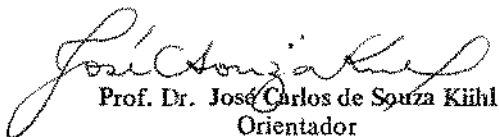


Claudina Izepe Rodrigues

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida pela Senhorita Claudina Izepe Rodrigues e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 21 de agosto de 1986


Prof. Dr. José Carlos de Souza Kiihl
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Ciências.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. José Carlos de Souza Kiihl pela proposição do trabalho, pela orientação e pelo incentivo.

Agradeço também a todos que demonstraram amizade, apoio e que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

INDICE

INTRODUÇÃO	i
I. COBORDISMO DE INVOLUÇÕES	1
II. O J-HOMOMORFISMO ESTÁVEL DE BORDISMO	10
1. O J-HOMOMORFISMO	11
2. INTERPRETAÇÃO ALGÉBRICA DO RESULTADO DE ALEXANDER	18
III. OS IDEAIS $\bar{I}_n^k$	24
IV. AÇÕES SEMI-LIVRES DE S^1	27
1. GRUPOS DE BORDISMO E HOMOMORFISMO DE SMITH	27
2. PRODUTO EM $\bigoplus_{n \geq 0} N_{2n+1}(S^1)$	32
3. O $\bar{J}$ -HOMOMORFISMO ESTÁVEL DE BORDISMO	37
4. CONJUNTO DE PONTOS FIXOS DE AÇÕES SEMI-LIVRES DE S^1	55
5. CONJUNTO DE PONTOS FIXOS E O FIBRADO NORMAL	76
6. INTERPRETAÇÃO ALGÉBRICA DA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA K	82
V. AÇÕES DE $\mathbb{Z}_p$, p UM PRIMO ÍMPAR	85
BIBLIOGRAFIA	93

INTRODUÇÃO

Em Topologia estudam-se objetos tais como espaços topológicos, variedades topológicas, variedades diferenciáveis, poliedros, etc. Na Teoria de Grupos de Transformações estudam-se as ações de grupos sobre estes objetos. Esta teoria foi desenvolvida inicialmente por Gleason, Montgomeny e Zippin, com o objetivo de resolver o quinto problema de Hilbert sobre a estrutura dos grupos localmente compactos. A partir dos anos cinquenta, esta tem sido uma área pesquisada por um número muito grande de pesquisadores. (Veja a bibliografia de Bredon [4]).

A partir dos anos sessenta, Conner e Floyd introduziram para o estudo dos grupos de transformações técnicas da Teoria de Cobordismo, dando origem então à Teoria de Cobordismo das Ações de Grupos (veja [10]).

Em [14] é mostrado que é natural utilizar as técnicas de cobordismo para o estudo de ações de $\mathbb{Z}_2$ (involuções). Neste trabalho aprofundaremos os estudos sobre problemas que surgem no cobordismo das involuções e estudaremos alguns dos resultados para ações semi-livres de S^1 .

Capobianco, em sua tese de doutorado [5], estudou questões do seguinte tipo:

"Quando a classe de cobordismo $[M]$, de uma variedade n -dimensional M^n , é o conjunto dos pontos fixos de uma involução $[V^{n+k}, T]$,

em uma variedade $(n + k)$ -dimensional".

Este tipo de questão leva ao estudo de um ideal, I_n^k , do anel de cobordismo de Thom N_* . Em nosso presente trabalho tentamos estudar o mesmo problema relacionado com as ações semi-livres de S^1 em variedades não-orientadas.

No Capítulo I, apresentamos um resumo dos resultados sobre cobordismo de involuções que são relevantes para o entendimento dos métodos e técnicas utilizados por Capobianco. Assim apresentamos: a estrutura de N_* -módulo do cobordismo de involuções $I_*(\mathbb{Z}_2)$ e apresentamos a estrutura multiplicativa de $I_*(\mathbb{Z}_2)$ utilizando as notações de Kihl [16].

No Capítulo II, apresentamos o J-homomorfismo que foi introduzido por Boardman em [3] para o estudo da estrutura multiplicativa de $I_*(\mathbb{Z}_2)$. Apresentamos uma interpretação algébrica da construção geométrica Γ , utilizada no Capítulo I, através do J-homomorfismo de Boardmann.

No Capítulo III, apresentamos os principais resultados obtidos por Capobianco em sua tese de doutorado [5].

No Capítulo IV, apresentamos inicialmente um resumo de alguns resultados sobre cobordismo de ações semi-livres de S^1 , a saber: a estrutura de módulo (conforme Uchida [23]), a sua estrutura multiplicativa (conforme Kihl [16]). A seguir apresentamos e estudamos uma generalização do J-homomorfismo de Boardmann para o caso de ações semi-livres de S^1 . Chamamos a este homomorfismo

de $\bar{J}$. Apresentamos uma interpretação algébrica da construção geométrica K , utilizada em [16] para o estudo da estrutura multiplicativa das ações semi-livres de S^1 . Também, neste Capítulo, estudamos a seguinte pergunta:

"Quando a classe de cobordismo $[M]$, de uma variedade n -dimensional M^n , é o conjunto dos pontos fixos de uma $[V^{n+k}, S]$ ação semi-livres de S^1 em uma variedade $(n+k)$ -dimensional?"

No Capítulo V, estudamos os seguintes funtores:

$$r_p : SF_*(S^1) \rightarrow SF_*(\mathbb{Z}_p)$$

que vão do grupo de cobordismo das ações semi-livres de S^1 para o grupo de bordismo de ações semi-livres de $\mathbb{Z}_p$.

I. COBORDISMO DE INVOLUÇÕES

Neste capítulo, apresentaremos alguns dos principais resultados referentes ao Cobordismo de Involuções que serão necessários ao desenvolvimento deste trabalho.

Seja M^n uma n -variedade fechada. Uma aplicação diferenciável $T: M^n \rightarrow M^n$ é uma involução se $T^2 = T \circ T = \text{identidade}$. A involução é dita livre se $T(x) \neq x$ para todo x em M^n .

Consideremos todas as involuções diferenciáveis (M^n, T) em variedades fechadas. Uma involução (M^n, T) borda se, e somente se, existe uma involução (B^{n+1}, S) em uma variedade compacta para a qual $(\partial B^{n+1}, S|_{\partial B^{n+1}})$ é difeomorfa equivariantemente a (M^n, T) . Dadas duas involuções (M_1^n, T_1) e (M_2^n, T_2) uma união disjunta $(M_1^n \cup M_2^n, T)$ é formada de modo natural. Dizemos que (M_1^n, T_1) e (M_2^n, T_2) são bordantes se, e somente se, a união disjunta $(M_1^n \cup M_2^n, T)$ borda no sentido acima. Esta relação é uma relação de equivalência, e a classe de bordismo a qual (M^n, T) pertence é denotada por $[M^n, T]$. A coleção de tais classes de bordismo é denotada por $I_n(\mathbb{Z}_2)$. Uma estrutura de grupo abeliano, com todo elemento de ordem 2, é colocada em $I_n(\mathbb{Z}_2)$ pela união disjunta.

Se, no que foi dito, substituirmos o termo involução por involução livre, obtemos $N_n(\mathbb{Z}_2)$ o grupo de bordismo n -dimensional das involuções livres.

Sejam $I_*(\mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I_n(\mathbb{Z}_2)$ e $N_*(\mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} N_n(\mathbb{Z}_2)$, as somas diretas dos grupos definidos acima. Estes tornam-se N_* -módulos graduados se colocarmos

$$[N^m] [M^n, T] = [N^m \times M^n, 1 \times T]$$

onde $[N^m] \in N_m$.

Consideremos agora o funtor esquecimento (de que a involução é livre); este induz um homomorfismo de N_* -módulos

$$f : N_*(\mathbb{Z}_2) \rightarrow I_*(\mathbb{Z}_2).$$

Além disso, como uma involução livre borda uma variedade com involução (veja [16], 3.2), então temos que f é o homomorfismo nulo.

Vamos agora introduzir os grupos de bordismo relativo $B_n(\mathbb{Z}_2)$. Os elementos são classes de equivalência de objetos (V^n, T) onde V^n é uma n -variedade com bordo, e $T : V^n \rightarrow V^n$ é uma involução tal que $T|_{\partial V^n}$ é livre. Dizemos que (V_1, T_1) e (V_2, T_2) são bordantes se, e somente se, existe uma variedade compacta W com bordo tal que $\partial W = \partial V_1 \cup \partial V_2$ (união disjunta) e uma involução livre $S : W \rightarrow W$, com $S|_{\partial V_1} = T_1|_{\partial V_1}$, $S|_{\partial V_2} = T_2|_{\partial V_2}$, e tal que

$$V_1 \cup W \cup V_2 / \partial V_1 \cup \partial V_2 \equiv \partial W$$

com a involução $T_1 \cup S \cup T_2$, borda uma variedade compacta com involução. Esta é uma relação de equivalência, e denotaremos por $B_n(\mathbb{Z}_2)$ o conjunto de classes $[V^n, T]$. A operação induzida pela união disjunta define em $B_n(\mathbb{Z}_2)$ uma estrutura de grupo abeliano.

Seja $B_*(\mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n(\mathbb{Z}_2)$, a soma direta destes grupos. O produto

$$[N^m] [V^n, T] = [N^m \times V^n, 1 \times T]$$

com $[N^m] \in N_m$, define em $B_*(\mathbb{Z}_2)$ uma estrutura de N_* -módulo.

Temos os seguintes homomorfismos de N_* -módulos:

$\partial : B_*(\mathbb{Z}_2) \rightarrow N_*(\mathbb{Z}_2)$, dado por $\partial[V, T] = [\partial V, T | \partial V]$ de grau -1 ,
e

$j : I_*(\mathbb{Z}_2) \rightarrow B_*(\mathbb{Z}_2)$, dado por $j[M, T] = [M, T]$ de grau zero.

TEOREMA 1.01. A sequência de N_* -módulos

$$\dots \rightarrow N_*(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{f} I_*(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j} B_*(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} N_{*-1}(\mathbb{Z}_2) \rightarrow \dots$$

é exata. (Veja [16], 3.3).

TEOREMA 1.02. A sequência

$$0 \longrightarrow I_*(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j} B_*(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} N_{*-1}(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0$$

é exata. Além disso, existe um homomorfismo $h : N_*(\mathbb{Z}_2) \rightarrow B_*(\mathbb{Z}_2)$ de grau + 1, tal que $\partial h = \text{identidade}$. (Veja [16], 3.4).

Desejamos calcular explicitamente estes N_* -módulos. Iniciamos com $N_*(\mathbb{Z}_2)$.

Seja $[M^n, T] \in N_*(\mathbb{Z}_2)$. Então M/T é uma variedade e $\pi : M \rightarrow M/T$ um $\mathbb{Z}_2$ -fibrado, onde $\mathbb{Z}_2$ age em M através de T , permutando as folhas de revestimento. Desse modo temos a aplicação classificante $\rho : M/T \rightarrow B\mathbb{Z}_2 = BO_1$. Por outro lado, se $g : N \rightarrow B\mathbb{Z}_2$ é uma aplicação contínua, o $\mathbb{Z}_2$ -fibrado induzido

$$\begin{array}{ccc} \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{g}} & E\mathbb{Z}_2 = S^\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{g} & B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{RP}^\infty \end{array}$$

tem em $\tilde{N}$ uma variedade com uma involução livre. Portanto, temos:

TEOREMA 1.03. $N_*(\mathbb{Z}_2) \simeq N_*(BO_1)$.

Passamos agora ao cálculo de $B_*(\mathbb{Z}_2)$.

Seja M^n uma n -variedade com bordo e involução. O conjunto F de pontos fixos é a união disjunta de várias subvariedades F^k

de dimensão k , e cada F^k admite uma vizinhança tubular N_k que é isomorfa, como uma variedade com involução, ao fibrado disco unitário do fibrado normal $D(v^{n-k})$ a F^k em M , equipado com a involução antípoda nas fibras, ou seja, é dada por -1 nas fibras. Podemos assumir os N_k 's disjuntos. No complementar da união N dos N_k 's, T age livremente, do que segue que M é bordante em $B_n(\mathbb{Z}_2)$ a N . Mas N é determinado pelos fibrados normais aos conjuntos de pontos fixos F^k ; isto é, $B_n(\mathbb{Z}_2)$ pode ser visto como o grupo de bordismo de fibrados vetoriais sobre variedades.

Seja $v^{n-k} : F^k \rightarrow BO(n-k)$ a aplicação classificante do fibrado normal v^{n-k} sobre F^k . Temos:

TEOREMA 1.04. Associando a (M, T) as classes das aplicações classificantes $v^{n-k} : F^k \rightarrow BO(n-k)$, temos definido um isomorfismo

$$F : B_*(\mathbb{Z}_2) \rightarrow \bigoplus_{k=0}^n N_k(BO(n-k)) = M_n(\mathbb{Z}_2).$$

Então temos que

$$F \circ j : I_n(\mathbb{Z}_2) \rightarrow \bigoplus_{k=0}^n N_k(BO(n-k)) = M_n(\mathbb{Z}_2)$$

é injetivo, e para (M^n, T) , as classes F^k , v^{n-k} , com $k \neq n-1$, determinam a classe de F^{n-1} , v^1 .

TEOREMA 1.05. O homomorfismo

$$F \circ j : I_n(\mathbb{Z}_2) \rightarrow \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^n N_k(BO(n-k))$$

é um isomorfismo.

O isomorfismo do teorema anterior nos dá a estrutura de N_* -módulo de $I_*(\mathbb{Z}_2)$ em termos dos grupos de bordismo singular dos espaços classificantes $BO(k)$, que são conhecidos, pois temos:

TEOREMA 1.06. $N_*(BO(k))$ é o N_* -módulo livre tendo como base a coleção das classes $y_{i_1} \dots y_{i_k}$, onde $y_i = [RP(i), \lambda]$ pertence a $N_i(BO(1))$, e $y_{i_1} \dots y_{i_k}$ é a classe do fibrado k -dimensional $\pi_1^*(\lambda) \oplus \dots \oplus \pi_k^*(\lambda)$ sobre $RP(i_1) \times \dots \times RP(i_k)$, para cada sequência de inteiros $(i_1, \dots, i_k)$, com $i_1 \leq \dots \leq i_k$, em $N_{i_1 + \dots + i_k}(BO(k))$. (Veja [16], 4.5).

TEOREMA 1.07. O N_* -módulo $N_*(\mathbb{Z}_2)$ é livre com base dada por $\{(S^n, A)\}_{n \geq 0}$, onde $A : S^n \rightarrow S^n$ é a involução antípoda na n -esfera. (Veja [16], 4.3).

Agora introduziremos produtos de involuções, de tal forma que em $I_*(\mathbb{Z}_2)$ e $B_*(\mathbb{Z}_2)$ estejam definidas estruturas de álgebra. Este produto é dado pelo produto cartesiano da seguinte forma:

Sejam (V, T) e (W, S) duas variedades compactas, com bordo, com involuções que são livres nos bordos. Temos a involução $T \times S : V \times W \rightarrow V \times W$, dada por $(T \times S)(v, w) = (Tv, Sw)$. Este produto define em $B_*(\mathbb{Z}_2)$ uma estrutura de álgebra sobre o anel de bordismo N_* . Além disso, se V e W são variedades fechadas, então $V \times W$ também é fechada, e este produto também define uma estrutura de álgebra sobre N_* em $I_*(\mathbb{Z}_2)$.

Com estes produtos definidos acima, o homomorfismo $j : I_*(\mathbb{Z}_2) \rightarrow B_*(\mathbb{Z}_2)$ é um homomorfismo de álgebra. O homomorfismo $F : B_*(\mathbb{Z}_2) \rightarrow \bigoplus_{k \geq 0} N_k(BO_{*-k}) = M_*(\mathbb{Z}_2)$ também é um homomorfismo de álgebra, se em $M_*(\mathbb{Z}_2)$ é considerado o produto

$$N_k(BO_n) \otimes N_R(BO_m) \xrightarrow{\times} N_{k+R}(BO_n \times BO_m) \xrightarrow{\oplus} N_{k+R}(BO_{n+m})$$

que associa $(M, \zeta) \otimes (N, \eta)$ a $(M \times N, \pi_1^*(\zeta) \otimes \pi_2^*(\eta))$, onde π_1 e π_2 são as projeções no primeiro e no segundo fatores, respectivamente; e o conjunto de pontos fixos de $T \times S$ é $\text{Fix}(T \times S) = \text{Fix}(T) \times \text{Fix}(S)$ sendo o fibrado normal deste produto a soma de Whitney do fibrado normal de $\text{Fix}(T)$ com o fibrado normal de $\text{Fix}(S)$.

Temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} I_*(\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{i_*} & M_*(\mathbb{Z}_2) \\ & \searrow j & \nearrow F \\ & B_*(\mathbb{Z}_2) & \end{array}$$

que é comutativo, e assim i_* é também um homomorfismo de álgebras.

