\ell^+(\gamma_{i,j}) + \ell^-(\gamma_{i,j}) < \ell^+(\theta_{ij}) + \ell^-(\theta_{ij}) \forall \theta_{ij} \in \mathcal{L}_{ij} \quad (6.1)$$

Substituindo  $\ell^+(\gamma_{i,j}) = \ell^-(\gamma_{i,j}) + j - i$  e  $\ell^+(\theta_{ij}) = \ell^-(\theta_{ij}) + j - i$  em (6.1) obtemos  $\ell^-(\gamma_{i,j}) < \ell^-(\theta_{ij}) \forall \theta_{ij} \in \mathcal{L}_{ij}$ . Com isso, encontramos um caminho de comprimento minimal para o caso em que não existem órbitas correspondentes as entradas nulas da matriz. No entanto, mesmo neste caso particular, o minimal não é único. Além disso, permanece em aberto o caso mais geral em que permitimos entradas nulas da matriz correspondendo a conexões.

Ainda associado ao estudo da diferencial da seqüência espectral surge a questão dos cancelamentos algébricos da seqüência e suas implicações dinâmicas.

Sejam  $\bar{h}_k \in F_s$  e  $\bar{h}_{k-1} \in F_{s-\ell}$ , com  $p > s$  e  $r > \ell$ , tais que existem órbitas conectantes entre  $h_k$  e  $\bar{h}_{k-1}$ ,  $\bar{h}_k$  e  $h_{k-1}$ , e  $\bar{h}_k$  e  $\bar{h}_{k-1}$ . Além disso, suponha que não existem singularidades entre  $\bar{h}_k$  e  $\bar{h}_{k-1}$ . Ver Figura 6.4.

Um caso particular interessante ocorre quando a aplicação  $d_s^\ell$  é um isomorfismo e corresponde a uma entrada  $\pm 1$  que é um pivô primário (ou um pivô mudança de base) na matriz  $\Delta^\ell$ . Como estas aplicações são isomorfismos, então implicam em cancelamentos algébricos na seqüência espectral. Por outro lado, estas aplicações também correspondem a cancelamentos dinâmicos de singularidades de índice consecutivo, como por exemplo  $\bar{h}_k$  e  $\bar{h}_{k-1}$  em  $\varphi$ . Pelo Teorema de Reineck (ver [R3] e [S1]) existe uma continuação do fluxo  $\varphi$  para  $\bar{\varphi}$  que corresponde ao cancelamento dinâmico, que por sua vez está associado a um cancelamento algébrico correspondente ao pivô primário  $\Delta_{s-\ell+1, s+1}^\ell = \Delta_{s-\ell+1, s+1}$  na  $\ell$ -ésima diagonal auxiliar de  $\Delta^\ell$ .

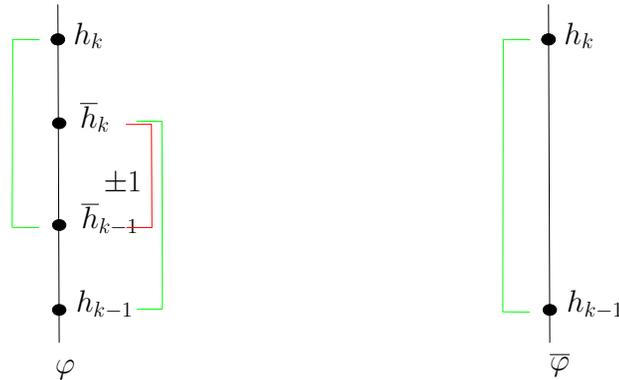


Figura 6.4: Fluxo perturbado  $\bar{\varphi}$  depois do cancelamento.

