Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Análise de um Modelo Matemático de Condução-Convecção do Tipo Entalpia para Solidificação

Tese de doutorado por

Herme Patricio Soto Segura

Orientador: José Luiz Boldrini
(DMA-IMECC-UNICAMP)
Co-orientador: Sebastián Antonio Lorca Pizarro
(DM-IMECC-UNICAMP)

Campinas, Agosto de 2000

ANÁLISE DE UM MODELO MATEMÁTICO DE CONDUÇÃO-CONVECÇÃO DO TIPO ENTALPIA PARA SOLIDIFICAÇÃO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Herme Patricio Soto Segura** e aprovada pela comissão julgadora

Campinas, 09 de Agosto de 2000

Prof. Dr. José Luiz Boldrini
Orientador

Prof. Dr. Sebastián Antonio Lorca Pizarro
Co-orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Luiz Boldrini(Orientador-DMA-IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Milton da Costa Lopez Filho (DM-IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar (DMA-IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nacimento (DM-UFSCAR)
Prof. Dr. Gustavo Alberto Perla Menzala (LNCC)

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Soto Segura, Herme Patricio

So78a Análise de um modelo matemático de condução-convecção do tipo entalpia para solidificação / Herme Patricio Soto Segura -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientadores : José Luiz Boldrini; Sebastián A. Lorca Pizarro

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Entalpia. 2. Navier-Stokes, Equações de. 3. Equações diferenciais parabólicas. 4. Solidificação. 5. Mecânica dos fluidos. I. Boldrini, José Luiz. II. Lorca Pizarro, Sebastián Antonio. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Tese de Doutorado defendida em 09 de agosto de 2000 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof (a). Dr (a). MILTON DA COSTA LOPES FILHO

Prof (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR

Prof (a). Dr (a). ARNALDO SIMAL DO NASCIMENTO

Gustavo Perla Menzala

Prof (a). Dr (a). GUSTAVO ALBERTO PERLA MENZALA

Agradecimentos

A Deus, por ter permitido chegar a finalizar este trabalho.

Aos Professores **José Luiz Boldrini** e **Sebastián Antonio Lorca Pizarro**, pela orientação e apoio durante a elaboração deste trabalho.

Aos funcionarios e professores do IMECC.

Ao CNPq pelo apoio financiero.

À Universidad de La Frontera de Temuco

Ao Departamento de Matemática y Estadística de la Universidad de La Frontera.

Aos amigos que fiz no IMECC.

A minha familia pela espera e apoio.

A minha esposa Nayadet,
meus filhos Camilo e Mauricio,
a minha irmã Patricia, a meu pai
e à memória da minha mãe

Resumo

Neste trabalho apresentamos resultados de existência de soluções de certos modelos matemáti-cos de problemas de solidificação de materiais puros. Estes modelos utilizam o chamado método da entalpia (isto é, a função entalpia é indicador de fases do processo) e levam em conta tanto a condução de calor no material quanto a possibilidade de processos convectivos nas regiões não sólidas.

Eles são constituídos por um sistema de equações (inclusões) diferenciais parciais não lineares, uma das quais descreve o balanço da energia térmica em todo o material (envolvendo pois a condução de calor e a liberação ou absorção de calor latente em mudanças de fases) e está acoplada a equações que descrevem o fluxo do material e que são válidas apenas na regiões não sólidas e, portanto, a priori regiões desconhecidas. Estas últimas equações são do tipo de Navier-Stokes, modificadas adequadamente por um termo do tipo Boussinesq que leva em conta os efeitos termoconvectivos e um outro termo do tipo Carman-Koseny que controla o fluxo do material nas chamadas zonas *mushy*.

Para obtermos soluções generalizadas de tais sistemas, tanto no caso de evolução quanto no caso estacionário, procedemos da seguinte forma: consideramos inicialmente uma sequência de problemas aproximados, fazendo uma regularização adequada do problema original; a idéia central é a de modificar de tal modo que nos problemas aproximados as equações do tipo de Navier-Stokes passam a ser válidas em toda a região do material. Analisamos cada um destes problemas aproximados aplicando argumentos de ponto fixo, e também um método semi-Galerkin no caso de evolução, e obtemos uma sequência de soluções aproximadas. A seguir, usando argumentos de compacidade, passando ao limite nas equações aproximadas, obtemos soluções generalizadas dos problemas originais.

Abstract

In this work we present results of existence of solutions for some mathematical models of solidification problems of pure materials. These models use the so called *Method of enthalpy*(that is, the enthalpy function is an index of the process phase) and these take into account both the heat conduction on the material and the possibility of convective process on the nonsolid regions.

These models are formed by a system of nonlinear partial differential equations (or inclusions). One of them describes the balance of the termal energy on the whole material (involving the heat conduction and the expel or absorption of latent heat in phase changes) and it is coupled to equations which describe the flux of material. These equations are only true in nonsolid regions, thus apriori unknown regions. This kind of equations are of Navier-Stokes type but precisely modified with a Boussinesq-type term, which carries the thermoconvective effects, and another term of type Carman-Koseny, which controls the material flux on the so called *mushy* zones.

To obtain generalized solutions for such systems, in the evolution case and the steady state case, we work in the following way: we initially consider a sequence of approximated problems doing an appropriate regularization of the original problem. The main idea is to modify the problem in such a way that the approximations to the Navier-Stokes-type equations will be true on the whole region of the material. We study each one of these approximated problems applying fixed-point arguments, and also a semi-Galerkin method for the evolution case. Thus, we obtain a sequence of approximated solutions. Next, by using compactness arguments, we can take limit to the approximated equations and we can obtain generalized solutions of the original problems.

Índice

Introdução

A compreensão dos processos de mudança de fase de materiais, em particular aqueles correspondentes a processos de solidificação/fusão que são os de interesse neste trabalho, sempre foi crucial para o desenvolvimento tecnológico da humanidade e, por isso, desde a antiguidade eles têm sido cuidadosamente estudados. Contudo, a complexidade dos fenômenos envolvidos e o grau de dificuldades da realização de experimentos têm sido de tal ordem que a modelização matemática adequada de tais processos tornou-se um passo fundamental para que progressos futuros possam ser feitos. Entretanto, esta mesma complexidade foi a responsável que somente no final do século XIX fosse possível iniciar o estudo matemático de tais problemas quando J. Stefan, formulou pela primeira vez o problema de encontrar a distribuição de temperatura e a evolução da frente de resfriamento em um processo de solidificação/fusão unidimensional.

Atualmente a metodologia de Stefan é empregada no estudo de fenômenos bastante complexos, tais como mudanças de fase em ligas, e outros, gerando problemas matemáticos que recebem o nome de Problemas de Stefan. A suposição básica de tal metologia é a de que as regiões de transição entre as fases são muito finas, de tal modo que possam ser consideradas como superfícies (regulares) separando os estados do material. Estas regiões de transição são chamadas de interfaces e a suas localizações fazem parte das incógnitas do problema. Nestes modelos as equações que governam as variaveis termodinâmicas, tais como temperatura e/ou concentração, são baseadas nos principios de conservação e formuladas de maneira independente em cada fase, isto é, elas são obtidas de forma independente em cada lado da interface. Além disso, é imposta uma condição na interface, que expresa a conservação da energia e que é chamada de Condição de Stefan. Problemas de Stefan podem ser modificados, contemplando outros efeitos efeitos físicos tais como os convectivos e os causados pela tensão superficial; estes últimos são tratados através de uma condição chamada de Gibbs-Thomson (veja, por exemplo, Caginalp e Xie [11]). Mais detalhes sobre os problemas de Stefan podem ser encontrados, por exemplo, em Alexiades [3] e Rubinstein [39].

Embora ainda hoje a metodologia de Stefan seja extremamente importante, sendo muitas vezes a primeira a ser empregada no estudo da incorporação de novos aspectos físicos ao problema, e também para comparação com outras metodologias e identificação de alguns de seus parâmetros, ela tem algumas limitações: em muitas situações a hipótese fundamental de que as regiões de transição sejam finas não é verdadeira, aparecendo no corpo do material regiões chamadas *mushy*. Além disso, em tais regiões podem ocorrer, e serem importantes, processos físicos distintos daqueles do resto do material. Também, do ponto de vista prático, quando se realizam simulações numéricas em problemas multidimensionais, a complexidade das interfaces pode se tornar tais que mesmo técnicas especializadas de localização numérica de interfaces, como *front-tracking* e outras podem não ser exequíveis.

Para tentar suplantar tais deficiências, outras metodologias de obtenção de modelos permitindo interfaces complexas, com espessura (e eventualmente uma estrutura interna), foram desenvolvidas: o método do campo de fase (*phase-field*) e o método da entalpia. Ambos, identificam interfaces como superficies de nível de certas funções auxiliares.

Os modelos baseados no método do campo de fase postulam a existência de um parâmetro de ordem, isto é uma função incógnita extra chamada campo de fase, a qual, pelo valor em um certo ponto, indica a fase do material naquele ponto; geralmente -1 e 1 são usados para indicar respectivamente os estados sólidos e líquidos. As "interfaces" entre as fases são as regiões onde os valores do campo de fase estão entre -1 e 1. As equações para o campo de fases podem ser obtidas como equações de Euler-Lagrange associadas a um funcional de energia para campo de fase (funcional de Landau-Ginzburg). Uma das vantagens desta metodologia é a possibilidade de representar efeitos difíceis de modelar com a metodologia de Stefan, tais como superresfriamento e superaquecimento. O primeiro modelo de campo de fase para mudança de fase sólido-líquido de um material puro foi proposto por Langer [30]. Um dos principais investigadores desta metodologia é Caginalp (veja, por exemplo, [8], [9], [10], [11]).

Outra metodologia existente para estudar os problemas de mudança de fase é conhecida como o método da entalpia, a qual pode ser interpretada básicamente como uma formulação fraca do Problema tipo Stefan que incorpora a condição da interface, com a utilização dos valores da variável termodinâmica entalpia para determinar as fases do material. Nesta formulação fraca não existe nenhuma suposição relativa à natureza da interface sólido-líquido, a qual pode ser uma superficie regular ou uma zona mushy qualquer. A "interface" pode ser considerada, por exemplo, simplesmente como o conjunto de pontos onde a entalpia toma valores entre 0 e L, onde L é o calor latente do material. Como foi dito anteriormente, uma vantagem deste método é que não é necessário supor regularidade da interface, o que faz que ele seja também útil na implementação de soluções numéricas de problemas de mudança de fase (veja, por exemplo, Voller [46], [48], e White [56]. Uma desvantagem deste método é a dificuldade de incorporar condições especiais na interface, tais como os efeitos de superresfriamento.

Outro aspecto importante deste tipo de problema é que para simplificar a análise a maioria dos estudos considera que os materiais envolvidos não se movimentam durante o processo, independentemente da metodologia adotada para descrever as fases. Entretanto, em muitos casos importantes, ocorre tal movimentação devido a efeitos térmicos, principalmente nas regiões não sólidas, o que pode afetar consideravelmente a propagação das interfaces. A análise matemática destes casos é consideravelmente mais difícil, mas a importância da questão tem atraído vários pesquisadores para o estudo dos efeitos convectivos em problemas com mudança de fases nos últimos anos.

Exemplos destes estudos são os trabalhos de Cannon e outros [12], [13], Collis [17] e Mullis [35], utilizando a metodologia de Stefan. Com a metodologia do campo de fases, podemos citar por exemplo os trabalhos de Kobayshi [25], Vaz [44], Wheeler e outros [53], [54]e [55]. Utilizando o método da entalpia, os trabalhos de DiBenedetto and O'Leary [20], O'Leary [36], Blanc e outros [5] e Voller e outros [50], [51] consideram diversos aspectos particulares de efeitos convectivos. Em [20], é considerado um modelo de condução-convecção o qual é constituído por uma equação do balanço térmico acoplada às equações de Stokes (isto é, supõe-se que o termo não linear convectivo é desprezível); [36] estuda o comportamento da entalpia na zona *mushy* em uma situação em que a velocidade de fluxo do material é suposta conhecida; [5] estuda o caso de solidificação de ligas binárias com convecção no caso estacionário, utilizando uma equação do tipo Navier-Stokes modificada para tratar os efeitos convectivos.

Neste trabalho estaremos interessados em um modelo matemático, tanto no caso estacionário quanto no de evolução, para um problema de mudança de fases sólido/líquido de um material puro, admitindo a possibilidade de fluxo de material na fase não sólida.

Tal modelo adota uma metodologia do tipo entalpia para descrever a mudança de fases compartilhando aspectos dos trabalhos mencionados anteriormente e que usam a mesma metodologia. Ele é constituído por uma equação diferencial parcial não linear que descreve o balanço de energia térmica em todo o material como no trabalho de O'Leary [36], e que leva em conta tanto a condução do calor quanto a absorção ou liberação do calor latente, acoplada a equações do tipo Navier-Stokes que governam o movimento do material na fase não sólida, com termos adicionais; um deles leva em conta a termoconvecção (assumindo uma aproximação do tipo Boussinesq), e outro, que controla o fluxo nas zonas *mushy*, é do tipo Carman-Koseny, como nas propostas de Blanc e outros [5] e Voller e outros [50], [51]. O termo de Carman-Koseny depende da fração sólida do material, f_s, a qual assumiremos ser função conhecida dependendo unicamente da entalpia, isto é, $f_s = f_s(w)$.

Passemos a uma descrição matemática mais precisa dos problemas a serem estudados.

Sendo Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, onde ocorrem os processos físicos nos quais temos interesse, procuramos funções v, θ, w e p, representando respectivamente a velocidade, a temperatura, a entalpia e a pressão no material, que sejam soluções do seguinte sistema de equações (inclusões) diferenciais parciais não lineares:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta K(\theta) + v \cdot \nabla\theta & = & 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,T), \\
w & \subseteq & \beta(\theta) \ \text{ em } \ \Omega \times (0,T), \\
\theta & = & \theta_\delta \ \text{ sobre } \ \partial\Omega \times (0,T), \\
w(x,0) & = & w_0(x) \ \text{ em } \ \Omega, \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p - F(\theta) & \subseteq & -J(f_s(\beta(\theta)))v \ \text{ em } \ \overset{\circ}{Q}_{ml}, \\
div\ v & = & 0 \ \text{ em } \ \overset{\circ}{Q}_{ml}, \\
v & = & 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma_{ml}, \\
v(x,0) & = & v_0(x) \ \text{ em } \ \overset{\circ}{\Omega}_{ml}(0), \\
v & = & 0 \ \text{ em } \ \overset{\circ}{Q}_s .
\end{array}\right.$$

Aqui $0 < T < \infty$ é o tempo máximo de interesse no problema. Além disso, as zonas sólida, líquida e *mushy* são definidas em termos da entalpia w respectivamente como os conjuntos: $Q_s = \{(x,t) \in \Omega \times [0,T];\ w(x,t) \leq 0\}$, $Q_l = \{(x,t) \in \Omega \times [0,T];\ w(x,t) \geq L\}$, $Q_m = \{(x,t) \in \Omega \times [0,T];\ 0 < w(x,t) < L\}$. A região não-sólida, em cujo interior pode ocorrer movimentação do material e onde vale o segundo conjunto de equações acima, é a região definida por

$$Q_{ml} = Q_m \cup Q_l = \{(x,t) \in \Omega \times [0,T];\ 0 < w(x,t)\}.$$

No sistema acima, Σ_{ml} denota a fronteira lateral de Q_{ml} e $\overset{\circ}{\Omega}_{ml}(0) = \{x \in \Omega;\ 0 < w_0(x)\}$.

Os termos que aparecem no sistema têm os seguintes significados físicos:

$K(s)$ é uma função conhecida que descreve o quociente entre a condutividade térmica e o calor específico do material; $\beta(s)$ é uma multifunção também conhecida que descreve a relação entre a temperatura e a entalpia (ela é um gráfico monótono crescente com um salto que depende do calor latente do material L na origem e será melhor descrita posteriormente); θ_δ é uma dada distribuição de temperatura na fronteira da região Ω

O termo $F(\theta)$ é aquele que leva em conta os efeitos termoconvectivos na região não sólida. Uma aproximação do tipo Boussinesq comumente usada nestes casos é $F(\theta) = C\rho(\theta - \theta_r)\vec{g}$, com C uma constante, ρ a densidade média do fluido, θ_r uma temperatura referência e $\vec{g}$ a força da gravidade. Em nosso trabalho consideramos um caso mais geral para $F(\theta)$, assumimos que F é Lipschitz de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^N$ e sem perda de generalidade que $F(0) = 0$.

O termo correspondente ao termo do tipo Carman-Koseny é $J(f_s)v$. Observamos que ele afeta as equações do momento linear na zona *mushy*.

A análise da existência de soluções generalizadas do problema de evolução acima será o tema do Capítulo 2 do presente trabalho. Devido às dificuldades técnicas inerentes ao problema, seremos capazes apenas de provar a existência de soluções em um sentido bem fraco a ser detalhado no Capítulo 2. Isto levará a uma discussão sobre a própria validade do modelo considerado e ao levantamento de algumas conjecturas de carater físico, e ainda de carater precário, que poderiam explicar a questão.

Por razões técnicas que serão oportunamente explicadas, a existência de soluções para o problema estacionário correspondente ao problema anterior não pôde ser estabelecida com as técnicas utilizadas na Capítulo 2.

Entretanto, pudemos estabelecer a existência de soluções estacionárias generalizadas de um outro modelo que pode ser interpretado matematicamente como uma regularização do anterior. Em termos mais precisos e utilizando as mesmas notações anteriores, no Capítulo 3 estudaremos as equações estacionárias correspondentes ao sistema de equações (inclusões) diferenciais abaixo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \alpha\Delta w - \Delta K(\theta) + v\cdot\nabla\theta &= 0 \text{ em } \Omega\times(0,T), \\ w &\subseteq \beta(\theta) \text{ em } \Omega\times(0,T), \\ \theta &= \theta_\delta \text{ sobre } \partial\Omega\times(0,T), \\ w(x,0) &= w_0(x) \text{ em } \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + (v\cdot\nabla)v + \nabla p - F(\theta) &\subseteq -J(f_s(\beta(\theta)))v \text{ em } \overset{\circ}{Q}_{ml}, \\ div\ v &= 0 \text{ em } \overset{\circ}{Q}_{ml}, \\ v &= 0 \text{ sobre } \Sigma_{ml}, \\ v(x,0) &= v_0(x) \text{ em } \overset{\circ}{\Omega}_{ml}(0), \\ v &= 0 \text{ em } \overset{\circ}{Q}_s, \end{cases}$$

onde $\alpha > 0$ é uma constante e o termo $\alpha\Delta w$ corresponde à regularização matemática aludida anteriormente. Observamos que a primeira equação pode ser interpretada fisicamente como aquela que é obtida assumindo que o fluxo de calor é $-\alpha\nabla w - \nabla K(\theta)$, isto é, há um termo proporcional ao gradiente da entalpia, ao invez de apenas um termo dependente da temperatura, como é mais usual.

Assim, o problema estacionário que efetivamente estudaremos será o de achar funções v, θ, w e p, representando como antes respectivamente a velocidade, a temperatura, a entalpia e a pressão do material e tais que:

$$\begin{cases} -\alpha\Delta w - \Delta K(\theta) + v\cdot\nabla\theta &= 0 \text{ em } \Omega, \\ \theta &= \theta_\delta, \text{ sobre } \partial\Omega, \\ w &\subseteq \beta(\theta) \\ -\Delta v + (v\cdot\nabla)v + \nabla p - F(\theta) &\subseteq -J(f_s(\beta(\theta)))v \text{ em } \overset{\circ}{\Omega}_{ml}, \\ div\ v &= 0 \text{ em } \overset{\circ}{\Omega}_{ml}, \\ v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega_{ml}, \\ v &= 0, \text{ em } \overset{\circ}{\Omega}_s\,. \end{cases}$$

Neste problema as regiões sólida, líquida e *mushy* são definidas como $\Omega_s = \{x\in\Omega : w(x)\le 0\}$, $\Omega_l = \{x\in\Omega : w(x)\ge L\}$, $\Omega_m = \{x\in\Omega : 0 < w(x) < L\}$.

A região não-sólida no interior da qual pode ocorrer o movimento convectivo é agora:

$$\Omega_{ml} = \Omega_m \cup \Omega_l = \{x\in\Omega : 0 < w(x)\}.$$

As análises dos problemas anteriores seguem um padrão comum:

Para provar a existência de soluções, o primeiro passo é a utilização de uma técnica similar à introduzida no trabalho de Blanc e outros [5], para definir uma sequência de problemas aproximados usando um parâmetro que tenderá a zero para recuperar o problema original. Chamaremos tais problemas de problemas regularizados. Estes problema aproximados são definidos de modo a podermos considerar as equações do tipo Navier-Stokes válidas em todo o domínio e não sómente na região não-sólida, que é a priori desconhecida, como no problema original.

A seguir, utilizaremos técnicas de ponto fixo (Leray-Schauder) de operadores adequados para obter soluções de tais problemas aproximados. Neste ponto da argumentação, no caso do problema de evolução, utilizaremos um método semi-Galerkin e utilizaremos fortemente os resultados de O'Leary [36]. No caso do problema estacionário, seguiremos uma argumentação semelhante à de Blanc e outros [5], utilizando, entretanto, espaços funcionais diferentes.

Finalmente, utilizamos argumentos de compacidade (passagem ao limite) para obter soluções do problema original como limites de subsequências das soluções aproximadas obtidas no passo anterior.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 1, descreveremos as notações e os espaços funcionais que serão usados no decorrer do trabalho; para facilidade de referência enunciaremos também algumas proposições e teoremas que serão utilizados em vários argumentos dos capítulos posteriores. No Capítulo 2 provaremos a existência de solução generalizada do primeiro problema de evolução descrito anteriormente, enquanto que o Capítulo 3 será dedicado à provar a existência de solução para o problema estacionário.

Ressaltamos que, para facilitar a leitura do trabalho, procuramos escrevelo de tal forma que os Capítulos 2 e 3 possam ser lidos de forma basicamente independentes.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo descreveremos as notações e os espaços funcionais que serão usados neste trabalho.

1.1 Notações e Espaços funcionais

Ao longo deste trabalho usaremos as seguintes notações:

Ω denotará um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com medida de Lebesgue $|\Omega|$ e fronteira $\partial\Omega$.

Q representará o cilindro $\Omega \times [0, T]$.

$\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$ denotará a superficie lateral do cilindro Q.

$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_{i=1}^{N}$ denotará o operador gradiente.

$\triangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ denotará o operador laplaciano.

$div = \nabla\cdot$ é o operador divergente, assim, para uma função vetorial $\vec{u} = (u_1, ..., u_N)$ tem-se $div\ \vec{u} = \nabla\cdot \vec{u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$.

$|x| = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ e $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ são as normas euclideanas de $x \in \mathbb{R}^N$ e do vetor gradiente.

$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$ é o campo vetorial com i-ésima componente $\sum_{j=1}^{N} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Precisaremos também dos seguintes espaços funcionais:

$C^m(\Omega)$ é o espaço das funções com todas as derivadas de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m inteiro ou $m = \infty$).

$C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço vetorial das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω.

$D'(\Omega)$ é o espaço dual de $C_0^\infty(\Omega)$.

Uma função f é chamada de uniformemente Hölder contínua com expoente α em Ω se a quantidade

$$[f]_{\alpha,\Omega} = \sup_{x,\, y\in\Omega,\, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

é finita, e f será chamada de localmente Hölder contínua com expoente α em Ω, se f é uniformemente Hölder contínua com expoente α sobre subconjuntos compactos de Ω. No caso $\alpha = 1$, a função é chamada de uniformemente Lipschitz contínua.

Se k é um inteiro não negativo, os espaços de Hölder $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})(C^{k,\alpha}(\Omega))$ são definidos como os subespaços de $C^k(\overline{\Omega})(C^k(\Omega))$, das funções cujas derivadas parciais até de ordem k são uniformemente Hölder contínuas (localmente Hölder contínuas) com expoente α em Ω.

Por simplicidade escrevemos

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = C^\alpha(\Omega), \quad C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^\alpha(\overline{\Omega}),$$

e também denotamos

$$C^{k,0}(\Omega) = C^k(\Omega), \quad C^{k,0}(\overline{\Omega}) = C^k(\overline{\Omega}).$$

Denotamos $C_0^{k,\alpha}(\Omega)$, o espaço das funções de $C^{k,\alpha}(\Omega)$ que tem suporte compacto em Ω

Sejam

$$[f]_{k,0;\Omega} = |D^k f|_{0;\Omega} = \sup_{|\beta|=k} \sup_{\Omega} |D^\beta f|, \quad k = 1, 2, ...$$

$$[f]_{k,\alpha;\Omega} = [D^k f]_{\alpha;\Omega} = \sup_{|\beta|=k} [D^\beta f]_{\alpha;\Omega}$$

Com estas seminormas, definem-se as normas

$$|f|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{j=0}^{k} [f]_{j,0;\Omega} = \sum_{j=0}^{k} |D^j f|_{0;\Omega}$$

$$|f|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = |f|_{C^k(\overline{\Omega})} + [f]_{k,\alpha;\Omega} = |f|_{C^k(\overline{\Omega})} + [D^k f]_{\alpha;\Omega}$$

sobre os espaços $C^k(\overline{\Omega})$ e $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ respectivamente. Com estas normas os espaços $C^k(\overline{\Omega})$ e $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ são espaços de Banach.

$L^q(\Omega)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $u(x)$ de Ω em $\mathbb{R}$ mensuráveis (no sentido de Lebesgue) e $q-$integráveis ($q \geq 1$) cuja norma é dada por

$$|u|_{q,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (1 \leq q < \infty)$$

$$|u|_{\infty,\Omega} = ess \sup_{\Omega} |u(x)| \qquad (q = \infty).$$

O espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por:

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

$L^q_{loc}(\Omega)$ é o espaço das funções $u \in L^q(\Omega')$, para todo domínio limitado Ω' tal que $\overline{\Omega}' \subset \Omega$.

$L^q_{loc}(\overline{\Omega})$ é o espaço das funções $u \in L^q(\Omega')$, para todo domínio limitado $\Omega' \subset \Omega$. É claro que para Ω limitado tem-se $L^q_{loc}(\overline{\Omega}) = L^q(\Omega)$.

$W^{l,q}(\Omega)$ é o espaço de Banach (com l inteiro) das funções $u(x)$ em $L^q(\Omega)$ com derivadas generalizadas (no sentido usual) de ordem $\leq l$ que pertencem a $L^q(\Omega)$ e cuja norma é dada por

$$|u|_{W^{l,q}(\Omega)} = \sum_{j=0}^{l} \sum_{k=j} \left|D^k u\right|_{q,\Omega}.$$

No caso particular $q = 2$ denotamos $W^{l,2}(\Omega) = H^l(\Omega)$

$W_0^{l,q}(\Omega)$ denotará o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{l,q}(\Omega)$. Como caso especial para $q = 2$ denotamos $W_0^{l,2}(\Omega) = H_0^l(\Omega)$.

$W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)$ é o espaço de traços com a norma

$$|\gamma|_{W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)} = inf\left\{|u|_{W^{1,q}(\Omega)};\ u = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega\right\}$$

Da mesma forma, quando $\partial\Omega$ é suficientemente regular, podemos definir o espaço $W^{k-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)$. No caso $q = 2$, denotamos $W^{k-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) = H^{k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ (Para mais detalhes ver Adams [1]).

No caso dos espaços das funções vetoriais com N componentes nos espaços enunciados acima , usaremos a notação $C_0^\infty(\Omega)^N$, $L^q(\Omega)^N$, $W^{p,q}(\Omega)^N$ e supomos que eles são equipados com a norma do produto usual (exeto $C_0^\infty(\Omega)^N$ que não é um espaço normado).

Para os resultados associados às equações de Navier-Stokes, necessitaremos lembrar as definições dos seguintes espaços:

$\mathcal{V}(\Omega)$ denotará o espaço das funções $u(x)$ em $C_0^\infty(\Omega)^N$ com divergente nulo.

$H(\Omega)$ representa o fecho de $\mathcal{V}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)^N$.

$V(\Omega)$ representa o fecho de $\mathcal{V}(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)^N$.

Quando $\partial\Omega$ é Lipschitz-contínua, os espaços $H(\Omega)$ e $V(\Omega)$ podem ser caracterizados por:

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \{u \in L^2(\Omega)^N;\ div\, u = 0, \text{ em } \Omega;\ u\cdot \nu = 0, \text{ sobre } \partial\Omega\} \\ V(\Omega) &= \{u \in H_0^1(\Omega)^N;\ div\, u = 0, \text{ em } \Omega\}, \end{aligned}$$

onde ν é a normal unitária externa de $\partial\Omega$.

O espaço $V(\Omega)$ é equipado com o produto interno $(,)_{V(\Omega)}$ e norma $|\cdot|_{V(\Omega)}$ dados por:

$$(u,v)_{V(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

$$|u|_{V(\Omega)} = |\nabla u|_{2,\Omega}.$$

O espaço $L^2(\Omega)^N$ pode ser decomposto segundo a descoposição de Helmholtz como:

$$L^2(\Omega)^N = H(\Omega) \oplus H^\perp,$$

onde

$$H^\perp = \{u \in L^2(\Omega)^N;\ u = \nabla q,\ q \in L^2(\Omega)\}.$$

Para funções vetoriais u, v, w adequadas, define-se

$$B(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega u_j(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) w_i(x) dx$$

e valem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} B(u,v,v) &= 0,\ \forall u \in V(\Omega),\ v \in H_0^1(\Omega)^N \cap L^N(\Omega)^N \\ B(u,v,w) &= -B(u,w,v),\ \forall u \in V(\Omega),\ v \in H_0^1(\Omega)^N \cap L^N(\Omega)^N. \end{aligned}$$

Se u é função vetorial, φ e ψ são funções escalares, então pode-se definir

$$b(u,\varphi,\psi) = \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega u_j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \psi(x) dx$$

e vale o seguinte

$$b(u,\varphi,\varphi) = 0,\ \forall u \in V(\Omega),\ \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^N(\Omega).$$

As informações anteriores, e muitas outras, podem ser encontradas por exemplo em Temam [43] e Ladyzenskaja [27].

Sejam agora B um espaço de Banach e $1 \leq q \leq \infty$.

$L^q(0,T;B)$ é um espaço (de classes de funções iguais q.t.p.) de funções mensuráveis (no sentido de Lebesgue) f definidas em $(0,T)$ com valores em B e tal que $|f(t)|_B \in L^q(0,T)$.

O espaço $L^q(0,T;B)$ com a norma

$$\begin{aligned} |f|_{L^q(0,T;B)} &= \left(\int_0^T |f(t)|_B^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ |f|_{L^\infty(0,T;B)} &= ess \sup_{0<t<T} |f(t)|_B, \end{aligned}$$

é um espaço de Banach.

$C([0,T];B)$ é o espaço das funções contínuas de [0,T] em B equipado com norma

$$|f|_{C([0,T];B)} = \sup_{[0,T]} |f(t)|_B.$$

O espaço $C([0,T];B)$ é denso em $L^q(0,T;B)$ para $1 \leq q < \infty$.

Como casos especiais temos os espaços $L^q(0,T;L^p(\Omega))$ que denotamos também $L^{q,p}(Q)$ que é o espaço de Banach das (classes de) funções $f(x,t)$ de Q em $\mathbb{R}$ mensuráveis (no sentido de Lebesgue) cuja norma é dada por

$$|f|_{L^q(0,T;L^p(\Omega)} = |f|_{q,p,Q} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |f(x,t)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (q,p \geq 1).$$

No caso $p = q$ usamos a notação $L^q(0,T,L^q(\Omega)) = L^q(Q)$.