Vamos denotar por $1 \in N_0(BO_0)$ o fibrado 0-dimensional trivial sobre um ponto, e por $\alpha_1 = (RP(1-1), \lambda)$ pertencente a $N_{i-1}(BO_1)$, a classe do fibrado linha (1-dimensional) canônico sobre $RP(i-1)$.

TEOREMA 1.08. $M_*(\mathbb{Z}_2)$ é a álgebra polinomial sobre N_* nas classes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$. (Veja [16], 6.1).

Sejam as involuções $(RP(r), T_0)$, onde $T_0[x_0, x_1, \dots, x_r] = [-x_0, x_1, \dots, x_r]$. Vamos denotar por p_0^r a classe de $(RP(r), T_0)$. O fibrado normal ao conjunto de pontos fixos de p_0^r é $(1_{\mathbb{R}}^r \rightarrow RP(0)) \cup (\lambda \rightarrow RP(r-1))$, onde λ é o fibrado linha canônico.

Definimos agora uma operação

$$\Gamma : I_*(\mathbb{Z}_2) \rightarrow I_*(\mathbb{Z}_2)$$

que associa $[M, T]$ a $[M', T']$, onde M' é a variedade obtida de $M \times S^1$, identificando-se (m, z) com $(Tm, -z)$ e T' é a involução dada por $T'(m, z) = (m, \bar{z})$ onde $\bar{z}$ é o complexo conjugado de z .

Com esta construção, a estrutura multiplicativa de $I_*(\mathbb{Z}_2)$ fica totalmente determinada geometricamente. Para isso necessitamos do seguinte lema:

LEMA 1.09. Para todo $\alpha, \beta \in I_*(\mathbb{Z}_2)$, temos

$$\Gamma(\alpha\beta) = \Gamma(\alpha)\beta + \epsilon(\alpha)\Gamma(\beta),$$

onde $\epsilon : I_*(\mathbb{Z}_2) \rightarrow N_*$ é a aumentação. (Veja [16], 5.3).

Utilizando este lema, demonstra-se o seguinte teorema:

TEOREMA 1.10 (Alexander): $I_*(\mathbb{Z}_2)$ é gerado com álgebra sobre N_* pelos elementos $\Gamma^k(p_0^r)$, com $k \geq 0$, $r \neq 1$, e com as relações provenientes de

$$\Gamma(\alpha\beta) = \Gamma(\alpha)\beta + \epsilon(\alpha)\Gamma(\beta).$$

Especificamente, uma base de $I_*(\mathbb{Z}_2)$ sobre N_* é dada pelos elementos

$$(\Gamma^k(p_0^{j_1}) \cdot p_0^{j_2} \dots p_0^{j_r})$$

com $k \geq 0$, $j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_r > 1$.

OBSERVAÇÃO. $p_0^0 = \Gamma^0(p_0^0) = 1$, $\Gamma(p_0^0) = 0$ e para $r = 0$, o elemento da base é entendido como sendo 1. (Veja [16], 5.4).

II. O J-HOMOMORFISMO ESTÁVEL DE BORDISMO

Seja $\lambda \in M_1$ a involução antípoda no intervalo fechado unitário I_1 . Em termos de fibrados vetoriais a multiplicação por λ simplesmente acrescenta um fibrado linear trivial.

Conner e Floyd, em ([11], 26.1), apresentou o seguinte homomorfismo $\Delta : N_*(\mathbb{Z}_2) \rightarrow N_{*-1}(\mathbb{Z}_2)$, definido da seguinte forma:

TEOREMA 2.01. Suponha que (M^n, T) é uma involução diferenciável livre de pontos fixos em uma variedade fechada. Para $N \geq n$ existe uma aplicação equivariante $g : (M^n, T) \rightarrow (S^N, A)$ que é transversa regular em $S^{N-1} \subset S^N$. Seja $V^{n-1} = g^{-1}(S^{N-1})$. A função

$$\Delta : N_n(\mathbb{Z}_2) \rightarrow N_{n-1}(\mathbb{Z}_2)$$

definida por: $[M^n, T] \mapsto [V^{n-1}, T|_{V^{n-1}}]$ é uma função bem definida para $N > n$ independente de N .

O homomorfismo $\Delta : N_*(\mathbb{Z}_2) \rightarrow N_*(\mathbb{Z}_2)$ é de grau -1 , e é chamado homomorfismo de Smith.

Definimos um produto em $\bigoplus_{n \geq 0} N_n(\mathbb{Z}_2)$ como segue:

Sejam $\alpha \in N_n(\mathbb{Z}_2)$, $\beta \in N_m(\mathbb{Z}_2)$, $\alpha' \in M_{n+1}$ e $\beta' \in M_{m+1}$ tais que $\partial(\alpha') = \alpha$ e $\partial(\beta') = \beta$. Sejam $K = \max(m, n)$ e $k = \min(m, n)$.

Defina

$$\alpha\beta = \Delta^{k+1}\partial(\alpha'\beta') \in N_k(\mathbb{Z}_2).$$

Este produto define uma estrutura de anel em $\bigoplus_{n=0}^{\infty} N_n(\mathbb{Z}_2)$ e o homomorfismo $\Delta : N_n(\mathbb{Z}_2) \rightarrow N_{n-1}(\mathbb{Z}_2)$ torna-se um homomorfismo de anel.

II - 1. O J-HOMOMORFISMO

Seja o anel $R = \varinjlim (N_{n-1}(\mathbb{Z}_2) \xleftarrow{\Delta} N_n(\mathbb{Z}_2))$. Um elemento de R é uma sequência $\{\alpha_n\}_0^{\infty}$ com $\alpha_n \in N_n(\mathbb{Z}_2)$ e $\Delta(\alpha_n) = \alpha_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

Definimos o J-homomorfismo de bordismo

$$J : M \rightarrow R$$

onde $M = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{j=0}^k N_{k-j}(\text{BO}_j)$, como segue:

Para $A \in M_k$, seja $J_n(A) = \Delta^k \partial(A\tilde{\iota}^{n+1}) \in N_n(\mathbb{Z}_2)$. Como $\Delta J_n(A) = \Delta^{k+1} \partial(A\tilde{\iota}^{n+1}) = \Delta^k \partial(A\tilde{\iota}^n) = J_{n-1}(A)$, a sequência $\{J_n(A)\}_0^{\infty} \in R$ e tomamos

$$J(A) = \{J_n(A)\}_0^{\infty}.$$

O homomorfismo J é estável com relação a multiplicação por $\tilde{\iota}$, ou seja, $J(A\tilde{\iota}) = J(A)$.

TEOREMA 2.02. O homomorfismo $J : M \rightarrow R$ é multiplicativo. (Veja [8], 3.1).

Seja o anel $M = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{j \geq 0} N_{k-j}(BO_j)$. Vamos considerar o anel quociente F obtido da seguinte forma: F é obtido fatorando-se o ideal de todos os elementos da forma $A + A\zeta$ onde $A \in M$. Assim, existe de forma natural, um homomorfismo de anel induzido $J : F \rightarrow R$.

Como $N_*(\mathbb{Z}_2)$ é um N_* -módulo com base dada pelos elementos $\{[S^n, A]\}_{n \geq 0}$ podemos descrever o produto em $N_n(\mathbb{Z}_2)$ da seguinte forma:

$$\text{Se } \alpha = \sum_{r=0}^n [X^r] [S^{n-r}, A], \text{ e } \beta = \sum_{r=0}^n [Y^r] [S^{n-r}, A],$$

Sejam

$$\alpha' = \sum_{r=0}^n [X^r] \zeta^{n-r}, \text{ e } \beta' = \sum_{r=0}^n [Y^r] \zeta^{n-r}$$

tais que

$$\alpha' \beta' = \sum_{r=0}^n \left(\sum_{r+s=\ell} [X^r] [Y^s] \right) \zeta^{n-\ell}$$

e

$$\alpha \beta = \Delta^{n+1} \partial(\alpha' \beta') = \sum_{r=0}^n \left(\sum_{r+s=\ell} [X^r] [Y^s] \right) [S^{n-\ell}, A].$$

Assim, podemos identificar R com o anel graduado $N_*(\theta)$ de séries de potências formais sobre o anel graduado N_* . A

$\sum_0^\infty [X^r] \theta^r$ associamos a sequência $\{\alpha_n\}_0^\infty$ onde $\alpha_n = \sum_0^n [X^r] [S^{n-r}, A]$.

Temos $\Delta \alpha_{n+1} = \alpha_n$, e a fórmula para $\alpha_n \beta_n$ é justamente a regra para multiplicar séries de potências formais. Portanto, temos $J : F \rightarrow N(\theta)$.

LEMA 2.03. A imagem de

$$I_m(\mathbb{Z}_2) \rightarrow M_m(\mathbb{Z}_2) \rightarrow F \rightarrow N(\theta)$$

está no ideal gerado por θ^m , e

$$J([M^m, T]) = [M^m] \theta^m + \text{termos em potências maiores de } \theta.$$

(Veja [8], 6.1).

LEMA 2.04. Seja $\xi \rightarrow F \in M_m(\mathbb{Z}_2)$. Se

$$J(\xi \rightarrow F) = \beta \theta^m + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta,$$

então existe uma variedade com involução (M^m, T) tal que β esta na classe de M^m com conjunto de pontos fixos $\xi \rightarrow F$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos

$$\begin{aligned} 0 &= J_{m-1}(\xi \rightarrow F) \\ &= \Delta^{m-m+1-1} \partial(\xi \rightarrow F) \\ &= \partial(\xi \rightarrow F). \end{aligned}$$

Mas, $\partial(\xi \rightarrow F) = [S(\xi), A]$, onde A é a aplicação antípoda. Portanto, $[S(\xi), A] = 0$. Suponha que $(S(\xi), A)$ é bordo de $(V^m, \tau) \in N_m(\mathbb{Z}_2)$. Seja

$$M^m = (D(\xi) \cup V^m) / S(\xi) \equiv \partial V$$

e $T = A \cup \tau$. O fibrado normal ao conjunto de pontos fixos de (M^m, T) é $\xi \rightarrow F$. Assim, $\beta = [M^m]$.

LEMA 2.05. $J(1_{\mathbb{R}}) = 1$.

LEMA 2.06. $J([V^S]A) = [V^S]\theta^S J(A)$, $A \in M_k$.

LEMA 2.07. Seja λ_n o fibrado linear canônico sobre $\mathbb{R}P(n)$. Então

$$J(\lambda_n) = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} [V(n+1, i)] \theta^{n+i+1}$$

onde

$$[V(n+1, i)] = \epsilon \Gamma^i [\mathbb{R}P(n+1), T_0],$$

sendo $\epsilon : I_*(\mathbb{Z}_2) \rightarrow N_*$ a aumentação, e

$$T_0 : (z_0, z_1, \dots, z_{n+1}) \mapsto (-z_0, z_1, \dots, z_{n+1}).$$

Vamos agora analisar o efeito do homomorfismo J em alguns elementos de $M_4(\mathbb{Z}_2)$. No que segue denotaremos por x_n a classe

de $RP(n)$.

$$\begin{aligned} I_4(\mathbb{Z}_2) \rightarrow M_4(\mathbb{Z}_2) &= \bigoplus_{k=0}^4 N_{4-k}(BO_k) \\ &= N_4(BO_0) + N_3(BO_1) + N_2(BO_2) + N_1(BO_3) + N_0(BO_4) \end{aligned}$$

$$N_4(BO_0) \simeq N_4.$$

Sejam os elementos $x_3\lambda_0, x_2\lambda_1, x_1\lambda_2, \lambda_3$ pertencentes a $N_3(BO_1)$.

Temos:

$$J(x_3\lambda_0) = x_3\theta^3$$

$$J(x_2\lambda_1) = x_2\theta^2 + x_2[V(2,0)]\theta^4 + \dots$$

$$J(x_1\lambda_2) = x_1[V(3,0)]\theta^4 + \dots$$

$$J(\lambda_3) = 1 + [V(4,0)]\theta^4 + \dots$$

Sejam os elementos $x_2\lambda_0^2, x_1\lambda_0\lambda_1, \lambda_0\lambda_2$ e λ_1^2 em $N_2(BO_2)$. Temos:

$$J(x_2\lambda_0^2) = x_2\theta^2$$

$$J(x_1\lambda_0\lambda_1) = x_1[V(2,1)]\theta^4 + \dots$$

$$J(\lambda_0\lambda_2) = 1 + [V(3,1)]\theta^4 + \dots$$

$$J(\lambda_1^2) = 1 + [V(2,0)]^2\theta^4 + \dots$$

Sejam os elementos $x_1 \lambda_O^3, \lambda_O^2 \lambda_1$ em $N_1(BO_3)$. Temos:

$$J(x_1 \lambda_O^3) = x_1 \theta$$

$$J(\lambda_O^2 \lambda_1) = 1 + x_2 \theta^2 + [V(2,2)] \theta^4 + \dots$$

e, $J(\lambda_O^4) = 1$ para $\lambda_O^4 \in N_O(BO_4)$.

Portanto,

$$J(x_2 \lambda_1 + x_2 \lambda_O^2) = x_2 [V(2,0)] \theta^4 + \dots$$

$$J(x_1 \lambda_2) = x_1 [V(3,0)] \theta^4 + \dots$$

$$J(\lambda_O^2 \lambda_1 + x_2 \lambda_O^2 + \lambda_O^4) = [V(2,2)] \theta^4 + \dots$$

$$J(\lambda_1^2 + \lambda_O^4) = [V(2,0)]^2 \theta^4 + \dots$$

$$J(x_3 \lambda_O + \lambda_O \lambda_2 + \lambda_O^4) = [V(3,1)] \theta^4 + \dots$$

Conclusões:

- (a) $[RP(2) \times RP(2), id \times T_O]$ fixa $RP(2) \times RP(1) \cup RP(2)$
- (b) $[RP(1) \times RP(3), id \times T_O]$ fixa $RP(1) \times RP(2)$
- (c) $\Gamma^2 [RP(2), T_O]$ fixa $RP(1) \cup RP(2) \cup \text{pto.}$
- (d) $[RP(2) \times RP(2), T_O \times T_O]$ fixa $\mathbb{CP}(1) \cup \text{pto.}$ onde $\mathbb{CP}(1) = RP(1) \times RP(1)$

(e) $\Gamma [RP(3), T_0]$ fixa $RP(2) \cup RP(3) \cup \text{pto.}$

PROPOSIÇÃO 2.08. Se M^n é uma variedade fechada não bordo, então para $k \geq 1$ não existe variedade com involução (V^{n+k}, T) fixando $\eta^k \rightarrow M^n$, com η_k fibrado trivial.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\eta^k \rightarrow M^n$ é trivial, temos:

$$J(\eta^k \rightarrow M^n) = [M^n] \theta^n + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta.$$

Como $[M^n] \neq 0$, não existe (V^{n+k}, T) com conjunto de pontos fixos $\eta^k \rightarrow M^n$, pois caso contrário teríamos:

$$J(\eta^k \rightarrow M^n) = [V^{n+k}] \theta^{n+k} + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta.$$

(Observação: $k \geq 1$).

PROPOSIÇÃO 2.09. Para n ímpar, existe uma involução (M^{2n+1}, T) em uma variedade fechada com conjunto de pontos fixos $RP(n)$ e fibrado normal $\bigoplus_{l=1}^{n+1} \lambda_n$; e para n par não existe.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\tau \rightarrow RP(n)$ o fibrado tangente a $RP(n)$. A soma de Whitney $\tau \oplus 1_{\mathbb{R}}$ é isomorfa a soma de Whitney $\lambda_n \oplus \dots \oplus \lambda_n$ $((n+1)$ -vezes), onde λ_n é o fibrado linear canônico sobre $RP(n)$; isto é,

$$\tau \oplus 1_{\mathbb{R}} \simeq \lambda_n \oplus \dots \oplus \lambda_n \quad ((n+1)\text{-vezes}).$$

Considere a involução $[\mathbb{R}P(n) \times \mathbb{R}P(n), S]$, onde $S(x, y) = (y, x)$. O conjunto de pontos fixos desta involução é $\mathbb{R}P(n)$ com fibrado normal equivalente ao fibrado tangente a $\mathbb{R}P(n)$. Portanto,

$$J(\tau) = [\mathbb{R}P(n) \times \mathbb{R}P(n)] \theta^{2n} + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta.$$

Assim,

$$J(\lambda_n \oplus \dots \oplus \lambda_n) = J(\tau \oplus 1_{\mathbb{R}}) = J(\tau) = [\mathbb{R}P(n) \times \mathbb{R}P(n)] \theta^{2n} + \dots$$

ou seja,

$$J\left(\bigoplus_{1}^{n+1} \lambda_n\right) = [\mathbb{R}P(n) \times \mathbb{R}P(n)] \theta^{2n} + \dots$$

e, portanto pelo lema (2.04) temos o resultado.

II - 2. INTERPRETAÇÃO ALGÉBRICA DO RESULTADO DE ALEXANDER

Em [1] Alexander exhibe uma N_* -base da N_* -álgebra $I_*(\mathbb{Z}_2)$ usando certos elementos de $I_*(\mathbb{Z}_2)$ e o operador Γ . (Veja 1.10). Nesta secção vamos obter este resultado de um modo diferente.