Nossa escolha de caminho em  $\varphi$  admite andar no fluxo reverso ao longo da órbita que cancelará  $\bar{h}_k$  e  $\bar{h}_{k-1}$  criando uma nova órbita mais longa conectando  $h_k$  e  $h_{k-1}$  no fluxo perturbado  $\bar{\varphi}$ . Portanto, a órbita conectando  $\bar{h}_k$  e  $\bar{h}_{k-1}$  pode ser vista como uma ponte responsável pela criação de uma órbita conectando  $h_k$  e  $h_{k-1}$  em  $\bar{\varphi}$ . Como a órbita conectando  $\bar{h}_k$  e  $\bar{h}_{k-1}$  deixa de existir em  $\bar{\varphi}$ , isto justifica o porque permitimos a esta órbita ser percorrida no sentido reverso quando construímos o caminho conectando  $h_k$  e  $h_{k-1}$  no fluxo  $\varphi$ . Neste caso particular o caminho em  $\varphi$  indica o nascimento de uma órbita em  $\bar{\varphi}$ .

Por outro lado, órbitas conectantes do fluxo  $\varphi^\ell$  que correspondem a uma  $d^\ell$  não nula estão associadas a caminhos de órbitas conectantes em  $\varphi$  pelo Teorema 5.0.16 Zig-Zag. Pelos mesmos argumentos acima, as órbitas conectantes em  $\varphi^\ell$  associadas a um isomorfismo  $d_s^\ell$  que corresponde a um pivô primário  $\pm 1$  na matriz são cancelamentos algébricos na seqüência espectral. Logo, também correspondem a um cancelamento dinâmico de singularidades de índice consecutivo em  $\varphi^\ell$ . Pelo Teorema de Reineck existe uma continuação do fluxo  $\varphi^\ell$  a  $\bar{\varphi}^\ell$  que corresponde a um cancelamento dinâmico associado ao pivô primário  $\Delta_{s-\ell+1, s+1}^\ell$  na  $\ell$ -ésima diagonal auxiliar de  $\Delta^\ell$ . Mais uma vez, isto justifica o porque permitimos esta órbita em  $\varphi^\ell$  que corresponde a um caminho em  $\varphi$  ser percorrido no sentido reverso.

Inspirados neste caso particular onde a álgebra tem seu correspondente dinâmico, vamos considerar caminhos mais gerais em  $\Delta^r$  onde percorrer no sentido reverso será permitido ao longo de órbitas correspondentes a pivôs primários e pivôs mudança de base que não sejam

necessariamente iguais a  $\pm 1$ . A motivação para isto é que pelo Teorema 5.0.16 certos pivôs mudança de base correspondem a diferenciais não nulas na seqüência espectral.

Embora neste caso não esteja claro qual a contrapartida dinâmica para o comportamento algébrico, o Teorema 5.0.16 indica correspondência entre pivôs em  $\Delta^\ell$  (que podem indicar órbitas no fluxo  $\varphi^\ell$  associado a diferenciais não nulas  $d^\ell$  da seqüência espectral) e caminhos no fluxo  $\varphi$ .

Uma extensão natural deste trabalho é continuar generalizando o método da varredura e os Teoremas 3.0.6, 4.0.14 e 5.0.16 para uma matriz de conexão associada a uma decomposição de Morse mais geral. Além disso, queremos explorar mais resultados associados as diferenciais nesta situação mais geral.

Seria interessante considerar outros coeficientes no cálculo da seqüência espectral, como corpos ou anéis e verificar a significância dos resultados obtidos. Por exemplo, para estudar espaços moduli de dimensão maior podemos considerar seqüências espectrais com coeficientes no espaço dos laços ([BaC]). Mais precisamente, se  $\varphi$  é um fluxo induzido por  $-\nabla f$ , onde  $f$  é uma função de Morse, consideremos  $x$  e  $y$  pontos críticos e  $a$  tal que  $f(y) < a < f(x)$ . Sejam