1.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção enunciamos alguns lemas que usaremos no decorrer deste trabalho.

O resultado seguinte é o teorema de Arzela-Ascoli e pode ser encontrado em Royden [38], p. 169 (veja também Friedman [22], Teorema 3.6.4, p. 112).

Lema 1.1 *Seja $\mathcal{F}$ uma família equicontínua de funções de um espaço topológico separável X para um espaço métrico Y. Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $\mathcal{F}$ tal que para cada x em X o fecho do conjunto $\{f_n(x) : 0 \leq n < \infty\}$ seja compacto. Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ que converge pontualmente para uma função contínua f e a convergência é uniforme sobre cada subconjunto compacto de X.*

O próximo resultado pode ser encontrado em Ladyzenskaja([29], p.201, caso particular do Teorema 14.1)

Lema 1.2 *Seja*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j} + a_i u) + \sum_{i=1}^{N} b_i u_{x_i} + cu = f + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

onde L é um operador uniformemente elíptico. Sejam a, b, $f \in L^q(\Omega)$, $c \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$ para $q > N$, e $\partial\Omega$ regular. Se $u \in H^1(\Omega)$ é solução generalizada da equação acima , $\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u(x)| < M < \infty$ e $u/_{\partial\Omega} \in C^{0,\beta}(\partial\Omega)$, então $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1]$ e

$$|u|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C,$$

onde C é uma constante que depende de q, $|u|_{1,\Omega}$, $|u|_{C^{\beta}(\partial\Omega)}$ e β.

Enunciamos agora o teorema de ponto fixo de Leray-Schauder (caso especial), que pode ser encontrado em Gilbarg-Trudinger [23], p. 280, Teorema 11.3.

Lema 1.3 *Seja B um espaço de Banach e seja $T : B \to B$ uma função contínua e compacta (a imagem de conjuntos limitados tem fecho compacto). Suponhamos que existe uma constante M tal que*

$$|x|_B \leq M$$

para todo $x \in B$ satisfazendo $x = \lambda T x$, com $\lambda \in [0,1]$. Então T tem um ponto fixo.

O resultado seguinte pode ser encontrado em O'Leary [36], p. 3, Proposição 2, onde o enunciado é dado de maneira ligeiramente diferente. Aqui acrescentamos ao enunciado algumas das estimativas que O'Leary obteve durante a demonstração da Proposição 2, pois elas serão importantes para os nossos argumentos.

Lema 1.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, sejam β um gráfico estritamente crescente com um possível salto na origem tal que $\beta(0) = [0, L]$, $0 < \hat{\beta}_0 \leq \beta'(s) \leq \hat{\beta}_1$, se $s \neq 0$ e $K(s)$ uma função monótona contínua, diferenciável fora da origem, tal que $K(0) = 0$, $0 < K_0 \leq K'(s) \leq K_1$, se $s \neq 0$, e seja $T > 0$. Seja $v \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap L^{\infty}(0,T; L^2(\Omega))$, com divergente nulo no sentido fraco,* *seja* $g \in L^2(0,T;W^{\frac{3}{2},2}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ *e suponhamos que* $w_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ *e* $u_0 = \beta^{-1}(w_0)$. *Então existem funções* $u \in L^\infty(Q) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ *e* $w \subseteq \beta(u)$ *tais que*

$$\begin{aligned} w_t - \triangle K(u) + v\cdot \nabla u &= 0, \text{ fraco em } \Omega \times (0,T) \\ u &= g, \text{ sobre } \Sigma \\ w(\cdot\,,0) &= w_0, \text{ em } \Omega, \end{aligned}$$

e

$$|u|_{L^\infty(Q)} \leq \frac{1}{\hat{\beta}_0}(max\{|w_0|_{L^\infty(\Omega)}, \hat{\beta}_1|g|_{L^\infty(Q)} + L\}) \tag{1.1}$$

$$|u|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C, \tag{1.2}$$

onde C *é uma constante que que depende apenas de* $|w_0|_{L^\infty(\Omega)}$, $|g|_{L^\infty(Q)}$ *e* $|v|_{L^\infty(0,T;H(\Omega))}$.

Observação 1.5 *Faremos a seguir um resumo da prova do Lema 1.4, conforme O'Leary [36], p. 3, Proposição 2, considerando aqueles aspectos que serão úteis para o desenvolvimento do nosso trabalho.*

Resumo da prova do Lema 1.4:

Sejam $\epsilon > 0$ e β_ϵ, K_ϵ, aproximações suaves de β e K respectivamente, tais que

$$\beta_\epsilon(0) = 0, \qquad 0 < \hat{\beta}_0 \leq \beta'_\epsilon(s) \leq \frac{1}{\epsilon}, \tag{1.3}$$

$$K_\epsilon(0) = 0, \qquad 0 < K_0 \leq K'_\epsilon(s) \leq K_1. \tag{1.4}$$

Supomos também que $|\beta'_\epsilon(s)| \leq \beta_1$, para $|s| \geq \epsilon$ e que $|\beta_\epsilon(s)| \leq \beta_1|s| + L$ para cada s. As convergência das funções β_ϵ e K_ϵ são no seguinte sentido

$$\beta_\epsilon \longrightarrow \beta, \text{ uniformemente em } \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$K_\epsilon \longrightarrow K, \text{ uniformemente em } \mathbb{R}.$$

Seja v_ϵ aproximação solenoidal suave de v, por exemplo $v_\epsilon = f_\epsilon * v$, $f_\epsilon(r) = \epsilon^{-N} f(\frac{r}{\epsilon})$, com

$$f(r) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-r^2}}, \text{ se } |r| < 1, \\ 0, \text{ se } |r| \geq 1. \end{cases}$$

Seja g_ϵ é uma aproximação suave de g tais que

$$g_\epsilon \longrightarrow g, \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Seja $h = \dfrac{T}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, e consideremos a família de problemas

$$\frac{1}{h}(w_\epsilon^i - w_\epsilon^{i-1}) - \triangle K_\epsilon(u_\epsilon^i) + v_\epsilon^i \cdot \nabla u_\epsilon^i = 0, \qquad i = 1, 2..., n-1 \tag{1.5}$$

$$v_\epsilon^i(x) = \frac{1}{h}\int_{ih}^{(i+1)h} v_\epsilon(x,s)ds \tag{1.6}$$

$$u_\epsilon^i/_{\partial\Omega} = \frac{1}{h}\int_{ih}^{(i+1)h} g_\epsilon(x,s)ds \tag{1.7}$$

$$w_\epsilon^i = \beta_\epsilon(u_\epsilon^i), \quad i = 1, 2, ..., n-1 \tag{1.8}$$

$$w_\epsilon^0 = w_0 \subseteq \beta(u_0) \tag{1.9}$$

Para ϵ e i fixos, (1.5) é uma equação elíptica quase linear para $w_\epsilon^i = \beta_\epsilon(u_\epsilon^i)$. Pela monotonia de K_ϵ e $\beta\epsilon$ e o princípio do máximo (veja [29], capítulo 3 §1) temos

$$\sup_{\overline{\Omega}} |w_\epsilon^i| \leq max\{ \sup_{\partial\Omega\times(0,T)} |\beta_\epsilon(g_\epsilon)|, \sup_{\overline{\Omega}} |w_\epsilon^{i-1}|\} \tag{1.10}$$

Para $1 \leq i \leq n-1$. Por [23] (Teorema 15.11, Teorema 6.19) tem-se a existência de solução clássica $w_\epsilon^i \in C^3(\overline{\Omega})$ para cada ϵ e i, logo, as limitações dos dados iniciais e de fronteira implicam, por (1.10) que $|w_\epsilon^i|_{L^\infty(\Omega)}$ e $|u_\epsilon^i|_{L^\infty(\Omega)}$ são limitadas uniformemente com respeito a ϵ e i.

Para cada $h = \dfrac{T}{n}$ e $i = 1, ..., n-1$, definem-se as funções:

$$\begin{aligned} u_{\epsilon,h}(x,t) &= u_\epsilon^i(x), \ \text{ se } \ ih \leq t < (i+1)h && (1.11)\\ w_{\epsilon,h}(x,t) &= w_\epsilon^i(x), \ \text{ se } \ ih \leq t < (i+1)h && (1.12)\\ v_{\epsilon,h}(x,t) &= v_\epsilon^i(x), \ \text{ se } \ ih \leq t < (i+1)h. && (1.13) \end{aligned}$$

Como (1.5) vale no sentido clássico, multiplicando por hu_ϵ^i, integrando sobre Ω e somando, obtém-se

$$\int_h^T \int_\Omega |\nabla u_{\epsilon,h}|^2 dxdt \leq C, \tag{1.14}$$

onde C é uma constante que depende de $|v|_{L^\infty(0,T;H(\Omega))}$, $|w_0|_{L^\infty(\Omega)}$, $|g|_{L^\infty(Q)}$ e $|g|_{L^2(0,T;W^{\frac{3}{2},2}(\Omega))}$, mas é independente de ϵ e h.

Para obter as estimativas para $|u|_{L^\infty(Q)}$ e $|u|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$ na forma como elas estão apresentadas no enunciado do lema anterior, e as convergências que vamos precisar no nosso trabalho, é necessária uma adaptação (trivial) da demonstração da Proposição 2 de O'Leary [36]: basta tomar as aproximações construídas em (1.11) e (1.12), acrescentando que

$$u_{\epsilon,h}(x,t) = u_0(x), \text{ se } 0 \leq t < h \tag{1.15}$$

e

$$w_{\epsilon,h}(x,t) = w_0(x), \quad \text{se } 0 \leq t < h, \tag{1.16}$$

e é como vamos considera-las daquí pra frente. Destacamos também que com estas extensões, obtemos uma melhoria na condição inicial (ja não em sentido fraco). O'Leary (veja [36]) não faz estas extensões, pois o interesse dele no artigo é descrever o comportamento da entalpia na região mushy e não obter estimativas para a temperatura e entalpia.

Agora, de (1.10) obtemos:

$$|u_{\epsilon,h}|_{L^\infty(Q)} \leq C_2, \tag{1.17}$$
$$|w_{\epsilon,h}|_{L^\infty(Q)} \leq C_3, \tag{1.18}$$

onde C_2 é a constante dada em (1.1) e C_3 é uma constante que depende de $|w_0|_{L^\infty(Q)}$ e $|g|_{L^\infty(Q)}$ mas é independente de ϵ e de h. De (1.11), (1.14) e de (1.15), temos

$$|u_{\epsilon,h}|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C \tag{1.19}$$

onde C é uma constante que depende de $|v|_{L^\infty(0,T;H(\Omega))}$, $|w_0|_{L^\infty(\Omega)}$, $|g|_{L^\infty(Q)}$ e $|g|_{L^2(0,T;W^{\frac{3}{2},2}(\Omega))}$ mas é independente de ϵ e h.

Vamos verificar agora que a familia $\{w_{\epsilon,h}\}$ é pre-compacta em $L^1(Q)$, para isto prova-se primeiro a pre-compacidade da familia $\{w_{\epsilon,h}\}$, considerando

$$w_{\epsilon,h} : [0,T) \to L^1(B_r),$$

sendo B_r uma bola aberta de raio r contida em Ω. Esta pre-compacidade a provaremos via Teorema de Arsela-Ascoli (veja Lema 1.1).

i) Verificamos que o fecho do conjunto $\{w_{\epsilon,h}(t)\}$ é compacto em $L^1(B_r)$, $\forall t \in [0,T)$. De fato, seja $\Omega' \subset\subset \Omega$ e seja $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\zeta(x) = 1$ em Ω'.

Seja $\rho > 0$; define-se

$$\phi^i(x) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\zeta(x)\frac{w^i_{\epsilon,x_k}}{\sqrt{(w^i_{\epsilon,x_k})^2+\rho}}\right\} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\zeta sgn^\rho w^i_{\epsilon,x_k}\right\},$$

onde $k = 1, ..., N$.

Multiplicando (1.5) por $h\phi^i$, integrando em Ω, somando para $i = 1, ..., m$ para um dado m arbitrario tal que $1 \leq m \leq n-1$, fazendo estimativas que levam em conta a desigualdade (1.4) e fazendo $\rho \to 0$ obtém-se

$$\int_{\Omega'} |\nabla w_{\epsilon,h}(x,t)| dx \leq c, \tag{1.20}$$

onde c é uma constante que depende de $|w_0|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $|\Omega|$, $|g|_{L^\infty(Q)}$, $|g|_{L^2(0,T;W^{\frac{3}{2},2}(\Omega))}$, $|v|_{L^\infty(0,T;H(\Omega))}$ e $|v|_{L^2(0,T;V(\Omega))}$, mas é independente de ϵ e h.

De (1.18), (1.20) e tendo em conta (1.16), obtemos que $\{w_{\epsilon,h}(t)\}$ é limitado em $W^{1,1}(B_r)$ uniformemente com respeito a ϵ e h, $\forall t \in [0,T)$, logo, como a inclusão $W^{1,1}(B_r) \subset L^1(B_r)$ é compacta, conclui-se que $\{w_{\epsilon,h}(t)\}$ é pre-compacto em $L^1(B_r)$.

ii) Para verificar a equicontinuidade da familia$\{w_{\epsilon,h}\}$, usaremos o seguinte lema, que corresponde ao Lema 3 de O'Leary -[36] e cuja demostração pode ser encontrada em Kružkov -[26].

Lema 1.6 *Seja $B_{r+\rho} \subset \mathbb{R}^N$, a bola aberta e $T > 0$, com $0 < 2\rho \leq r$, suponhamos que*

$$w \in L^\infty(B_{r+\rho} \times [0,T]) \tag{1.21}$$

e

$$ess \sup_{0 \leq t < T} \int_{B_r} |\nabla w(x,t)| dx \leq M. \tag{1.22}$$

Se existe uma constante γ tal que para cada $\psi \in C_0^2(B_r)$ e para todo $0 \leq t < t + \tau < T$

$$\left| \int_{B_r} \{w(x,t+\tau) - w(x,t)\}\psi(x) dx \right| \leq \gamma\tau \sup_{B_r}\{|\psi|_{2,B_r} + |\nabla\psi|_{2,B_r} + |\triangle\psi|_{2,B_r}\}. \tag{1.23}$$

Então, para todo $0 \leq t < t + \tau < T$

$$\int_{B_r} |w(x,t+\tau) - w(x,t)| dx \leq C \min_{0<\lambda\leq\rho} \{\lambda + M\lambda + \frac{\tau}{\lambda^2}\} \tag{1.24}$$

onde C é uma constante que depende de $|w|_{L^\infty(B_r)}$, M, γ, r, e N.

É claro que a conclusão do Lema 1.6 fornece a equicontinuidade da família $\{w_{\epsilon,h}\}$, então devemos verificar que as hipóteses do Lema 1.6 são satisfeitas.

De fato, da desigualdade (1.20) obtemos que satisfaz-se (1.22). Para verificar (1.23), tomemos $0 \leq t < t+\tau < T$, m_1, m_2 tal que $w_\epsilon^{m_1}(x) = w_{\epsilon,h}(x,t)$, $w_\epsilon^{m_2}(x) = w_{\epsilon,h}(x,t+\tau)$, com $0 \leq m_1 < m_2 \leq n-1$. Fazemos notar que ao considera $0 \leq m_1$ estamos estendendo a estimativa obtida em O'Leary-[36], até o t=0, o que permitirá melhorar a condição inicial que será obtida.

Seja $\psi \in C_0^2(\Omega)$, multiplicamos (1.3) por ψ, integramos em Ω e somamos de m_1 até m_2 e obtemos

$$\sum_{i=m_1+1}^{m_2} \int_\Omega (w_\epsilon^i - w_\epsilon^{i-1})\psi dx = h \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \int_\Omega K_\epsilon(u_\epsilon^i)\triangle\psi dx + h \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \int_\Omega u_\epsilon^i v_\epsilon^i \nabla\psi dx,$$

Portanto, vale o seguinte:

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \{w_{\epsilon,h}(x,t+\tau) - w_{\epsilon,h}(x,t)\}\psi dx\right| dx &\leq \int_t^{t+\tau}\int_\Omega |K_\epsilon(u_{\epsilon,h})\triangle\psi + u_{\epsilon,h}v_{\epsilon,h}\nabla\psi| dxds \\ &\leq C\tau \sup_\Omega\{|\triangle\psi|_{2,\Omega} + |\nabla\psi|_{2,\Omega}\}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

onde C é uma constante que depende de K_1, $|\Omega|$, $|u_{\epsilon,h}|_{L^\infty(Q)}$ e $|v|_{L^\infty(0,T;H(\Omega)}$ mas é independente de ϵ e h, desta forma verifica-se (1.23), logo, pelo Lema 1.6 conclui-se que vale (1.24) e assim temos que a familia $\{w_{\epsilon,h}\}$ é equicontinua e então satisfaz as hipóteses do Teorema de Arsela-Ascoli (Lema 1.1). Existe então subsequência, que denotamos da mesma maneira tal que

$$w_{\epsilon,h}(t) \longrightarrow w(t), \text{ em } L^1(B_r), \ \forall t \in [0,T), \tag{1.26}$$

quando, $\epsilon, h \to 0^+$, temos então

$$w_{\epsilon,h}(x,t) \longrightarrow w(x,t), \ q.t.p. \text{ em } B_r, \ \forall t \in [0,T), \tag{1.27}$$

quando $\epsilon, h \to 0^+$.

Observamos que de (1.16), tem-se $w_{\epsilon,h}(x,0) = w_0$, e então por (1.27) obtemos que $w(x,0) = w_0$.

Consideramos agora

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty B_{r_j}.$$

Existe subsequência tal que

$$w^1_{\epsilon_k,h_k}(t) \longrightarrow w^1(t), \text{ em } L^1(B_{r_1}), \ \forall t \in [0,T),$$

e, portanto, obtemos subsequência de $\{w^1_{\epsilon_k,h_k}\}$, que denotamos por $\{w^2_{\epsilon_k,h_k}\}$, tal que

$$w^2_{\epsilon_k,h_k}(t) \longrightarrow w^2(t), \text{ em } L^1(B_{r_2}), \ \forall t \in [0,T).$$

Por um processo indutivo, obtém-se $\{w^j_{\epsilon_k,h_k}\}$, subsequência de $\{w^{j-1}_{\epsilon_k,h_k}\}$ tal que

$$w^j_{\epsilon_k,h_k}(t) \longrightarrow w^j(t), \text{ em } L^1(B_{r_j}), \ \forall t \in [0,T),$$

com $w^j/_{B_{r_{j-1}}} = w^{j-1}$.

Pelo conhecido processo diagonal, obtemos uma sequência $\{w^k_{\epsilon_k,h_k}\}$ tal que

$$w^k_{\epsilon_k,h_k}(t) \longrightarrow w(t), \text{ em } L^1_{loc}(\Omega), \text{ e q.t.p. em } \Omega, \ \forall t \in [0,T). \tag{1.28}$$

Da definição $w_{\epsilon,h} = \beta_\epsilon(u_{\epsilon,h})$, obtemos que $u_{\epsilon,h}(t) \to u(t)$, q.t.p em Ω, $\forall t \in [0,T)$, então de (1.17) obtém-se a estimativa (1.1). Da estimativa (1.19), obtemos que

$$u_{\epsilon,h} \rightharpoonup u, \text{ fraco em } L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$

e assim a estimativa (1.2) é válida.

Argumentos padrões permitem concluir que w e u satisfazem

$$\begin{aligned} w_t - \triangle K(u) + v\cdot\nabla u &= 0, \text{ fraco em } \Omega\times(0,T) \\ w &\subseteq \beta(u), \text{ em } \Omega\times(0,T) \\ u &= g, \text{ sobre } \Sigma \\ w(x,0) &= w_0, \text{ em } \Omega. \end{aligned}$$

Os detalhes da prova do Lema 1.4, encomtram-se em O'Leary- [36](prova da Proposição 2).

Destacamos a seguir alguns aspectos importantes que são obtidos da prova do Lema 1.4, que foi apresentada de forma resumida na Observação 1.5.

Observação 1.7 *Como as estimativas (1.18), (1.20) e (1.25) são independentes de ϵ e h, podemos fazer $h \to 0$ e obter que*

$$w_{\epsilon,h}(x,t) \longrightarrow w_\epsilon(x,t), \ \textit{q.t.p. em } \Omega, \ \forall t \in [0,T), \tag{1.29}$$

como por (1.16) tem-se $w_{\epsilon,h}(x,0) = w^0_\epsilon = w_0$, em Ω, temos então que

$$w_\epsilon(x,0) = w^0_\epsilon = w_0, \quad \textit{em } \Omega. \tag{1.30}$$

Além disso, existe função u_ϵ e satisfaz-se

$$\begin{aligned} w_{\epsilon t} - \triangle K_\epsilon(u_\epsilon) + v_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon &= 0, \ \textit{fraco em } \Omega \times (0,T) \\ w_\epsilon &= \beta_\epsilon(u_\epsilon) \ \textit{em } \Omega \times (0,T) \\ u_\epsilon &= g_\epsilon, \ \textit{sobre } \Sigma \\ w_\epsilon(x,0) &= w_0, \ \textit{em } \Omega. \end{aligned}$$

De (1.17) e (1.18) tem-se

$$|u_\epsilon|_{L^\infty(Q)} \leq C_2, \quad |w_\epsilon|_{L^\infty(Q)} \leq C_3, \tag{1.31}$$

onde C_2 e C_3 são as mesmas constantes de (1.17) e (1.18) respectivamente, as quais dependem de $|w_0|_{L^\infty(\Omega)}$ e $|g|_{L^\infty(Q)}$ mas são independentes de ϵ. De (1.19) temos

$$|u_\epsilon|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C, \tag{1.32}$$

onde C é a mesma constante de (1.19), a qual depende de $|v|_{L^\infty(0,T;H(\Omega))}$, $|w_0|_{L^\infty(\Omega)}$, $|g|_{L^\infty(Q)}$ e $|g|_{L^2(0,T;W^{\frac{3}{2},2}(\Omega))}$ mas não depende de ϵ.

Agora, de (1.28) temos que

$$w_\epsilon(x,t) \longrightarrow w(x,t), \ \textit{q.t.p. em } \Omega, \ \forall t \in [0,T), \tag{1.33}$$

quando $\epsilon \to 0$, e então por (1.30) temos que

$$w(x,0) = w_0, \quad \textit{em} \quad \Omega. \tag{1.34}$$

O lema seguinte também pode ser encontrado em O'Leary ([36];p. 10, Proposição 4).

Lema 1.8 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ para $N \geq 2$, domínio com fronteira regular e seja $T > 0$. Suponha que v_1, $v_2 \in L^2(Q)$, tem divergente nulo no sentido fraco. Se $w_i \subseteq \beta(u_i)$ e $u_i \in L^\infty(Q) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ satisfazem, para $i = 1, 2$,*

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial t} - \triangle K(u_i) + v_i \cdot \nabla u_i &= 0, \ \textit{em } \Omega \times (0,T) \\ u_i &= g, \ \textit{sobre } \Sigma \\ w_i/_{t=0} &= w_{0,i}, \end{aligned}$$

Então,

$$\underset{0<t<T}{ess \ \sup} |w_2(\cdot\,,t) - w_1(\cdot\,,t)|^2_{2,\Omega} \leq C|w_{0,2} - w_{0,1}|_{1,\Omega} + C|v_2 - v_1|_{L^2(Q)},$$

onde C é uma constante que depende de $|u_i|_{L^\infty(Q)}$, e $|\nabla u_i|_{L^2(Q)}$.

Finalmente, queremos ressaltar que no decorrer deste trabalho teremos que recorrer muitas vezes a subconjuntos (e os seus interiores) definidos por desigualdades com funções não regulares (funçõe em espaços L^p). Para não haver ambiguidade em tais situações, insistimos que durante todo o nosso desenvolvimento estaremos sempre tomando tais desigualdades utilizando o (único) representante de Lebesgue associado à classe de equivalência da função. Por exemplo, em uma desigualdade do tipo $\{x \in \Omega : w(x) \leq 0\}$, a função w é aquela definida para cada $x \in \Omega$ por

$$w(x) = \liminf_{r \to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \overline{w}(z) dz,$$

onde $B(x,r)$ denota a bola de centro x e raio r em Ω; $|B(x,r)|$ denota a medida de Lebesgue da bola e $\overline{w}$ é qualquer representante da classe (veja por exemplo Shilov e Gurevich [40], p.220, Theorem 5). Valem definições análogas para funções definidas em Q.

Capítulo 2

Um Problema de Evolução

Introdução

Apresentaremos neste capítulo um resultado de existência de soluções generalizadas de um modelo matemático para a evolução do processo de solidificação/liquefação para certas classes de materiais puros. Tal modelo leva em conta os processos de condução de energia térmica, bem como a sua geração ou absorção devido a mudanças de fases, e também os processos convectivos que se realizam nas fases não sólidas, e é constituído de equações que descrevem o balanço de energia térmica acopladas a equações que governam o movimento do material na região não sólida (líquida-mushy). Estas últimas equações são do tipo Navier-Stokes com termos adicionais do tipo Boussinesq para levar em conta os efeitos termoconvectivos e um termo do tipo Carman-Koseny que modela a dinâmica do fluido na zona *mushy*.

O modelo está baseado nos trabalhos de DiBenedetto e O'Leary [20] e o de O'Leary [36], quanto aos aspectos de balanço de energia térmica e mudança de fases, e Blanc e outros [5] quanto aos aspectos convectivos.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 2.1, descreveremos com algum detalhe o modelo, bem como as regiões nas quais as suas equações fazem sentido. Na Seção 2.2, introduziremos as hipóteses matemáticas que serão assumidas verdadeiras em todo o capítulo; também explicitaremos a definição de solução generalizada que estaremos considerando e enunciaremos um resultado de existência para tais soluções (Teorema 2.5). Na Seção 2.3 introduzimos um problema regularizado associado ao problema original, dependente de um parâmetro auxiliar, para o qual provaremos existência de soluções utilizando o método semi-Galerkin e técnicas de ponto fixo. Finalmente, na Seção 2.4 provaremos o Teorema 2.5 tomando o limite da sequência de soluções regularizadas, obtidas dos problemas regularizados quando o parâmetro auxiliar vai a zero.

2.1 Descrição do modelo

Consideramos um processo físico no qual pode ocorrer mudança de fases de um certo material puro e esteja evoluindo em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N = 2,\ 3)$, que consideraremos como um dominio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular. Do ponto de vista matemático, tal processo ocorre no cilindro do espaço-tempo

$$Q = \Omega \times [0, T]$$

e nele aparecem três regiões distintas, que denotamos Q_s, Q_l e Q_m, que dependem de como se realiza o processo de mudança de fase e correspondem às diversas fases em que pode se encontrar o material. Q_s e Q_l serão respectivamente as regiões nas quais o material está em fase sólida e líquida, respectivamente; Q_m corresponderá à região conhecida como região *mushy*.

Como estamos adotando um modelo do tipo entalpia, a fase do material em um ponto $(x, t) \in Q$ dependerá do valor da entalpia $w(x, t)$ do material naquele ponto; esta, por sua vez, depende da temperatura $\theta(x, t)$ de uma forma altamente não linear que descreveremos posteriormente. É importante destacar que ao longo deste trabalho suporemos, por simplicidade, que **a temperatura de mudança de fase é igual a zero**. Desta forma a região onde $\theta(x, t) < 0$ estará necessariamente contida na região sólida, a qual é aquela na qual $w(x, t) \leq 0$. A região onde $\theta(x, t) > 0$ estará na região líquida, a qual é caracterizada por $w(x, t) \geq L$; a região *mushy* é aquela onde $0 < w(x, t) < L$, com L uma constante que depende do material e é chamada de calor latente; esta região está contida na região onde $\theta(x, t) = 0$ (Para mais detalhes ver [3]).

Por outro lado, como estamos levando em conta os efeitos convectivos, o termo de Carman-Koseny nas equações de movimento do material, o qual depende da fração sólida f_s, requer que haja a seguinte relação de compatibilidade: o valor da fração sólida deve ser $f_s = 1$ na região sólida, $f_s = 0$ na região líquida e $0 < f_s < 1$ na região *mushy*. Assim, f_s deve ser uma função da entalpia w, isto é, $f_s = f_s(w)$ onde f_s é uma função real tal que $f_s(w) = 1$

quando $w \in (-\infty, 0]$, $f_s(w) = 0$ quando $w \in [L, +\infty)$ e $0 < f_s(w) < 1$ quando $w \in (0, L)$.

De forma mais precisa, sendo $L > 0$ o calor latente do material, definimos as regiões Q_s, Q_l e Q_m como:

$$\begin{aligned}
Q_s &= \{(x,t) \in Q;\ w(x,t) \leq 0\} = \{(x,t) \in Q;\ f_s(w(x,t)) = 1\}, \\
Q_l &= \{(x,t) \in Q;\ w(x,t) \geq L\} = \{(x,t) \in Q;\ f_s(w(x,t)) = 0\}, \\
Q_m &= \{(x,t) \in Q;\ 0 < w(x,t) < L\} = \{(x,t) \in Q;\ 0 < f_s(w(x,t)) < 1\}.
\end{aligned}$$

Define-se também a região não sólida como

$$Q_{ml} = Q_m \cup Q_l = \{(x,t) \in Q;\ 0 < w(x,t)\}$$

Necessitaremos também dos seguintes conjuntos definidos para cada $t \in [0, T]$ como:

$$\begin{aligned}
\Omega_s(t) &= \{x \in \Omega;\ w(x,t) \leq 0\}, \\
\Omega_l(t) &= \{x \in \Omega;\ w(x,t) \geq L\}, \\
\Omega_m(t) &= \{x \in \Omega;\ 0 < w(x,t) < L\}, \\
\Omega_{ml}(t) &= \Omega_m(t) \cup \Omega_l(t) = \{x \in \Omega;\ 0 < w(x,t)\}.
\end{aligned}$$

Além disso, denotaremos a fronteira lateral da região não sólida por

$$\Sigma_{ml} = \cup_{0<t<T}\ \partial\Omega_{ml}(t) \times \{t\}.$$

O nosso problema será achar funções v, θ, w e p, representando respectivamente a velocidade, a temperatura, a entalpia e a pressão do material, satisfazendo em um sentido generalizado a ser precisado na proxima seção o seguinte sistema de equações (inclusões) diferenciais parciais $(\mathcal{P}_0)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta K(\theta) + v\cdot \nabla\theta &= 0 \text{ em } \Omega\times(0,T) && (2.1)\\
w &\subseteq \beta(\theta) \text{ em } \Omega\times(0,T) && (2.2)\\
\theta &= \theta_\delta \text{ sobre } \partial\Omega\times(0,T) && (2.3)\\
w(x,0) &= w_0(x) \text{ em } \Omega && (2.4)\\
\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + (v\cdot\nabla)v + \nabla p - F(\theta) &\subseteq -J(f_s(\beta(\theta)))v \text{ em } \overset{\circ}{Q}_{ml} && (2.5)\\
div\ v &= 0 \text{ em } \overset{\circ}{Q}_{ml} && (2.6)\\
v &= 0 \text{ em } \overset{\circ}{Q}_s && (2.7)\\
v &= 0 \text{ sobre } \Sigma_{ml} && (2.8)\\
v(x,0) &= v_0(x) \text{ em } \overset{\circ}{\Omega}_{ml}(0) && (2.9)
\end{aligned}
$$

Na próxima seção, daremos as hipóteses matemáticas precisas sobre os vários termos do sistema. Aqui, descreveremos apenas os seus significados físicos

A função $K(s)$ é suposta conhecida e descreve o quociente entre a condutividade térmica e o calor específico do material.

$\beta(s)$ é uma multiaplicação que descreve a relação entre a temperatura e a entalpia.