Seja a involução T_0 em $\mathbb{R}P(n)$ definida por

$$T_0 : (z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto (-z_0, z_1, \dots, z_n)$$

tendo como conjunto de pontos fixos $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \rightarrow \mathbb{RP}(0)) \cup (\lambda \rightarrow \mathbb{RP}(n-1))$. Assim podemos escrever $[\mathbb{RP}(n), T_0] = \alpha_n + \alpha_1^n$ em $M_n(\mathbb{Z}_2)$, onde $\alpha_n = [\mathbb{RP}(n-1), \lambda]$. Portanto, $\alpha_n = [\mathbb{RP}(n), T_0] + \alpha_1^n$. Sendo a álgebra graduada $M_*(\mathbb{Z}_2)$ uma álgebra polinomial sobre N_* gerada pelos elementos $\alpha_n \in M_n(\mathbb{Z}_2)$, para $n > 1$ (veja 1.08), temos que os elementos $[\mathbb{RP}(n), T_0]$ para $n \geq 2$, junto com $\alpha_1 = \lambda$, formam outro sistema de geradores polinomiais de $M_*(\mathbb{Z}_2)$. Vamos denotar por $\mathbb{Q}$ a subálgebra polinomial de $I_*(\mathbb{Z}_2)$ gerada por $[\mathbb{RP}(n), T_0]$, e $\mathbb{Q}_m$ a intersecção $\mathbb{Q} \cap I_m(\mathbb{Z}_2)$. Assim, $M_*(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Q}[\lambda]$.

Pelo Lema (2.03), o N_* -módulo $I_m(\mathbb{Z}_2)$ consiste dos polinômios P em λ sobre $\mathbb{Q}$ para os quais $J(P)$ está no ideal gerado por θ^m .

LEMA 2.10. Dado qualquer elemento $y \in M_m(\mathbb{Z}_2)$, existe um único polinômio F em $N_*[\lambda]$, sem termo constante, tal que $y + F$ pertence a $I_m(\mathbb{Z}_2)$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $M_*(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Q}[\lambda]$, temos que

$$y = q_0 + q_1\lambda + q_2\lambda^2 + \dots + q_{m-1}\lambda^{m-1} + q_m\lambda^m,$$

onde $q_j \in \mathbb{Q}_{m-j}$. Assim, como $J(\lambda) = 1$ e J é estável, temos

que

$$\begin{aligned} J(y) &= J(q_0) + J(q_1 \epsilon) + J(q_2 \epsilon^2) + \dots + J(q_{m-1} \epsilon^{m-1}) + J(q_m \epsilon^m) \\ &= J(q_0) + J(q_1) + J(q_2) + \dots + J(q_{m-1}) + J(q_m). \end{aligned}$$

Como $q_j \in \Phi_{m-j} = I_{m-j}(\mathbb{Z}_2) \cap \Phi$, então

$$\begin{aligned} J(q_j) &= [W_j^{m-j}] \theta^{m-j} + [W_j^{m-j+1}] \theta^{m-j+1} + \dots + [W_j^{m-1}] \theta^{m-1} + \\ &\quad + [W_j^m] \theta^m + \text{termos com potencias maiores de } \theta, \end{aligned}$$

onde $[W_j^{m-j}] \in N_{m-j}$. Assim,

$$\begin{aligned} J(y) &= [W_m^0] + ([W_m^1] + [W_{m-1}^1]) \theta + \dots + \left(\sum_{k=0}^j [W_{m-k}^j] \theta^j + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{k=0}^{m-1} [W_{m-k}^{m-1}] \right) \theta^{m-1} + \left(\sum_{k=0}^m [W_{m-k}^m] \right) \theta^m + \right. \\ &\quad \left. + \text{termos com pot. } > \text{ em } \theta. \right. \end{aligned}$$

Seja

$$\begin{aligned} F &= [W_m^0] \epsilon^m + ([W_m^1] + [W_{m-1}^1]) \epsilon^{m-1} + \dots + \left(\sum_{k=0}^j [W_{m-k}^j] \right) \epsilon^{m-j} + \\ &\quad + \dots + \left(\sum_{k=0}^{m-1} [W_{m-k}^{m-1}] \right) \epsilon \end{aligned}$$

pertencente a $N_*[\lambda]$. Então, temos:

$$J(y + F) = \left(\sum_{k=0}^m [w_{m-k}^m] \right) \theta^m + \text{termos com potências } > \text{ em } \theta,$$

ou seja, $J(y + F)$ está no ideal gerado por θ^m . Portanto, por (2.03), $y + F$ pertence a $I_m(\mathbb{Z}_2)$.

Seja a aumentação $\epsilon : \mathbb{Q} \rightarrow N_*$. Então, temos o seguinte lema:

LEMA 2.11. Seja $q_j \in I_{m-j}(\mathbb{Z}_2)$, para $0 \leq j \leq m$. Então

$$\Gamma q_j \in I_{m-j+1}(\mathbb{Z}_2),$$

onde denotamos por Γq_j o elemento $\lambda(q_j + [w_j^{m-j}])$, sendo $[w_j^{m-j}] = \epsilon(q_j)$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\lambda q_j \in M_{m-j+1}(\mathbb{Z}_2)$, existe um único elemento F em $N_*[\lambda]$, sem termo constante, tal que $\lambda q_j + F$ pertence a $I_{m-j+1}(\mathbb{Z}_2)$. Vamos verificar que $F = [w_j^{m-j}] \theta^{m-j}$. Sabemos que

$$J(q_j) = [w_j^{m-j}] \theta^{m-j} + [w_j^{m-j+1}] \theta^{m-j+1} + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta.$$

Assim,

$$J(\lambda q_j + [w_j^{m-j}] \lambda) = [w_j^{m-j+1}] \theta^{m-j+1} + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta.$$

Portanto, $J(\Gamma q_j)$ está no ideal gerado por θ^{m-j+1} , o que implica que Γq_j pertence a $I_{m-j+1}(\mathbb{Z}_2)$.

CONSEQUÊNCIA 2.12. Denotando por $\Gamma^2 q_j$ o elemento $\Gamma \Gamma q_j$, temos pelo lema acima, que $\Gamma^2 q_j \in I_{m-j+2}(\mathbb{Z}_2)$. Assim, sucessivamente, $\Gamma^n q_j = \Gamma^{n-1} \Gamma q_j$ pertence a $I_{m-j+n}(\mathbb{Z}_2)$, e $\Gamma^n q_j = \Gamma^n q_j + [w_j^{m-j}] \Gamma^n$.

LEMA 2.13. Sejam $q_j \in I_{m-j}(\mathbb{Z}_2) \cap \mathbb{Q}$, $j = 0, \dots, m$. Se

$$y = q_0 + q_1 i + q_2 i^2 + \dots + q_{m-1} i^{m-1} + q_m i^m$$

pertence a $I_m(\mathbb{Z}_2)$, então

$$y = q_0 + \Gamma q_1 + \Gamma^2 q_2 + \dots + \Gamma^m q_m$$

$$\text{e } \varepsilon(q_j) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Podemos escrever

$$\begin{aligned} y = & q_0 + \Gamma q_1 + \Gamma^2 q_2 + \dots + \Gamma^{m-1} q_{m-1} + \Gamma^m q_m + [w_1^{m-1}] i + \\ & + [w_2^{m-2}] i^2 + \dots + [w_{m-1}^1] i^{m-1} + [w_m^0] i^m, \end{aligned}$$

onde $[w_j^{m-j}] = \varepsilon(q_j)$. Como por hipótese $y \in I_m(\mathbb{Z}_2)$, e

$q_0, \Gamma q_1, \Gamma^2 q_2, \dots, \Gamma^m q_m$ pertencem a $I_m(\mathbb{Z}_2)$, devemos ter

$$\left(\sum_{j=1}^m [w_j^{m-j}] i^j \right) \in I_m(\mathbb{Z}_2).$$

Mas como,

$$J([w_j^{m-j}] i^j) = [w_j^{m-j}] i^{m-j} \quad \text{e} \quad m-j < m,$$

concluimos que w_j^{m-j} , $j = 1, \dots, m$, devem ser bordo. Assim,

$$\left(\sum_{j=1}^m [w_j^{m-j}] i^j \right) = 0.$$

Portanto,

$$y = q_0 + \Gamma q_1 + \Gamma^2 q_2 + \dots + \Gamma^m q_m.$$

Denotando por $\Phi_{m-j}^+ = \text{Ker}(\Phi_{m-j} \rightarrow N_{m-j})$, temos:

TEOREMA 2.14. $I_m(\mathbb{Z}_2)$ é a soma direta de Φ_m e os $\Gamma^n \Phi_{m-n}^+$ para $m \geq n > 0$, e Γ^n mergulha Φ_{m-n}^+ em $I_m(\mathbb{Z}_2)$.

TEOREMA 2.15. O N_* -módulo $I_*(\mathbb{Z}_2)$ é a soma direta de Φ e os N_* -submódulos $\Gamma^n \Phi^+$ para $n > 0$, e Γ^n mergulha Φ^+ em $I_*(\mathbb{Z}_2)$, onde $\Phi^+ = \text{Ker}(\Phi \rightarrow N_*)$.

III. OS IDEAIS I_n^k

Em seu trabalho, "Fixed sets of involutions" [7], Frank L. Capobianco calculou I_n^k , o conjunto de classes de cobordismo no grupo de cobordismo não orientado N_n que são representadas por uma n -variedade que é o conjunto de pontos fixos de uma $(n+k)$ -variedade fechada com involução diferenciável. Algumas propriedades de I_n^k são:

(a) I_n^k é um submódulo de N_n .

De fato, seja $[M^n]$ e $[N^n]$ em I_n^k . Então existem variedades com involução $[V^{n+k}, T_1]$ e $[W^{n+k}, T_2]$ tais que o conjunto de pontos fixos de T_1 é M^n , e o conjunto de pontos fixos de T_2 é N^n . Considerando $[V^{n+k} \cup W^{n+k}, T_1 \cup T_2]$ temos que o conjunto de pontos fixos de $T_1 \cup T_2$ é $M^n \cup N^n$. Assim $[M^n] + [N^n]$ pertence a I_n^k .

(b) $I_n^0 = N_n$.

É suficiente considerar para $[M^n]$ pertencente a N_n , a involução $[M^n, id]$. Portanto, o conjunto de pontos fixos é M^n , o que implica que $[M^n]$ pertence a I_n^0 .

(c) $I_*^k = \bigoplus_{n \geq 0} I_n^k$ é um ideal de N_* .

Seja $[M^n]$ em I_*^k . Então existe uma involução T em uma

$(n+k)$ -variedade fechada V^{n+k} , $[V^{n+k}, T]$, tal que M^n é o conjunto de pontos fixos. Para $[N^m] \in N_*$, consideramos a involução $[N^m \times V^{n+k}, \text{id} \times T]$. O conjunto de pontos fixos desta involução é $N^m \times M^n$. Assim, $[N^m \times M^n] = [N^m][M^n]$ pertence a I_*^k .

$$(d) \quad I_n^1 = (0).$$

Vamos supor $[M^n] \in I_n^1$. Então existe $\alpha = [V^{n+1}, T]$, isto é, uma $(n+1)$ -variedade fechada V^{n+1} com involução T , com conjunto de pontos fixos M^n e fibrado normal $\xi^1 \rightarrow M^n$ de dimensão 1. Assim, $j\alpha \in N_n(BO_1)$, onde $j : I_{n+1}(\mathbb{Z}_2) \rightarrow M_{n+1}(\mathbb{Z}_2)$ é o homomorfismo definido em (I. pág. 3). Denotando por x_{n-i} , um elemento $(n-i)$ -dimensional, gerador de N_* para $0 \leq i \leq n$ ($n \neq 2^r - 1$), temos que $N_n(BO_1)$ é gerado pelos elementos:

$$[x_{n-i}] \lambda_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

onde λ_i é o fibrado linear canônico sobre $RP(i)$. Sendo J o homomorfismo de Boardman, por (2.06) e (2.07) temos que:

$$J([x_{n-i}] \lambda_i) = [x_{n-i}] \theta^{n-i} + \sum_{j=0}^{\infty} [x_{n-i}] [V(i+1, j)] \theta^{n+j+1}, \quad 0 \leq i \leq n,$$

de onde concluímos que qualquer combinação das séries de potências formais $J([x_{n-i}] \lambda_i)$, $0 \leq i \leq n$, apresenta potência de θ menor que $n+1$. E como, para um elemento $\alpha \in I_{n+1}(\mathbb{Z}_2)$ temos

que $Jj\alpha$ pertence ao ideal gerado por θ^{n+1} , então não existe elemento, não bordo, em $I_{n+1}(\mathbb{Z}_2)$ com a imagem através de j em $N_n(BO_1)$. Portanto, $\alpha = 0$. Como $j(\alpha) = [\xi \rightarrow M] = 0$, temos por ([11], 17.2) que $[M^n] = 0$, e assim $I_n^1 = (0)$.

$$(e) \quad I_n^2 = N_n.$$

Em [7] Capobianco, utilizando o homomorfismo de Boardman e o Lema (2.04), demonstra este resultado, encontrando para cada n , não da forma $2^r - 1$, um elemento $\xi \rightarrow M^n$ em $N_n(BO_2)$, com M^n indecomponível, cuja imagem pelo homomorfismo de Boardman está no ideal gerado por θ^{n+2} , o que implica que a base M^n está em I_n^2 , concluindo portanto que $I_n^2 = N_n$.

Seja $\xi^k \rightarrow M^{n-k+1}$ um k -fibrado plano e $RP(\xi^k)$ o espaço total do espaço fibrado projetivo associado. Então, temos:

LEMA 3.01. I_n^k contém a classe de cobordismo de

$$RP(\xi^k) \cup M^{n-k+1} \times RP(k-1).$$

(Veja [7], 3.1).

LEMA 3.02. I_n^k contém uma classe de cobordismo indecomponível para cada $n \neq 2^r - 1$ e cada k tal que $4 \leq k \leq \alpha(n)$, onde $\alpha(n)$ denota o número de termos na expansão diádica de n . (Veja [7], 3.3).

IV. AÇÕES SEMI-LIVRES DE S^1

IV - 1. GRUPOS DE BORDISMO E HOMOMORFISMO DE SMITH

Recordamos que $SF_n(S^1)$ é o grupo de bordismo não orientado de ações semi-livres de S^1 em n -variedades fechadas e que $SF_*(S^1) = \bigoplus_{n \geq 0} SF_n(S^1)$ é um N_* -módulo graduado. Também temos os grupos de bordismo não orientado $N_n(S^1)$ de ações livres de S^1 em n -variedades fechadas, e a soma direta fraça $N_*(S^1) = \bigoplus_{n \geq 0} N_n(S^1)$ é um N_* -módulo.

Existe definido o homomorfismo de Smith

$$\Delta : N_*(S^1) \rightarrow N_*(S^1).$$

que é um homomorfismo de N_* -módulo de grau -2 . Suponha que (M^n, T) representa uma ação livre de S^1 em uma variedade fechada. Para N suficientemente grande existe uma única classe de homotopia equivariante de aplicações equivariantes

$$f : (M^n, T) \mapsto (S^{2N+3}, S^1).$$

Podemos assumir que f é transversa regular em $S^{2N+1} \subset S^{2N+3}$.
Tomamos

$$\Delta [M^n, T] = [f^{-1}(S^{2N+1}), T | f^{-1}(S^{2N+1})].$$

PROPOSIÇÃO 4.01. Se $\Delta[M^{2N+1}, T] = 0$ para $[M^{2N+1}, T] \in N_{2N+1}(S^1)$, então existe $[X^{2N}] \in N_{2N}$ única com $[M^{2N+1}, T] = [X^{2N}] [S^1, S^1]$.

LEMA 4.02. Se $[M^{2n+1}, T]$ é uma ação livre de S^1 em uma $(2n+1)$ -variedade fechada e se $W^{2n+1} \subset M^{2n+1}$ é uma subvariedade regular compacta tal que $W^{2n+1} \cup T(W^{2n+1}) = M^{2n+1}$ e $\partial W^{2n+1} = W^{2n+1} \cap T(W^{2n+1})$ então $\Delta[M^{2n+1}, T] = [\partial W^{2n+1}, T|_{\partial W^{2n+1}}]$.

Seja o pareamento

$$SF_*(S^1) \otimes_{N_*} N_*(S^1) \rightarrow N_*(S^1)$$

dado por: se $[V^m, \tau] \in SF_n(S^1)$ e $[M^n, T] \in N_n(S^1)$ então $(V^m \times M^n, \tau \times T)$ é também uma ação livre de S^1 e tomamos $[V^m, \tau] [M^n, T] = [V^m \times M^n, \tau \times T]$ para definir o pareamento.

