

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado à
curvas de crescimento animal

Juliana Scapim

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Março de 2008

Modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado à curvas de crescimento animal

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Juliana Scapim** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de março de 2008.



Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão
Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática Aplicada**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Scapim, Juliana

Sc69m Modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado à curvas de crescimento animal/Juliana Scapim -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Rodney Carlos Bassanezi

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Biomatemática. 2. Ajuste de curva. 3. Conjuntos difusos. 4. Animais – Crescimento. I. Bassanezi, Rodney Carlos. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Generalized von Bertalanffy model applied to growth animal curves

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Biomathematics. 2. Curve fitting. 3. Fuzzy sets. 4. Growth animal.

Área de concentração: Biomatemática

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão (UFABC)
Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafeelice (UFU)

Data da defesa: 25/03/2008

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

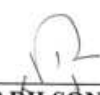
Dissertação de Mestrado defendida em 25 de março de 2008 e aprovada
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). RODNEY CARLOS BASSANEZI



Prof. (a). Dr (a). ROSANA SUELI DA MOTTA JAFELICE



Prof. (a). Dr (a). ADILSON JOSÉ VIEIRA BRANDÃO

Agradecimentos

À minha família pelo carinho à mim concedido em todos os momentos desta jornada. Em especial, ao meu avô João (in memoriam) por toda a sua preocupação, apoio e incentivo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Rodney C. Bassanezi por ter acreditado em minha capacidade e pelo competente trabalho de orientação, paciência e confiança que me passou no desenvolvimento deste trabalho.

Aos membros da banca Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice e Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão pela avaliação e sugestões dadas no intuito de melhorar a qualidade deste trabalho.

Às sempre amigas Camila, Marina e Tânia pela amizade, apoio, momentos de alegria e paciência nos momentos de dificuldade durante estes anos de mestrado. Sem dúvida, esta amizade foi fundamental para a conclusão desta etapa.

Aos amigos do IMECC pelas intermináveis horas de estudo, companheirismo e idéias que contribuíram para este trabalho. Agradecimentos especiais ao Moiseis por ter sido meu anjo da guarda nos problemas computacionais.

À todos meus amigos de Barra Bonita e aos amigos conquistados em Campinas pela contribuição, seja direta ou indireta, e apoio.

Ao Carlo por todo o seu carinho, companheirismo e atenção durante este ano que nos conhecemos e juntos estamos, principalmente pela paciência durante os momentos difíceis.

Aos funcionários e professores do IMECC/UNICAMP, em especial à Tânia, Cidinha e Edinaldo, pelo carinho e eficiência com que sempre trataram meus problemas.

À Universidade Estadual de Campinas, instituição que possibilitou a realização deste mestrado.

A todos que, direta ou indiretamente colaboraram comigo e, peço desculpas às pessoas que involuntariamente não foram citadas aqui.

À Deus por ter proporcionado a oportunidade de cumprir mais uma etapa em minha vida.

Meus sinceros agradecimentos.

Resumo

Objetivamos com o presente trabalho estudar a curva de crescimento em peso de diversos espécimes animais, a fim de estabelecer padrões de metabolismo por classe animal. Ajustamos os parâmetros do modelo não-linear de von Bertalanffy generalizado aplicado às curvas de crescimento para identificar quais parâmetros descrevem melhor o crescimento do animal nas faixas de idade-peso fornecidas. Utilizamos no estudo dados de idade e peso de 19 espécimes, entre mamíferos, aves, anfíbios, peixes, crustáceos, vermes e insetos. Os ajustes, feitos através de experimentos computacionais, utilizam como ferramenta de apoio o programa MATLAB. Uma vez que a principal característica de sistemas determinísticos é a precisão obtida pela solução e ao lidar com modelos de crescimento animal, naturalmente informações imprecisas fazem parte da modelagem, comprometendo esta precisão, optamos por concluir os resultados com o apoio da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, que permite trabalhar com este tipo de incerteza de maneira razoável. A conjectura inicial de que haveria um padrão de metabolismo por classe animal não se verificou, ocorrendo, inclusive, distinção entre machos e fêmeas de uma mesma espécie, como é o caso do peru. Hipoteticamente, a perda de energia está relacionada com os hábitos de cada animal.

Abstract

The objective of this work is to study the curve of growth in weight of several animals specimens, to establish standards of metabolism for animal class. The parameters of the non-linear generalized form of the von Bertalanffy model applied to weight growth curves were adjusted to identify with ones describe better the growth of the animal on the areas of age-weight provides. We utilized on the study data of age and weight of 19 specimens, mammals, birds, amphibians, fishes, crustaceous, vermin's and insects. These adjusts were made through computational experiments, using as tool of support the program MATLAB. Once that the principal characteristic of the deterministic systems is the precision obtain by the solution and in dealing with models of animal growth, naturally imprecision information's make part of the modeling, compromising this precision, we opt by conclude the results with the support of Fuzzy Sets Theory, with allow work with this kind of uncertainness in a reasonable way. The initial conjecture that should be one standard of metabolism for animal class was not verify, occurring, including, distinction between males and females of the same species, like the case of the turkey. Hypothetically, the lost of energy is related with the habits of each animal.

Sumário

Introdução	1
1 Resultados Preliminares	5
1.1 Introdução	5
1.2 Modelo de Malthus	8
1.3 Modelo de Verhulst ou Logístico	9
1.4 Modelo de von Bertalanffy	11
1.5 Modelo de Montroll [9]	13
1.6 Modelo de Gompertz [4]	14
1.7 Modelo de Smith [11]	16
1.8 Modelo de Blumberg [11]	18
1.9 Modelo de Schnute [11]	20
1.10 Modelo de Ayala, Ehrenfeld, Gilpin [4]	21
1.11 Modelo logístico generalizado [11]	22
2 Modelo de von Bertalanffy generalizado	27
2.1 Introdução	27
2.2 Resolução do Modelo	28

3	Simulações numéricas	37
3.1	Introdução	37
3.2	Mamíferos	41
3.2.1	Suínos	41
3.2.2	Bovinos	50
3.2.3	Caprinos	55
3.2.4	Coelho	59
3.2.5	Ovinos	63
3.2.6	Ratos	71
3.2.7	Humanos	75
3.3	Aves	81
3.3.1	Peru	81
3.3.2	Frango	88
3.4	Anfíbios	100
3.4.1	Rã	100
3.5	Peixes	104
3.5.1	Tilápia	104
3.5.2	Arraia	108
3.6	Crustáceos	112
3.6.1	Camarão	112
3.7	Vermes	116
3.7.1	Minhoca	116
3.8	Insetos	120
3.8.1	Larva de mosca varejeira	120

3.9	Conclusão - simulações numéricas	125
4	Dinâmica Fuzzy	129
4.1	Introdução	129
4.2	Conceitos e definições	130
4.3	Solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado	136
	Conclusão	143

Introdução

A utilização de modelos matemáticos para o estudo de níveis de crescimento em animais é uma prática que pode auxiliar na escolha do melhor método de exploração de determinada espécie zootécnica. As curvas de crescimento relacionam o peso de um animal com sua idade, sendo importante para pesquisas e recomendações sobre eficiência de produção, contribuindo, assim, para aumentar o lucro do produtor [1].

Geralmente, estudam-se curvas de crescimento por meio do ajuste de funções não-lineares, que possibilitam sintetizar informações de todo o período de vida dos animais, ou seja, um conjunto de informações em série de peso por idade, em um pequeno conjunto de parâmetros interpretáveis biologicamente, facilitando, assim o entendimento do fenômeno e ressaltando características relevantes do crescimento [14, 10].

Dentre as equações não-lineares mais utilizadas para descrever a curva de crescimento em animais de produção, estão os modelos de Richards, Gompertz, von Bertalanffy e Logístico [3, 1]. Alguns requisitos devem ser seguidos para que uma função de crescimento seja descritiva de uma relação peso-idade, dentre os quais a interpretação biológica dos parâmetros (confiabilidade), um ajuste com pequenos desvios (precisão) e o grau de dificuldade do ajuste (operacionalidade). O modelo de von Bertalanffy foi aplicado em estudos com curvas de crescimento para rãs [10, 3], frangos [3, 7], suínos [3, 6], caprinos [3], camarão [3, 12], coelho [3], ovinos [3, 1], bovinos [3], perus [5], tilápias [4], ratos [15] e humanos [15], apresentando qualidade elevada de ajuste e estimativas condizentes com a realidade quando comparado à

outros modelos em todos os trabalhos.

Temos por objetivo ajustar os parâmetros do modelo não-linear de von Bertalanffy generalizado aplicado às curvas de crescimento em peso de diversos espécimes animais, a fim de identificar quais parâmetros descrevem melhor o crescimento de cada animal nas faixas de idade-peso fornecidas, procurando estabelecer padrões de metabolismo por classe animal.

Utilizamos dados de idade e peso de 19 espécimes, entre os quais mamíferos, aves, anfíbios, peixes, crustáceos, vermes e insetos obtidos de instituições de pesquisa e da literatura, conforme segue:

1. Mamíferos : Suínos Machos e fêmeas, Bovinos, Caprinos, Coelhos, Ovinos, Ratos e Humanos;
2. Aves: Perus machos e fêmeas e Frangos machos e fêmeas;
3. Anfíbios: Rã-touro;
4. Peixes: Tilápia e Arraia;
5. Crustáceos: Camarão;
6. Vermes: Minhoca;
7. Insetos: Larva de mosca varejeira.

Os ajustes, feitos através de experimentos computacionais, utilizam como ferramenta de apoio o programa MATLAB versão 7.

Uma vez que a principal característica de sistemas determinísticos é a precisão obtida pela solução e ao lidar com modelos de crescimento animal, naturalmente informações imprecisas fazem parte da modelagem, comprometendo esta precisão, optamos por concluir os resultados com o apoio da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, que permite trabalhar com este tipo de incerteza de maneira razoável.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos como segue.

No primeiro capítulo, vamos rever alguns dos principais modelos de crescimento, em ordem cronológica, apresentando as respectivas soluções. Algumas propriedades sobre o comportamento da solução de equações diferenciais e de diferenças também serão apresentados para auxiliar na análise matemática dos modelos aqui apresentados.

O capítulo 2 será dedicado à apresentação o modelo de von Bertalanffy generalizado, bem como sua solução detalhada. Ainda, obteremos expressões para o cálculo dos parâmetros presentes no modelo e apresentaremos o método de For-Walford, utilizado, em geral, para o cálculo da capacidade suporte.

O Princípio da Alometria será apresetando no capítulo 3, justificando a presença do parâmetro alométrico $\gamma = 2/3$ presente no modelo de von Bertalanffy e a hipótese de que cada espécime possui um valor próprio para este parâmetro, uma vez que é relacionado à área corporal. Além disso, apresentaremos as opções do algoritmo desenvolvido para a estimativa dos parâmetros α , β , γ e p_∞ . Na seção 3.2, daremos início às simulações realizadas individualmente para cada animal, agrupadas segundo o grupo animal à que pertencem.

No capítulo 4 serão apresentados alguns conceitos e definições da Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Na seção 4.3 apresentamos a solução fuzzy do Modelo de von Bertalanffy generalizado, bem como a comparação entre a solução clássica obtida no capítulo 3 e a solução fuzzy do problema.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

1.1 Introdução

Uma variedade de curvas de crescimento têm sido desenvolvidas a fim de modelar a dinâmica populacional de espécies, tanto isoladas quanto em interação, e mais geralmente o crescimento de sistemas biológicos. A maioria dos modelos preditivos são representações baseadas em variações da equação clássica de crescimento logístico de Verhulst.

A fim de auxiliar a análise dos modelos apresentados serão exibidas algumas propriedades sobre o comportamento de solução de equações diferenciais e de diferenças.

São três os fatores que ocasionam mudanças quantitativas na população de qualquer espécie: a natalidade, a mortalidade e a migração. Sendo assim, a variação de uma população $p = p(t)$ em relação ao tempo t , é dada por

$$\frac{dp(t)}{dt} = \text{natalidade} - \text{mortalidade} + \text{migração}. \quad (1.1)$$

Quando a população é tratada isoladamente, como no nosso caso, o processo migratório não é considerado. Se a natalidade e a mortalidade são dadas em função da população p , então a equação (1.1) pode ser escrita como uma equação autônoma

$$\frac{dp(t)}{dt} = f(p) \quad (1.2)$$

onde $f(p)$ satisfaz $f(0) = 0$, ou seja, se a população é nula assim permanecerá, pois neste caso não haverá natalidade ou mortalidade. Essa condição é indispensável, pois coíbe o aparecimento espontâneo de indivíduos.

Se a função $f(p)$ é suficientemente suave para que possamos expressá-la como uma série de Taylor, teremos

$$f(p) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i. \quad (1.3)$$

Porém, como $f(0) = 0$, então o primeiro termo da série acima é nulo, $a_0 = 0$, o que nos permite reescrever a equação (1.2) como

$$\frac{dp(t)}{dt} = p(a_1 + a_2 p^1 + a_3 p^2 + \dots) = p\lambda(p). \quad (1.4)$$

A função $\lambda(p)$ é denominada *índice de crescimento relativo* uma vez que,

$$\lambda(p) = \frac{1}{p} \frac{dp(t)}{dt}.$$

Considerando que no instante inicial, $t = 0$, o número de indivíduos é $p(0) = p_0 > 0$, então temos um problema de valor inicial para a expressão (1.4)

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = p\lambda(p) \\ p(0) = p_0 \end{cases}. \quad (1.5)$$

Como, em geral, queremos determinar o comportamento da dinâmica populacional em um período de tempo, é importante obtermos o maior número de informações do modelo que descreve a situação como, por exemplo, os estados de equilíbrios [9].

Definição 1.1 - Dizemos que o ponto p^* é um estado de equilíbrio para a equação (1.2) quando $p'(t) = f(p^*) = 0$.

Se considerarmos a dinâmica de uma determinada população modelada conforme (1.2) então, pela fórmula de Taylor, temos que, suficientemente próximo de p^* vale

$$\frac{dp}{dt} = f(p) \approx f(p^*) + f'(p^*)(p - p^*)$$

logo, como $f(p^*) = 0$, separando as variáveis obtemos

$$\frac{dp}{p - p^*} = f'(p^*)dt$$

que por integração no intervalo $[0, t]$ nos fornece

$$\ln \frac{|p(t) - p^*|}{|p_0 - p^*|} = f'(p^*)t \iff |p(t) - p^*| = |p_0 - p^*| e^{f'(p^*)t}$$

Assim, dependendo do sinal de $f'(p^*)$, a solução converge para o estado de equilíbrio p^* ou diverge de p^* . Dizemos então que o estado de equilíbrio é localmente:

1. assintoticamente estável quando $f'(p^*) < 0$;
2. instável quando $f'(p^*) > 0$;
3. se $f'(p^*) = 0$ então $p(t) = p_0 = p^*$ para todo t , $\implies p_0 = p^*$ é estável.

Os modelos com crescimento inibido são os mais utilizados em biomatemática. São caracterizados por possuírem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, isto é, a população tende a se estabilizar. Matematicamente, isto significa que existe $k \neq 0$ tal que $\lambda(k) = 0$. Este valor é denominado *capacidade suporte*. Esses modelos possuem algumas características básicas:

- (i) O crescimento relativo $\lambda(p)$ é decrescente com relação a p e $\lambda(p) \longrightarrow 0$ quando p tende à capacidade suporte k ;
- (ii) A variação absoluta é crescente no início e depois decresce tendendo a zero;
- (iii) A variação é negativa se $p(t) > k$.

Nas seções seguintes, faremos uma revisita, em ordem cronológica, à vários modelos importantes de crescimento presentes na literatura, apresentando sua formulação em termos de equações diferenciais e as respectivas soluções analíticas, examinando algumas de suas propriedades.

1.2 Modelo de Malthus

Em 1798, o economista inglês Thomas Robert Malthus publicou um artigo sobre o estudo do crescimento populacional humano que atualmente é conhecido como a primeira proposta de utilização da matemática na tentativa de avaliar a dinâmica populacional [19]. Segundo Malthus, sob certas condições, a variação populacional ocorre à razão geométrica [9].

Embora Malthus não tenha formulado matematicamente, o atualmente conhecido como modelo de Malthus, em termos de equações diferenciais, é dado por

$$\frac{dp(t)}{dt} = \lambda p(t) \quad (1.6)$$

onde λ é constante e $p(t)$ representa o valor da população p ao longo do tempo t .

A equação diferencial (1.6) é um caso particular da equação geral (1.4) estabelecida na seção precedente como modelo de dinâmica populacional sem migração, onde o índice de crescimento relativo λ permanece constante ao longo do tempo.

Portanto, considerando $p(0) = p_0 > 0$ e a equação (1.6), temos um problema de valor inicial cuja solução

$$p(t) = p_0 e^{\lambda t} \quad (1.7)$$

é facilmente determinada por separação de variáveis e integração no intervalo $[0, t]$.

Biologicamente, as condições pressupostas neste modelo são ideais, o que não condiz com a realidade. No entanto, o modelo Malthusiano funciona bem quando a população ainda está na fase de crescimento exponencial, e num espaço de tempo pequeno, servindo como aproximação para problemas mais elaborados em intervalos de tempo relativamente curtos.

A Figura 1.1 descreve algumas curvas de crescimento do problema de valor inicial determinado pela equação do Modelo de Malthus (1.6), com os seguintes parâmetros: $\lambda = 0.5, p_0 = 1$.

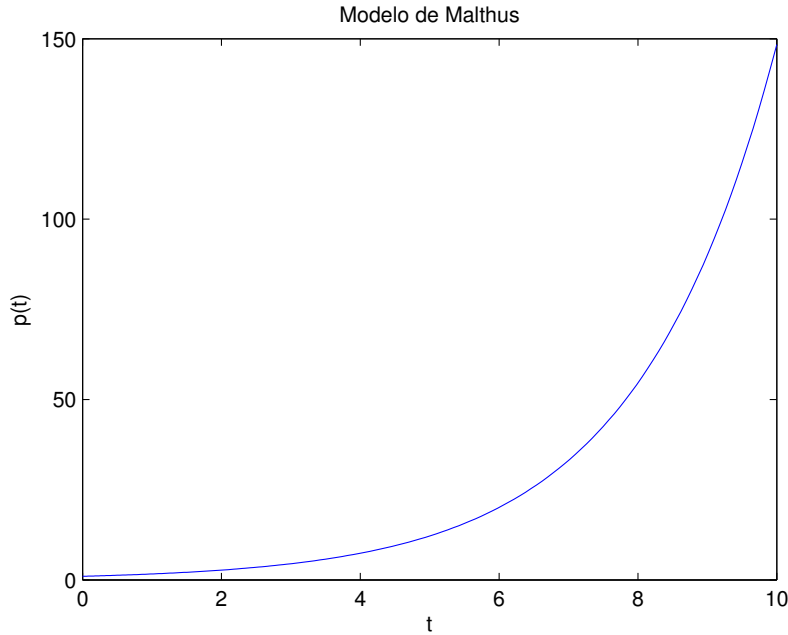


Figura 1.1: Curva de crescimento do Modelo de Malthus, $p(t)$ versus t , para os seguintes parâmetros: $\lambda = 0.5, p_0 = 1$.

1.3 Modelo de Verhulst ou Logístico

Em 1837, o matemático belga Pierre F. Verhulst propôs um modelo de dinâmica populacional para uma espécie que atende à variação da taxa de crescimento. O modelo de Verhulst supõe que uma população, vivendo em determinado meio, deverá crescer até um limite máximo sustentável (capacidade suporte), isto é, tende a se estabilizar. A equação incorpora a queda de crescimento da população que deve estar sujeita a um fator inibidor de proporcionalidade.

O modelo de Verhulst é, essencialmente, o modelo de Malthus modificado, considerando a taxa de crescimento como sendo proporcional à população em cada instante [4]. Assim

$$\frac{dp}{dt} = \beta(p)p \quad (1.8)$$

com $\beta(p) = \alpha \left(\frac{k-p}{k} \right)$, $\alpha > 0$ e k sendo a capacidade suporte da população. Desta forma $\beta(p)$ tende a zero quando $p \rightarrow k$.

Explicitando $\beta(p)$ na equação (1.8), e supondo que $p(0) = p_0$ seja dado, temos o modelo clássico de Verhulst ou modelo logístico:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p \left(1 - \frac{p}{k}\right) \\ p(0) = p_0, \alpha > 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Observamos que $p(t) \equiv 0$ e $p(t) \equiv k$ são as soluções de equilíbrio da equação diferencial dada em (1.9).

A solução analítica de (1.9) é obtida através de separação de variáveis e integração no intervalo $[0, t]$, obtendo assim a expressão

$$\ln \left| \frac{p}{p_0} \right| - \ln \left| \frac{p-k}{p_0-k} \right| = \alpha t,$$

o que implica em

$$\ln \left| \frac{p(p_0-k)}{p_0(p-k)} \right| = \alpha t,$$

ou ainda,

$$\left| \frac{p_0(p-k)}{p(p_0-k)} \right| = e^{-\alpha t} \implies \frac{|p-k|}{|p|} = \frac{|p_0-k|}{|p_0|} e^{-\alpha t}.$$

Isolando $p(t)$ obtemos

$$p(t) = \frac{p_0 k}{p_0 + (k - p_0)e^{-\alpha t}}.$$

Como o termo exponencial no denominador tende a zero quanto $t \longrightarrow \infty$ então, independente da condição inicial, $p(t) \longrightarrow k$ quando $t \longrightarrow \infty$, ou seja, $p^* = k$ é assintoticamente estável, e $p = 0$ é instável.

Observemos que neste modelo o ponto de inflexão é sempre metade do valor p^* . De fato,

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \alpha \frac{dp}{dt} - \frac{2\alpha}{k} p \frac{dp}{dt} = 0 \iff \alpha \left(1 - \frac{2}{k} p\right) = 0 \iff p = \frac{k}{2} = \frac{p^*}{2}$$

A Figura 1.2 descreve algumas curvas para o modelo logístico (1.9) com os seguintes parâmetros: (i) $\alpha = 0.5, p_0 = 1, k = 50$; (ii) $\alpha = 0.8, p_0 = 10, k = 25$; (iii) $\alpha = 1.0, p_0 = 1, k = 40$; (iv) $\alpha = 0.1, p_0 = 10, k = 10$; (v) $\alpha = 0.05, p_0 = 5, k = 35$.

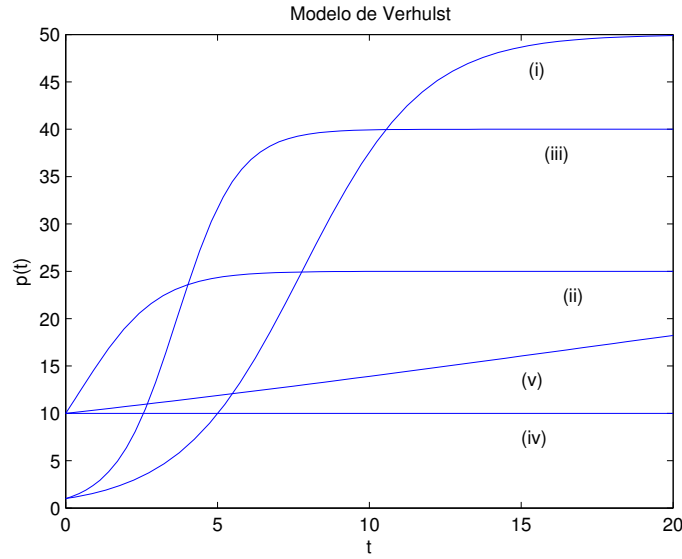


Figura 1.2: Curva de crescimento logística $p(t)$ versus t para os seguintes parâmetros: (i) $\alpha = 0.5, p_0 = 1, k = 50$; (ii) $\alpha = 0.8, p_0 = 10, k = 25$; (iii) $\alpha = 1.0, p_0 = 1, k = 40$; (iv) $\alpha = 0.1, p_0 = 10, k = 10$; (v) $\alpha = 0.05, p_0 = 5, k = 35$.

1.4 Modelo de von Bertalanffy

O biólogo australiano von Bertalanffy, no ano de 1938 [15], formulou um modelo matemático para analisar o aumento em peso de peixes. Seu modelo pode ser considerado uma alteração da curva de crescimento logístico de Verhulst com a finalidade de acomodar características metabólicas baseados em argumentação fisiológica:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p \\ p(0) = p_0, \end{cases} \quad (1.10)$$

onde $p = p(t)$ é a massa do peixe em função do tempo t , p_0 é a massa inicial, α é a constante de anabolismo (representando a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do animal) e β é a constante de catabolismo (que representa a taxa de diminuição da massa por unidade de massa). O termo $p^{\frac{2}{3}}$ é proveniente da relação alométrica do peso com a área corporal do peixe [4]. Esta relação será retomada no capítulo 3.

A equação (1.10) é não linear, trata-se de uma Equação diferencial do tipo Ber-

noulli e com uma simples substituição de variáveis nos conduz à uma equação linear.

Tomando $z = p^{\frac{1}{3}}$, segue que $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3}p^{-\frac{2}{3}}\frac{dp}{dt}$

Substituindo em (1.10), temos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3}p^{-\frac{2}{3}} \left(\alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p \right) = \frac{1}{3} (\alpha - \beta z)$$

cuja solução é dada por

$$z = \frac{\alpha}{\beta} + K e^{-\frac{\beta}{3}t}$$

Agora, usando a condição inicial $p(0) = p_0$ e $z = p^{1/3}$, otemos

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \left(1 - e^{-\frac{\beta}{3}t} \right)^3 \quad \text{se } p(0) \cong 0 \quad (\text{a})$$

ou

$$p(t) = \left[\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{3}t} \right) + p_0^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{\beta}{3}t} \right]^3 \quad \text{se } p(0) \neq 0 \quad (\text{b}) \quad (1.11)$$

Quando t cresce, p tende a $p_{\infty} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3$

Consideremos $p(0) = 0$. Tomando $K = \frac{\beta}{3}$ e substituindo em (1.11), temos a solução de (1.10) dada por:

$$p(t) = p_{\infty} (1 - e^{-Kt})^3, \quad (1.12)$$

onde p_{∞} é o valor máximo do peso do peixe.

Neste modelo o ponto de inflexão é obtido por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2p}{dt^2} = \frac{2}{3}\alpha p^{-1/3}\frac{dp}{dt} - \beta\frac{dp}{dt} = 0 &\iff \frac{2}{3}\alpha p^{-1/3} - \beta = 0 \iff p^{-1/3} = \frac{3}{2}\frac{\beta}{\alpha} \\ \implies p^* &= \left(\frac{2}{3} \right)^3 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^3 p_{\infty} = 0.2963 p_{\infty} \end{aligned}$$

A Figura 1.3 descreve a curva típica de crescimento em peso para o Modelo de von Bertalanffy(1.10) com os seguintes parâmetros: $p_0 = 1, p_{\infty} = 30, \alpha = 0.5$.

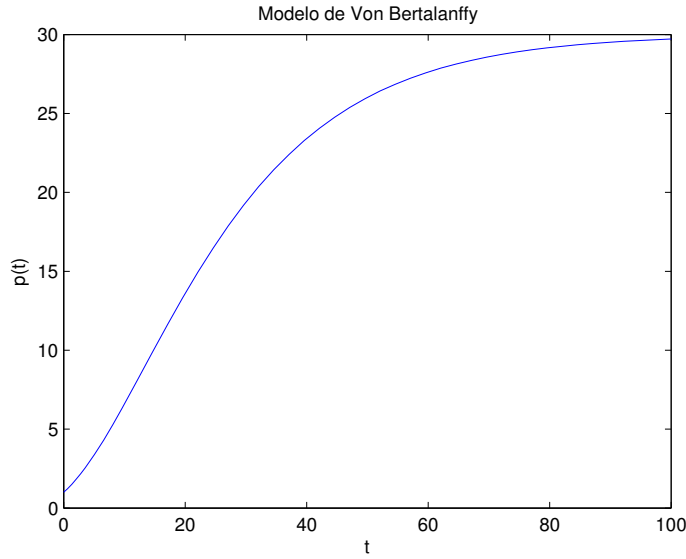


Figura 1.3: Curva de crescimento em peso de von Bertalanffy $p(t)$ versus t com os seguintes parâmetros: $p_0 = 1, p_\infty = 30, \alpha = 0.5$.

1.5 Modelo de Montroll [9]

Em 1971, Montroll propôs um modelo geral para traduzir o crescimento assintótico de uma variável, levando em conta que o posicionamento da variação máxima pode ser qualquer valor entre p_0 e k . Neste modelo, a equação de crescimento relativo é decrescente com relação a $p(t)$, porém não necessariamente de forma linear como no modelo de Verhulst. O modelo de Montroll é dado pela equação diferencial não linear

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p \left[1 - \left(\frac{p}{k} \right)^\beta \right], \quad (1.13)$$

onde $k > 0$ é a capacidade e suporte, α e β constantes reais positivas.

A principal diferença entre os modelos de Montroll e Verhulst está no ponto de inflexão da curva. Enquanto no modelo de Montroll a variação máxima ocorre quando

$$p(t_i) = k \left(\frac{1}{1 + \beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

na equação logística a variação máxima é atingida quando $p(t_i) = k/2$.

Dessa forma o ponto de inflexão $p(t)$ pode ser alterado de acordo com a necessidade do problema, apenas modificando o valor de β . Para $\beta = 1$ temos o modelo de Verhulst.

O estado de equilíbrio não nulo no modelo de Montroll é $p^* = k$. Considerando $f(p)$ como a expressão à direita do sinal de igualdade na equação (1.10), então temos que

$$\left. \frac{df}{dp} \right|_{p^*} = -\alpha\beta < 0.$$

Logo, o estado de equilíbrio $p^* = k$ é assintoticamente estável. Logo, podemos concluir que, independentemente da condição inicial, $p(t) \rightarrow k$ quando t cresce indefinidamente.

A solução do modelo de Montroll é dada por:

$$p(t) = \frac{p_0 k}{\left[p_0^\beta + (k^\beta - p_0^\beta) e^{-\beta r t} \right]^{\frac{1}{\beta}}} \quad (1.14)$$

A Figura 1.4 descreve algumas curvas de crescimento do Modelo de Montroll(1.13) com os seguintes parâmetros: (i) $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $p_0 = 1$, $k = 35$; (ii) $\alpha = 1.5$, $\beta = 2$, $p_0 = 1$, $k = 100$; (iii) $\alpha = 2$, $\beta = 0.1$, $p_0 = 10$, $k = 50$; (iv) $\alpha = 0.1$, $\beta = 10$, $p_0 = 5$, $k = 45$; (v) $\alpha = 5$, $\beta = 0.01$, $p_0 = 3$, $k = 25$.

1.6 Modelo de Gompertz [4]

O modelo de Gompertz, proposto em 1825, utiliza a taxa de inibição proporcional ao logaritmo desta variável. Ou seja, a taxa de crescimento é grande no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento. É um modelo bastante adequado para traduzir crescimentos celulares, sendo que, no início todas as células são meristemáticas, perdendo esta propriedade num intervalo de tempo relativamente pequeno.

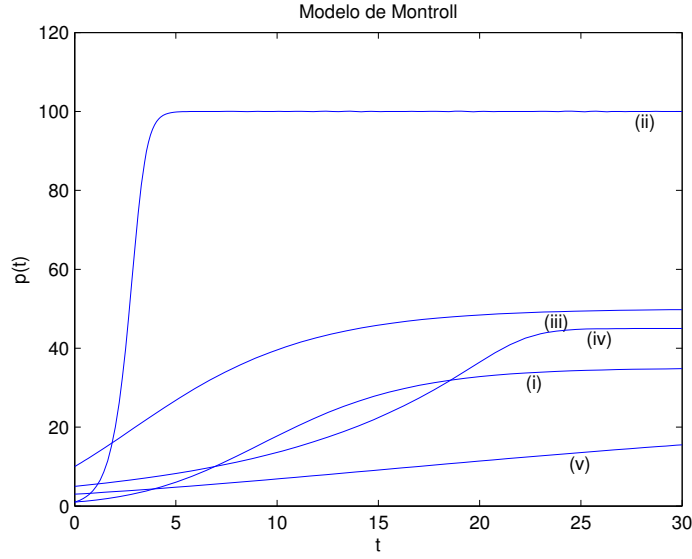


Figura 1.4: Curvas de crescimento do Modelo de Montroll $p(t)$ versus t para os seguintes parâmetros: (i) $\alpha = 0.5, \beta = 0.5, p_0 = 1, k = 35$; (ii) $\alpha = 1.5, \beta = 2, p_0 = 1, k = 100$; (iii) $\alpha = 2, \beta = 0.1, p_0 = 10, k = 50$; (iv) $\alpha = 0.1, \beta = 10, p_0 = 5, k = 45$; (v) $\alpha = 5, \beta = 0.01, p_0 = 3, k = 25$.

O modelo de Gompertz é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bx \ln x = x(a - \ln x) \\ x(0) = x_0 \text{ com } a > 0 \text{ e } b > 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

A taxa de crescimento relativo $r(x) = a - b \ln x > 0$, decresce com x e o valor de estabilidade de x é obtido considerando-se $r(x) = 0$, isto é,

$$\frac{dx}{dt} = 0 \iff (a - b \ln x) = 0 \iff x_\infty = e^{\frac{a}{b}}, \text{ com } x > 0.$$

Observemos que quando x é muito pequeno, $r(x)$ é muito grande pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} r(x) = +\infty$$

Agora, como $0 = a - b \ln x_\infty$, podemos tomar $a = b \ln x_\infty$ na equação (1.12) e reescrevê-la como

$$\frac{dx}{dt} = bx \ln x_\infty - b \ln x = bx \ln \left(\frac{x_\infty}{x} \right) = x \ln \left(\frac{x_\infty}{x} \right)^b \quad (1.16)$$

e neste caso, $r(x) = \ln \left(\frac{x_\infty}{x} \right)^b$.

A solução de (1.12) é obtida considerando-se a mudança de variável $z = \ln x$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a - bz.$$

Integrando,

$$\int \frac{dz}{a - bz} = \int dt \iff -\frac{1}{b} \ln |a - bz| = t + c.$$

Para $t = 0$, obtemos $c = -\frac{1}{b} \ln |a - b \ln x_0|$.

Portanto, $\ln |a - bz| = -bt + \ln |a - b \ln x_0|$,

$$a - bz = (a - b \ln x_0) e^{-bt} \iff z(t) = \frac{1}{b} [a - (a - b \ln x_0) e^{-bt}].$$

Voltando à variável $x = e^z$, obtemos

$$x(t) = e^{\frac{a}{b}} \cdot \exp \left[- \left(\frac{a}{b} - \ln x_0 \right) e^{-bt} \right]. \quad (1.17)$$

A curva $x(t)$ tem um ponto de inflexão quando

$$t = t_m = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{a}{b} - \ln x_0 \right) \quad (1.18)$$

1.7 Modelo de Smith [11]

Smith, em 1963, relatou que a equação logística do crescimento de Verhulst não acolhia satisfatoriamente os dados experimentais devido aos problemas associados com as retardações de tempo. As retardações de tempo nos efeitos da densidade sobre a natalidade e mortalidade distorcem a forma da curva do crescimento da população. De acordo com Smith, o principal problema em aplicar a curva logística aos dados concerne num retrato apurado da porção dos fatores limitantes ainda inutilizados, isto é, $\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ [11]. Discutiu então que para uma população com limite de alimento o termo $\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ deveria ser substituída por um termo que representa a proporção da taxa da fonte de alimento atualmente inutilizada pela população. Se F for a taxa em que uma população do tamanho N usa o alimento e

o T for a taxa correspondente ao nível de saturação, então

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{F}{T} \right),$$

onde $\frac{F}{T} > \frac{N}{K}$, desde que uma população em crescimento usará o alimento mais rapidamente do que uma população saturada. F deve depender de N e de $\frac{dN}{dt}$, e a relação mais simples será linear

$$F = aN + b \frac{dN}{dt}, a > 0, b > 0.$$

Na saturação $F = T$, $N = K$, $\frac{dN}{dt} = 0$, conseqüentemente $T = aK$, e como resultado da equação de crescimento modificado temos

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{1 - \frac{N}{K}}{1 + c \frac{N}{K}} \right), \quad (1.19)$$

onde $c = r \frac{b}{a}$. A equação diferencial (1.19) é o crescimento logístico de Verhulst escalado pelo fator de "atraso" $\left(1 + c \frac{N}{K} \right)^{-1}$ e não admite uma solução analítica para N em função de t , mas ao contrário

$$t = \frac{1}{r} \ln \left[\frac{(K - N_0)^{1+c}}{N_0} \right] + \frac{1}{r} \ln \left[\frac{N}{(K - N)^{1+c}} \right]. \quad (1.20)$$

O valor de inflexão para a equação de Smith é

$$N_{inf} = \frac{K}{1 + \sqrt{1 + c}}. \quad (1.21)$$

Para $c = 0$ a forma de Smith reduz-se à forma de crescimento logístico de Verhulst com $N_{inf} = \frac{K}{2}$, enquanto que para $c > 0$, $N_{inf} < \frac{K}{2}$ e para $c < 0$, $N_{inf} > \frac{K}{2}$. Para $c = -1$, o crescimento é exponencial, $\frac{dN}{dt} = rN$, e não há nenhum ponto de inflexão.

A taxa de crescimento máximo, quando $c \neq -1$, é dada por

$$\left(\frac{dN}{dt} \right)_{max} = \frac{rK}{(1 + \sqrt{c + 1})^2}. \quad (1.22)$$

A taxa relativa de crescimento, $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$, decresce não-linearmente com aumento N para $c < -1$, com taxa de decrescimento sendo regulada pelo parâmetro c .