O termo $F(\theta)$ simula os efeitos termoconvectivos que atuam na região não sólida. A aproximação de Boussinesq mais comumente usada toma a forma

$$F(\theta) = C\rho(\theta - \theta_r)\vec{g},$$

onde C uma constante; ρ é a densidade média do material não sólido; θ_r uma temperatura referência (que pode ser assumida sem perda de generalidade como zero) e $\vec{g}$ a força da gravidade. Em nosso trabalho consideramos uma situação mais geral para $F(\theta)$.

O termo $J(f_s)v$ da primeira equação atua na zona *mushy*, modificando as equações do momento linear. Uma expressão bastante usada na literatura é aquela de Carman-Koseny, na qual $J(f_s)$ é da forma:

$$J(f_s) = \frac{Cf_s^2}{(1-f_s)^3},$$

onde C é uma constante positiva. Observamos que $J(f_s) \to +\infty$ quando $f_s \to 1-$ (isto é, quando nos aproximamos da região sólida a partir da região não-sólida.

Uma derivação desta expressão, usando argumentos físicos e a hipótese de que a zona *mushy* se comporta como um meio poroso, pode ser encontrada por exemplo em Voller e Prakash [51]. Neste trabalho, procederemos como em Blanc e outros [5], e consideraremos uma função mais geral para $J(f_s)$, conforme será descrito na seção seguinte.

Observação 2.1 *Ressaltamos que o modelo a ser estudado pode ser considerado um problema de fronteira livre pois as regiões Q_s, Q_l e Q_m são desconhecidas a priori.*

2.2 Hipóteses e formulação fraca do problema

Em todo este capítulo estaremos supondo válidas as seguintes hipóteses,

$$(H_1)\ \left\{\ \Omega \subset \mathbb{R}^N, N = 2 \text{ ou } 3, \ \text{ é um domínio limitado de classe } C^2.\right.$$

$$(H_2)\ \left\{\begin{array}{l} \beta(s) \ \text{ é uma multiaplicação de } \mathbb{R} \text{ em } \mathbb{R}, \text{estritamente monótona} \\ \text{crescente e tal que para } \ s \neq 0 \ \text{ ela é uma função satisfazendo} \\ 0 < \hat{\beta}_0 \leq \beta'(s) \leq \hat{\beta}_1; \ \text{ além disso ela tem um salto na origem, isto é,} \\ \beta(0) = [0, L], \ \text{ com } \ L > 0. \end{array}\right.$$

$$(H_3)\ \left\{\begin{array}{l} K(s) \ \text{ é uma função monótona contínua e diferenciável fora da} \\ \text{origem e tal que } \ K(0) = 0 \ \text{ e } \ 0 < K_0 \leq K'(s) \leq K_1 \ \text{ se } \ s \neq 0. \end{array}\right.$$

$$(H_4)\ \left\{\ F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \ \text{ é uniformemente Lipschitz contínua e } F(0) = 0.\right.$$

$$(H_5)\ \left\{\begin{array}{l} J \in C^1(-\infty, 1) \text{ é não decrescente, } \ J \equiv 0 \ \text{ sobre } \ \mathbb{R}^- \text{ e} \\ \lim\limits_{x \uparrow 1} J(x) = +\infty. \end{array}\right.$$

$$(H_6)\ \left\{\begin{array}{l} f_s \in C_b^0(\mathbb{R}), \ \text{ tal que } f_s = 1 \text{ em } (-\infty, 0], f_s = 0 \text{ em } [L, +\infty) \\ \text{e } \ 0 < f_s < 1 \text{ em } (0, L). \end{array}\right.$$

$$(H_7)\ \left\{\begin{array}{l} \theta_\delta \in L^2(0,T; W^{\frac{3}{2},2}(\Omega)) \cap L^\infty(Q) \\ w_0 \in C^2(\overline{\Omega}), \ \ v_0 \in H(\Omega) \ \text{ e } \ supp\, v_0 \subset \overset{\circ}{\Omega}_{ml}(0). \end{array}\right.$$

Passaremos agora a explicar em que sentido entenderemos uma solução generalizada do problema $(\mathcal{P}_0)$. A definição que adotaremos tem um aspecto complexo (no seu ítem (iii)) que tem a ver com o tipo de escoamento na parte não sólida e que explicaremos em seguida, baseados em algumas conjecturas físicas.

Definição 2.2 *Sob as hipóteses $(H_1) - (H_7)$, a tripla (θ, w, v) é solução generalizada do problema $(\mathcal{P}_0)$ se valerem as seguintes condições:*

(i) $\theta \in L^\infty(Q) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $w \in L^\infty(Q) \cap C([0,T];H^{-1}(\Omega))$ *e* $v \in L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$,

(ii) *Para toda* $\varphi \in C_0^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ *tem-se que*

$$\int_Q w\varphi_t dxdt - \int_Q \nabla K(\theta)\nabla\varphi dxdt + \int_Q \theta v \cdot \nabla\varphi dxdt = 0, \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} w \subseteq \beta(\theta) \text{ q.t.p. em } Q, \\ \theta - \theta_\delta \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ w(\cdot\,,0) = w_0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{2.11}$$

(iii) *Sendo* $Q_s = \{(x,t) \in Q;\ w(x,t) \leq 0\}$, $Q_{ml} = \{(x,t) \in Q;\ 0 < w(x,t)\}$ *e* $\Omega_{ml}(0) = \{x \in \Omega;\ 0 < w_0(x)\}$, *valem as seguintes propriedades:*

Devemos ter que:

$$v = 0 \text{ em } \overset{\circ}{Q}_s; \tag{2.12}$$

Além disso, deve existir um subconjunto $\mathcal{F}$ de medida total em Q_{ml}, de forma

$$\mathcal{F} = \cup_{i=1}^\infty Q_{ml}^{\rho_i},$$

onde $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$ é uma sequência de números positivos tendendo a zero, com $|Q_{ml} \setminus Q_{ml}^{\rho_i}| < \rho_i$ e tal que para o subconjunto

$$int_f(\mathcal{F}) = \cup_{i=1}^\infty \overset{\circ}{Q}{}_{ml}^{\rho_i},$$

onde $\overset{\circ}{Q}{}_{ml}^{\rho_i}$ denota o interior de $Q_{ml}^{\rho_i}$ relativamente ao conjunto $\Omega \times [0,T)$, e que chamaremos de **interior fluido de F**, *existe uma função $h \in L^2_{loc}(int_f(\mathcal{F}))$ satisfazendo $h \subseteq J(f_s(\beta(\theta)))$ e, além disso, para todo $\xi \in C^1([0,T];H^1(\Omega))$ tal que supp $\xi(x,t) \subset int_f(\mathcal{F})$ e div $\xi(\cdot\,,t) = 0$, $\forall t \in [0,T)$, a seguinte* *igualdade é satisfeita:*

$$
\begin{aligned}
-\int_{int_f(\mathcal{F})} v\xi_t dxdt &= -\int_{int_f(\mathcal{F})} \nabla v \nabla \xi dxdt - \int_{int_f(\mathcal{F})} (v\cdot \nabla) v \xi dxdt \\
&\quad -\int_{int_f(\mathcal{F})} hv\xi dxdt + \int_{int_f(\mathcal{F})} F(\theta)\xi dxdt \\
&\quad +\int_{\Omega_{ml}(0)} v(x,0)\xi(x,0)dx. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

Observação 2.3 *Como é usual nas formulações fracas das equações de Navier-Stokes que utilizam espaços de funções com divergente nulo, tais como $H(\Omega)$ e $V(\Omega)$, a definição de solução generalizada do problema $(\mathcal{P}_0)$ dada pela Definição 2.2 também elimina a incógnita p de (2.5), bem como a equação div $v = 0$ do problema original. A pressão p correspondente a esta formulação fraca pode ser recuperada utilizando-se a Proposição 1.1, p. 14, em Temam [43].*

Observação 2.4 *Para entender o significado da definição acima, observamos que o ítem (iii) requer que a velocidade seja nula no interior da parte sólida , veja (2.12), enquanto que (2.13) diz que o escoamento é controlado pela equação do tipo Navier-Stokes na região chamada* **interior fluido**.

Se tivermos $|Q_{ml} \setminus int_f(\mathcal{F})| = 0$ então praticamente toda a região não-sólida será constituída de **interior fluido**, *restando um conjunto de medida zero no qual o escoamento não se realiza. Neste caso teremos uma solução fraca em um sentido próximo do intuitivo.*

Entretanto, se $|Q_{ml} \setminus int_f(\mathcal{F})| > 0$, haverá uma região de medida estritamente positiva, exatamente a região $Q_{ml} \setminus int_f(\mathcal{F})$, que do ponto de vista do escoamento não teremos nenhuma informação, isto é a nossa solução não se aplica a esta região.

Conjecturamos que esta situação não é apenas devido a possíveis técnica matemáticas deficientes, mas sim um aspecto inerente à modelagem física inicial do problema. De fato, o modelo pressupõe que na região não-sólida o escoamento seja controlado por uma equação do tipo de Navier-Stokes. Entretanto, para que isto ocorra em modelos macroscópicos como é o do nosso caso, é necessário que haja suficiente "espaço" para tal escoamente. Quando isto não ocorre, como é o caso usual de meios porosos, a equação macroscópica que controla o escoamento não é mais do tipo de Navier-Stokes, mas sim uma outra, chamada equação dos meios porosos, que é obtida da *chamada lei de Darcy (que relaciona a velocidade do fluido e o gradiente de pressão) ou por mecanismos de homogeneização.*

Em outras palavras, conjecturamos que a região $Q_{ml} \setminus int_f(\mathcal{F})$ seja uma região onde a zona mushy se tornou tão intercalada de fragmentos sólidos (e isto é aparente da construção do conjunto $int_f\mathcal{F}$ através da união dos conjuntos $\overset{\circ\,\rho_i}{Q}_{ml}$) que ela se deve comportar de forma semelhante a um meio poroso, e, portanto, a equação macroscópica que nela controla o escoamento não pode mais ser do tipo Navier-Stokes. Talvez outra equação, semelhante àquela dos meios porosos, mas que infelizmente ainda não temos condições de prever, deva controlar o escoamento nesta região.

Enunciamos a seguir, o nosso resultado de existência de soluções generalizadas.

Teorema 2.5 *Sob as hipóteses $(H_1) - (H_7)$, existe solução generalizada do problema $(\mathcal{P}_0)$ no sentido da Definição 2.2.*

O Teorema 2.5 será provado na seção 2.4. A seguir, descrevemos apenas as idéias gerais da prova.

Iniciaremos introduzindo um problema $(\mathcal{P}_\epsilon)$ que depende de um parâmetro auxiliar $\epsilon > 0$ e corresponde a uma regularização adequada do problema original no sentido de que as equações que governam o movimento são válidas para toda a região e não apenas na parte não sólida (fluida) como em $(\mathcal{P}_0)$. Então, para cada $\epsilon > 0$ fixo, usando técnicas de Galerkin na equação de movimento da parte fluida e mantendo a equação do balanço térmico na forma contínua (método semi-Galerkin), construímos uma sequência de problemas que constituem aproximações do problema $(\mathcal{P}_\epsilon)$. Deduzimos a existência de soluccões para tais problemas aproximados, considerando um desacoplamento do sistema e usando técnicas de ponto fixo. Usando então argumentos de compacidade, passamos ao limite nas equações aproximadas e obtemos soluões do problema regularizado. A seguir, usando outra vez argumentos de compacidade modificados, passamos ao limite quando ϵ vai a zero nas equações regularizadas e mostramos que o limite corresponde a uma solução do problema original $(\mathcal{P}_0)$.

2.3 O problema regularizado

Nesta seção introduzimos uma sequência de problemas regularizados, associados ao problema $(\mathcal{P}_0)$, nos quais nos será permitido considerar a equação do tipo Navier-Stokes em todo Q. Além disso, para tornar esses problemas aproximados mais tratáveis, tomaremos regularizações adequadas das funções (e multifunção) envolvidas.

Dessa forma, sejam f_s^ϵ, β_ϵ e K_ϵ, aproximações suaves de f_s, β e K respectivamente tais que

$$K_\epsilon(0) = 0, \quad 0 < K_0 \leq K_\epsilon'(s) \leq K_1, \tag{2.14}$$

$$\beta_\epsilon(0) = 0, \quad 0 < \hat{\beta}_0 \leq \beta_\epsilon'(s) \leq \frac{1}{\epsilon}, \tag{2.15}$$

ademais

$$\begin{cases} |\beta_\epsilon(s)| \leq \hat{\beta}_1 |s| + L, \ \forall s, \ \beta_\epsilon(s) \geq min\{\hat{\beta}_1 s, 0\} \ \forall s, \\ |\beta_\epsilon'(s)| \leq \hat{\beta}_1 \ \text{ se } \ |s| \geq \epsilon \ \text{ e } \forall s \neq 0, \exists \epsilon_0, \\ \text{tal que } \ \beta_\epsilon(s) = \beta(s), \ \text{ se } \ \epsilon < \epsilon_0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Podemos tomar as convergências das funções β_ϵ e K_ϵ, no seguinte sentido:

$$\beta_\epsilon \longrightarrow \beta, \quad \text{uniformemente em} \quad \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$K_\epsilon \longrightarrow K, \quad \text{uniformemente em} \quad \mathbb{R}.$$

Vale então o seguinte resultado de existência de soluções.

Teorema 2.6 *Sob as hipóteses $(H_1) - (H_7)$, para cada $\epsilon \in (0,1]$ existem, $v_\epsilon \in L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$, $\theta_\epsilon \in L^\infty(Q) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e $w_\epsilon \in L^\infty(Q) \cap C([0,T];H^{-1}(\Omega))$, onde $w_\epsilon = \beta_\epsilon(\theta_\epsilon)$, as quais satisfazem o problema $(\mathcal{P}_\epsilon)$:*

$\theta_\epsilon - \theta_\delta^\epsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$,

$$\begin{aligned} -\int_Q v_\epsilon \xi_t dxdt &= -\int_Q \nabla v_\epsilon \nabla \xi dxdt - \int_Q (v_\epsilon \cdot \nabla) v_\epsilon \xi dxdt \\ &- \int_Q J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) v_\epsilon \xi dxdt + \int_Q F(\theta_\epsilon) \xi dxdt \\ &+ \int_\Omega v_\epsilon(x,0)\xi(x,0)dx \end{aligned} \tag{2.17}$$

$\forall \xi \in C^1([0,T];V(\Omega))$ *tal que* $\xi(T) = 0$.

$$v_\epsilon(x,0) = v_{0\epsilon}(x), \quad q.t.p. \quad em \ \Omega \tag{2.18}$$

onde $v_{0\epsilon}$ *é aproximação suave de* v_0 *tal que*

$$\lim_{\epsilon \to 0} |v_{0\epsilon} - v_0|_{H(\Omega)} = 0 \tag{2.19}$$

$$\int_Q w_\epsilon \varphi_t dxdt - \int_Q \nabla K_\epsilon(\theta_\epsilon) \nabla \varphi dxdt + \int_Q \theta_\epsilon v_\epsilon \cdot \nabla \varphi dxdt = 0 \tag{2.20}$$

$\forall \varphi \in C_0^1([0,T];H_0^1(\Omega))$,

$$w_\epsilon(\cdot\,,0) = w_0 \quad em \ \Omega \tag{2.21}$$

Além disso, as funções v_ϵ, θ_ϵ, w_ϵ *e* $w_{\epsilon t}$ *são uniformemente limitadas com respeito ao parâmetro* ϵ *em* $L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$, $L^\infty(Q) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $L^\infty(Q)$ *e* $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, *respectivamente.*

A prova do Teorema 2.6, será feita no final desta seção. As idéias básicas da prova são:

Utilizando o método de Galerkin na equação do tipo Navier-Stokes, construímos uma sequência de problemas que aproximam $(\mathcal{P}_\epsilon)$. Provamos a existência de soluções para tais problemas usando técnicas de ponto fixo, depois passamos ao limite nas equações aproximadas, usando argumentos de compacidade e estimativas a priori e mostramos que o limite desta sequência é solução do problema regularizado.

2.3.1 Aproximações do problema regularizado

Nesta subseção, apresentaremos uma sequência de problemas que constituen aproximações do problema regularizado e provaremos um resultado de existência para estes problemas aproximados, os que serão construidos da seguinte forma.

Consideramos a base $\{u^j\}_{j=1}^{\infty}$ de $V(\Omega)$, dada pela solução do problema espectral

$$(u,\nu)_{V(\Omega)} = \lambda(u,\nu)_{H(\Omega)}, \quad \forall \nu \in V(\Omega), \quad \lambda > 0.$$

Seja $\mathcal{W}^m(\Omega)$ o espaço gerado por $u^1, ..., u^m$.

Definimos o problema $(\mathcal{P}_\epsilon^m)$, com $1 \leq m$, da seguinte maneira: Encontrar funções $v_\epsilon^m \in L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega)), \theta_\epsilon^m \in L^\infty(Q) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $w_\epsilon^m \in L^\infty(Q)$ com $w_\epsilon^m = \beta_\epsilon(\theta_\epsilon^m)$, as quais satisfazem:

$$\begin{aligned}(v_{\epsilon t}^m, u^k)_\Omega + (\nabla v_\epsilon^m, \nabla u^k)_\Omega &= -((v_\epsilon^m \cdot \nabla) v_\epsilon^m, u^k)_\Omega - (J(f_s^\epsilon(w_\epsilon^m) - \epsilon) v_\epsilon^m, u^k)_\Omega \\ &+ (F(\theta_\epsilon^m), u^k)_\Omega \end{aligned} \tag{2.22}$$

$\forall t \in [0,T]$, $\forall k$, tal que $1 \leq k \leq m$.

$$v_\epsilon^m(0) = v_{m0} \tag{2.23}$$

onde

$$\lim_{m \to \infty} |v_{m0} - v_{0\epsilon}|_{2,\Omega} = 0, \tag{2.24}$$

sendo $v_{0\epsilon}$ aproximação suave de $v_0 \in H(\Omega)$ e

$$v_{m0} = \sum_{j=1}^{m} (v_{0\epsilon}, u^j)_\Omega = P_m(v_{0\epsilon})$$

onde $P_m : H(\Omega) \to \mathcal{W}^m(\Omega)$ é a projeção ortogonal.

$$\int_Q w_\epsilon^m \varphi_t dxdt - \int_Q \nabla K_\epsilon(\theta_\epsilon^m) \nabla \varphi dxdt + \int_Q \theta_\epsilon^m v_\epsilon^m \cdot \nabla \varphi dxdt = 0 \tag{2.25}$$

$\forall \varphi \in C_0^1([0,T]; H_0^1(\Omega))$.

$$w_\epsilon^m(\cdot, 0) = w_0, \quad \text{em } \Omega \tag{2.26}$$

$\theta_\epsilon^m - \theta_\delta^\epsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, onde θ_δ^ϵ é uma aproximação suave de θ_δ tal que

$$\lim_{\epsilon\to 0} |\theta_\delta^\epsilon - \theta_\delta|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} = 0. \tag{2.27}$$

A existência de solução para $(\mathcal{P}_\epsilon^m)$ é dada pelo seguinte teorema

Teorema 2.7 *Sob as hipóteses $(H_1) - (H_7)$, para cada $m = 1, 2, \ldots$, existem funções v_ϵ^m, θ_ϵ^m e w_ϵ^m, as quais satisfazem o problema $(\mathcal{P}_\epsilon^m)$. Além disso, as limitações de: v_ϵ^m em $L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$, θ_ϵ^m em $L^\infty(Q) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, w_ϵ^m em $L^\infty(Q)$, $w_{\epsilon t}^m$ em $L^2(0,T:H^{-1}(\Omega))$, e $v_{\epsilon t}^m$ em $L^2(0,T;V'(\Omega))$ se $N=2$ e em $L^1(0,T;V'(\Omega))$ se $N=3$, são todas uniformes com relação a m.*

A prova deste teorema será feita no final da subseção e será consequência dos lemas que apresentaremos a seguir.

A idéia geral da prova é a seguinte. Construiremos um certo operador $G : L^2(Q) \to L^2(Q)$ e mostraremos que ele tem um ponto fixo, usando o Lema 1.3 (Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder). Para isto, mostraremos que G é contínuo, compacto e que o conjunto das soluções da equação

$$\theta = \lambda G(\theta), \ \lambda \in [0,1]$$

é uniformemente limitado em $L^2(Q)$, com relação a λ.

O operador G é definido através do seguinte processo. Seja $\theta \in L^2(Q)$, então resolvemos para a única função $v \in L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$ a qual satisfaz (2.22) e (2.23). Logo, dada $v \in L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$, resolvemos para a única função $\hat{\theta}$ a qual satisfaz (2.25) e (2.26), com $\hat{\theta} = \theta_\delta^\epsilon$, em Σ, e $\hat{w} = \beta_\epsilon(\hat{\theta})$. Então, define-se

$$G(\theta) = \hat{\theta}. \tag{2.28}$$

Ao fazermos com detalhes os passos que definem G, observaremos claramente que resolver o problema $(\mathcal{P}_\epsilon^m)$ é equivalente a determinar pontos fixos de G.

O primeiro passo na definição de G, é dado no seguinte lema, em cujo enunciado e demonstração omitiremos o índice ϵ das variáveis v_ϵ^m, θ_ϵ^m e w_ϵ^m para facilitar a leitura.

Lema 2.8 *Sob as hipóteses (H_1) – (H_6), dada $\theta^m \in L^2(Q)$, existe uma única função $v^m \in L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$ que satisfaz (2.22) e (2.23), com $w^m = \beta_\epsilon(\theta^m)$. Além disso, v^m é limitada em $L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$ e v_t^m em $L^2(0,T;V'(\Omega))$ se $N=2$ e em $L^1(0,T;V'(\Omega))$ se $N=3$, com limitações que dependem de $|\theta^m|_{L^2(Q)}$ e $|v_{m0}|_{L^2(\Omega)}$.*

Prova: Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideramos as aproximações de Galerkin

$$v^m(t) = \sum_{j=1}^m c_j(t) u^j(x). \tag{2.29}$$

Introduzindo em (2.22) a expressão para v^m dada por (2.29), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m (u^j, u^k)_\Omega c_j'(t) &= -\sum_{j=1}^m (\nabla u^j, \nabla u^k)_\Omega c_j(t) - \sum_{i,j=1}^m B(u^j, u^i, u^k) c_i(t) c_j(t) \\
&\quad - \sum_{i,j=1} (J(f_s^\epsilon(w^m) - \epsilon) u^j, u^k)_\Omega c_j(t) \\
&\quad + (F(\theta^m), u^k)_\Omega \qquad (2.30) \\
c_k(0) &= (v_{0\epsilon}, u^k)_\Omega. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Como $\theta^m \in L^2(Q)$, F é uniformemente Lipschitz e J é Lipschitz para ϵ fixo, as equações acima constituem um sistema de equações diferenciais ordinarias para o qual vale o teorema de existência local de soluções. Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $T_m > 0$ tal que $v^m(t)$ é a única solução do sistema (2.30) - (2.31) no intervalo $[0, T_m]$. As estimativas a priori a serem provadas a seguir, mostrarám que podemos tomar $T_m = T$.

Multiplicando (2.30) por c_k e somando com respeito a k e notando que $B(v^m, v^m, v^m) = 0$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v^m(t)|_{2,\Omega}^2 + |v^m|_{V(\Omega)}^2 + (J(f_s^\epsilon(w^m) - \epsilon)v^m, v^m)_\Omega = (F(\theta^m), v^m)_\Omega$$

em $[0, T_m]$. Aplicando desigualdade de Hölder e Young, e por ser $(J(f_s^\epsilon(w^m) - \epsilon)v^m, v^m)_\Omega \geq 0$, tem-se

$$\frac{d}{dt}|v^m(t)|_{2,\Omega}^2 + |v^m|_{V(\Omega)}^2 \leq |F(\theta^m)|_{V'(\Omega)}^2.$$

Após integrar no tempo em (0,t), obtemos

$$|v^m(t)|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t |v^m|V(\Omega)^2 \leq \int_0^t |F(\theta^m)|_{V'(\Omega)}^2 + |v_{m0}|_{2,\Omega}^2. \tag{2.32}$$

Por ser F Lipschitz, $|\theta^m|_{L^2(Q)} \leq M$ e por (2.24), temos que o lado direito de (2.32) é limitado com respeito t, deduz-se então que

$$|v^m|_{L^\infty(0,T;H(\Omega))}^2 + |v^m|_{L^2(0,T;V(\Omega))}^2 \leq |F(\theta^m)|_{L^2(0,T;V'(\Omega))}^2 + |v_{m0}|_{2,\Omega}^2. \tag{2.33}$$

De (2.33) obtemos que $\{v^m\}_{m=1}^\infty$ é limitada em $L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$ de forma contínua com respeito a $t \in [0,T_m]$, então podemos tomar $T_m = T$. Obtemos também de (2.33), que a limitação de v^m em $L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$, depende de $|\theta^m|_{L^2(Q)}$ e $|v_{m0}|_{L^2(\Omega)}$.

A seguir provaremos uma estimativa para a sequência $\{v_t^m\}_{m=1}^\infty$. Consideramos os seguintes operadores definidos por:

$$\begin{aligned}
\langle A(v^m), \xi\rangle &= ((v^m, \xi))_\Omega \\
\langle D(v^m), \xi\rangle &= B(v^m, v^m, \xi) \\
\langle E(v^m), \xi\rangle &= (J(f_s^\epsilon(w^m) - \epsilon)v^m, \xi)_\Omega.
\end{aligned}$$

$\xi \in V(\Omega)$.

Se consideramos a projeção ortogonal $P_m : H(\Omega) \to \mathcal{W}^m(\Omega)$ como um operador em $L(V(\Omega), V(\Omega))$ (ver [32];p. 76), o qual pela escolha da base tem norma $\|P_m\|_{L(V(\Omega),V(\Omega))} \leq 1$, obtemos de (2.22)

$$v_t^m = -P_m^*(A(v^m)) - P_m^*(D(v^m)) - P_m^*(E(v^m)) + P_m^*(F(\theta^m)) \tag{2.34}$$

em $V'(\Omega)$, onde P_m^* é o operador adjunto de P_m, o qual satisfaz

$$\|P_m^*\|_{L(V'(\Omega),V'(\Omega))} \leq 1.$$

Da definição dos operadores $A(v^m)$, $D(v^m)$ e $E(v^m)$ tem-se que

$$\|A(v^m)\|_{V'(\Omega)} \leq |v^m|_{V(\Omega)}, \tag{2.35}$$

$$\|D(v^m)\|_{V'(\Omega)} \leq \begin{cases} C|v^m|_{V(\Omega)}^2, & N=3 \\ C|v^m|_{2,\Omega}\, |v^m|_{V(\Omega)}, & N=2 \end{cases} \tag{2.36}$$

e

$$\|E(v^m)\|_{V'(\Omega)} \leq C(\epsilon)|v^m|_{2,\Omega}. \tag{2.37}$$

Finalmente, como $F(\theta^m) \in L^2(0,T;V'(\Omega))$, de (2.33), (2.34), (2.35), (2.36) e (2.37), concluímos que $\{v_t^m\}_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;V'(\Omega))$ se $N = 2$ e em $L^1(0,T;V'(\Omega))$ se $N = 3$, com limitação que depende de $|\theta^m|_{L^2(Q)}$ e $|v_{m0}|_{L^2(\Omega)}$.

O seguinte lema fornece a dependência contínua de v^m com relação a θ^m.

Lema 2.9 *Se $\theta_i^m \in L^2(Q)$, $i = 1,2$, então*

$$|v_2^m - v_1^m|_{L^\infty(0,T;H(\Omega))} \leq C|\theta_2^m - \theta_1^m|_{L^2(Q)}, \tag{2.38}$$

onde v_i^m é à única solução de (2.22)-(2.23), correspondente a θ_i^m e C é uma constante que depende de ϵ, m e T.

Prova: Pela linearidade, temos que (2.22) vale $\forall \zeta \in \mathcal{W}^m(\Omega)$, então, tem-se

$$\begin{aligned}(v_{it}^m, \zeta)_\Omega + (\nabla v_i^m, \nabla \zeta)_\Omega + B(v_i^m, v_i^m, \zeta) &= -(J(f_s^\epsilon(w_i^m)) - \epsilon)v_i^m, \zeta)_\Omega \\ &\quad +(F(\theta_i^m), \zeta)_\Omega. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Subtraindo estas igualdades para $i = 1,2$ e fazendo $\zeta = S_m = v_2^m(t) - v_1^m(t)$ em (2.39), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|S_m(t)|^2_{L^2(\Omega)^N} + |S_m|^2_{V(\Omega)} &= -B(S_m, v_2^m, S_m) - (J(f_s^\epsilon(w_1^m)) - \epsilon)S_m, S_m)_\Omega \\ &\quad -((J(f_s^\epsilon(w_2^m)) - \epsilon) - J(f_s^\epsilon(w_1^m)) - \epsilon))v_2^m, S_m)_\Omega \\ &\quad +(F(\theta_2^m) - F(\theta_1^m), S_m)_\Omega.\end{aligned}$$

Como $(J(f_s^\epsilon(w_1^m)) - \epsilon)S_m, S_m)_\Omega \geq 0$, aplicando a desigualdade de Hölder nesta última igualdade, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|S_m(t)|^2_{L^2(\Omega)^N} + |S_m|^2_{V(\Omega)} &\leq \int_\Omega |S_m||\nabla v_2^m||S_m| \\
&\quad +c_0(\epsilon)\int_\Omega |\theta_2^m - \theta_1^m||v_2^m||S_m| \\
&\quad +c_1\int_\Omega |\theta_2^m - \theta_1^m||S_m| \\
&\leq |S_m|^2_{L^4(\Omega)^N}|v_2^m|_{V(\Omega)} \\
&\quad +c_0(\epsilon)|\theta_2^m - \theta_1^m|_{2,\Omega}|v_2^m|_{L^4(\Omega)^N}|S_m|_{L^4(\Omega)^N} \\
&\quad +c_1|\theta_2^m - \theta_1^m|_{2,\Omega}|S_m|_{L^2(\Omega)^N} \\
&\leq c_2|S_m|_{V(\Omega)}|v_2^m|_{V(\Omega)}|S_m|_{L^4(\Omega)^N} \\
&\quad +c_3(\epsilon)|\theta_2^m - \theta_1^m|_{2,\Omega}|v_2^m|_{V(\Omega)}|S_m|_{V(\Omega)} \\
&\quad +c_4|\theta_2^m - \theta_1^m|_{2,\Omega}|S_m|_{V(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Aplicando a desigualdade de Young e tendo em conta que em $\mathcal{W}^m(\Omega)$ todas as normas são equivalentes (com constantes que podem depender de m), tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|S_m(t)|^2_{L^2(\Omega)^N} &\leq c_5(m)|S_m|^2_{L^2(\Omega)^N}|v_2^m|^2_{L^2(\Omega)^N} \\
&\quad +c_6(\epsilon,m)|\theta_2^m - \theta_1^m|^2_{2,\Omega}|v_2^m|^2_{L^2(\Omega)^N} + c_7|\theta_2^m - \theta_1^m|^2_{2,\Omega}
\end{aligned}
$$

integrando agora em $(0,t)$ obtemos

$$
\begin{aligned}
|S_m(t)|^2_{L^2(\Omega)^N} &= c_5(m)\int_0^t |S_m|^2_{L^2(\Omega)^N}|v_2^m|^2_{L^2(\Omega)^N} \\
&+ c_6(\epsilon,m)\int_0^t |\theta_2^m - \theta_1^m|^2_{2,\Omega}|v_2^m|^2_{L^2(\Omega)^N} + c_7\int_0^t |\theta_2^m - \theta_1^m|^2_{2,\Omega} \\
&\leq c_5(m)|v_2^m|^2_{L^\infty(0,T;H(\Omega))}\int_0^t |S_m|^2_{L^2(\Omega)^N} \\
&+ c_6(\epsilon,m)|v_2^m|^2_{L^\infty(0,T;H(\Omega))}\int_0^t |\theta_2^m - \theta_1^m|^2_{2,\Omega} + c_7\int_0^t |\theta_2^m - \theta_1^m|^2_{2,\Omega},
\end{aligned}
$$

e como $|v_2^m|_{L^\infty(0,T;H(\Omega))} \leq C$, $\forall m$, obtemos

$$
|S_m(t)|^2_{L^2(\Omega)^N} \leq c_8(m)\int_0^t |S_m(t)|^2_{L^2(\Omega)^N} + c_9(\epsilon,m)|\theta_2^m - \theta_1^m|^2_{L^2(Q)}.
$$

Pelo Lema de Gronwall tem-se que

$$|S_m(t)|^2_{L^2(\Omega)^N} \leq c_9(\epsilon, m)|\theta_2^m - \theta_1^m|^2_{L^2(Q)}(1 + c_8(m)te^{c_8 t}),$$

e finalmente

$$|S_m|_{L^\infty(0,T;H(\Omega))} \leq c(\epsilon, m, T)|\theta_2^m - \theta_1^m|_{L^2(Q)}.$$

Continuando com a construção do operador G, para v^m conhecida, determinaremos a única função $\hat{\theta}^m$, e então $\hat{w}^m = \beta_\epsilon(\hat{\theta}^m)$ tal que $\hat{\theta}^m - \theta_\delta^\epsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e satisfaz-se (2.25) e (2.26). Mostraremos também a dependência contínua de $\hat{\theta}^m$ com respeito a v^m. Isto é obtido dos seguintes lemas

Lema 2.10 *Para $\epsilon > 0$ e para*

$$v_\epsilon^m = \sum_{j=1}^m c_j(t)u^j,$$

como em (2.29), tal que $v_\epsilon^m \in L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$, existe uma única função $\hat{\theta}_\epsilon^m \in L^\infty(Q) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, e então também existe uma única $\hat{w}_\epsilon^m = \beta_\epsilon(\hat{\theta}_\epsilon^m)$, tal que $\hat{\theta}_\epsilon^m - \theta_\delta^\epsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e satisfaz-se (2.25) e (2.26). Além disso valem as seguintes estimativas:

$$|\hat{\theta}_\epsilon^m|_{L^\infty(Q)} \leq c = \frac{1}{\hat{\beta}_0}(max\{|w_0|_{L^\infty(\Omega)}, \hat{\beta}_1|\theta_\delta|_{L^\infty(Q)} + L\}), \tag{2.40}$$

$$|\hat{\theta}_\epsilon^m|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \bar{c}, \tag{2.41}$$

onde $\bar{c}$ é uma constante que depende de $|w_0|_{L^\infty(\Omega)}$, $|\theta_\delta|_{L^\infty(Q)}$, $|\theta_\delta|_{L^2(0,T;W^{\frac{3}{2},2}(\Omega))}$, e $|v_\epsilon^m|_{L^\infty(0,T;H(\Omega))}$, obtem-se também

$$|\hat{w}_{\epsilon t}^m|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \hat{c}, \tag{2.42}$$

onde $\hat{c}$ é uma constante que depende das constantes c e $\bar{c}$, dadas em (2.40) e (2.41) e também de $|v_\epsilon^m|_{L^2(0,T;V(\Omega))}$.