LEMA 4.03. Se $\gamma \in SF_{2m}(S^1)$ e $\alpha \in N_{2n+1}(S^1)$ então

$$\Delta(\gamma\alpha) = \gamma\Delta(\alpha).$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja (M^{2n+1}, T) uma ação semi-livre de S^1 em uma $(2n+1)$ -variedade fechada. Então pelo lema anterior se $W^{2n+1} \subset M^{2n+1}$ é uma subvariedade regular compacta tal que $W \cup TW = M$ e $W \cap TW = \partial W$, então $\Delta : [M^{2n+1}, T] \mapsto [\partial W^{2n+1}, T|_{\partial W^{2n+1}}]$. Assim, como $V^{2m} \times W^{2n+1} \subset V^{2m} \times M^{2n+1}$, temos:

$$\begin{aligned}
(V \times W) \cup T'(V \times W) &= (V \times W) \cup (\tau V \times TW) \\
&= (V \times W) \cup (V \times TW) \\
&= V \times (W \cup TW) \\
&= V \times M
\end{aligned}$$

onde $T' = (\tau, T)$, $\gamma = [V, \tau]$, e $\alpha = [M, T]$. E,

$$\begin{aligned}
\partial(V \times W) &= (\partial W \times W) \cup (V \times \partial W) \\
&= V \times \partial W \\
&= V \times (W \cap TW) \\
&= (V \times W) \cap (V \times TW) \\
&= (V \times W) \cap (\tau V \times TW).
\end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta[V \times M, \tau \times T] &= [\partial(V \times W), \tau \times T | \partial(V \times W)] \\
&= [V \times \partial W, \tau \times T | V \times \partial W] \\
&= [V, \tau][\partial W, T | \partial W]
\end{aligned}$$

ou seja, $\Delta(\gamma\alpha) = \gamma\Delta(\alpha)$.

Agora, seja $\mathcal{B}_n(S^1)$ o grupo de bordismo de ações semi-livres de S^1 em n -variedades com bordo que é livre no bordo.

Temos definidos os seguintes homomorfismos de N_* -módulos:

$$j : SF_n(S^1) \rightarrow \mathcal{B}_n(S^1)$$

que associa $[M^n, T]$ a $[\mathcal{M}^n, T]$, uma vez que $\partial M^n = \emptyset$, e também temos:

$$\partial : \mathcal{B}_n(S^1) \rightarrow N_n(S^1)$$

que associa $[V^n, T]$ a $[\partial V^n, T | \partial V^n]$.

TEOREMA 4.04. A sequência

$$0 \longrightarrow SF_n(S^1) \xrightarrow{j} \mathcal{B}_n(S^1) \xrightarrow{\partial} N_{n-1}(S^1) \longrightarrow 0$$

é exata e se fatora. (Veja [16], 8.3).

Denotemos por $M_n(S^1) = \bigoplus_{k \geq 0}^{[n/2]} N_{n-2k}(BU_k)$, onde BU_k é o espaço classificante para os fibrados k -dimensionais unitários. E denotemos $M_*(S^1) = \bigoplus_{n \geq 0} M_n(S^1)$.

TEOREMA 4.05. Existe um isomorfismo

$$F : \mathcal{B}_n(S^1) \rightarrow \bigoplus_{k \geq 0}^{[n/2]} N_{n-2k}(BU_k)$$

dado por: a $[M^n, T]$ associamos $\sum_k [v^k \rightarrow F^{n-2k}]$, onde F^{n-2k} é a componente de dimensão $n-2k$ do conjunto de pontos fixos e v^k é o correspondente fibrado normal.

TEOREMA 4.06. $M_*(S^1)$ é uma álgebra polinomial graduada sobre N_* , cujos geradores são as classes $[\lambda \rightarrow \mathbb{CP}(n)]$ com $n \geq 0$, isto é, os fibrados lineares canônicos sobre $\mathbb{CP}(n)$, com $n \geq 0$. (Veja [16], 8.7).

TEOREMA 4.07. $N_*(S^1)$ é um N_* -módulo com base dada pelos elementos $\{[s^{2n+1}, s^1]\}_{n \geq 0}$.

OBSERVAÇÃO 4.08. Um elemento qualquer de $N_{2n+1}(S^1)$ pode ser escrito de maneira única como

$$\sum_{r=0}^n [x^{2r}] [s^{2(n-r)+1}, s^1]$$

enquanto que um elemento arbitrário de $N_{2n}(S^1)$ pode ser escrito univocamente como

$$\sum_{r=0}^{n-1} [x^{2r+1}] [s^{2(n-r)-1}, s^1].$$

Seja $\lambda \in M_2(S^1)$ a ação semi-livre de S^1 no disco unitário dada pela multiplicação escalar, então $\partial(\lambda) = [s^1, s^1]$ e

LEMA 4.09. O diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 M_{2k+2}(S^1) & \xrightarrow{\partial} & N_{2k+1}(S^1) \\
 \uparrow \iota & & \downarrow \\
 M_{2k}(S^1) & \xrightarrow{\partial} & N_{2k-1}(S^1)
 \end{array}$$

é comutativo.

IV - 2. PRODUTO EM $\bigoplus_{n \geq 0} N_{2n+1}(S^1)$

Definimos um produto em $\bigoplus_{n \geq 0} N_{2n+1}(S^1)$ como segue: Suponha que $\alpha \in N_{2n+1}(S^1)$ e $\beta \in N_{2m+1}(S^1)$. Sejam $\alpha' \in M_{2n+2}(S^1)$ e $\beta' \in M_{2m+2}(S^1)$ tais que $\partial(\alpha') = \alpha$ e $\partial(\beta') = \beta$. Seja $K = \max(m, n)$ e $k = \min(m, n)$. Definimos

$$\alpha\beta = \Delta^{K+1}(\alpha', \beta') \in N_{2k+1}(S^1).$$

No caso $n=m$, isto define uma estrutura de anel com unidade em $N_{2n+1}(S^1)$, com unidade o elemento $[S^{2n+1}, S^1]$.

O produto $\alpha\beta$ esta bem definido pois: suponha que $\partial(\alpha'') = \alpha$. Temos $\partial(\alpha'' + \alpha') = \partial(\alpha'') + \partial(\alpha') = 0$. Portanto, existe um único $\gamma \in SF_{2n+2}(S^1)$ tal que $\alpha'' = \alpha' + \gamma$. Assim,

$$\begin{aligned}\partial(\alpha''\beta') &= \partial((\alpha' + \gamma)\beta') = \partial(\alpha'\beta' + \gamma\beta') = \partial(\alpha'\beta') + \partial(\gamma\beta') = \\ &= \partial(\alpha'\beta') + \gamma\partial(\beta') = \partial(\alpha'\beta') + \gamma\beta.\end{aligned}$$

Portanto, $\partial(\alpha''\beta') = \partial(\alpha'\beta') + \gamma\beta$. Como $K \geq n$, temos $\Delta^{K+1}(\gamma\beta) = \gamma\Delta^{K+1}(\beta) = 0$. Então $\Delta^{K+1}(\gamma\beta) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\Delta^{K+1}\partial(\alpha''\beta') &= \Delta^{K+1}(\partial(\alpha'\beta') + \gamma\beta) = \Delta^{K+1}\partial(\alpha'\beta') + \\ &+ \Delta^{K+1}(\gamma\beta) = \Delta^{K+1}\partial(\alpha'\beta').\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta^{K+1}\partial(\alpha''\beta') = \Delta^{K+1}\partial(\alpha'\beta')$, o que demonstra que o produto está bem definido. (Analogamente, verifica-se quando $\partial(\beta'') = \beta$).

LEMA 4.10. Se $n < m$ então $\alpha\Delta\beta = \alpha\beta$ e se $n \geq m$ então $\Delta(\alpha\beta) = \alpha\Delta\beta$.

DEMONSTRAÇÃO: Considere primeiro $n < m$ e escolha $\beta'' \in M_{2m}(S^1)$ com $\partial(\beta'') = \Delta\beta$. Assim, $\Delta(\partial(\beta'') + \beta) = 0$. Portanto, existe por (4.01) $[v^{2n}] \in N_{2m}$ única tal que:

$$\partial(\beta''\iota) + \beta = [v^{2m}] [S^1, S^1].$$

Então, $\partial(\beta''\iota) + [v^{2m}] [S^1, S^1] = \beta$. Como $\partial(\iota) = [S^1, S^1]$, temos

$\partial(\beta''\dot{\iota} + [V^{2m}]\dot{\iota}) = \beta$. Assim,

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \Delta^{m+1}\partial(\alpha'\beta''\dot{\iota} + [V^{2m}]\alpha'\dot{\iota}) \\ &= \Delta^{m+1}\partial(\alpha'\beta''\dot{\iota}) + \Delta^{m+1}\partial([V^{2m}]\alpha'\dot{\iota}) \\ &= \Delta^m\partial(\alpha'\beta'') + [V^{2m}]\Delta^m\partial(\alpha') \\ &= \alpha\Delta\beta + [V^{2m}]\Delta^m\alpha.\end{aligned}$$

Como $n < m$ e $\alpha \in N_{2n+1}(S^1)$ temos que $\Delta^m\alpha = 0$. Portanto, $\alpha\beta = \alpha\Delta\beta$.

Agora, no caso $n \geq m$, temos $\partial(\beta'') = \Delta\beta$. Então $\Delta(\partial(\beta''\dot{\iota} + \beta)) = 0$. Portanto, existe $[V^{2m}] \in N_{2m}$ com $\partial(\beta''\dot{\iota}) + [V^{2m}][S^1, S^1] = \beta$. Como $\partial(\dot{\iota}) = [S^1, S^1]$ temos $\partial(\beta''\dot{\iota} + [V^{2m}]\dot{\iota}) = \beta$. Assim,

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha\beta) &= \Delta^{n+2}\partial(\alpha'\beta''\dot{\iota} + [V^{2m}]\alpha'\dot{\iota}) \\ &= \Delta^{n+1}\partial(\alpha'\beta'' + [V^{2m}]\alpha') \\ &= \Delta^{n+1}\partial(\alpha'\beta'') + [V^{2m}]\Delta^{n+1}\partial(\alpha') \\ &= \alpha\Delta\beta + [V^{2m}]\Delta^{n+1}\alpha.\end{aligned}$$

Como $n \geq m$ e $\alpha \in N_{2n+1}(S^1)$ temos que $\Delta^{n+1}\alpha = 0$. Portanto, $\Delta(\alpha\beta) = \alpha\Delta\beta$.

LEMA 4.11. Para qualquer par α, β temos

$$\Delta(\alpha\beta) = \Delta\alpha\Delta\beta.$$

DEMONSTRAÇÃO. Supor $n < m$. Então $\alpha\beta = \alpha\Delta\beta$ por (4.10). Assim, $m-1 \geq n$ o que acarreta $\Delta(\alpha\Delta\beta) = \Delta\alpha\Delta\beta$. Portanto, $\Delta(\alpha\beta) = \Delta\alpha\Delta\beta$. Se $n = m$, $\Delta(\alpha\beta) = \alpha\Delta\beta$ e $\Delta\alpha\Delta\beta = \alpha\Delta\beta$. Portanto, $\Delta(\alpha\beta) = \Delta\alpha\Delta\beta$.

LEMA 4.12. Se α, β e $\delta \in N_{2n+1}(S^1)$ então $\alpha(\beta\delta) = (\alpha\beta)\delta$.

DEMONSTRAÇÃO. Escolhemos α', β' e $\delta' \in M_{2n+2}(S^1)$, tais que $\partial(\alpha') = \alpha$, $\partial(\beta') = \beta$ e $\partial(\delta') = \delta$. Então

$$\alpha(\beta\delta) = \alpha\Delta^{n+1}\partial(\beta'\delta')$$

$$= \alpha\Delta(\Delta^n\partial(\beta'\delta'))$$

$$= \alpha\Delta^n\partial(\beta'\delta') \quad (\text{por (4.10)}).$$

E assim, sucessivamente, temos que $\alpha(\beta\delta) = \alpha\partial(\beta'\delta')$. Por definição,

$$\alpha\partial(\beta'\delta') = \Delta^{2n+1+1}\partial(\alpha'(\beta'\delta'))$$

$$= \Delta^{2n+2}\partial((\alpha'\beta')\delta')$$

$$= \partial(\alpha'\beta')\delta$$

$$= \Delta^{n+1}\partial(\alpha'\beta')\delta$$

$$= (\alpha\beta)\delta.$$

TEOREMA 4.13. O produto $\alpha\beta$ define uma estrutura de anel em $\bigoplus_{n \geq 0} N_{2n+1}(S^1)$.

DEMONSTRAÇÃO. Devemos verificar a lei associativa em geral para $\alpha \in N_{2n+1}(S^1)$, $\beta \in N_{2m+1}(S^1)$ e $\delta \in N_{2p+1}(S^1)$. Podemos assumir $m \leq p$, então por (4.10), temos:

$$\alpha(\beta\delta) = \alpha(\beta\Delta^{p-m}\delta),$$

pois:

$$\begin{aligned} \beta\Delta^{p-m}\delta &= \beta\Delta(\Delta^{p-m-1}\delta) \\ &= \beta\Delta^{p-m-1}\delta \\ &= \beta\Delta(\Delta^{p-m-2}\delta) \\ &= \beta\Delta^{p-m-2}\delta \\ &= \dots = \beta\delta. \end{aligned}$$

CASO I: Se $n \leq m$, então:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta\delta) &= \alpha\Delta^{m-n}(\beta\delta) \\ &= \alpha\Delta^{m-n}(\beta\Delta^{p-m}\delta) \\ &= \alpha(\Delta^{m-n}\beta\Delta^{m-n}\Delta^{p-m}\delta) \\ &= \alpha(\Delta^{m-n}\beta\Delta^{p-n}\delta) \\ &= (\alpha\Delta^{m-n}\beta)\Delta^{p-n}\delta \\ &= (\alpha\beta)\delta. \end{aligned}$$

CASO II: Se $n > m$, então

$$\begin{aligned}
 \alpha(\beta\delta) &= \Delta\alpha(\beta\delta) \\
 &= (\Delta^{n-m}\alpha)(\beta\alpha) \\
 &= (\Delta^{n-m}\alpha)(\beta\Delta^{p-m}\delta) \\
 &= (\Delta^{n-m}\alpha\beta) \\
 &= \Delta^{p-n}\delta \\
 &= (\alpha\beta)\delta.
 \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO. Como $\partial(\iota^{m+1}) = [S^{2m+1}, S^1]$ temos que para $\alpha \in N_{2n+1}(S^1)$, $\alpha[S^{2m+1}, S^1] = \alpha$ para $n \leq m$ desde que $\Delta^{m+1}\partial(\alpha'\iota^{m+1}) = \partial(\alpha') = \alpha$. Se $n > m$, temos $\alpha[S^{2m+1}, S^1] = \Delta^{n+1}\partial(\alpha'\iota^{m+1}) = \Delta^{n-m}\alpha$.

Em particular, $N_{2n+1}(S^1)$ é um subanel de $\bigoplus_{n \geq 0} N_{2n+1}(S^1)$ com unidade $[S^{2n+1}, S^1]$, e

$$\Delta : N_{2n+1}(S^1) \rightarrow N_{2n-1}(S^1)$$

é um homomorfismo de anel.

IV - 3. O $\bar{J}$ -HOMOMORFISMO ESTÁVEL DE BORDISMO

Introduzimos o anel

$$R = \varinjlim (N_{2n-1}(S^1) \xleftarrow{\Delta} N_{2n+1}(S^1)).$$

Um elemento em R é uma sequência $\{\alpha_n\}_0^\infty$ com $\alpha_n \in N_{2n+1}(S^1)$ e $\Delta(\alpha_n) = \alpha_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

Definimos $\bar{J} : M_*(S^1) \rightarrow R$, onde $M_*(S^1) = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{j=0}^k N_{2k-2j}(BU_j)$, como segue:

Para $A \in M_{2k}(S^1)$, seja $\bar{J}_n(A) = \Delta^{k \partial}(A \iota^{n+1})$. Notamos que $\bar{J}_n(A) \in N_{2n+1}(S^1)$. Como $\Delta \bar{J}_n(A) = \Delta^{k+1 \partial}(A \iota^{n+1}) = \Delta^{k \partial}(A \iota^n) = \bar{J}_{n-1}(A)$, a sequência $\{\bar{J}_n(A)\}_0^\infty \in R$ e tomamos:

$$\bar{J}(A) = \{\bar{J}_n(A)\}_0^\infty.$$

Notamos que se $k \geq n+1$ então $\bar{J}_n(A) = \Delta^{k-n-1 \partial}(A)$.

O homomorfismo $\bar{J}$ é estável com relação a multiplicação por ι , isto é, $\bar{J}(A \iota) = \bar{J}(A)$.

TEOREMA 4.14. O homomorfismo estável

$$\bar{J} : \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{j=0}^k N_{2k-2j}(BU_j) \rightarrow R$$

é multiplicativo.