A Figura 1.5 descreve algumas curvas de crescimento para o Modelo de Smith com os seguintes parâmetros: (i) $r = 0.44$, $N_0 = 1.875$, $K = 15$; (ii) $r = 0.44$, $N_0 = 10$, $K = 30$; (iii) $r = 0.44$, $N_0 = 1$, $K = 50$; (iv) $r = 0.4$, $N_0 = 6$, $K = 75$.

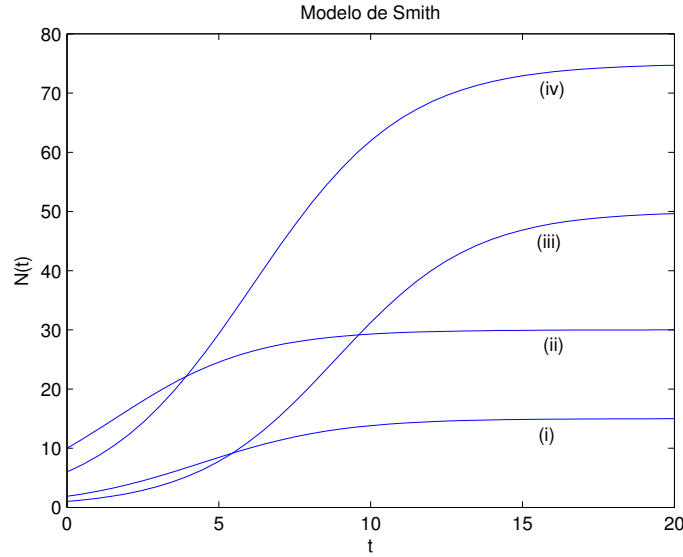


Figura 1.5: Curvas de crescimento do Modelo de Smith para os seguintes parâmetros: (i) $r = 0.44$, $N_0 = 1.875$, $K = 15$; (ii) $r = 0.44$, $N_0 = 10$, $K = 30$; (iii) $r = 0.44$, $N_0 = 1$, $K = 50$; (iv) $r = 0.4$, $N_0 = 6$, $K = 75$.

1.8 Modelo de Blumberg [11]

Em 1968, Blumberg introduziu outra equação de crescimento baseado na modificação da equação de crescimento logístico de Verhulst para modelar dinâmica populacional ou evolução do tamanho de um órgão. Blumberg observou que a maior limitação da curva logística era a inflexibilidade do ponto de inflexão. Além disso, ele observou que tentativas de modificar o termo intrínseco constante da taxa de crescimento, r , tratando-o como um polinômio tempo-dependente para superar esta limitação, conduzem frequentemente à uma estimação inferior dos valores futuros.

Por conseguinte, Blumberg introduziu o que se chamou de função hiperlogística,

$$\frac{dN}{dt} = rN^\alpha \left(1 - \frac{N}{K}\right)^\gamma. \quad (1.23)$$

A equação (1.23) pode ser reformulada como uma equação integral

$$\int_{N_0/K}^{N(t)/K} x^{-\alpha}(1-x)^{-\gamma} dx = rK^{\alpha-1}t.$$

Esta reformulação nem sempre permite uma forma fechada de solução analítica. Por essa razão, Blumberg catalogou expressões analíticas (quando uma integração explícita puder ser realizada) da função de crescimento $N(t)$ para vários valores dos parâmetros α e γ .

A população no ponto de inflexão, N_{inf} , é dada por

$$N_{inf} = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}K. \quad (1.24)$$

A mesma expressão de N_{inf} (1.24) é obtida para a equação logística de Verhulst quando $\alpha = \gamma$. Para $\alpha \ll \gamma$, N_{inf} aproxima-se de 0 e a inflexão ocorre somente se $N_0 < N_{inf}$.

A taxa de crescimento máximo é dada por:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{max} = rK^\alpha \frac{\alpha^\alpha \gamma^\gamma}{(\alpha + \gamma)^{\alpha+\gamma}} \quad (1.25)$$

A taxa de crescimento relativo atinge seu máximo valor em

$$\left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}\right)_{max} = rK^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-1+\gamma}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha-1+\gamma}\right)^\gamma \quad (1.26)$$

em

$$N^* = \frac{\alpha-1}{\alpha-1+\gamma}K \quad (1.27)$$

contanto que $\alpha > 1$ e $N^* > N_0$, caso contrário declina não linearmente com o aumento de N .

A forma de crescimento do tipo de Blumberg é a forma hiperbólica para crescimento regenerativo. É representada pela curva sigmoidal

$$N(t) = \frac{K(t+a)^n}{b+(t+a)^n}, \quad (1.28)$$

onde $N(t)$ é o peso ou quantidade, K é o valor final, e a , b , n são parâmetros positivos na equação. A equação (1.28) tem forma diferencial

$$\frac{dN}{dt} = rN^{1-(1/n)} \left(1 - \frac{N}{K}\right)^{1+(1/n)},$$

onde $r = n(K/b)^{1/n}$.

O valor de inflexão é identificado por

$$N_{inf} = \frac{(n-1)}{2n}K$$

quando $n > 1$, e o tempo de inflexão por

$$t_{inf} = b^{1/n} \left[\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{1/n} - \left(\frac{N_0}{K-N_0} \right)^{1/n} \right],$$

onde $N_0 = Ka^n/(b+a^n)$.

A taxa de crescimento relativo decresce não-linearmente com o aumento de N desde que $N^* = -n < 0$ é indefinido.

A Figura 1.6 descreve algumas curvas de crescimento para o Modelo de Blumberg com os seguintes parâmetros: (i) $r = 1$, $N_0 = 10$, $K = 40$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $\gamma = 2.5$; (ii) $r = 5$, $N_0 = 0.5$, $K = 20$, $\alpha = 1.5$, $\beta = 1$, $\gamma = 3.5$; (iii) $r = 0.5$, $N_0 = 15$, $K = 50$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.8$; (iv) $r = 1$, $N_0 = 5$, $K = 30$, $\alpha = 1.5$, $\beta = 1$, $\gamma = 1.5$; (v) $r = 0.1$, $N_0 = 5$, $K = 25$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.5$.

1.9 Modelo de Schnute [11]

Schnute, em seu paper de 1981 sugeriu o uso da taxa de crescimento relativo da taxa de crescimento relativa como quantidade de interesse. Se $Z = (1/N)(dN/dt)$

é a taxa de crescimento relativo, $(1/Z)(dZ/dt)$ é a taxa de crescimento relativo da taxa de crescimento relativo.

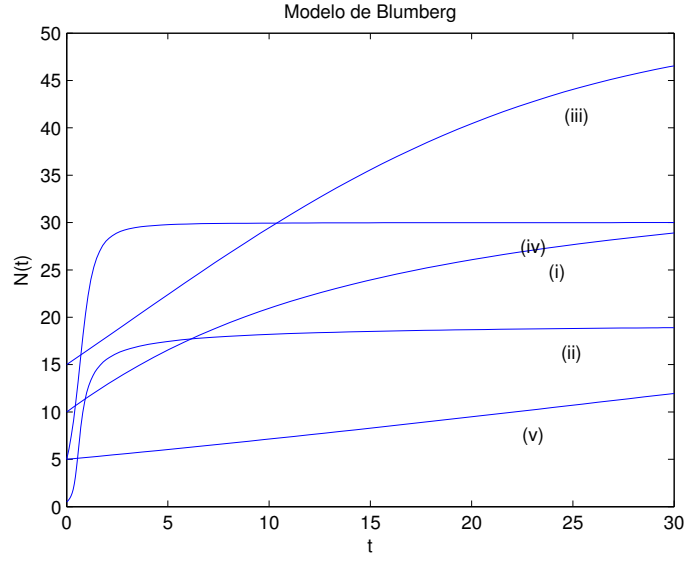


Figura 1.6: Curva de crescimento do Modelo de Blumberg com os seguintes parâmetros: (i) $r = 1$, $N_0 = 10$, $K = 40$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $\gamma = 2.5$; (ii) $r = 5$, $N_0 = 0.5$, $K = 20$, $\alpha = 1.5$, $\beta = 1$, $\gamma = 3.5$; (iii) $r = 0.5$, $N_0 = 15$, $K = 50$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.8$; (iv) $r = 1$, $N_0 = 5$, $K = 30$, $\alpha = 1.5$, $\beta = 1$, $\gamma = 1.5$; (v) $r = 0.1$, $N_0 = 5$, $K = 25$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.5$.

A suposição de Schnute assume que $(1/Z)(dZ/dt)$ é uma função linear de Z :

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = -(a + bZ), \quad (1.29)$$

onde a , b são positivos, negativos, ou constantes zero, e o sinal de menos do lado direito indica que a taxa de crescimento diminui tipicamente. Para valores apropriados de a , b alguns modelos de crescimento podem ser derivados de (1.29).

1.10 Modelo de Ayala, Ehrenfeld, Gilpin [4]

Elaborado em 1973, o modelo proposto por Ayala, Ehrenfeld e Gilpin é dado por:

$$\frac{dP}{dt} = P (\lambda - aP + be^{-P}), \quad (1.30)$$

onde $a > 0$, $b > 0$ e $\lambda > 0$.

1.11 Modelo logístico generalizado [11]

Tsoularis e Wallace propuseram, em 2002, a chamada equação logística generalizada. Além de sugerir o modelo e apresentar suas propriedades, os autores provam que cada um dos modelos de crescimento descritos em seções anteriores podem ser derivados deste e os considera como casos especiais. A equação logística generalizada é dada por:

$$\frac{dN}{dt} = rN^\alpha \left[1 - \left(\frac{N}{K} \right)^\beta \right]^\gamma, \quad (1.31)$$

onde α , β e γ são números reais positivos. Consideram somente valores positivos para estes parâmetros, uma vez que expoentes negativos nem sempre fornecem um modelo plausível do ponto de vista biológico. Observe que se $\alpha = \beta = \gamma = 1$ temos o modelo logístico clássico.

As três principais características do crescimento logístico generalizado são:

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$, ou seja, a população converge para sua capacidade suporte.
- (ii) a taxa de crescimento relativo, $\left(\frac{1}{N} \right) \left(\frac{dN}{dt} \right)$, atinge seu valor máximo em:

$$N^* = \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha - 1} \right)^{-\frac{1}{\beta}} K \quad (1.32)$$

desde que N^* é real e superior a N_0 , caso contrário ele não decresce linearmente atingindo seu valor zero mínimo em $N = K$. A taxa máxima de crescimento relativo é dada por:

$$\left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right)_{max} = rK^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha - 1 + \beta\gamma} \right)^{\frac{\alpha-1}{\beta}} \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha - 1 + \beta\gamma} \right)^\gamma \quad (1.33)$$

Importantes valores limite de N^* :

$$\begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0} N^* = 0 \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} N^* = e^{\frac{\gamma}{1-\alpha}} \\ \lim_{\gamma \rightarrow 0} N^* = K \end{cases}$$

(iii) A população no ponto de inflexão (onde a taxa de crescimento é máxima), é dada por:

$$N_{inf} = \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}} K > N^* \quad (1.34)$$

Claramente, se $N_{inf} < N_0$, não é possível inflexão uma vez que a população terá iniciado com o valor N_0 e com uma taxa de crescimento positivo por habitante, assegurando assim que N_{inf} não será alcançado. A taxa de crescimento relativo em N_{inf} é novamente dada por (1.33) com a substituição de α por $\alpha - 1$ (somente na expressão entre parênteses). A taxa de crescimento máxima é dada por:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{max} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{N_{inf}} = rK^\alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha + \beta\gamma}\right)^\gamma \quad (1.35)$$

Importantes valores limite de N_{inf} :

$$\begin{cases} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} N_{inf} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} N_{inf} = 0 \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} N_{inf} = K e^{-\frac{2}{\alpha}} \\ \lim_{\beta \rightarrow \infty} N_{inf} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} N_{inf} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} N_{inf} = K \end{cases}$$

O mesmo valor de inflexão é obtido para uma infinidade de formas logísticas generalizadas quando α e γ são deixados variando, fornecendo a razão $\frac{\gamma}{\alpha}$ e β permanece constante.

Introduzindo a variável auxiliar $x = \left(\frac{N}{K}\right)^\beta$ podemos transformar a equação diferencial autônoma (1.31) em:

$$\frac{dx}{dt} = \beta r K^{\alpha-1} x^{\left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right)+1} (1-x)^\gamma$$

e após separação de variáveis e subsequente integração de 0 a t , temos:

$$\int_{\left(\frac{N_0}{K}\right)^\beta}^{\left(\frac{N(t)}{K}\right)^\beta} x^{\frac{1-\alpha}{\beta}-1} (1-x)^{-\gamma} dx = \beta r K^{\alpha-1} t \quad (1.36)$$

O valor da integral em (1.36) pode ser calculado, no caso em que os parâmetros gerais α , β e γ podem tomar quaisquer valores numéricos, pela expansão binomial

de $(1-x)^{-\gamma}$ e subsequente integração da série resultante termo a termo. Quando $p = \frac{1-\alpha}{\beta} > 0$, $q = 1 - \gamma > 0$, a integral

$$\int_{x_0}^{x_1} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx,$$

onde $x_1 = \left(\frac{N(t)}{K}\right)^\beta$, $x_0 = \left(\frac{N_0}{K}\right)^\beta$, é a diferença de duas funções beta incompletas $B_{x_1}(p, q)$ e $B_{x_0}(p, q)$. A função beta incompleta é definida por:

$$B_{x_1}(p, q) = \int_0^{x_1} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

Daí,

$$B_{x_1}(p, q) - B_{x_0}(p, q) = \int_{x_0}^{x_1} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \beta r K^{\alpha-1} t \quad (1.37)$$

Das restrições $p > 0$, $q > 0$ duas possíveis variações dos valores α , β são aceitos:

$$\begin{cases} \alpha < 1, \beta > 0, \gamma < 1 \\ \alpha > 1, \beta < 0, \gamma < 1 \end{cases}$$

A integral em (1.37) pode ser expressa como diferença de duas expansões de séries desde $0 < x_0 < 1$ a $0 < x_1 < 1$:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx &= \frac{x_1^p (1-x_1)^q}{p} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(p+1, n+1)}{B(p+q, n+1)} x_1^{n+1} \right] - \\ &- \frac{x_0^p (1-x_0)^q}{p} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(p+1, n+1)}{B(p+q, n+1)} x_0^{n+1} \right] = \beta r K^{\alpha-1} t \quad (1.38) \end{aligned}$$

A equação (1.38) contém uma série infinita em termos da função beta, que por sua vez pode ser expressa em termos da função gama. A forma logística (1.31) em geral não admite solução analítica $N(t)$ mas t como função de N . O integrando em (1.36) pode ser expandido binomialmente para fornecer, no caso geral, a expressão para o momento de inflexão, t_{inf} :

$$\begin{aligned} t_{inf} &= \frac{1}{r K^{\alpha-1}} \left[\frac{\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{\beta}}}{1-\alpha} + \gamma \frac{\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1-\beta}{\beta}}}{1-\alpha+\beta} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2!} \frac{\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1-2\beta}{\beta}}}{1-\alpha+2\beta} + \dots \right] - \\ &- \frac{1}{r} \left[\frac{N_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma \frac{N_0^{1-\alpha+\beta}}{K^\beta (1-\alpha+\beta)} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2!} \frac{N_0^{1-\alpha+2\beta}}{K^{2\beta} (1-\alpha+2\beta)} + \dots \right], \quad \alpha \neq 1 \quad (1.39) \end{aligned}$$

$$t_{inf} = \frac{1}{\beta r} \ln \left[\frac{(1 + \beta\gamma)^{-1}}{\left(\frac{N_0}{K}\right)^\beta} \right] + \frac{1}{\beta r} \left[\gamma (1 + \beta\gamma)^{-1} + \frac{1}{2} \frac{\gamma(\gamma+1)}{2!} (1 + \beta\gamma)^{-2} + \dots \right] - \frac{1}{\beta r} \left[\gamma \left(\frac{N_0}{K}\right)^\beta + \frac{1}{2} \frac{\gamma(\gamma+1)}{2!} \left(\frac{N_0}{K}\right)^{2\beta} + \dots \right], \quad \alpha = 1 \quad (1.40)$$

A Figura 1.12 mostra a evolução de uma população de tamanho N pelo tempo t para o crescimento logístico generalizado (1.31), com os seguintes parâmetros:

- (i) $r = 0.1, N_0 = 1, K = 100, \alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 2$;
- (ii) $r = 0.5, N_0 = 5, K = 65, \alpha = 1, \beta = 0.6, \gamma = 1.8$;
- (iii) $r = 1, N_0 = 0.5, K = 50, \alpha = 0.5, \beta = 1.5, \gamma = 1$;
- (iv) $r = 1, N_0 = 0.5, K = 40, \alpha = 3, \beta = 0.5, \gamma = 3$;
- (v) $r = 0.001, N_0 = 10, K = 100, \alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 2$;
- (vi) $r = 0.3, N_0 = 0.1, K = 30, \alpha = 1.5, \beta = 1.5, \gamma = 2.5$.

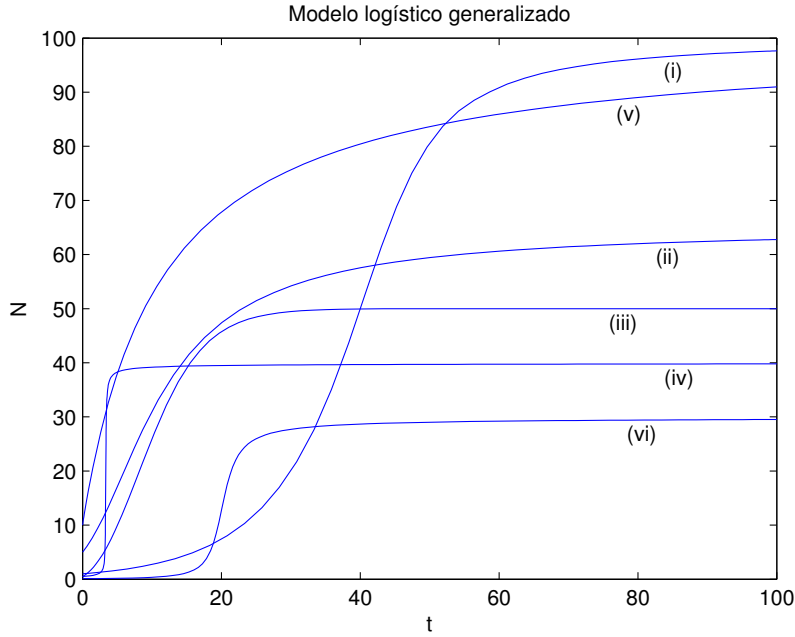


Figura 1.7: Evolução de uma população de tamanho N ao longo do tempo t para o modelo logístico generalizado com os seguintes parâmetros: (i) $r = 0.1, N_0 = 1, K = 100, \alpha = 14, \beta = 3, \gamma = 2$; (ii) $r = 0.5, N_0 = 5, K = 65, \alpha = 1, \beta = 0.6, \gamma = 1.8$; (iii) $r = 1, N_0 = 0.5, K = 50, \alpha = 0.5, \beta = 1.5, \gamma = 1$; (iv) $r = 1, N_0 = 0.5, K = 40, \alpha = 3, \beta = 0.5, \gamma = 3$; (v) $r = 0.001, N_0 = 10, K = 100, \alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 2$; (vi) $r = 0.3, N_0 = 0.1, K = 30, \alpha = 1.5, \beta = 1.5, \gamma = 2.5$.

O capítulo seguinte será dedicado à apresentação e solução do Modelo de von Bertalanffy generalizado. Ainda, serão obtidas expressões para o cálculo dos parâmetros presentes no modelo e apresentado o método de Ford-Walford, utilizado para o cálculo da capacidade suporte.

Capítulo 2

Modelo de von Bertalanffy generalizado

2.1 Introdução

Em 2002, Bassanezi em seu livro sobre modelagem matemática [4], apresenta a generalização para o modelo de von Bertalanffy (1.10) com o intuito de estudar o crescimento em peso de perus:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P^\gamma - \beta P \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde agora $P = P(t)$ é a massa da ave em função do tempo t , P_0 é a massa inicial, α e β são as constantes de anabolismo e catabolismo respectivamente e γ é um parâmetro alométrico a ser estimado, $0 < \gamma < 1$.

Esta generalização do Modelo de von Bertalanffy também foi aplicada no estudo de crescimento em peso de frangos por Leite em 2003 [7] e em peso de suínos por Oliveira em 2007 [6].

Nosso objetivo neste trabalho é aplicar o modelo de von Bertalanffy generalizado ao estudo do crescimento em peso de diversos animais, considerando a taxa de catabolismo variável com o tempo, a fim de obter a expressão $\beta = \beta(t)$ para cada um deles, a partir de dados experimentais. Além disso, faremos uma comparação entre os resultados procurando encontrar padrões de catabolismo por classe de animal.

2.2 Resolução do Modelo

A equação não linear (2.1) é do tipo Bernoulli e pode ser facilmente resolvida com uma simples substituição de variável, o que nos conduzirá à uma equação linear.

Tomando $Z = P^{1-\gamma}$ e substituindo em (2.1) temos:

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dt} = (1-\gamma) P^{-\gamma} \frac{dP}{dt} \\ Z(0) = P_0^{1-\gamma} \end{cases}$$

Como $\frac{dP}{dt} = \alpha P^\gamma - \beta P$, então:

$$\frac{dZ}{dt} = (1-\gamma) P^{-\gamma} (\alpha P^\gamma - \beta P)$$

Substituindo novamente $Z = P^{1-\gamma}$ obtemos:

$$\frac{dZ}{dt} = (1-\gamma) (\alpha - \beta P^{1-\gamma}) = (1-\gamma) (\alpha - \beta Z)$$

$$\frac{dZ}{dt} + \beta (1-\gamma) Z = \alpha (1-\gamma)$$

Temos, portanto, uma EDO linear de 1ª ordem não homogênea em Z :

$$\frac{dZ}{dt} + \beta (1-\gamma) Z = \alpha (1-\gamma), \quad (2.2)$$

cuja solução é alcançada através dos passos abaixo.

Fator integrante: $\mu(t) = e^{\int \beta(1-\gamma) dt} = e^{\beta(1-\gamma)t}$

Multiplicando a EDO por $\mu(t)$, obtemos:

$$\frac{dZ}{dt} e^{\beta(1-\gamma)t} + \beta (1-\gamma) Z e^{\beta(1-\gamma)t} = \alpha (1-\gamma) e^{\beta(1-\gamma)t} \implies$$

$$\implies Z\mu(t) = \alpha (1-\gamma) e^{\beta(1-\gamma)t}$$

Integrando em ambos os lados, temos por resultado:

$$Z\mu(t) = \int \alpha (1-\gamma) e^{\beta(1-\gamma)t} dt \implies$$

$$\implies Z(t) = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta(1-\gamma)t}$$

voltando para $P(t)$, encontramos a equação do peso do animal em função do tempo:

$$P(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(1 + C\frac{\beta}{\alpha}e^{-\beta(1-\gamma)t}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (2.3)$$

Observa-se, através de dados obtidos experimentalmente em variadas classes de animal, que o parâmetro γ varia entre 0 e 1. Então, vamos supor que $0 < \gamma < 1$, o que implica em: $(1 - \gamma) > 0$ e $-\beta(1 - \gamma) < 0$.

Sabemos que $P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$, e portanto,

$$P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(1 + C\frac{\beta}{\alpha}e^{-\beta(1-\gamma)t}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right]$$

Logo, a capacidade suporte P_∞ é dada por:

$$P_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (2.4)$$

Dadas a condição inicial $P(0) = P_0$ e a equação (2.4), temos:

$$\begin{aligned} P(0) &= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(1 + C\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} = P_\infty \left(1 + C\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \implies \\ \frac{P_0}{P_\infty} &= \left(1 + C\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \implies \left(\frac{P_0}{P_\infty}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} = \left(1 + C\frac{\beta}{\alpha}\right) \implies \\ \left(\frac{P_0}{P_\infty}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1 &= C\frac{\beta}{\alpha} \implies C = \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1\right] \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

Vale observar que a condição inicial $P(0) = P_0$ difere para as variadas classes de animais. Para aqueles de maior peso, como suínos, bovinos, etc. $P_0 \neq 0$, enquanto que para animais de pequeno porte como peixes, camarão, etc, $P_0 \simeq 0$.

Substituindo a constante C na expressão de $P(t)$:

$$P(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left\{ 1 + \left[\left(\left(\frac{P_0}{P_\infty}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1 \right) \frac{\alpha}{\beta} \right] \frac{\beta}{\alpha} e^{-\beta(1-\gamma)t} \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Então, o modelo generalizado para crescimento em peso de um animal qualquer é dado por:

$$P(t) = P_{\infty} \left\{ 1 + \left[\left(\left(\frac{P_0}{P_{\infty}} \right)^{(1-\gamma)} - 1 \right) e^{-\beta(1-\gamma)t} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (2.5)$$

onde $P(0) = P_0$ é o peso inicial e P_{∞} é o peso máximo.

Analogamente, no caso particular em que $P_0 \simeq 0$:

$$P(t) = P_{\infty} \left(1 - e^{-\beta(1-\gamma)t} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (2.6)$$

O ponto de inflexão P_* , onde a variação da curva é máxima, é obtido através do cálculo $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ em (2.1).

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{dt^2} &= \alpha\gamma P^{\gamma-1} \frac{dP}{dt} - \beta \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dt} (\alpha\gamma P^{\gamma-1} - \beta) \\ \frac{d^2P}{dt^2} &= 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dP}{dt} (\alpha\gamma P^{\gamma-1} - \beta) = 0 \end{aligned}$$

Como a taxa de aumento de peso $\frac{dP}{dt}$ é considerada sempre positiva (consideramos que os animais estão sendo alimentados corretamente). Portanto, no ponto de inflexão P_* , temos que:

$$\alpha\gamma P_*^{\gamma-1} - \beta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha\gamma P_*^{\gamma-1} = \beta \quad \Longleftrightarrow \quad P_*^{\gamma-1} = \frac{\beta}{\alpha\gamma} \quad \Longrightarrow$$

$$P_* = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Logo, o ponto de inflexão é dado por:

$$P_* = \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} P_{\infty} \quad (2.7)$$

Observemos que a condição inicial $P_0 \simeq 0$ ou $P_0 \neq 0$ não influi no cálculo do ponto de inflexão P_* , nem na capacidade suporte P_{∞}

A partir das expressões (2.5) e (2.7) podemos calcular o tempo de inflexão t_* aonde ocorre a variação máxima do peso.

$$\begin{aligned}
P_* &= \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} P_\infty = P_\infty \left\{ 1 + \left[\left(\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) e^{-\beta(1-\gamma)t_*} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \Rightarrow \\
\gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} &= \left\{ 1 + \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-\beta(1-\gamma)t_*} \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \Rightarrow \\
\gamma - 1 &= \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-\beta(1-\gamma)t_*} \Rightarrow \\
e^{-\beta(1-\gamma)t_*} &= \frac{\gamma - 1}{\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1} \Rightarrow -\beta(1-\gamma)t_* = \ln \left[\frac{\gamma - 1}{\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1} \right]
\end{aligned}$$

Portanto, o ponto de inflexão t_* é dado pela expressão:

$$t_* = -\frac{\ln \left[\frac{\gamma - 1}{\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1} \right]}{\beta(1-\gamma)} \quad (2.8)$$

Da mesma maneira, para o caso particular em que $P_0 \simeq 0$, temos:

$$t_* = -\frac{\ln(1-\gamma)}{\beta(1-\gamma)}$$

Num modelo mais realista, devemos considerar a taxa de catabolismo β variável com o tempo, uma vez que quando o animal envelhece, hipoteticamente, a sua perda de energia depende de seus hábitos, como por exemplo se ele foi criado solto ou em regime de confinamento.

Da equação (2.5), podemos explicitar β em função de t :

$$\begin{aligned}
P(t) &= P_\infty \left\{ 1 + \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-\beta(1-\gamma)t} \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \Rightarrow \\
\left(\frac{P}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 &= \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-\beta(1-\gamma)t} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\ln \left[\frac{\left(\frac{P}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1}{\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1} \right] = -\beta (1 - \gamma) t$$

Logo,

$$\beta = - \frac{\ln \left[\frac{\left(\frac{P}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1}{\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1} \right]}{(1 - \gamma) t} \quad (2.9)$$

Assim, o modelo generalizado, considerando a taxa de metabolismo variável, é dado por:

$$P(t) = P_\infty \left\{ 1 + \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-\beta(t)(1-\gamma)t} \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (2.10)$$

Observemos que a solução (2.10) foi obtida diretamente da generalização da equação(2.5), ou seja, resolvemos a equação tomando β constante e consideramos a solução final em função de t .

Podemos, contudo, obter um modelo na forma de equação diferencial cuja solução seja a expressão (2.10).

Derivando a expressão (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= P_\infty \frac{1}{1-\gamma} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-\beta(t)(1-\gamma)t} \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}-1} \times \\ &\quad \times \left\{ -(1-\gamma) \frac{d(\beta(t)t)}{dt} \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-\beta(t)(1-\gamma)t} \right\} \\ \frac{dP}{dt} &= - \frac{P_\infty \left(1 + \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-\beta(t)(1-\gamma)t} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1 + \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-\beta(t)(1-\gamma)t}} \times \\ &\quad \times \left\{ - \frac{d(\beta(t)t)}{dt} \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-\beta(t)(1-\gamma)t} \right\} \end{aligned}$$

De (2.7),

$$\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{1-\gamma} = \left(1 + \left[\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{1-\gamma} - 1\right] e^{-\beta(t)(1-\gamma)t}\right)$$

Logo,

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P}{\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{1-\gamma}} \times \left\{ -\frac{d(\beta(t)t)}{dt} \left[\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{1-\gamma} - 1\right] \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d(\beta(t)t)}{dt} P^\gamma P_\infty^{1-\gamma} \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{1-\gamma}\right]$$

Finalmente, obtemos a equação

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d(\beta(t)t)}{dt} (P^\gamma P_\infty^{1-\gamma} - P). \quad (2.11)$$

Notemos que, se $\beta(t) = \beta$ constante e $\gamma = \frac{2}{3}$, o modelo (2.8) se reduz ao modelo clássico de von Bertalanffy (1.10), com $\alpha = \beta P_\infty^{1-\gamma} = \beta P_\infty^{1/3} \implies P_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$.

Ao estudar estas equações de crescimento, pode ser conveniente explicitar os parâmetros de metabolismo para serem utilizadas na implementação computacional, o que tornará a simulação de dados mais rigorosa do ponto de vista matemático.

Estimação dos parâmetros

1. Constante de anabolismo α

Da equação (2.4), podemos explicitar uma relação para o cálculo da constante de anabolismo α :

$$P_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \implies P_\infty^{1-\gamma} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Então,

$$\alpha = \beta P_\infty^{1-\gamma} \quad (2.12)$$

2. Parâmetro de alometria γ

A equação (2.7) nos fornece uma expressão que calcula, implicitamente, o parâmetro de alometria γ desde que P_* seja conhecido:

$$P_* = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} P_\infty \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{P_*}{P_\infty}\right) = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \Longrightarrow \quad \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} = \left(\frac{P_*}{P_\infty}\right)$$

Logo,

$$y = \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad \text{e} \quad y = \left(\frac{P_*}{P_\infty}\right) \quad (2.13)$$

Vale observar a sutileza da relação (2.13) quando o parâmetro $\gamma \rightarrow 1$.

Calculando o limite

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Façamos agora, as seguintes substituição de variáveis:

$$x = \frac{1}{1-\gamma} \quad \text{e} \quad 1-\gamma = \frac{1}{x} \Longrightarrow \gamma = 1 - \frac{1}{x}$$

Então,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

Substituindo agora x por $-y$, temos:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y} \right] = \frac{1}{e}$$

Portanto, quando a razão $\frac{p_*}{p_\infty}$ é maior que $\frac{1}{e} \approx 0.3679$ não é possível ajustar os dados utilizando este modelo¹.

No capítulo seguinte, vamos aplicar o modelo de von Bertalanffy generalizado ao estudo do crescimento em peso de diversos animais a fim de obter a curva para

¹Observemos que $\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^z = 1 \iff \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right) \right]^3 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^z \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = 1 \implies \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^z = \frac{1}{e}.$

a taxa de catabolismo $\beta = \beta(t)$ dependente do tempo para cada espécie, a partir dos dados experimentais. Além disso, vamos estimar os parâmetros da capacidade suporte p_∞ e o coeficiente de alometria γ para cada um deles.

Para o cálculo da capacidade suporte P_∞ utilizaremos o método de Ford-Walford [16]. A aplicação do método consiste em encontrar uma relação entre $p(t)$ e $p(t+1)$, uma vez que para grandes valores de t o peso tende a se estabilizar e temos $p(t) \cong p(t+1)$.

Se a relação for linear,

$$p(t+1) = ap(t) + b,$$

e denotarmos por p_∞ o peso máximo do animal, fazendo $t \rightarrow \infty$ obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} p(t+1) = p_\infty \implies \\ p_\infty &= ap_\infty + b \implies p_\infty = \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

Para o cálculo de p_∞ basta obter os coeficientes a e b . Para tanto, é necessário fazer um ajuste linear nos pontos $p(t)$ e $p(t+1)$ e calcular a intersecção desta reta com a reta $p(t) = p(t+1)$. Esse ponto de intersecção será p_∞ , uma vez que se o peso em dois instantes consecutivos é o mesmo, é sinal de que não houve variação de peso, o que só ocorre quando o mesmo está estabilizado.

Considerando que no cálculo de p_∞ sua estimativa melhor é efetuada quando utilizamos em nossos cálculos apenas os dados experimentais finais de peso, tomaremos os dados a partir do ponto de inflexão p_* (onde variação entre os dados é máxima), o que variará conforme o animal. As simulações serão feitas com o auxílio do programa MATLAB versão 7.

Capítulo 3

Simulações numéricas

3.1 Introdução

O crescimento dos seres vivos é um fenômeno bastante complexo e pode ser considerado como um incremento na massa do corpo, em função do tempo e das alterações na forma e na composição, resultante de diferentes taxas de crescimento das partes componentes [7].

Segundo o Princípio da Alometria, num mesmo indivíduo, *'a razão entre os crescimentos específicos (relativos) de seus órgãos é constante'* [4].

Consideremos $x(t)$ e $y(t)$ os "tamanhos" dos órgãos ou partes distintas do corpo de um mesmo indivíduo, num instante t . Então, o modelo matemático que traduz o princípio da alometria é dado por:

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \alpha \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} \quad (3.1)$$

com $x(t), y(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, onde α é a taxa de proporcionalidade do crescimento relativo (coeficiente de alometria).

Aplicando a regra da cadeia na equação (3.1) podemos reescrevê-la como uma equação autônoma onde o tempo t não aparece explicitamente, ou seja,

$$\frac{dx}{dy} = \alpha \frac{x}{y}$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} = \alpha \frac{x}{y} &\implies \frac{dx}{x} = \alpha \frac{dy}{y} \implies \\ \int \frac{1}{x} dx = \alpha \int \frac{1}{y} dy &\implies \ln x = \alpha \ln y + c,\end{aligned}$$

onde c é a constante de integração e pode ser escrita na forma $c = \ln a$ ($a > 0$).

Substituindo, temos

$$\ln x = \ln((ay)^\alpha) \implies x = ay^\alpha, \quad (3.2)$$

que nos fornece a relação alométrica entre as variáveis x e y .

O peso $p(t)$ de cada espécie de peixe, dado pelo modelo de von Bertalanffy estabelece que *'o crescimento do peso do peixe é proporcional à área de sua superfície externa (anabolismo) e o decaimento é proporcional à energia consumida (catabolismo)'* [4].

$$\frac{dp}{dt} = \alpha A - \beta p \quad (3.3)$$

onde, α representa a taxa de síntese de massa por unidade de área do peixe (constante de anabolismo); β representa a diminuição da massa por unidade de massa (constante de catabolismo) e A representa a área da superfície externa, que é proporcional a $p^{\frac{2}{3}}$.

De fato, pelo Princípio da Alometria, temos que:

- (i) o peso é proporcional ao volume: $p = k_1 v$;
- (ii) o volume é proporcional ao cubo do comprimento: $v = k_2 l^3$;
- (iii) a área é proporcional ao quadrado do comprimento: $A = k_3 l^2$.

Portanto,

$$A = kp^{\frac{2}{3}}$$

justificando o termo $\gamma = 2/3$ presente no Modelo de von Bertalanffy para crescimento (em peso) de peixes dado em (1.10).

O parâmetro alométrico $\gamma = 2/3$, obtido por von Bertalanffy para peixes [5], foi estimado como sendo igual a $\gamma = 3/4$ no caso de mamíferos por West [8] e utilizado por Oliveira no seu trabalho com suínos de corte [6]. Os demais estudos com curvas de crescimento em peso animal encontrados na literatura e referenciados no presente trabalho consideram o parâmetro alométrico $\gamma = 2/3$.

Por ser um parâmetro relacionado à área corporal, acreditamos ser mais coerente que cada animal, ou mesmo a classe a que pertence, possua um valor próprio para este parâmetro, não necessariamente igual a $2/3$ ou $3/4$.

Portanto, levaremos em conta todas estas possibilidades em nossos cálculos e simulações, com o intuito de encontrar os parâmetros que melhor se adequam ao modelo e à classe animal correspondente.

Inicialmente, calcularemos o peso máximo p_∞ utilizando o método de Ford-Walford descrito anteriormente, tomando os valores finais de peso, a partir do ponto de inflexão p_* .

Ajustaremos a curva solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1) aos dados de idade-peso através de implementação computacional do modelo, procurando estimar experimentalmente os parâmetros α , β , γ e consequentemente p_∞ .