Antes de provar o Lema 2.10, enunciaremos e provaremos o seguinte lema, o qual fornece a dependência contínua de $\hat{\theta}_\epsilon^m$ com respeito a v_ϵ^m.

Lema 2.11 *Para $i = 1, 2$, sejam $\hat{\theta}_i^m$ e $\hat{w}_i^m = \beta_\epsilon(\hat{\theta}_i^m)$ satisfazendo (2.25) e (2.26), geradas por v_i^m como no Lema 2.10, com $\hat{\theta}_i^m \in L^\infty(Q) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e $\hat{\theta}_i^m - \theta_\delta^\epsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Então*

$$|\hat{\theta}_2^m - \hat{\theta}_1^m|_{L^2(Q)}^2 \leq \widetilde{c}|v_2^m - v_1^m|_{L^2(0,T;H(\Omega))}, \tag{2.43}$$

onde $\widetilde{c}$ é uma constante que depende de $|\hat{\theta}_i^m|_{L^\infty(Q)}^2$, $|\nabla\hat{\theta}_i^m|_{L^2(Q)}$, T e $\hat{\beta}_0$.

Prova: Pelo Lema 1.8, tomando $\beta = \beta_\epsilon$ obtemos

$$|\hat{w}_2^m - \hat{w}_1^m|_{L^\infty(0,T;L^2(Q))}^2 \leq \hat{c}|v_2^m - v_1^m|_{L^2(0,T;H(\Omega))}, \tag{2.44}$$

onde $\hat{c}$ é uma constante que depende somente de $|\hat{\theta}_i^m|_{L^\infty(Q)}$ e $|\nabla\hat{\theta}_i^m|_{L^2(Q)}$.

Como β_ϵ^{-1} é Lipschitz com constante ℓ que depende de $\hat{\beta}_0$, obtemos

$$|\hat{\theta}_2^m(t) - \hat{\theta}_1^m|_{2,\Omega}^2 \leq \ell^2|w_2^m(t) - w_1^m(t)|_{2,\Omega}^2,$$

e, portanto,

$$|\hat{\theta}_2^m - \hat{\theta}_1^m|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq \ell^2|\hat{w}_2^m - \hat{w}_1^m|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2.$$

Desta forma, da última desigualdade e de (2.44) conclui-se (2.43).

Provaremos a seguir o **Lema 2.10**.

Prova: Como a função v_ϵ^m tem a forma

$$v_\epsilon^m = \sum_{j=1}^m c_j(t)u^j,$$

com u^j dado por $(u^j, \nu)_{V(\Omega)} = \lambda(u^j, \nu)_{H(\Omega)}$, $\forall \nu \in V(\Omega)$, $\lambda > 0$, ela tem a regularidade necessária (a regularidade de v_ϵ^m é dada pelas funções u^j) para proceder como na prova do Lema 1.4 (veja Observação 1.5 no Capítulo 1) e obter, pela Observação 1.7, que existem funções $\hat{\theta}_\epsilon^m$ e $\hat{w}_\epsilon^m$, as quais satisfazem (2.25), (2.26) e $\hat{\theta}_\epsilon^m = \theta_\delta^\epsilon$ sobre Σ com $\hat{w}_\epsilon^m = \beta_\epsilon(\hat{\theta}_\epsilon^m)$. Obtem-se também

$$|\hat{\theta}_\epsilon^m|_{L^\infty(Q)} \leq \bar{c}, \quad |\hat{w}_\epsilon^m|_{L^\infty(Q)} \leq c_1, \tag{2.45}$$

onde $\bar{c}$ é dada como em (2.40) e c_1 é uma constante que depende de $|w_0|_{L^\infty(\Omega)}$ e $|\theta_\delta|_{L^\infty(Q)}$. Também obtemos pela Observação 1.7 que

$$|\hat{\theta}_\epsilon^m|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq c_2,$$

com c_2 uma constante que depende de $|v_\epsilon^m|_{L^\infty(0,T;H(\Omega))}$, $|w_0|_{L^\infty(\Omega)}$, $|\theta_\delta|_{L^\infty(Q)}$ e $|\theta_\delta|_{L^2(0,T;W^{\frac{3}{2},2}(\Omega))}$. Desta forma são provadas as estimativas (2.40) e (2.41).

Provamos agora a estimativa (2.42). Seja $\phi \in H_0^1(\Omega)$, de (2.25) obtemos

$$\begin{aligned}
|(\hat{w}_{\epsilon t}^m, \phi)_\Omega| &= |\int_\Omega \nabla K_\epsilon(\hat{\theta}_\epsilon^m) \cdot \nabla\phi + \int_\Omega \hat{\theta}_\epsilon^m v_\epsilon^m \cdot \nabla\phi| \\
&\leq K_1 \int_\Omega |\nabla\hat{\theta}_\epsilon^m||\nabla\phi| + \int_\Omega |\hat{\theta}_\epsilon^m||v_\epsilon^m||\nabla\phi| \\
&\leq \{C_1|\hat{\theta}_\epsilon^m|_{H^1(\Omega)} + C_2|\hat{\theta}_\epsilon^m|_{L^\infty(\Omega)}|v_\epsilon^m|_{H(\Omega)}\}|\phi|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Então temos

$$|\hat{w}_{\epsilon t}^m|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_1|\hat{\theta}_\epsilon^m|_{H^1(\Omega)}| + C_2|\hat{\theta}_\epsilon^m|_{L^\infty(\Omega)}|v_\epsilon^m|_{V(\Omega)}.$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$|\hat{w}_{\epsilon t}^m|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq (C_3 + C_4|\hat{\theta}_\epsilon^m|_{L^\infty(\Omega)})(|\hat{\theta}_\epsilon^m|_{H^1(\Omega)}| + |v_\epsilon^m|_{V(\Omega)}),$$

com C_3 e C_4 constantes que são independentes de ϵ e m.

Desta última desigualdade obtemos

$$\int_0^T |\hat{w}_{\epsilon t}^m|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq (\hat{c}_3 + \hat{c}_4|\hat{\theta}_\epsilon^m|_{L^\infty(Q)}^2)(|\hat{\theta}_\epsilon^m|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2| + |v_\epsilon^m|_{L^2(0,T;V(\Omega))}^2). \tag{2.46}$$

Assim, de (2.41), (2.45) e (2.46) obtem-se a estimativa (2.42).

Finalmente, a unicidade da função $\hat{\theta}_\epsilon^m$ é obtida diretamente do Lema 2.11.

Voltamos agora a considerar o operador G e notamos que na sua construção, outra vez para não carregar a notação, omitiremos os índices ϵ e m das funções temperatura e entalpia.

Do Lema 2.8 e do Lema 2.10 tem-se que $G : L^2(Q) \to L^2(Q)$ está bem definida por (2.28).

Pelo Lema 2.9 e Lema 2.11, obtemos que G é contínuo.

Além disso, denotando por

$$R = (\frac{1}{\hat{\beta}_0}(max\{|w_0|_{L^\infty(\Omega)}, \hat{\beta}_1|\theta_\delta|_{L^\infty(Q)} + L\}) + L)T^{\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{2}},$$

obtém-se de (2.40)

$$|G(\theta)|_{L^2(Q)} \leq R. \tag{2.47}$$

Mostraremos agora que G é compacto. Seja $\Im \subset L^2(Q)$ limitado, vamos verificar que o conjunto $G(\Im)$ é relativamente compacto em $L^2(Q)$.

Sabemos por (2.33), (2.41) e (2.47) que o conjunto $G(\Im) = \{G(\theta);\ \theta \in \Im\}$ é limitado em $L^2(Q) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, uniformemente com relação a θ. Então, por (2.42) e (2.33), obtemos que o conjunto $\Upsilon = \{w_t;\ w = \beta_\epsilon(G(\theta)),\ \theta \in \Im\}$ é limitado em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ uniformemente com relação a w_t, logo, tem-se

$$\begin{aligned}
|\tau_h G(\theta) - G(\theta)|_{L^2(0,T-h;H^{-1}(\Omega))} &= \left(\int_0^{T-h} |G(\theta)(t+h) - G(\theta)(t)|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^{T-h} |\beta_\epsilon^{-1}(w(t+h)) - \beta_\epsilon^{-1}(w(t))|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \ell\left(\int_0^{T-h} |w(t+h) - w(t)|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \ell\left(\int_0^{T-h} |\int_t^{t+h} w_s(s)ds|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \ell\hat{M}\left(\int_0^{T-h} hdt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \ell\hat{M}h^{\frac{1}{2}}(T-h)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

onde $\hat{M}$ é uma constante independente da escolha de θ e desta forma, independente de w e w_t.

Obtemos então

$$|\tau_h G(\theta) - G(\theta)|_{L^2(0,T-h;H^{-1}(\Omega))} \to 0,$$

uniformemente com respeito a θ, quando $h \to 0$.

Como $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, com incluções compactas, conclui-se que $G(\Im)$ é relativamente compacto em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, (Ver [41];p. 84, Teorema 5) o que implica que G é um operador compacto.

Consideremos agora as soluções da equação

$$\theta = \lambda G(\theta) \tag{2.48}$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$. Claramente $\theta = 0$ para $\lambda = 0$. Desta forma podemos restringir nossa análise ao caso $0 < \lambda \leq 1$. Sustituindo $\lambda^{-1}\theta = G(\theta)$ em (2.47), obtemos

$$\lambda^{-1}|\theta|_{L^2(Q)} \leq R. \tag{2.49}$$

Então, toda solução possível de (2.48) é limitada em $L^2(Q)$ por uma constante independente de λ.

Pelo Lema 1.3, conclui-se que G tem um ponto fixo.

Podemos fazer agora a prova do **Teorema 2.7**.

Prova: A existência de solução é consequência direta do Lema 1.3 aplicado a G, isto é, a equação

$$\theta_\epsilon^m = G(\theta_\epsilon^m)$$

tem solução para cada $m = 1, 2, 3, ...$, o qual, pela construção do operador G, é equivalente a provar a existência de solução para o problema $(\mathcal{P}_\epsilon^m)$.

Da estimativa (2.40) dada no Lema 2.10 obtemos que θ_ϵ^m é limitada em $L^\infty(Q)$ uniformemente com respeito a m, logo pela estimativa (2.33), dada no Lema 2.8, obtém-se que v_ϵ^m é limitada em $L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$ com limitação que não depende de m.

Agora, de (2.41) obtemos que θ_ϵ^m é limitada também em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ uniformemente com relação a m e por (2.42) o mesmo acontecendo com a limitação de $w_{\epsilon t}^m$ em $L^2(0,T;V'(\Omega))$.

Finalmente, como a limitação de θ_ϵ^m em $L^\infty(Q)$ não depende de m, obtemos pelo Lema 2.8 que a limitação de $v_{\epsilon t}^m$ em $L^2(0,T;V'(\Omega))$ se $N = 2$ e em $L^1(0,T;V'(\Omega))$ se $N = 3$ é independente de m. Concluimos desta forma a prova do Teorema 2.7.

Observação 2.12 *Se v_ϵ^m é limitada em $L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$, uniformemente com respeito a ϵ e m, o qual corresponde ao nosso caso, então para a familia $\{w_\epsilon^m\}$ valem as hipóteses do Lema 1.6, pois da Observação 1.5 obtem-se que as estimativas requeridas dependem de dos dados de fronteira , condições iniciais e as limitações de v_ϵ^m em $L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$. Logo, da mesma maneira que na Observação 1.7 (veja (1.19))obtém-se que se $m \to \infty$*

$$w_\epsilon^m(x,t) \to w_\epsilon(x,t), \quad q.t.p. \text{ em } \Omega, \quad \forall t \in [0,T) \tag{2.50}$$

e tem-se também (veja (1.33) na Observação 1.7), que

$$w_\epsilon(x,t) \to w(x,t), \quad q.t.p. \text{ em } \Omega, \quad \forall t \in [0,T), \tag{2.51}$$

quando $\epsilon \to 0$, logo temos que

$$w_\epsilon(x,0) = w(x,0) = w_0(x), \quad \text{em } \Omega. \tag{2.52}$$

2.3.2 Existência para o problema regularizado

Provaremos agora o **Teorema 2.6**

Prova: Por simplicidade na notação, neste capítulo, toda subsequência será denotada da mesma forma que a sequência original.

Do Teorema 2.7 obtemos que as sequências $\{v_\epsilon^m\}_m$, $\{\theta_\epsilon^m\}_m$ e $\{w_\epsilon^m\}_m$, são uniformemente limitadas com relação a m em: $L^2(0,T;V(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$, $L^\infty(Q)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e $L^\infty(Q)$ respectivamente. Desta forma, temos que existem funções $v_\epsilon \in L^2(0,T;V(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$, $\theta_\epsilon \in L^\infty(Q)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $w_\epsilon \in L^\infty(Q)$ e subequências, tais que

$$\begin{aligned}
v_\epsilon^m &\rightharpoonup v_\epsilon, \text{ fraco em } L^2(0,T;V(\Omega)), && (2.53)\\
v_\epsilon^m &\rightharpoonup v_\epsilon, \text{ fraco * em } L^\infty(0,T;H(\Omega)), && (2.54)\\
\theta_\epsilon^m &\rightharpoonup \theta_\epsilon, \text{ fraco em } L^2(0,T;H^1(\Omega)), && (2.55)\\
\theta_\epsilon^m &\rightharpoonup \theta_\epsilon, \text{ fraco * em } L^\infty(Q), && (2.56)\\
w_\epsilon^m &\rightharpoonup w_\epsilon, \text{ fraco * em } L^\infty(Q). && (2.57)
\end{aligned}$$

De (2.50) (veja Observação 2.11), temos que

$$w_\epsilon^m(x,t) \longrightarrow w_\epsilon(x,t), \text{ q.t.p. em } \Omega, \quad \forall t\in[0,T). \tag{2.58}$$

Do Teorema 2.7, também temos que $\{v_{\epsilon t}^m\}$ é limitada em $L^2(0,T;V'(\Omega))$ se $N=2$ e em $L^1(0,T;V'(\Omega))$ se $N=3$, então do anterior e de (2.53) obtemos que a sequência $\{v_\epsilon^m\}_m$ é relativamente compacta em $L^2(0,T;H(\Omega))$ (veja [41], Corolario 4, pp. 85), logo, existe uma subsequência $\{v_\epsilon^m\}_m$ tal que

$$v_\epsilon^m \longrightarrow v_\epsilon, \text{ em } L^2(0,T;H(\Omega)). \tag{2.59}$$

Também pelo Teorema 2.7, tem-se que a sequência $\{w_{\epsilon t}^m\}_m$ é limitada de maneira uniforme com respeito a m em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, desta maneira temos que existe subsequência tal que

$$w_{\epsilon t}^m \rightharpoonup w_{\epsilon t}, \text{ fraco em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \tag{2.60}$$

Podemos obter também que a sequência $\{\theta_\epsilon^m\}$ é relativamente compacta em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. De fato, sabemos que $\{\theta_\epsilon^m\}$ é limitada em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ uniformemente com respeito a m, também tem-se

$$
\begin{aligned}
|\tau_h(\theta_\epsilon^m) - \theta_\epsilon^m|_{L^2(0,T-h;H^{-1}(\Omega))} &= \left(\int_0^{T-h} |\theta_\epsilon^m(t+h) - \theta_\epsilon^m(t)|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^{T-h} |\beta_\epsilon^{-1}(w_\epsilon^m(t+h)) - \beta_\epsilon^{-1}(w_\epsilon^m(t))|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \ell\left(\int_0^{T-h} |w_\epsilon^m(t+h) - w_\epsilon^m(t)|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \ell\left(\int_0^{T-h} |\int_t^{t+h} w_{\epsilon s}^m(s)ds|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \ell\hat{M}\left(\int_0^{T-h} hdt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \ell\hat{M}h^{\frac{1}{2}}(T-h)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.61)
\end{aligned}
$$

onde $\hat{M}$ é uma constante independente da escolha de θ_ϵ^m e desta forma, independente de m e ϵ, ℓ é a constante de Lipschitz de β_ϵ^{-1}. Obtemos então

$$|\tau_h(\theta_\epsilon^m) - \theta_\epsilon^m|_{L^2(0,T-h;H^{-1}(\Omega))} \to 0,$$

uniformemente com respeito a θ_ϵ^m, quando $h \to 0$.

Como $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, com inclusões compactas, conclui-se que $\{\theta_\epsilon^m\}_m$ é relativamente compacto em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, (Ver [41];p. 84, Teorema 5) o que implica que existe subsequência tal que

$$\theta_\epsilon^m \longrightarrow \theta_\epsilon, \text{ em } L^2(Q). \qquad (2.62)$$

Provaremos agora que as funções θ_ϵ, v_ϵ e w_ϵ, satisfazem o problema $(\mathcal{P}_\epsilon)$.

Tomamos uma função $\phi \in C^1([0,T])$ tal que $\phi(T) = 0$. Multiplicando (2.22) por $\phi(t)$ e integrando por partes, obtemos

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T \int_\Omega v_\epsilon^m u^k \phi' dxdt &= -\int_0^T \int_\Omega \nabla v_\epsilon^m \nabla u^k \phi dxdt - \int_0^T \int_\Omega (v_\epsilon^m \cdot \nabla) v_\epsilon^m u^k \phi dxdt \\
&\quad - \int_0^T \int_\Omega J(f_s^\epsilon(w_\epsilon^m) - \epsilon) v_\epsilon^m u^k \phi dxdt \\
&\quad + \int_0^T \int_\Omega F(\theta_\epsilon^m) u^k \phi dxdt + \int_\Omega v_{m0} u^k \phi(0) dx.
\end{aligned}
$$

Tomando limite quando $m \to \infty$, obtemos as convergências:

Por (2.59) temos

$$\int_0^T \int_\Omega v_\epsilon^m u^k \phi' dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega v_\epsilon u^k \phi' dxdt.$$

Por (2.53), vale que

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla v_\epsilon^m \nabla u^k \phi dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \nabla v_\epsilon \nabla u^k \phi dxdt.$$

Pelo fato de F ser Lipschitz e por (2.62), tem-se

$$\int_0^T \int_\Omega F(\theta_\epsilon^m) u^k \phi dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega F(\theta_\epsilon) u^k \phi dxdt.$$

A convergência do termo não linear

$$\int_0^T \int_\Omega (v_\epsilon^m \cdot \nabla) v_\epsilon^m u^k \phi dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega (v_\epsilon \cdot \nabla) v_\epsilon u^k \phi dxdt$$

obtém-se de (2.53) e (2.59) (Veja [43];p. 284, Lema 3.2).

Para o outro termo não linear, de (2.58), (2.59) e o fato de que J e $f_s^\epsilon(\cdot)$, são Lipschitz (para ϵ fixo no caso de J), obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega J(f_s^\epsilon(w_\epsilon^m) - \epsilon) v_\epsilon^m u^k \phi dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) v_\epsilon u^k \phi dxdt.$$

Finalmente, por (2.24) temos

$$\int_\Omega v_{m0} u^k \phi(0) dx \longrightarrow \int_\Omega v_{0\epsilon} u^k \phi(0) dx.$$

Conclui-se, que v_ϵ e θ_ϵ, satisfazem a identidade integral

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega v_\epsilon u^k \phi' dxdt \;=\; & -\int_0^T \int_\Omega \nabla v_\epsilon \nabla u^k \phi dxdt - \int_0^T \int_\Omega (v_\epsilon \cdot \nabla) v_\epsilon u^k \phi dxdt \\ & - \int_0^T \int_\Omega J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) v_\epsilon u^k \phi dxdt \\ & + \int_0^T \int_\Omega F(\theta_\epsilon) u^k \phi dxdt + \int_\Omega v_{0\epsilon} u^k \phi(0) dx.\end{aligned}$$

$\forall k = 1, 2 \ldots, \forall \phi \in C^1([0,T])$ tal que $\phi(T) = 0$.

Por outro lado, como $v_{\epsilon t} \in L^2(0,T;V'(\Omega))$ se $N = 2$ e pertence a $L^1(0,T;V'(\Omega))$ se $N = 3$, temos que $v_\epsilon \in C([0,T];V'(\Omega))$, podemos verificar então que v_ϵ satisfaz

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega v_\epsilon u^k \phi' dxdt &= -\int_0^T \int_\Omega \nabla v_\epsilon \nabla u^k \phi dxdt - \int_0^T \int_\Omega (v_\epsilon \cdot \nabla) v_\epsilon u^k \phi dxdt \\ &- \int_0^T \int_\Omega J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) v_\epsilon u^k \phi dxdt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega F(\theta_\epsilon) u^k \phi dxdt + \int_\Omega v_\epsilon(x,0) u^k \phi(0) dx. \quad (2.63)\end{aligned}$$

$\forall k = 1, 2 \ldots, \forall \phi \in C^1([0,T])$ tal que $\phi(T) = 0$, então tem-se

$$\int_\Omega v_\epsilon(x,0) u^k \phi(0) dx = \int_\Omega v_{0\epsilon} u^k \phi(0) dx,$$

como ϕ é arbitraria, tomamos ϕ tal que $\phi(0) \neq 0$ e obtemos que $v_\epsilon(x,0) = v_{0\epsilon}(x)$, q.t.p. em Ω, isto é, satisfaz-se (2.18).

Por linearidade, temos que (2.63) é valida para somas finitas da forma

$$\sum_{i=1}^n u^{k_i} \phi_i,$$

com $\phi_i \in C^1([0,T])$ tal que $\phi(T) = 0$ e u^{k_i} um elemento da base escolhida para $V(\Omega)$.

Por outro lado, o conjunto de todas as possível somas finitas

$$\mathcal{A} = \{\sum_{i=1}^n u^{k_i} \phi_i, \;\; n \in \mathbb{N}, \; \phi_i \in C^1([0,T]), \text{ tal que } \phi(T) = 0\}$$

é denso no conjunto das classes de funções $\xi \in C^1([0,T];V(\Omega))$ tal que $supp\, \xi \subset \Omega \times [0,T)$. Então, por linearidade e continuidade, de (2.63) obtemos finalmente, que vale a identidade integral

$$\begin{aligned}-\int_Q v_\epsilon \xi_t dxdt &= -\int_Q \nabla v_\epsilon \nabla \xi dxdt - \int_Q (v_\epsilon \cdot \nabla) v_\epsilon \xi dxdt \\ &- \int_Q J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) v_\epsilon \xi dxdt \\ &+ \int_Q F(\theta_\epsilon) \xi dxdt + \int_\Omega v_\epsilon(x,0) \xi(x,0) dx,\end{aligned}$$

Então, como δ é arbitrariamente pequeno, concluímos de (2.64) que, quando $m \to \infty$, vale

$$|\int_Q \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon^m) - K_\epsilon(\theta_\epsilon))\nabla\varphi| \longrightarrow 0,$$

Finalmente, de (2.59) e (2.62), obtemos

$$\int_Q \theta_\epsilon^m v_\epsilon^m \cdot \nabla\varphi dxdt \longrightarrow \int_Q \theta_\epsilon v_\epsilon \cdot \nabla\varphi dxdt,$$

quando $m \to \infty$.

Vale, portanto, a identidade (2.20).

Temos também, por (2.26) e (2.58), que

$$w_\epsilon(x,0) = w_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega,$$

e assim também (2.21) é válida.

Verificamos agora, que $w_\epsilon = \beta_\epsilon(\theta_\epsilon)$, q.t.p. em Q. De fato, temos que $w_\epsilon^m = \beta_\epsilon(\theta_\epsilon^m)$, e de (2.58), quando $m \to \infty$, temos que

$$w_\epsilon^m(x,t) \longrightarrow w_\epsilon(x,t), \text{ q.t.p. em } \quad Q,$$

Ainda, por (2.62), vale que

$$\theta_\epsilon^m(x,t) \longrightarrow \theta_\epsilon(x,t), \text{ q.t.p. em } \quad Q,$$

quando $m \to \infty$, logo, como β_ϵ é Lipschitz para ϵ fixo, conclui-se que $w_\epsilon = \beta_\epsilon(\theta_\epsilon)$, q.t.p. em Q.

Provaremos agora que $\theta_\epsilon - \theta_\delta^\epsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Pelo Teorema 2.7, temos que $\theta_\epsilon^m - \theta_\delta^\epsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e além disso $\{\theta_\epsilon^m - \theta_\delta^\epsilon\}_{m=1}^\infty$, é uma sequência limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Assim, existe uma subsequência tal que

$$\theta_\epsilon^m - \theta_\delta^\epsilon \rightharpoonup g, \text{ fraco em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

quando $m \to \infty$. Disto, obtemos

$$\theta_\epsilon^m \rightharpoonup \theta_\delta^\epsilon + g, \text{ fraco em } L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$

quando $m \to \infty$, e, por (2.55), temos, quando $m \to \infty$

$$\theta_\epsilon^m \rightharpoonup \theta_\epsilon, \text{ fraco em } L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Concluimos então que $\theta_\epsilon - \theta_\delta^\epsilon = g \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Verificaremos agora as estimativas para v_ϵ, θ_ϵ, w_ϵ e $w_{\epsilon t}$.

De (2.40) e (2.56) obtemos que θ_ϵ é limitada em $L^\infty(Q)$, de maneira uniforme com relação a ϵ, logo por (2.16) e o fato de termos que $w_\epsilon = \beta_\epsilon(\theta_\epsilon)$, obtemos também para w_ϵ uma limitação uniforme com relação a ϵ em $L^\infty(Q)$.

Por (2.33), (2.53) e (2.54), tem-se que v_ϵ é limitada em $L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$, uniformemente com relação a ϵ. Pela limitação de v_ϵ, de (2.41) e (2.55), conclui-se que θ_ϵ é limitada em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, uniformemente com relação a ϵ.

Finalmente, por (2.42) e (2.60), temos que $w_{\epsilon t}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, de maneira uniforme com respeito a ϵ. Desta forma finalizamos a prova do Teorema 2.6.

2.4 Existência de soluções

Faremos nesta seção a prova do **Teorema 2.5**.

Prova: Pelo Teorema 2.6, temos que as sequências $\{v_\epsilon\}$, $\{\theta_\epsilon\}$ e $\{w_\epsilon\}$ são uniformemente limitadas com respeito a ϵ em: $L^2(0,T;V(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$, $L^\infty(Q)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e $L^\infty(Q)$ respectivamente, assim, temos que existem funções $v \in L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H(\Omega))$, $\theta \in L^\infty(Q) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $w \in L^\infty(Q)$ e subsequências tais que

$$
\begin{aligned}
v_\epsilon &\rightharpoonup v, \text{ fraco em } L^2(0,T;V(\Omega)) && (2.65)\\
v_\epsilon &\rightharpoonup v, \text{ fraco* em } L^\infty(0,T;H(\Omega)) && (2.66)\\
\theta_\epsilon &\rightharpoonup \theta, \text{ fraco em } L^2(0,T;H^1(\Omega)) && (2.67)\\
\theta_\epsilon &\rightharpoonup \theta, \text{ fraco* em } L^\infty(Q) && (2.68)\\
w_\epsilon &\rightharpoonup w, \text{ fraco* em } L^\infty(Q), && (2.69)
\end{aligned}
$$

quando $\epsilon \to 0$. Pela Observação 1.7 (veja (1.33)), temos que

$$w_\epsilon(x,t) \longrightarrow w(x,t), \ \text{q.t.p. em } \Omega, \ \forall t \in [0,T), \tag{2.70}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Também temos, pelo Teorema 2.6, que a sequência $\{w_{\epsilon t}\}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, uniformemente com respeito a ϵ, desta forma obtemos que existe subsequência tal que

$$w_{\epsilon t} \rightharpoonup w_t, \text{ fraco em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \tag{2.71}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Agora, da mesma maneira que na prova do Teorema 2.7 (veja desigualdade (2.61)), pelo fato de ser $\{\theta_\epsilon\}$ uma sequência limitada em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ uniformemente com respeito a ϵ e $\{w_{\epsilon t}\}$ em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e também de maneira uniformemente com relação a ϵ, obtemos que $\{\theta_\epsilon\}$ é relativamente compacta em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ (veja [41], Teorema 5, p. 84). Tem-se então, que existe uma subsequência tal que

$$\theta_\epsilon \longrightarrow \theta, \quad \text{em} \quad L^2(Q). \tag{2.72}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Por outro lado, de (2.69), (2.71) e o fato de que a inclusão $L^\infty(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, é compacta, obtemos que a sequência $\{w_\epsilon\}$ é relativamente compacta em $C([0,T];H^{-1}(\Omega))$ (Ver [41], Corolario 4, p. 85), então existe uma subsequência, tal que

$$w_\epsilon \longrightarrow w, \text{ em } C([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{2.73}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Provaremos a seguir, que as funções v, θ e w, satisfazem o problema $(\mathcal{P}_0)$.