DEMONSTRAÇÃO: Como $\bar{J}$ é estável é preciso somente considerar pares $A, B \in M_{2k}(S^1)$ e componentes $0 \leq n < k$. Neste caso,

$$\begin{aligned}\bar{J}_n(A)\bar{J}_n(B) &= \Delta^{k-n-1}\partial(A)\Delta^{k-n-1}\partial(B) \\ &= \Delta^{k-n-1}(\partial(A)\partial(B)).\end{aligned}$$

Por definição,

$$\begin{aligned}\partial(A)\partial(B) &= \Delta^k\partial(AB) \\ &= \Delta^{2k}\partial(AB\iota^k) \\ &= \Delta^{2k}\partial(AB\iota^{n-1+1}) \\ &= \bar{J}_{k-1}(AB).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\bar{J}_n(A)\bar{J}_n(B) &= \Delta^{k-n-1}(\partial(A)\partial(B)) \\ &= \Delta^{k-n-1}(\bar{J}_{k-1}(AB)) \\ &= \bar{J}_n(AB).\end{aligned}$$

Tomando o anel $M_*(S^1) = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{j=0}^k N_{2k-2j}(BU_j)$, vamos considerar o anel quociente F obtido da seguinte forma: este anel F é obtido fatorando o ideal de todos os elementos da forma $A + A\iota$ onde $A \in M_*(S^1)$.

Existe, de forma natural, um homomorfismo de anel induzido $\bar{J} : F \rightarrow R$.

A ESTRUTURA DE R

Desde que $N_*(S^1)$ é um N_* -módulo com base dada pelos elementos $\{[S^{2n+1}, S^1]\}_{n \geq 0}$ podemos descrever o produto em $N_{2n+1}(S^1)$ diretamente:

Se

$$\alpha = \sum_{r=0}^n [X^{2r}] [S^{2(n-r)+1}, S^1], \quad e$$

$$\beta = \sum_{r=0}^n [Y^{2r}] [S^{2(n-r)+1}, S^1],$$

Sejam

$$\alpha' = \sum_{r=0}^n [X^{2r}] i^{n-r+1}, \quad e$$

$$\beta' = \sum_{r=0}^n [Y^{2r}] i^{n-r+1},$$

tais que

$$\alpha'\beta' = \sum_{r=0}^n \left(\sum_{r+s=\ell} [X^{2r}] [Y^{2s}] \right) i^{2(n+1)-\ell}, \quad e$$

$$\alpha\beta = \Delta^{n+1} \partial(\alpha'\beta') = \sum_{r=0}^n \left(\sum_{r+s=\ell} [X^{2r}] [Y^{2s}] \right) [S^{2n+1-\ell}, S^1].$$

Podemos usar isto para identificar R com o anel $N_*^{(2n)}(\theta)$ de séries de potências formais sobre o anel graduado $N_*^{(2n)}$. A

$\sum_{r=0}^{\infty} [x^{2r}] \theta^r$ associamos a sequência $(\alpha_n)_0^{\infty}$ onde

$$\alpha_n = \sum_{r=0}^n [x^{2r}] [s^{2(n-r)+1}, s^1].$$

Temos $\Delta \alpha_{n+1} = \alpha_n$, e a fórmula para $\alpha_n \beta_n$ é justamente a regra para multiplicar séries de potências formais. Assim, temos:

$$\bar{J} : F \rightarrow N(\theta).$$

LEMA 4.15. A imagem de

$$SF_{2m}(S^1) \rightarrow M_{2m}(S^1) \rightarrow F \rightarrow N(\theta)$$

está no ideal gerado por θ^m , e

$$\bar{J}([M^{2m}, T]) = [M^{2m}] \theta^m + \text{termos em pot. } > \text{ de } \theta.$$

DEMONSTRAÇÃO. Dado (M^{2m}, T) , seja $[\xi \rightarrow F] \in M_{2m}(S^1)$ o fibrado normal ao conjunto de pontos fixos, então

$$\partial([\xi \rightarrow F]) = 0 \in N_{2m-1}(S^1),$$

assim

$$\bar{J}_n([\xi \rightarrow F]) = \Delta^{m-n-1} \partial([\xi \rightarrow F]) = 0 \quad \text{para } 0 \leq n \leq m-1,$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{J}_m([\xi \rightarrow F]) &= \Delta^m \partial([\xi \rightarrow F] \lambda^{m+1}) \in N_{2m+1}(S^1) \\
&= \partial([\xi \rightarrow F] \lambda) \\
&= [S(\xi \oplus 1_{\mathbb{C}}), S^1].
\end{aligned}$$

Como $\Delta([S(\xi \oplus 1_{\mathbb{C}}), S^1]) = 0$, então por (4.01) existe uma única $[X^{2m}]$ tal que $[S(\xi \oplus 1_{\mathbb{C}}), S^1] = [X^{2m}] [S^1, S^1]$. Mas, por outro lado, $[CP(\xi \oplus 1_{\mathbb{C}})] = [M^{2m}]$. Portanto, $[S(\xi \oplus 1_{\mathbb{C}}), S^1] = [M^{2m}] [S^1, S^1]$. Assim,

$$\bar{J}([\xi \rightarrow F]) = [M^{2m}] \theta^m + \text{termos em pot. } > \text{ de } \theta.$$

LEMA 4.16. Seja $\xi \rightarrow F \in M_{2m}(S^1)$. Se

$$\bar{J}([\xi \rightarrow F]) = \beta \theta^m + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta,$$

então existe uma variedade com ação semi-livre de S^1 (M^{2m}, T) tal que β está na classe de M^{2m} e $\xi \rightarrow F$ é o fibrado normal ao conjunto de pontos fixos de (M^{2m}, T) .

DEMONSTRAÇÃO. Temos

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{J}_{m-1}([\xi \rightarrow F]) \\
&= \Delta^{m-m+1-1} \partial([\xi \rightarrow F]) \\
&= \partial([\xi \rightarrow F]).
\end{aligned}$$

Mas, $\partial([\xi \rightarrow F]) = [S(\xi), S^1]$. Portanto, $[S(\xi), S^1] = 0$. Suponha que $(S(\xi), S^1)$ é bordo de $(V^{2m}, \tau) \in N_{2m}(S^1)$. Seja

$$M^{2m} = (D(\xi) \cup V^{2m}) / S(\xi) \equiv \partial V^{2m}$$

e $T = S \cup \tau$. O fibrado normal ao conjunto de pontos fixos de (M^{2m}, T) é $\xi \rightarrow F$, e portanto $\beta = [M^{2m}]$.

LEMA 4.17. Seja $1_{\mathbb{C}} \in M_2(S^1)$. Temos $\bar{J}(1_{\mathbb{C}}) = 1$.

DEMONSTRAÇÃO.

$$\begin{aligned} \bar{J}_n(1_{\mathbb{C}}) &= \Delta \partial(1_{\mathbb{C}} i^n) \\ &= \Delta \partial(i^{n+2}) \\ &= \Delta[S^{2n+3}, S^1] \\ &= [S^{2n+1}, S^1] \in N_{2n+1}(S^1), \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{J}(1_{\mathbb{C}}) = 1.$$

LEMA 4.18. Sejam $[V^{2s}] \in N_{2s}$ e $A \in M_{2k}$. Então

$$\bar{J}([V^{2s}]A) = [V^{2s}] \theta^s \bar{J}(A).$$

DEMONSTRAÇÃO.

$$\begin{aligned}\bar{J}_n([V^{2s}]A) &= \Delta^{s+k} \partial([V^{2s}]A\epsilon^{n+1}) \\ &= \Delta^{s+k} [V^{2s}] \partial(A\epsilon^{n+1}) \\ &= [V^{2s}] \Delta^{s+k} \partial(A\epsilon^{n+1}).\end{aligned}$$

Como $\Delta^{s+k} \partial(A\epsilon^{n+1}) \in N_{2n+1-2s}(S^1)$, e $(2(n-s)+1)$ é ímpar, temos:

$$\Delta^{s+k} \partial(A\epsilon^{n+1}) = \sum_{r=0}^{n-s} [X^{2r}] [S^{2(n-s-r)+1}, S^1].$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\bar{J}_n([V^{2s}]A) &= [V^{2s}] \sum_{r=0}^{n-s} [X^{2r}] [S^{2(n-s-r)+1}, S^1] \\ &= \sum_{r=0}^{n-s} [X^{2r}] [V^{2s}] [S^{2(n-s-r)+1}, S^1].\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\bar{J}([V^{2s}]A) &= \sum_{r=0}^{\infty} [X^{2r}] [V^{2s}] \theta^{s+r} \\ &= [V^{2s}] \theta^s \sum_{r=0}^{\infty} [X^{2r}] \theta^r \\ &= [V^{2s}] \theta^s \bar{J}(A).\end{aligned}$$

No que segue, vamos definir o operador

$$K : SF_*(S^1) \rightarrow SF_*(S^1).$$

Seja (M^n, T) uma ação semi-livre de S^1 . Para definir $K[M^n, T]$ procedemos da seguinte forma: consideramos as seguintes ações de S^1 em $D^2 \times M^n$:

$$T_1 : (t, (z, m)) \longmapsto (tz, m)$$

$$T_2 : (t, (z, m)) \longmapsto (tz, T(t, m)).$$

Restringindo a $S^1 \times M^n$ obtemos as ações induzidas $(S^1 \times M^n, T_1)$ e $(S^1 \times M^n, T_2)$, que são equivariantemente difeomorfas por

$$\varphi : (S^1 \times M^n, T_1) \rightarrow (S^1 \times M^n, T_2)$$

$$(s, x) \longmapsto (s, T(s, x)).$$

Tomando a união disjunta $(D^2 \times M^n, T_1) \cup (D^2 \times M^n, T_2)$, construímos M^{n+2} uma variedade fechada, e uma ação τ_1 de S^1 em M^{n+2} , usando a identificação de $(S^1 \times M^n, T_1)$ com $(S^1 \times M^n, T_2)$ através de φ .

$$\text{Definimos } K[M^n, T] = [M^{n+2}, \tau_1].$$

Para analisar o conjunto de pontos fixos F_1 de τ_1 observamos que $F_1 = \text{Fix}(T) \cup M^n$, onde o fibrado normal de $\text{Fix}(T)$ é

$\eta \oplus 1_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Fix}(T)$, onde η é o fibrado normal a $\text{Fix}(T)$ em M^n , e o fibrado normal a M^n é um fibrado linear complexo trivial.

Por um processo indutivo podemos associar a (M^n, T) uma sequência de ações semi-livres de S^1 em variedades fechadas $(V(n, k), \tau_k)$. Tomando $[V(n, 0), \tau_0] = [M^n, T]$ e $[V(n, 1), \tau_1] = K[M^n, T]$. A partir de $(V(n, 1), \tau_1)$ obtemos $(V(n, 2), \tau_2)$, aplicando a construção acima a $(V(n, 1), \tau_1)$. Assim aplicando, sucessivamente, a construção acima k vezes obtemos $(V(n, k), \tau_k)$ com conjunto de pontos fixos

$$F_k = \text{Fix}(T) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} V(n, j) \right).$$

Além disso, $\eta_k|_{\text{Fix}(T)} = \eta \oplus 1_{\mathbb{C}}^k \rightarrow \text{Fix}(T)$, onde $\eta \rightarrow \text{Fix}(T)$ é o fibrado normal original a $\text{Fix}(T)$ em M^n , e $\eta_k|_{V(n, j)}$ é um $(k - j)$ -fibrado trivial.

LEMA 4.19. Se $\eta \rightarrow \text{Fix}(T)$ é o fibrado normal ao conjunto de pontos fixos de (M^n, T) , então

$$[V(n, k)] = [\mathbb{C}P(\eta \oplus 1_{\mathbb{C}}^{k+1})] + \sum_{j=0}^{k-1} [\mathbb{C}P(k - j)][V(n, j)].$$

LEMA 4.20. Seja λ_n o fibrado linear complexo canônico sobre $\mathbb{C}P(n)$. Então

$$\bar{J}(\lambda_n) = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} [V(n + 1, i)] \theta^{n+i+1}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja T_0 uma ação semi-livre de S^1 definida em $\mathbb{CP}(n+1)$ aplicando

$$[z_0, z_1, \dots, z_n] \xrightarrow{T_0} [sz_0, z_1, \dots, z_{n+1}]$$

onde $s \in S^1$. O fibrado normal ao conjunto de pontos fixos de $[\mathbb{CP}(n+1), T_0]$ é

$$(l_{\mathbb{C}}^{(n+1)} \rightarrow \mathbb{CP}(0)) \cup (\lambda \rightarrow \mathbb{CP}(n)),$$

onde λ é o fibrado linear complexo canônico. Vamos considerar as variedades com ação semi-livre de S^1 , $[V(n+1, k), \tau_k]$, onde $[V(n+1, 0), \tau_0] = [\mathbb{CP}(n+1), T_0]$. O conjunto de pontos fixos de $[V(n+1, k), \tau_k]$ é:

$$[v \oplus l_{\mathbb{C}}^k \rightarrow F] + [l_{\mathbb{C}}^k \rightarrow V(n+1, 0)] + \\ + [l_{\mathbb{C}}^{k-1} \rightarrow V(n+1, 1)] + \dots + [l_{\mathbb{C}} \rightarrow V(n+1, k-1)]$$

onde $v \rightarrow F$ é o fibrado

$$(l_{\mathbb{C}}^{(n+1)} \rightarrow \mathbb{CP}(0)) \cup (\lambda \rightarrow \mathbb{CP}(n)).$$

Fazendo $k = 2$ temos:

O conjunto de pontos fixos de $[V(n+1, 2), \tau_2]$ é:

$$[v \oplus 1_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow F] + [1_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow v(n+1,0)] + [1_{\mathbb{C}} \rightarrow v(n+1,1)].$$

Como

$$\bar{J}[v(n+1,2), \tau_2] = [v(n+1,2)]\theta^{n+3} + \text{termos em pot. } > \text{ de } \theta,$$

e também

$$\begin{aligned} \bar{J}[v(n+1,2), \tau_2] &= \bar{J}[v \oplus 1_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow F] + \\ &+ \bar{J}[1_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow v(n+1,0)] + \bar{J}[1_{\mathbb{C}} \rightarrow v(n+1,1)] \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} [v(n+1,2)]\theta^{n+3} + \text{termos em pot. } > \text{ de } \theta &= \bar{J}[v \rightarrow F] + \\ &+ [v(n+1,0)]\theta^{n+1} + [v(n+1,1)]\theta^{n+2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{J}[v \rightarrow F] &= [v(n+1,0)]\theta^{n+1} + [v(n+1,1)]\theta^{n+2} + \\ &+ [v(n+1,2)]\theta^{n+3} + \text{termos em pot. } > \text{ de } \theta. \end{aligned}$$

Mas,

$$\bar{J}[v \rightarrow F] = \bar{J}[1_{\mathbb{C}}^{(n+1)} \rightarrow \mathbb{CP}(0)] + \bar{J}(\lambda_n).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\bar{J}(\lambda_n) &= 1 + [V(n+1,0)]\theta^{n+1} + [V(n+1,1)]\theta^{n+2} + \\ &+ [V(n+1,2)]\theta^{n+3} + \text{termos em pot. } > \text{ de } \theta.\end{aligned}$$

Portanto, em geral

$$\bar{J}(\lambda_n) = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} [V(n+1,i)]\theta^{n+i+1}.$$

Para cálculos mais explícitos de $\bar{J}$ nos geradores de $M_*(S^1)$, isto é, nos elementos λ_n , como

$$\begin{aligned}[V(n+1,k)] &= [\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{C}}^{k+1})] + [\mathbb{CP}(n+k+1)] + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} [\mathbb{CP}(k-j)][V(n+1,j)] \quad (\text{por 4.19})\end{aligned}$$

é conveniente conhecermos alguns resultados referentes a classe de bordismo de alguns espaços fibrados projetivos complexos associados a $\lambda_n \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{C}}^{k+1}$, isto é, a $[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{C}}^{k+1})]$.

LEMA 4.21. Se $\xi \rightarrow V^m$ é um 2-fibrado plano complexo, então $[\mathbb{CP}(\xi)] = 0$ em N_{m+2} .

DEMONSTRAÇÃO. Devemos mostrar que todo número de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(\xi)$ é nulo. Seja $c \in H^2(\mathbb{CP}(\xi); \mathbb{Z}_2)$ a classe de Chern módulo 2 do $U(1)$ -fibrado $B(\xi) \rightarrow \mathbb{CP}(\xi)$. Temos a relação

$$\begin{aligned}
 c^2 &= \sum_1^2 p^*(v_j) c^{2-j} \\
 &= p^*(v_1) c + p^*(v_2)
 \end{aligned}$$

onde $1, v_1, v_2$ são as classes de Chern módulo 2 de $\xi \rightarrow V^m$.

A classe total de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(\xi)$ é

$$\left(\sum_0^m p^*(w_j) \right) \left(\sum_0^2 p^*(v_j) (1+c)^{2-j} \right) = \left(\sum_0^m p^*(w_j) \right) (1 + p^*(v_1))$$

onde $1, w_1, \dots, w_m$ são as classes de Stiefel-Whitney de V^m e $p^* : H^*(V^m; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(\mathbb{CP}(\xi); \mathbb{Z}_2)$. (Veja [12], 36).