Como estamos trabalhando com muitos parâmetros, o programa oferece algumas opções, visando melhorar os ajustes ou ainda auxiliar na escolha daquele com os parâmetros mais adequados à cada situação. Dados os valores de idade-peso, as opções são as seguintes:

- Ajuste "livre": dados valores quaisquer para os parâmetros de partida α , β e γ , o programa retorna uma aproximação para estes parâmetros. Substituindo os valores encontrados na expressão (2.4), obtemos p_∞ correspondente;
- Ajuste com capacidade suporte fixa: dadas a capacidade suporte p_∞ , calculada previamente por Ford-Walford, e valores quaisquer para os parâmetros de

partida α , β e γ , o programa retorna a aproximação para β e γ . Substituindo os valores obtidos na expressão (2.12), obtemos o valor de α correspondente;

- Ajuste com capacidade suporte e coeficiente alométrico fixos: dadas a capacidade suporte p_{∞} , calculada previamente por Ford-Walford, o parâmetro de alometria γ (nos casos em que este valor é conhecido) e valores quaisquer para os parâmetros de partida α , β e γ , o programa retorna a aproximação para o parâmetro β . Substituindo em (2.12) obtemos o valor de α correspondente.

A escolha das simulações que mais se ajustaram aos dados de idade-peso fornecidos foi feita segundo dois critérios: a interpretação biológica dos parâmetros e o cálculo do erro através do Método dos Mínimos Quadrados. Este método é comumente usado em ajuste de curvas, sendo uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajustamento para um conjunto de dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre a curva ajustada e os dados (também chamados de resíduos), ou seja:

$$\sum_{i=1}^n (y_{dados} - y_{ajuste})^2.$$

Agruparemos os animais segundo a classe à que pertencem, visando facilitar a análise dos resultados. A disposição encontra-se da seguinte maneira: na seção 3.2 estão as simulações referentes à mamíferos, na seção 3.3 as simulações referentes à aves, na seção 3.4 as simulações referentes à anfíbios, na seção 3.5 as simulações referentes à peixes, na seção 3.6 as simulações referentes à crustáceos, na seção 3.7 as simulações referentes à vermes e na seção 3.8 as simulações referentes à insetos. Uma conclusão sobre as simulações numéricas é apresentada na seção 3.9.

3.2 Mamíferos

3.2.1 Suínos

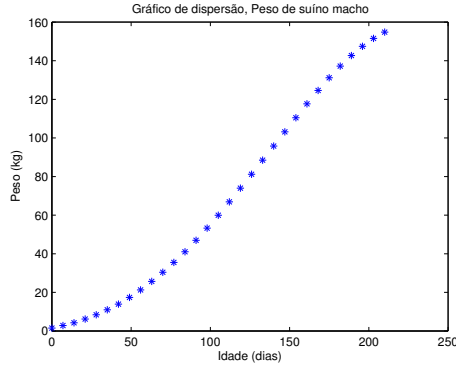
Para a obtenção dos parâmetros referentes à suínos utilizamos os dados experimentais de crescimento em peso do Agroceres PIC de Ponte Nova(MG) referentes ao desempenho da progênie Camborough 22 e AGPIC 412 TG, em boas condições de manejo e nutrição, separada por sexo e destinada à produção de cevados com peso elevado [6]. A Tabela 3.1 apresenta os pares de idade-peso e o gráfico de dispersão (curva de tendência) dos dados pode ser observado nas Figuras 3.1 (a) e 3.1 (b).

Tabela 3.1: Dados de crescimento em peso de **suínos**

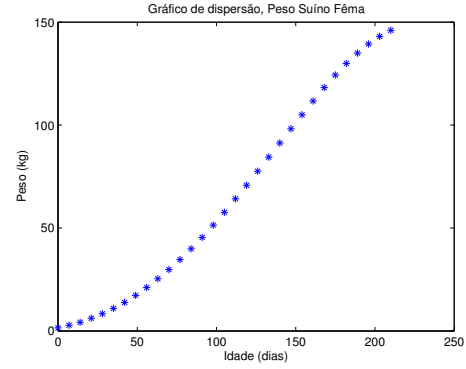
Idade (em dias)	Peso do macho (em Kg)	Peso da fêmea (em Kg)
0	1.5	1.5
7	2.8	2.80
14	4.23	4.23
21	6.18	6.18
28	8.37	8.37
35	10.94	10.94
42	13.92	13.89
49	17.36	17.26
56	21.28	21.07
63	25.70	25.33
70	30.42	29.83
77	35.52	34.67
84	41.05	39.89
91	46.98	45.47
98	56.29	51.40
105	59.94	57.65
112	66.87	64.16
119	73.96	70.81
126	81.18	77.59
133	88.48	84.42
140	95.81	91.29
147	103.16	98.17
154	110.47	105.00
161	117.65	111.71
168	124.59	118.18
175	131.15	124.29
182	137.22	129.92

Idade (em dias)	Peso do macho (em Kg)	Peso da fêmea (em Kg)
189	142.68	134.97
196	147.48	139.38
203	151.54	143.07
210	154.83	146.02

Fonte: Agrocere PIC de Ponte Nova (MG).



(a)



(b)

Figura 3.1: Gráfico de dispersão (curva de tendência) dos dados de peso p versus tempo t para Suíno Macho (a) e Suíno Fêmea (b)

Suíno Macho

O valor do peso máximo estimado para Suíno Macho p_{∞} , tomando os últimos 11 dados da coluna correspondente na Tabela 3.1 (ponto de inflexão $p_* \cong 88.480$ kg) foi de $p_{\infty} = 220.402$ Kg. Oliveira, utilizando o mesmo método para o cálculo da capacidade suporte obteve $p_{\infty} = 192.125$ Kg considerando os últimos 9 pontos da tabela. Realizando testes, chegamos à $p_{\infty} = 192.126$ kg utilizando os últimos 8 pontos para o cálculo.

Seguem abaixo as simulações do ajuste da solução do modelo de von Bertalanffy generalizado aos dados de crescimento em peso de Suíno Macho. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.2.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 192.126$ kg, $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 1$, $\gamma = 0.9861$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 1.0758$.

Simulação 2:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 192.126$ kg, $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$ (fixo).

Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.0433$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.1612$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste:

$\alpha = 0.1522$, $\beta = 0.0689$, $\gamma = 0.8569$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 254.261$ kg.

Simulação 4:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 220.402$ kg, $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após

ajuste: $\beta = 0.6096$, $\gamma = 0.9794$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.6813$.

Simulação 5:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 220.402$ kg, $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$ (fixo).

Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.0387$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.1491$.

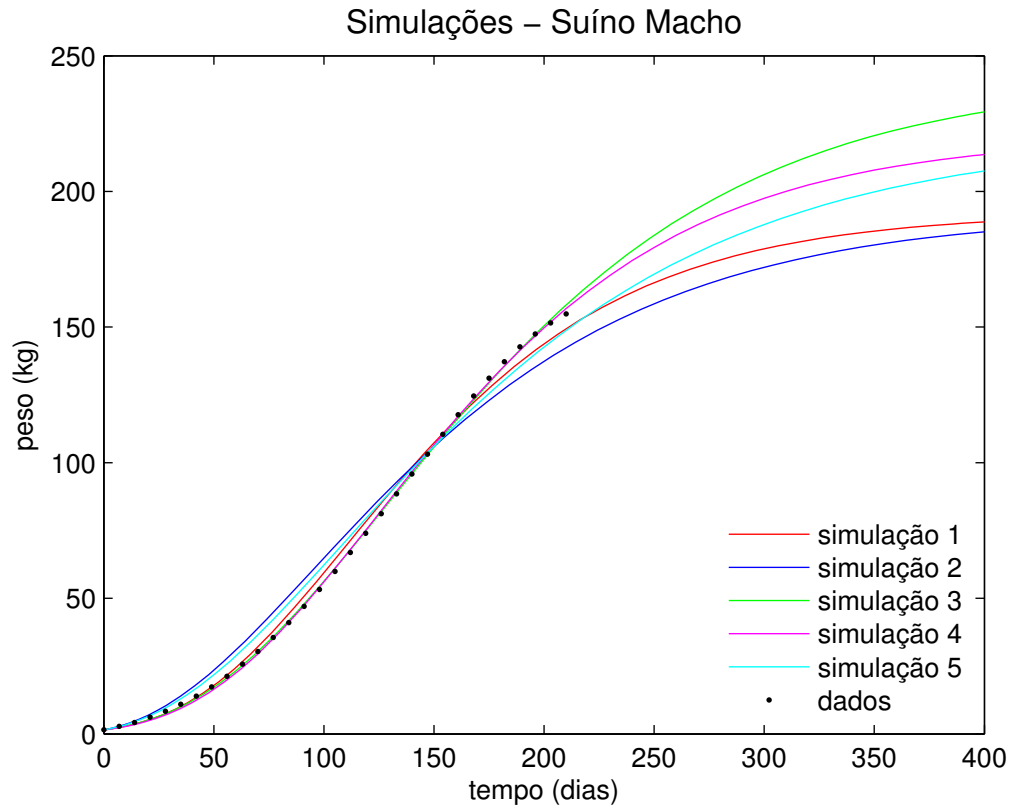


Figura 3.2: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de Suíno Macho (Tabela 3.1)

Observando os parâmetros obtidos nas simulações, notamos que o coeficiente de alometria γ tende a ser maior que o valor $3/4$ utilizado por Oliveira quando não é mantido fixo. Os ajustes referentes às simulações 3 e 4 ofereceram menor diferença entre os dados fornecidos e a curva ajustada, sendo este último o que apresentou melhor aproximação. Porém, considerando a interpretação biológica dos resultados, notamos que o ajuste referente à Simulação 3 é mais coerente com a realidade, uma vez que β geralmente não assume valores altos, por se tratar do gasto energético do animal.

Utilizando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ estimados pelas simulações 3 e 4, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ de Suíno Macho correspondentes (veja Tabela 3.2). As curvas de tendência podem ser vistas na Figura 3.3.

Tabela 3.2: Tabela para a função $\beta(t)$ - Suíno Macho

Tempo (dias)	β - Curva 1	β - Curva2
0	0.0899	0.8828
1	0.0796	0.7711
2	0.0772	0.7382
3	0.0742	0.7021
4	0.0721	0.6763
5	0.0707	0.6574
6	0.0698	0.6438
7	0.0692	0.6339
8	0.0689	0.6269
9	0.0685	0.6196
10	0.0682	0.6137
11	0.0680	0.6094
12	0.0680	0.6065
13	0.0680	0.6046
14	0.0682	0.6037
15	0.0683	0.6036
16	0.0685	0.6036
17	0.0687	0.6041
18	0.0689	0.6049
19	0.0691	0.6060
20	0.0693	0.6076

Tempo (dias)	β - Curva 1	β - Curva2
21	0.0695	0.6095
22	0.0697	0.6116
23	0.0698	0.6137
24	0.0699	0.6151
25	0.0698	0.6156
26	0.0695	0.6148
27	0.0691	0.6124
28	0.0684	0.6079
29	0.0675	0.6013

Fonte: Simulação dos dados.

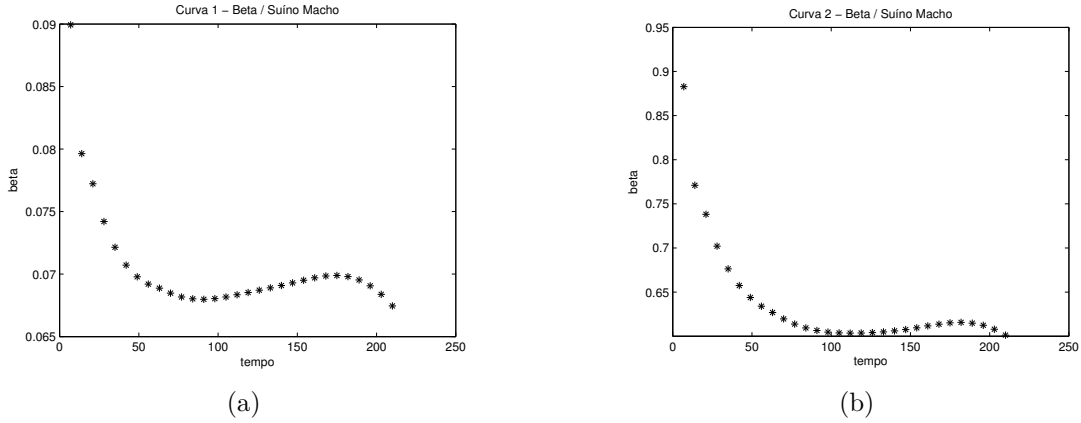


Figura 3.3: Curva de tendência para β (t) de Suíno Macho: (a) Curva 1: $p_{\infty} = 254.2606$ kg; $\gamma = 0.8569$ (dados referentes à Simulação 3); (b) Curva 2: $p_{\infty} = 220.4016$, $\gamma = 0.9794$ (dados referentes à Simulação 4).

Suíno Fêmea

O valor do peso máximo estimado para Suíno Fêmea p_{∞} , tomando os últimos 10 dados da coluna correspondente na Tabela 3.1 foi de $p_{\infty} = 193.6746$ Kg ($p_{*} \cong 91.29$ kg) e $p_{\infty} = 203.6277$ kg para os últimos 11 dados de peso.

Seguem abaixo os parâmetros utilizados nas simulações de ajuste da solução do modelo de von Bertalanffy generalizado aos dados de crescimento em peso de Suíno Fêmea. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.4.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 193.6746$ kg, $\alpha = 0.1275$, $\beta = 0.0313$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 1$, $\gamma = 0.9867$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 1.0726$.

Simulação 2:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 193.6746$ kg, $\alpha = 0.1275$, $\beta = 0.0313$, $\gamma = 3/4$ (fixo).

Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.0411$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.1530$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.1275$, $\beta = 0.0313$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste:

$\alpha = 0.1525$, $\beta = 0.0696$, $\gamma = 0.8565$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 236.5601$ kg.

Simulação 4:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 203.6277$ kg, $\alpha = 0.1275$, $\beta = 0.0313$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros

após ajuste: $\beta = 0.7770$, $\gamma = 0.9835$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.8482$.

Simulação 5:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 203.6277$ kg, $\alpha = 0.1275$, $\beta = 0.0313$, $\gamma = 3/4$ (fixo).

Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.0394$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.1488$.

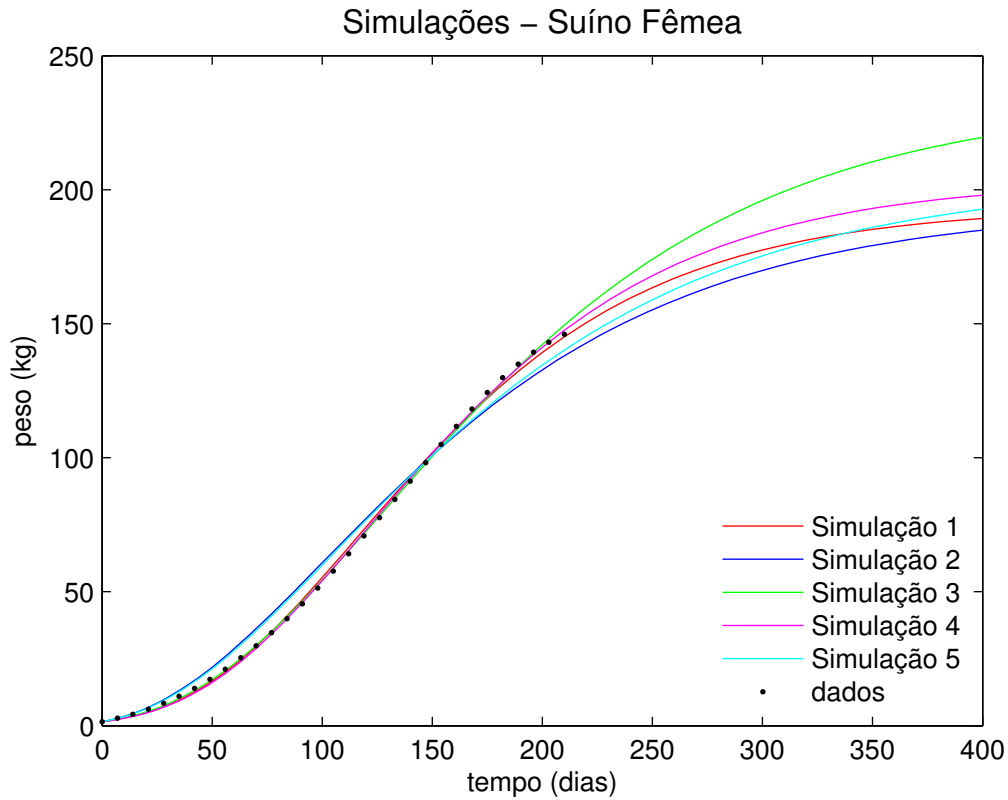


Figura 3.4: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de Suíno Fêmea (Tabela 3.1)

Analogamente ao observado nas simulações para suíno macho, o coeficiente de alometria γ tende a ser maior que $3/4$ quando não é mantido fixo. Novamente, os ajustes referentes às simulações 3 e 4 ofereceram menor diferença entre os dados fornecidos e a curva ajustada, porém, neste caso, o primeiro apresentou melhor aproximação, bem como interpretação biológica mais coerente com a realidade.

Utilizando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ estimados pelas simulações 3 e 4, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ de Suíno Fêmea correspondentes (veja Tabela 3.3). A curva de tendência pode ser vista na Figura 3.5.

Tabela 3.3: Tabela para a função $\beta(t)$ - Suíno Fêmea

Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
0	0.0915	1.1329
1	0.0811	0.9900
2	0.0787	0.9483
3	0.0757	0.9023
4	0.0736	0.8698
5	0.0721	0.8449
6	0.0711	0.8264
7	0.0704	0.8125
8	0.0700	0.8022
9	0.0694	0.7916
10	0.0690	0.7828
11	0.0687	0.7763
12	0.0686	0.7716
13	0.0686	0.7686
14	0.0687	0.7671
15	0.0688	0.7666
16	0.0690	0.7666
17	0.0692	0.7672
18	0.0693	0.7682
19	0.0695	0.7698
20	0.0697	0.7720
21	0.0700	0.7748
22	0.0702	0.7778
23	0.0703	0.7808
24	0.0704	0.7831
25	0.0703	0.7842

Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
26	0.0700	0.7834
27	0.0695	0.7806
28	0.0688	0.7749
29	0.0678	0.7662

Fonte: Simulação dos dados.

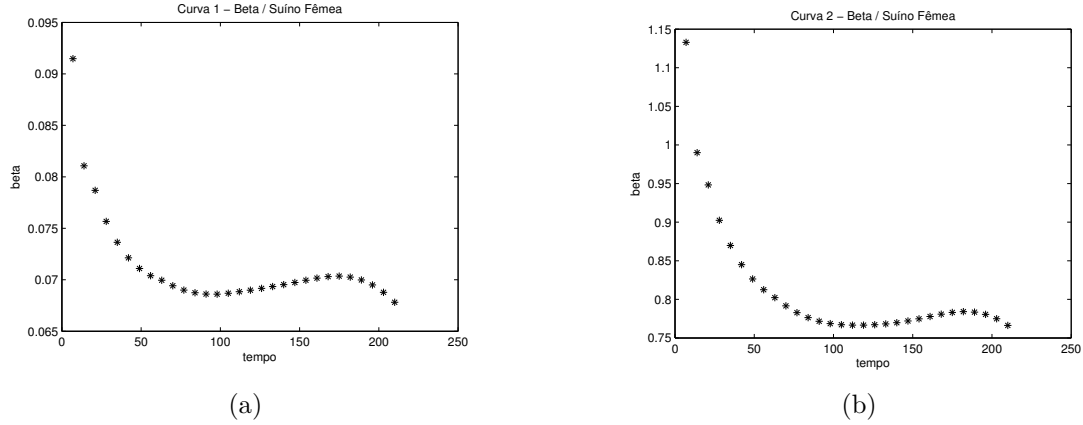


Figura 3.5: Curva de tendência para β (t) de Suíno Macho: (a) Curva 1: $p_{\infty} = 236.5601$ kg; $\gamma = 0.8565$ (dados referentes à Simulação 3); (b) Curva 2: $p_{\infty} = 203.6277$, $\gamma = 0.9835$ (dados referentes à Simulação 4).

Ao estudar curvas de crescimento animal pode surgir a necessidade ou a curiosidade em comparar aspectos referentes ao crescimento de machos e fêmeas de uma mesma espécie.

Para efeito de ilustração, utilizando os parâmetros da Simulação 3 para ambos, a Figura 3.6 mostra a comparação entre as curvas de crescimento de suíno macho e suíno fêmea. Podemos notar que para o caso dos suínos há pouca diferença entre o crescimento de machos e fêmeas: o ponto de inflexão ocorre aproximadamente na mesma faixa de peso ($p_* = 88.48$ kg para machos e $p_* = 91.59$ kg para fêmeas), apresentando pouca diferença entre a capacidade suporte atingida ($p_{\infty} = 254.2606$ kg para machos e $p_{\infty} = 236.5601$ kg para fêmeas).

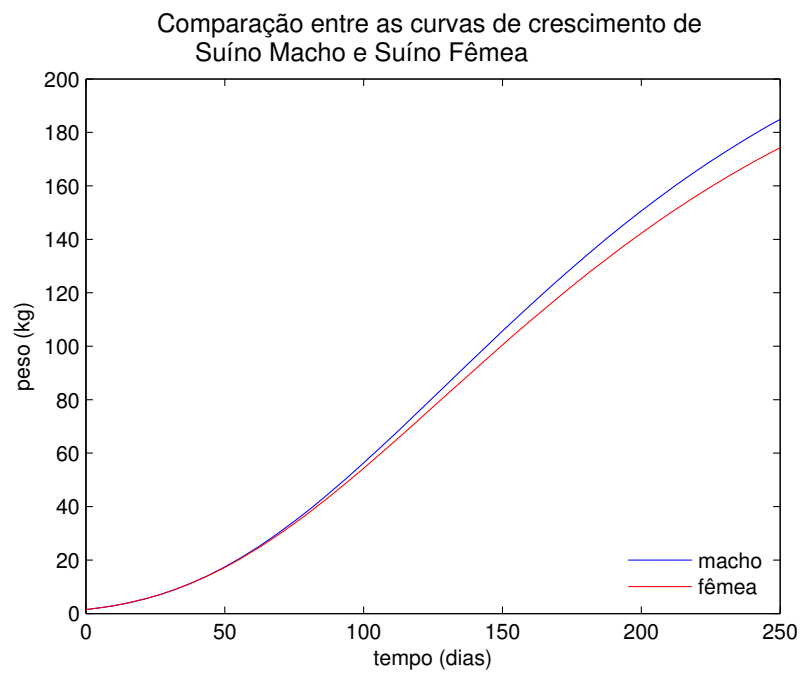


Figura 3.6: Comparação entre a curva de crescimento de suíno macho e suíno fêmea, utilizando os parâmetros obtidos através da Simulação 3 para ambos.

3.2.2 Bovinos

Para a obtenção dos parâmetros desta classe de mamíferos, utilizamos os dados experimentais de crescimento em peso de Bovinos machos da raça Canchim, pesados do nascimento até 40 meses de idade na Emprapa Pecuária Sudeste, em São Carlos, SP. De posse dos registros de crescimento em peso de 10 animais, fornecidos por Freitas [3], foi feita a média aritmética entre os valores, obtendo a Tabela 3.4. A dispersão dos dados pode ser observada na Figura 3.6.

Tabela 3.4: Dados de crescimento em peso de **bovinos**

Idade (em meses)	Peso (em Kg)
0	40
1	58
2	71
3	92
4	115
5	140
6	173
7	185
8	202
9	206
10	225
11	229
12	237
13	242
14	261
15	273
16	293
17	310
18	333
19	356
20	360
21	375
22	388
23	391
24	403
25	418
26	435
27	451
28	472

Idade (em meses)	Peso (em Kg)
29	507
30	536
31	553
32	556
33	556
34	560
35	558
36	563
37	572
38	591
39	600
40	600

Fonte: Embrapa, São Carlos, SP.

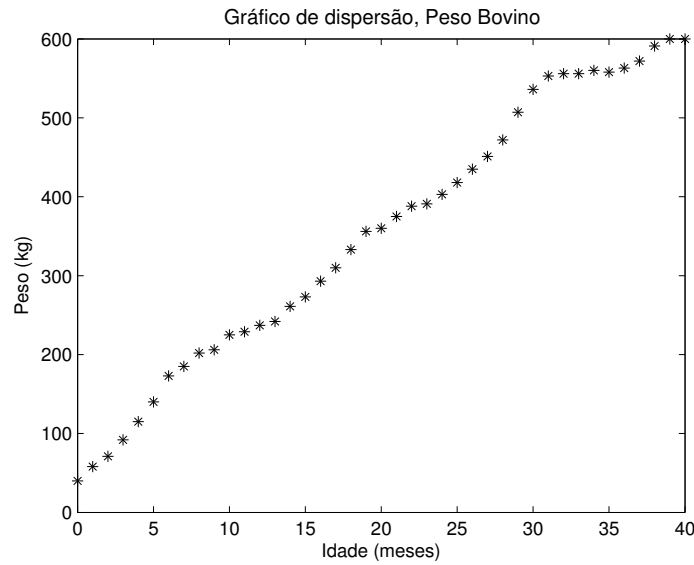


Figura 3.7: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para bovinos

O valor do peso máximo p_{∞} estimado para bovino, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 6 dados de peso da Tabela 3.4, foi de $p_{\infty} = 859.5556$ Kg. A inflexão ocorre, aproximadamente, em $p_{*} = 536.00$ kg, porém, utilizando os últimos 12 valores a capacidade suporte ficou muito baixa $P_{\infty} = 601.208$ kg. Freitas, em seu trabalho sobre estimativas de curvas de crescimento na produção animal [3], obteve $p_{\infty} = 872.9$ Kg, valor bem próximo ao que encontramos utilizando os últimos 6

dados de peso. Ao utilizar o modelo, o autor considera o parâmetro de alometria $\gamma = 2/3$.

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. As constantes de anabolismo e catabolismo obtidos por Freitas foram aproximadamente $\alpha = 1.18$ e $\beta = 0.1239$, respectivamente. As curvas de ajuste podem ser vistas na Figura 3.7.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_\infty = 859.56$ kg, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.1775$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.0554$, $\gamma = 0.3508$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 4.4508$.

Simulação 2:

Parâmetros de partida: $p_\infty = 859.56$ kg, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.1775$, $\gamma = 3/4$ (fixo). Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.1985$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 1.0748$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.1775$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 2$, $\beta = 0.1079$, $\gamma = 0.5625$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_\infty = 791.2346$ kg.

Simulação 4:

Curva solução do modelo de von Bertalanffy plotada sem ajustes, como os parâmetros estimados por Freitas.

Podemos notar pela Figura 3.8, que a curva plotada com os parâmetros estimados por Freitas sequer passa pelos dados de idade-peso. As simulações 1 e 3 apresentaram menor diferença entre os dados fornecidos e a curva ajustada, respectivamente nesta ordem. Observamos, mais uma vez, que o valor de γ difere significativamente de $3/4$ quando deixado para ajuste, desta vez tendendo à um valor mais baixo.

Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ obtidos nas Simulações 1 e 3, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ de Bovino correspondentes (veja Tabela 3.5). As curvas de tendência de $\beta(t)$ podem ser vistas na Figura 3.8.

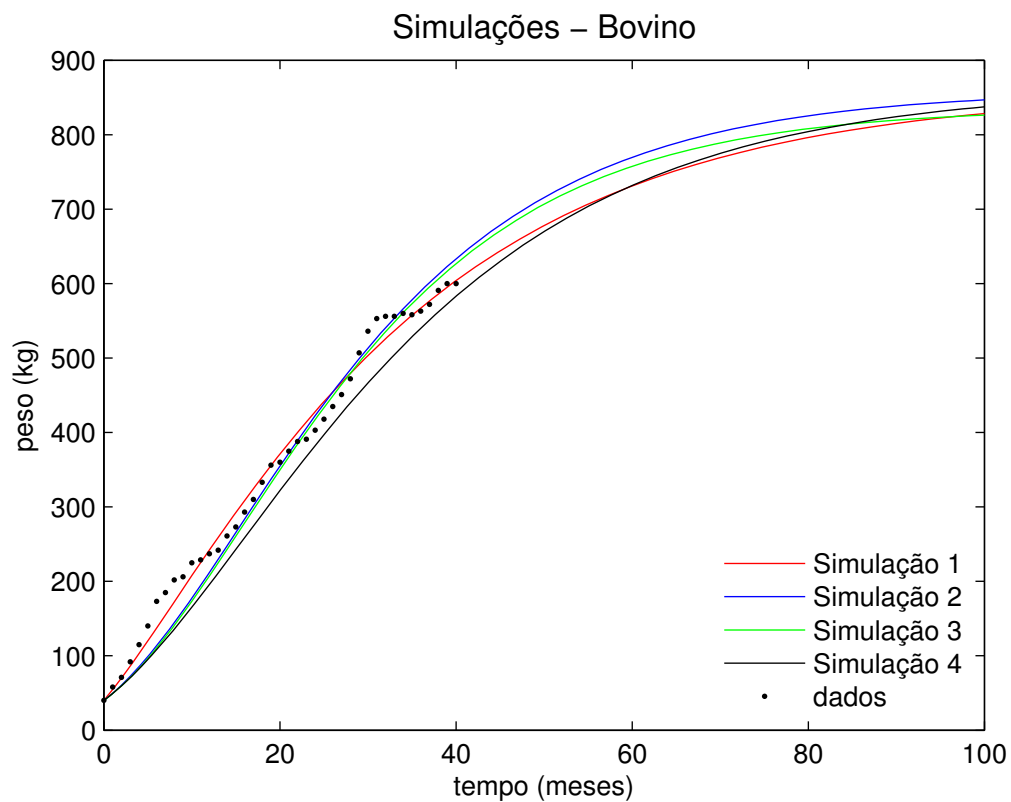


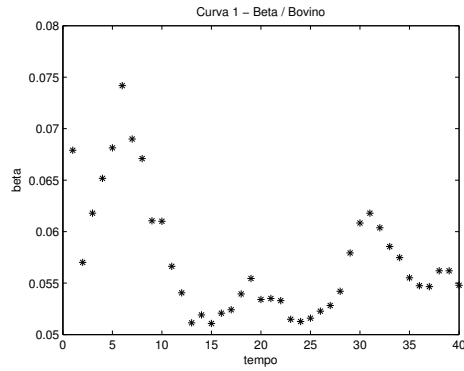
Figura 3.8: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de Bovino (Tabela 3.4)

Tabela 3.5: Tabela para a função $\beta(t)$ - Bovino

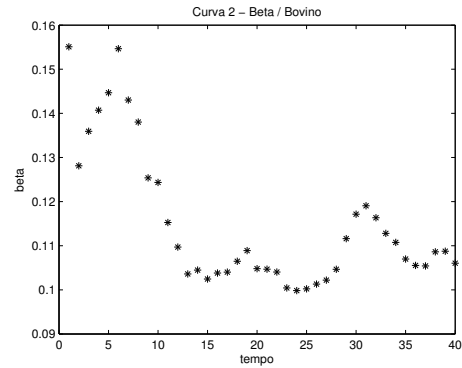
Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
0	0.0679	0.1551
1	0.0570	0.1281
2	0.0618	0.1359
3	0.0652	0.1407
4	0.0681	0.1447
5	0.0742	0.1546
6	0.0690	0.1430
7	0.0671	0.1380
8	0.0611	0.1254
9	0.0610	0.1244
10	0.0566	0.1153
11	0.0541	0.1097
12	0.0511	0.1036
13	0.0519	0.1045
14	0.0511	0.1024

Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
15	0.0521	0.1038
16	0.0524	0.1040
17	0.0539	0.1065
18	0.0554	0.1089
19	0.0534	0.1048
20	0.0535	0.1047
21	0.0533	0.1040
22	0.0515	0.1004
23	0.0513	0.0998
24	0.0516	0.1002
25	0.0523	0.1013
26	0.0528	0.1022
27	0.0542	0.1047
28	0.0579	0.1116
29	0.0608	0.1172
30	0.0618	0.1190
31	0.0604	0.1163
32	0.0585	0.1128
33	0.0575	0.1108
34	0.0555	0.1070
35	0.0547	0.1055
36	0.0547	0.1054
37	0.0562	0.1086
38	0.0562	0.1087
39	0.0548	0.1060

Fonte: Simulação dos dados.



(a)



(b)

Figura 3.9: Diagrama de dispersão de β (t) para o crescimento em peso de Bovinos: (a)Curva 1: $p_{\infty} = 859.56$ kg; $\gamma = 0.3508$ (dados referentes à simulação 1); (b)Curva 2: $p_{\infty} = 791.2346$ kg; $\gamma = 0.5625$ (dados referentes à simulação 3).

3.2.3 Caprinos

Os parâmetros de Caprinos foram obtidos a partir de observação dos dados experimentais de crescimento em peso de caprinos da raça Moxotó, pesados a cada trimestre, do nascimento ao três anos de idade, na Embrapa Meio-Norte, em Teresina, PI. Os valores, presentes na Tabela 3.6, foram cedidos por Freitas [3]. A dispersão dos dados pode ser observada na Figura 3.9.

O valor do peso máximo p_{∞} estimado para caprinos, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 7 dados de peso da Tabela 3.6 ($P_* \cong 29.00$ kg), foi de $p_{\infty} = 46.2995$ Kg, enquanto ao utilizarmos os últimos 8 dados de peso o valor obtido foi de $p_{\infty} = 49.8559$ Kg. Este último valor está mais próximo da capacidade suporte estimada por Freitas, que encontrou $p_{\infty} = 51.9850$ utilizando o modelo de von Bertalanffy.

Tabela 3.6: Dados de crescimento em peso de **caprinos**

Idade (em meses)	Peso (em Kg)
0	5
3	15
6	19
9	24
12	27
15	29
18	35
21	37
24	40
27	43
30	44
33	45
36	45

Fonte:Embrapa Meio-Norte, Teresina, PI.

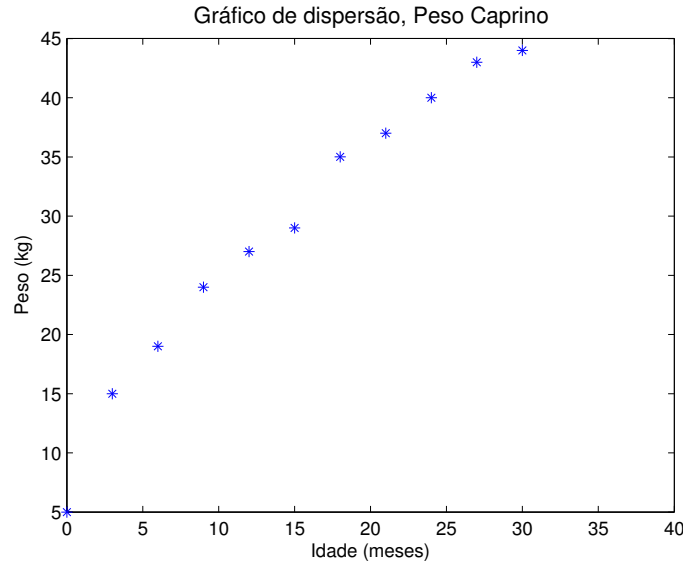


Figura 3.10: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para caprinos

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. Freitas, utilizando $\gamma = 2/3$, obteve para as constantes de anabolismo e catabolismo $\alpha = 0.9213$ e $\beta = 0.2469$, respectivamente. As curvas de ajuste podem ser observadas na Figura 3.10.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 49.8559$ kg, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.3791$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.0668$, $\gamma = 0.0545$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 2.6913$.

Simulação 2:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 49.8559$ kg, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.3791$, $\gamma = 3/4$ (fixo). Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.3663$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.9733$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.95$, $\beta = 0.3791$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 2.8625$, $\beta = 0.0543$, $\gamma = 4 \times 10^{-9}$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 52.7164$ kg.

Simulação 4:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 46.2995$ kg, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.3791$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.1320$, $\gamma = 0.3450$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 1.5166$.

Simulação 5:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 46.2995$ kg, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.3791$, $\gamma = 3/4$ (fixo). Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.4223$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 1.1016$.

Simulação 6:

Curva solução do modelo de von Bertalanffy plotada sem ajustes, como os parâmetros estimados por Freitas.