$$S^u(x) = W^u(x) \cap f^{-1}(a) \quad S^s(y) = W^s(y) \cap f^{-1}(a)$$

Se não existem linhas de fluxo quebradas entre  $y$  e  $x$  então podemos supor que são os únicos pontos críticos em  $f^{-1}([f(y), f(x)])$ . Neste caso, se  $\text{ind}(x) = k$  e  $\text{ind}(y) = \ell$  então  $S^u(x) \approx S^{k-1}$  e  $S^s(y) \approx S^{n-\ell-1}$ . Pela condição de Morse-Smale  $S^u(x)$  e  $S^s(y)$  se interceptam transversalmente. A intersecção de  $S^u(x)$  e  $S^s(y)$ , denotada por  $Z(x, y)$  é a variedade de conexão de  $x$  e  $y$ , também conhecida como espaço moduli das linhas de fluxo conectando  $x$  a  $y$ . No caso de não haver órbitas quebradas  $Z(x, y)$  é compacto. Neste caso

$$\dim f^{-1}(a) = \dim S^u(x) + \dim S^s(y) - \dim Z(x, y)$$

ou seja,  $\dim Z(x, y) = k - \ell - 1$ . Em nosso trabalho, como consideramos pontos críticos com índices consecutivos então  $Z(x, y)$  tem dimensão zero. Para estudar espaços moduli com dimensões maiores Cornea considera coeficientes no espaço dos laços em  $M$ . Além disso, no

caso em que existem órbitas quebradas, Cornea trabalha com a compactificação de  $Z(x, y)$ . Para mais detalhes sobre esse estudo, ver [BaC] e [C2]. Usando tais ferramentas em nosso contexto, seria possível detectar um número muito maior de conexões e assim obter resultados mais refinados.

Um outro exemplo interessante com outros coeficientes é o estudo da matriz de conexão sobre  $\mathbb{Z}_2$  e a seqüência espectral associada. Nos trabalhos [BMdR1], [BMdR2], [BMdR3], [BdRV], [BdRMaV], [BdRMa] e [CdRM] muitos resultados são obtidos através de técnicas homológicas e homotópicas registradas em grafos de Lyapunov. São caracterizadas propriedades necessárias e suficientes de um grafo para que este esteja associado a um fluxo do tipo gradiente. Em particular, as restrições na topologia das fronteiras dos blocos isolantes que contém as componentes do conjunto recorrente por cadeias, e as variações ao passar por estas componentes são registradas no grafo. Quando o conjunto recorrente possui somente singularidades, as seqüências homológicas sobre  $\mathbb{Z}_2$  classificam as mesmas em desconectantes e conectantes,  $h_j^d$  e  $h_j^c$ . Além disso, informações relativas aos blocos isolantes, bem como a forma com que estes compõem a variedade  $M$ , estão registradas nos grafos e dependem dessa classificação. Do nosso trabalho surge então uma possibilidade de entender as matrizes de conexão sobre  $\mathbb{Z}_2$  e as seqüências espectrais associadas. Isto implicaria no entendimento das conexões dos grafos de Lyapunov rotulados com  $c$  e  $d$ . Ainda, podemos considerar enriquecer o grafo de Lyapunov rotulado com

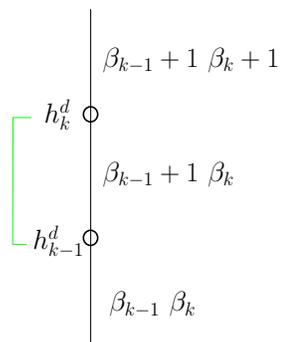


Figura 6.5: Conexão não permitida.

$c$  e  $d$  com novas conexões. Quais conexões são permitidas nestes grafos? É fácil verificar que o

grafo na Figura 6.5 não seria permitido, pois contraria o Teorema do Cancelamento de Smale ([R3] e [S2]).