Portanto, cada classe de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(\xi)$ é dada por:

$$W_i = p^*(w_i + w_{i-1}v_1).$$

Escolhendo inteiros positivos j_r tais que $j_1 + j_2 + \dots + j_r = m + 2$ temos:

$$W_{j_1} \dots W_{j_r} = p^*((w_{j_1} + w_{j_1-1}v_1) \dots (w_{j_r} + w_{j_r-1}v_1)).$$

Como $(w_{j_1} + w_{j_1-1}v_1) \dots (w_{j_r} + w_{j_r-1}v_1) \in H^{m+2}(V^m; \mathbb{Z}_2) = 0$, temos que todo número de Stiefel-Whitney da $(m+2)$ -variedade $\mathbb{CP}(\xi)$ é nulo. Logo $[\mathbb{CP}(\xi)] = 0$.

LEMA 4.22. Para qualquer $n \geq 0$, $[\mathbb{CP}(\lambda_1 \oplus 1_{\mathbb{C}}^n)] = 0$ em $N_{2(n+1)}$.

DEMONSTRAÇÃO. Devemos mostrar que todo número de Stiefel-Whitney é nulo. Seja $c \in H^2(\mathbb{CP}(\lambda_1 \oplus 1_{\mathbb{C}}^n); \mathbb{Z}_2)$ a classe de Chern módulo 2 do $U(1)$ -fibrado $B(\lambda_1 \oplus 1_{\mathbb{C}}^n) \rightarrow \mathbb{CP}(\lambda_1 \oplus 1_{\mathbb{C}}^n)$. Temos a relação

$$c^{n+1} = \sum_1^{n+1} p^*(v_j) c^{n+1-j}$$

onde $1, v_1, \dots, v_{n+1}$ são as classes de Chern módulo 2 de $\lambda_1 \oplus 1_{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{CP}(1)$. Como $H^{2i}(\mathbb{CP}(1); \mathbb{Z}) = 0$ para $i > 1$ temos que $v_2 = \dots = v_{n+1} = 0$ e $v_1 = \alpha$ o gerador de $H^2(\mathbb{CP}(1); \mathbb{Z})$. Assim,

$$c^{n+1} = p^*(\alpha) c^n.$$

A classe total de Stiefel-Whitney da $2(n+1)$ -variedade fechada $\mathbb{CP}(\lambda_1 \oplus 1_{\mathbb{C}}^n)$ é

$$\left(\sum_0^2 p^*(w_j) \right) \left(\sum_0^{n+1} p^*(v_j) (1 + c)^{n+1-j} \right)$$

onde $1, w_1, w_2$ são as classes de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(1)$. Como

$$\sum_0^2 p^*(w_j) = (1 + p^*(\alpha))^2 = 1 + p^*(\alpha^2) = 1.$$

Portanto, a classe total de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(\lambda_1 \oplus 1_{\mathbb{C}}^n)$ é:

$$1((1+c)^{n+1} + p^*(\alpha)(1+c)^n).$$

Assim, denotando por W_i a i -ésima classe de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(\lambda_1 \oplus 1_{\mathbb{C}}^n)$ temos:

$$W_{2j} = \binom{n+1}{j} c^j + \binom{n}{j-1} c^{j-1} p^*(\alpha) \quad \text{e, para } j > 0$$

$$W_{2j} = \binom{n+1}{j} c^j + \frac{j}{n+1} \binom{n+1}{j} c^{j-1} p^*(\alpha).$$

Escolhendo inteiros positivos j_r tais que $j_1 + j_2 + \dots + j_k = n+1$, temos que

$$\begin{aligned} W_{2j_1} \dots W_{2j_k} &= \prod_{r=1}^k \binom{n+1}{j_r} c^{n+1} + \sum_{s=1}^k \frac{j_s}{n+1} \left(\prod_{r=1}^k \binom{n+1}{j_r} c^n p^*(\alpha) \right) \\ &= \left\{ \prod_{r=1}^k \binom{n+1}{j_r} + \sum_{s=1}^k \frac{j_s}{n+1} \prod_{r=1}^k \binom{n+1}{j_r} \right\} c^n p^*(\alpha). \end{aligned}$$

Portanto, como $\sum_{r=1}^k \frac{j_s}{n+1} = 1$,

$$W_{2j_1} \dots W_{2j_k} = \left\{ \prod_{r=1}^k \binom{n+1}{j_r} + \prod_{r=1}^k \binom{n+1}{j_r} \right\} c^n p^*(\alpha) = 0.$$

Assim, todo número de Stiefel-Whitney é nulo, e $[\mathbb{CP}(\lambda_1 \oplus 1_{\mathbb{C}}^n)] = 0$, $\forall n \geq 0$.

LEMA 4.23. Seja λ_n o fibrado linear complexo canônico sobre $\mathbb{CP}(n)$. Então $[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus 1_{\mathbb{C}})] = 0$, $\forall n \geq 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja T_0 a ação semi-livre de S^1 definida em $\mathbb{CP}(n+1)$ por:

$$[z_0, z_1, \dots, z_{n+1}] \xrightarrow{T_0} [sz_0, z_1, \dots, z_{n+1}].$$

O fibrado normal ao conjunto de pontos fixos de $[\mathbb{CP}(n+1), T_0]$ é $(1_{\mathbb{C}}^{(n+1)} \rightarrow \mathbb{CP}(0)) \cup (\lambda \rightarrow \mathbb{CP}(n))$. Portanto,

$$[\mathbb{CP}(n+1)] = [\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus 1_{\mathbb{C}})] + [\mathbb{CP}(n+1)].$$

Assim,

$$[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus 1_{\mathbb{C}})] = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

LEMA 4.24. Para qualquer par de inteiros n, k

$$[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus 1_{\mathbb{C}}^k)] + [\mathbb{CP}(\lambda_{k-1} \oplus 1_{\mathbb{C}}^{n+1})] = [\mathbb{CP}(n+k)].$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam T_0 a ação semi-livre de S^1 em $\mathbb{CP}(n+1)$ dada no lema anterior, e T'_0 a ação semi-livre de S^1 dada em $\mathbb{CP}(k)$ por:

$$[z_0, z_1, \dots, z_k] \xrightarrow{T'_0} [sz_0, z_1, \dots, z_k].$$

Assim, existe em $\mathbb{CP}(n+1) \times \mathbb{CP}(k)$ uma ação semi-livre de S^1 dada por (T_0, T'_0) , com conjunto de pontos fixos a união disjunta

$$(\mathbb{CP}(n) \times \mathbb{CP}(k-1)) \cup \mathbb{CP}(n) \cup \mathbb{CP}(k-1) \cup \mathbb{CP}(0).$$

Os fibrados normais são, respectivamente,

$$\lambda \times \lambda \rightarrow \mathbb{CP}(n) \times \mathbb{CP}(k-1), \quad \lambda \oplus 1_{\mathbb{C}}^k \rightarrow \mathbb{CP}(n),$$

$$\lambda \oplus 1_{\mathbb{C}}^{(n+1)} \rightarrow \mathbb{CP}(k-1), \quad \text{e} \quad 1_{\mathbb{C}}^{n+k+1} \rightarrow \mathbb{CP}(0).$$

Portanto, pela sequência exata curta (veja [16], 8.3), temos:

$$[\mathbb{CP}(\lambda \times \lambda)] + [\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus 1_{\mathbb{C}}^k)] + [\mathbb{CP}(\lambda_{k-1} \oplus 1_{\mathbb{C}}^{n+1})] + [\mathbb{CP}(n+k)] = 0.$$

Como $\mathbb{CP}(n) \times \mathbb{CP}(k-1)$ tem codimensão 2 em $\mathbb{CP}(n+1) \times \mathbb{CP}(k)$, por (4.21), temos que $[\mathbb{CP}(\lambda \times \lambda)] = 0$. Portanto,

$$[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus 1_{\mathbb{C}}^k)] + [\mathbb{CP}(\lambda_{k-1} \oplus 1_{\mathbb{C}}^{n+1})] = [\mathbb{CP}(n+k)].$$

OBSERVAÇÃO. Como consequência do lema anterior temos que $[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus 1_{\mathbb{C}}^2)] = [\mathbb{CP}(n+2)]$, pois

$$[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus 1_{\mathbb{C}}^2)] + [\mathbb{CP}(\lambda_1 \oplus 1_{\mathbb{C}}^{n+1})] = [\mathbb{CP}(n+2)]$$

e por (4.22), $[\mathbb{CP}(\lambda_1 \oplus 1_{\mathbb{C}}^{n+1})] = 0$. Portanto,

$$[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus 1_{\mathbb{C}}^2)] = [\mathbb{CP}(n+2)].$$

IV - 4. CONJUNTO DE PONTOS FIXOS DE AÇÕES SEMI-LIVRES DE S^1

Dada uma n -variedade fechada diferenciável M^n , para quais valores de k existe uma $(n + 2k)$ -variedade V^{n+2k} com ação semi-livre de S^1 cujo conjunto de pontos fixos é cobordante a M^n ? Dada uma variedade fechada M^n , nosso objetivo, no que segue, será mostrar que para alguns valores de k existe uma variedade fechada com uma ação semi-livre de S^1 , (V^{n+2k}, T) , cujo conjunto de pontos fixos é cobordante a M^n .

Vamos denotar por S_n^k , onde k é par, o conjunto de classes no grupo de cobordismo não orientado N_n que são representadas por uma n -variedade que é o conjunto de pontos fixos de uma $(n + k)$ -variedade com uma ação semi-livre de S^1 .

Propriedades de S_n^k

- 1) S_n^k é um subgrupo de N_n
- 2) $S_n^0 = N_n$
- 3) $S_*^k = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k = S_0^k + S_1^k + S_2^k + \dots$ é um ideal em N_* .

PROPOSIÇÃO 4.25. A classe de $\mathbb{C}P(2k) \cup \mathbb{C}P(k) \times \mathbb{C}P(k)$ pertence a S_{4k}^4 , $\forall k > 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam λ_{2k} o fibrado linear complexo canônico

sobre $\mathbb{CP}(2k)$ e λ_k o fibrado linear complexo canônico sobre $\mathbb{CP}(k)$. Então temos:

$$\begin{aligned}
 \bar{J}(\lambda_{2k} \lambda_0 + \lambda_k^2) &= \bar{J}(\lambda_{2k}) \bar{J}(\lambda_0) + (\bar{J}(\lambda_k))^2 \\
 &= 1 + \sum_{i=0}^{\infty} [V(2k+1, i)] \theta^{2k+i+1} + \\
 &\quad + (1 + \sum_{i=0}^{\infty} [V(k+1, i)] \theta^{k+i+1})^2 \\
 &= 1 + [V(2k+1, 0)] \theta^{2k+1} + [V(2k+1, 1)] \theta^{2k+2} + \dots + \\
 &\quad + 1 + [V(k+1, 0)]^2 \theta^{2k+2} + [V(k+1, 1)]^2 \theta^{2k+4} + \dots \\
 &= ([V(2k+1, 1)] + [V(k+1, 0)]^2) \theta^{2k+2} + [V(2k+1, 2)] \theta^{2k+3} + \\
 &\quad + ([V(2k+1, 3)] + [V(k+1, 1)]^2) \theta^{2k+4} + [V(2k+1, 4)] \theta^{2k+5} + \\
 &\quad + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta.
 \end{aligned}$$

Portanto, por (4.16), a classe de $\mathbb{CP}(2k) \cup \mathbb{CP}(k) \times \mathbb{CP}(k)$, que é a base do fibrado $\lambda_{2k} \lambda_0 + \lambda_k^2$, pertence a S_{4k}^4 .

OBSERVAÇÃO. Se k é ímpar, temos:

$$[\mathbb{CP}(2k)] + [\mathbb{CP}(k) \times \mathbb{CP}(k)] = [\mathbb{CP}(2k)] = [\mathbb{RP}(2k) \times \mathbb{RP}(2k)].$$

Portanto, $[\mathbb{R}P(2k) \times \mathbb{R}P(2k)]$ pertence a S_{4k}^4 para k ímpar.

PROPOSIÇÃO 4.26. Seja M^2 uma variedade fechada no grupo de bordismo não orientado N_2 . Então a classe de $(M^2 \times \mathbb{C}P(2k)) \cup (M^2 \times \mathbb{C}P(k) \times \mathbb{C}P(k))$ pertence a S_{4k+2}^4 .

DEMONSTRAÇÃO.

$$\begin{aligned} \bar{J}([M^2] \lambda_{2k} \lambda_0 + [M^2] \lambda_k^2) &= [M^2] \theta \bar{J}(\lambda_{2k} \lambda_0 + \lambda_k^2) \\ &= [M^2] \theta \{ ([V(2k+1,1)] + [V(k+1,0)]^2) \theta^{2k+2} + \\ &\quad + [V(2k+1,2)] \theta^{2k+3} + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta \}. \\ &= [M^2] ([V(2k+1,1)] + [V(k+1,0)]^2) \theta^{2k+3} + \\ &\quad + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta. \end{aligned}$$

Portanto, a classe de $(M^2 \times \mathbb{C}P(2k)) \cup (M^2 \times \mathbb{C}P(k) \times \mathbb{C}P(k))$, que é a base do fibrado $M^2 \lambda_{2k} \lambda_0 + M^2 \lambda_k^2$, pertence a S_{4k+2}^4 .

OBSERVAÇÃO. Poderíamos também concluir o resultado acima, usando a Proposição (4.25), e lembrando que S_*^4 é um ideal em N_* . Desta forma também temos que a classe de $(M^n \times \mathbb{C}P(2k)) \cup (M^n \times \mathbb{C}P(k) \times \mathbb{C}P(k))$ pertence a S_{4k+n}^4 , para qualquer $n \geq 0$.

PROPOSIÇÃO 4.27. Seja $\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3)$ o espaço fibrado complexo projetivo associado ao fibrado $\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3$. Existe uma ação semi-livre de S^1 em $\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3) \in SF_{10}(S^1)$ fixando $\mathbb{CP}(2) \cup$ ponto.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(\lambda \oplus 1_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{CP}(2)) \cup (1_{\mathbb{C}}^5 \rightarrow \mathbb{CP}(0)) \in M_{10}(S^1)$. Temos:

$$\begin{aligned}\bar{J}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2 + 1_{\mathbb{C}}^5) &= \bar{J}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2) + \bar{J}(1_{\mathbb{C}}^5) \\ &= \bar{J}(\lambda_2) + \bar{J}(1_{\mathbb{C}}) \\ &= [V(3,0)]\theta^3 + [V(3,1)]\theta^4 + [V(3,2)]\theta^5 + \dots\end{aligned}$$

Como, $[V(3,0)] = [\mathbb{CP}(3)] = [\mathbb{RP}(3) \times \mathbb{RP}(3)] = 0$, e

$$\begin{aligned}[V(3,1)] &= [\mathbb{CP}(4)] + [\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2)] + \sum_{k=0}^0 [\mathbb{CP}(1-k)] [V(3,k)] \\ &= [\mathbb{CP}(4)] + [\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2)] + [\mathbb{CP}(1)] [V(3,0)] \\ &= [\mathbb{CP}(4)] + [\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2)] \\ &= [\mathbb{CP}(4)] + [\mathbb{CP}(4)] = 0 \quad \text{por (4.23).}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{J}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2 + 1_{\mathbb{C}}^5) = [V(3,2)]\theta^5 + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta.$$

Como,

$$\begin{aligned}
 [V(3,2)] &= [\mathbb{CP}(5)] + [\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3)] + \sum_{k=0}^1 [\mathbb{CP}(2-k)] [V(3,k)] \\
 &= [\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3)] + [\mathbb{CP}(2)] [V(3,0)] + [\mathbb{CP}(1)] [V(3,1)] \\
 &= [\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3)],
 \end{aligned}$$

e pelo lema (4.16), concluímos que existe ação semi-livre de S^1 em $\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3)$, fixando $\mathbb{CP}(2) \cup$ ponto que é o espaço base do fibrado $\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2 + 1_{\mathbb{C}}^5$.