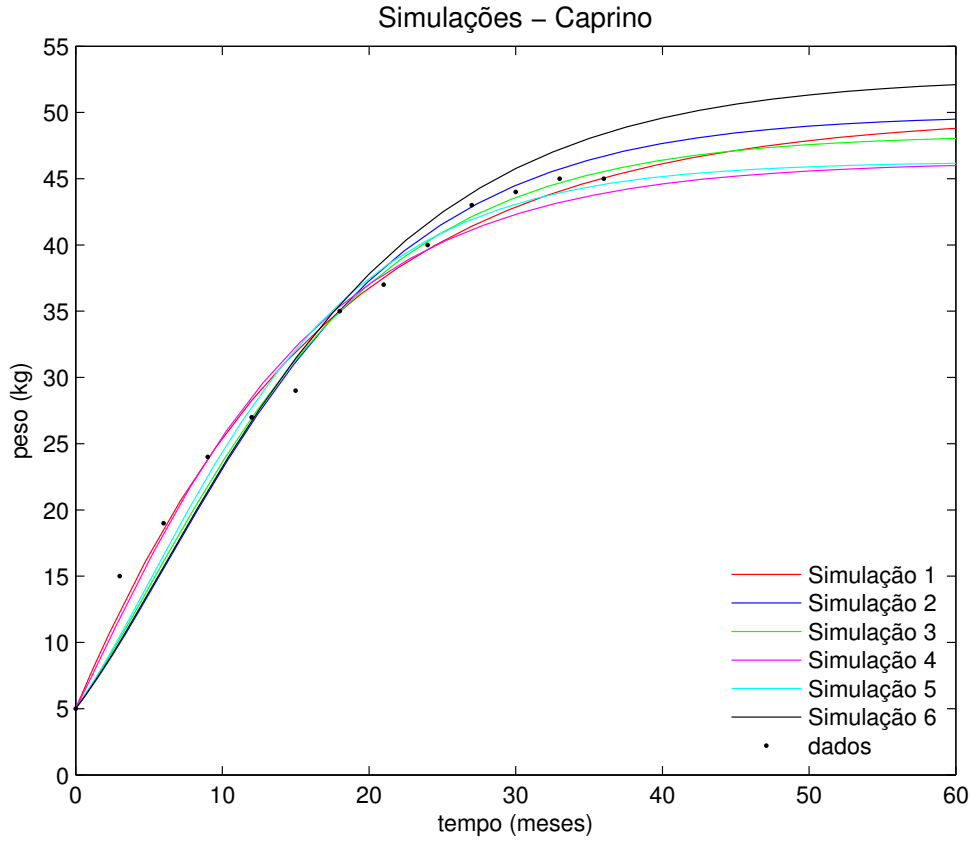


Figura 3.11: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de Caprino (Tabela 3.6)

As simulações 3 e 1 apresentam maior proximidade entre os dados fornecidos e as curvas ajustadas, porém a interpretação biológica dos parâmetros indica que os ajustes não estão bons, uma vez que apresentam valores muito pequenos para γ . Em sequência, as simulações 4 e 5 foram as que apresentaram ajustes mais coerentes,

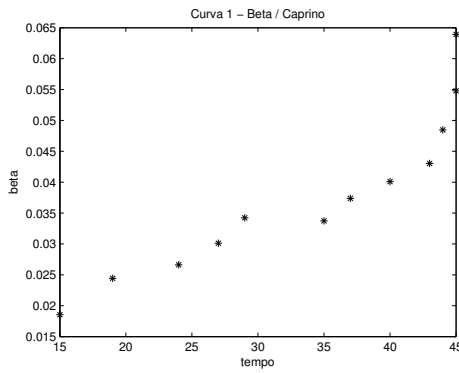
respectivamente nesta ordem. Notamos, mais uma vez, que a tendência de γ , quando não é mantido fixo, é ser menor que $3/4$. A simulação 2 foi que a apresentou maior distância entre os dados fornecidos e o ajuste. A simulação 6, com as referências de Freitas, também não apresentou boa aproximação dos dados.

Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ obtidos das simulações 3 e 4, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ de Caprino correspondentes (veja Tabela 3.7).

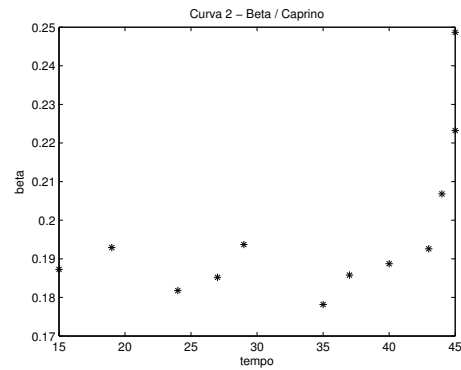
Tabela 3.7: Tabela para a função $\beta(t)$ - Caprino

Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
1	0.0185	0.1873
2	0.0244	0.1929
3	0.0266	0.1818
4	0.0301	0.1852
5	0.0342	0.1937
6	0.0337	0.1782
7	0.0374	0.1858
8	0.0401	0.1887
9	0.0430	0.1926
10	0.0485	0.2068
11	0.0548	0.2232
12	0.0639	0.2487

Fonte: Simulação dos dados.



(a)



(b)

Figura 3.12: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de Caprinos utilizando os parâmetros: (a) Curva 1: $p_\infty = 46.2995$ kg, $\gamma = 0.3450$ (dados referentes à Simulação 4); (b) Curva 2: $p_\infty = 46.2995$ kg, $\gamma = 0.75$ (dados referentes à Simulação 5).

3.2.4 Coelho

Para obtenção dos parâmetros de Coelhos utilizamos medidas de crescimento em peso de coelhos machos da raça Nova Zelândia Branco, pesados semanalmente no nascimento aos 70 dias de idade, provenientes do setor de cunicultura do Departamento de Zootecnia da Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias na Universidade Estadual Paulista, Campus de Jaboticabal, SP. Os valores presentes na Tabela 3.8, foram obtidos a partir de média aritmética sobre medidas de peso de 17 animais, cedidas por Freitas [3]. A dispersão dos dados pode ser observada na Figura 3.13.

Não foi possível estimar o valor do peso máximo p_{∞} utilizando Ford-Walford, independente do número de pontos tomados. Uma das razões pode ser atribuída ao fato de que as medidas de peso terem sido feitas somente até os 70 dias de idade, enquanto os coelhos ainda estão em fase de crescimento, conforme se observa pelo comportamento exponencial do gráfico de dispersão peso p versus tempo t na Figura 3.13. Então, utilizamos para as simulações a capacidade suporte estimada por Freitas ao utilizar o modelo de von Bertalanffy com o parâmetro $\gamma = 2/3$, $p_{\infty} = 2.6223$ kg.

Tabela 3.8: Dados de crescimento em peso de **coelhos**

Idade (em dias)	Peso (em gramas)
1	56.48
7	88.48
15	192.77
21	315.30
30	580.29
45	1022.12
70	1622.41

Fonte:UNESP, Campus de Jaboticabal, SP.

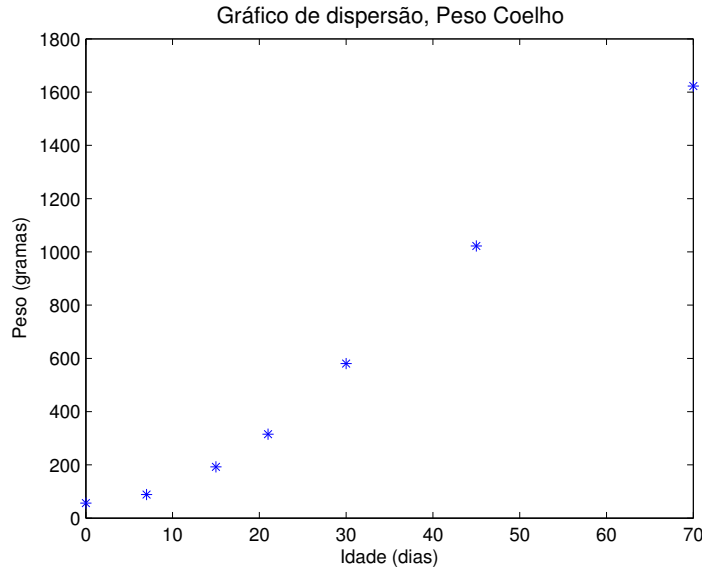


Figura 3.13: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para coelhos

Utilizamos como valor de chute inicial para as simulações os parâmetros estimados por Freitas: $\alpha = 0.06125$, $\beta = 0.0741$ e $\gamma = 2/3$. O peso foi dividido por 1000 para trabalhar na unidade kg ao invés de grama, facilitando a comparação entre curvas de crescimento de animais de grande e pequeno porte [3]. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.13.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 2.6263$ kg, $\alpha = 0.06125$, $\beta = 0.0741$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.8873$, $\gamma = 0.9670$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.9160$.

Simulação 2:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 2.6263$ kg, $\alpha = 0.06125$, $\beta = 0.0741$, $\gamma = 3/4$ (fixo).

Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.0938$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.1194$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.06125$, $\beta = 0.0741$, $\gamma = 2/3$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.1082$, $\beta = 0.0806$, $\gamma = 0.7567$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 3.35474$ kg.

Simulação 4:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 2.6263$ kg, $\alpha = 0.06125$, $\beta = 0.0741$, $\gamma = 2/3$. Parâmetros após

ajuste: $\beta = 0.8718$, $\gamma = 0.9665$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.9005$.

Simulação 5:

Parâmetros de partida: $p_\infty = 2.6263$ kg, $\alpha = 0.06125$, $\beta = 0.0741$, $\gamma = 2/3$ (fixo).

Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.0644$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.0888$.

Simulação 6:

Curva solução do modelo de von Bertalanffy plotada sem ajustes, como os parâmetros estimados por Freitas.

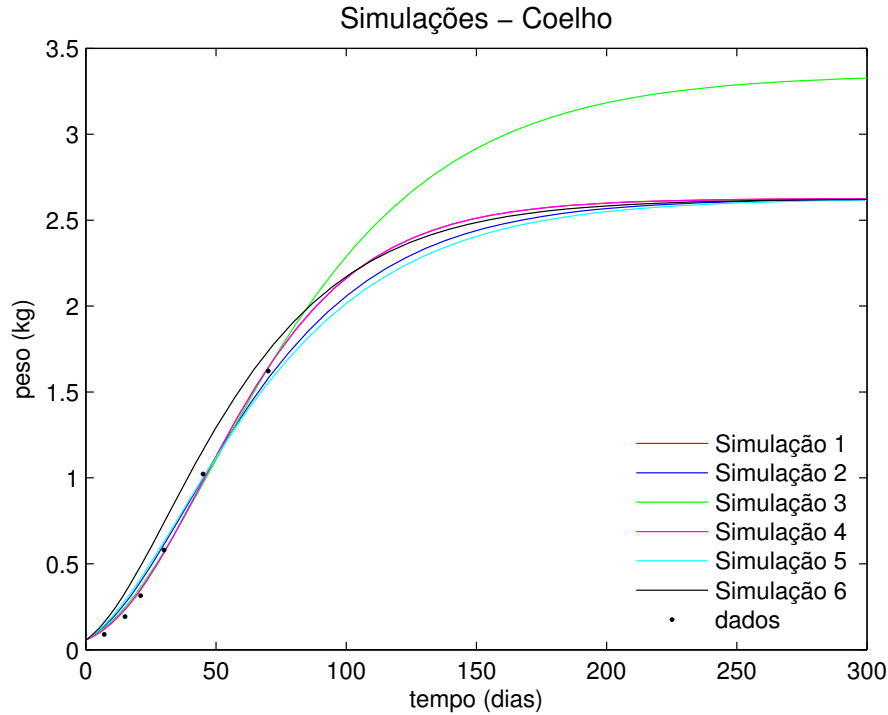


Figura 3.14: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de coelho (Tabela 3.8)

As simulações 1 e 4 apresentam a melhor aproximação entre os dados fornecidos e os ajustes, porém os parâmetros obtidos não estão condizentes com a realidade, uma vez que β deve assumir um valor pequeno. Notemos que as respectivas curvas estão sobrepostas, devido a mínima variação entre os resultados. A simulação 3, onde todos parâmetros foram ajustados pelo programa, além de apresentar boa aproximação entre os dados fornecidos e a curva de ajuste, apresenta dados coerentes

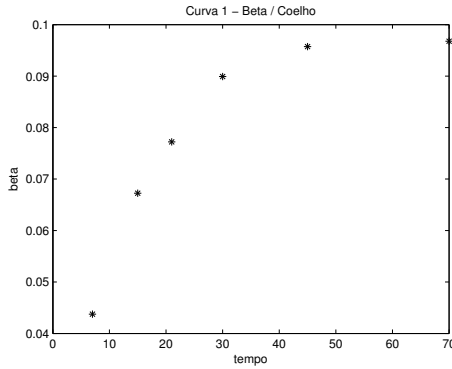
com a interpretação biológica e indica capacidade suporte bem maior que a estimada por Freitas. Em sequência de aproximação estão as simulações 2 e 5, respectivamente nesta ordem, ressaltando que o parâmetro γ estimado pela simulação 3 aproxima-se de $3/4$.

Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ obtidos segundo as simulações 2, 3 e 5, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ de coelho correspondentes (veja Tabela 3.9). A curva de tendência de $\beta(t)$ pode ser vista na Figura 3.15

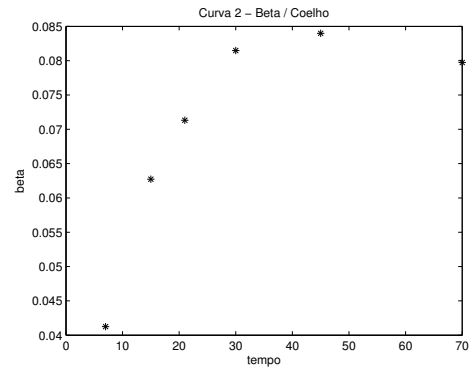
Tabela 3.9: Tabela para a função $\beta(t)$ - Coelho

Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
1	0.0437	0.0412
2	0.0673	0.0627
3	0.0772	0.0713
4	0.0899	0.0815
5	0.0957	0.0840
6	0.0968	0.0797

Fonte: Simulação dos dados.



(a)



(b)

Figura 3.15: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de Coelhos. (a) Curva 1: $p_\infty = 2.6263$ kg, $\gamma = 0.75$ (dados referentes à simulação 2); (b) Curva 2: $p_\infty = 3.3547$ kg, $\gamma = 0.7567$ (dados referentes à simulação 3).

3.2.5 Ovinos

Ovinos de raças exóticas e mestiças

Para a obtenção dos parâmetros, foram utilizados 15 pares de dados (idade e peso), avaliados por animal, do nascimento a um ano de idade, de ovinos de raças exóticas e mestiças, na Embrapa Meio-Norte, em Teresina, PI. Os valores foram cedidos por Freitas [3]. Neste caso, ao invés da média entre os valores, utilizei o acompanhamento de implementação de peso ao longo do tempo de um único animal, escolhido aleatoriamente entre os 15. A Tabela 3.10 apresenta os pares de (idade e peso) considerados e o respectivo gráfico de dispersão pode ser observado na Figura 3.16.

O valor do peso máximo p_{∞} estimado para ovinos, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 9 dados de peso da Tabela 3.10 ($p_{*} \cong 10.00$ kg), foi de $p_{\infty} = 32.7236$ Kg. Freitas [3], obteve como resultado em seu trabalho $p_{\infty} = 34.0172$ Kg, utilizando o parâmetro $\gamma = 2/3$.

Tabela 3.10: Dados de crescimento em peso de **ovinos**

Idade (em dias)	Peso (em kg)
1	2.00
16	5.50
28	7.50
44	8.10
72	10.00
100	10.00
128	14.00
156	18.00
184	21.00
212	24.00
240	26.00
268	26.00
296	26.00
324	30.00
352	30.00

Fonte: Embrapa Meio-Norte, Teresina, PI.

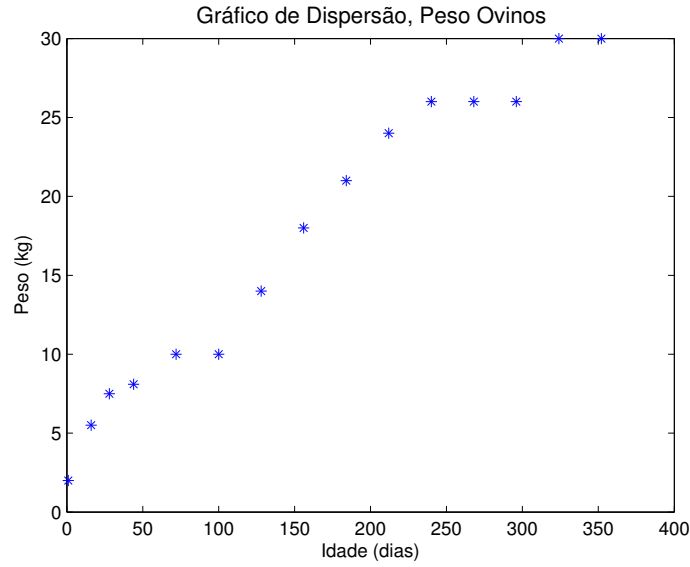


Figura 3.16: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para ovinos.

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.17.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 32.7236$ kg, $\alpha = 0.0787$, $\beta = 0.0327$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.0248$, $\gamma = 0.6754$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.0769$.

Simulação 2:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 32.7236$ kg, $\alpha = 0.0787$, $\beta = 0.0327$, $\gamma = 3/4$ (fixo).

Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.0338$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.0808$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.0787$, $\beta = 0.0327$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste:

$\alpha = 0.1207$, $\beta = 0.0032$, $\gamma = 0.0553$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 46.6492$ kg.

Simulação 4:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 34.0172$ kg, $\alpha = 0.0787$, $\beta = 0.0327$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após

ajuste: $\beta = 0.0160$, $\gamma = 0.5588$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.0758$.

Simulação 5:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 34.0172$ kg, $\alpha = 0.0787$, $\beta = 0.0327$, $\gamma = 3/4$ (fixo).

Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.0320$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.7728$.

Simulação 6:

Curva solução do modelo de von Bertalanffy plotada sem ajustes, como os parâmetros estimados por Freitas: $p_{\infty} = 34.0172$ kg, $\alpha = 0.0739$, $\beta = 0.0228$, $\gamma = 2/3$.

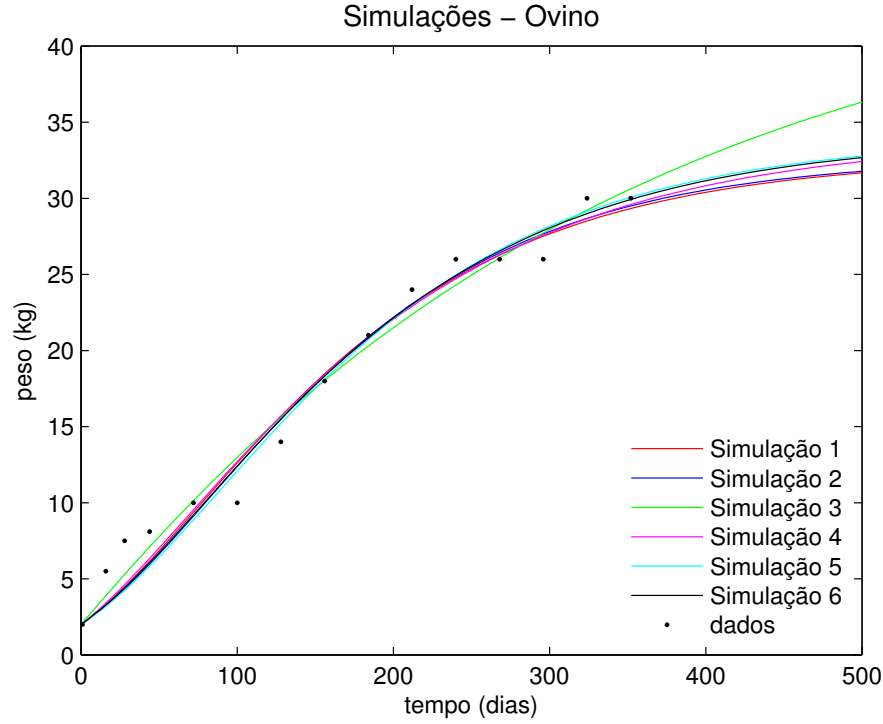


Figura 3.17: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de ovinos (Tabela 3.10)

Neste caso, as curvas de ajuste encontram-se muito próximas umas das outras, porém analisando com cuidado, chegamos a algumas conclusões: a simulação 3 foi a que mostrou mais proximidade entre os dados fornecidos e a curva ajustada, porém fazendo a interpretação biológica dos dados, notamos que o ajuste não é bom, uma vez que o valor de γ não condiz com a realidade. Na sequência de proximidade estão as simulações 4, 1 e 5, respectivamente nesta ordem, e apresentam bom ajuste, com parâmetros coerentes do ponto de vista biológico. Observemos que quando o parâmetro γ não é mantido fixo tende a ser um valor menor que $3/4$. A simulação 2 é a que apresenta maior distância entre os dados fornecidos e o ajuste. Notemos

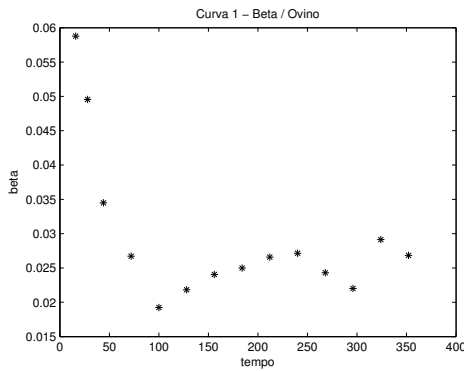
que a curva plotada sem ajustes, com os parâmetros estimados por Freitas, quase sobrepõe o ajuste da simulação 5, devido a proximidade entre os dados.

Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ estimados pelas simulações 1, 4 e 5, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ de ovino correspondentes (veja Tabela 3.11). As curvas de tendência para $\beta(t)$ podem ser vistas na Figura 3.18.

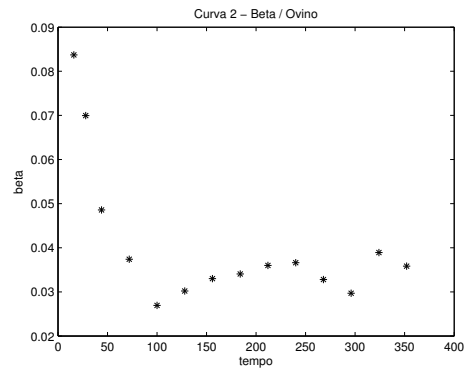
Tabela 3.11: Tabela para a função $\beta(t)$ - Ovino

Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
1	0.0588	0.0837
2	0.0496	0.0700
3	0.0345	0.0486
4	0.0267	0.0374
5	0.0192	0.0269
6	0.0218	0.0302
7	0.0241	0.0330
8	0.0250	0.0341
9	0.0266	0.0360
10	0.0271	0.0366
11	0.0243	0.0328
12	0.0220	0.0297
13	0.0291	0.0389
14	0.0268	0.0358

Fonte: Simulação dos dados.



(a)



(b)

Figura 3.18: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de ovinos utilizando os parâmetros: (a) Curva 1: $p_\infty = 32.7236$ kg, $\gamma = 0.6754$ (dados referentes à simulação 1); (b) Curva 2: $p_\infty = 34.0172$ kg, $\gamma = 0.5588$ (dados referentes à simulação 4).

Cordeiro da raça Bergamácia

Os dados utilizados para obtenção de parâmetros são oriundos de experimentos desenvolvidos no setor de Ovinocultura, Departamento de Zootecnia da Universidade Federal de Lavras. Foram utilizados 20 cordeiros da raça Bergamácia, nascidos no ano de 1997. Os animais foram desmamados com aproximadamente 40 dias de idade, vermifugados e mantidos sob regime de confinamento em gaiolas individuais de estrutura metálica de 1,3 m x 1,0 m, equipadas com cochos e bebedouro, localizadas em galpão de alvenaria. As pesagens foram feitas ao nascimento e a cada duas semanas até os 6 meses de idade, quando os animais foram abatidos [1]. Os valores médios dos pesos observados e idade podem ser vistos na Tabela 3.12. A dispersão dos dados pode ser observada na Figura 3.19.

Tabela 3.12: Dados de crescimento em peso de **cordeiros**

Idade (em dias)	Peso (em kg)
0	3.75
14	6.84
28	12.75
42	16.26
54	18.46
68	21.6
82	24.26
96	27.92
110	33.06
124	37.46

Fonte: Setor de ovinocultura, UFLA.

O valor do peso máximo p_{∞} estimado para cordeiros, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 2 dados de peso da Tabela 3.12, foi de $p_{\infty} = 63.6222$ Kg. Observa-se que há dois momentos de maior variação nos dados. O primeiro acontece entre os pesos correspondentes aos tempos 14 e 28 dias e o segundo entre os pesos correspondentes aos tempos 96 e 110 dias. Consideramos a segunda variação como referência para o ponto de inflexão, $p_{*} = 27.92$ kg, uma vez que na primeira

o animal está no início do crescimento. Guedes, estimou esse valor como sendo $p_{\infty} = 64.07$ Kg, porém utiliza em seus cálculos o parâmetro $\gamma = 2/3$.

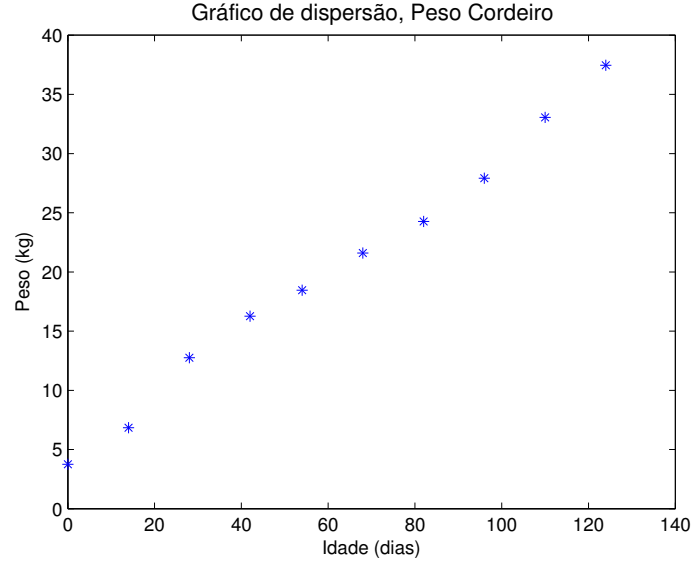


Figura 3.19: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para cordeiros da raça Bergamácia

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.20.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 63.6222$ kg, $\alpha = 0.1434$, $\beta = 0.0531$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.0140$, $\gamma = 0.0140$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.1645$.

Simulação 2:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 63.6222$ kg, $\alpha = 0.1434$, $\beta = 0.0531$, $\gamma = 3/4$ (fixo).

Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.0452$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.1272$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.1434$, $\beta = 0.0531$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.2708$, $\beta = 0.0003$, $\gamma = 2 \times 10^{-8}$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 902.6667$ kg.

Simulação 4:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 64.07$ kg, $\alpha = 0.1434$, $\beta = 0.0531$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.0137$, $\gamma = 0.4013$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.1653$.

Simulação 5:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 64.07$ kg, $\alpha = 0.1434$, $\beta = 0.0531$, $\gamma = 3/4$ (fixo). Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.0443$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.1253$.

Simulação 6:

Curva solução do modelo de von Bertalanffy plotada sem ajustes, como os parâmetros estimados por Guedes.

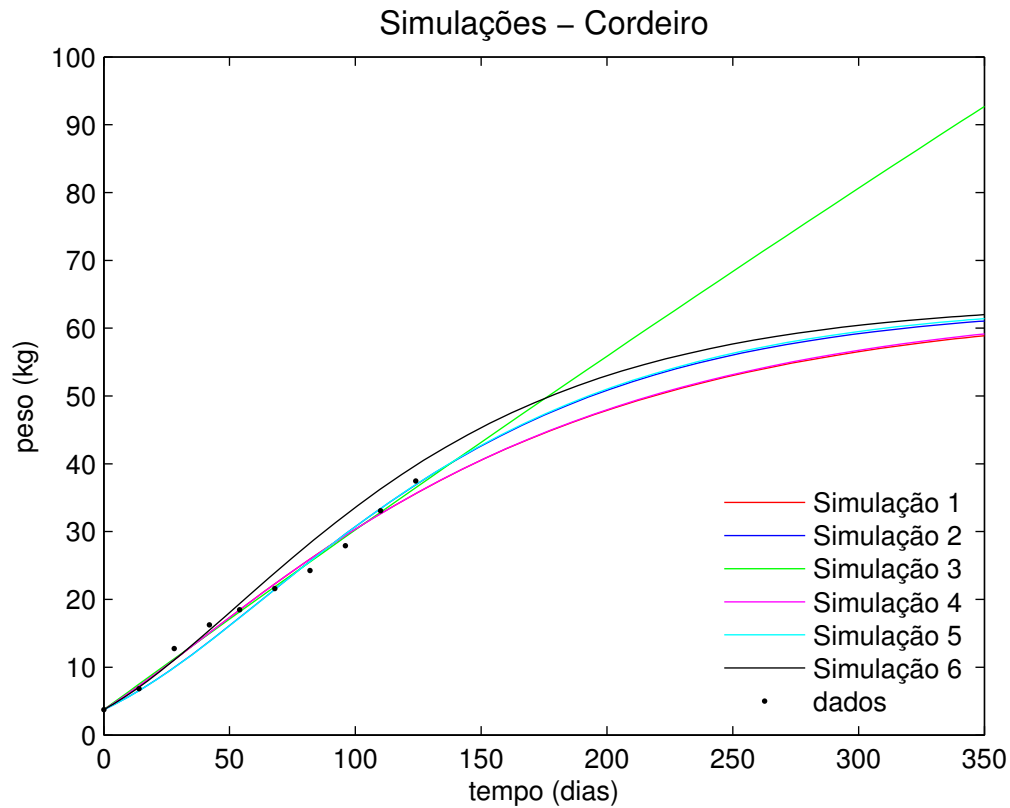


Figura 3.20: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de cordeiros da raça Bergamácia (Tabela 3.12)

Como podemos observar na Figura 3.20, a simulação 3 não forneceu bom ajuste para os parâmetros, explodindo a capacidade de suporte e subestimando β e γ . As simulações 1 e 4 apresentaram boa aproximação entre os dados fornecidos e a curva de ajuste, bem como parâmetros coerentes do ponto de vista biológico. As respectivas curvas estão praticamente sobrepostas, devido à proximidade dos

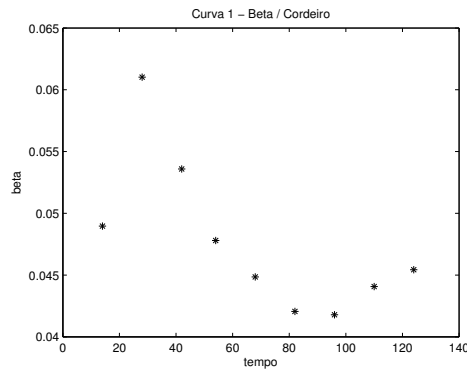
parâmetros resultantes. Notemos que quando o parâmetro γ não é mantido fixo tende a ser menor que $3/4$. As simulações 2 e 3, praticamente sobrepostas no gráfico, foram feitas mantendo o parâmetro $\gamma = 3/4$ fixo. Apesar de graficamente indicarem bom ajuste dos dados com relação à curva, apresentam maior distância dos dados fornecidos com relação ao ajuste, bem como valores maiores para β . A curva plotada com os parâmetros estimados por Guedes foi a que passou por menos número de pontos idade-peso fornecidos.

Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ obtidos através das simulações 1, 2 e 4, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ de cordeiro correspondentes (veja Tabela 3.13). As curvas de tendência de $\beta(t)$ podem ser observadas na Figura 3.21.

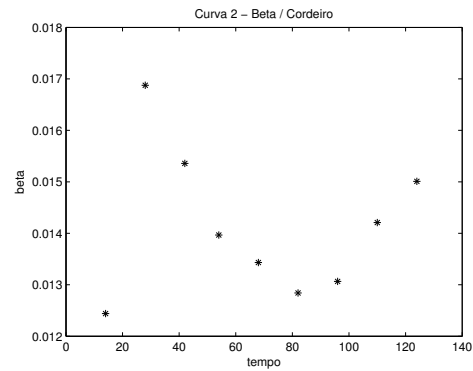
Tabela 3.13: Tabela para a função $\beta(t)$ - Cordeiro

Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2	β - Curva 3
1	0.0490	0.0124	0.0122
2	0.0610	0.0169	0.0165
3	0.0536	0.0154	0.0150
4	0.0478	0.0140	0.0137
5	0.0448	0.0134	0.0131
6	0.0421	0.0128	0.0126
7	0.0418	0.0131	0.0128
8	0.0441	0.0142	0.0139
9	0.0454	0.0150	0.0147

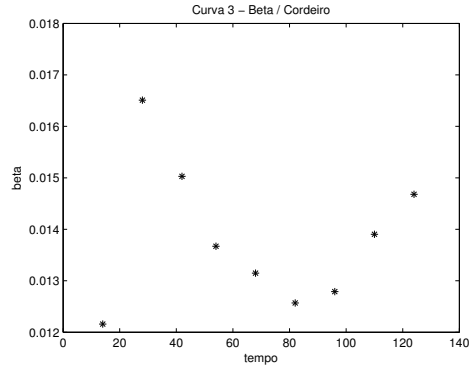
Fonte: Simulação dos dados.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.21: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de cordeiros da raça Bergamácia utilizando os parâmetros: (a)Curva1: $p_{\infty} = 63.6222$ kg, $\beta = 0.75$ (dados referentes à simulação 2); (b)Curva2: $p_{\infty} = 63.6222$ kg, $\beta = 0.4067$ (dados referentes à simulação 1); (c)Curva3: $p_{\infty} = 64.07$ kg, $\beta = 0.4013$ (dados referentes à simulação 4).

3.2.6 Ratos

Para a obtenção dos parâmetros para rato, foram utilizados dados de rato branco macho extraídos do trabalho de von Bertalanffy [15]. A Tabela 3.14 apresenta os pares de (idade e peso) considerados e o respectivo gráfico de dispersão pode ser observado na Figura 3.22.

O valor do peso máximo p_{∞} estimado para ratos, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 26 dados de peso da Tabela 3.14 ($p_{*} \cong 6.80\text{g}$), foi de $p_{\infty} = 24.1141\text{g}$.

Tabela 3.14: Dados de crescimento em peso de **ratos**

Idade (em semanas)	Peso (em gramas)
0	1.75
1	3.00
2	4.33
3	5.10
4	6.80
5	7.83
6	8.92
7	10.20

Idade (em semanas)	Peso (em gramas)
8	11.10
9	12.50
10	13.30
11	14.30
12	14.90
13	15.60
14	16.30
15	17.00
16	17.70
17	18.20
18	18.70
19	19.20
20	19.60
21	20.00
22	20.50
23	21.00
24	21.20
25	21.50
26	21.70
27	22.00
28	21.50
29	21.80
30	21.60

Fonte: von Bertalanffy [15].

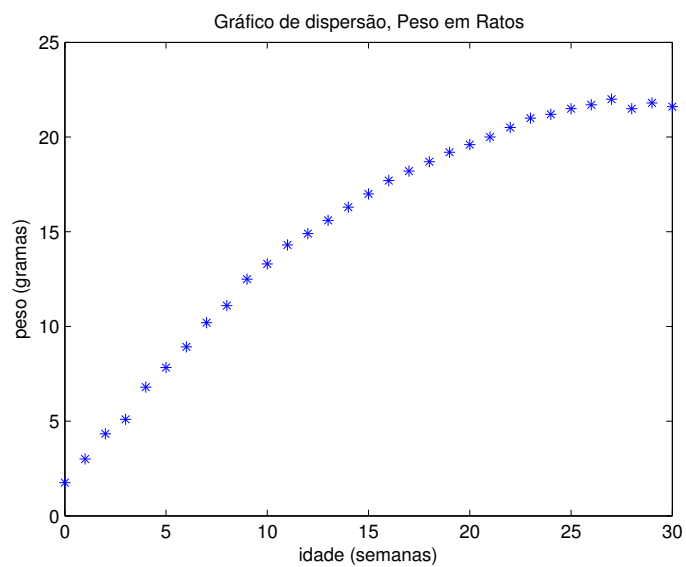


Figura 3.22: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para ratos.

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.23.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 1.0650$, $\beta = 0.1864$, $\gamma = 0.4491$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_\infty = 23.6559$ g.

Simulação 2:

Parâmetros de partida: $\alpha = 1.0650$, $\beta = 0.1864$, $\gamma = 3/4$ (fixo). Parâmetros após ajuste: $\alpha = 1.1589$, $\beta = 0.5312$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_\infty = 22.6543$ g.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $p_\infty = 23.6559$ g, $\alpha = 1.0650$, $\beta = 0.1864$, $\gamma = 3/4$ (fixo). Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.4906$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 1.0820$.

Simulação 4:

Parâmetros iniciais: $p_\infty = 23.6559$ g, $\alpha = 1.0650$, $\beta = 0.1864$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.1880$, $\gamma = 0.4526$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 1.0623$.

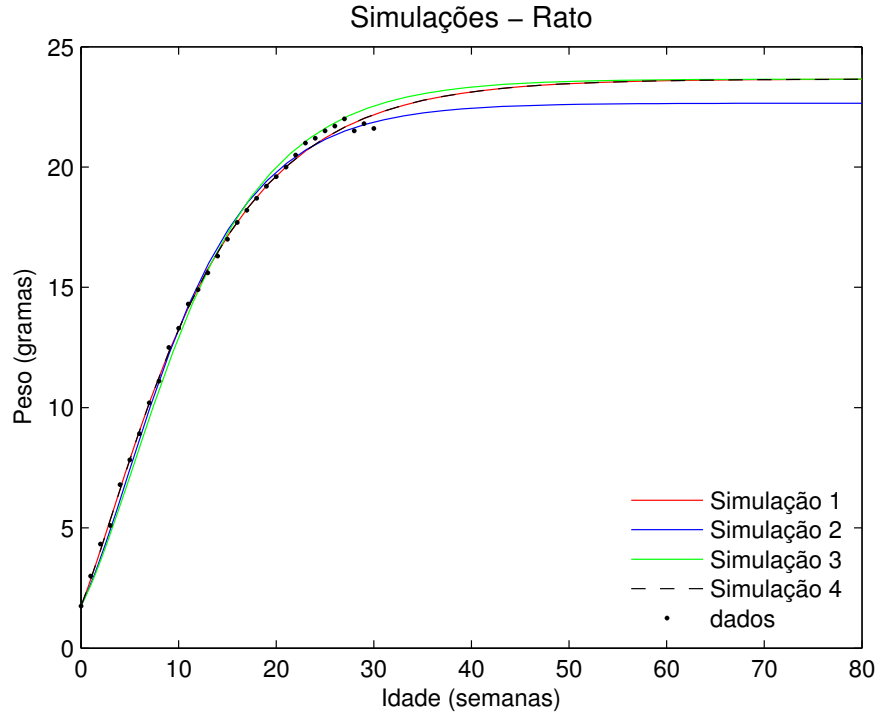


Figura 3.23: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de ratos (Tabela 3.14)

Analisando a proximidade entre os dados fornecidos e a curva ajustada as simulações 1, 4 e 2 foram as que apresentaram menor diferença, respectivamente nesta ordem. Observemos que nas simulações em que o parâmetro γ não é mantido fixo, tende a ser um valor menor que $3/4$, em torno de 0.45

Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ estimados pelas simulações 1 e 4, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ de rato correspondentes (veja Tabela 3.15). As curvas de tendência para $\beta(t)$ podem ser vistas na Figura 3.24.