Mostraremos em primeiro lugar, que $v = 0$ em $\mathring{Q}_s$. Seja $\mathcal{K} \subset \mathring{Q}_s$, compacto. Tomando $\xi = v_\epsilon$ em (2.17), integrando por partes e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\int_Q J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)v_\epsilon^2 \le M,$$

onde M é uma constante que não depende de ϵ.

Portanto,

$$\int_{\mathcal{K}} J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)v_\epsilon^2 \le M. \tag{2.74}$$

Por (2.70), temos que $w_\epsilon \to w$, q.t.p. em $\mathcal{K}$ e pelo Teorema de Egoroff, tem-se que dado $\delta > 0$, $\exists \mathcal{K}_\delta \subset \mathcal{K}$ tal que $|\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_\delta| < \delta$ e $w_\epsilon \to w$, uniformemente em $\mathcal{K}_\delta$, então, $\exists \epsilon_0 > 0$ tal que $f_s^\epsilon(w_\epsilon(x,t)) = 1$, $\forall \ (x,t) \in \mathcal{K}_\delta$ se $0 < \epsilon < \epsilon_0$, logo, de (2.74) temos que

$$J(1-\epsilon)|v_\epsilon|^2_{L^2(\mathcal{K}_\delta)} \le M,$$

se $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

Logo, fazendo $\epsilon \to 0$, temos que $J(1-\epsilon) \to +\infty$ e então $|v_\epsilon|^2_{L^2(\mathcal{K}_\delta)} \to 0$.

Por outro lado, de (2.66) temos que $v_\epsilon \rightharpoonup v$ fraco em $L^2(\mathcal{K}_\delta)$, então, conclui-se que $v = 0$, q.t.p. em $\mathcal{K}_\delta$. Por termos que $|\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_\delta| < \delta$ para $\delta > 0$ arbitrario, podemos provar que $v = 0$, q.t.p. em $\mathcal{K}$. De fato , seja $\{\delta_j\}_j$ com $\delta_j > 0$, uma sequência tal que $\delta_j \to 0$, quando $j \to \infty$, então para cada δ_j, obtemos subconjuntos $\mathcal{K}_{\delta_j} \subset \mathcal{K}$, tal que $v = 0$ q.t.p. em $\mathcal{K}_{\delta_j}$.

Por outro lado, podemos escrever

$$\mathcal{K} = (\cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}_{\delta_j}) \cup \hat{K},$$

e temos que $v = 0$ q.t.p. em $\cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}_{\delta_j}$, pois é uma união enumeravel de conjuntos onde $v = 0$ q.t.p. Temos também que para todo j vale

$$\begin{aligned} |\mathcal{K} \setminus (\cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}_{\delta_j})| &= |\mathcal{K} \cap (\cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}_{\delta_j})^c| \\ &= |\mathcal{K} \cap (\cap_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}_{\delta_j}^c)| \\ &= |\cap_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}_{\delta_j}^c| \\ &= |\cap_{j=1}^{\infty} (\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_{\delta_j})| \\ &\leq \delta_j, \end{aligned}$$

Assim, como $\delta_j \to 0$ quando $j \to \infty$, temos que

$$|\mathcal{K} \setminus (\cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}_{\delta_j})| = 0,$$

e concluimos que $v = 0$ q.t.p. em $\mathcal{K}$.

Por outro lado, como $\mathcal{K}$ e um subconjunto compacto, também arbitrario, de $\overset{\circ}{Q}_s$, concluímos finalmente que $v = 0$, q.t.p. em $\overset{\circ}{Q}_s$.

Mostraremos agora que as funções v, θ e w satisfazem (2.10).

Seja $\varphi \in C_0^1([0,T]; H_0^1(\Omega))$; de (2.20) temos a identidade

$$\int_Q w_\epsilon \varphi_t dxdt - \int_Q \nabla K_\epsilon(\theta_\epsilon) \nabla \varphi dxdt + \int_Q \theta_\epsilon v_\epsilon \nabla \varphi dxdt = 0.$$

Por (2.70) obtemos a convergência

$$\int_Q w_\epsilon \varphi_t dxdt \to \int_Q w \varphi_t dxdt.$$

Por (2.65) e (2.72), temos

$$\int_Q \theta_\epsilon v_\epsilon \nabla \varphi dxdt \to \int_Q \theta v \nabla \varphi dxdt.$$

Antes de provar a convergência do termo

$$\int_Q \nabla K_\epsilon(\theta_\epsilon)\nabla\varphi dxdt,$$

provaremos que a função K, com as hipóteses dadas em (H_3), é Lipschitz, ainda numa vizinhança da origem. De fato, sejam s_1, s_2, s_3, s_4 números reais tais que $s_1 < s_3 < 0$ e $s_2 > s_4 > 0$, então obtém-se

$$\begin{aligned} |K(s_2) - K(s_1)| &\leq |K(s_2) - K(s_4)| + |K(s_4) - K(s_3)| + |K(s_3) - K(s_1)| \\ &\leq L_K|s_2 - s_4| + |K(s_4) - K(s_3)| + L_K|s_3 - s_1| \\ &= L_K\left(|s_2 - s_1| - |s_4 - s_3|\right) + |K(s_4) - K(s_3)|. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Se $s_3 \to 0^-$, $s_4 \to 0^+$, então $|s_4 - s_3| \to 0$, pela continuidade de K e por termos $K(0) = 0$, obtém-se $|K(s_4) - K(s_3)| \longrightarrow 0$, desta forma de (2.75) obtemos $|K(s_2) - K(s_1)| \leq L_K|s_2 - s_1|$, ou seja K é Lipschitz em todo $\mathbb{R}$.

Consideramos primeiro uma função teste $\varphi \in C_0^1([0,T]; C_0^2(\Omega))$ e obtemos

$$\begin{aligned} \left|\int_Q \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))\nabla\varphi\right| &\leq \int_Q |K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K_\epsilon(\theta)||\triangle\varphi| \\ &+ \int_Q |K_\epsilon(\theta) - K(\theta)||\triangle\varphi|. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Por (2.14) temos que K_ϵ é Lipschitz e assim, obtemos

$$\int_Q |K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K_\epsilon(\theta)||\triangle\varphi| \leq K_1 \int_Q |\theta_\epsilon - \theta||\triangle\varphi|.$$

Por (2.72), obtemos quando $\epsilon \to 0$ que

$$|\theta_\epsilon(x,t) - \theta(x,t)| \to 0.$$

Logo, obtemos

$$\int_Q |K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K_\epsilon(\theta)||\triangle\varphi| \to 0, \tag{2.77}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Temos também

$$\begin{aligned} |K_\epsilon(\theta) - K(\theta)| &\leq |K_\epsilon(\theta) - K_\epsilon(0)| + |K(\theta) - K(0)| \\ &\leq 2K_1|\theta|, \end{aligned}$$

e como $|\theta||\triangle\varphi| \in L^1(Q)$, pelo teorema da convergência dominada, obtemos

$$\int_Q |K_\epsilon(\theta) - K(\theta)||\triangle\varphi| \to 0, \tag{2.78}$$

quando $\epsilon \to 0$. Desta forma de (2.76), (2.77) e (2.78), conlui-se que

$$\int_Q \nabla K_\epsilon(\theta_\epsilon)\nabla\varphi \to \int_Q \nabla K(\theta)\nabla\varphi, \tag{2.79}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Agora, pela densidade de $C_0^1([0,T];C_0^2(\Omega))$ em $C_0^1([0,T];H_0^1(\Omega))$, dado $\delta > 0$ arbitrariamente pequeno, e $\varphi \in C_0^1([0,T];H_0^1(\Omega))$, existe uma função $\hat{\varphi} \in C_0^1([0,T];C_0^2(\Omega))$ tal que $|\varphi - \hat{\varphi}|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} < \delta$.

Então, vale

$$\begin{aligned} |\int_Q \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))\nabla\varphi| &\leq |\int_Q \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))\nabla\hat{\varphi}| \\ &+ |\int_Q \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))\nabla(\varphi - \hat{\varphi})|, \end{aligned} \tag{2.80}$$

como $\hat{\varphi} \in C_0^1([0,T];C_0^2(\Omega))$, temos de (2.79) que

$$|\int_Q \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))\nabla\hat{\varphi}| \longrightarrow 0,$$

quando $\epsilon \to 0$.

Para o outro termo, temos

$$\begin{aligned} |\int_Q \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))\nabla(\varphi - \hat{\varphi})| &\leq \int_Q |\nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))||\nabla(\varphi - \hat{\varphi})| \\ &\leq C|\theta_\epsilon|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}|\varphi - \hat{\varphi}|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ &\quad + C|\theta_\epsilon|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}|\varphi - \hat{\varphi}|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ &\leq M\delta, \end{aligned}$$

como $\delta > 0$ é arbitrariamente pequeno e M é uma constante, de (2.80) concluimos que

$$|\int_Q \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))\nabla\varphi| \longrightarrow 0,$$

quando $\epsilon \to 0$. Temos então que satisfaz-se (2.10)

Temos também, por (2.21) e (2.70), que

$$w(x,0) = w_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Provaremos agora a inclusão $w \subseteq \beta(\theta)$, q.t.p. em Q.

Consideramos as regiões Q_+, Q_- e Q_0, definidas pela temperatura, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} Q_+ &= \{(x,t) \in Q;\ \theta(x,t) > 0\}, \\ Q_- &= \{(x,t) \in Q;\ \theta(x,t) < 0\}, \\ Q_0 &= \{(x,t) \in Q;\ \theta(x,t) = 0\}. \end{aligned}$$

É claro que $Q = Q_+ \cup Q_- \cup Q_0$. Seja $(x,t) \in Q_-$, isto é, $\theta(x,t) < 0$, então por (2.72), para quase todo $(x,t) \in Q_-$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\theta_\epsilon(x,t) < 0$, $\forall \epsilon < \epsilon_0$. Por (2.16), temos que $w_\epsilon = \beta_\epsilon(\theta_\epsilon(x,t)) = \beta(\theta_\epsilon(x,t))$, então temos

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} |w_\epsilon(x,t) - \beta(\theta(x,t))| &= \lim_{\epsilon \to 0} |\beta(\theta_\epsilon(x,t)) - \beta(\theta(x,t))| \\ &\leq \hat{\beta}_1 \lim_{\epsilon \to 0} |\theta_\epsilon(x,t) - \theta(x,t)| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, por (2.70), temos que $w = \beta(\theta)$, q.t.p. em Q_-. De maneira análoga, obtemos que $w = \beta(\theta)$, q.t.p. em Q_+.

Provaremos agora que a inclusão $w \subseteq \beta(\theta)$ é valida em Q_0. Como $\theta(x,t) = 0$ em Q_0, temos que $\beta(\theta(x,t)) = [0, L]$ em Q_0, desta forma devemos provar que $0 \leq w(x,t) \leq L$, q.t.p. em Q_0.

Seja o conjunto

$$N_1 = \{(x,t) \in Q_0;\ w(x,t) > L\},$$

e suponhamos que tem medida $|N_1| > 0$. Tomando a função característica de N_1, χ_{N_1}, obtemos por (2.70)

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{Q_0} w_\epsilon \chi_{N_1} &= \int_{N_1} w \\ &> L|N_1|. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Por outro lado, de (2.16), (2.72) e o teorema da convergência dominada, obtemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{Q_0} w_\epsilon \chi_{N_1} &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{Q_0} \beta_\epsilon(\theta_\epsilon)\chi_{N_1} \\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}\hat{\beta}_1\int_{N_1} |\theta_\epsilon| + L|N_1| \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\hat{\beta}_1\int_{N_1} |\theta| + L|N_1| \\
&= L|N_1|,
\end{aligned}
$$

o qual contradiz (2.81) ao supor que $|N_1| > 0$, conclui-se então que $|N_1| = 0$, e logo $w \leq L$, q.t.p. em Q_0.

Denotamos agora por N_2 o conjunto

$$
N_2 = \{(x,t) \in Q_0;\ w(x,t) < 0\},
$$

e supomos que tem medida $|N_2| > 0$. Tomando a função característica de N_2, que denotamos χ_{N_2}, de (2.70) obtemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{Q_0} w_\epsilon \chi_{N_2} &= \int_{N_2} w \\
&< 0.
\end{aligned}
\tag{2.82}
$$

Por (2.16), temos que $\beta_\epsilon(\theta_\epsilon) \geq min\{\hat{\beta}_1\theta_\epsilon, 0\} = g(\theta_\epsilon)$. Observamos que se $\theta_\epsilon(x,t) \to 0$ então $g(\theta_\epsilon(x,t)) \to 0$, e como $|g(\theta_\epsilon(x,t))| \leq M$, usando o teorema da convergência dominada, obtemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{Q_0} w_\epsilon \chi_{N_2} &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{N_2} \beta_\epsilon(\theta_\epsilon) \\
&\geq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{N_2} g(\theta_\epsilon) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

o que contradiz (2.82) ao supor que $|N_2| > 0$, então $|N_2| = 0$ e temos que $w \geq 0$, q.t.p. em Q_0, logo, $0 \leq w \leq L$, q.t.p. em Q_0, com o qual prova-se que $w \subseteq \beta(\theta)$, q.t.p. em Q.

Para provar que $\theta - \theta_\delta \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, procedemos de maneira similar que na prova do Teorema 2.6.

Do Teorema 2.6 temos que a sequência $\{\theta_\epsilon - \theta_\delta^\epsilon\}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, então, existe uma subsequência tal que

$$\theta_\epsilon - \theta_\delta^\epsilon \rightharpoonup \hat{g}, \quad \text{fraco em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

quando $\epsilon \to 0$. Por (2.27), temos que

$$\hat{g} + \theta_\delta^\epsilon \rightharpoonup \hat{g} + \theta_\delta, \quad \text{fraco em} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$

quando $\epsilon \to 0$.

Então

$$\theta_\epsilon \rightharpoonup \hat{g} + \theta_\delta, \quad \text{fraco em} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$

quando $\epsilon \to 0$.

Como por (2.67) temos que

$$\theta_\epsilon \rightharpoonup \theta, \quad \text{fraco em} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$

concluimos que $\theta - \theta_\delta = \hat{g} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Prova-se desta forma (2.11).

Para provar (2.13), consideremos inicialmente um $\rho > 0$ arbitrariamente pequeno e provemos a existência de um conjunto $Q_{ml}^\rho \subset Q_{ml}$, tal que $|Q_{ml} \setminus Q_{ml}^\rho| < \rho$, que satisfaça as condições dadas na definicao 2.2 parte (iii). A existência deste conjunto esta estreitamente relacionada com a convergência das funções w_ϵ, como veremos a seguir.

Por (2.69), temos que a sequência $\{w_\epsilon\}$ é limitada em $L^\infty(Q)$, de maneira uniforme com relação a ϵ, e por (2.70) tem-se que

$$w_\epsilon(x,t) \longrightarrow w(x,t), \quad \text{q.t.p. em} \quad Q_{ml}. \tag{2.83}$$

quando $\epsilon \to 0$. Além disso, satisfaz-se $w_\epsilon(x,0) = w(x,0) = w_0(x)$, em Ω, então temos

$$w_\epsilon(\cdot\,,0) \longrightarrow w(\cdot\,,0), \quad \text{uniformemente em} \quad \Omega. \tag{2.84}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Agora, pelo teorema de Egoroff, tem-se que dado $\rho > 0$, arbitrario, existe um conjunto $Q_{ml}^\rho \subset Q_{ml}$ tal que $|Q_{ml} \setminus Q_{ml}^\rho| < \rho$, e

$$w_\epsilon \longrightarrow w, \quad \text{uniformemente em} \quad Q_{ml}^\rho, \tag{2.85}$$

Fazemos notar que, por (2.84) e (2.85), podemos considerar que $\Omega_{ml}(0)\times \{0\}\subset Q^{\rho}_{ml}$. Destacamos que $\overset{\circ}{Q}{}^{\rho}_{ml}$ denotará o interior do conjunto Q^{ρ}_{ml}, relativo ao conjunto $\Omega\times[0,T)$. Observamos que tem-se $\overset{\circ}{\Omega}_{ml}(0)\times\{0\}\subset\overset{\circ}{Q}{}^{\rho}_{ml}$.

Sendo

$$\Omega_{ml}(t)=\{x\in\Omega;\ \ (x,t)\in Q_{ml}\},$$

denotamos

$$\Omega^{\rho}_{ml}(t)=\{x\in\Omega_{ml}(t);\ \ (x,t)\in Q^{\rho}_{ml}\}.$$

Notamos também que $\overset{\circ}{\Omega}{}^{\rho}_{ml}$ denotará o interior do conjunto Ω^{ρ}_{ml}, relativo ao conjunto Ω.

Consideremos agora o seguinte: Seja $U_{t_i}=(t_i,t_{i+1})\times U(t_i)$, com $U(t_i)$ aberto tal que $\overline{U}_{t_i}=[t_i,t_{i+1}]\times\overline{U}(t_i)\subset\overset{\circ}{Q}{}^{\rho}_{ml}$ e $\overline{U}(t_i)\subset\overset{\circ}{\Omega}{}^{\rho}_{ml}$. Seja $\eta\in V(U(t_i))$, de (2.17) temos para quase todo $t\in[t_i,t_{i+1}]$

$$\begin{aligned}(v_{\epsilon t},\eta)_{U(t_i)} &= -(\nabla v_\epsilon,\nabla\eta)_{U(t_i)}-((v_\epsilon\cdot\nabla)v_\epsilon,\eta)_{U(t_i)}\\ &\quad -(J(f^\epsilon_s(w_\epsilon)-\epsilon)v_\epsilon,\eta)_{U(t_i)}+(F(\theta_\epsilon),\eta)_{U(t_i)},\end{aligned}\tag{2.86}$$

então, temos

$$\begin{aligned}|(v_{\epsilon t},\eta)_{U(t_i)}| &\leq |(\nabla v_\epsilon,\nabla\eta)_{U(t_i)}|+|((v_\epsilon\cdot\nabla)v_\epsilon,\eta)_{U(t_i)}|\\ &+ |(J(f^\epsilon_s(w_\epsilon)-\epsilon)v_\epsilon,\eta)_{U(t_i)}|+|(F(\theta_\epsilon),\eta)_{U(t_i)}|.\end{aligned}\tag{2.87}$$

Podemos obter as seguintes estimativas para os termos do lado direito de (2.87):

$$|(\nabla v_\epsilon,\nabla\eta)_{U(t_i)}|\leq C|v_\epsilon|_{H^1(U(t_i))}|\eta|_{V(U(t_i))},\tag{2.88}$$

$$|((v_\epsilon\cdot\nabla)v_\epsilon,\eta)_{U(t_i)}|\leq\begin{cases}C|v_\epsilon|^2_{H^1(U(t_i))}|\eta|_{V(U(t_i))}, & \text{se } N=3\\ C|v_\epsilon|_{L^2(U(t_i))}|v_\epsilon|_{H^1(U(t_i))}|\eta|_{V(U(t_i))}, & \\ \text{se } N=2, & \end{cases}\tag{2.89}$$

$$|(F(\theta_\epsilon),\eta)_{U(t_i)}|\leq C|\theta_\epsilon|_{L^2(U(t_i))}|\eta|_{V(U(t_i))}.\tag{2.90}$$

Para o outro termo de (2.87), temos

$$|(J(f^\epsilon_s(w_\epsilon)-\epsilon)v_\epsilon,\eta)_{U(t_i)}|\leq\int_{U(t_i)}|J(f^\epsilon_s(w_\epsilon)-\epsilon)||v_\epsilon|\eta|dxdt.\tag{2.91}$$

Lembrando que $\overline{U}_{t_i} = [t_i, t_{i+1}] \times \overline{U}(t_i) \subset \overset{\circ}{Q}{}^{\rho}_{ml} \subset Q_{ml}$ e $Q_{ml} = \{(x,t) \in Q;\ \ w(x,t) > 0\}$, temos que

$$\inf_{\overline{U}_{t_i}} w(x,t) = \alpha > 0.$$

Dessa forma, pela hipóteses (H_6), temos que

$$\sup_{\overline{U}_{t_i}} f_s(w(x,t)) < 1 - \delta,$$

para um certo $\delta > 0$.

Por outro lado, como $f_s^\epsilon \to f_s$ uniformemente em $\mathbb{R}$ e como por (2.84) e (2.85), tem-se que $w_\epsilon \to w$, uniformemente em $\overline{U}_{t_i}$, obtemos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$f_s^\epsilon(w_\epsilon) < 1 - \frac{\delta}{2},$$

em $\overline{U}_{t_i}$ se $0 < \epsilon < \epsilon_0$, logo, por ser J não decrescente, tem-se

$$\begin{aligned} J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) &\leq J(1 - \frac{\delta}{2} - \epsilon) \\ &\leq J(1 - \frac{\delta}{2}) \\ &\leq \hat{C}, \end{aligned} \tag{2.92}$$

$\forall\ (x,t) \in \overline{U}_{t_i}$ se $0 < \epsilon < \epsilon_0$, onde $\hat{C}$ é uma constante independente de ϵ. Desta forma, de (2.91) e (2.92), obtemos

$$\begin{aligned} |(J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)v_\epsilon, \eta)_{U(t_i)}| &\leq \int_{U(t_i)} |J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)||v_\epsilon|\eta| dxdt \\ &\leq \hat{C}|v_\epsilon|_{L^2(U(t_i))}|\eta|_{L^2(U(t_i))} \\ &\leq C|v_\epsilon|_{L^2(U(t_i))}|\eta|_{V(U(t_i))}. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Agora, por (2.65) e (2.66), temos que v_ϵ é limitada em $L^2(t_i, t_{i+1}; H^1(U(t_i)) \cap L^\infty(t_i, t_{i+1}; L^2(U(t_i)))$, uniformemente com respeito a ϵ.

Por outro lado, de (2.87), (2.88), (2.89), (2.90) e (2.93), temos que $v_{\epsilon t}$, é limitada em $L^2(t_i, t_{i+1}; V'(U(t_i)))$, se $N = 2$ e em $L^1(t_i, t_{i+1}; V'(U(t_i)))$, se $N = 3$, uniformemente com relação a ϵ. Então, obtemos que a sequência $\{v_\epsilon\}$

é relativamente compacta em $L^2(t_i, t_{i+1}; L^2(U(t_i))$ (veja Simon [41], Corolario 4, p. 85), logo, temos que existe uma subsequência tal que

$$v_\epsilon \longrightarrow v, \text{ em } L^2(t_i, t_{i+1}; L^2(U(t_i)), \tag{2.94}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Agora, dado $\mathcal{K} \subset \overset{\circ}{Q}{}^{\rho}_{ml}$, o podemos cubrir com uma união finita de cilindros da forma $U_{t_i} = (t_i, t_{i+1}) \times U(t_i)$ tal que $\overline{U}_{t_i} \subset \overset{\circ}{Q}{}^{\rho}_{ml}$ e $U(t_i)$ aberto contido em $\overset{\circ}{\Omega}{}^{\rho}_{ml}$. Lembramos que no caso de ter $t_i = 0$ o cilindro tem a forma $[0, t_{i+1}) \times U(0)$.

Por (2.94), obtemos que

$$v_\epsilon \longrightarrow v, \text{ em } L^2(\mathcal{K}),$$

quando $\epsilon \to 0$, e, portanto, temos

$$v_\epsilon \longrightarrow v, \text{ forte em } L^2_{loc}(\overset{\circ}{Q}{}^{\rho}_{ml}), \tag{2.95}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Por outro lado, usando a estimativa para $J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)$, obtida em (2.92), obtemos

$$\begin{aligned}(\int_{U_{t_i}} |J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)|^2)^{\frac{1}{2}} &\leq J(1 - \frac{\delta}{2})|U_{t_i}| \\ &\leq M,\end{aligned} \tag{2.96}$$

onde M, é uma constante independente de ϵ. De (2.96) obtemos que a sequência $\{J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)\}$ é limitada em $L^2(U_{t_i})$, de maneira uniforme com relação a ϵ, logo, obtemos que existe uma subsequência tal que

$$J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) \rightharpoonup h_i, \text{ fraco em } L^2(U_{t_i}), \tag{2.97}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Consideramos agora o fato de que

$$\overset{\circ}{Q}{}^{\rho}_{ml} = \cup_{i=1}^{\infty}(t_i, t_{i+1}) \times U(t_i) = \cup_{i=1}^{\infty} U_{t_i}.$$

Por (2.96), temos que existe subsequência de $\{J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)\}$, que denotamos por $\{J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) - \epsilon_j)_1\}$, tal que

$$J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) - \epsilon_j)_1 \rightharpoonup h_1, \text{ fraco em } L^2(U_{t_1}),$$

quando $\epsilon_j \to 0$.

Tomamos agora uma subsequência de $\{J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) - \epsilon_j)_1\}$ e obtemos

$$J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) - \epsilon_j)_2 \rightharpoonup h_2, \quad \text{fraco em } L^2(U_{t_2}),$$

quando $\epsilon_j \to 0$.

Por um processo indutivo, obtemos uma subsequência $\{J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) - \epsilon_j)_k\}$ de $\{J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) - \epsilon_j)_{k-1}\}$ tal que

$$J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) - \epsilon_j)_k \rightharpoonup h_k, \quad \text{fraco em } L^2(U_{t_k}),$$

quando $\epsilon_j \to 0$, e $h_k/_{U_{t_{k-1}}} = h_{k-1}$. Pelo conhecido processo diagonal, obtemos sequência $\{J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) - \epsilon_j)_j\}$ tal que

$$J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) - \epsilon_j)_j \rightharpoonup h_\rho, \quad \text{fraco em } L^2_{loc}(\overset{\circ\,\rho}{Q}_{ml}),$$

quando $\epsilon_j \to 0$, onde a função h_ρ é tal que $h_\rho/_{U_{t_j}} = h_j$. Esta sequência diagonal a denotaremos simplesmente por $J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)$, temos então

$$J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) \rightharpoonup h_\rho, \quad \text{fraco em } L^2_{loc}(\overset{\circ\,\rho}{Q}_{ml}), \tag{2.98}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Verificamos agora, que satisfaz-se a inclusão $h_\rho \subseteq J(f_s(\beta(\theta)))$. Seja $U \subset \overset{\circ\,\rho}{Q}_{ml}$ conjunto compacto e sejam

$$\begin{aligned} U_+ &= \{(x,t) \in U;\ \theta(x,t) > 0\} \\ U_0 &= \{(x,t) \in U;\ \theta(x,t) = 0\}. \end{aligned}$$

Consideremos em primeiro lugar o conjunto U_+. Como U pode ser coverto por uma quantidade finita de cilíndros da forma $(t_i, t_{i+1}) \times U(t_i) = U_{t_i}$ com $\overline{U}_{t_i} \subset \overset{\circ\,\rho}{Q}_{ml}$, o mesmo acontezendo com U_+. Logo, como $w(x,t) \geq L$ em U_+, podemos proceder de maneira similar a como foi obtida a estimativa (2.92) para a função $J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)$, e obter que

$$J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) \leq M,$$

se $0 < \epsilon < \epsilon_0$, onde M é uma constante independente de ϵ. Desta forma , pela hipóteses (H_5), temos que J é Lipschitz em $A = f_s^\epsilon(w_\epsilon(U_+)) \cup f_s(\beta(\theta(U_+)))$, logo, dada $\psi \in L^2(U_+)$, tem-se

$$\begin{aligned} \left|\int_{U_+} (J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) - J(f_s(\beta(\theta))))\psi\right| &\leq \int_{U_+} |J(f_s^\epsilon(\beta_\epsilon(\theta_\epsilon)) - \epsilon) - J(f_s(\beta(\theta)))||\psi| \\ &\leq C\int_{U_+} |f_s^\epsilon(\beta_\epsilon(\theta_\epsilon)) - f_s(\beta(\theta))||\psi| \\ &\quad + C\epsilon \int_{U_+} |\psi|. \end{aligned} \tag{2.99}$$

Por outro lado, por termos que $\theta(x,t) > 0$ em U_+, por (2.16) obtemos para $0 < \epsilon < \epsilon_0$, $\beta_\epsilon(\theta_\epsilon) = \beta(\theta_\epsilon)$, logo, pela hipóteses (H_2), pelo fato de $f_s^\epsilon \to f_s$ uniformemente e por (2.72), temos

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} |f_s^\epsilon(\beta_\epsilon(\theta_\epsilon(x,t))) - f_s(\beta(\theta(x,t)))| &= \lim_{\epsilon\to 0} |f_s^\epsilon(\beta(\theta_\epsilon(x,t))) - f_s(\beta(\theta(x,t)))| \\ &= 0, \end{aligned}$$

q.t.p. em U_+. Além disso, $|f_s^\epsilon(\beta_\epsilon(\theta_\epsilon)) - f_s(\beta(\theta))||\psi| \in L^1(U_+)$ e é uniformemente limitada em $L^1(U_+)$ com relação a ϵ, logo, pelo teorema da convergência dominada, obtemos que

$$\int_{U_+} |f_s^\epsilon(\beta_\epsilon(\theta_\epsilon)) - f_s(\beta(\theta))||\psi| \to 0,$$

quando $\epsilon \to 0$. Então por (2.99), conclui-se que

$$J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) \rightharpoonup J(f_s(\beta(\theta))), \text{ fraco em } L^2(U_+),$$

quando $\epsilon \to 0$. Logo, de (2.98), concluimos que

$$h_\rho = J(f_s(\beta(\theta))), \text{ q.t.p. em } U_+. \tag{2.100}$$

Em U_0 temos que $\theta(x,t) = 0$ e, portanto, $\beta(\theta(x,t)) = [0, L]$ em U_0. Logo, $f_s(\beta(\theta(x,t))) = [0,1]$ e então $J(f_s(\beta(\theta(x,t)))) = [0, +\infty)$ em U_0. Assim, basta verificarmos que $h_\rho \geq 0$ q.t.p. em U_0.

Para isto, consideramos o conjunto

$$N = \{(x,t) \in U_0;\ h_\rho(x,t) < 0\}$$

e suponhamos por contradição que ele tem medida $|N| > 0$. Sendo χ_N a função característica de N, obtemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{U_0} J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)\chi_N = \int_N h_\rho < 0. \tag{2.101}$$

Por outro lado, como $J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) \geq 0$, obtemos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{U_0} J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)\chi_N \geq 0,$$

o que contradiz (2.101), então, $|N| = 0$, assim, $h_\rho \geq 0$ q.t.p. em U_0.

Portanto, temos

$$h_\rho \subseteq J(f_s(\beta(\theta))) \quad \text{q.t.p. em } U_0. \tag{2.102}$$

Conclui-se então de (2.100) e de (2.102) que

$$h_\rho \subseteq J(f_s(\beta(\theta))) \quad \text{q.t.p. em } U.$$

Agora, como $\overset{\circ}{Q}{}^{\rho}_{ml}$ pode ser coberto com uma quantidade enumerável de conjuntos abertos limitados U tal que $\overline{U} \subset \overset{\circ}{Q}{}^{\rho}_{ml}$, concluimos que

$$h_\rho \subseteq J(f_s(\beta(\theta))), \quad \text{q.t.p. em } \overset{\circ}{Q}{}^{\rho}_{ml}.$$

Em particular, temos

$$h_\rho v \subseteq J(f_s(\beta(\theta)))v \quad \text{q.t.p. em } \overset{\circ}{Q}{}^{\rho}_{ml}.$$

Até este momento trabalhamos com um $\rho > 0$ arbitrariamente pequeno. Passemos agora à construção do conjunto $\mathcal{F}$.