Vamos agora analisar o efeito do homomorfismo de Boardman $\bar{J}$ em alguns elementos de $M_{10}(S^1)$. No que segue denotaremos por x_n a classe de $RP(n)$.

$$\begin{aligned}
 SF_{10}(S^1) \rightarrow M_{10}(S^1) &= \bigoplus_{k=0}^5 N_{10-2k}(BU_k) \\
 &= N_{10}(BU_0) + N_8(BU_1) + N_6(BU_2) + N_4(BU_3) + N_2(BU_4) + N_0(BU_5)
 \end{aligned}$$

$$N_{10}(BU_0) \simeq N_{10}.$$

Sejam os elementos $x_8^{\lambda_0}, x_6^{\lambda_1}, x_4^{\lambda_2}, x_2^{\lambda_3}, \lambda_4$ pertencentes a $N_8(BU_1)$. Temos:

$$\bar{J}(x_8 \lambda_0) = x_8 \theta^4$$

$$\bar{J}(x_6 \lambda_1) = x_6 \theta^3 + x_6 [V(2,0)] \theta^5 + x_6 [V(2,1)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(x_4 \lambda_2) = x_4 \theta^2 + x_4 [V(3,0)] \theta^5 + x_4 [V(3,1)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(x_2 \lambda_3) = x_2 \theta + x_2 [V(4,0)] \theta^5 + x_2 [V(4,1)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_4) = 1 + [V(5,0)] \theta^5 + \dots$$

Sejam $x_4 \lambda_0 \lambda_1, x_2 \lambda_0 \lambda_2, \lambda_0 \lambda_3, x_2 \lambda_1^2, \lambda_1 \lambda_2$ em $N_6(BU_2)$. Temos:

$$\bar{J}(x_4 \lambda_0 \lambda_1) = x_4 \theta^2 + x_4 [V(2,0)] \theta^4 + x_4 [V(2,1)] \theta^5 + x_4 [V(2,2)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(x_2 \lambda_0 \lambda_2) = x_2 \theta + x_2 [V(3,0)] \theta^4 + x_2 [V(3,1)] \theta^5 + x_2 [V(3,2)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_0 \lambda_3) = 1 + [V(4,0)] \theta^4 + [V(4,1)] \theta^5 + [V(4,2)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(x_2 \lambda_1^2) = 1 + [V(2,0)]^2 \theta^4 + [V(2,1)]^2 \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_1 \lambda_2) = 1 + [V(2,0)] \theta^2 + [V(2,2)] \theta^4 + [V(3,2)] \theta^5 + \dots$$

Sejam $x_4 \lambda_0^3, x_2 \lambda_0^2 \lambda_1, \lambda_0^2 \lambda_2, \lambda_0 \lambda_1^2$ em $N_4(BU_3)$. Temos:

$$\bar{J}(x_4 \lambda_0^3) = x_4 \theta^2$$

$$\bar{J}(x_2 \lambda_0^2 \lambda_1) = x_2 \theta + x_2 [V(2,0)] \theta^3 + x_2 [V(2,1)] \theta^4 + x_2 [V(2,2)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_0^2 \lambda_2) = 1 + [V(3,0)] \theta^3 + [V(3,1)] \theta^4 + [V(3,2)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_0 \lambda_1^2) = 1 + [V(2,0)]^2 \theta^4 + [V(2,1)]^2 \theta^6 + \dots$$

Sejam $x_2 \lambda_0^4$, $\lambda_0^3 \lambda_1$ em $N_2(BU_4)$. Temos:

$$\bar{J}(x_2 \lambda_0^4) = x_2 \theta$$

$$\bar{J}(\lambda_0^3 \lambda_1) = 1 + [V(2,0)] \theta^2 + [V(2,1)] \theta^3 + [V(2,2)] \theta^4 + [V(2,3)] \theta^5 + \dots$$

Para $\lambda_0^5 \in N_0(BU_5)$, temos: $\bar{J}(\lambda_0^5) = 1$.

Portanto,

$$\bar{J}(\lambda_0^5 + \lambda_4) = [V(5,0)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(x_2 \lambda_3 + x_2 \lambda_0^4) = x_2 [V(4,0)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(x_4 \lambda_2 + x_4 \lambda_0^3) = x_4 [V(3,0)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0^3 \lambda_1) = ([V(3,2)] + [V(2,3)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_0^2 \lambda_2 + \lambda_0^5) = [V(3,2)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(x_2 \lambda_3 + x_2 \lambda_0 \lambda_2) = (x_2 [V(3,1)] + x_2 [V(4,0)]) \theta^5 + \dots$$

Assim, concluímos que existe ação semi-livre de S^1 em:

(a) $[V(5,0)]$ fixando $\mathbb{CP}(4) \cup \mathbb{CP}(0)$.

(b) $\mathbb{RP}(2) \times \mathbb{CP}(4)$ fixando $\mathbb{RP}(2) \times \mathbb{CP}(3) \cup \mathbb{RP}(2)$.

(c) $\mathbb{RP}(4) \times \mathbb{CP}(3)$ fixando $\mathbb{RP}(4) \times \mathbb{CP}(2) \cup \mathbb{RP}(4)$.

(d) $V(3,2) \cup V(2,3)$ fixando $\mathbb{CP}(1) \times \mathbb{CP}(2) \cup \mathbb{CP}(1)$.

(e) $V(3,2)$ fixando $\mathbb{CP}(2) \cup \mathbb{CP}(0)$.

(f) $\mathbb{RP}(2) \times V(3,1)$ fixando $\mathbb{RP}(2) \times \mathbb{CP}(2) \cup \mathbb{RP}(2)$.

(g) $(\mathbb{RP}(2) \times V(3,1)) \cup (\mathbb{RP}(2) \times \mathbb{CP}(4))$ fixando $\mathbb{RP}(2) \times \mathbb{CP}(3) \cup \mathbb{RP}(2) \times \mathbb{CP}(2)$.

Com o objetivo de calcular S_{2n}^2 , isto é, o conjunto de classes M^{2n} em N_{2n} para as quais existe uma variedade V^{2n+2} com ação semi-livre de S^1 com conjunto de pontos fixos bordante a M^{2n} , vamos primeiramente calcular esses conjuntos para alguns valores de n , mais precisamente calcular S_{2n}^2 para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. No que segue M^{2n} denotará $\mathbb{RP}(2n)$. Observamos que, se um elemento $\alpha \in SF_{2(n+1)}(S^1)$ tem conjunto de pontos fixos em S_{2n}^2 , então $j\alpha \in N_{2n}(BU_1)$. Sendo λ_n , o fibrado linha complexo canônico sobre $\mathbb{CP}(n)$, temos:

$$\bar{J}(\lambda_0) = 1$$

$$\bar{J}(\lambda_1) = 1 + [V(2,0)]\theta^2 + [V(2,1)]\theta^3 + [V(2,2)]\theta^4 + [V(2,3)]\theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_2) = 1 + [V(3,0)]\theta^3 + [V(3,1)]\theta^4 + [V(3,2)]\theta^5 + [V(3,3)]\theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_3) = 1 + [V(4,0)]\theta^4 + [V(4,1)]\theta^5 + [V(4,2)]\theta^6 + [V(4,3)]\theta^7 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_4) = 1 + [V(5,0)]\theta^5 + [V(5,1)]\theta^6 + [V(5,2)]\theta^7 + [V(5,3)]\theta^8 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_5) = 1 + [V(6,0)]\theta^6 + [V(6,1)]\theta^7 + [V(6,2)]\theta^8 + [V(6,3)]\theta^9 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_6) = 1 + [V(7,0)]\theta^7 + [V(7,1)]\theta^8 + [V(7,2)]\theta^9 + [V(7,3)]\theta^{10} + \dots$$

$$n = 1$$

$$\begin{aligned} SF_4(S^1) &\xrightarrow{j} M_4(S^1) = \bigoplus_{k=0}^2 N_{4-2k}(BU_k) \\ &= N_4(BU_0) + N_2(BU_1) + N_0(BU_2) \end{aligned}$$

geradores de $N_2(BU_1) : [M^2]\lambda_0$ e λ_1

$$\bar{J}([M^2]\lambda_0) = [M^2]\theta \bar{J}(\lambda_0) = [M^2]\theta$$

$$\bar{J}(\lambda_1) = 1 + [V(2,0)]\theta^2 + [V(2,1)]\theta^3 + \dots$$

Portanto, $S_2^2 = (0)$.

$n = 2$

$$SF_6(S^1) \xrightarrow{j} M_6(S^1) = \bigoplus_{k=0}^3 N_{6-2k}(BU_k) \\ = \dots + N_4(BU_1) + \dots$$

geradores de $N_4(BU_1)$: $[M^4]\lambda_0$, $[M^2]\lambda_1$ e λ_2

$$\bar{J}([M^4]\lambda_0) = [M^4]\theta^2$$

$$\bar{J}([M^2]\lambda_1) = [M^2]\theta\{1 + [V(2,0)]\theta^2 + [V(2,1)]\theta^3 + [V(2,2)]\theta^4 + \dots\} \\ = [M^2]\theta + [M^2][V(2,0)]\theta^3 + [M^2][V(2,1)]\theta^4 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_2) = 1 + [V(3,0)]\theta^3 + [V(3,1)]\theta^4 + [V(3,2)]\theta^5 + \dots$$

Portanto, $S_4^2 = (0)$.

$n = 3$

$$SF_8(S^1) \xrightarrow{j} M_8(S^1) = \bigoplus_{k=0}^4 N_{8-2k}(BU_k) \\ = \dots + N_6(BU_1) + \dots$$

geradores de $N_6(BU_1)$: $[M^6]\lambda_0$, $[M^4]\lambda_1$, $[M^2]\lambda_2$, λ_3

$$\bar{J}([M^6] \lambda_0) = [M^6] \theta^3$$

$$\bar{J}([M^4] \lambda_1) = [M^4] \theta^2 + [M^4][V(2,0)] \theta^4 + [M^4][V(2,1)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}([M^2] \lambda_2) = [M^2] \theta + [M^2][V(3,0)] \theta^4 + [M^2][V(3,1)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_3) = 1 + [V(4,0)] \theta^4 + [V(4,1)] \theta^5 + [V(4,2)] \theta^6 + \dots$$

Portanto, $S_6^2 = (0)$.

$$n = 4$$

$$SF_{10}(S^1) \xrightarrow{j} M_{10}(S^1) = \bigoplus_{k=0}^5 N_{10-2k}(BU_k)$$

$$= \dots + N_8(BU_1) + \dots$$

geradores de $N_8(BU_1)$: $[M^8] \lambda_0$, $[M^6] \lambda_1$, $[M^4] \lambda_2$, $[M^2] \lambda_3$ e λ_4

$$\bar{J}([M^8] \lambda_0) = [M^8] \theta^4$$

$$\bar{J}([M^6] \lambda_1) = [M^6] \theta^3 + [M^6][V(2,0)] \theta^5 + [M^6][V(2,1)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}([M^4] \lambda_2) = [M^4] \theta^2 + [M^4][V(3,0)] \theta^5 + [M^4][V(3,1)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}([M^2] \lambda_3) = [M^2] \theta + [M^2][V(4,0)] \theta^5 + [M^2][V(4,1)] \theta^6 + \dots$$

$$J(\lambda_4) = 1 + [V(5,0)] \theta^5 + [V(5,1)] \theta^6 + \dots$$

Portanto, $S_8^2 = (0)$.

$n = 5$

$$SF_{12}(S^1) \xrightarrow{j} M_{12}(S^1) = \bigoplus_{k=0}^6 N_{12-2k}(BU_k) \\ = \dots + N_{10}(BU_1) + \dots$$

geradores de $N_{10}(BU_1)$: $[M^{10}] \lambda_0$, $[M^8] \lambda_1$, $[M^6] \lambda_2$, $[M^4] \lambda_3$, $[M^2] \lambda_4$ e λ_5

$$\bar{J}([M^{10}] \lambda_0) = [M^{10}] \theta^5$$

$$\bar{J}([M^8] \lambda_1) = [M^8] \theta^4 + [M^8][V(2,0)] \theta^6 + [M^8][V(2,1)] \theta^7 + \dots$$

$$\bar{J}([M^6] \lambda_2) = [M^6] \theta^3 + [M^6][V(3,0)] \theta^6 + [M^6][V(3,1)] \theta^7 + \dots$$

$$\bar{J}([M^4] \lambda_3) = [M^4] \theta^2 + [M^4][V(4,0)] \theta^6 + [M^4][V(4,1)] \theta^7 + \dots$$

$$\bar{J}([M^2] \lambda_4) = [M^2] \theta + [M^2][V(5,0)] \theta^6 + [M^2][V(5,1)] \theta^7 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_5) = 1 + [V(6,0)] \theta^6 + [V(6,1)] \theta^7 + [V(6,2)] \theta^8 + \dots$$

Portanto, $S_{10}^2 = (0)$.

$$n = 6$$

$$SF_{14}(S^1) \xrightarrow{j} M_{14}(S^1) = \bigoplus_{k=0}^7 N_{14-2k}(BU_k) \\ = \dots + N_{12}(BU_1) + \dots$$

geradores de $N_{12}(BU_1)$: $[M^{12}]_{\lambda_0}$, $[M^{10}]_{\lambda_1}$, $[M^8]_{\lambda_2}$, $[M^6]_{\lambda_3}$, $[M^4]_{\lambda_4}$, $[M^2]_{\lambda_5}$ e λ_6

$$\bar{J}([M^{12}]_{\lambda_0}) = [M^{12}]_{\theta^6}$$

$$\bar{J}([M^{10}]_{\lambda_1}) = [M^{10}]_{\theta^5} + [M^{10}][V(2,0)]_{\theta^7} + [M^{10}][V(2,1)]_{\theta^8} + \dots$$

$$\bar{J}([M^8]_{\lambda_2}) = [M^8]_{\theta^4} + [M^8][V(3,0)]_{\theta^7} + [M^8][V(3,1)]_{\theta^8} + \dots$$

$$\bar{J}([M^6]_{\lambda_3}) = [M^6]_{\theta^3} + [M^6][V(4,0)]_{\theta^7} + [M^6][V(4,1)]_{\theta^8} + \dots$$

$$\bar{J}([M^4]_{\lambda_4}) = [M^4]_{\theta^2} + [M^4][V(5,0)]_{\theta^7} + [M^4][V(5,1)]_{\theta^8} + \dots$$

$$\bar{J}([M^2]_{\lambda_5}) = [M^2]_{\theta} + [M^2][V(6,0)]_{\theta^7} + [M^2][V(6,1)]_{\theta^8} + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_6) = 1 + [V(7,0)]_{\theta^7} + [V(7,1)]_{\theta^8} + \dots$$

Portanto, $S_{12}^2 = (0)$.

Analizando o que foi feito acima, podemos generalizar.

Temos:

PROPOSIÇÃO 4.28. Seja a ação semi-livre de S^1 (V^{2n+2}, T). Se o conjunto de pontos fixos N é de codimensão 2, então N é bordo, isto é, $S_{2n}^2 = (0)$, $\forall n \geq 0$.

DEMONSTRAÇÃO.

$$SF_{2n+2}(S^1) \xrightarrow{j} M_{2n+2}(S^1) = \bigoplus_{k=0}^{n+1} N_{2n+2-2k}(BU_k).$$

Para que um elemento $\alpha \in SF_{2n+2}(S^1)$ tenha conjunto de pontos fixos em S_{2n}^2 , devemos ter $j\alpha \in N_{2n}(BU_1)$. Mas $N_{2n}(BU_1)$ é gerado pelos elementos:

$$[M^{2n-2i}] \lambda_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

onde $[M^{2n-2i}]$ é um elemento gerador de N_* de dimensão $2(n-i)$ e λ_i é o fibrado linear complexo canônico sobre $\mathbb{CP}(i)$. Como

$$\bar{J}([M^{2n-2i}] \lambda_i) = [M^{2n-2i}] \theta^{n-i} + \sum_{j=0}^{\infty} [M^{2n-2i}] [V(i+1, j)] \theta^{n+j+1}.$$

Assim qualquer combinação dos elementos $\bar{J}([M^{2n-2i}] \lambda_i)$, $0 \leq i \leq n$, contém potências de θ menores que $n+1$. E como, para um elemento $\alpha \in SF_{2n+2}(S^1)$, $\bar{J}j\alpha$ pertence ao ideal gerado por θ^{n+1} , então não existe elemento, não bordo, em $SF_{2n+2}(S^1)$ com a imagem através de j em $N_{2n}(BU_1)$. Portanto, $S_{2n}^2 = (0)$, $\forall n$.

PROPOSIÇÃO 4.29. S_n^{2k} contém a classe de cobordismo de

$$\mathbb{CP}(\xi^k) \cup M^{n-2k+1} \times \mathbb{CP}(k-1),$$

onde $\xi^k \rightarrow M^{n-2k+1}$ é um k -fibrado complexo e $\mathbb{CP}(\xi^k)$ denota o espaço total do espaço fibrado projetivo complexo associado.

DEMONSTRAÇÃO. Considere a soma de Whitney

$$\xi^k \oplus 1_{\mathbb{C}}^k \rightarrow M^{n-2k+1}$$

e o espaço total $\mathbb{CP}(\xi^k \oplus 1_{\mathbb{C}}^k)$ do fibrado projetivo associado. A multiplicação por um escalar nas fibras de ξ^k induz uma ação semi-livre de S^1 em $\mathbb{CP}(\xi^k \oplus 1_{\mathbb{C}}^k)$ que fixa o conjunto

$$\mathbb{CP}(\xi^k) \cup M^{n-2k+1} \times \mathbb{CP}(k-1).$$

Considere $\xi \rightarrow X$ um k -fibrado complexo. A classe total de Chern de $\xi \rightarrow X$ pode ser expressa na forma fatorada $\sum_{j=1}^{k+1} (1+t_j)$, e para cada $m > 0$ introduzimos as funções simétricas elementares

$$s_m(\xi) = \sum_{j=1}^{k+1} (t_j)^m$$

cada $s_m(\xi)$ pode ser expressa de forma única como uma polinomial

homogenea nas classes de Chern (as funções simétricas elementares), logo $s_m(\xi) \in H^{2m}(X; \mathbb{Z})$. Para uma soma de Whitney,

$$s_m(\xi_1 \oplus \xi_2) = s_m(\xi_1) + s_m(\xi_2)$$

(Veja [9], pag. 292).