Tabela 3.15: Tabela para a função $\beta(t)$ - Rato

Idade (em semanas)	β - Curva 1	β - Curva 2
1	0.2077	0.2100
2	0.2053	0.2075
3	0.1749	0.1767
4	0.1940	0.1959
5	0.1862	0.1880
6	0.1833	0.1850
7	0.1866	0.1884
8	0.1825	0.1841
9	0.1904	0.1922
10	0.1870	0.1887
11	0.1891	0.1908
12	0.1846	0.1862
13	0.1833	0.1849
14	0.1832	0.1847
15	0.1841	0.1856
16	0.1861	0.1877
17	0.1852	0.1867
18	0.1851	0.1866
19	0.1861	0.1876
20	0.1857	0.1872
21	0.1862	0.1877
22	0.1903	0.1918
23	0.1961	0.1976
24	0.1940	0.1955
25	0.1959	0.1974
26	0.1953	0.1968
27	0.1995	0.2010

Idade (em semanas)	β - Curva 1	β - Curva 2
28	0.1749	0.1763
29	0.1785	0.1798
30	0.1662	0.1675

Fonte: Simulação dos dados.

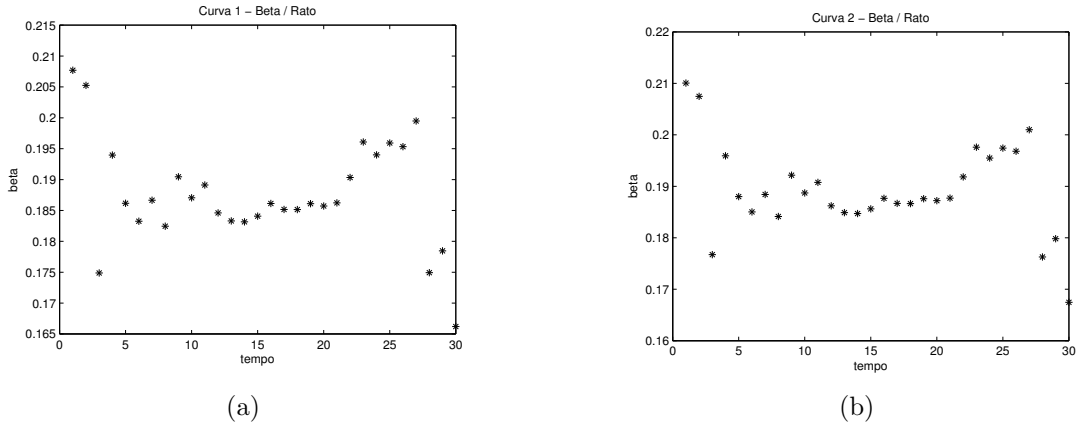


Figura 3.24: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de ratos utilizando os parâmetros: (a) Curva 1: $p_\infty = 23.6559$ g, $\gamma = 0.4491$ (dados referentes à simulação 1); (b) Curva 2: $p_\infty = 23.6559$ g, $\gamma = 0.4526$ (dados referentes à simulação 4).

3.2.7 Humanos

Para estimar os parâmetros referentes à humanos utilizamos dados de tempo e peso provenientes das tabelas de crescimento desenvolvidas em 1977 pelo National Center for Health Statistics (NCHS) e aprovadas pela Organização Mundial da Saúde para uso internacional. As tabelas de crescimento pediátrico consistem em uma série de curvas percentuais que ilustram a distribuição das medições do corpo de uma criança (idade x peso, idade x altura, idade x circunferência da cabeça, peso x altura, índice de massa corporal x altura), são separadas por sexo e divididas em duas partes: do nascimento aos três anos de idade e a partir de dois aos vinte anos de idade. Foram desenvolvidas como uma ferramenta clínica para profissionais de saúde com o intuito de verificar a normalidade do crescimento de uma criança e têm sido usado por pediatras, enfermeiras e pais para acompanhar o crescimento de

bebês, crianças e adolescentes desde sua criação.

A Figura 3.25 mostra o crescimento percentual em peso x idade para crianças do sexo masculino, do nascimento aos três anos de idade.

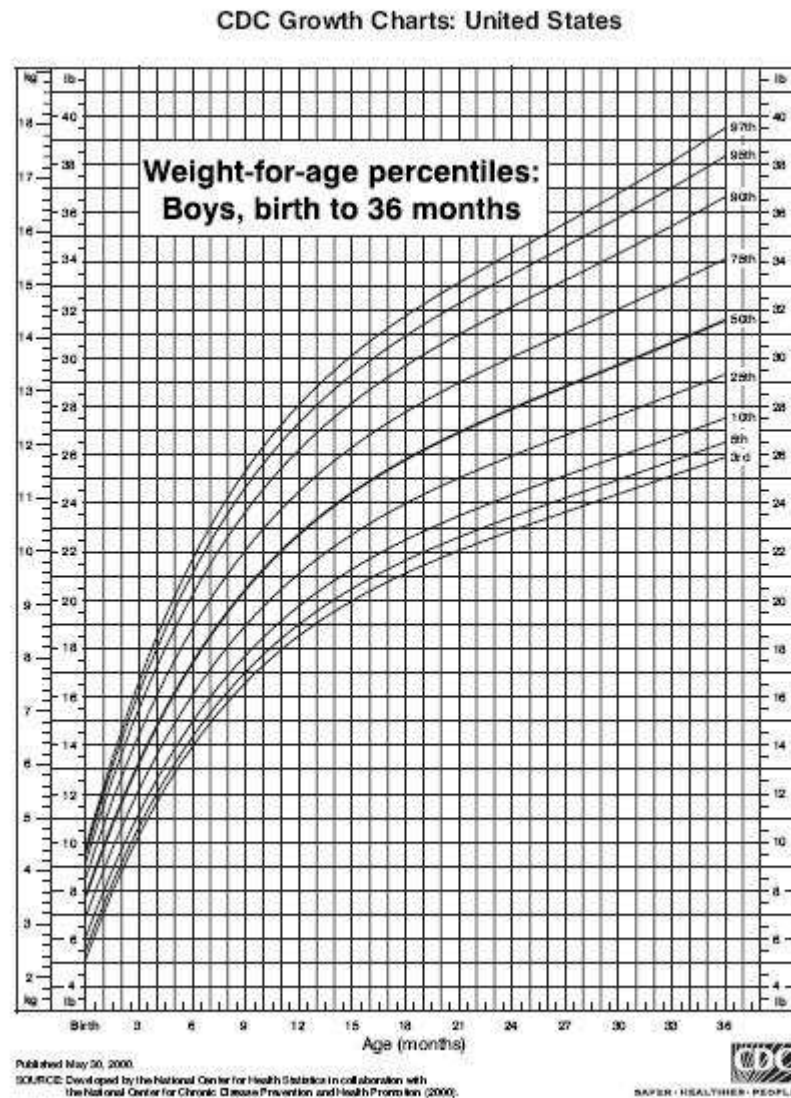


Figura 3.25: Crescimento pediátrico: peso x idade, crianças do sexo masculino, do nascimento aos 36 meses de idade.

A partir dos valores médios de peso e idade presentes na Figura 3.25, construímos a Tabela 3.16 , que representa o aumento médio de peso para crianças sexo masculino, do nascimento aos 36 meses de idade. A dispersão dos dados ao longo do tempo pode ser vista na Figura 3.26.

Tabela 3.16: Dados de crescimento em peso de **Crianças (sexo masculino)**

Idade (em meses)	Peso (em quilos)
0	3.5
3	6.0
6	7.9
9	9.3
12	10.3
15	11.1
18	11.7
21	12.3
24	12.7
27	13.1
30	13.5
33	13.9
36	14.6

Fonte: Crescimento pediátrico (Figura 3.25).

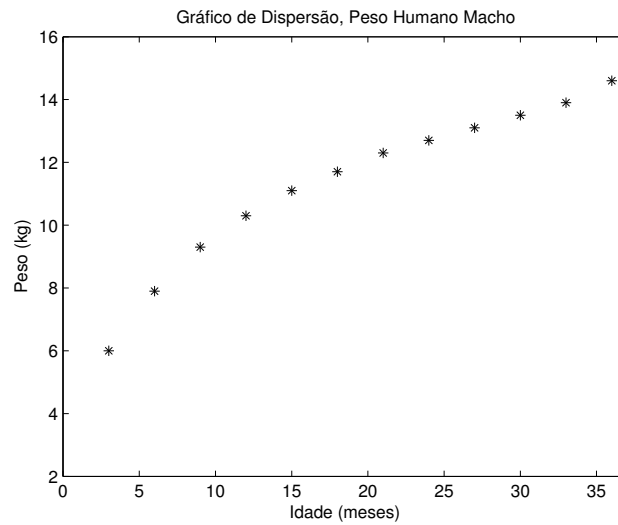


Figura 3.26: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para crianças do sexo masculino, do nascimento aos 36 meses.

O valor do peso máximo p_{∞} estimado para crianças do sexo masculino, do nascimento aos 36 meses de idade, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 10 dados de peso da Tabela 3.16 foi de $p_{\infty} = 16.1647\text{kg}$.

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.27.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 1.1252$, $\beta = 0.0763$, $\gamma = 2 \times 10^{-8}$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 14.7470$ kg.

Simulação 2:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 16.1647$ kg, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.0586$, $\gamma = 2 \times 10^{-14}$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.9472$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 1.1252$, $\beta = 0.0763$, $\gamma = 3/4$ (fixo). Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.8804$, $\beta = 0.4544$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 14.0918$ kg.

Simulação 4:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 16.1647$ kg, $\alpha = 1.1252$, $\beta = 0.0763$, $\gamma = 3/4$ (fixo). Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.3156$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.6328$.

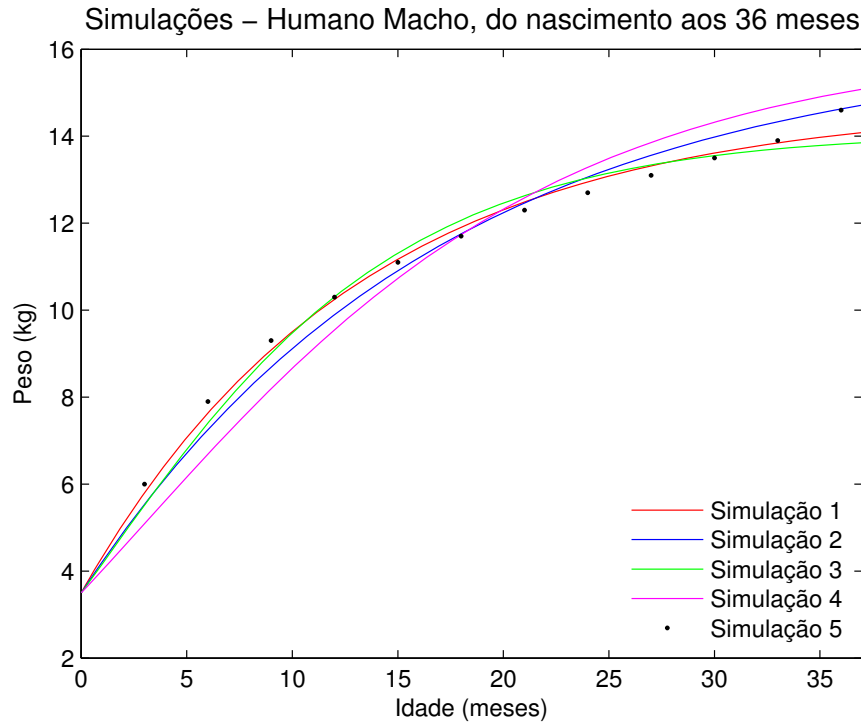


Figura 3.27: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de crianças do sexo masculino (Tabela 3.16)

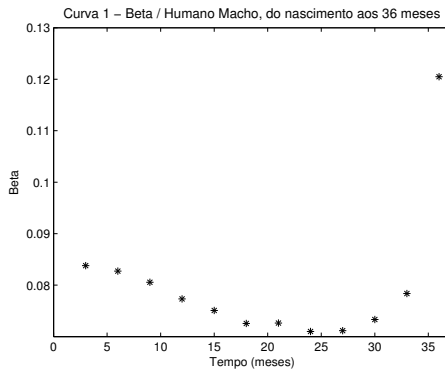
Analisando a proximidade entre os dados fornecidos e a curva ajustada (erro)

as simulações 1, 3 e 2 foram as que apresentaram menor diferença, respectivamente nesta ordem. No entanto, a simulação 3 é a que apresenta interpretação biológica mais coerente com a realidade. Observemos que nas simulações em que o parâmetro γ não é mantido fixo, tende a ser um valor bem menor que $3/4$.

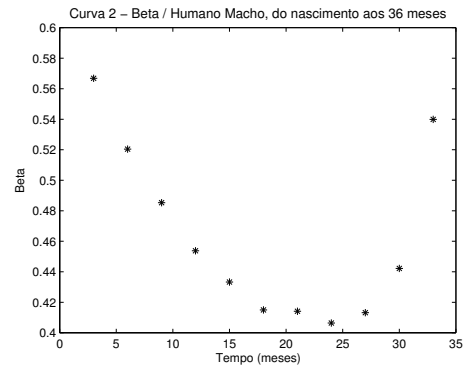
Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ estimados pelas simulações 1 e 3, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ de crianças do sexo masculino correspondentes (veja Tabela 3.17). As curvas de tendência para $\beta(t)$ podem ser vistas na Figura 3.28.

Tabela 3.17: Tabela para a função $\beta(t)$ - Crianças do sexo masculino

Idade (em meses)	β - Curva 1	β - Curva 2
3	0.0838	0.5668
6	0.0827	0.5204
9	0.0806	0.4853
12	0.0773	0.4538
15	0.0751	0.4333
18	0.0725	0.4150
21	0.0726	0.4142
24	0.0710	0.4065
27	0.0711	0.4132
30	0.0733	0.4422
33	0.0784	0.5399
36	0.1205	0.3887



(a)



(b)

Figura 3.28: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de humanos do sexo masculino utilizando os parâmetros: (a) Curva 1: $p_\infty = 14.7470$ kg, $\gamma = 2 \times 10^{-8}$ (dados referentes à simulação 1); (b) Curva 2: $p_\infty = 14.0918$ kg, $\gamma = 3/4$ (dados referentes à simulação 3).

Apesar da grande diferença apresentada em relação ao parâmetro γ nas simulações 1 e 3, devido ao fato de na primeira ter sido deixado livre para ajuste e na segunda mantido o valor fixo de $3/4$, podemos observar que o comportamento da curva β é análogo, decaindo até chegar aos 25 meses, quando começa a aumentar.

Vale ressaltar que realizamos testes unindo as tabelas de crescimento referentes à peso x idade das duas faixas etárias consideradas (nascimento aos 36 meses e 2 aos 20 anos), porém o modelo não ajustou os dados dispostos desta maneira. O motivo talvez deva-se ao fato de que a curva completa possui dois pontos de estabilidade. Pos este motivo preferimos trabalhar com as tabelas separadamente, seguindo a divisão proposta e utilizada pelos especialistas em crescimento humano. Conforme podemos observar nesta subseção, o modelo é adequado para o ajuste dos dados na primeira faixa etária (nascimento aos 36 meses). O mesmo não ocorreu quando consideramos a segunda faixa etária (2 aos 20 anos). Para esta última, verificamos que o modelo logístico generalizado é adequado para o ajuste, porém optamos por não incluir o estudo neste trabalho, uma vez que nosso principal objetivo é o modelo de von Bertalanffy generalizado e o tema do crescimento humano merece ser tratado com maior atenção e cuidado do que seria permitido no momento.

3.3 Aves

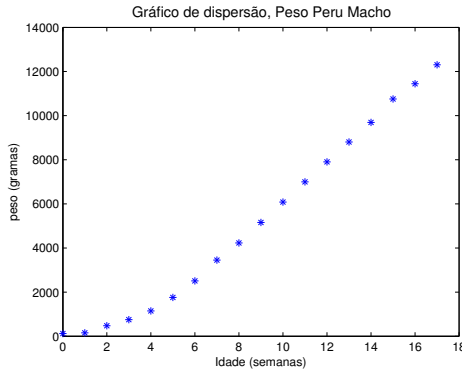
3.3.1 Peru

Utilizamos os dados de crescimento em peso de peru citados por Bassanezi em seus estudos sobre modelagem matemática de fenômenos biológicos [4]. Os valores podem ser observados na Tabela 3.18 e os respectivos gráficos de dispersão na Figura 3.29.

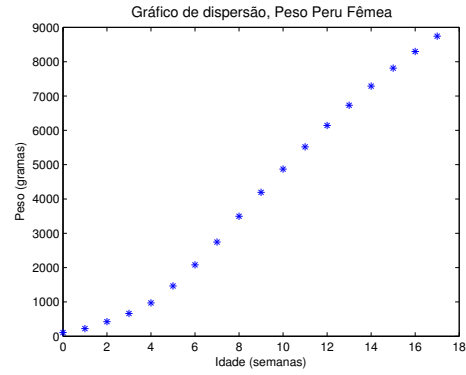
Tabela 3.18: Dados de crescimento em peso de **perus**

Idade (em semanas)	Peso do Macho (em gramas)	Peso da Fêmea (em gramas)
0	122	107
1	154	222
2	474	423
3	751	665
4	1148	971
5	1760	1466
6	2509	2079
7	3454	2745
8	4231	3495
9	5160	4194
10	6083	4870
11	6998	5519
12	7906	6141
13	8805	6732
14	9695	7290
15	10754	7813
16	11444	8299
17	12303	8744
18	13148	
19	13982	

Fonte: Bassanezi [4].



(a)



(b)

Figura 3.29: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para Peru Macho (a) e Peru Fêmea (b).

Peru Macho

O valor do peso máximo p_{∞} estimado para peru macho, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 4 dados de peso da Tabela 3.18 (considerando até o resultado da medida de peso corresponde ao tempo 17) ($p_* \cong 8.805$ kg), foi de $p_{\infty} = 25.1741$ Kg e $p_{\infty} = 32.8534$ Kg tomando os últimos 5 dados de peso da Tabela 3.18 (considerando até o resultado da medida de peso corresponde ao tempo 19) ($p_* \cong 9.695$ kg). No caso de peru macho, nenhum parâmetro foi estimado por Bassanezi [4].

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. Com o intuito de facilitar a comparação com animais de grande porte, o peso foi dividido por 1000 para trabalhar com a unidade quilo nos ajustes. Como não encontramos referência na literatura sobre possíveis valores para γ para peru macho, mantivemos este parâmetro sempre livre para ser ajustado pelo programa. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.30.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 25.1741$ kg, $\alpha = 0.8246$, $\beta = 0.1716$, $\gamma = 0.6345$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.3622$, $\gamma = 0.7530$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.8035$.

Simulação 2:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.8246$, $\beta = 0.1716$, $\gamma = 0.6345$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.9044$, $\beta = 0.4612$, $\gamma = 0.7855$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_\infty = 23.0942$ kg.

Simulação 3:

Parâmetros iniciais: $p_\infty = 32.8534$ kg, $\alpha = 0.8246$, $\beta = 0.1716$, $\gamma = 0.6345$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.1716$, $\gamma = 0.6345$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.6249$.

As três simulações resultaram em ajustes coerentes, tanto graficamente quanto do ponto de vista biológico. Porém, daremos preferência às duas primeiras, pois foram feitas utilizando dados até a pesagem 17 e há interesse na comparação entre macho e fêmea da mesma espécie.

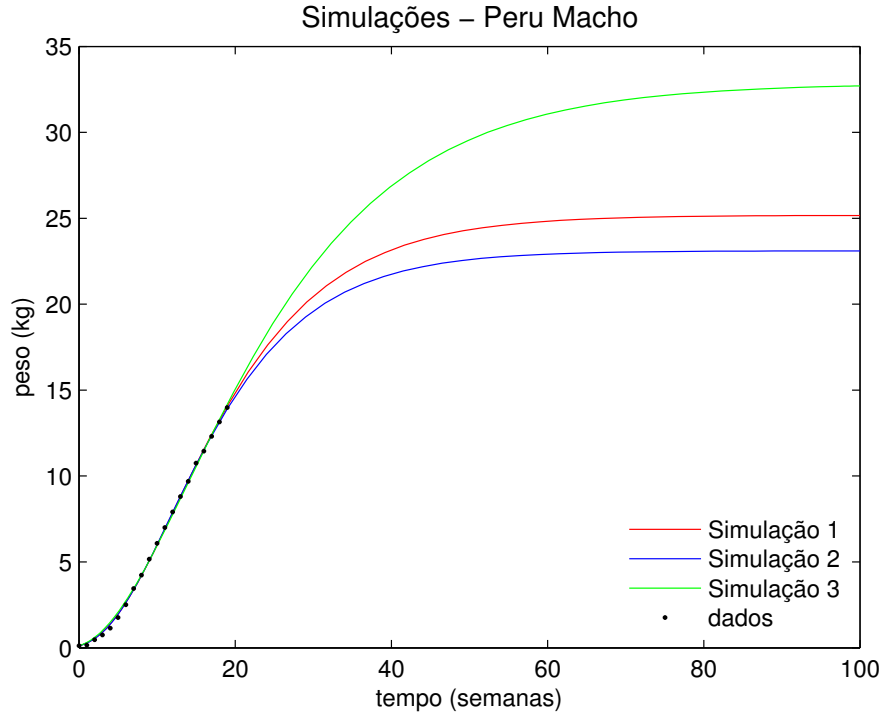


Figura 3.30: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de peru macho (Tabela 3.18)

Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ obtidos a partir das simulações 1 e 2, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$

de peru macho correspondentes (veja Tabela 3.19). Os diagramas de dispersão para $\beta(t)$ podem ser observados na Figura 3.31.

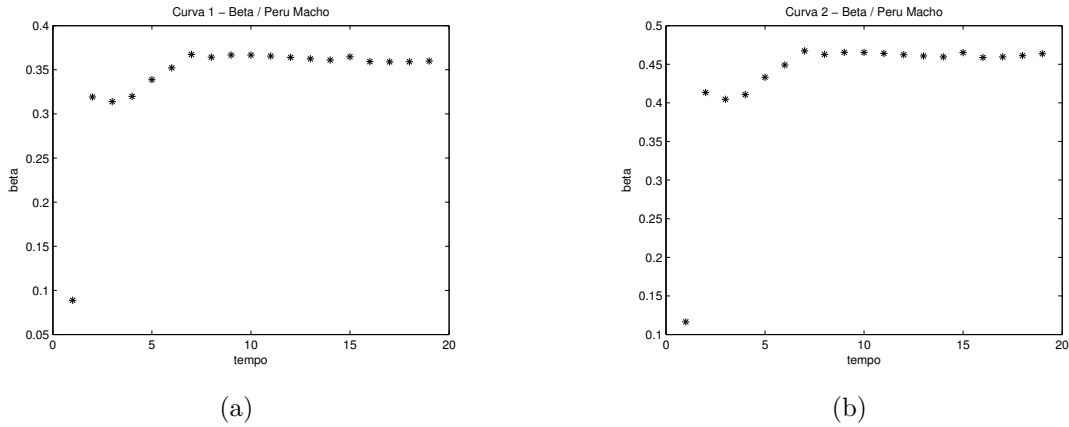


Figura 3.31: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de peru macho utilizando os parâmetros seguintes: (a) Curva 1: $p_{\infty} = 25.1741$ kg, $\gamma = 0.7530$ (dados referentes à simulação 1); (b) Curva 2: $p_{\infty} = 23.0942$ kg, $\gamma = 0.7855$ (dados referentes à simulação 2).

Tabela 3.19: Tabela para a função $\beta(t)$ - Peru Macho

Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
1	0.0888	0.1163
2	0.3192	0.4134
3	0.3139	0.4047
4	0.3199	0.4107
5	0.3388	0.4332
6	0.3523	0.4491
7	0.3674	0.4674
8	0.3643	0.4629
9	0.3667	0.4655
10	0.3667	0.4654
11	0.3655	0.4640
12	0.3640	0.4623
13	0.3625	0.4607
14	0.3611	0.4595
15	0.3647	0.4651
16	0.3593	0.4589
17	0.3590	0.4596
18	0.3592	0.4611
19	0.3599	0.4637

Fonte: Simulação dos dados.

Peru Fêmea

O valor do peso máximo p_∞ estimado para peru fêmea, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 4 dados de peso da Tabela 3.18 foi de $p_\infty = 14.5363$ Kg ($p_* \cong 6.732$ kg), ao passo que Bassanezi [4] obteve $p_\infty = 14.541$ Kg.

Para estimar os parâmetros de peru fêmea partimos dos valores obtidos por Bassanezi: $\alpha = 0.6665$; $\beta = 0.10912$; $\gamma = 0.32399$ [4]. Analogamente ao procedimento adotado para peru macho, o peso foi dividido por 1000 para trabalhar com a unidade quilo nos ajustes. Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo e as respectivas curvas de ajuste podem ser observadas na Figura 3.32.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_\infty = 14.5363$ kg, $\alpha = 0.6665$, $\beta = 0.1092$, $\gamma = 0.32399$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.4776$, $\gamma = 0.7714$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.8806$.

Simulação 2:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.6665$, $\beta = 0.1092$, $\gamma = 0.32399$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 1.0900$, $\beta = 0.6822$, $\gamma = 0.8188$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_\infty = 13.2785$ kg.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 1.0978$, $\beta = 0.6901$, $\gamma = 0.8204$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_\infty = 13.2604$ kg.

Simulação 4:

Curva plotada sem ajustes, com os parâmetros obtidos por Bassanezi: $\alpha = 0.6665$; $\beta = 0.10912$; $\gamma = 0.32399$.

Podemos notar, observando a Figura 3.32, que os ajustes provenientes das simulações 1 a 3 apresentam boa aproximação entre os dados fornecidos e a curva de ajuste, diferindo apenas pela capacidade suporte, maior na primeira simulação. Houve sobreposição das curvas provenientes das simulações 2 e 3, devido à proximidade dos valores resultantes. Analisando a interpretação biológica dos parâmetros, notamos que o menor valor de β ocorre na simulação 1. Ainda, a simulação 4, onde

a curva foi plotada sem ajustes, com os parâmetros estimados por Bassanezi, não apresentou boa aproximação.

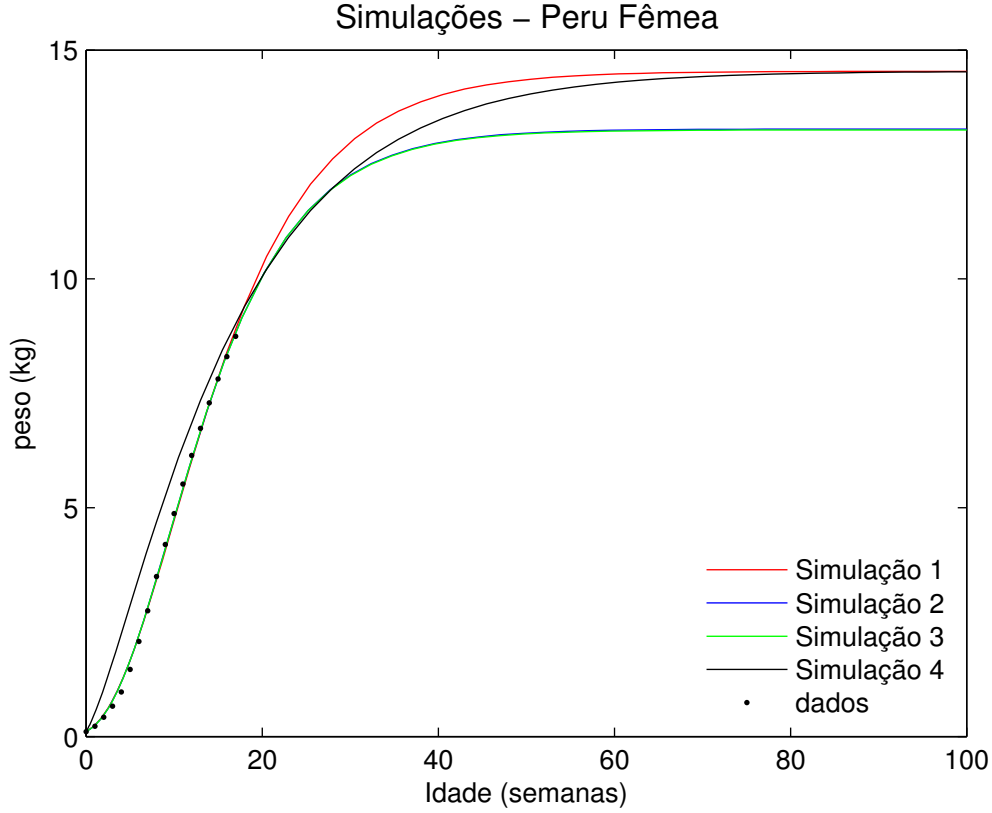


Figura 3.32: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de peru fêmea (Tabela 3.18)

Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ obtidos a partir das simulações 1 e 2, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ de peru fêmea correspondentes (veja Tabela 3.20). Os diagramas de dispersão para $\beta(t)$ podem ser observados na Figura 3.33.

Tabela 3.20: Tabela para a função $\beta(t)$ - Peru Fêmea

Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
1	0.4009	0.5896
2	0.4289	0.6250
3	0.4195	0.6074
4	0.4157	0.5987
5	0.4397	0.6299
6	0.4601	0.6564
7	0.4723	0.6718
8	0.4846	0.6881
9	0.4877	0.6920
10	0.4878	0.6922
11	0.4863	0.6906
12	0.4841	0.6883
13	0.4814	0.6858
14	0.4783	0.6832
15	0.4751	0.6805
16	0.4715	0.6778
17	0.4674	0.6747

Fonte: Simulação dos dados.

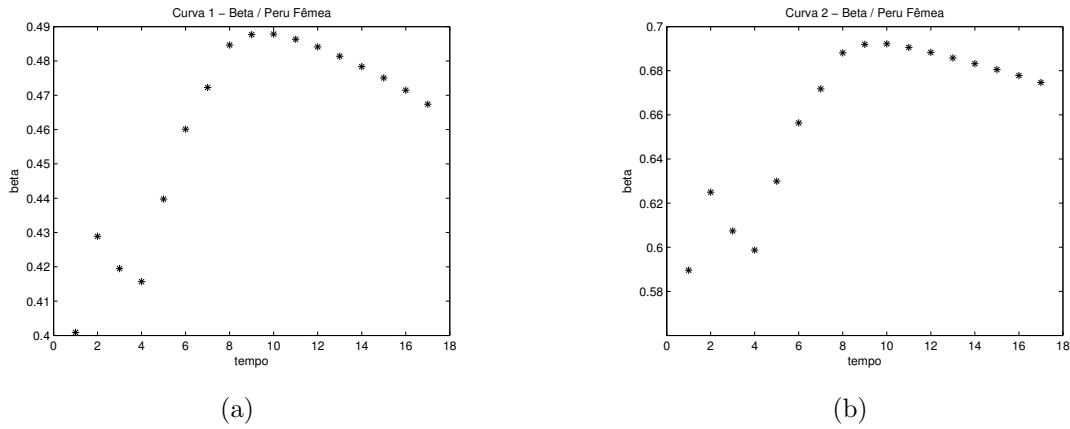


Figura 3.33: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de peru fêmea utilizando os parâmetros seguintes: (a) Curva 1: $p_{\infty} = 14.5363$ kg, $\gamma = 0.7714$ (dados referentes à simulação 1); (b) Curva 2: $p_{\infty} = 13.2785$ kg, $\gamma = 0.8188$ (dados referentes à simulação 2)

A Figura 3.34 mostra a comparação entre a curva de crescimento de peru macho e peru fêmea. Podemos observar que o ponto de inflexão referente ao peru macho ($p_* \cong 8.805$ kg) é maior que o da fêmea ($p_* \cong 6.732$ kg), além da grande diferença em relação à capacidade suporte estimada para ambos, o que já era esperado pela

singularidade das características entre macho e fêmea desta espécie.

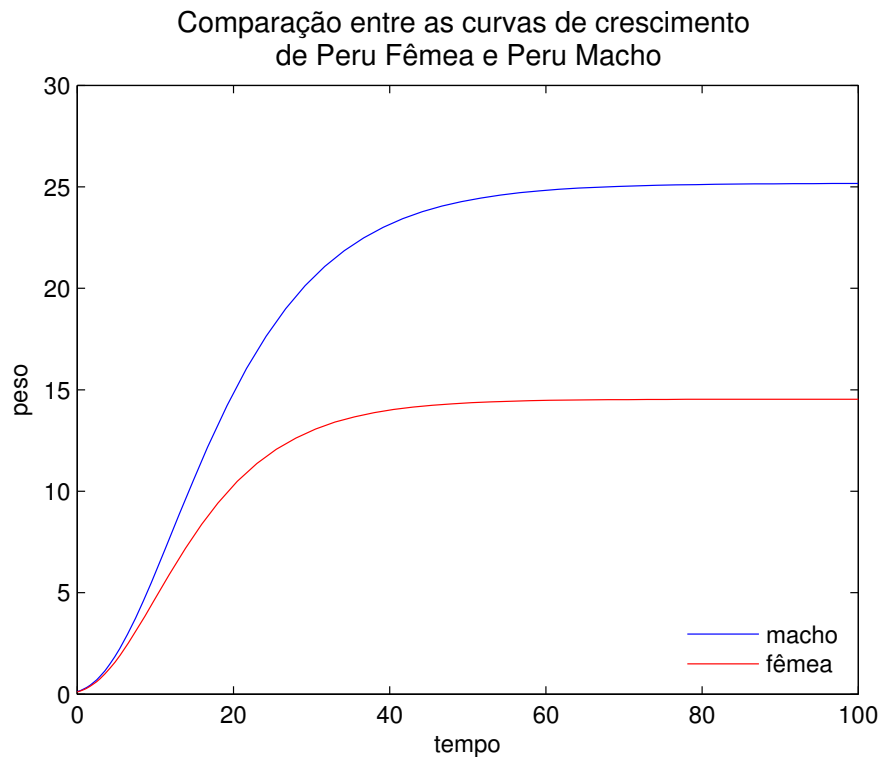


Figura 3.34: Comparação entre as curvas de crescimento de peru macho e peru fêmea utilizando os parâmetros provenientes da Simulação 1 para ambos.

3.3.2 Frango

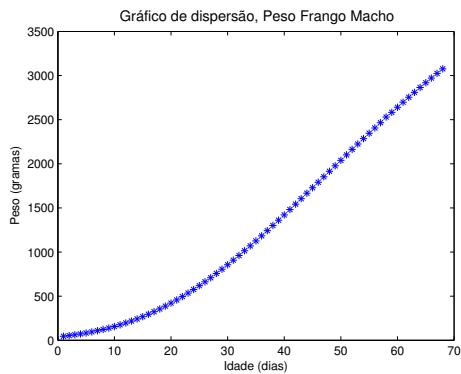
Para estimar os parâmetros correspondentes ao frango, utilizamos o dados experimentais de crescimento em peso da Embrapa - CNPSA, Concórdia, SC. As rações ministradas eram isoproteicas e forneciam na fase de crescimento (1 a 28 dias) 2.97 kcal/kg de energia metabolizável (EM) e 22,8% de proteína bruta (PB) e 3.050 kcal/kg de EM e 19,8 % de PB na terminação. A alimentação e água eram fornecidas à vontade [7]. Os pares de idade-peso podem ser observados na Tabela 3.21 e os respectivos gráficos de dispersão na Figura 3.35.

Tabela 3.21: Dados de crescimento em peso de **frangos**

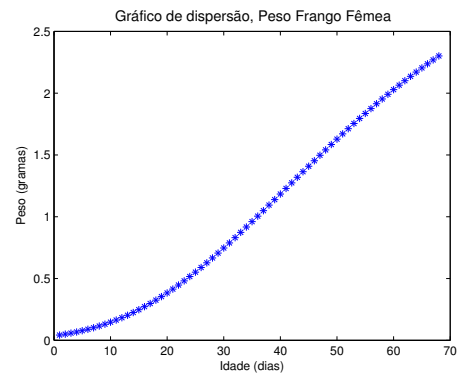
Idade (em dias)	Peso do Macho (em gramas)	Peso da Fêmea (em gramas)
1	45.8	42.6
2	45.8	42.6
2	53.5	49.9
3	62.1	58.2
4	71.9	67.3
5	82.7	77.6
6	94.8	88.9
7	108.1	101.4
8	122.7	115.0
9	138.8	130.0
10	156.3	146.2
11	175.3	163.7
12	195.9	182.6
13	218.1	202.8
14	242.0	224.5
15	267.6	247.5
16	294.8	271.9
17	323.9	297.8
18	354.7	325.0
19	387.2	353.6
20	421.5	383.5
21	457.6	414.7
22	495.4	447.2
23	534.9	480.9
24	576.0	515.8
25	618.9	551.9
26	663.4	589.0
27	709.4	627.1
28	756.9	666.2
29	805.9	706.1
30	856.3	746.9
31	908.0	788.4
32	960.9	830.6
33	1015.1	873.4
34	1070.3	916.8
35	1126.6	960.6
36	1183.9	1004.8
37	1242.0	1049.3
38	1300.9	1094.3
39	1360.5	1139.0
40	1420.7	1184.0
41	1481.4	1229.2
42	1542.7	1274.2

Idade (em dias)	Peso do Macho (em gramas)	Peso da Fêmea (em gramas)
43	1604.3	1319.3
44	1666.2	1364.2
45	1728.3	1408.9
46	1790.6	1453.4
47	1852.9	1497.6
48	1915.3	1541.4
49	1977.6	1584.9
50	2039.7	1628.0
51	2101.7	1670.6
52	2163.4	1712.8
53	2224.7	1754.4
54	2285.7	1795.4
55	2346.3	1835.9
56	2406.4	1875.8
57	2465.9	1915.0
58	2529.9	1953.6
59	2583.3	1991.6
60	2641.0	2028.8
61	2698.1	2065.4
62	2754.4	2101.2
63	2810.0	2136.4
64	2864.8	2170.8
65	2918.9	2204.5
66	2972.1	2237.5
67	3024.4	2269.7
68	3075.9	2301.3

Fonte: EMBRAPA - CNPSA, Concórdia, SC [7].