Para isto, consideremos uma sequência $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ de números positivos decrescentes tais que $\rho_i \to 0+$ quando $i \to +\infty$. Então, indutivamente, para cada i, tomemos o conjunto $Q_{ml}^{\rho_i}$ obtido no argumento anterior e a função h_{ρ_i} correspondente, mas de tal forma que ao passarmos de i para $i+1$, tomamos subsequências das sequências anteriores que definem os h_{ρ_i}.

O processo diagonal outra vez define uma função h em $int_f(\mathcal{F}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overset{\circ}{Q}{}^{\rho_i}_{ml}$ tal que $h|_{\overset{\circ}{Q}{}^{\rho_i}_{ml}} = h_{\rho_i}$ e que facilmente se vê que $h \in L^2_{loc}(int_f(\mathcal{F}))$, onde $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_{ml}^{\rho_i}$. Também por construção se tem que

$$h \subseteq J(f_s(\beta(\theta))) \quad \text{q.t.p. em } int_f(\mathcal{F}).$$

Provaremos a seguir que vale (2.13). Para isto, seja $\xi \subset C^1([0,T]; H^1(\Omega))$ tal que $supp\, \xi \subset int_f(\mathcal{F})$ e $div\, \xi(\cdot, t) = 0, \ \forall t \in [0, T)$.

Denotando $U = supp\ \xi$ e lembrando que ele é compacto, e portanto U está contido numa união finita de conjuntos $\overset{\circ}{Q}{}^{\rho_i}_{ml}$, podemos tomar ϵ tendendo a zero tal que as convergências a seguir se realizam em U.

Inicialmente observemos que de (2.17) vale a igualdade integral

$$\begin{aligned} -\int_U v_\epsilon \xi_t dxdt &= -\int_U \nabla v_\epsilon \nabla \xi dxdt - \int_U (v_\epsilon \cdot \nabla) v_\epsilon \xi dxdt \\ &- \int_U J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) v_\epsilon \xi dxdt \qquad (2.103) \\ &+ \int_U F(\theta_\epsilon) \xi dxdt + \int_{\Omega_{ml}(0)} v_\epsilon(x,0)\xi(x,0)dx. \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0+$, obtemos as seguintes convergências:
De (2.95), obtemos a convergência

$$\int_U v_\epsilon \xi_t dxdt \to \int_U v \xi_t dxdt.$$

Agora, de (2.65), obtemos

$$\int_U \nabla v_\epsilon \nabla \xi dxdt \to \int_U \nabla v \nabla \xi dxdt.$$

Pelo fato de termos F Lipschitz e de (2.72), temos

$$\int_U F(\theta_\epsilon)\xi dxdt \to \int_U F(\theta)\xi dxdt.$$

Por (2.65) e (2.95), obtemos

$$\int_U (v_\epsilon \cdot \nabla) v_\epsilon \xi dxdt \to \int_U (v \cdot \nabla) v \xi dxdt.$$

Agora, de (2.95) e (2.98) obtemos que

$$\int_U J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) v_\epsilon \xi dxdt \to \int_U hv\xi dxdt.$$

Finalmente, por (2.18) e (2.19), vale a convergência

$$\int_{\Omega_{ml}(0)} v_\epsilon(x,0)\xi(x,0)dx \to \int_{\Omega_{ml}(0)} v_0(x)\xi(x,0)dx.$$

Dos anteriores e do fato que $U = supp\,\xi \subset int_f(\mathcal{F})$, concluimos que vale a identidade integral

$$
\begin{aligned}
-\int_{int_f(\mathcal{F})} v\xi_t dxdt \;=\; & -\int_{int_f(\mathcal{F})} \nabla v \nabla \xi dxdt - \int_{int_f(\mathcal{F})} (v\cdot \nabla) v \xi dxdt - \int_{int_f(\mathcal{F})} hv\xi dxdt \\
& + \int_{int_f(\mathcal{F})} F(\theta)\xi dxdt + \int_{\Omega_{ml}(0)} v_0(x)\xi(x,0)dx,
\end{aligned}
$$

com o que está provado o Teorema 2.5.

Observação 2.13 *Por termos, $f_s^\epsilon \to f_s$ uniformemente em $\mathbb{R}$ e $w_\epsilon \to w$, uniformemente sobre compactos $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{K} \subset int_f(\mathcal{F})$, podemos concluir que $J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)$ converge a $J(f_s(w))$ em $C^0(\mathcal{K})$ e então podemos tomar $h = J(f_s(w))$ na definição 2.2 de solução generalizada.*

Capítulo 3

Um Problema Estacionário

Introdução

Apresentaremos neste capítulo resultados de existência de soluções estacionárias de um modelo matemático para a solidificação de materiais puros, levando em conta os processos de condução de energia térmica, bem como a sua geração ou absorção devido a mudanças de fases, e também os processos convectivos que se realizam nas fases não sólidas. O modelo a ser estudado é constituído de equações que descrevem o balanço de energia térmica acopladas a equações que governam o movimento do material na região não sólida (líquida-mushy). Estas últimas equações são do tipo Navier-Stokes com termos adicionais do tipo Boussinesq para levar em conta os efeitos termoconvectivos e um termo do tipo Carman-Koseny que modela a dinâmica do fluido na zona *mushy*.

Como no capítulo anterior, o nosso modelo está baseado nos trabalhos de DiBenedetto e O'Leary [20] e o de O'Leary [36], quanto aos aspectos de balanço de energia térmica e mudança de fases, e Blanc e outros [5] quanto aos aspectos convectivos. Porém, por razões técnicas que serão oportunamente explicadas, o problema estacionário aqui analisado será aquele correspondente a um modelo matematicamente regularizado daquele estudado no capítulo anterior. Mais precisamente, estaremos estudando as equações estacionárias correspondentes ao seguinte sistema de equações (inclusões) diferenciais:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial w}{\partial t} - \alpha \Delta w - \Delta K(\theta) + v \cdot \nabla \theta & = & 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\
w & \subseteq & \beta(\theta) \text{ em } \Omega \times (0,T), \\
w & = & w_\delta \text{ sobre } \Sigma, \\
w(x,0) & = & w_0(x) \text{ em } \Omega, \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p - F(\theta) & \subseteq & -J(f_s(\beta(\theta)))v \text{ em } \overset{\circ}{Q}_{ml}, \\
div\ v & = & 0 \text{ em } \overset{\circ}{Q}_{ml}, \\
v & = & 0 \text{ sobre } \Sigma_{ml}, \\
v(x,0) & = & v_0(x) \text{ em } \overset{\circ}{\Omega}_{ml}(0), \\
v & = & 0 \text{ em } \overset{\circ}{Q}_s \,.
\end{array}
\right.
$$

Aqui utilizamos as mesmas notações do capítulo anterior; α é uma constante estritamente positiva e o termo $\alpha\Delta w$ corresponde à regularização matemática aludida acima. Fisicamente, a primeira equação pode ser obtida assumindo que o fluxo de calor é $-\alpha\nabla w - \nabla K(\theta)$, isto é, há um termo proporcional ao gradiente da entalpia, ao invés de apenas um termo dependente da temperatura, como é mais usual. Outra observação é que no problema acima a condição de fronteira é dada sobre w. Entretanto, isto e a condição $w \subseteq \beta(\theta)$ determinam a temperatura sobre a fronteira por $\theta_\delta = \beta^{-1}(w_\delta)$, conforme veremos brevemente.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção 3.1 faremos uma descrição datalhada do modelo. Na Seção 3.2 introduzimos as hipóteses, precisamos a formulação fraca do problema e enunciamos o nosso resultado sobre existência de soluções estacionárias (Teorema 3.4). Na Seção 3.3 introduzimos um problema aproximado que corresponde a uma regularização do problema original e provamos um resultado de existência de soluções de tal problema regularizado, via argumentos de compacidade e ponto fixo. Na Seção 3.4 provaremos o Teorema 3.4.

3.1 Descrição do modelo

Consideramos o fenômeno de mudança de fase de um material puro ocorrendo no domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N = 2, 3)$, com fronteira $\partial\Omega$ regular. Neste processo aparecem três regiões diferentes em Ω que denotamos: Ω_s, Ω_l e Ω_m, as quais dependem de como se realiza o processo de mudança de fase e que corresponderão às diversas fases em que se encontra o material. Assim, Ω_s e Ω_l serão as regiões nas quais o material está em fase sólida e líquida, respectivamente; Ω_m corresponderá à região mushy.

A fase do material em um ponto $x \in \Omega$ depende da entalpia $w(x)$ do material, a qual por sua vez depende da temperatura $\theta(x)$ de uma forma bastante não linear que logo descreveremos. É importante destacar que ao longo deste trabalho suporemos, por simplicidade, que **a temperatura de mudança de fase é igual a zero**. Desta forma a região onde $\theta(x) < 0$ estará necessariamente contida na região sólida, a qual é aquela na qual $w(x) \leq 0$. A região onde $\theta(x) > 0$ estará na região líquida, a qual é caracterizada por $w(x) \geq L$; a região *mushy* é aquela onde $0 < w(x) < L$, com L uma constante que depende do material e é chamada de calor latente; esta região está contida na região onde $\theta(x) = 0$ (Para mais detalhes ver [3]).

Por outro lado, como estamos levando em conta os efeitos convectivos, o termo de Carman-Koseny nas equações de movimento do material, o qual depende da fração sólida f_s, requer que haja a seguinte relação de compatibilidade: o valor da fração sólida deve ser $f_s = 1$ na região sólida, $f_s = 0$ na região líquida e $0 < f_s < 1$ na região *mushy*. Assim, f_s deve ser uma função da entalpia w, isto é, $f_s = f_s(w)$ onde f_s é uma função real tal que $f_s(w) = 1$ quando $w \in (-\infty, 0]$, $f_s(w) = 0$ quando $w \in [L, +\infty)$ e $0 < f_s(w) < 1$ quando $w \in (0, L)$.

De forma mais precisa, sendo $L > 0$ o calor latente do material, definimos as regiões Ω_s, Ω_l e Ω_m como:

$$\begin{aligned}
\Omega_s &= \{x \in \Omega; w(x) \leq 0\}, \\
\Omega_l &= \{x \in \Omega; w(x) \geq L\}, \\
\Omega_m &= \{x \in \Omega; 0 < w(x) < L\}.
\end{aligned}$$

Define-se também a região não sólida como

$$\Omega_{ml} = \Omega_m \cup \Omega_l = \{x \in \Omega;\ 0 < w(x)\}$$

O nosso problema será achar funções v, θ, w e p, representando respectivamente a velocidade, a temperatura, a entalpia e a pressão do material, tais que, sendo Ω_{ml} e Ω_s como acima, elas satisfazem em um sentido generalizado a ser precisado na próxima seção o seguinte sistema (P_0) :

$$\begin{aligned}
-\alpha\Delta w - \Delta K(\theta) + v\cdot\nabla\theta &= 0 \text{ em } \Omega, && (3.1)\\
w &\subseteq \beta(\theta). && (3.2)\\
w &= w_\delta, \text{ sobre } \partial\Omega, && (3.3)\\
-\Delta v + (v\cdot\nabla)v + \nabla p - F(\theta) &\subseteq -J(f_s(\beta(\theta)))v \quad \text{em} \quad \overset{\circ}{\Omega}_{ml}, && (3.4)\\
div\ v &= 0 \text{ em } \overset{\circ}{\Omega}_{ml}, && (3.5)\\
v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega_{ml}, && (3.6)\\
v &= 0, \text{ em } \overset{\circ}{\Omega}_s, && (3.7)
\end{aligned}$$

onde $\overset{\circ}{\Omega}_{ml}$ e $\overset{\circ}{\Omega}_s$ denotam respectivamente os interiores de Ω_{ml} e Ω_s definidos anteriormente respectivamente em termos da função incógnita w.

Na próxima seção, daremos as hipóteses matemáticas precisas sobre os vários termos do sistema. Aqui, apenas recordamos brevemente os seus significados.

Como dissemos anteriormente, na primeira equação do sistema anterior, no termo correspondente à regularização matemática, assumimos que $\alpha > 0$ é uma constante.

A função $K(s)$ é suposta ser conhecida e descreve o quociente entre a condutividade térmica e o calor específico do material.

$\beta(s)$ é uma multiaplicação que descreve a relação entre a entalpia e a temperatura.

O termo $F(\theta)$ simula os efeitos termoconvectivos que atuam na região não sólida. A aproximações de Boussinesq mais comumente usada toma

$$F(\theta) = C\rho(\theta - \theta_r)\vec{g},$$

onde C uma constante; ρ é a densidade média do material não sólido; θ_r uma temperatura referência (que pode ser assumida sem perda de generalidade como zero) e $\vec{g}$ a aceleração da gravidade. Em nosso trabalho consideramos uma situação mais geral para $F(\theta)$.

O termo $J(f_s)v$ da primeira equação atua na zona *mushy*, modificando as equações do momento linear. A expressão mais usada na literatura é aquela de Carman-Koseny:

$$J(f_s) = -\frac{Cf_s^2}{(1-f_s)^3},$$

onde C é uma constante positiva. Uma derivação desta expressão, usando argumentos físicos e a hipótese de que a zona *mushy* se comporta como um meio poroso, pode ser encontrada por exemplo em Voller e Prakash [51]. Neste trabalho, procederemos como em Blanc e outros [5], e consideraremos uma função mais geral para $J(f_s)$ (veja a seção seguinte).

Observação 3.1 *Ressaltamos que o modelo a ser estudado pode ser considerado um problema de fronteira livre pois as regiões Ω_s, Ω_l e Ω_m são desconhecidas a priori.*

3.2 Hipóteses e formulação fraca do problema

Supomos as seguintes hipóteses,

$$(H_1) \;\left\{\; \Omega \subset \mathbb{R}^N, N = 2,3, \;\; \text{domínio limitado de classe } C^2. \right.$$

$$(H_2) \left\{ \begin{array}{l} \beta(s) \;\; \text{é uma multiaplicação de } \mathbb{R} \text{ em } \mathbb{R}, \text{ estritamente monótona} \\ \text{crescente e tal que para } s \neq 0 \text{ ela é uma função satisfazendo} \\ 0 < \hat{\beta}_0 \leq \beta'(s) \leq \hat{\beta}_1; \text{ além disso ela tem um salto na origem:} \\ \beta(0) = [0, L], \;\; \text{com } L > 0. \end{array} \right.$$

$$(H_3) \left\{ \begin{array}{l} K(s) \;\; \text{é uma função monótona contínua e diferenciável fora da} \\ \text{origem e tal que } K(0) = 0, \; 0 < K_0 \leq K'(s) \leq K_1, \text{ se } s \neq 0. \end{array} \right.$$

$$(H_4) \;\left\{\; F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \;\; \text{é uniformemente Lipschitz contínua e } F(0) = 0. \right.$$

$$(H_5) \left\{ \begin{array}{l} J \in C^1(-\infty, 1) \text{ é não decrescente, } \; J \equiv 0 \;\; \text{sobre } \mathbb{R}^- \text{ e} \\ \lim\limits_{x \uparrow 1} J(x) = +\infty. \end{array} \right.$$

$$(H_6) \left\{ \begin{array}{l} f_s \in C_b^0(\mathbb{R}), \text{ tal que } f_s = 1 \text{ em } (-\infty, 0], f_s = 0 \text{ em } [L, +\infty) \\ \text{e } \; 0 < f_s < 1 \text{ em } (0, L). \end{array} \right.$$

$$(H_7) \;\left\{\; w_\delta \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \cap C^\gamma(\partial\Omega), \text{ para algum } \gamma \in (0,1). \right.$$

Observe que a hipótese (H_2) implica que β^{-1} existe e é uma função de Lipschitz, com constante de Lipschitz menor que $\hat{\beta}_0^{-1}$. Assim, de (H_7), a condição de contorno que θ deve satisfazer é

$$\theta_{|\Omega} = \theta_\delta = \beta^{-1}(w_\delta) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \cap C^\gamma(\partial\Omega), \tag{3.8}$$

com o mesmo γ de (H_7). Por simplicidade de notação, denotaremos também por θ_δ a função em $H^1(\Omega)$ cujo traço sobre $\partial\Omega$ é θ_δ.

Definição 3.2 *Sob as hipóteses* $(H_1) - (H_7)$ *e (3.8), a tripla de funções* (θ, w, v) *é solução generalizada do problema* (P_0) *se*

(i) $\theta \in H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$, $\theta - \theta_\delta \in H_0^1(\Omega)$, $w \in H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$, $w - w_\delta \in H_0^1(\Omega)$, $v \in V(\Omega)$

(ii) *Vale que* $w \subseteq \beta(\theta)$ *e para todo* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *temos*

$$\alpha(\nabla w, \nabla\varphi)_\Omega + (\nabla K(\theta), \nabla\varphi)_\Omega + (v \cdot \nabla\theta, \varphi)_\Omega = 0, \tag{3.9}$$

(iii) *Sendo definidos os seguintes conjuntos*

$$\Omega_s = \{x \in \Omega : w(x) \leq 0\}, \tag{3.10}$$

$$\Omega_{ml} = \{x \in \Omega : w(x) > 0\}, \tag{3.11}$$

temos que

$$v = 0 \ \ em \ \ \overset{\circ}{\Omega}_s \,. \tag{3.12}$$

Além disso, existe $h \in L^2_{loc}(\overset{\circ}{\Omega}_{ml})$ *satisfazendo* $hv \subseteq J(f_s(\beta(\theta)))v$ *e tal que, para todo* $\xi \in V(\Omega)$ *com supp* $\xi \subset \overset{\circ}{\Omega}_{ml}$, *tem-se*

$$(\nabla v, \nabla\xi)_{\overset{\circ}{\Omega}_{ml}} + ((v \cdot \nabla)v, \xi)_{\overset{\circ}{\Omega}_{ml}} - (F(\theta), \xi)_{\overset{\circ}{\Omega}_{ml}} = -(hv, \xi)_{\overset{\circ}{\Omega}_{ml}}. \tag{3.13}$$

Observação 3.3 *Como é usual nas formulações fracas das equações de Navier-Stokes que utilizam espaços de funções com divergente nulo, tais como* $H(\Omega)$ *e* $V(\Omega)$, *a Definição 3.2 da solução generalizada do problema* (P_0) *também elimina do problema original a incógnita* p *de (3.4) e a equação* $div\ v = 0$. *A pressão* p *correspondente a esta formulação fraca pode ser recuperada utilizando-se a Proposição 1.1, p. 14, em Temam [43].*

A seguir enunciamos o nosso resultado de existência de soluções para o problema estacionário.

Teorema 3.4 *Sob as hipóteses* $(H_1) - (H_7)$ *e (3.8), existe solução generalizada do problema* (P_0) *no sentido da Definição 3.2.*

Este resultado será provado na Seção 3.4. Aqui, apenas delineamos os argumentos a serem utilizados: consideraremos problemas aproximados adequados (problemas regularizados) que dependem de um certo parâmetro que tenderá a zero; a seguir, provaremos a existência de soluções destes problemas regularizados mediante técnicas de ponto fixo; posteriormente, mediante argumentos de compacidade, tomaremos o limite nas equações regularizadas ao longo de subsequências adequadas das soluções aproximadas e mostraremos que este limite é solução do problema original.

3.3 O problema regularizado

Nesta seção introduzimos uma sequência de problemas aproximados associados ao problema (P_0), nos quais nos será permitido considerar a equação do tipo Navier-Stokes como válida em todo Ω e não apenas no subconjunto desconhecido a priori $\overset{\circ}{\Omega}_{ml}$. Além disso, para tornar esses problemas aproximados mais facilmente tratáveis, tomaremos regularizações adequadas das funções (e multifunção) envolvidas.

Neste sentido, sejam f_s^ϵ, β_ϵ e K_ϵ, aproximações suaves de f_s, β e K respectivamente tais que

$$K_\epsilon(0) = 0, \quad 0 < K_0 \leq K'_\epsilon(s) \leq K_1, \tag{3.14}$$

$$\beta_\epsilon(0) = 0, \quad 0 < \hat{\beta}_0 \leq \beta'_\epsilon(s) \leq \frac{1}{\epsilon}, \tag{3.15}$$

ademais

$$\left\{ \begin{array}{l} |\beta_\epsilon(s)| \leq \hat{\beta}_1 |s| + L, \;\; \beta_\epsilon(s) \geq min\{\hat{\beta}_1 s, 0\} \;\; \forall s, \\ |\beta'_\epsilon(s)| \leq \hat{\beta}_1 \;\text{ se }\; |s| \geq \epsilon \;\text{ e } \forall s \neq 0, \exists \epsilon_0, \\ \text{tal que } \;\beta_\epsilon(s) = \beta(s), \;\text{ se }\; \epsilon < \epsilon_0. \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Podemos tomar as convergências das funções β_ϵ e K_ϵ, no seguinte sentido:

$$\beta_\epsilon \longrightarrow \beta, \;\text{ uniformemente em }\; \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$K_\epsilon \longrightarrow K, \;\text{ uniformemente em }\; \mathbb{R}.$$

Agora, usando (H_7) e as condições acima, vemos facilmente que as funções definidas por:

$$\theta_{\epsilon\delta} = \beta_\epsilon^{-1}(w_\delta) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \cap C^\gamma(\partial\Omega), \tag{3.17}$$

satisfazem

$$|\theta_{\epsilon\delta}|_{H^1(\Omega)} \leq C|w_\delta|_{H^1(\Omega)}, \tag{3.18}$$

com constante $C > 0$ independente de ϵ.

Nesta condições, vale o seguinte resultado de existência.

Teorema 3.5 *Sob as condições anteriores, sendo $\theta_{\epsilon\delta}$ definido por (3.17), para cada $\epsilon \in (0,1]$ existe uma tripla de funções $(\theta_\epsilon, w_\epsilon, v_\epsilon)$ satisfazendo:*

(i) $\theta_\epsilon \in H^1(\Omega)$, $\theta_\epsilon - \theta_{\epsilon\delta} \in H_0^1(\Omega)$, $w_\epsilon \in H^1(\Omega)$, $w_\epsilon - w_\delta \in H_0^1(\Omega)$, $v_\epsilon \in V(\Omega)$.

(ii) $w_\epsilon = \beta_\epsilon(\theta_\epsilon)$ *e para todo* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *temos que*

$$\alpha(\nabla w_\epsilon, \nabla\varphi) + (\nabla K_\epsilon(\theta_\epsilon), \nabla\varphi)_\Omega + (v_\epsilon \cdot \nabla\theta_\epsilon, \varphi)_\Omega = 0. \tag{3.19}$$

(iii) *Para todo* $\xi \in V(\Omega)$, *temos*

$$(\nabla v_\epsilon, \nabla\xi)_\Omega + ((v_\epsilon \cdot \nabla)v_\epsilon, \xi)_\Omega = -(J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)v_\epsilon, \xi)_\Omega + (F(\theta_\epsilon), \xi)_\Omega. \tag{3.20}$$

Além disso, $(\theta_\epsilon, w_\epsilon, v_\epsilon)$ é limitada em $(H^1(\Omega))^2 \times V(\Omega)$ por uma constante que não depende de ϵ.

A prova do Teorema 3.5 será feita no final desta seção, e será consequência de alguns lemas que apresentaremos aqui.

Para isto, observemos primeiramente que (3.19) pode ser reescrito apenas em termos de w_ϵ e v_ϵ como

$$\alpha(\nabla w_\epsilon, \nabla\varphi) + (\nabla K_\epsilon(\beta_\epsilon^{-1}(w_\epsilon)), \nabla\varphi)_\Omega + (v_\epsilon \cdot \beta_\epsilon^{-1}(w_\epsilon)\nabla w_\epsilon, \varphi)_\Omega = 0,$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$; e, portanto, é natural buscar inicialmente as funções (w_ϵ, v_ϵ) e depois obter θ_ϵ.

Para simplificar a notação, denotando

$$\tilde{K}_\epsilon(z) = \alpha z + K_\epsilon(\beta_\epsilon^{-1}(z)), \tag{3.21}$$

teremos a equação:

$$(\nabla\tilde{K}_\epsilon(w_\epsilon), \nabla\varphi)_\Omega + (v_\epsilon \cdot \beta_\epsilon^{-1}(w_\epsilon)\nabla w_\epsilon, \varphi)_\Omega = 0. \tag{3.22}$$

De (3.14), (3.15) e (3.21), obtemos que

$$0 < \alpha \leq \tilde{K}'_\epsilon \leq \alpha_1, \tag{3.23}$$

onde α_1 é uma constante independente de ϵ.

Seguindo esta observação, introduzimos abaixo alguns operadores, que serão necessários na obtenção de (w_ϵ, v_ϵ); posteriormente provaremos que eles são bem definidos e satisfazem certas propriedades tais como continuidade e compacidade.

O primeiro operador que consideraremos é o seguinte:

$$G_1 : L^4(\Omega)^N \times L^4(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)^N,$$

definido para cada $\xi \in H_0^1(\Omega)^N$ por

$$\langle G_1(v,w), \xi\rangle = \int_\Omega (v\cdot \nabla)\xi v - \int_\Omega J(f_s^\epsilon(w) - \epsilon)v\xi + \int_\Omega F(\beta_\epsilon^{-1}(w))\xi. \tag{3.24}$$

Também necessitaremos do operador

$$G_2 : L^4(\Omega)^N \times L^4(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

definido para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ por:

$$\langle G_2(v,w), \varphi\rangle = \int_\Omega \beta_\epsilon^{-1}(w) v \nabla\varphi. \tag{3.25}$$

Finalmente, fixado ϵ consideraremos o operador

$$G : L^4(\Omega)^N \times L^4(\Omega) \longrightarrow L^4(\Omega)^N \times L^4(\Omega),$$

tal que para cada $(v,w) \in L^4(\Omega)^N \times L^4(\Omega)$ tem-se que

$$G(v,w) = (\hat{v}, \hat{w}),$$

onde $(\hat{v}, \hat{w})$ é a única solução do problema

$$(\nabla\hat{v}, \nabla\xi)_\Omega = (G_1(v,w), \xi)_\Omega \tag{3.26}$$

$$(\nabla\tilde{K}_\epsilon(\hat{w}), \nabla\varphi)_\Omega = (G_2(v,w), \varphi)_\Omega \tag{3.27}$$

para todos $\xi \in V(\Omega)$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, com $\hat{w} - w_\delta \in H_0^1(\Omega)$.

É claro que (v_ϵ, w_ϵ) corresponderá a uma solução do problema se e somente se é um ponto fixo de G. A prova da existência de tal ponto fixo será feita usando o Teorema de Leray-Schauder (Lema 1.3) e, portanto, necessitaremos dos lemas que enunciaremos a seguir.

Lema 3.6 *Os operadores G_1 e G_2 estão bem definidos e são contínuos.*

Prova: Claramente, temos da definição, que G_1 e G_2 são lineares de $H_0^1(\Omega)^N$ em $\mathbb{R}$ e $H_0^1(\Omega)$ em $\mathbb{R}$ respectivamente. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
|G_1(v,w)|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq \sup_{|\xi|_{H_0^1(\Omega)^N}\leq 1} \{(c_1|v|^2_{L^4(\Omega)^N} + c_2(\epsilon)|v|_{L^4(\Omega)^N}|w|_{4,\Omega} \\
&\quad + c_3(\epsilon)|v|_{L^4(\Omega)^N} + c_4|w|_{4,\Omega})|\xi|_{H_0^1(\Omega)^N}\} \\
&\leq c_1|v|^2_{L^4(\Omega)^N} + c_2(\epsilon)|v|_{L^4(\Omega)^N}|w|_{4,\Omega} + c_3(\epsilon)|v|_{L^4(\Omega)^N} + c_4|w|_{4,\Omega}.
\end{aligned}
$$

Obtemos então que $G_1(v,w)$ é contínua de $H_0^1(\Omega)^N$ em $\mathbb{R}$ para ϵ fixo, concluímos então, que $G_1(v,w) \in H^{-1}(\Omega)^N$, logo, G_1 está bem definido.

De maneira análoga, obtemos para $G_2(v,w)$

$$
|G_2(v,w)|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c|v|_{L^4(\Omega)^N}|w|_{4,\Omega},
$$

desta forma, obtemos que G_2 está bem definido.

Provaremos agora, a continuidade de G_1 e G_2. Sejam $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$ sequências tais que

$$
v_n \longrightarrow v, \text{ em } L^4(\Omega)^N \tag{3.28}
$$
$$
w_n \longrightarrow w, \text{ em } L^4(\Omega). \tag{3.29}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
|G_1(v_n,w_n) - G_1(v,w)|_{H^{-1}(\Omega)^N} &= \sup_{|\xi|_{H_0^1(\Omega)^N}\leq 1} |\int_\Omega ((v_n - v)\cdot\nabla)\xi v_n + \int_\Omega (v\cdot\nabla)\xi(v_n - v) \\
&\quad - \int_\Omega (J(f_s^\epsilon(w_n) - \epsilon) - J(f_s^\epsilon(w) - \epsilon))v_n\xi \\
&\quad + \int_\Omega J(f_s^\epsilon(w) - \epsilon)(v - v_n)\xi \\
&\quad + \int_\Omega (F(\beta_\epsilon^{-1}(w_n)) - F(\beta_\epsilon^{-1}(w)))\xi| \\
&\leq c_0|v_n - v|_{L^4(\Omega)^N}|v_n|_{L^4(\Omega)^N} + c_1|v|_{L^4(\Omega)^N}|v_n - v|_{L^4(\Omega)^N} \\
&\quad + c_2(\epsilon)|w_n - w|_{4,\Omega}|v_n|_{L^4(\Omega)^N} + c_3(\epsilon)|w|_{4,\Omega}|v_n - v|_{L^4(\Omega)^N} \\
&\quad + c_4(\epsilon)|v_n - v|_{L^4(\Omega)^N} + c_5|w_n - w|_{4,\Omega}.
\end{aligned}
$$

De (3.28), (3.29) e da desigualdade acima, obtemos

$$
|G_1(v_n,w_n) - G_1(v,w)|_{H^{-1}(\Omega)^N} \longrightarrow 0,
$$

quando $n \longrightarrow \infty$, conclui-se que G_1 é contínuo.

Também temos

$$\begin{aligned}|G_2(v_n,w_n) - G_2(v,w)|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{|\varphi|_{H_0^1(\Omega)}\le 1} \left|\int_\Omega \beta_\epsilon^{-1}(w_n)v_n\cdot\nabla\varphi - \int_\Omega \beta_\epsilon^{-1}(w)v\cdot\nabla\varphi\right| \\ &\le c_1|w_n - w|_{4,\Omega}|v_n|_{L^4(\Omega)^N} + c_2|w|_{4,\Omega}|v_n - v|_{L^4(\Omega)^N}.\end{aligned}$$

Por (3.28), (3.29) e a desigualdade anterior obtemos a continuidade de G_2.

Lema 3.7 *O operador G está bem definido, é contínuo e compacto.*

Prova: Dado o par $(v,w) \in L^4(\Omega)^N \times L^4(\Omega)$, pela regularidade do problema de Stokes, a equação

$$(\nabla\hat{v},\nabla\xi)_\Omega = (G_1(v,w),\xi)_\Omega,$$

$\xi \in V(\Omega)$, tem única solução $\hat{v} \in V(\Omega)$ tal que

$$|\hat{v}|_{V(\Omega)} \le c|G_1(v,w)|_{H^{-1}(\Omega)^N}. \tag{3.30}$$

Como $V(\Omega) \subset L^4(\Omega)^N$, obtém-se que $\hat{v} \in L^4(\Omega)^N$.