# Referências Bibliográficas

- [BaC] J. F. Barraud and O. Cornea. Lagrangian intersections and the Serre spectral sequence. *Annals of Mathematics*. **166** (2007), 657-722.
- [BMdR1] M. A. Bertolim, M. P. Mello and K. A. de Rezende Lyapunov graph continuation, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. **23** (2003), 1-58.
- [BMdR2] M. A. Bertolim, M. P. Mello and K. A. de Rezende Poincaré - Hopf Inequalities, *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **357** (2005), 4091-4129.
- [BMdR3] M. A. Bertolim, M. P. Mello and K. A. de Rezende Poincaré-Hopf Inequalities and Morse Inequalities for Lyapunov graphs, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. **25** (2005), 1-39.
- [BdRV] M. A. Bertolim, K. A. de Rezende and G. M. Vago Minimal Morse flows on Compact Manifolds, *Topology and its Application*. **153** (2006), 3450-3466.
- [BdRMaV] M. A. Bertolim, O. Manzoli Neto, K. A. de Rezende, G. M. Vago Isolating Blocks for Morse-Smale Flows, *Geometriae Dedicata*. **121** (2006), 19-41.
- [BdRMa] M. A. Bertolim, O. Manzoli Neto, K. A. de Rezende Isolating Blocks for Periodic Orbits, *Journal of Dynamical and Control Systems*. **13** (2007), 121-134.
- [B] G. E. Bredon. *Topology and Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, **139**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1993.

- [Co] C. Conley. *Isolated invariant sets and the Morse index*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **38**. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.
- [C1] O. Cornea. Homotopical dynamics: suspension and duality. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. **20** (2000), 379-391.
- [C2] O. Cornea. Homotopical dynamics II: Hopf invariants, smoothing and the Morse complex. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4e série*. **35** (2002), 549-573.
- [C3] O. Cornea. Homotopical Dynamics IV: Hopf invariants and Hamiltonian flows. *Communications on Pure and Applied Math*. **55** (2002), 1033-1088.
- [CdRM] R. N. Cruz, K. A. de Rezende and M. Mello Realizability of the Morse polytope, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. **6** (2007), 59-86.
- [D] J. F. Davis and P. Kirk. *Lecture Notes in Algebraic Topology*. Graduated Studies in Math, **35**. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2001.
- [F1] J. Franks. Morse-Smale flows and homotopy theory. *Topology*. **18** (1979), 199-215.
- [F2] J. Franks. *Homology and dynamical systems*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **49**, Providence, R.I., 1982.
- [Fr1] R. Franzosa. Index filtrations and the homology index braid for partially ordered Morse decompositions. *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **298** (1986), 193–213.
- [Fr2] R. Franzosa. The continuation theory for Morse decompositions and connection matrices. *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **310** (1988), 781–803.
- [Fr3] R. Franzosa. The connection matrix theory for Morse decompositions. *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **311** (1989) 561-592.
- [Fr4] R. Franzosa, K. Mischaikow. Algebraic transition matrices in the Conley index theory. *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **350** (1998), 889–912.

- [K] H. L. Kurland. Homotopy invariants of repeller-attractor pairs I: The Puppe sequence of an R-A pair. *J. Differential Equations*. **46** (1982), 1–31
- [L] R. Leclercq. *Spectral invariants in Lagrangian Floer theory*. arXiv:math/0612325, 2006.
- [MC] C. McCord. The connection map for attractor-repeller pairs. *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **307** (1988), 195–203.
- [MCR] C. McCord, J. F. Reineck. Connection matrices and transition matrices. *Conley index theory, Banach Center Publ.* **47** (1999), 41–55.
- [M1] J. W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia, 1965.
- [M2] J. W. Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.
- [Mo] R. Moeckel. Morse decompositions and connection matrices. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. **8** (1988), 227–249.
- [R1] J. F. Reineck. The connection matrix in Morse-Smale flows. *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **322** (1990), 523–545.
- [R2] J. F. Reineck. The connection matrix in Morse-Smale flows II. *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 2097–2110.
- [R3] J. F. Reineck. Continuation to the minimal number of critical points in gradient flows. *Duke Math. Journal* **68** (1992), 185–194.
- [Sa1] D. Salamon. Connected simple systems and the Conley index of invariants sets. *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **291** (1985), 1–41.
- [Sa2] D. Salamon. Morse Theory, Conley index and Floer homology. *Bull. London Math. Soc.* **22** (1990), 113–140.

- [S1] S. Smale. The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), 373–375.
- [S2] S. Smale. On the structure of manifolds. *Amer. J. Math.* **84** (1962), 387–399.
- [Sp] E. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.