(a)



(b)

Figura 3.35: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para Frango Macho (a) e Frango Fêmea (b)

Frango Macho

O valor do peso máximo p_{∞} estimado para frango macho, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 10 dados de peso da Tabela 3.19 ($p_* = 2529.9$ g), foi de $p_{\infty} = 8.8872$ Kg, bem próximo a $p_{\infty} = 8.926,97$ Kg estimado por Leite [7].

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. O parâmetro γ , fixo na Simulação 2, foi obtido por Leite [7]. O valor do peso foi dividido por 1000 para trabalharmos com a unidade kg nos ajustes. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.36.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 8.8872$ kg, $\alpha = 0.6338$, $\beta = 0.2778$, $\gamma = 0.9054$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.0750$, $\gamma = 0.7661$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.1250$.

Simulação 2:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 8.8872$ kg, $\alpha = 0.6338$, $\beta = 0.2778$, $\gamma = 0.59046$ (fixo). Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.0324$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.0793$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.6338$, $\beta = 0.2778$, $\gamma = 0.9054$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.4939$, $\beta = 0.4415$, $\gamma = 0.9362$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 5.8003$ kg.

Simulação 4:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.6338$, $\beta = 0.2778$, $\gamma = 0.93046$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.4123$, $\beta = 0.3601$, $\gamma = 0.9239$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 5.9230$ kg.

A simulação 2 não resultou em bom ajuste, como podemos observar graficamente pela Figura 3.36. As simulações 3, 4 e 1 apresentaram boa aproximação entre os dados fornecidos e o ajuste, respectivamente nesta ordem. Notemos que a capacidade suporte, quando não é mantida fixa, tende a ser menor que o valor estimado anteriormente por Ford-Walford. Do ponto de vista biológica os parâmetros obtidos a partir da simulação 1 são mais coerentes, devido ao valor de β , bem mais baixo que os obtidos nas simulações 3 e 4. Outra observação relevante é o fato de que o

valor do parâmetro γ tende a ser maior quando a capacidade suporte não é fixada.

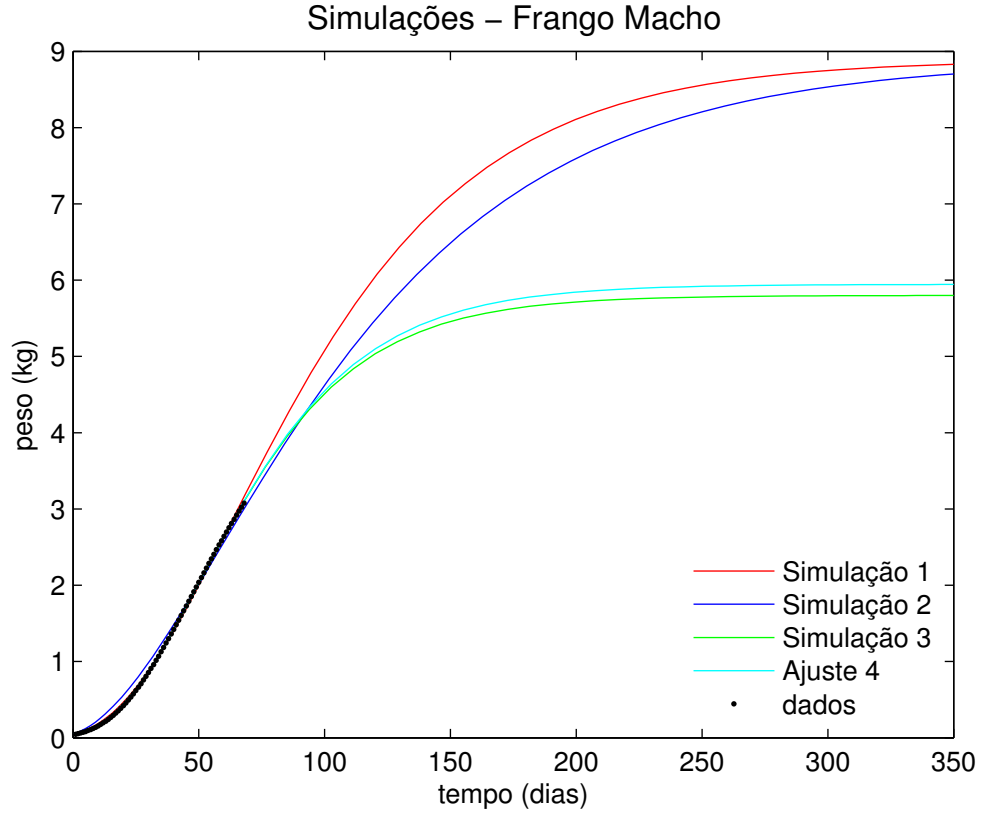


Figura 3.36: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de frango macho (Tabela 3.19)

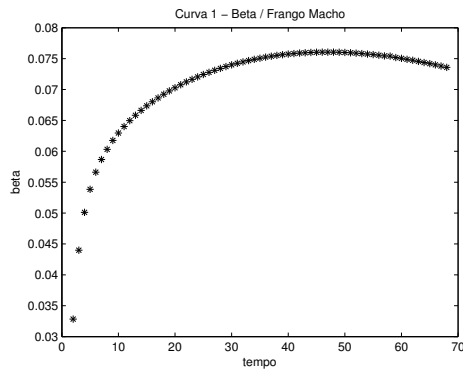
Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ obtidos a partir das simulações 1 e 4, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ de frango macho correspondentes (veja Tabela 3.20). Os diagramas de dispersão para $\beta(t)$ podem ser observados na Figura 3.37.

Tabela 3.22: Tabela para a função $\beta(t)$ - Frango Macho

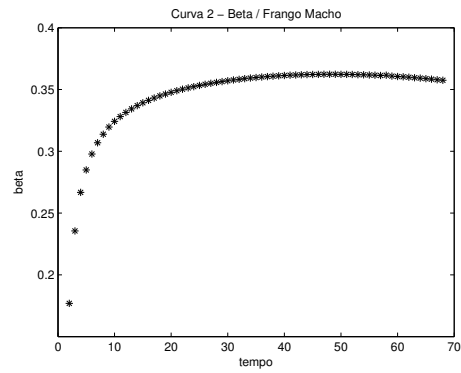
Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
1	0.0328	0.1769
2	0.0440	0.2355
3	0.0501	0.2667
4	0.0538	0.2849
5	0.0566	0.2978
6	0.0587	0.3069
7	0.0603	0.3138
8	0.0618	0.3196
9	0.0630	0.3243
10	0.0640	0.3281
11	0.0650	0.3315
12	0.0658	0.3344
13	0.0666	0.3370
14	0.0674	0.3393
15	0.0680	0.3412
16	0.0686	0.3431
17	0.0692	0.3448
18	0.0698	0.3463
19	0.0703	0.3477
20	0.0708	0.3490
21	0.0712	0.3502
22	0.0717	0.3513
23	0.0720	0.3523
24	0.0724	0.3533
25	0.0728	0.3542
26	0.0731	0.3550
27	0.0734	0.3558
28	0.0737	0.3565
29	0.0740	0.3571
30	0.0742	0.3577
31	0.0745	0.3583
32	0.0747	0.3588
33	0.0749	0.3593
34	0.0751	0.3597
35	0.0752	0.3601
36	0.0754	0.3605
37	0.0755	0.3608
38	0.0756	0.3611
39	0.0757	0.3614
40	0.0758	0.3616
41	0.0759	0.3618
42	0.0760	0.3619

Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
43	0.0760	0.3621
44	0.0760	0.3622
45	0.0761	0.3623
46	0.0761	0.3623
47	0.0760	0.3623
48	0.0760	0.3623
49	0.0760	0.3623
50	0.0760	0.3622
51	0.0759	0.3622
52	0.0758	0.3620
53	0.0757	0.3619
54	0.0757	0.3618
55	0.0756	0.3616
56	0.0754	0.3613
57	0.0754	0.3616
58	0.0752	0.3609
59	0.0750	0.3606
60	0.0749	0.3603
61	0.0747	0.3599
62	0.0746	0.3596
63	0.0744	0.3592
64	0.0742	0.3588
65	0.0740	0.3584
66	0.0738	0.3579
67	0.0736	0.3575

Fonte: Simulação dos dados.



(a)



(b)

Figura 3.37: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de frango macho utilizando os parâmetros seguintes: (a) Curva 1: $p_{\infty} = 8.8872$ kg, $\gamma = 0.7661$ (dados referentes à simulação 1); (b) Curva 2: $p_{\infty} = 5.8003$ kg, $\gamma = 0.9239$ (dados referentes à simulação 4).

Frango Fêmea

O valor do peso máximo p_∞ estimado para frango fêmea, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 8 dados de peso da Tabela 3.19 ($p_* \cong 2.0288$ kg), foi de $p_\infty = 3.7855$ kg, bem próximo ao valor estimado por Leite, $p_\infty = 3.776$ kg [7].

Seguem abaixo os parâmetros utilizados nas simulações. Tomamos, nas simulações 2 e 3, como valor de partida para α , β os valores obtidos por Leite: $\alpha = 0.8465$; $\beta = 0.0975$; $\gamma = 0.7376$ [7]. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.38.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_\infty = 3.7855$ kg, $\alpha = 0.6916$, $\beta = 0.3225$, $\gamma = 0.9075$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.4308$, $\gamma = 0.9287$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.4737$.

Simulação 2:

Parâmetros iniciais: $p_\infty = 3.7855$ kg, $\alpha = 0.8465$, $\beta = 0.0975$, $\gamma = 0.73766$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.4308$, $\gamma = 0.9287$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.4737$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.8465$, $\beta = 0.0975$, $\gamma = 0.7376$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.4899$, $\beta = 0.4471$, $\gamma = 0.9304$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_\infty = 3.7191$ kg.

Simulação 4:

Parâmetros de partida: $p_\infty = 3.7855$ kg, $\alpha = 0.6916$, $\beta = 0.3225$, $\gamma = 0.7376$ (fixo). Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.0941$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.1335$.

A Simulação 4 não resultou em bom ajuste, como podemos observar graficamente pela Figura 3.38. As simulações 1, 2 e 3 apresentaram boa aproximação entre os dados fornecidos e o ajuste, havendo sobreposição entre as curvas das duas primeiras devido à proximidade dos parâmetros ajustados. Notemos que a capacidade suporte estimada através dos parâmetros da simulação 3 ficou bem próxima da obtida anteriormente por Ford-Walford. Outra observação relevante é o fato de que o valor do parâmetro γ tende a ser maior que o valor estimado por Leite. Quando mantido

fixo (simulação 4) resultou na pior aproximação entre os dados fornecidos e a curva de ajuste, porém o valor estimado para β é significativamente menor que nos outros casos.

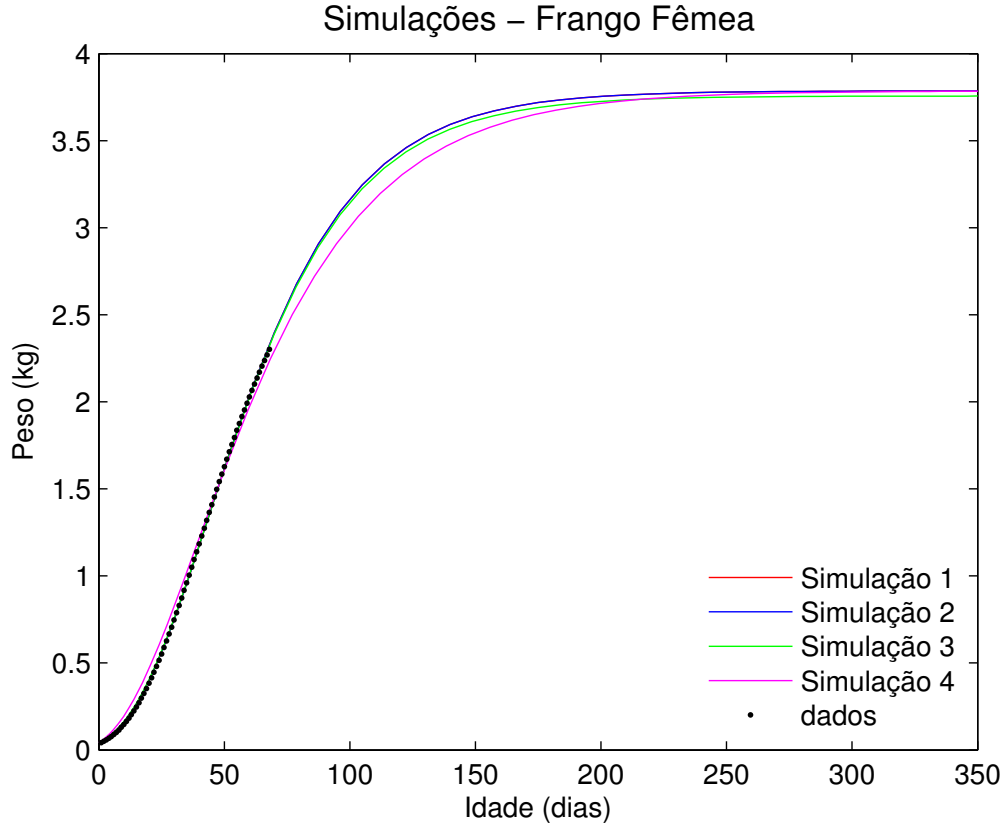


Figura 3.38: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de frango fêmea (Tabela 3.19)

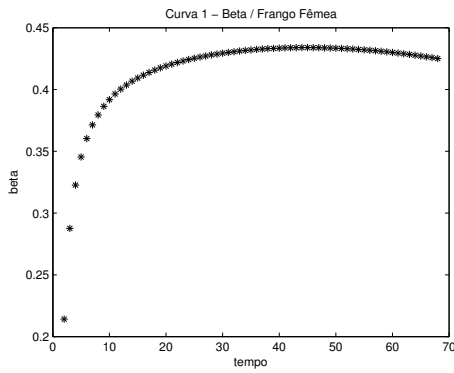
Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ obtidos a partir das simulações 2 e 3, calculamos uma Tabela para os $\beta(t)$ de frango fêmea correspondentes (veja Tabela 3.21). Os diagramas de dispersão para $\beta(t)$ podem ser observados na Figura 3.39.

Tabela 3.23: Tabela para a função $\beta(t)$ - Frango Fêmea

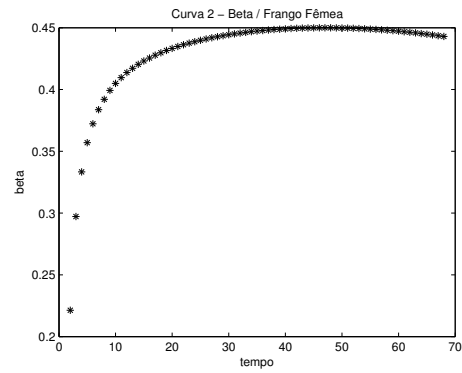
Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
1	0.2142	0.2213
2	0.2876	0.2972
3	0.3226	0.3334
4	0.3454	0.3570
5	0.3603	0.3723
6	0.3713	0.3837
7	0.3794	0.3921
8	0.3864	0.3993
9	0.3918	0.4049
10	0.3964	0.4096
11	0.4003	0.4137
12	0.4036	0.4172
13	0.4067	0.4204
14	0.4093	0.4231
15	0.4116	0.4255
16	0.4138	0.4278
17	0.4158	0.4298
18	0.4175	0.4316
19	0.4191	0.4333
20	0.4205	0.4348
21	0.4219	0.4362
22	0.4231	0.4375
23	0.4242	0.4387
24	0.4253	0.4399
25	0.4263	0.4409
26	0.4272	0.4419
27	0.4280	0.4428
28	0.4287	0.4436
29	0.4294	0.4443
30	0.4300	0.4450
31	0.4306	0.4457
32	0.4311	0.4463
33	0.4316	0.4468
34	0.4320	0.4473
35	0.4324	0.4478
36	0.4328	0.4482
37	0.4331	0.4486
38	0.4333	0.4488
39	0.4335	0.4491
40	0.4337	0.4493
41	0.4338	0.4495
42	0.4339	0.4497

Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
43	0.4339	0.4498
44	0.4339	0.4499
45	0.4339	0.4500
46	0.4338	0.4500
47	0.4337	0.4499
48	0.4336	0.4499
49	0.4334	0.4498
50	0.4332	0.4497
51	0.4330	0.4496
52	0.4328	0.4494
53	0.4325	0.4492
54	0.4321	0.4489
55	0.4318	0.4486
56	0.4314	0.4483
57	0.4310	0.4480
58	0.4305	0.4476
59	0.4300	0.4472
60	0.4295	0.4468
61	0.4290	0.4463
62	0.4284	0.4458
63	0.4278	0.4453
64	0.4272	0.4448
65	0.4265	0.4442
66	0.4258	0.4436
67	0.4251	0.4429

Fonte: Simulação dos dados.



(a)



(b)

Figura 3.39: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de frango fêmea utilizando os parâmetros seguintes: (a) Curva 1: $p_{\infty} = 3.7855$ kg, $\gamma = 0.9287$ (dados referentes à simulação 2); (b) Curva 2: $p_{\infty} = 3.7191$ kg, $\gamma = 0.9304$ (dados referentes à simulação 3).

A Figura 3.40 mostra a comparação entre as curvas de crescimento referentes à frango macho e frango fêmea. Claramente podemos notar que o frango macho cresce muito mais que a fêmea, atingindo quase o dobro da capacidade suporte ($p_{\infty} = 8.8872$ kg para machos, ao passo que $p_{\infty} = 3.7855$ kg para fêmeas). Já o ponto de inflexão não difere tanto, sendo $p_* = 2.529$ kg para machos e $p_* = 2.088$ kg para fêmeas.

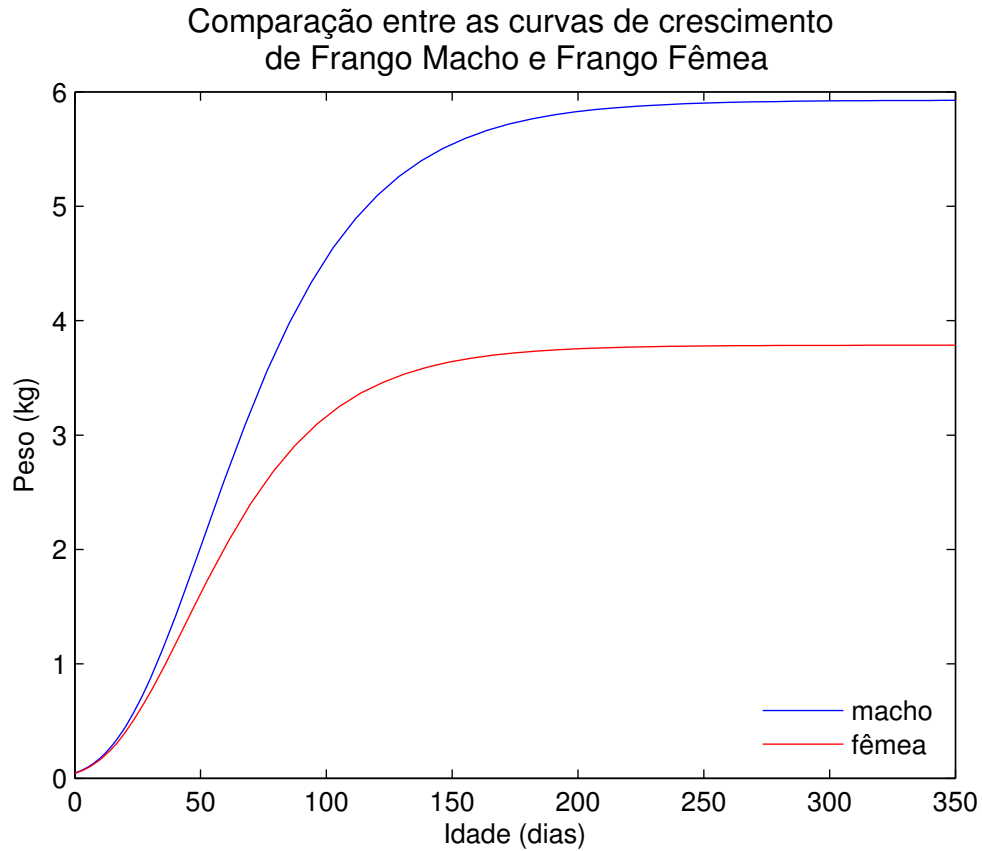


Figura 3.40: Comparação entre as curvas de crescimento de Frango Macho e Frango Fêmea utilizando os parâmetros referentes à Simulação 4 para Frango Macho e Simulação 2 para Frango Fêmea.

3.4 Anfíbios

3.4.1 Rã

Os parâmetros para rã foram obtidos a partir de dados experimentais de idade-peso de Rã-Touro na fase de recria (Tabela 3.22). Foram utilizadas 300 rãs-touro (*Rana catesbeiana*) com peso médio de 10.05 ± 1.6 g com oito dias após a metamorfose, distribuídas em 20 mini-baias. Os animais foram alimentados com quatro rações experimentais peletizadas contendo dois níveis de energia metabolizável (2850 e 3050 kcal/kg) e duas relações energia: proteína (60 e 70 kcal/100 g PB). Durante 294 dias foram feitas pesagens das rãs em intervalos de 14 dias [10]. A dispersão dos dados ao longo do tempo pode ser observada na Figura 3.41.

O valor do peso máximo p_{∞} estimado para rãs, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 17 dados de peso da Tabela 3.22 ($p_* \cong 83.22$ g), foi de $p_{\infty} = 429.7393$ g, enquanto que para os últimos 18 dados obtivemos $p_{\infty} = 436.3470$ g, valor mais próximo de $p_{\infty} = 444.66$ g estimado por Rodrigues [10].

Tabela 3.24: Dados de crescimento em peso de **rãs**

Idade (em dias)	Peso (em gramas)
0	10.6
14	17.82
28	33.64
42	56.04
56	83.22
70	114.13
84	142.69
98	170.26
112	191.66
126	213.05
140	224.08
154	230.81
168	237.54
182	246.45
196	255.84
210	269.67
224	277.43

Idade (em dias)	Peso (em gramas)
238	291.19
252	300.02
286	318.11
280	326.99
294	348.39

Fonte: Rodrigues [10].

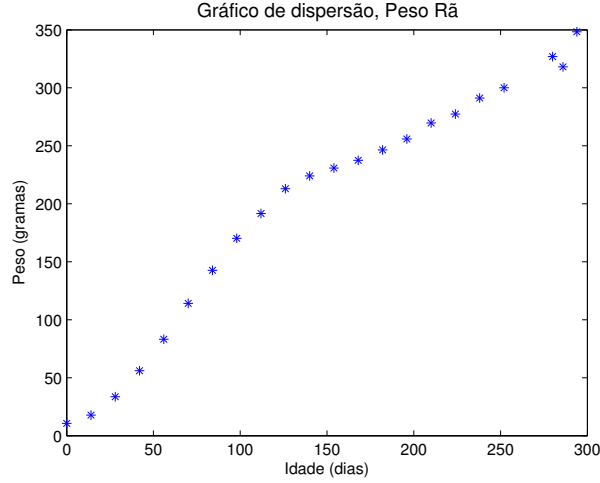


Figura 3.41: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para rãs.

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. Em alguns casos, utilizamos como valor de partida os parâmetros obtidos por Rodrigues: $\alpha = 0.0122$; $\beta = 0.0016$ e $\gamma = 2/3$ [10]. As respectivas curvas podem ser vistas na Figura 3.42.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 429.7393$ g, $\alpha = 0.2264$, $\beta = 0.0764$, $\gamma = 0.8063$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.0073$, $\gamma = 0.2249$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.8023$.

Simulação 2:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 436.3470$ g, $\alpha = 0.0122$, $\beta = 0.0016$, $\gamma = 2/3$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.0068$, $\gamma = 0.2060$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.8463$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.0122$, $\beta = 0.0016$, $\gamma = 2/3$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.3524$, $\beta = 0.0177$, $\gamma = 0.4933$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 366.2442$ g.

Simulação 4:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 444.66$ g, $\alpha = 0.0122$, $\beta = 0.0016$, $\gamma = 2/3$ (fixo). Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.0235$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 0.1793$.

Observando as simulações, notamos que o parâmetro de alometria γ tende a ser menor que o valor $2/3$ utilizado por Rodrigues. Na simulação 4, onde mantivemos este valor fixo e utilizamos a capacidade suporte estimada por Rodrigues, os parâmetros α e β encontrados pelo ajuste superaram os do autor. As curvas 1 e 2 estão praticamente sobrepostas, devido à proximidade entre o valor dos parâmetros ajustados.

Vale ressaltar que a capacidade suporte obtida a partir da simulação 3 é a que mais se aproxima do peso máximo real observado em rãs-touro, $p_{\infty} = 348.39$ g [10].

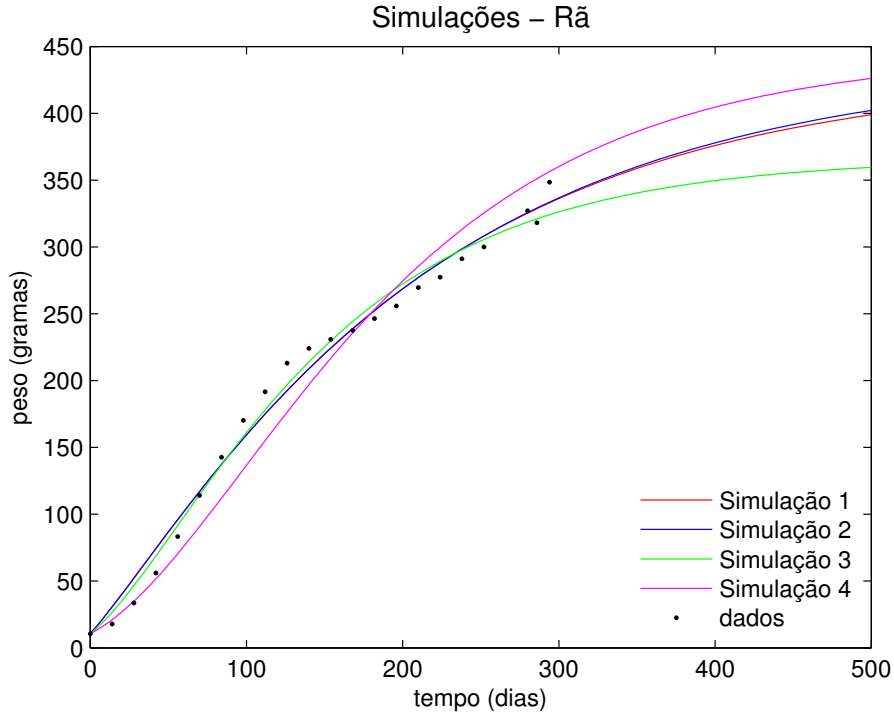


Figura 3.42: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de rãs-touro (Tabela 3.22).

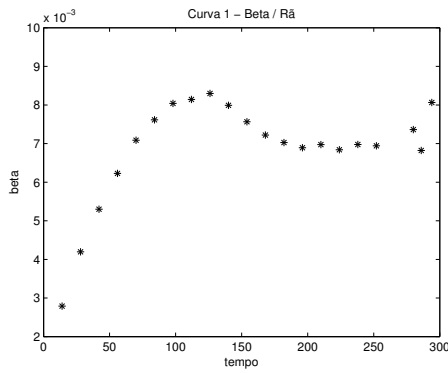
Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_{∞} e γ obtidos conforme a partir das simulações 1 e 3, calculamos uma tabela para

os $\beta(t)$ correspondentes (veja Tabela 3.23). A curva de tendência para $\beta(t)$ pode ser observada na Figura 3.43.

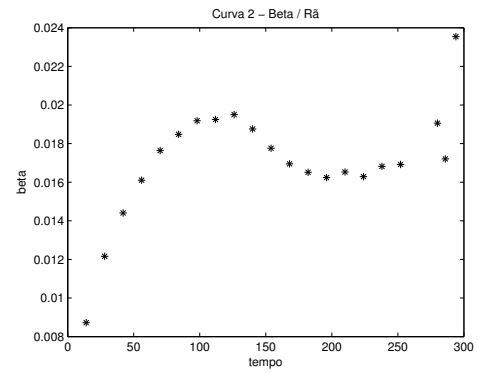
Tabela 3.25: Tabela para a função $\beta(t)$ - Rã

Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2
1	0.0028	0.0087
2	0.0042	0.0122
3	0.0053	0.0144
4	0.0062	0.0161
5	0.0071	0.0176
6	0.0076	0.0185
7	0.0080	0.0192
8	0.0081	0.0192
9	0.0083	0.0195
10	0.0080	0.0188
11	0.0076	0.0178
12	0.0072	0.0170
13	0.0070	0.0165
14	0.0069	0.0162
15	0.0070	0.0165
16	0.0068	0.0163
17	0.0070	0.0168
18	0.0069	0.0169
19	0.0068	0.0172
20	0.0074	0.0191
21	0.0081	0.0235

Fonte: Simulação dos dados.



(a)



(b)

Figura 3.43: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de rãs, utilizando os parâmetros seguintes: (a) Curva 1: $p_{\infty} = 429.7393$ g, $\gamma = 0.2249$ (dados referentes à simulação 1); (b) Curva 2: $p_{\infty} = 366.2442$ g, $\gamma = 0.4933$ (dados referentes à simulação 3).

3.5 Peixes

3.5.1 Tilápia

A "tilápia do Nilo" é um peixe originário da Costa do Marfim e foi introduzido no Brasil em 1971, no Nordeste pelo DNOGS.

Os machos crescem muito mais rapidamente que as fêmeas. A Tabela 3.26 fornece os dados experimentais obtidos com machos albinos de tilápia do Nilo pelo Centro de Pesquisas Ictiológicas de Pentecostes (CE) [5]. A dispersão dos dados ao longo do tempo pode ser observada na Figura 3.44.

O valor do peso máximo p_{∞} estimado para tilápias, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 4 dados de peso da Tabela 3.26 (a inflexão ocorre entre a idade de 4 e 5 meses, $p_* \cong 239.5$ g), foi de $p_{\infty} = 513.89$ g, enquanto que para os últimos 5 dados obtivemos $p_{\infty} = 639.95$ g.

Tabela 3.26: Dados de crescimento em peso de **tilápias**

Idade (em meses)	Peso (em gramas)
0	26
1	59.5
2	105.4
3	200
4	239.5
5	364.3
6	421.7
7	476
8	488.2

Fonte: Bassanezi e Ferreira [5].

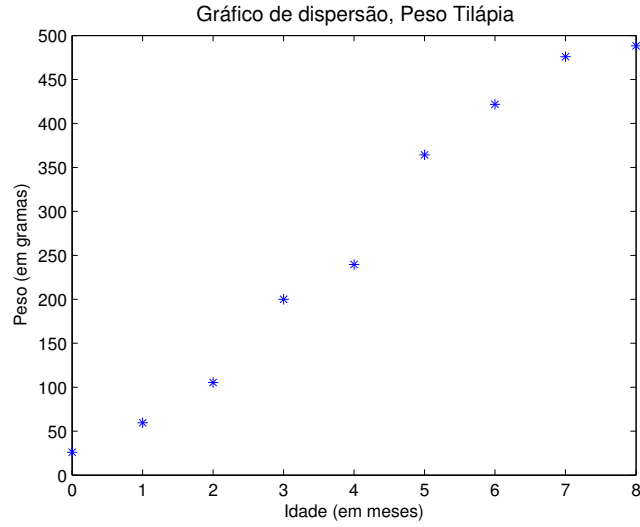


Figura 3.44: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para tilápias.

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. Utilizamos $\gamma = 2/3$, parâmetro de alometria estimado por von Bertalanffy. O ajuste com γ livre e sem fixar p_∞ resultou numa curva exponencial, superestimando a capacidade suporte e não está incluída nas simulações abaixo. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.45.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $p_\infty = 513.89$ g, $\alpha = 0.1909$, $\beta = 0.1731$, $\gamma = 2/3$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 1$, $\gamma = 0.6730$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 7.6994$.

Simulação 2:

Parâmetros iniciais: $p_\infty = 513.89$ g, $\alpha = 0.1909$, $\beta = 0.99$, $\gamma = 2/3$ (fixo). Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.9847$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 7.8856$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $p_\infty = 513.89$ g, $\alpha = 0.1909$, $\beta = 0.99$, $\gamma = 2/3$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 1$, $\gamma = 0.6730$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 7.6994$.

Simulação 4:

Parâmetros de partida: $p_\infty = 639.95$ g, $\alpha = 0.1909$, $\beta = 0.99$, $\gamma = 2/3$ (fixo). Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.7585$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 6.5350$.

Simulação 5:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 639.95$ g, $\alpha = 0.1909$, $\beta = 0.99$, $\gamma = 2/3$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.7585$, $\gamma = 0.7339$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 8.6157$.

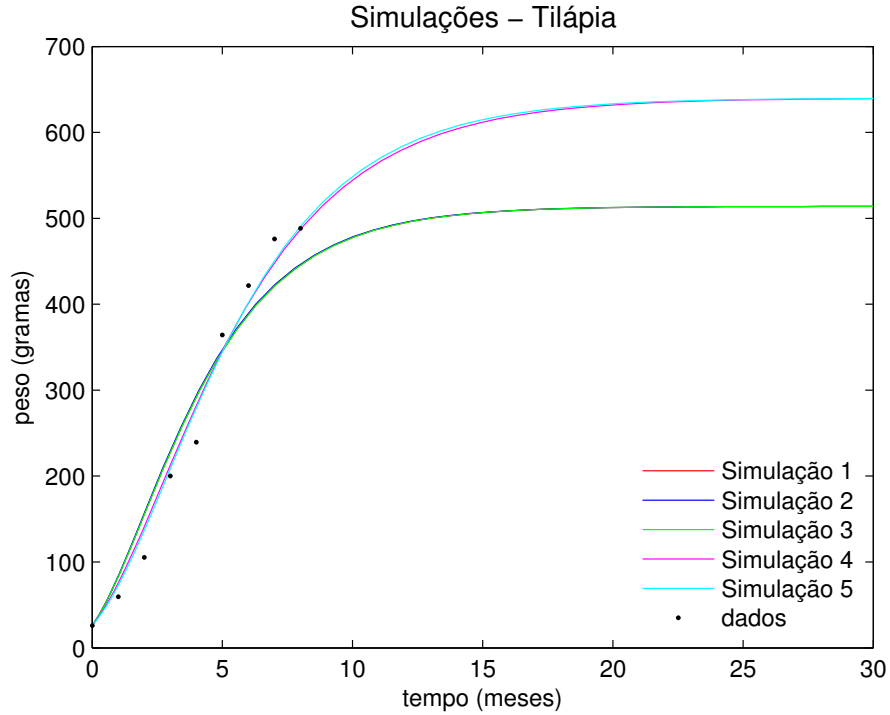


Figura 3.45: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de tilápias (Tabela 3.24).

Notemos que nas simulações onde não foi fixado o valor de $\gamma = 2/3$, o programa estimou valores equivalentes para este parâmetro. Por sua vez, o valor parâmetro α apresentou um valor alto. As simulações 4 e 5 que utilizam $p_{\infty} = 639.95$ g apresentaram menor diferença entre os dados fornecidos e a curva ajustada. Analisando os parâmetros obtidos nestas duas últimas simulações notamos que quando o parâmetro γ foi mantido fixo (Simulação 4), os demais parâmetros apresentam valores mais condizentes do ponto de vista biológico.

Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_{∞} e γ obtidos a partir das simulações 2, 4 e 5, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ correspondentes (veja Tabela 3.27). A curva de tendência para $\beta(t)$ pode ser vista

na Figura 3.46.

Tabela 3.27: Tabela para a função $\beta(t)$ - Tilápia

Idade (em dias)	β - Curva 1	β - Curva 2	β - Curva 3
1	0.6193	0.7605	0.5463
2	0.6437	0.7679	0.5597
3	0.8479	0.9618	0.7139
4	0.7734	0.8580	0.6405
5	1.0564	1.0641	0.8061
6	1.1453	1.0632	0.8103
7	1.3795	1.0870	0.8330
8	1.3559	0.9915	0.7609

Fonte: Simulação dos dados.