Consideremos agora o problema

$$(I)\ \begin{cases} (\nabla\tilde{K}_\epsilon(\hat{w}),\nabla\varphi)_\Omega &= (G_2(v,w),\varphi)_\Omega \\ w &= w_\delta, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

$\forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Seja $u_\epsilon = \tilde{K}_\epsilon(\hat{w})$, então o problema (I) escreve-se

$$(I')\ \begin{cases} (\nabla u_\epsilon,\nabla\varphi)_\Omega &= (G_2(v,w),\varphi)_\Omega \\ u_\epsilon &= \tilde{K}_\epsilon(w_\delta), \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

$\forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Veja que $\tilde{K}_\epsilon(w_\delta) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ pois $\tilde{K}_\epsilon'$ é limitado.

Como $G_2(v,w) \in H^{-1}(\Omega)$, obtemos que existe única $u_\epsilon \in H^1(\Omega)$ que é solução de (I'), tal que

$$|u_\epsilon|_{H^1(\Omega)} \le c\left(|G_2(v,w)|_{H^{-1}(\Omega)} + |\tilde{K}_\epsilon(w_\delta)|_{H^1(\Omega)}\right).$$

Por outro lado, $\hat{w} = \tilde{K}_\epsilon^{-1}(u_\epsilon)$, então, $|\nabla\hat{w}| = (\tilde{K}_\epsilon^{-1})'(u_\epsilon)|\nabla u_\epsilon| \le \tilde{K}_0|\nabla u_\epsilon|$, já que $\tilde{K}_\epsilon^{-1}$ é Lipschitz, com constante $\tilde{K}_0$ que por (3.23), não depende de ϵ. Logo, $\hat{w} \in H^1(\Omega)$ e

$$|\hat{w}|_{H^1(\Omega)} \le \hat{c}(|G_2(v,w)|_{H^{-1}(\Omega)} + |\tilde{K}_\epsilon(w_\delta)|_{H^1(\Omega)}), \tag{3.31}$$

então $\hat{w} \in L^4(\Omega)$ e G está bem definido.

Provaremos agora que G é contínuo. Sejam $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$ sequências tais que $v_n \longrightarrow v$, em $L^4(\Omega)^N$ e $w_n \longrightarrow w$, em $L^4(\Omega)$, denotamos $G(v,w) = (\hat{v}, \hat{w})$ e $G(v_n, w_n) = (\hat{v}_n, \hat{w}_n)$, então tem-se

$$\begin{cases} (\nabla \hat{v}_n, \nabla \xi)_\Omega &= (G_1(v_n, w_n), \xi)_\Omega \\ (\nabla \hat{v}, \nabla \xi)_\Omega &= (G_1(v, w), \xi)_\Omega, \end{cases}$$

$\forall \xi \in V(\Omega)$.

Subtraindo as duas igualdades acima, obtemos

$$(\nabla(\hat{v}_n - \hat{v}), \nabla \xi)_\Omega = (G_1(v_n, w_n) - G_1(v, w), \xi)_\Omega.$$

Portanto, obtemos

$$|\hat{v}_n - \hat{v}|_{H^1(\Omega)^N} \leq c|G_1(v_n, w_n) - G_1(v, w)|_{H^{-1}(\Omega)^N}.$$

Como $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ temos que

$$|\hat{v}_n - \hat{v}|_{L^4(\Omega)^N} \leq \hat{c}|G_1(v_n, w_n) - G_1(v, w)|_{H^{-1}(\Omega)^N}. \tag{3.32}$$

Por outro lado, tem-se

$$\begin{cases} (\nabla \tilde{K}_\epsilon(\hat{w}_n), \nabla \varphi)_\Omega &= (G_2(v_n, w_n), \varphi)_\Omega \\ (\nabla \tilde{K}_\epsilon(\hat{w}), \nabla \varphi)_\Omega &= (G_2(v, w), \varphi)_\Omega \\ \hat{w}_n = \hat{w} &= w_\delta, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Subtraindo as desigualdades acima e fazendo $u_n = \tilde{K}_\epsilon(\hat{w}_n)$ e $u = \tilde{K}_\epsilon(\hat{w})$ obtemos

$$\begin{cases} (\nabla(u_n - u), \nabla \varphi)_\Omega &= (G_2(v_n, w_n) - G_2(v, w), \varphi)_\Omega \\ u_n - u &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Deste problema conclui-se que

$$|u_n - u|_{H^1(\Omega)} \leq c_1|G_2(v_n, w_n) - G_2(v, w)|_{H^{-1}(\Omega)},$$

desta última desigualdade e pelo fato de $\tilde{K}_\epsilon^{-1}$ ser Lipschitz, tem-se

$$\begin{aligned} |\hat{w}_n - \hat{w}|_{4,\Omega} &= |\tilde{K}_\epsilon^{-1}(u_n) - \tilde{K}_\epsilon^{-1}(u)|_{4,\Omega} \\ &\leq \tilde{K}_0|u_n - u|_{4,\Omega} \\ &\leq \hat{c}_1|G_2(v_n, w_n) - G_2(v, w)|_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

De (3.32), (3.33) e do Lema 3.6 obtemos a continuidade de G.

Por outro lado, de (3.30) e (3.31) temos que $G : L^4(\Omega)^N \times L^4(\Omega) \longrightarrow V(\Omega) \times H^1(\Omega)$ é limitado. Como as inclusões $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ e $V(\Omega) \subset L^4(\Omega)^N$ são compactas para $N < 4$, obtemos que G é compacto em $L^4(\Omega)^N \times L^4(\Omega)$.

Para usar o Lema 1.3 (Teorema do ponto fixo de Leary-Schauder), temos que provar que o conjunto das x que satisfazem a equação

$$x = \lambda G(x)$$

é uniformemente limitado com respeito a λ. O seguinte lema fornecerá uma estimativa a priori que permitirá obter limitação uniforme com respeito a λ, dos pontos fixos de λG.

Lema 3.8 *Seja $(v_\lambda, w_\lambda) \in L^4(\Omega)^N \times L^4(\Omega)$ um ponto fixo de λG, $\lambda \in (0,1]$. Então a estimativa seguinte vale q.t.p. em Ω.*

$$\beta_\epsilon(ess \inf_{\partial\Omega} \beta_\epsilon^{-1}(\lambda w_\delta)) \leq w_\lambda \leq \beta_\epsilon(ess \sup_{\partial\Omega} \beta_\epsilon^{-1}(\lambda w_\delta)). \tag{3.34}$$

Prova: Se (v_λ, w_λ) é ponto fixo de λG então tem-se $(v_\lambda, w_\lambda) = \lambda(\hat{v}_\lambda, \hat{w}_\lambda)$ e

$$(a) \begin{cases} (\nabla \hat{v}_\lambda, \nabla \xi)_\Omega &= (G_1(v_\lambda, w_\lambda), \xi)_\Omega \\ (\nabla \tilde{K}_\epsilon(\hat{w}_\lambda), \nabla \varphi)_\Omega &= (G_2(v_\lambda, w_\lambda), \varphi)_\Omega \\ \hat{w}_\lambda &= w_\delta \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

$\forall \xi \in V(\Omega)$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Pela regularidade alíptica e do problema de Stokes, obtém-se que $v_\lambda \in V(\Omega)$ e $w_\lambda \in H^1(\Omega)$. Por outro lado, temos também que, $\hat{v}_\lambda = \frac{1}{\lambda} v_\lambda$, $\hat{w}_\lambda = \frac{1}{\lambda} w_\lambda$.

Agora, se $\theta_\lambda = \beta_\epsilon^{-1}(w_\lambda)$, então temos $\theta_\lambda = \beta_\epsilon^{-1}(\lambda w_\delta)$, sobre $\partial\Omega$.

Por outro lado, temos que $\hat{w}_\lambda = \frac{1}{\lambda}\beta_\epsilon(\theta_\lambda)$, logo, sustituindo em (a) e tendo em conta a definição de $\tilde{K}_\epsilon$ dada em (3.21), obtemos

$$(a') \begin{cases} (\nabla v_\lambda, \nabla \xi)_\Omega &= \lambda(G_1(v_\lambda, w_\lambda), \xi)_\Omega \\ (\alpha \beta_\epsilon'(\theta_\lambda) \nabla \theta_\lambda, \nabla \varphi)_\Omega &= -((K_\epsilon \circ \beta_\epsilon^{-1})'(\frac{1}{\lambda}\beta_\epsilon(\theta_\lambda))\beta_\epsilon'(\theta_\lambda)\nabla\theta_\lambda, \nabla\varphi)_\Omega + \lambda(G_2(v_\lambda, w_\lambda), \varphi)_\Omega \\ \theta_\lambda &= \beta_\epsilon^{-1}(\lambda w_\delta) \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $w_\lambda \in H^1(\Omega)$, temos que $\theta_\lambda \in H^1(\Omega)$.

Seja $u = ess\sup_{\partial\Omega} \beta_\epsilon^{-1}(\lambda w_\delta)$, como $\theta_\lambda = \beta_\epsilon^{-1}(\lambda w_\delta)$ sobre $\partial\Omega$, temos que $0 = \theta_\lambda - \beta_\epsilon^{-1}(\lambda w_\delta) \geq \theta_\lambda - u$, sobre $\partial\Omega$, então $[\theta_\lambda - u]_+ = 0$ sobre $\partial\Omega$, desta forma $[\theta_\lambda - u]_+ \in H_0^1(\Omega)$.

Tomando $\varphi = [\theta_\lambda - u]_+$ na segunda equação em (a') obtemos

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta_\epsilon'(\theta_\lambda)\nabla\theta_\lambda, \nabla[\theta_\lambda - u]_+)_\Omega &= -(K_\epsilon \circ \beta_\epsilon^{-1})'(\frac{1}{\lambda}\beta_\epsilon(\theta_\lambda))\beta_\epsilon'(\theta_\lambda)\nabla\theta_\lambda, \nabla[\theta_\lambda - u]_+)_\Omega \\
&\quad -\lambda(v_\lambda \cdot \nabla[\theta_\lambda - u], [\theta_\lambda - u]_+)_\Omega,
\end{aligned}
$$

de onde temos que

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta_\epsilon'(\theta_\lambda)\nabla[\theta_\lambda - u]_+, \nabla[\theta_\lambda - u]_+)_\Omega &= -(K_\epsilon \circ \beta_\epsilon^{-1})'(\frac{1}{\lambda}\beta_\epsilon(\theta_\lambda))\beta_\epsilon'(\theta_\lambda)\nabla[\theta_\lambda - u]_+, \nabla[\theta_\lambda - u]_+)_\Omega \\
&\quad -\lambda(v_\lambda \cdot \nabla[\theta_\lambda - u]_+, [\theta_\lambda - u]_+)_\Omega.
\end{aligned}
$$

O segundo termo da direita e igual a $\lambda b(v_\lambda, [\theta_\lambda - u]_+, [\theta_\lambda - u]_+)_\Omega$, o qual é igual a zero, e por (3.14) e (3.15), obtemos que o primeiro termo da esquerda é não positivo, então, obtemos do anterior que

$$
\alpha\hat{\beta}_0(\nabla[\theta_\lambda - u]_+, \nabla[\theta_\lambda - u]_+)_\Omega \leq 0,
$$

como $\alpha\hat{\beta}_0 > 0$, obtém-se que $\nabla[\theta_\lambda - u]_+ = 0$, q.t.p. em Ω, desta forma $[\theta_\lambda - u]_+$ é constante, q.t.p em Ω, e como $[\theta_\lambda - u]_+ = 0$ em $\partial\Omega$, conclui-se que $[\theta_\lambda - u]_+ = 0$ q.t.p. em Ω, então $\theta_\lambda - u \leq 0$, q.t.p. em Ω e assim, $\theta_\lambda \leq u = ess\sup_{\partial\Omega} \beta_\epsilon^{-1}(\lambda w_\delta)$, q.t.p. em Ω.

Podemos provar que $ess\inf_{\partial\Omega} \beta_\epsilon^{-1}(\lambda w_\delta) \leq \theta_\lambda$, q.t.p. em Ω, de maneira análoga, tomando $\varphi = [\theta_\lambda - ess\inf_{\partial\Omega} \beta_\epsilon^{-1}(\lambda w_\delta)]_-$ na segunda equação em (a').

Agora, como $w_\lambda = \beta_\epsilon(\theta_\lambda)$, por (3.15) temos que β_ϵ é monótona crescente, então obtemos finalmente

$$
\beta_\epsilon(ess\inf_{\partial\Omega} \beta_\epsilon^{-1}(\lambda w_\delta)) \leq w_\lambda \leq \beta_\epsilon(ess\sup_{\partial\Omega} \beta_\epsilon^{-1}(\lambda w_\delta)).
$$

Observamos que, pela monotonía de β_ϵ e de β_ϵ^{-1} e pelo fato de termos $\lambda \in (0, 1]$, desta última desigualdade temos

$$
|w_\lambda|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \tag{3.35}
$$

onde C é uma constante que não depende de λ.

Podemos provar agora que G tem um ponto fixo.

Lema 3.9 *O operador G tem um ponto fixo.*

Prova: Vamos provar que todo ponto fixo (v_λ, w_λ) de λG é uniformemente limitado em $L^4(\Omega)^N \times L^4(\Omega)$ com respeito a λ.

Seja $(v_\lambda, w_\lambda) = \lambda G(v_\lambda, w_\lambda)$, claramente temos que se $\lambda = 0$, então $v_\lambda = 0$ e $w_\lambda = 0$, logo, consideramos somente $\lambda \in (0, 1]$.

Fazendo $G(v_\lambda, w_\lambda) = (\hat{v}_\lambda, \hat{w}_\lambda)$, obtemos que $\hat{v}_\lambda = \frac{1}{\lambda} v_\lambda$ e $\hat{w}_\lambda = \frac{1}{\lambda} w_\lambda$, então, da mesma forma que no Lema 3.8, obtemos

$$(b) \left\{ \begin{array}{rcl} (\nabla v_\lambda, \nabla \xi)_\Omega & = & (G_1(v_\lambda, w_\lambda), \xi)_\Omega \\ (\nabla \tilde{K}_\epsilon(\hat{w}_\lambda), \nabla \varphi)_\Omega & = & \lambda (G_2(v_\lambda, w_\lambda), \varphi)_\Omega \\ \hat{w}_\lambda & = & w_\delta, \ \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

$\forall \xi \in V(\Omega)$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Substituíndo $\hat{v}_\lambda = \frac{1}{\lambda} v_\lambda$ e $\hat{w}_\lambda = \frac{1}{\lambda} w_\lambda$ em (b), obtemos

$$(b') \left\{ \begin{array}{rcl} (\nabla v_\lambda, \nabla \xi)_\Omega & = & \lambda (G_1(v_\lambda, w_\lambda), \xi)_\Omega \\ (\tilde{K}'_\epsilon(\frac{1}{\lambda} w_\lambda) \nabla w_\lambda, \nabla \varphi)_\Omega & = & \lambda (G_2(v_\lambda, w_\lambda), \varphi)_\Omega \\ w_\lambda & = & \lambda w_\delta, \ \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

Fazendo $\xi = v_\lambda$ na primeira equação de (b'), e lembrando que $B(v_\lambda, v_\lambda, v_\lambda) = 0$ (veja Capítulo 1), obtemos

$$|v_\lambda|^2_{V(\Omega)} + \lambda (J(f_s^\epsilon(w_\lambda) - \epsilon) v_\lambda, v_\lambda)_\Omega = \lambda (F(\beta_\epsilon^{-1}(w_\lambda)), v_\lambda)_\Omega.$$

Como $J(\cdot)$ é não negativa , F é uniformemente Lipschitz e $0 < \lambda \leq 1$, obtém-se

$$|v_\lambda|^2_{V(\Omega)} \leq c |w_\lambda|_{2,\Omega} |v_\lambda|_{L^2(\Omega)^N},$$

e pela desigualdade de Poincaré, obtém-se

$$|v_\lambda|_{V(\Omega)} \leq \hat{c} |w_\lambda|_{2,\Omega}.$$

Agora, desta última desigualdade e de (3.35), obtemos finalmente

$$|v_\lambda|_{L^4(\Omega)^N} \leq \hat{c}_0, \tag{3.36}$$

onde $\hat{c}_0$ é uma constante independente de λ.

Também de (3.35) tem-se que

$$|w_\lambda|_{4,\Omega} \leq \hat{c}, \tag{3.37}$$

onde $\hat{c}$ é uma constante que não depende de λ. Desta forma, de (3.36) e (3.37), concluímos que os pontos fixos de λG, são limitados em $L^4(\Omega)^N \times L^4(\Omega)$ de maneira uniforme com respeito a λ.

Como ja foi provado que G é contínuo e compacto, pelo Lema 1.3, concluímos que o operador G tem um ponto fixo $(v_\epsilon, w_\epsilon) \in L^4(\Omega)^N \times L^4(\Omega)$. Pela regularidade elíptica e do problema de Stokes, obtemos que $(v_\epsilon, w_\epsilon) \in V(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Observação 3.10 *Se $(v_\epsilon, w_\epsilon) \in L^4(\Omega)^N \times L^4(\Omega)$ é um ponto fixo de G, tomando $\varphi = [\theta_\epsilon - u]_+$ em (3.27), com $u = ess \sup_{\partial\Omega} \beta_\epsilon^{-1}(w_\delta)$, $\theta_\epsilon = \beta_\epsilon^{-1}(w_\epsilon)$, e logo tomando $\varphi = [\theta_\epsilon - z]_-$, com $z = ess \inf_{\partial\Omega} \beta_\epsilon^{-1}(w_\delta)$, da mesma forma que no Lema 3.8, obtemos*

$$\beta_\epsilon(ess \inf_{\partial\Omega} \beta_\epsilon^{-1}(w_\delta)) \leq w_\epsilon \leq \beta_\epsilon(ess \sup_{\partial\Omega} \beta_\epsilon^{-1}(w_\delta)), \tag{3.38}$$

e pela monotonía de β_ϵ e de β_ϵ^{-1}, de (3.15), (3.16) e de (3.38), obtém-se

$$|w_\epsilon|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \tag{3.39}$$

onde C é uma constante que não depende de ϵ.

Prova do Teorema 3.4.

Pelo Lema 3.9 obtemos a existência de solução $(\theta_\epsilon, w_\epsilon, v_\epsilon) \in (H^1(\Omega))^2 \times V(\Omega)$ de (P_ϵ), com $\theta_\epsilon = \beta_\epsilon^{-1}(w_\epsilon)$ e (v_ϵ, w_ϵ) sendo um ponto fixo de G.

Provaremos agora que $(\theta_\epsilon, w_\epsilon, v_\epsilon)$ é uniformemente limitado com relação a ϵ em $(H^1(\Omega))^2 \times V(\Omega)$.

Como (v_ϵ, w_ϵ) é ponto fixo de G, temos que satisfazem

$$\begin{aligned} (\nabla v_\epsilon, \nabla \xi)_\Omega &= (G_1(v_\epsilon, w_\epsilon), \xi)_\Omega && (3.40)\\ (\nabla \tilde{K}_\epsilon(w_\epsilon), \nabla \varphi)_\Omega &= (G_2(v_\epsilon, w_\epsilon), \varphi)_\Omega && (3.41)\\ w_\epsilon &= w_\delta, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

$\forall \xi \in V(\Omega), \quad \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Tomando $\xi = v_\epsilon$ em (3.40), e lembrando que $B(v_\epsilon, v_\epsilon, v_\epsilon) = 0$ (Ver Capítulo 1), obtemos

$$|v_\epsilon|^2_{V(\Omega)} + (J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)v_\epsilon, v_\epsilon)_\Omega = (F(\beta_\epsilon^{-1}(w_\epsilon)), v_\epsilon)_\Omega.$$

Como $J(\cdot)$ é não negativa , F é uniformemente Lipschitz, obtém-se

$$|v_\epsilon|^2_{V(\Omega)} \leq c|w_\epsilon|_{2,\Omega}|v_\epsilon|_{L^2(\Omega)^N},$$

e, pela desigualdade de Poincaré, temos

$$|v_\epsilon|_{V(\Omega)} \leq \hat{c}|w_\epsilon|_{2,\Omega}.$$

Agora, desta última desigualdade e de (3.39), obtemos finalmente

$$|v_\epsilon|_{L^4(\Omega)^N} \leq \hat{c}_0, \tag{3.42}$$

onde $\hat{c}_0$ é uma constante independente de ϵ.

Tomamos agora $\varphi = w_\epsilon - w_\delta$ em (3.41) e obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{K}'_\epsilon(w_\epsilon)|\nabla w_\epsilon|^2 &= \int_\Omega \tilde{K}'_\epsilon(w_\epsilon)\nabla w_\epsilon \nabla w_\delta - \int_\Omega v_\epsilon(\beta_\epsilon^{-1})'(w_\epsilon)\nabla w_\epsilon w_\epsilon \\ &+ \int_\Omega v_\epsilon(\beta_\epsilon^{-1})'(w_\epsilon)\nabla w_\epsilon w_\delta. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Podemos mostrar que

$$\int_\Omega v_\epsilon(\beta_\epsilon^{-1})'(w_\epsilon)\nabla w_\epsilon w_\epsilon = 0.$$

De fato, seja

$$B_\epsilon(w_\epsilon) = \int_0^{w_\epsilon} (\beta_\epsilon^{-1})'(s)sds.$$

Então temos $\nabla B_\epsilon(w_\epsilon) = B'_\epsilon(w_\epsilon)\nabla w_\epsilon = (\beta_\epsilon^{-1})'(w_\epsilon)\nabla w_\epsilon w_\epsilon$, então temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega v_\epsilon(\beta_\epsilon^{-1})'(w_\epsilon)\nabla w_\epsilon w_\epsilon &= \int_\Omega v_\epsilon \nabla B_\epsilon \\ &= -\int_\Omega (div\ v_\epsilon)B_\epsilon \\ &= 0.\end{aligned}$$

Então, de (3.15), (3.23) e(3.43) tem-se

$$\alpha\int_\Omega |\nabla w_\epsilon|^2 \leq \alpha_1 \int_\Omega |\nabla w_\epsilon||\nabla w_\delta| + \frac{1}{\hat{\beta}_0}\int_\Omega |v_\epsilon||\nabla w_\epsilon||w_\delta|,$$

de onde obtemos

$$\alpha|\nabla w_\epsilon|_{2,\Omega} \leq C_1|w_\delta|_{H^1(\Omega)} + C_2|v_\epsilon|_{L^4(\Omega)^N}|w_\delta|_{4,\Omega}. \qquad (3.44)$$

Então, de (3.39), (3.42) e (3.44), conclui-se que

$$|w_\epsilon|_{H^1(\Omega)} \leq C, \qquad (3.45)$$

onde C é uma constante independente de ϵ.

Finalmente, como $\theta_\epsilon = \beta_\epsilon^{-1}(w_\epsilon)$, de (3.15) e (3.45), obtemos

$$|\theta_\epsilon|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{C}, \qquad (3.46)$$

com $\hat{C}$ uma constante independente de ϵ. Prova-se desta forma o Teorema 3.5.

3.4 Existência de soluções

Nesta seção provaremos o principal resultado de existência deste capítulo.

Prova do Teorema 3.4

Pelo Teorema 3.5, toda solução $(\theta_\epsilon, w_\epsilon, v_\epsilon)$ de (P_ϵ), com $\epsilon \in (0,1]$, é uniformemente limitada com relação a ϵ em $(H^1(\Omega))^2 \times V(\Omega)$. Além disso, por (3.39) θ_ϵ e w_ϵ são uniformemente limitadas com respeito a ϵ em $L^\infty(\Omega)$.

Agora, pelas inclusões compactas de $V(\Omega)$ em $L^2(\Omega)^N$ e de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, obtém-se a existência de funções $v \in V(\Omega)$, $\theta \in H^1(\Omega)$, $w \in H^1(\Omega)$ e sequências $\{v_\epsilon\}$, $\{\theta_\epsilon\}$ e $\{w_\epsilon\}$, tais que

$$\begin{aligned}
v_\epsilon &\longrightarrow v \ \text{ forte em } \ (L^2(\Omega))^N && (3.47)\\
\nabla v_\epsilon &\rightharpoonup \nabla v \ \text{ fraco em } \ (L^2(\Omega))^N && (3.48)\\
\theta_\epsilon &\longrightarrow \theta \ \text{ forte em } \ L^2(\Omega) && (3.49)\\
\theta_\epsilon &\rightharpoonup \theta \ \text{ fraco em } \ H^1(\Omega) && (3.50)\\
\theta_\epsilon &\rightharpoonup \theta, \ \text{ fraco* em } \ L^\infty(\Omega) && (3.51)\\
w_\epsilon &\longrightarrow w, \ \text{ forte em } \ L^2(\Omega) && (3.52)\\
w_\epsilon &\rightharpoonup w, \ \text{ fraco em } \ H^1(\Omega) && (3.53)\\
w_\epsilon &\rightharpoonup w, \ \text{ fraco* em } \ L^\infty(\Omega). && (3.54)
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.2, tem-se que $\{w_\epsilon\} \subset C^{0,\rho}(\overline{\Omega})$ e $|w_\epsilon|_{C^\rho(\overline{\Omega})} \leq M$, $\rho \in (0,1]$ e M uma constante independente de ϵ. Pelo Lema 1.1, temos que existe uma subsequência tal que

$$w_\epsilon \longrightarrow w, \ \text{ em } \ C^0(\overline{\Omega}). \qquad (3.55)$$

Por termos $\theta_\epsilon = \beta_\epsilon^{-1}(w_\epsilon)$ e $(\beta_\epsilon^{-1})' \leq \frac{1}{\hat{\beta}_0}$, obtemos que $\{\theta_\epsilon\} \subset C^{0,\rho}(\overline{\Omega})$ e $|\theta_\epsilon|_{C^\rho(\overline{\Omega})} \leq M_1$, $\rho \in (0,1]$ e M_1 uma constante independente de ϵ, então pelo Lema 1.1, temos que existe uma subsequência tal que

$$\theta_\epsilon \longrightarrow \theta, \text{ em } C^0(\overline{\Omega}). \tag{3.56}$$

A seguir, verificamos que (θ, w, v) satisfaz o problema (P_0).

Em primeiro lugar, mostramos que $w \subseteq \beta(\theta)$, q.t.p. em Ω.

Consideremos as seguintes regiões:

$$\begin{aligned} \Omega_- &= \{x \in \Omega;\ \theta(x) < 0\} \\ \Omega_+ &= \{x \in \Omega;\ \theta(x) > 0\} \\ \Omega_0 &= \{x \in \Omega;\ \theta(x) = 0\}, \end{aligned}$$

temos então $\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+ \cup \Omega_0$.

Consideremos $x \in \Omega_+$, então $\theta(x) > 0$ e por (3.56), $\exists \epsilon_0 > 0$ tal que $\theta_\epsilon(x) > 0$, se $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

Agora, por (3.16) temos que $\beta_\epsilon(\theta_\epsilon) = \beta(\theta_\epsilon)$, desta forma obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} |w_\epsilon(x) - \beta(\theta(x))| &= \lim_{\epsilon \to 0} |\beta_\epsilon(\theta_\epsilon(x)) - \beta(\theta(x))| \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} |\beta(\theta_\epsilon(x)) - \beta(\theta(x))| \\ &\leq \hat{\beta}_1 \lim_{\epsilon \to 0} |\theta_\epsilon(x) - \theta(x)| \\ &= 0, \end{aligned}$$

então por (3.55), conclui-se que $w = \beta(\theta)$, q.t.p. em Ω_+. Da mesma forma, obtemos que $w = \beta(\theta)$, q.t.p. em Ω_-.

Agora verificamos que $w \subseteq \beta(\theta)$ q.t.p. em Ω_0. Seja $x \in \Omega_0$, então $\theta(x) = 0$, como $\beta(\theta(x)) = \beta(0) = [0, L]$, devemos provar que $0 \leq w(x) \leq L$, q.t.p. em Ω_0.

Seja $N = \{x \in \Omega_0;\ \ w(x) > L\}$, o qual é um conjunto mensurável, e supomos que tem medida $|N| > 0$. Por (3.55) temos

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_N w_\epsilon = \int_N w > L|N|. \tag{3.57}$$

Por outro lado, de (3.16) e (3.56), obtém-se

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega} w_\epsilon &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega}\beta_\epsilon(\theta_\epsilon)\\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0}\hat{\beta}_1\int_N |\theta_\epsilon| + L|N|\\
&= \hat{\beta}_1\int_N |\theta| + L|N|\\
&= L|N|,
\end{aligned}
$$

o qual contradiz (3.57), ao supor $|N| > 0$, então $|N| = 0$ e desta forma obtém-se $w(x) \leq L$, q.t.p. em Ω_0.

Seja $N_1 = \{x \in \Omega_0;\ \ w(x) < 0\}$, conjunto que é mensurável. Suponhamos que tem medida $|N_1| > 0$. Por (3.55) e o teorema da convergência dominada, obtemos

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega} w_\epsilon = \int_{N_1} w < 0. \tag{3.58}
$$

Por outro lado, de (3.16), temos que $\beta_\epsilon(\theta_\epsilon) \geq min\{\hat{\beta}_1\theta_\epsilon, 0\} = g(\theta_\epsilon)$ e tem-se que, se $\theta_\epsilon(x) \to 0$ então $g(\theta_\epsilon(x)) \to 0$, quando $\epsilon \to 0$,desta forma, por (3.56) e o teorema da convergência dominada, obtemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega} w_\epsilon &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{N_1}\beta_\epsilon(\theta_\epsilon)\\
&\geq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{N_1} g(\theta_\epsilon)\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

o que contradiz (3.58) ao supor que $|N_1| > 0$, conclui-se então que $|N_1| = 0$ e logo, $w(x) \geq 0$, q.t.p. em Ω_0, desta forma obtemos $w \subseteq \beta(\theta)$, q.t.p. em Ω_0. Finalmente conclui-se que $w \subseteq \beta(\theta)$, q.t.p. em Ω.

Obsevemos o seguinte: Se $\theta = \beta^{-1}(w)$ e $\theta_\delta = \beta^{-1}(w_\delta)$, por termos $(\beta^{-1})'(s) \leq \dfrac{1}{\hat{\beta}_0}$, para $s \neq 0, L$, temos que $\theta - \theta_\delta \in H_0^1(\Omega)$ se $w - w_\delta \in H_0^1(\Omega)$.