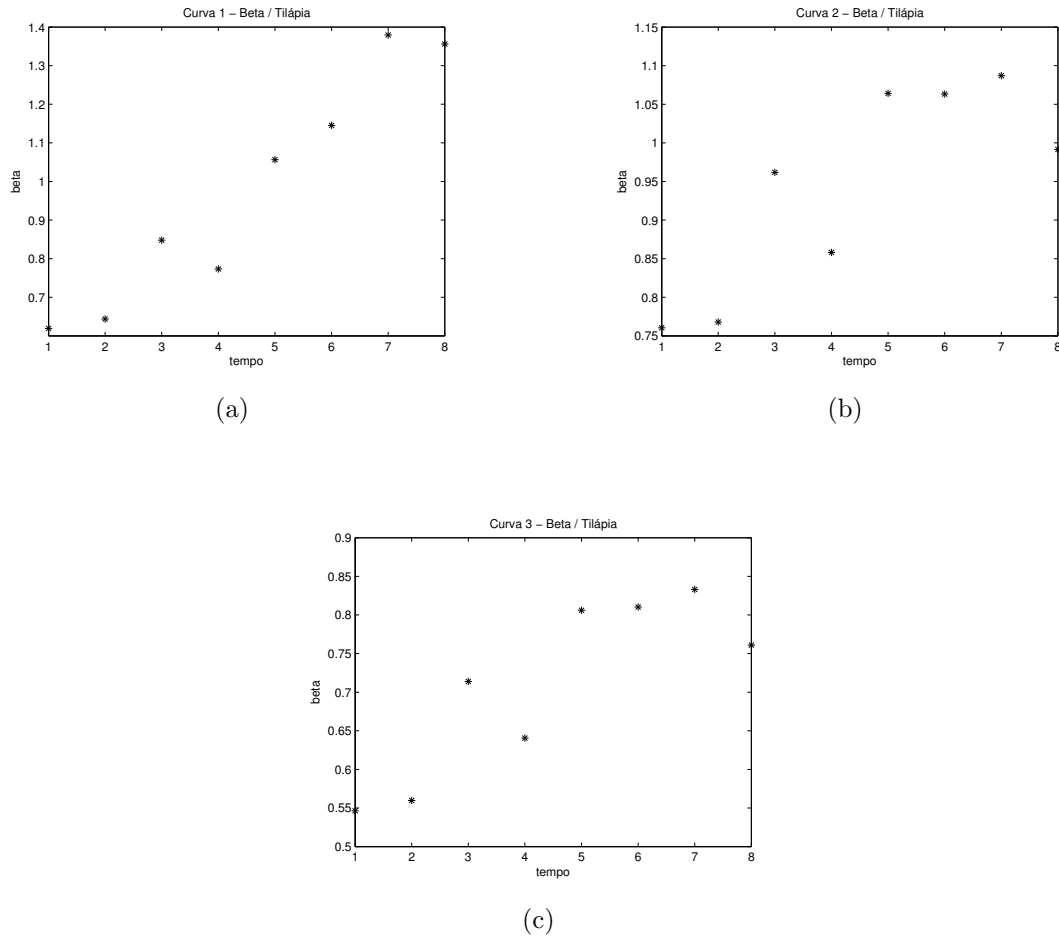


Figura 3.46: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de tilápias, utilizando os parâmetros seguintes: (a) Curva 1: $p_{\infty} = 513.89$ g, $\gamma = 2/3$ (dados referentes à simulação 2); (b) Curva 2: $p_{\infty} = 639.95$ g, $\gamma = 0.7339$ (dados referentes à simulação 5); (c) Curva 3: $p_{\infty} = 639.95$ g, $\gamma = 2/3$ (dados referentes à simulação 4).

3.5.2 Arraia

A Arraia, denominação vulgar do grupo de animais Elasmobrânquios (*Elasmobranchii*), também conhecida por raia, apresentam corpo achatado, nadadeiras peitorais bastante expandidas, cauda alongada e fendas branquiais situadas ventralmente. São animais aquáticos, pertencentes à Classe dos Condríctios e em que o esqueleto é composto por cartilagem e não por ossos como os peixes teleostes.

Para obtenção dos parâmetros relativos a arraias utilizados dados fornecidos pela pesquisadora Maria Lucia Goes de Araújo, da espécie *Potamotrygon motoro* da família *Potamotrygonidae* do Rio Negro-Amazonas, coletadas na região de Barcelos, município do Amazonas.

O valor do peso máximo p_{∞} estimado para arrais, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 3 dados de peso da Tabela 3.28 foi de $p_{\infty} = 37$ kg. A inflexão ocorre, aproximadamente, entre o peso correspondente às idades de 84 e 96 meses. A dispersão dos dados ao longo do tempo pode ser vista na Figura 3.47.

Tabela 3.28: Dados de crescimento em peso de **arraias**

Idade (em anos)	Peso (em kg)
0	0.063
12	1.720
24	3.800
36	5.780
48	7.730
60	9.580
72	11.00
84	12.00
96	14.00
108	15.00
120	17.00

Fonte: Maria Lúcia Góes Araújo.

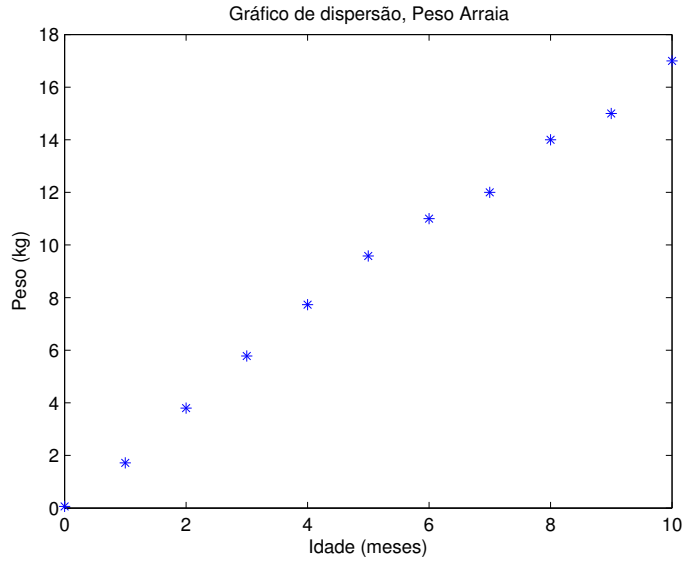


Figura 3.47: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para arraia.

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. Utilizamos, em algumas simulações, $\gamma = 2/3$, parâmetro de alometria estimado por von Bertalanffy para peixes. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.48.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 1.9745$, $\beta = 0.0686$, $\gamma = 0.0722$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 37.3836$ kg.

Simulação 2:

Parâmetros iniciais: $\alpha = 1.9745$, $\beta = 0.0686$, $\gamma = 2/3$ (fixo). Parâmetros após ajuste: $\alpha = 2.3886$, $\beta = 0.9125$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 17.9414$ kg.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 37$ kg, $\alpha = 1.9734$, $\beta = 0.0699$, $\gamma = 0.0749$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.0699$, $\gamma = 0.0749$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 1.9734$.

Simulação 4:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 37$ kg, $\alpha = 1.9745$, $\beta = 0.0686$, $\gamma = 2/3$ (fixo). Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.4460$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 1.4862$.

As simulações 1 e 3 foram as que melhor aproximaram os dados fornecidos e a

curva ajustada. Podemos observar que quando o parâmetro γ não é mantido fixo, tende a ser bem menor que o valor $\gamma = 2/3$ estimado para peixes.

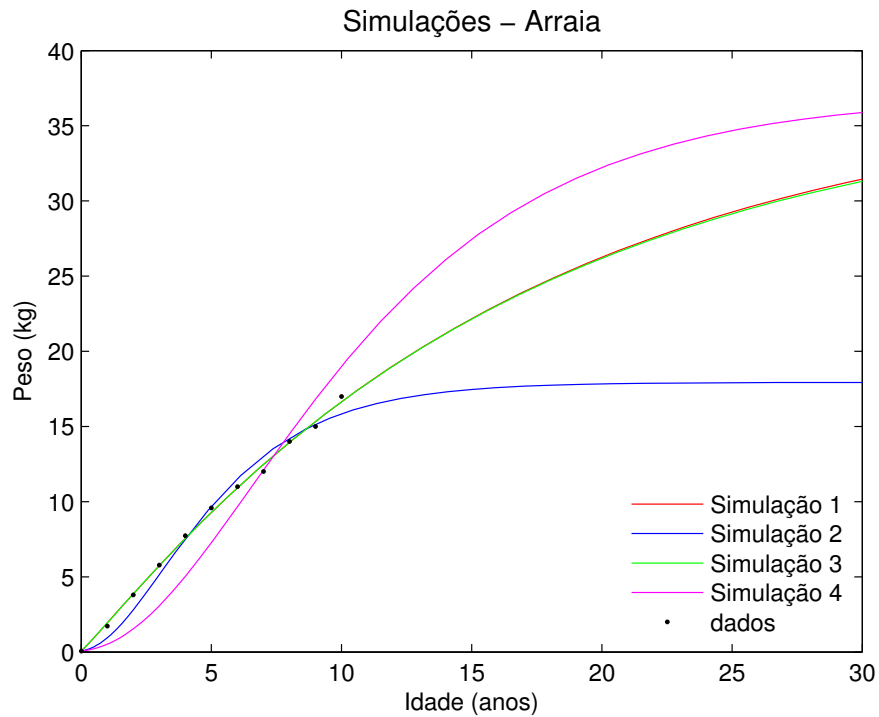


Figura 3.48: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de arraia (Tabela 3.28).

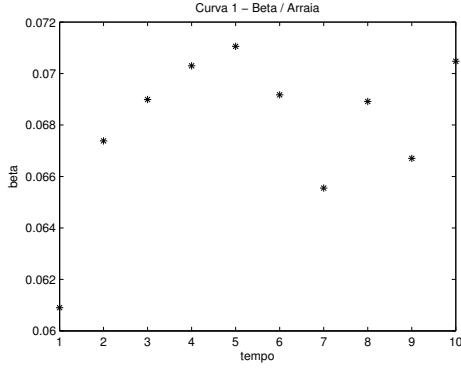
Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ obtidos a partir das simulações 1 e 3, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ correspondentes (veja Tabela 3.29). A curva de tendência para $\beta(t)$ pode ser vista na Figura 3.49.

Tabela 3.29: Tabela para a função $\beta(t)$ - Arraia

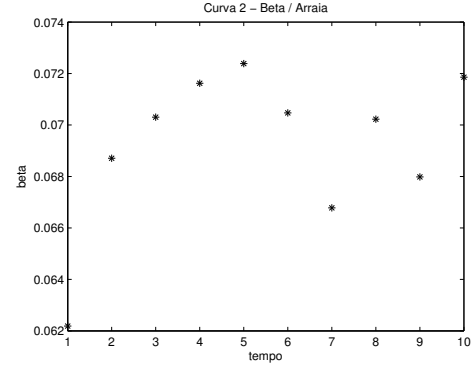
Tempo	β - Curva 1	β - Curva 2
1	0.0609	0.0622
2	0.0674	0.0687
3	0.0690	0.0703
4	0.0703	0.0716
5	0.0711	0.0724
6	0.0692	0.0705
7	0.0655	0.0668

Tempo	β - Curva 1	β - Curva 2
8	0.0689	0.0702
9	0.0667	0.0680
10	0.0705	0.0719

Fonte: Simulação dos dados.



(a)



(b)

Figura 3.49: Diagrama de dispersão de β (t) para o crescimento em peso de arraias, utilizando os parâmetros seguintes: (a) Curva 1: $p_{\infty} = 37.3836$ kg, $\gamma = 0.0722$ (dados referentes à simulação 1); (b) Curva 2: $p_{\infty} = 37$ kg, $\gamma = 0.0749$ (dados referentes à simulação 3).

3.6 Crustáceos

3.6.1 Camarão

Para obtenção dos parâmetros para camarão, utilizamos medidas experimentais de crescimento em peso de camarão branco (*Pennaeus vannamei* Boone) da região Sul do Golfo da Califórnia, extraídos do trabalho de Chavéz sobre a taxa de crescimento deste crustáceo [12].

Os pares de idade-peso podem ser observados na Tabela 3.30 e o respectivo gráfico de dispersão na Figura 3.50.

Tabela 3.30: Dados de crescimento em peso de **camarão**

Idade (em semanas)	Peso (em gramas)
1	0.6
2	2.4
3	5.0
4	8.1
5	11.2
6	14.0
7	16.5
8	18.6
9	20.3
10	21.6
11	22.7
12	23.6

Fonte: Chavéz [12].

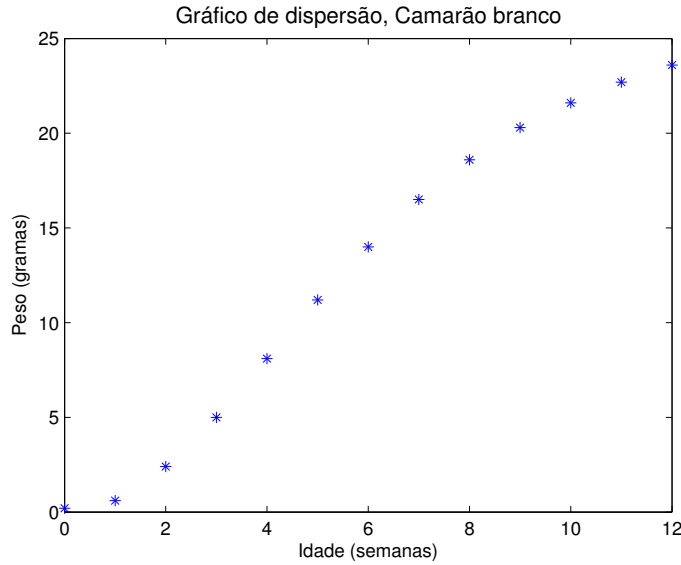


Figura 3.50: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para o camarão branco.

O ponto de inflexão ocorre em dois momentos neste caso: entre o peso correspondente aos tempos de 3-4 ($p_* \cong 5.0$ g). Então, verificaremos as duas possibilidades. O valor do peso máximo p_∞ estimado para camarão, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 9 dados de peso Tabela 3.30 foi de $p_\infty = 30.7260$, enquanto que para os últimos 7 dados obtivemos $p_\infty = 28.1541$ g.

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.51.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 2.2903$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.7499$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_\infty = 27.4786$ g.

Simulação 2:

Parâmetros iniciais: $p_\infty = 28.1541$ g, $\alpha = 2.2903$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.7499$. Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.9509$, $\gamma = 0.7451$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 2.2265$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $p_\infty = 30.7260$ g, $\alpha = 2.2903$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.7499$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 0.5259$, $\gamma = 0.6290$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 1.8739$.

Simulação 4:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 27.4786$ g, $\alpha = 2.2903$, $\beta = 0.01$, $\gamma = 0.75$ (fixo). Parâmetro após ajuste: $\beta = 0.01$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 2.2895$.

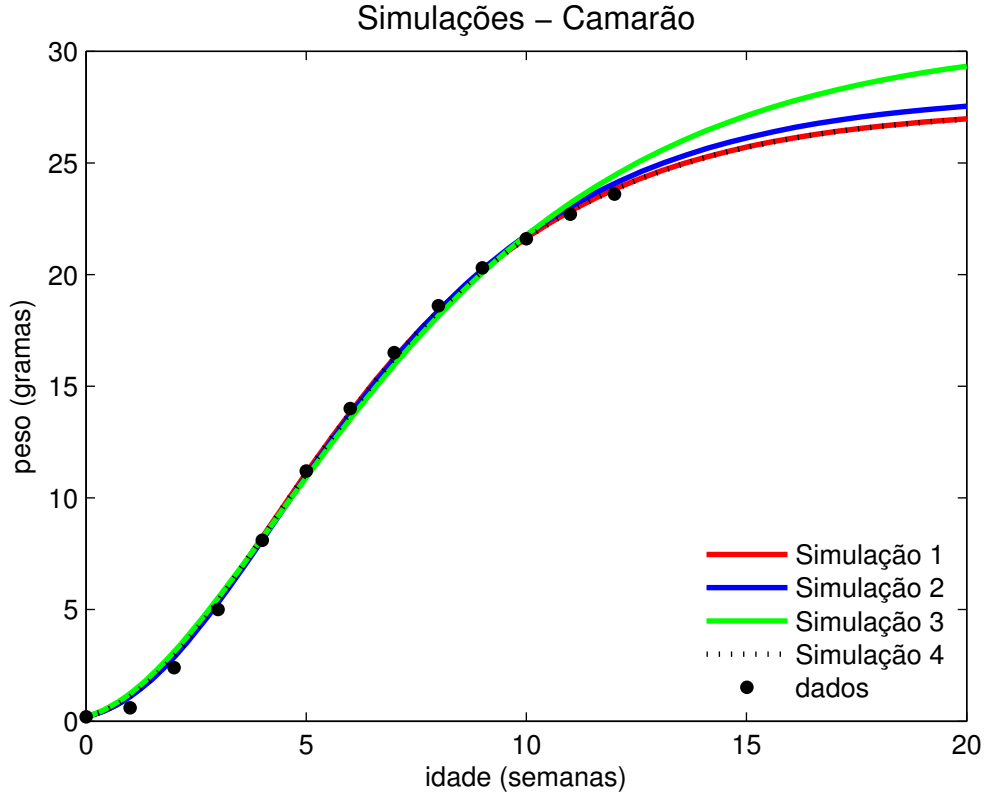


Figura 3.51: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de camarão branco (Tabela 3.30).

As simulações 1, 2 e 4 apresentam boa aproximação entre os dados fornecidos e a curva ajustada pelo programa. Observemos que ocorre sobreposição da curva resultante da simulação 4 sobre a curva resultante da simulação 1 devido à proximidade entre os parâmetros ajustados por cada uma. A simulação 3, apesar de graficamente apresentar bom ajuste para os primeiros dados, distancia-se nos últimos pontos, o que indica que a capacidade suporte deve ser um valor em torno de $p_{\infty} = 27.4786$ g.

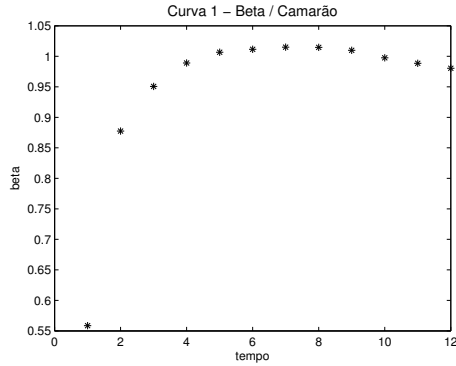
Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores

de p_∞ e γ obtidos a partir das simulações 1 e 2, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ correspondentes (veja Tabela 3.31). Os diagramas de dispersão podem ser observados na Figura 3.52.

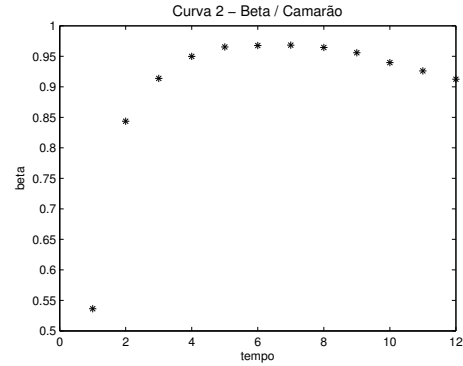
Tabela 3.31: Tabela para a função $\beta(t)$ - Camarão

Idade (em dias)	β (Curva 1)	β (Curva 2)
1	0.5364	0.5586
2	0.8436	0.8775
3	0.9138	0.9506
4	0.9499	0.9890
5	0.9653	1.0068
6	0.9677	1.0115
7	0.9683	1.0150
8	0.9644	1.0146
9	0.9558	1.0098
10	0.9397	0.9975
11	0.9261	0.9886
12	0.9124	0.9804

Fonte: Simulação dos dados.



(a)



(b)

Figura 3.52: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de camarão, utilizando os parâmetros seguintes: (a) Curva1: $p_\infty = 28.1541$ g, $\gamma = 0.7451$ (dados referentes à simulação 2); (b) Curva 2: $p_\infty = 27.4786$ g, $\gamma = 0.7499$ (dados referentes à simulação 1).

3.7 Vermes

3.7.1 Minhoca

Para obtenção dos parâmetros de minhoca, utilizamos dados de uma experiência realizada em uma escola do Ensino Médio em Barra do Bugres, MT. Os pares de idade-peso podem ser observados na Tabela 3.32 e o respectivo gráfico de dispersão na Figura 3.53.

Tabela 3.32: Dados de crescimento em peso de **minhoca**

Idade (em semanas)	Peso (em miligramas)
0	26
1	59.5
2	105.4
3	200.2
4	239.5
5	361.2
6	419.8
7	475.4
8	488.2

Fonte: Barra do Bugres, MT.

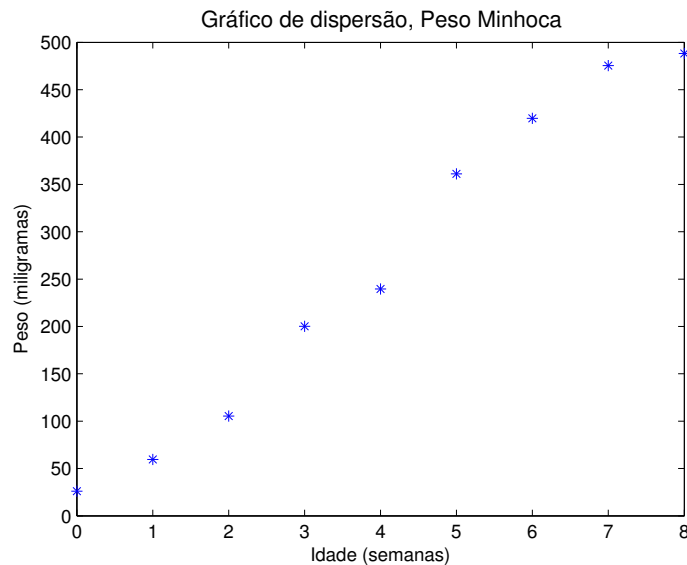


Figura 3.53: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para minhoca.

O valor do peso máximo p_{∞} estimado para minhoca, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 4 dados de peso da Tabela 3.32 ($p_* \cong 239.5$ mg), foi de $p_{\infty} = 517.5259$ mg, enquanto que para os últimos 5 obtivemos $p_{\infty} = 652.0673$ mg.

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. Com a intenção de melhorar os ajustes, o peso foi dividido por 1000 para trabalhar com os pesos na unidade grama. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.54.

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$. Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.1500$, $\beta = 0.1191$, $\gamma = 0.3251$. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 1407.5$ mg.

Simulação 2:

Parâmetros iniciais: $p_{\infty} = 517.5259$ mg, $\alpha = 0.1500$, $\beta = 0.1191$, $\gamma = 0.3251$. Parâmetro após ajuste: $\beta = 1$, $\gamma = 0.6762$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 7.5643$.

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $p_{\infty} = 652.0673$ mg, $\alpha = 0.1500$, $\beta = 0.1191$, $\gamma = 0.3251$. Parâmetros após ajuste: $\beta = 1$, $\gamma = 0.7389$. Substituindo em (2.12), obtemos $\alpha = 5.4301$.

Simulação 4:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.1500$, $\beta = 0.1191$, $\gamma = 0.3251$ (fixo). Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.2223$, $\beta = 0.2139$, $p_{\infty} = 1080.1$ mg. Substituindo em (2.4), obtemos $p_{\infty} = 1080.1$ mg.

Enquanto as Simulações 1 e 4 superestimaram a capacidade suporte, mas obtiveram como resposta valores baixos de γ , as Simulações 2 e 3, com a capacidade suporte fixa, obtiveram como resposta valores mais altos para β e γ . A simulação que melhor aproximou os dados fornecidos da curva de ajuste foi a Simulação 3.

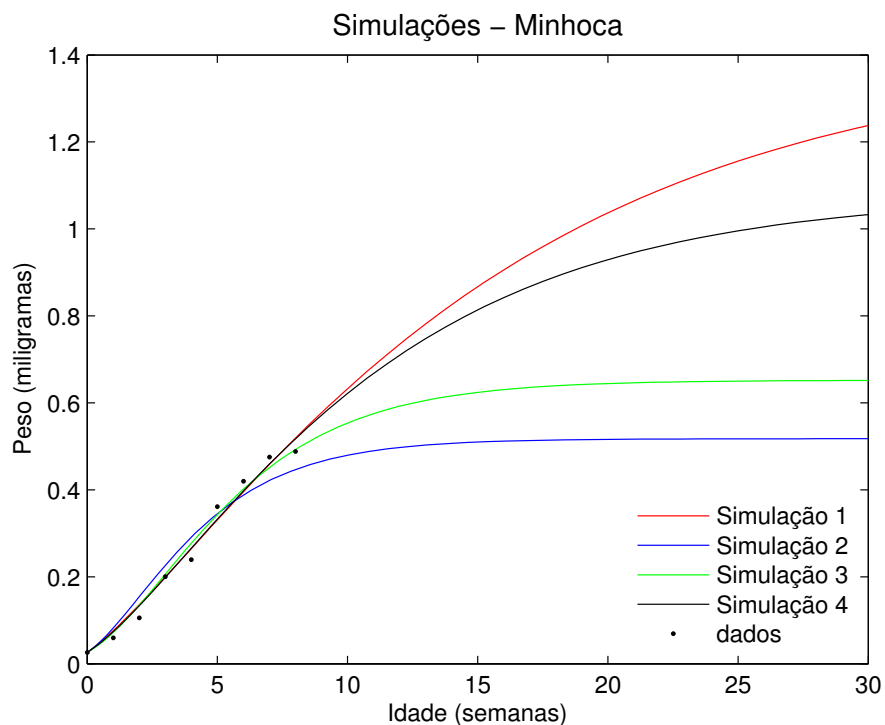


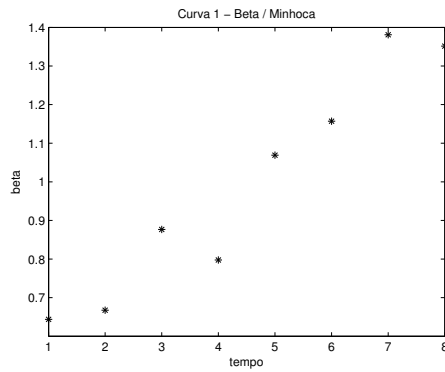
Figura 3.54: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de minhoca (Tabela 3.30).

Considerando a expressão do parâmetro de metabolismo β (2.9) e os valores de p_∞ e γ obtidos a partir das Simulações 2 e 3, calculamos uma tabela para os $\beta(t)$ correspondentes (veja Tabela 3.33). Os diagramas de dispersão podem ser observados na Figura 3.55.

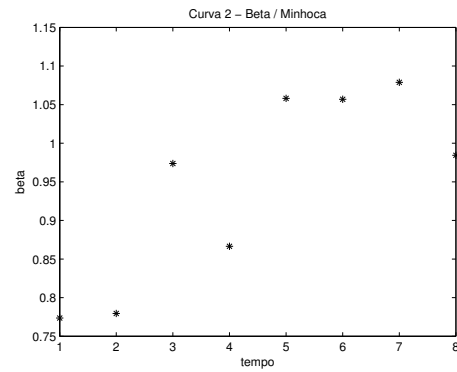
Tabela 3.33: Tabela para a função $\beta(t)$ - Minhoca

Idade (em semanas)	β (Curva 1)	β (Curva 2)
1	0.6438	0.7736
2	0.6674	0.7795
3	0.8766	0.9737
4	0.7976	0.8665
5	1.0689	1.0580
6	1.1570	1.0569
7	1.3810	1.0788
8	1.3516	0.9844

Fonte: Simulação dos dados.



(a)



(b)

Figura 3.55: Diagrama de dispersão de $\beta(t)$ para o crescimento em peso de minhoca, utilizando os parâmetros seguintes: (a) Curva1: $p_{\infty} = 517.5259$ mg, $\gamma = 0.6762$ (dados referentes à simulação 2); (b) Curva 2: $p_{\infty} = 652.0673$ mg, $\gamma = 0.7389$ (dados referentes à simulação 3).

Será que é possível utilizar a equação de von Bertalanffy generalizada para estudar o crescimento em peso de qualquer espécie animal? Apesar da variedade de animais estudados neste trabalho, certamente a resposta a pergunta anterior é não.

A próxima seção ilustra uma situação em que não foi possível utilizar a equação de von Bertalanffy, servindo de contra-exemplo para a aplicação da mesma.

3.8 Insetos

3.8.1 Larva de mosca varejeira

Para tentar aproximar os parâmetros referentes à larva de mosca, utilizamos dados experimentais de idade-peso fornecidos pela Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro, SP. A Tabela 3.34 apresenta pesos larvais médios em miligramas obtidos em pesagens coletivas de 30 indivíduos de *C. megacephala* a cada intervalo de 8 horas (densidade 300/60 g - média entre os frascos I e II). A dispersão dos dados pode ser vista na Figura 3.56.

O ponto de inflexão ocorre aproximadamente em $p_* = 25.77$ mg (média entre os pesos 18.25 mg e 33.3 mg). O peso máximo p_∞ estimado para larvas, utilizando o método de Ford-Walford com os últimos 6 dados de peso da Tabela 3.34, foi de $p_\infty = 55.6216$ mg, enquanto que para os últimos 7 dados obtivemos $p_\infty = 59.0516$ mg.

Tabela 3.34: Dados de crescimento em peso de **larvas**

Idade (em horas)	Peso (em miligramas)
0	0.1
8	0.2
16	0.5
24	0.95
32	1.55
40	2.85
48	6.65
56	9.75
64	18.25
72	33.3
80	45.65
88	52.8
96	56.55
104	57.15
112	50.7

Fonte: UNESP, Rio Claro, SP.

Vale observar que a diminuição nos últimos dados de peso da larva, acontece devido o fato deste inseto interromper a alimentação a partir de certo período da vida, finalizando com o próprio enterramento.

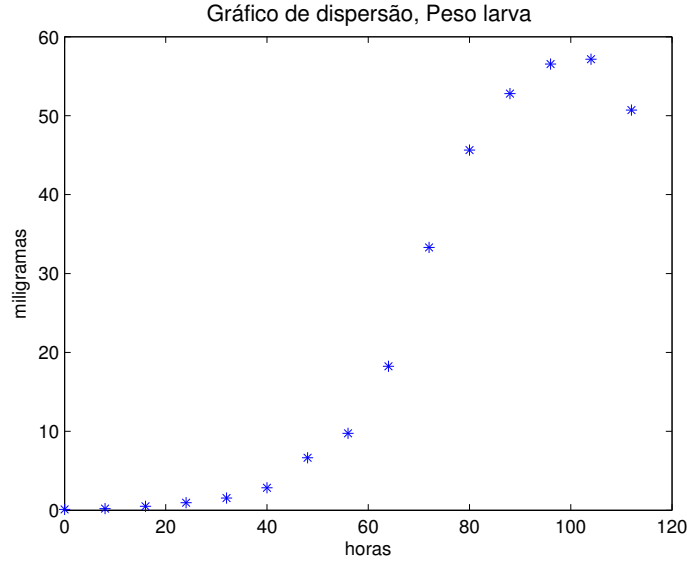


Figura 3.56: Gráfico de dispersão dos dados de peso p versus tempo t para larvas.

Os parâmetros utilizados nas simulações seguem abaixo. As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 3.57.

Simulação 1:

Condição inicial: $p_{\infty} = 59.0516$ mg; $\alpha = 0.4719$; $\beta = 0.3331$; $\gamma = 0.9146$. Após ajuste, os novos parâmetros foram: $\alpha = 1.1394$; $\beta = 1$; $\gamma = 0.9680$;

Simulação 2:

Condição inicial: $p_{\infty} = 55.6216$ mg; $\alpha = 0.4719$; $\beta = 0.3331$; $\gamma = 0.9146$. Após ajuste, os novos parâmetros foram: $\alpha = 1.1427$; $\beta = 1$; $\gamma = 0.9668$;

Simulação 3:

Condição inicial: sem fixar p_{∞} ; $\alpha = 0.4719$; $\beta = 0.3331$; $\gamma = 0.9146$. Após ajuste, os novos parâmetros foram: $\alpha = 0.5564$, $\beta = 0.4384$; $\gamma = 0.9480$; $p_{\infty} = 97.8821$ mg.

Apesar das simulações fornecerem valores pertinentes para γ , superestimaram β nas Simulações 1 e 2. A simulação 3 resultou em capacidade suporte superestimada.

Conforme se observa na Figura 3.57, o modelo não ajustou os dados de idade-peso para larvas, provavelmente devido ao fato do crescimento ocorrer muito rápido ou o ponto de inflexão ser superior a $\frac{1}{e}P_{\infty}$ (veja Figura 3.56).

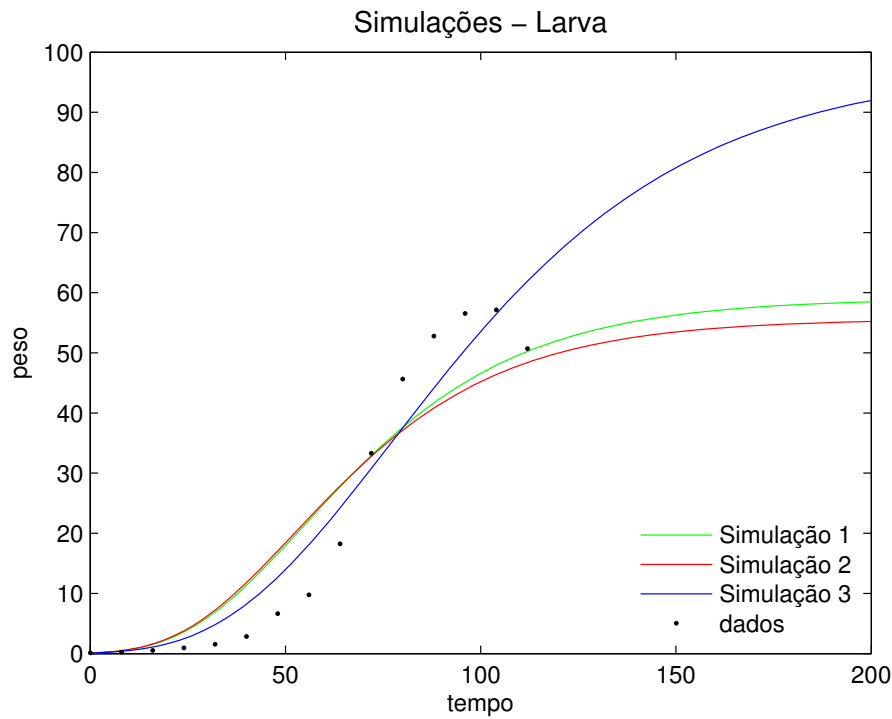
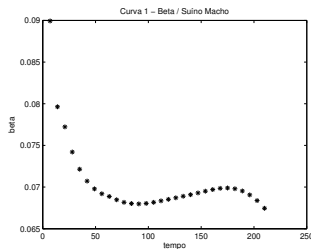


Figura 3.57: Ajuste da função $p(t)$, solução do modelo de Von Bertalanffy generalizado (2.1), aos dados de crescimento em peso de larva (Tabela 3.34).

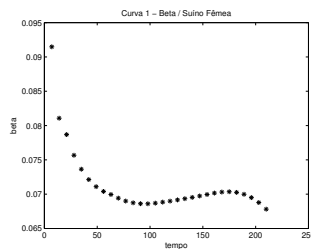
Retomemos as curvas de tendência de $\beta(t)$ obtidas para cada espécie:

Comportamento de $\beta(t)$

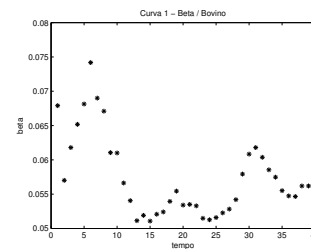
Mamíferos



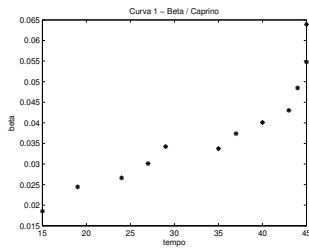
Suíno Macho



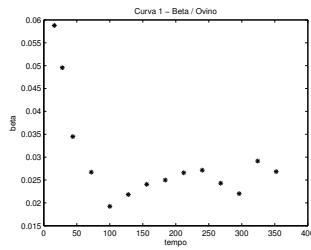
Suíno Fêmea



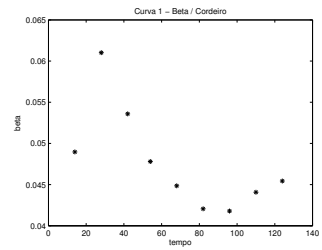
Bovino



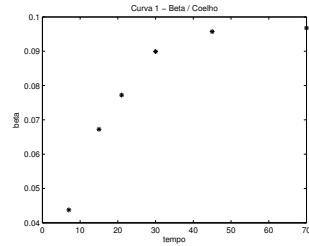
Caprino



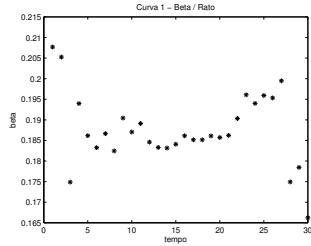
Ovino



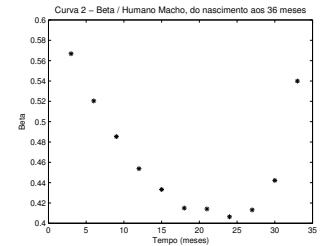
Cordeiro



Coelho

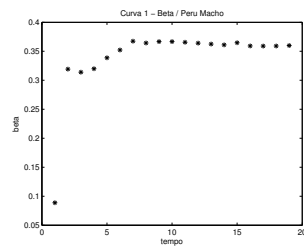


Rato

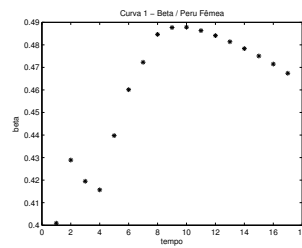


Humano

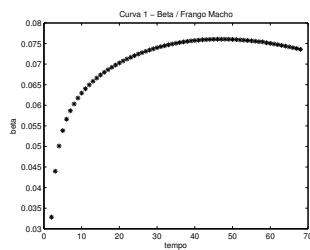
Aves



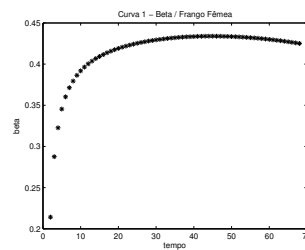
Peru Macho



Peru Fêmea

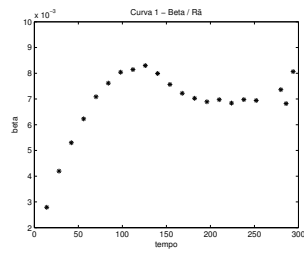


Frango Macho



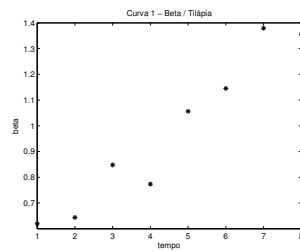
Frango Fêmea

Anfíbios

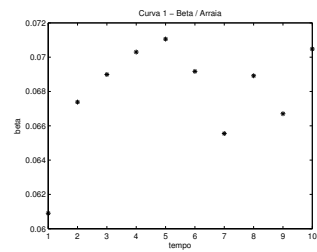


Rã

Peixes

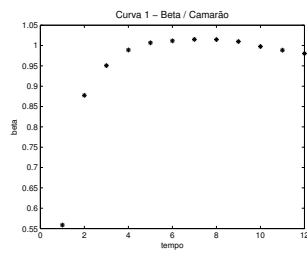


Tilápia



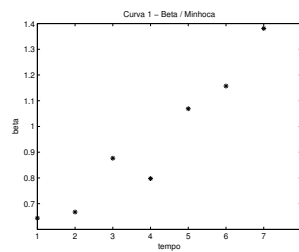
Arraia

Crustáceos



Camarão

Vermes



Minhoca

3.9 Conclusão - simulações numéricas

A conjectura inicial de que haveria um padrão de metabolismo por classe animal não se verificou, ocorrendo, inclusive, distinção entre machos e fêmeas de uma mesma espécie, como é o caso do peru. Hipoteticamente, a perda de energia está relacionada com os hábitos de cada animal.

Analizando os diversos gráficos de dispersão de β ao longo do tempo, notamos a ocorrência de tendências no comportamento da curva $\beta(t)$:

- β diminui com t
- β aumenta com t , depois diminui
- β estabiliza com t
- β aumenta com t

Geralmente, em animais confinados para engorda a tendência de β é diminuir com o passar do tempo, o que podemos notar no caso de suínos e ovinos. Ainda neste caso, ocorre semelhança entre as curvas de tendência de β referentes à bovinos, cordeiros e ratos, onde os picos de crescimento são seguidos de grande diminuição e a curva referente à humanos (lembrando que foi analisado o período de vida a partir do nascimento até 36 meses).

Outra suposição baseia-se no comportamento de animais semi-confinados, como por exemplo as aves, onde a tendência de β é estabilizar com o passar do tempo, conforme pode ser observado nas curvas referentes à frango macho, frango fêmea e peru macho. Comportamento análogo à este foi observado em coelhos e camarão.

A tendência de metabolismo observada para rãs e arraia apresenta aumento ao longo do tempo, diminuindo no fim da vida.

Por último, a tendência de β aumentar com t pode estar relacionada com o comportamento referente à animais soltos. Os espécimes que apresentaram este

tipo de comportamento foram o caprino, tilápia, peru fêmea, e curiosamente a minhoca. Apesar dos "picos" de crescimento e decrescimento ao longo da curvas destes indivíduos a tendência geral de β é aumentar ao longo do tempo.

Apesar das tendências de comportamento para β observadas anteriormente, não possuímos informação exata sobre o confinamento ou não de cada espécime estudada. Será que só a questão do animal estar solto ou confinado que influencia a perda de energia? No caso dos perus, a perda de energia da fêmea diminui ao invés de estabilizar como a do macho e os dois foram definidos como semi-confinados.

Ao trabalhar com ajuste de curvas em crescimento animal é importante observar a interpretação biológica dos resultados obtidos com o modelo, do contrário estaremos pura e simplesmente fazendo um ajuste de curvas. Devemos procurar obter parâmetros com respaldo biológico, como por exemplo o ponto de inflexão, que no caso, indica o momento a partir do qual o peso começa a estabilizar e a partir de onde procuramos calcular a capacidade suporte.

Nota-se, que pequenas alterações na capacidade suporte causam mudanças significativas nos parâmetros, uma vez que são muito sensíveis a modificações. Os ajustes, em sua maioria, têm melhor resultado quando é fornecido previamente o valor limite p_{∞} que o peso pode atingir.

Quando trabalhamos com dados experimentais de crescimento animal nos vemos em situações onde necessitamos estimar o comportamento da curva ao longo da vida de um determinado espécime. Fatalmente, o caminho entre a medida realizada no indivíduo, seja ela em seu peso, comprimento, idade, etc., até a solução obtida com o experimento/simulação a partir dos dados, está repleto de imprecisões, por mais cuidado que tenhamos no tratamento destas informações. Como os parâmetros são obtidos através de observações e experimentos seria interessante que pudessem admitir uma "faixa de valores" que considerasse as incertezas presentes no processo de obtenção desta solução.

Para tentar solucionar este problema e tornar plausível a solução obtida através das simulações realizadas, utilizaremos, no capítulo seguinte, como ferramenta de apoio para trabalhar com as incertezas inerentes à modelagem a Teoria dos Conjuntos Fuzzy, que nos permite trabalhar com este tipo de problema de uma maneira razoável.

Capítulo 4

Dinâmica Fuzzy

4.1 Introdução

Mizukoshi [18], propõe a utilização da teoria dos conjuntos fuzzy para modelagem de dinâmica populacional como alternativa para a modelagem determinística. Considerando um sistema autônomo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = \hat{x}_0 \end{cases}$$

onde a condição inicial é imprecisa, ou seja, $\hat{x}_0 \in E^n$, aborda o sistema de duas maneiras distintas. A primeira delas consiste em aplicar o princípio da extensão de Zadeh ao campo determinístico determinado por f , obtendo assim um campo fuzzy a partir do qual são usados conceitos como a derivada de Hukuhara. A segunda, consiste em determinar primeiramente a solução determinística $\varphi_t(x_0)$ e então, aplicar o princípio da extensão de Zadeh, obtendo uma solução fuzzy $\hat{\varphi}(t)(\hat{x}_0)$. Informalmente, na primeira abordagem fuzzificamos o problema e, então, encontramos a solução, enquanto no segundo método determinamos inicialmente a solução clássica, e, então, fuzzificamos esta solução [9]. Em particular, optaremos pelo segundo modo, fuzzificando a solução obtida através da resolução clássica do modelo de von Bertalanffy generalizado.

4.2 Conceitos e definições

Ferramentas que incorporam informações imprecisas são fundamentais para a modelagem. Em particular, a teoria dos conjuntos fuzzy, introduzida pela matemático Lofti Asker Zadeh em 1965 [17], é uma ferramenta que pode ser usada para modelagem de fenômenos envolvendo imprecisões e subjetividade. Quando esta subjetividade está na condição inicial do problema, denominamos *fuzziness demográfica*, se a incerteza está nos parâmetros chamamos de *fuzziness ambiental* [2].

Nesta seção, vamos definir os conceitos de conjuntos fuzzy e números fuzzy, bem como alguns resultados necessários na resolução de sistemas de equações diferenciais onde os parâmetros acomodam incertezas.

Definição 4.1 *Um subconjunto fuzzy F em X é caracterizado por uma função*

$$\mu_F : X \longrightarrow [0, 1],$$

chamada função de pertinência do conjunto F , onde $\mu_F(x) = 1$ e $\mu_F = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência e não pertinência do elemento x em F .

De acordo com a definição acima, cada subconjunto clássico X é um subconjunto fuzzy em X , onde a função de pertinência é a função característica do subconjunto.

Um subconjunto fuzzy F é composto de elementos x de um conjunto clássico X , providos de um valor de pertinência a F , dado por $\mu_F(x)$. Podemos dizer que um subconjunto fuzzy F de X é dado por um conjunto (clássico) de pares ordenados:

$$F = (x, \mu_F(x)), \quad \text{com } x \in X.$$

O subconjunto clássico de U definido por

$$\text{supp}F = x \in X : \mu_F(x) > 0$$

é denominado *suporte* de F e tem papel fundamental da inter-relação entre as teorias de conjuntos clássica e fuzzy.

Usamos a notação $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ para denotar a família de subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}^n$, onde os α -níveis de um subconjunto fuzzy A de $\mathbb{R}^n$ são dados pelo subconjunto clássico de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad \text{para todo } \alpha \in [0, 1] \quad \text{e}$$

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}A}.$$

são compactos e não vazios. Denotaremos por E^n , os elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R})^n$ cujos α -níveis são convexos para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 4.2 *Seja $X = \mathbb{R}$. Dizemos que um subconjunto fuzzy A em $\mathbb{R}$ é um número fuzzy quando:*

1. *existe x_0 tal que $\mu(x_0) = 1$;*
2. *o suporte $\{x : \mu_A(x) > 0\} = \text{supp}A$ é limitado;*
3. *os α -níveis de A são intervalos fechados.*

Definição 4.3 *O conjunto fuzzy definido pela função de pertinência*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a < x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{se } b \leq x < c \\ 0 & \text{se } x \geq c \end{cases}$$

é denominado número fuzzy triangular e satisfaz as propriedades de um número fuzzy.

O gráfico da função de pertinência de um número fuzzy triangular tem a forma de triângulo (Figura 4.1). Usaremos a notação $A = (a/b/c)$ para representar um número fuzzy triangular em que $\mu_A(a) = \mu_A(c) = 0$ e $\mu_A(b) = 1$.

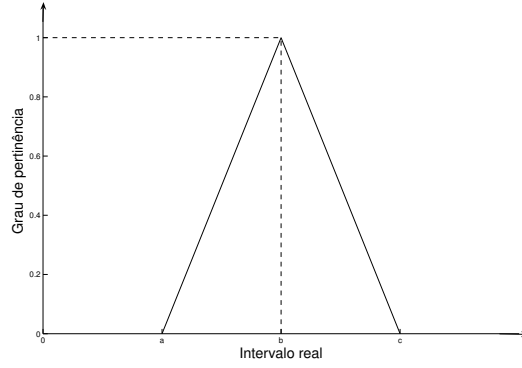


Figura 4.1: Exemplo de número fuzzy triangular (a/b/c).

Observemos que o domínio de $\mu_A : [a, c] \longrightarrow [0, 1]$ é multiplicado por uma constante λ , então obtemos um número fuzzy triangular $\lambda A = (\lambda a / \lambda b / \lambda c)$ onde $\mu_{\lambda A}(\lambda x) = \mu_A(x)$ para todo $x \in [a, c]$ [9].

O lema a seguir caracteriza um elemento em E através dos seus α -níveis.

Lema 4.1 *Seja $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, $0 < \alpha \leq 1$ uma família de intervalos não vazios. Se*

(i) $[a_1^\alpha, a_2^\alpha] \supset [a_1^\beta, a_2^\beta]$ para todo $0 < \alpha \leq \beta$

e

(ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} [a_1^{\alpha_k}, a_2^{\alpha_k}] = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$

onde α_k é uma sequência não decrescente convergindo para $\alpha \in (0, 1]$, então a família $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, $0 < \alpha \leq 1$, representa os α -níveis de um elemento em E . Por outro lado, se $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, $0 < \alpha \leq 1$ representa os α -níveis de um elemento em E , então são válidas as condições (i) e (ii).

Definição 4.4 *A extensão de Zadeh de uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função $\hat{f}$ tal que,*

$$\mu_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(z)} \varphi_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

onde A é um subconjunto fuzzy com suporte em $\mathbb{R}$.

No caso em que f é bijetora temos $\{x : f(x) = z\} = \{f^{-1}(z)\}$.

Teorema 4.1 *Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, então a extensão de Zadeh $\widehat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R})^n \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})^n$ está bem definida e,*

$$[\widehat{f}(\mu)]^\alpha = f([\mu]^\alpha)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Demonstração: Consultar [2].

Aplicando o teorema 4.5 à função $\widehat{f}(U) = \lambda(U)$, encontramos $[\widehat{f}(U)]^\alpha = [\lambda A]^\alpha = \lambda[A]^\alpha$ de modo que multiplicar um número fuzzy A pelo escalar λ , é equivalente à multiplicar todos os α -níveis de A por λ . Portanto, temos que: $x \in [A]^\alpha$ se, e somente se $\lambda x \in [\lambda A]^\alpha$, ou equivalentemente $\mu_A(x) = \mu_{\lambda A}(\lambda x)$.

Extensão do fluxo determinístico

Consideremos o sistema de equações autônomas

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Vamos supor que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, satisfaça algum critério que garanta existência e unicidade de solução. Neste caso, a solução $x(t)$ do sistema (4.1) é unicamente determinada pela condição inicial e o tempo t . Para enfatizar esta relação, vamos representar tal solução por

$$\varphi_t(x_0) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ou seja, $\varphi_0(x_0) = x_0$ e $\varphi'_t(x_0) = f(\varphi_t(x_0))$; a solução $\varphi_t(x_0)$ é denominada *fluxo* gerado pelo campo vetorial f .

Admitindo que a condição inicial seja incerta, ou seja, $x(0) = \widehat{x}_0 \in E^n$, então temos um sistema fuzzy associado

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= \widehat{x}_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Neste caso, a solução depende de uma condição inicial fuzzy. A solução para o sistema associado (4.2) é definida como sendo a função obtida pela aplicação do princípio da extensão de Zadeh ao fluxo determinístico $\varphi_t(x_0)$, obtendo assim

$$\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0) : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n).$$

Pela continuidade de $\varphi_t(x_0)$ com relação à condição inicial x_0 , a igualdade

$$[\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)]^\alpha = \varphi_t([\widehat{x}_0]^\alpha) \quad (4.3)$$

é satisfeita para todo $\alpha \in [0, 1]$. Portanto, a trajetória determinada por $\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)$ consiste de uma família de trajetórias determinísticas dadas por φ_t . Para cada $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, o grau de pertinência da trajetória $\varphi_t(\overline{x})$ em $\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)$ é igual ao grau de pertinência de $\overline{x}$ em $\widehat{x}_0$ pois, pelo princípio da extensão de Zadeh

$$\mu_{\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)}(\varphi_t(\overline{x})) = \sup \varphi_{\widehat{x}_0}(\tau) : \varphi_t(\tau) = \varphi_t(\overline{x}).$$

A igualdade $\varphi_t(\tau) = \varphi_t(\overline{x})$ vale, em particular para $t = 0$, ou seja, $\tau = \overline{x}$. Logo, o supremo é tomado em um conjunto unitário, portanto

$$\mu_{\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)}(\varphi_t(\overline{x})) = \mu_{\widehat{x}_0}(\overline{x}).$$

Para o caso em que $\widehat{x}_0$ é um subconjunto fuzzy de E^n , então temos os α -níveis de $\widehat{x}_0$ convexos e compactos e, como consequência, $\varphi_t([\widehat{x}_0]^\alpha)$ também é convexo e compacto para todo $\alpha \in [0, 1]$. Sendo assim, $\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)$ é um subconjunto fuzzy de E^n para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Se considerarmos o caso em que a subjetividade aparece nos parâmetros da função f , então precisamos aplicar a extensão de Zadeh ao fluxo do sistema determinístico

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), b) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de parâmetros para f . Portanto, adicionando ao sistema acima as equações

$$\begin{cases} b'_1 &= 0 \\ b'_2 &= 0 \\ &\vdots \\ b'_m &= 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

temos um novo sistema de dimensão $n + m$

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ b'(t) &= 0 \\ x(0) &= (x_0, b) \end{cases} \quad (4.6)$$

onde o vetor de parâmetros b aparece agora na condição inicial. Dessa forma, voltamos ao caso descrito acima onde somente a condição inicial é fuzzy.

A Figura 4.2 ilustra a solução fuzzy e a solução clássica para um modelo qualquer. Podemos notar que para cada instante t , a solução fuzzy $\hat{\gamma}_t(\mathcal{X}_{(x_0)})$ pode ser interpretada como a função de pertinência a um subconjunto fuzzy, variando no intervalo $[0,1]$, conforme a proximidade com a solução clássica $\varphi_t(x_0)$.

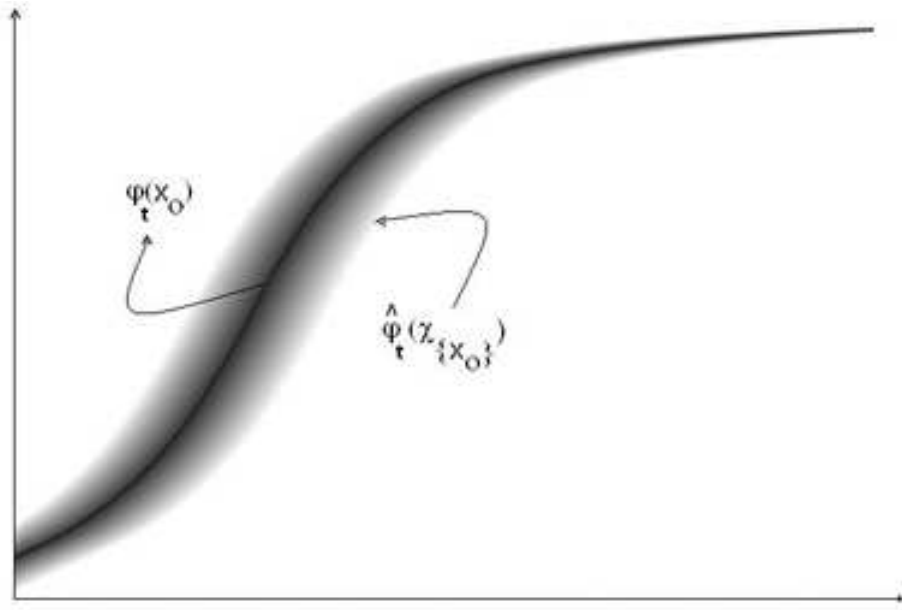


Figura 4.2: Comparação entre a solução clássica e a solução fuzzy.

4.3 Solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado

Consideremos o modelo de von Bertalanffy generalizado apresentado no 2º capítulo

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} &= \alpha p^\gamma - \beta p \\ p(0) &= p_0 \end{cases}$$

e sua solução determinística

$$p_t(p_0, \beta, \gamma, p_\infty) = p_\infty \left\{ 1 + \left[\left(\left(\frac{p_0}{p_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) e^{-\beta(1-\gamma)t} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (4.7)$$

Considerando que a capacidade suporte p_∞ seja incerta, então os α -níveis da solução fuzzy são dados por

$$[\hat{p}_t(\hat{p}_\infty)]^\alpha = [\hat{p}_\infty]^\alpha \left\{ 1 + \left[\left(\left(\frac{p_0}{[\hat{p}_\infty]^\alpha} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) e^{-\beta(1-\gamma)t} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (4.8)$$

Para o caso em que o parâmetro de alometria γ é fuzzy, os α -níveis da solução fuzzy são dados por

$$[\hat{p}_t(\hat{\gamma})]^\alpha = p_\infty \left\{ 1 + \left[\left(\left(\frac{p_0}{p_\infty} \right)^{1-[\hat{\gamma}]^\alpha} - 1 \right) e^{-\beta(1-[\hat{\gamma}]^\alpha)t} \right] \right\}^{\frac{1}{1-[\hat{\gamma}]^\alpha}}. \quad (4.9)$$

Retomando a expressão determinística para p_∞ apresentada no decorrer da solução do modelo de von Bertalanffy,

$$p_\infty(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}},$$

podemos observar que considerar qualquer um dos parâmetros α , β ou γ fuzzy é equivalente a tomar p_∞ desta forma, uma vez que são interdependentes. Por exemplo, ao tomar o parâmetro de alometria γ fuzzy os α -níveis da capacidade suporte são dados por

$$[\hat{p}_\infty(\hat{\gamma})]^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-[\hat{\gamma}]^\alpha}}.$$

Nas soluções fuzzy apresentadas a seguir optamos por fuzzificar o parâmetro de alometria, devido ao fato, já comentado, de acreditarmos que por este ser um parâmetro relacionado à área corporal, talvez seja mais coerente que cada espécime possua um valor próprio.

Pelo princípio da extensão de Zadeh (Definição 4.5), para obtermos a solução fuzzy do modelo basta fuzzificarmos a solução determinística encontrada através da resolução clássica.

Desta forma, a solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado à camarões é obtida pela extensão de Zadeh de (4.7), considerando os parâmetros referentes à este crustáceo. A Figura 4.3 apresenta a solução fuzzy do modelo, considerando o parâmetro alométrico fuzzy $\hat{\gamma} = (0.7400/0.7499/0.7581)$. Na Figura 4.4 podemos observar a comparação entre as soluções obtidas através das simulações do modelo clássico e da solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado.

A escolha da "curva ideal", que forneceu os parâmetros α , β e γ para o modelo fuzzy, foi feita a partir da menor diferença entre os dados de idade-peso fornecidos e a curva-solução do modelo determinístico ajustada pelo programa, no caso a curva referente à simulação 1. Observada a diferença entre a capacidade suporte "ideal" e o maior valor observado nas simulações, foi tomado o intervalo $p_{\infty}:(\text{"ideal"} - \text{diferença}; \text{"ideal"} + \text{diferença})$, considerando que este valor pode conter erros, provenientes do processo de modelagem e ajuste, calculamos o parâmetro γ corresponde à estes valores a partir de substituição na expressão

$$\gamma = 1 - \frac{\log(\alpha/\beta)}{\log(p_{\infty})},$$

obtida a partir de manipulação algébrica na expressão da capacidade suporte (2.4).

No caso do camarão, temos: $p_{\infty}(24.2312g; 30.7260g)$, resultando no número fuzzy $\hat{\gamma} = (0.7400/0.7499/0.7581)$, onde o valor intermediário provém da "curva ideal".

A solução fuzzy obtida pela extensão de Zadeh de (4.7) aplicada à suínos, utilizando $\hat{\gamma} = (0.9787/0.9794/0.9799)$, pode ser vista na Figura 4.5.

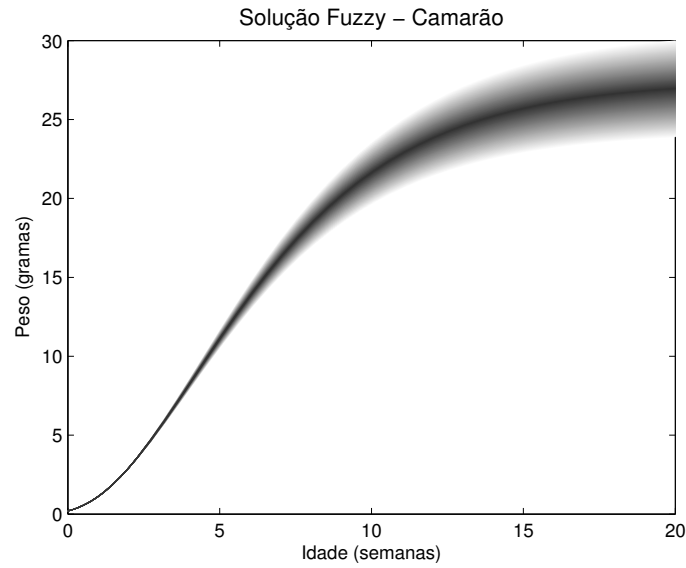


Figura 4.3: Solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado, considerando os parâmetros referentes à simulação 1 feita para o camarão, com o parâmetro alométrico fuzzy: $\hat{\gamma} = (0.7400/0.7499/0.7581)$.

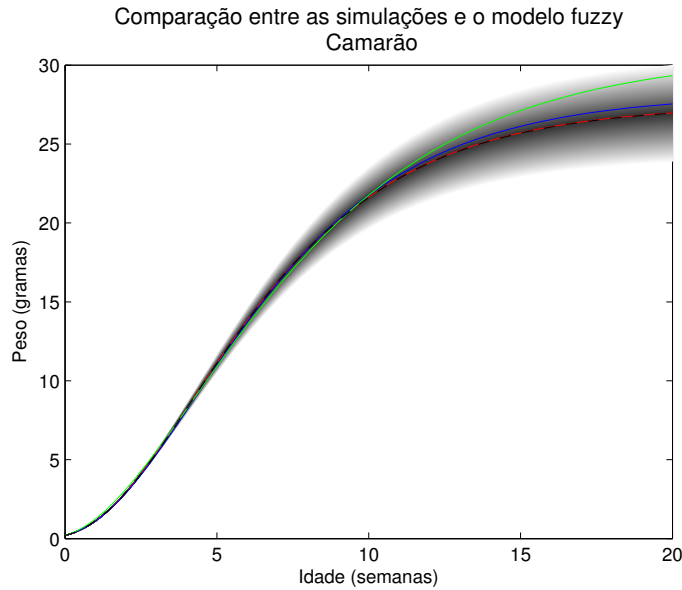


Figura 4.4: Comparação entre as soluções obtidas através das simulações do modelo clássico e do modelo fuzzy da solução do modelo de von Bertalanffy generalizado.

A Figura 4.6 apresenta a comparação entre as soluções obtidas através das simulações do modelo clássico e da solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado.

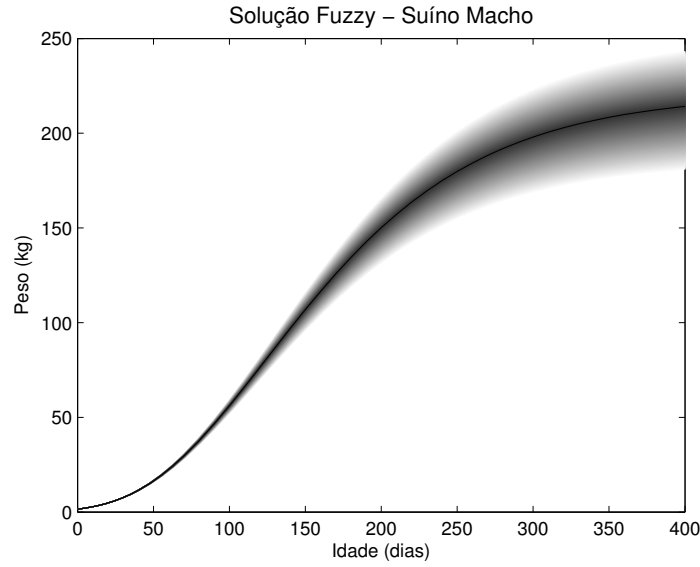


Figura 4.5: Solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado, considerando os parâmetros referentes à simulação 4 feita para suíno macho, com o parâmetro alométrico fuzzy: $\hat{\gamma} = (0.9787/0.9794/0.9799)$.

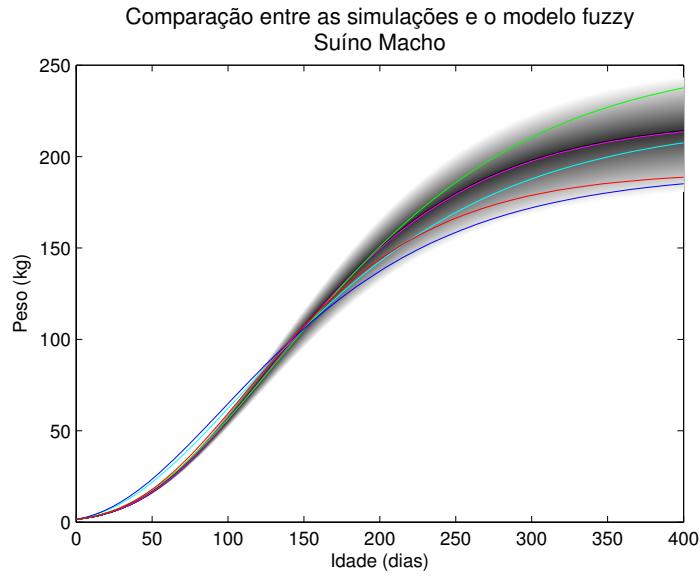


Figura 4.6: Comparação entre as soluções obtidas através das simulações do modelo clássico e do modelo fuzzy da solução do modelo de von Bertalanffy generalizado.

No caso das crianças do sexo masculino, a solução fuzzy obtida pela extensão de Zadeh de (4.7), utilizando $\hat{\gamma} = (0.7340/0.75/0.7623)$, pode ser vista na Figura 4.7. A Figura 4.8 representa a comparação entre as soluções obtidas através das simulações do modelo clássico e da solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado.

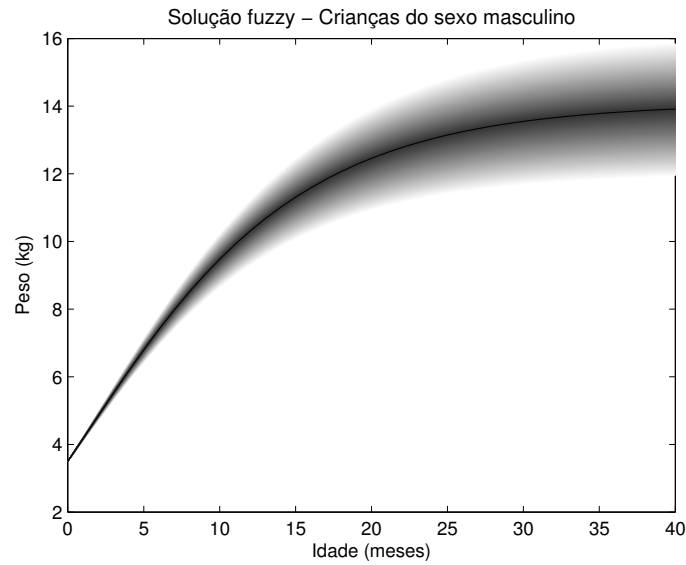


Figura 4.7: Solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado, considerando os parâmetros referentes à simulação 3 feita para crianças do sexo masculino, com o parâmetro alométrico fuzzy: $\hat{\gamma} = (0.7340/0.75/0.7623)$.

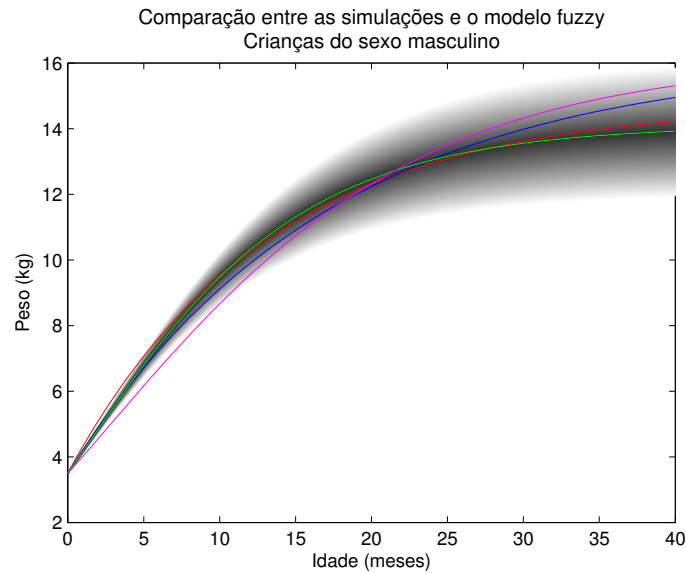


Figura 4.8: Comparação entre as soluções obtidas através das simulações do modelo clássico e do modelo fuzzy da solução do modelo de von Bertalanffy generalizado.

Conforme podemos observar nestes exemplos, o modelo fuzzy estima com graus de pertinência em relação à curva do modelo determinístico, inserindo as variações que de fato ocorrem nos dados reais.

Se desejarmos um único valor real para representar o parâmetro de alometria ou a capacidade suporte de cada indivíduo devemos adotar algum procedimento de defuzzificação.

Este é um estudo que faremos com mais detalhes no futuro, podendo trazer resultados importantes para melhorar e enriquecer nosso trabalho, como a obtenção de um valor próprio do coeficiente alométrico pertinente à cada espécime. Podemos, por exemplo, estimar seu número "médio" em cada instante t , por meio do *valor esperado fuzzy*.

A *esperança fuzzy* EF do conjunto fuzzy $P(\Gamma, t)$ é dada por

$$EF[P(\Gamma, t)] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \min[\alpha, \mu \{P(\gamma, t) \geq \alpha\}],$$

onde $\mu \{ \gamma : P(\gamma, t) \geq \alpha \}$ é uma medida fuzzy do conjunto clássico α -nível de $P(\gamma, t) = [P(\Gamma, t)]^\alpha$.

Assim, segundo Barros [13], para cada t , a função $H(\alpha)$, cujo ponto fixo é o valor $EF[P(\Gamma, t)]$, é dada por:

$$H(\alpha) = \mu \{ \gamma : P(\gamma, t) \geq \alpha \} = \int_{[P(\gamma, t)]^\alpha} \rho(\gamma) dP = 1 - \mu \{ \gamma : P(\gamma, t) < \alpha \}.$$

Observemos que $H(0) = 1$ e $H(1) = 0$.

Conclusão

Neste trabalho apresentamos aplicações do Modelo de von Bertalanffy generalizado à diversos espécimes animais. Conforme esperado, o modelo mostrou-se adequado para relacionar peso e idade, principalmente por possuir parâmetros com interpretação biológica.

A interpretação biológica dos parâmetros têm fundamental importância para ressaltar características relevantes do crescimento, como por exemplo o parâmetro de catabolismo β , que mede o gasto energético do animal. A conjectura inicial de que haveria um padrão metabólico por classe animal não se verificou, porém ao considerarmos β variável em relação ao tempo t no decorrer desta verificação, foi possível estimar o comportamento metabólico individual de cada espécime, bem como notar a ocorrência de tendências em comum para animais de classe distintas.

Vale observar a importância da particularidade apresentada por cada indivíduo em relação ao parâmetro alométrico γ . Em um trabalho futuro deve-se estimar a variação deste parâmetro para cada espécime, conforme realizado com o apoio da teoria dos conjuntos fuzzy na seção 4.3 para camarão e suíno macho.

Uma possibilidade interessante, não tratada neste estudo, que o modelo de von Bertalanffy, juntamente com a relação alométrica inerente à cada animal, permite é estimar a idade do indivíduo a partir de pares de dados de comprimento e peso.

Conforme visto no último capítulo a solução fuzzy do modelo estima com graus de pertinência em relação à curva do modelo determinístico, inserindo assim, as variações que de fato ocorrem nos dados reais e no decorrer do processo de modelagem,

imprimindo maior confiabilidade à solução obtida.

Uma vez que a qualidade do ajuste de um modelo a uma espécie animal é, entre outros fatores, dependente do número de pares de peso e idade avaliados, do sexo, da raça, do manejo e da idade do animal em que os últimos pesos são obtidos, a expectativa é de que as estimativas de parâmetros obtidas neste trabalho sejam usadas como valores iniciais em situações específicas daqueles que a utilizarem, bem como em trabalhos futuros.

Bibliografia

- [1] Guedes, M. H. P. et al (2004). Estudo das curvas de crescimento de cordeiro das raças Santa Inês e Bergamácia considerando heterogeneidade de variâncias. *Ciência e Agrotecnologia*, Lavras, v. 28, nº 2, p. 381-388.
- [2] Barros, L. C. (1997). *Sobre sistemas dinâmicos fuzzy - teoria e aplicações*. Tese de Doutorado, IMECC - UNICAMP, Campinas.
- [3] Freitas, A. R. (2007). Estimativas de curvas de crescimento na produção animal. Embrapa Pecuária Sudeste. Documentos, 68.
- [4] Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia*. Contexto, São Paulo.
- [5] Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações Diferenciais com Aplicações*. Harbra, São Paulo.
- [6] Oliveira, L. et al (2007). Modelo de Von Bertalanffy generalizado aplicado ao crescimento de suínos de corte. *Revista Biomatemática* 17, p. 101-109, Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC - UNICAMP.
- [7] Leite, A. L. F. (2003). Modelagem matemática aplicada ao crescimento em peso de aves de corte. Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, UFOP, Ouro Preto/MG.
- [8] West, G. B., Woodruff, W. H., e Brown, J. H. (2002). Allometric scaling of metabolic rate from molecules and mitochondria to cells and mammals. *Proce-*

- edings of the National Academy of Sciences of the United of Americana*, v. 99, p. 2473-2478.
- [9] Cecconello, M. S. (2006). Modelagem Alternativa para Dinâmica Poupacional:Sistemas Dinâmicos Fuzzy. Dissertação de Mestrado, IMECC - UNICAMP, Campinas.
 - [10] Rodrigues, M. L. et al (2007). Curva de Crescimento em rã-touro na fase de recria. *Archivos de Zootecnia* v. 56, n. 214, p. 125-136.
 - [11] Tsoularis, A. Wallace, J. (2002). Analysis of logistic growth models, *Mathematical Biosciences*, v. 179, p. 21-55.
 - [12] Chávez E. A. (1973). "Estudio sobre la tasa de crecimiento del camarón blanco (*Pennaeus vannamei* Boone) de la Región Sur del Golfo de California"; *Ciência Pesquera*, XXVIII (2), México, p. 79-85.
 - [13] Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática. Coleção IMECC. Textos didáticos, v.5. Campinas, Sp.
 - [14] Pereira, C. S. (2000). Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da raça Guzerá. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, Brasília, v. 35, n. 9, p. 1843-1851.
 - [15] Bertalanffy, L. (1938). A quantitative theory of organic growth, *Human Biology*, n. 10, v. 2, p. 181-213.
 - [16] Walford, L. A. (1946). A new grafic method of describing the growth of animals. *Aquatic Biologist*, United States Fish and Wildlife Service, p. 141-147.
 - [17] Zadeh, L. A.(1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, Berkeley, Califórnia, v.8, p. 338-353.
 - [18] Mizukoshi, M. T. (2004). *Estbilidade de sistemas dinâmicos fuzzy*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP.

- [19] Malthus, T. R. (1798). *An essay on the principle of population*. London. Eletric. Book. Co.