Provaremos agora que $w - w_\delta \in H_0^1(\Omega)$. Temos, pelo Teorema 3.5, que $\{w_\epsilon - w_\delta\}_\epsilon$ é uma sequência uniformemente limitada, com respeito a ϵ em $H_0^1(\Omega)$. Logo, temos que existe uma subsequência tal que quando $\epsilon \to 0$ tem-se

$$
w_\epsilon - w_\delta \rightharpoonup \hat{g}, \ \text{fraco em } \ H_0^1(\Omega),
$$

Portanto, quando $\epsilon \to 0$, temos

$$w_\epsilon \rightharpoonup w_\delta + \hat{g}, \ \text{ fraco em } \ H^1(\Omega).$$

De (3.53), obtemos que $w - w_\delta = g \in H_0^1(\Omega)$.
Provaremos agora que (θ, w, v) satisfaz (3.9).
Seja $\varphi \in H_0^1(\Omega)$; então, de (3.19) obtém-se que vale a identidade

$$\alpha \int_\Omega \nabla w_\epsilon \nabla \varphi dx + \int_\Omega \nabla K_\epsilon(\theta_\epsilon) \nabla \varphi dx + \int_\Omega v_\epsilon \cdot \nabla \theta_\epsilon \nabla \varphi dx = 0.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos as seguintes convergências:
Por (3.53) temos

$$\alpha \int_\Omega \nabla w_\epsilon \nabla \varphi dx \to \alpha \int_\Omega \nabla w \nabla \varphi dx.$$

Por (3.47) e (3.50), tem-se

$$\int_\Omega v_\epsilon \cdot \nabla \theta_\epsilon \nabla \varphi dx \to \int_\Omega v \cdot \nabla \theta \nabla \varphi dx.$$

Antes de provar a convergência do termo

$$\int_\Omega \nabla K_\epsilon(\theta_\epsilon) \nabla \varphi dx,$$

notamos que da mesma maneira como se fez no Capítulo 2, podemos provar que a função K é Lipschitz em todo $\mathbb{R}$.
Cosideremos primeiro uma função $\varphi \in C_0^2(\Omega)$. Temos então

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta)) \nabla \varphi\right| \ &\leq \ \int_\Omega |K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K_\epsilon(\theta)||\Delta \varphi| \\ &+ \int_\Omega |K_\epsilon(\theta) - K(\theta)||\Delta \varphi|. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Por (3.14), temos que K_ϵ é Lipschitz e, portanto, temos

$$\int_\Omega |K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K_\epsilon(\theta)||\Delta \varphi| \leq K_1 \int_\Omega |\theta_\epsilon - \theta||\Delta \varphi|,$$

e por (3.49), obtemos $\int_\Omega |\theta_\epsilon - \theta||\triangle\varphi| \to 0$, quando $\epsilon \to 0$.

Assim,

$$\int_\Omega |K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K_\epsilon(\theta)||\triangle\varphi| \longrightarrow 0, \tag{3.60}$$

quando $\epsilon \to 0$. Temos também

$$\begin{aligned} |K_\epsilon(\theta) - K(\theta)| &\leq |K_\epsilon(\theta) - K_\epsilon(0)| + |K(\theta) - K(0)| \\ &\leq 2K_1|\theta|. \end{aligned}$$

Como $|\theta||\triangle\varphi| \in L^1(\Omega)$, pelo teorema da convergência dominada tem-se

$$\int_\Omega |K_\epsilon(\theta) - K(\theta)||\triangle\varphi| \longrightarrow 0, \tag{3.61}$$

quando $\epsilon \to 0$, então, de (3.59), (3.60) e (3.61) conclui-se que

$$\int_\Omega \nabla K_\epsilon(\theta_\epsilon)\nabla\varphi \longrightarrow \int_\Omega \nabla K(\theta)\nabla\varphi, \tag{3.62}$$

quando $\epsilon \to 0$, $\forall\varphi \in C_0^2(\Omega)$.

Agora, pela densidade de $C_0^2(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$, dado $\delta > 0$, arbitrariamente pequeno e $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, existe $\hat{\varphi} \in C_0^2(\Omega)$ tal que $|\varphi - \hat{\varphi}|_{H_0^1(\Omega)} < \delta$, temos então

$$\begin{aligned} |\int_\Omega \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))\nabla\varphi| &\leq |\int_\Omega \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))\nabla\hat{\varphi}| \\ &\quad + |\int_\Omega \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))\nabla(\varphi - \hat{\varphi})| \end{aligned} \tag{3.63}$$

Como $\hat{\varphi} \in C_0^2(\Omega)$, de (3.62) temos que quando $\epsilon \to 0$ obtemos

$$|\int_\Omega \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))\nabla\hat{\varphi}| \to 0,$$

Para o outro termo, temos que

$$\begin{aligned} |\int_\Omega \nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))\nabla(\varphi - \hat{\varphi})| &\leq \int_\Omega |\nabla(K_\epsilon(\theta_\epsilon) - K(\theta))||\nabla(\varphi - \hat{\varphi})| \\ &\leq C(|\theta_\epsilon|_{H^1(\Omega)} + |\theta|_{H^1(\Omega)})|\varphi - \hat{\varphi}|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq M\delta. \end{aligned}$$

Como M é uma constante independente de ϵ e δ é arbitrariamente pequeno, de (3.63) concluimos que quando $\epsilon \to 0$,

$$\int_\Omega \nabla K_\epsilon(\theta_\epsilon)\nabla\varphi dx \to \int_\Omega \nabla K(\theta)\nabla\varphi dx$$

e, portanto, vale (3.9).

Provaremos agora que $v = 0$ em $\overset{\circ}{\Omega}_s$. Seja $\mathcal{K} \subset \overset{\circ}{\Omega}_s$, compacto. Tomamos $\xi = v_\epsilon$ em (3.20) e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\int_\Omega J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)v_\epsilon^2 \leq M,$$

onde M, é uma constante que não depende de ϵ.

Então, como $J(\cdot) \geq 0$, temos

$$\int_\mathcal{K} J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)v_\epsilon^2 \leq M. \tag{3.64}$$

Lembrando que $f_s(w(x)) = 1$ em $\mathcal{K}$, por (3.55) e o fato de que $f_s^\epsilon \to f_s$, uniformemente em $\mathbb{R}$, obtemos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$f_s^\epsilon(w_\epsilon) = 1, \text{ em } \mathcal{K}, \text{ se } 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Então, de (3.64) obtemos

$$J(1-\epsilon)|v_\epsilon|^2_{L^2(\mathcal{K})^N} \leq M,$$

se $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Logo, fazendo $\epsilon \to 0$, temos que $J(1-\epsilon) \to +\infty$ e então, concluimos que $|v_\epsilon|_{L^2(\mathcal{K})^N} \to 0$, quando $\epsilon \to 0$.

Por outro lado, de (3.47) temos que $v_\epsilon \to v$ em $L^2(\mathcal{K})^N$, então tem-se que $v = 0$, q.t.p. em $\mathcal{K}$. Como $\mathcal{K}$ foi escolhido arbitrariamente, obtemos que $v = 0$, q.t.p. em $\overset{\circ}{\Omega}_s$. Desta forma, prova-se (3.12).

Provaremos agora a existência de uma função $h \in L^2_{loc}(\overset{\circ}{\Omega}_{ml})$, tal que $hv \subseteq J(f_s(\beta(\theta)))v$ e que as funções (v, θ) satisfazem (3.13).

Seja $U \subset \overset{\circ}{\Omega}_{ml}$, conjunto compacto. Então temos que

$$\min_U w(x) = \gamma > 0$$

e

$$\max_U f_s(w(x)) < 1 - \delta,$$

para um certo $\delta > 0$. Por outro lado, como $f_s^\epsilon \to f_s$, uniformemente em $\mathbb{R}$, obtemos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$f_s^\epsilon(w_\epsilon) < 1 - \frac{\delta}{2},$$

em U, se $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

Logo, como J é não decrescente, tem-se

$$\begin{aligned} J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) &\leq J(1 - \frac{\delta}{2} - \epsilon) \\ &\leq J(1 - \frac{\delta}{2}) \\ &= C, \end{aligned} \tag{3.65}$$

$\forall x \in U$, se $0 < \epsilon < \epsilon_0$, onde C é uma constante que não depende de ϵ. Desta forma, de (3.65) temos

$$\begin{aligned} (\int_U |J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)|^2)^{\frac{1}{2}} &\leq C|U|^{\frac{1}{2}} \\ &= \tilde{M}, \end{aligned} \tag{3.66}$$

onde $\tilde{M}$ é uma constante independente de ϵ

Consideremos agora o fato de que podemos escrever

$$\overset{\circ}{\Omega}_{ml} = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

com U_i aberto tal que $\overline{U}_i \subset U_{i+1}$, $\overline{U}_i \subset \overset{\circ}{\Omega}_{ml}$, $\forall i$.

De (3.66) obtemos que a sequência $\{J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)\}$ é limitada em $L^2(U_i)$, de maneira uniforme com relação a ϵ, logo, obtemos que existe uma subsequência de $\{J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)\}$, que denotamos por $\{J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) - \epsilon_j)_1\}$, tal que quando $\epsilon_j \to 0$

$$J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) - \epsilon_j)_1 \rightharpoonup h_1, \text{ fraco em } L^2(U_1).$$

Tomamos agora uma subsequência de $\{J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) - \epsilon_j)_1\}$ e obtemos quando $\epsilon_j \to 0$ que

$$J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j}) - \epsilon_j)_2 \rightharpoonup h_2, \text{ fraco em } L^2(U_2).$$

Por um processo indutivo, obtemos uma subsequência $\{J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j})-\epsilon_j)_k\}$ de $\{J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j})-\epsilon_j)_{k-1}\}$ tal que

$$J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j})-\epsilon_j)_k \rightharpoonup h_k, \ \text{ fraco em } \ L^2(U_k),$$

quando $\epsilon_j \to 0$, e $h_k/_{U_{k-1}} = h_{k-1}$.

Pelo processo diagonal, obtemos que existe uma sequência $\{J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j})-\epsilon_j)_j\}$ tal que quando $\epsilon_j \to 0$, obtemos

$$J(f_s^{\epsilon_j}(w_{\epsilon_j})-\epsilon_j)_j \rightharpoonup h, \ \text{ fraco em } \ L^2_{loc}(\overset{\circ}{\Omega}_{ml}),$$

onde a função h é tal que $h/_{U_j} = h_j$.

Denotaremos esta sequência diagonal simplesmente por $J(f_s^{\epsilon}(w_\epsilon)-\epsilon)$, temos então que existe uma subsequência tal que

$$J(f_s^{\epsilon}(w_\epsilon)-\epsilon) \rightharpoonup h, \ \text{ fraco em } \ L^2_{loc}(\overset{\circ}{\Omega}_{ml}), \tag{3.67}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Verificamos agora, que satisfaz-se a inclusão $h \subseteq J(f_s(\beta(\theta)))$. Seja $U \subset \overset{\circ}{\Omega}_{ml}$ conjunto compacto e sejam

$$\begin{aligned} U_+ &= \{x \in U;\ \theta(x) > 0\} \\ U_0 &= \{x \in U;\ \theta(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Em primeiro lugar, consideramos o conjunto U_+. Como U pode ser coverto por uma quantidade finita de abertos U_i com $\overline{U}_i \subset \overset{\circ}{\Omega}_{ml}$, o mesmo acontezendo com U_+. Logo, como $w(x) \geq L$ em U_+, podemos obter, da mesma forma a como foi obtida a estimativa (3.66), que

$$J(f_s^{\epsilon}(w_\epsilon)-\epsilon) \leq M,$$

se $0 < \epsilon < \epsilon_0$, onde M é uma constante independente de ϵ.

Temos também, pela hipóteses (H_5), que J é Lipschitz em

$$A = f_s^{\epsilon}(w_\epsilon(U_+) \cup f_s(\beta(\theta(U_+))),$$

e, portanto, para $\psi \in L^2(U_+)$, temos que

$$\begin{aligned} \left|\int_{U_+} (J(f_s^{\epsilon}(w_\epsilon)-\epsilon) - J(f_s(\beta(\theta))))\psi\right| &\leq \int_{U_+} |J(f_s^{\epsilon}(\beta_\epsilon(\theta_\epsilon))-\epsilon) - J(f_s(\beta(\theta)))||\psi| \\ &\leq C\int_{U_+} |f_s^{\epsilon}(\beta_\epsilon(\theta_\epsilon)) - f_s(\beta(\theta))||\psi| \\ &\quad + C\epsilon\int_{U_+}|\psi|. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Por outro lado, como $\theta(x) > 0$ em U_+, por (3.16) tem-se que $\beta_\epsilon(\theta_\epsilon) = \beta(\theta_\epsilon)$, se $0 < \epsilon < \epsilon_0$,logo, pela hipóteses (H_2), pelo fato de $f_s^\epsilon \to f_s$ uniformemente em $\mathbb{R}$ e por (3.56), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} |f_s^\epsilon(\beta_\epsilon(\theta_\epsilon(x))) - f_s(\beta(\theta(x)))| &= \lim_{\epsilon \to 0} |f_s^\epsilon(\beta(\theta_\epsilon(x))) - f_s(\beta(\theta(x)))| \\ &= 0, \end{aligned}$$

$\forall x \in U_+$. Além disso, $|f_s^\epsilon(\beta_\epsilon(\theta_\epsilon)) - f_s(\beta(\theta))||\psi| \in L^1(U_+)$ e é uniformemente limitada em $L^1(U_+)$ com relação a ϵ, logo, pelo teorema da convergência dominada, obtemos que quando $\epsilon \to 0$ vale

$$\int_{U_+} |f_s^\epsilon(\beta_\epsilon(\theta_\epsilon)) - f_s(\beta(\theta))||\psi| \to 0.$$

Então, de (3.68), quando $\epsilon \to 0$, concluimos que

$$J(f_s^\epsilon(\beta_\epsilon(\theta_\epsilon)) - \epsilon) \rightharpoonup J(f_s(\beta(\theta))), \text{ fraco em } L^2(U_+).$$

Portanto, de (3.67) obtemos

$$h = J(f_s(\beta(\theta))), \text{ q.t.p. em } U_+. \tag{3.69}$$

Em U_0 temos que $\beta(\theta(x)) = \beta(0) = [0, L]$, então, $f_s(\beta(\theta(x))) = [0, 1]$ e logo $J(f_s(\beta(\theta(x,t)))) = [0, +\infty)$ em U_0, desta forma, somente verificamos que $h \geq 0$ q.t.p. em U_0. Para isto, consideremos o conjunto

$$N = \{(x,t) \in U_0; \ h(x) < 0\}$$

e suponhamos por contradição que ele tem medida $|N| > 0$. Sendo χ_N a função característica de N, obtemos

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{U_0} J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)\chi_N = \int_N h < 0. \tag{3.70}$$

Por outro lado, como $J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) \geq 0$, obtemos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{U_0} J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)\chi_N \geq 0,$$

o que contradiz (3.70). Portanto, $|N| = 0$ e, assim, $h \geq 0$ q.t.p. em U_0. Então,

$$h \subseteq J(f_s(\beta(\theta))) \text{ q.t.p. em } U_0. \tag{3.71}$$

Conclui-se então de (3.69) e de (3.71) que

$$h \subseteq J(f_s(\beta(\theta))) \quad \text{q.t.p. em } U.$$

Agora, como $\overset{\circ}{\Omega}_{ml}$ pode ser coberto com uma quantidade enumerável de conjuntos abertos limitados U tal que $\overline{U} \subset \overset{\circ}{Q}{}^{\rho}_{ml}$, concluimos que

$$h \subseteq J(f_s(\beta(\theta))), \quad \text{q.t.p. em } \overset{\circ}{\Omega}_{ml}$$

e, portanto, que

$$hv \subseteq J(f_s(\beta(\theta)))v \quad \text{q.t.p. em } \overset{\circ}{\Omega}_{ml}\,.$$

Provaremos a seguir que vale (3.13). Seja $\xi \subset V(\Omega)$ tal que $supp\ \xi = U \subset \overset{\circ}{\Omega}_{ml}$. De (3.20) temos que vale a igualdade integral

$$\begin{aligned} \int_U \nabla v_\epsilon \nabla \xi dx &= -\int_U (v_\epsilon \cdot \nabla) v_\epsilon \xi dx - \int_U J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) v_\epsilon \xi dx \\ &\quad + \int_U F(\theta_\epsilon) \xi dx. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Fazemos $\epsilon \to 0$ e obtemos as seguintes convergências:
De (3.48), obtém-se

$$\int_U \nabla v_\epsilon \nabla \xi dx \to \int_U \nabla v \nabla \xi dx.$$

Por (3.47) e (3.48), obtemos

$$\int_U (v_\epsilon \cdot \nabla) v_\epsilon \xi dx \to \int_U (v \cdot \nabla) v \xi dx.$$

Agora, de (3.47) e de (3.67) obtemos que

$$\int_U J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) v_\epsilon \xi dx \to \int_U hv\xi dx.$$

Finalmente, pelo fato de termos F Lipschitz e de (3.49), temos

$$\int_U F(\theta_\epsilon) \xi dx \to \int_U F(\theta) \xi dx.$$

Dos anteriores e do fato que $U = supp\ \xi \subset \overset{\circ}{\Omega}_{ml}$, concluimos que vale a identidade integral

$$\int_{\overset{\circ}{\Omega}_{ml}} \nabla v \nabla \xi dx + \int_{\overset{\circ}{\Omega}_{ml}} (v \cdot \nabla) v \xi dx - \int_{\overset{\circ}{\Omega}_{ml}} F(\theta) \xi dx = - \int_{\overset{\circ}{\Omega}_{ml}} h v \xi dx,$$

com o que está provado o Teorema 3.4.

Observação 3.11 *Se supomos que* $w_\delta \geq 0$ *sobre* $\partial\Omega$, *pela desigualdade (3.38), obtemos que* $w \geq 0$ *em* Ω *e então* $\theta \geq 0$ *em* Ω.

Observação 3.12 *Do mesmo modo que no capítulo 2, por termos que* $J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon)$ *converge a* $J(f_s(w))$ *em* $C^0(\mathcal{K})$ *com* $\mathcal{K}$ *conjunto compacto tal que* $\mathcal{K} \subset \overset{\circ}{\Omega}_{ml}$, *podemos tomar* $h = J(f_s(w))$ *na definição 3.2.*

Capítulo 4

Conclusões

Neste trabalho apresentamos resultados de existência para alguns modelos matemáticos de condução-convecção que tratam problemas de solidificação/liquefação de materiais puros.

Com respeito a possíveis generalizações, uma extensão natural deste trabalho seria o de estudar o caso de materiais impuros (ligas).

Neste contexto, para o caso de ligas binárias teríamos um sistema composto de dois materiais A_1 e A_2, chamados solvente e soluto respectivamente. Denotando por c a concentração do material A_2 na mistura e usando as mesmas notações utilizada neste trabalho, um modelo desta situação seria composto pelo seguinte sistema de equações (inclusões) diferenciais:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} - \triangle K(\theta) + v\cdot \nabla\theta &= 0, \text{ em } \Omega \times (0,T) \\
w &\subseteq \beta(\theta), \text{ em } \Omega \times (0,T) \\
\frac{\partial v}{\partial t} - \triangle v + (v\cdot \nabla)v + \nabla p - F(\theta, c) &\subseteq -J(f_s(\beta(\theta)), \text{ em } \overset{\circ}{Q}_{ml} \\
div\ v &= 0, \text{ em } Q \\
v &= 0, \text{ em } \overset{\circ}{Q}_s \\
\frac{\partial c}{\partial t} - \triangle c + v\cdot \triangle c &= 0, \text{ em } Q \\
\frac{\partial c}{\partial n} &= 0, \text{ em } \Sigma.
\end{aligned}
$$

Outras extensões seriam aquelas nas quais se considera a influência da variação da densidade de massa do material durante a mudança de fase ou aquelas em que o calor latente, ao invés de ser constante, depende de certas variáveis termodinâmicas (tais como temperatura e/ou concentração). Outra possibilidade seria aquela na qual a função que fornece a fração sólida dependa também da concentração $f_s = f_s(w, c)$.

Estaremos analisando estas questões no futuro.

Com relação aos resultados que obtivemos, é importante notar que um trabalho de investigação muito interessante seria o de analisar o que acontece na região $Q_{ml} \backslash int_f(\mathcal{F})$, que surgiu no nosso problema de evolução, no sentido de verificar se a função limite das soluções aproximadas satisfaz nesta região, quando ela tem medida positiva, alguma equação do tipo da equação dos meios porosos.

Um outro assunto importante a ser comentado é o fato de que, por razões técnicas, não apresentamos a análise do problema estacionário

$$\begin{aligned}
-\triangle K(\theta) + v \cdot \nabla\theta &= 0, \ \text{ em } \ \Omega \\
w &\subseteq \beta(\theta), \ \text{ em } \ \Omega \\
\theta &= \theta_\delta, \ \text{ sobre, } \ \partial\Omega \\
-\triangle v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p - F(\theta) &\subseteq -J(f_s(\beta(\theta)))v, \ \text{ em } \ \overset{\circ}{\Omega}_{ml} \\
div\ v &= 0, \ \text{ em } \ \Omega \\
v &= 0, \ \text{ em } \ \overset{\circ}{\Omega}_s\,.
\end{aligned}$$

que é o caso estacionario associado ao problema de evolução estudado no Capítulo 2.

Queremos explicar aqui qual é a dificuldade técnica que aparece na análise, nos modelos que utilizamos.

Lembramos que, segundo a definição de solução generalizada, para o caso estacionario, dada pela Definição 3.2, para estabelecer a existência de solução para o sistema anterior, é necessário provar a existência de uma função h tal que $h \subseteq J(f_s(\beta(\theta)))$.

Seguindo a técnica que utilizamos (regularização, técnica de ponto fixo e argumentos de compacidade), teríamos que considerar o seguinte problema regularizado associado ao sistema acima:

$$\begin{cases} -\triangle K_\epsilon(\theta_\epsilon) + v_\epsilon \cdot \nabla\theta_\epsilon = 0, \quad \text{em } \Omega \\ w_\epsilon = \beta_\epsilon(\theta_\epsilon), \quad \text{em } \Omega \\ \theta_\epsilon = \theta_\delta, \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ -\triangle v_\epsilon + (v_\epsilon \cdot \nabla) v_\epsilon + \nabla p_\epsilon + J(f_s^\epsilon(w_\epsilon) - \epsilon) v_\epsilon = F(\theta_\epsilon), \quad \text{em } \mathring{\Omega}_{ml} \\ div\ v_\epsilon = 0, \quad \text{em } \Omega \end{cases}$$

Entretanto, o candidato para a função h satisfazendo as condições acima seria obtido como o limite fraco de uma subsequência de $J(f_s^\epsilon(w_\epsilon)-\epsilon)$, quando $\epsilon \to 0$. Esta convergência seria obtida se tivéssemos que $w_\epsilon \to w$ uniformemente em subconjuntos adequados.

No caso do sistema acima, isto não é possível de se obter, pois, seguindo o mesmo tipo de argumentação que antes, ao escrevermos a primeira equação em termos da entalpia, teríamos

$$-\triangle(K_\epsilon \circ \beta_\epsilon^{-1})(w_\epsilon) + v_\epsilon \cdot \beta_\epsilon^{-1}(w_\epsilon)\nabla w_\epsilon = 0,$$

e então que

$$C_\epsilon \leq (K_\epsilon \circ \beta_\epsilon^{-1})'(w_\epsilon),$$

onde $C_\epsilon \to 0$, quando $\epsilon \to 0$.

Desta forma, não poderíamos usar o Lema 1.2 (Capítulo 1), como se fez com o problema regularizado do caso estacionario estudado no Capítulo 3, para concluir que $|w_\epsilon|_{C^\gamma(\Omega)} \leq M$, com $\gamma \in (0,1]$ e M uma constante que não depende de ϵ e assim obter a convergência $w_\epsilon \to w$ em $C^0(\overline{\Omega})$.

Como tampouco é possível concluir que $w_\epsilon \to w$, q.t.p., não podemos obter solução em sentido análogo da Definição 2.2(ver caso de evolução no Capítulo 2).

Problemas análogos a estes surgem se tentarmos fazer o parâmetro α do caso estacionário do Capítulo 3 tender a zero para obter uma solução do problema estacionário acima.

Bibliografia

[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, 1975.

[2] V. Alexiades, Rapid freezing of dilute alloys, IMA Journal of Applied Math. 30, pp. 67-79, 1983.

[3] V. Alexiades and A.D. Solomon, Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1993.

[4] V. Alexiades, D.G. Wilson and A.D. Solomon, Macroscopic global modeling of binary alloy solidification processes, Quarterly of Applied Mathematics, volume XLIII, no. 2, pp, 143-158, 1985.

[5] Ph. Blanc, L. Gasser and J. Rappaz, Existence for a Stationary model of binary alloy solidification, Math. Modeling. Num. Anal. vol. 29, no. 06, pp. 687-699, 1995.

[6] R. J. Braun, G. B. McFaden and S.R. Coriell, Morphological instability in phase-field models of solidification, Physical Review E. vol.49, no. 5, pp. 4336-4352, 1994.

[7] H. Brézis, Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans le Espaces de Hilbert, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[8] G. Caginalp, An analysis of a phase field model of a free boundary, Arch. Rat. Mech. Anal. 92, pp. 205-245, 1986.

[9] G. Caginalp, Stefan and Hele-Shaw type models as asymptotic limits of the phase-field equations, Phys. Rev. A, vol 39, no. 11, pp. 5887-5896, 1989.

[10] G. Caginalp and J. Jones, A derivation and Analysis of phase field models of thermal alloys, Annal. Phys. 237, pp. 66-107, 1995.

[11] G. Caginalp and W. Xie, Phase-field and sharp-interface alloy models, Phys. Rev. E, vol 48, no. 03, pp. 1897-1909, 1993.

[12] J.R. Cannon, E. DiBenedetto and G. H. Knightly, The steady state Stefan problem with convection, Arch. Rat. Mech. Anal. 73, pp. 79-97, 1980.

[13] J.R. Cannon, E. DiBenedetto and G. H. Knigthly, The bidimensional Stefan problem with convection time dependent case, Comm. Partial Diff. Eqs. 8(14), pp. 1549-1604, 1983.

[14] L. Clavier, E. Aquis, J.P. Caltagirane and D. Gobin, A fixed grid method for the numerical solution of phase change problems, Int. J. for Num. Methods in Engineering. vol 37, 4247-4261, 1994.

[15] P. Colli and J. Sprekels, On a Penrose-Fife Model with zero interfacial energy leading to a phase-field system of relaxed Stefan type, An. Mat. Pure Appl. (4) 169, pp. 269-289, (1995)

[16] P. Colli and J. Sprekels, Stefan problems and the Penrose-Fife phase field model, Adv. math. Sci. Appl. 7 (1997) 2, pp. 911-934.

[17] J.B. Collis, Diffusive interface model of diffusion-limited crystal growth, Phys. Rev. B, vol. 31, no. 9, pp. 6119-6122, 1985.

[18] J.I. Díaz, G. Galiano, Existence and uniqueness of solutions of the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion, Topological Methods in Nonlinear Analysis. Journal of the Juliusz Schauder Center, vol. 11, pp. 59-82, 1998.

[19] E. DiBenedetto and A. Friedman, Conduction-convection problems with change of phase, J. Diff. Eqs. vol 62, pp. 129-185, 1986.

[20] E. DiBenedetto and M. O'Leray, Three-dimensional conduction-convection problems with change of phase, Arch. Rat. Mech. Anal. vol. 123, pp. 99-116, 1993.

[21] C.M. Elliot, Error Analysis of the enthalpy method for the Stefan problem, IMA Journal of Num. Analysis 7, 61-71, 1987.

[22] A. Friedman, Partial Differential Equation of Parabolic Type, Prentice-Hall.

[23] D. Gilbarg-N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, New York, 1983.

[24] D.R. Jenkins, Non-linear interaction of morphological and convective instabilities during solidification of a dilute binary alloy, IMA J. Appl. Math. vol 35, pp. 145-157, 1985.

[25] R. Kobayshi, Modeling and numerical simulation of dentritic crystal growth, Phys. D, vol. 63, pp. 410-479, 1953.

[26] S.N. Kružkov, First order quasilinear equations in several independet variables, Math. USSR Sbornik 10 (1970), pp. 217-243.

[27] O.A. Ladyzenskaja, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach Science Publishers Inc., 1969.

[28] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'tceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. American Mathematical Society, Providence, 1968.

[29] O.A. Ladyzenskaja and N.N. Ural'tceva, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Academic Press, New York , 1968.

[30] J.S. Langer, Models of pattern formation in first-order phase transitions , in G. Grinstein and G. Mazenko (Eds.), Directions in Condensed Mather. Physics, World Scientific, Philadelphia, 1986.

[31] Ph. Laurençot, Weak solutions to a phase-field model with non-constant thermal conductivity, Quarterly of Appl. Math. Vol. LV, number 4, pp. 739-760. 1997.

[32] J.L. Lions, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non-Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[33] J.L. Lions, E. Magenes, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications vol 1, Springer-Verlag, 1972.

[34] S.A. Lorca, As equações de Boussinesq Generalizadas, Tese de Doutoramento, IMECC-UNICAMP, Universidade Estadual de Campinas, SP, Brasil, 1994.

[35] W.W. Mullis, Thermodynamic equilibrium of crystal sphere in the fluid, J. Chem. Phys. vol. 81, pp. 1436-1442, 1984.

[36] M. O'Leary, analysis of the mushy region in conduction-convection problems with change of phase, Elect. Journal. Diff. Eqs. vol 1997, 4, pp. 1-14, 1987.

[37] O. Penrose, P. C. Fife, Thermodynamically consistent models of phase-field type for the kinetics of phase transitions, Phys D. vol 43, pp. 44-62, 1990.

[38] H.L. Royden, Real Analysis, Third Edition, Macmillan Pub. Co, New York, 1988.

[39] L. Rubinstein, The Stefan Problem, AMS. Transl, 27, Amer. Math. Society, Providence, 1971.

[40] G.E. Shilov, B.L. Gurevich, Integral, Measure and Derivative: a Unified Approach, Dover Publications, Inc., New York, 1977.

[41] J. Simon, Compacts sets in the space $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Serie quarta, tomo CXLVI, pp. 65-96, 1987.

[42] J. Simon, Existencia de Solución del Problema de Navier-Stokes con Densidad Variable, Universidad de Sevilla, Facultad de Matemáticas.

[43] R. Temam, Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North-Holland Publishing Company, 1977.

[44] C.L.D. Vaz, Análise de um Modelo Matemático de Condução-Convecção do Tipo Campo de Fase para Solidificação, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Universidade Estadual de Campinas, SP, Brasil, 2000.

[45] A. Visintin, Supercooling and superheating. Effects in phase transition, IMA. Journal of Applied. Mathematics, 35, pp. 233-256, 1985.

[46] V. R. Voller, Interpretation of the enthalpy in a discretised multidimensional region undergoing a melting/freezing phase change, Int. Comm. Heat Mass. Transfer, 10, pp. 323-328, 1983.

[47] V. R. Voller, A heat balance integral method for estimating practical solidification parameter. IMA Journal of Applied Mathematics, vol 35, no. 2, pp. 223-232, 1985.

[48] V. Voller and M. Cross, Accurate solutions of moving boundary problems using the enthalpy method, Int. J. Heat Mass. Transfer, vol 24, pp. 545-556, 1981.

[49] V. Voller and M. Cross, An explicit numerical method to thack a moving phase change front, Int. J. Heat Mass. Transfer. vol 26, no. 11, pp. 147-150, 1983.

[50] V. Voller, M. Cross and N. C. Markatos, An enthalpy method for convection/diffusion phase change, Int. J. for Numer. Methods in Engineering, vol. 24, pp. 271-284, 1987.

[51] V. Voller and C. Prakash, A fixed grid numerical modeling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems, Int. J. Heat Mass Transfer, vol 30, no. 8, pp. 1709-1719, 1987.

[52] V. Voller, C. R. Swaininathan and B. C. Thomas, Fixed grid techniques for phase change problems ariever, Int. J. Numer. Methods Engrg. 30, pp. 875-898, 1990.

[53] A.A. Wheeler, N.A. Ahmad, W.J. Boettinger et al., Recent developments in phase field models fo solidification, preprint.

[54] A.A. Wheeler, W.J. Boettinger and G.B. McFaden, Phase field model for isothermal phase transitions in binary alloy, Phys. Rev. A, vol 45, no. 10, pp. 7424-7439, 1992.

[55] A.A. Wheeler, W.J. Boettinger and G.B. McFaden, Phase field model of solute trapping during solidification, Phys. Rev. E, vol 47, no. 3, pp. 1893-1909, 1993.

[56] R.E. White, A numerical solution of the enthalpy formulation of the Stefan problem, SIAM. J. Numer. Anal. 19, pp. 1158-1172, 1982.