LEMA 4.30. Seja $\mathbb{CP}(n_1, n_2, \dots, n_k)$ o espaço fibrado projetivo complexo $2(n+k-1)$ -dimensional associado ao fibrado $\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k$ sobre $\mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$, onde λ_i é o pullback do fibrado linear canônico sobre o i -ésimo fator. Então para $k > 1$, $\mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k)$ é indecomponível em N_* se, e somente se

$$\binom{n+k-2}{n_1} + \dots + \binom{n+k-2}{n_k}$$

é ímpar, onde $n = n_1 + \dots + n_k$.

DEMONSTRAÇÃO. Denotamos por $B(\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k) \rightarrow \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$ o $(2k-1)$ -fibrado esférico associado e por

$$p : \mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k) \rightarrow \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$$

o fibrado associado com fibra $\mathbb{CP}(k-1)$. Neste caso o $(2k-1)$ -fibrado esférico $B(\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k)$ é um $U(1)$ -fibrado principal sobre $\mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k)$. Seja $c \in H^2(\mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k); \mathbb{Z}_2)$ a classe

de Chern módulo 2 deste $U(1)$ -fibrado. De acordo com ([12], pag. 36):

$$c^k = \sum_{j=1}^k p^*(v_j) c^{k-j},$$

onde $1, v_1, \dots, v_k$ são as classes de Chern módulo 2 de

$$\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k \rightarrow \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k).$$

Por indução em i , podemos verificar que

$$c^{k-1+i} = \bar{v}_i c^{k-1} + \text{termos com pot. } < \text{ de } c,$$

onde v_i 's são as classes duais de Chern, pois: para $i = 1$, temos:

$$c^{k-1+1} = c^k = \bar{v}_1 c^{k-1} + v_2 c^{k-2} + \text{termos com pot. } < \text{ de } c,$$

para $i = 2$:

$$c^{k-1+2} = c^k c = \bar{v}_1 c^k + v_2 c^{k-1} + v_3 c^{k-2} + \text{termos com pot. } < \text{ de } c$$

$$= \bar{v}_2 c^{k-1} + (\bar{v}_1 v_2 + v_3) c^{k-2} + \text{pot. } < \text{ de } c.$$

Supondo que vale para i , podemos verificar que vale para

$i+1$:

$$c^{k-1+i+1} = c^{k-1+i} c$$

$$= (\bar{v}_1 c^{k-1} + (v_2 \bar{v}_{i-1} + v_3 \bar{v}_{i-2} + \dots + v_{i-1} \bar{v}_1 + v_{i+1}) c^{k-2} + \text{pot.} < \text{de } c) c$$

$$= \bar{v}_1 c^k + (v_2 \bar{v}_{i-1} + v_3 \bar{v}_{i-2} + \dots + v_{i-1} \bar{v}_1 + v_{i+1}) c^{k-1} + \text{pot.} < \text{de } c$$

$$= \bar{v}_1 v_1 c^{k-1} + (v_2 \bar{v}_{i-1} + v_3 \bar{v}_{i-2} + \dots + v_{i-1} \bar{v}_1 + v_{i+1}) c^{k-1} + \text{pot.} < \text{de } c$$

$$= (\bar{v}_1 v_1 + v_2 \bar{v}_{i-1} + \dots + v_{i-1} \bar{v}_1 + v_{i+1}) c^{k-1} + \text{pot.} < \text{de } c$$

$$= \bar{v}_{i+1} c^{k-1} + \text{pot.} < \text{de } c.$$

Assim, $c^{k-1+n} = \bar{v}_n c^{k-1} + \text{termos com pot.} < \text{de } c$, e como os coeficientes dos termos com potências $< \text{de } c$ pertencem a $H^j(\mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k))$ com $j > 2n$, temos que $c^{k-1+n} = \bar{v}_n c^{k-1}$, e também $c^n = \bar{v}_n$. Analogamente, temos que $c^{n-j} = \bar{v}_{n-j}$.

A classe total de Stiefel-Whitney da $2(n+k-1)$ -variedade $\mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k)$ é

$$\left(\sum_0^{2n} p^*(w_j) \right) \left(\sum_0^k p^*(v_j) (1 + c)^{k-j} \right),$$

onde $1, w_1, \dots, w_{2n}$ são as classes de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$. Seja

$$\pi_i : \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k) \rightarrow \mathbb{CP}(n_i)$$

a projeção no i -ésimo fator, α o elemento não nulo de $H^1(\mathbb{CP}(n_i); \mathbb{Z}_2)$, e $\alpha_i = \pi_i^*(\alpha)$. Então a classe de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$ é

$$\prod_{i=1}^k (1 + \alpha_i)^{n_i+1}.$$

Portanto,

$$\sum_{j=0}^{2n} p^*(w_j) = \prod_{i=1}^k (1 + \alpha_i)^{n_i+1}.$$

A classe de Stiefel-Whitney do fibrado

$$\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k \rightarrow \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$$

é $\prod_{i=1}^k (1 + \alpha_i)$. Portanto,

$$\sum_{j=0}^k p^*(v_j) (1 + c)^{k-j} = \prod_{i=1}^k (1 + c + \alpha_i).$$

Assim, a classe total de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k)$ é

$$\prod_{i=1}^k (1 + \alpha_i)^{n_i+1} \cdot \prod_{i=1}^k (1 + c + \alpha_i).$$

Então a classe

$$s_{2(n+k-1)} = \sum_i (n_i + 1) \alpha_i^{n+k-1} + \sum_i (c + \alpha_i)^{n+k-1}.$$

Como $\alpha_i^{n+k-1} = 0$, pois $k > 1$ e $n_1 + \dots + n_k + k - 1 > n_1 + \dots + n_k > n_i$, $\forall i$ temos

$$\begin{aligned} s_{2(n+k-1)} &= \sum_i (c + \alpha_i)^{n+k-1} \\ &= kc^{n+k-1} + \sum_{j=1}^n \binom{n+k-1}{j} s_j c^{n+k-1-j} \\ &= c^{k-1} \{ kc^n + \sum_{j=1}^n \binom{n+k-1}{j} s_j c^{n-j} \} \\ &= c^{k-1} \{ k\bar{v}_n + \sum_{j=1}^n \binom{n+k-1}{j} s_j \bar{v}_{n-j} \} \end{aligned}$$

onde $s_j = \sum_{i=1}^k \alpha_i^j$ é a j -ésima s -classe de $\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k$. E por ([21], 3.4) o valor desta classe característica é

$$\binom{n+k-2}{n_1} + \dots + \binom{n+k-2}{n_k}.$$

PROPOSIÇÃO 4.31. S_{2n}^{2k} contém uma classe de cobordismo indecomponível para cada k tal que $4 \leq k \leq \alpha(n)$, onde $\alpha(n)$ denota o número de termos na expansão diádica de n .

DEMONSTRAÇÃO. Seja o fibrado

$$\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k \rightarrow \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$$

do lema anterior, onde $n_1, \dots, n_k$ é uma partição de $n - k + 1$. O espaço fibrado projetivo complexo associado é uma $2n$ -variedade. Por (4.29) S_{2n}^{2k} contém a classe de cobordismo de

$$\mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k) \cup \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k) \times \mathbb{CP}(k - 1)$$

e esta classe, por (4.30) é indecomponível se, e somente se,

$$\binom{n-1}{n_1} + \dots + \binom{n-1}{n_k} = 1 \pmod{2}.$$

Portanto, é suficiente encontrar para cada n e k uma partição $(n_1, \dots, n_k)$ de $n - k + 1$ tal que $\binom{n-1}{n_1} + \dots + \binom{n-1}{n_k} = 1 \pmod{2}$.

Por [7], 3.3), se $n = 2^{r_1} + \dots + 2^{r_t}$, $r_1 > \dots > r_t > 0$, e $4 \leq k \leq t$, então

$$(2^{r_1} + \dots + 2^{r_{t-k+2}}, 2^{r_{t-k+3}} - 1, \dots, 2^{r_{t-1}} - 1, 2^{r_t-1} - 1, 2^{r_t-1} - 1)$$

é a partição procurada. Se $n = 2^{r_1} + \dots + 2^{r_t}$, onde $r_1 > \dots > r_t = 0$ e existe um i , $2 \leq i \leq t$, tal que $r_{i-1} > r_i + 1$, e $4 \leq k \leq t$, então

$$(2^{r_1} - 2, 2^{r_2} - 1, \dots, 2^{r_{k-2}} - 1, 2^{r_{k-1}} + \dots + 2^{r_{t-1}}, 1)$$

é a partição procurada.

IV - 5. CONJUNTO DE PONTOS FIXOS E O FIBRADO NORMAL

PROPOSIÇÃO 4.32. Se M^{2n} é uma variedade fechada não bordo, então para $k \geq 1$ não existe variedade com ação semi-livre de S^1 $(V^{2(n+k)}, T)$ fixando $\eta^k \rightarrow M^{2n}$ com η^k fibrado trivial complexo.

DEMONSTRAÇÃO. Supondo $\eta^k \rightarrow M^{2n}$ trivial temos:

$$\bar{J}(\eta^k \rightarrow M^{2n}) = [M^{2n}] \theta^n + \text{pot.} > \text{de } \theta.$$

Como $[M^{2n}] \neq 0$, não existe $(V^{2(n+k)}, T)$ com conjunto de pontos fixos $(\eta^k \rightarrow M^n)$, pois caso contrário teríamos:

$$\bar{J}(\eta^k \rightarrow M^{2n}) = [V^{2(n+k)}] \theta^{n+k} + \text{pot.} > \text{de } \theta.$$

PROPOSIÇÃO 4.33. Suponha que (M^{2n}, T) é uma ação semi-livre de S^1 em uma variedade fechada, e que F^{2m} é a união das componentes $2m$ -dimensionais do conjunto de pontos fixos de T . Se as classes de Whitney do fibrado normal a F^{2m} são triviais, para todo $0 \leq m \leq n-1$, então $[F^{2m}] = 0$ para $0 \leq m \leq n-1$ e $[M^{2n}] = [F^{2n}]$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja o fibrado normal $\xi_m : E_m \rightarrow F^{2m}$, $0 \leq m \leq n-1$. Como as classes de Whitney de ξ são triviais, então ξ_m é

bordante em $N_{2m}(BU(n-m))$ ao fibrado complexo trivial. Assim,

$$\bar{J}(\Sigma \xi_m) = \Sigma \bar{J}(\xi_m) = \Sigma [F^{2m}] \theta^m.$$

Mas como,

$$\bar{J}(\Sigma \xi_m) = \bar{J}(M^{2n}, T) = [M^{2n}] \theta^n + \text{pot.} > \text{ de } \theta,$$

então devemos ter $[F^{2m}] = 0$ para $0 \leq m \leq n-1$ e $[F^{2n}] = [M^{2n}]$.

PROPOSIÇÃO 4.34. Se existe uma ação semi-livre de S^1 em (V^6, T) com conjunto de pontos fixos M^2 então $[M^2]$ é bordo.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $1, v_1, v_2$ as classes de Chern módulo 2 de $v^2 \rightarrow M^2$ (fibrado normal complexo), portanto $v_2 \in H^4(M^2) = 0$. Assim, $v_i = 0$ para $i > 1$. Portanto existe $\gamma^1 \rightarrow N^2$ tal que $[\gamma^1 \oplus 1_{\mathbb{C}} \rightarrow N^2] = [v^2 \rightarrow M^2]$. Então

$$\bar{J}(\gamma^1 \rightarrow N^2) = \bar{J}(\gamma^1 \oplus 1_{\mathbb{C}} \rightarrow N^2)$$

$$= \bar{J}(v^2 \rightarrow M^2)$$

$$= [V^6] \theta^3 + \dots$$

Portanto, a classe de N^2 pertence a $S_2^2 = (0)$. Mas como $[M^2] = [N^2]$,

temos que $[M^2]$ é bordo.

PROPOSIÇÃO 4.35. $S_2^{2k} = (0)$ para $\forall k \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue imediatamente de (4.28) e (4.34).

Seja uma aplicação $f : M^n \rightarrow X$ onde M^n é uma variedade fechada. Seja $h^m \in H^m(X; \mathbb{Z}_2)$ uma classe de cohomologia de X . Para toda partição $i_1 + \dots + i_k = n - m$, o número

$$\langle w_{i_1} \dots w_{i_k} f^*(h^m), \sigma_n \rangle \in \mathbb{Z}_2.$$

onde w_i 's são classes de Stiefel-Whitney de M^n , e $\sigma_n \in H_n(M^n; \mathbb{Z}_2)$ é a classe fundamental, está definido. Chamamos este número um número de Whitney da aplicação f associado com h^m .

TEOREMA 4.36. Se $f : M^n \rightarrow X$ é uma variedade singular não orientada em um CW complexo X , então $[M^n, f] = 0$ se, e somente se, todos os números de Whitney de $[M^n, f]$ são nulos. (Veja [11], 17.2).

Seja $[M^n, S] \in N_n(S^1)$, então $M^n \rightarrow M^n/S$ é um S^1 -fibrado principal, logo existe uma aplicação $f : M^n/S \rightarrow \mathbb{CP}^\infty$ classificando este fibrado, única a menos de homotopia. Agora $H^*(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z}_2)$ é uma álgebra polinomial com um gerador de dimensão 2 denotado

por c . Existe $f^*(c) \in H^2(M^n/S; \mathbb{Z}_2)$, que será chamado classe característica da ação semi-livre. Portanto,

TEOREMA 4.37. A classe de bordismo $[M^n, T]$ em $N_n(S^1)$ de uma ação semi-livre de S^1 em uma variedade fechada é univocamente determinada pelos inteiros módulo 2 $\langle w_{i_1} \dots w_{i_k} c^m, \sigma_n \rangle$ onde w_i são as classes de Stiefel-Whitney de M^n/S , $\sigma_n \in H_n(M^n/S; \mathbb{Z}_2)$ é a classe fundamental de M^n/S , e $i_1 + \dots + i_k = n - m$. Estes números são os números de Whitney da ação semi-livre.

PROPOSIÇÃO 4.38. Seja $\xi : E \rightarrow V^{2m}$ um fibrado complexo k -dimensional sobre uma variedade conexa V^{2m} , onde todas as classes de Stiefel-Whitney de V^{2m} são triviais. Então se $[S(\xi), S]$ é bordo em $N_{2m+2k-1}(S^1)$, ξ é bordante em $N_{2m}(BU_k)$ a um fibrado complexo trivial.

DEMONSTRAÇÃO. Como $[S(\xi), S]$ é bordo, todos os números de Whitney desta ação livre são nulos. Mostraremos que para qualquer partição $r = i_1 + \dots + i_j$

$$p^*(v_{i_1} \dots v_{i_j}) c^{m+k-1-r} = 0 \quad \text{em} \quad H^*(\mathbb{CP}(\xi), \mathbb{Z}_2)$$

onde v_i 's são as classes de Whitney de ξ , $c \in H^2(\mathbb{CP}(\xi); \mathbb{Z}_2)$ e $p^* : H^*(V^{2m}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(\mathbb{CP}(\xi), \mathbb{Z}_2)$. Para $r = 0$, $c^{m+k-1} = 0$, desde que $\langle c^{m+k-1}, \sigma_{m+k-1} \rangle = 0$ e $\mathbb{CP}(\xi)$ é conexa. Supondo que

tenha sido provado para $r < r_0$, vamos provar que vale para r_0 . Escolha uma partição $r_0 = i_1 + \dots + i_j$, então

$$W_{i_1} \dots W_{i_j} c^{m+k-1-r_0} = 0$$

onde os W_i 's são as classes de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(\xi)$. A classe total de Stiefel-Whitney da $(2m+2k-1)$ -variedade $\mathbb{CP}(\xi)$ é:

$$W = \left(\sum_0^{2m} p^*(w_j) \right) \left(\sum_0^k p^*(v_j) (1+c)^{k-j} \right)$$

onde $1, w_1, \dots, w_m$ são as classes de Stiefel-Whitney de V^{2m} . Como as classes de Stiefel-Whitney de V^{2m} são triviais temos que

$$\left(\sum_0^{2m} p^*(w_j) \right) = 1.$$

Portanto,

$$W = (1+c)^k + p^*(v_1)(1+c)^{k-1} + p^*(v_2)(1+c)^{k-2} + \dots + p^*(v_k).$$

Assim,

$$W_i = \binom{k}{i} c^i + \binom{k-1}{i-1} c^{i-1} p^*(v_1) + \dots + p^*(v_i).$$

Então,

$$W_{i_1} \dots W_{i_j} c^{m+k-1-r_0} = p^*(v_{i_1} \dots v_{i_j}) c^{m+k-1-r_0} +$$

+ termos envolvendo termos com pot. > de c.

Pela hipótese de indução, temos que

$$p^*(v_{i_1} \dots v_{i_s}) c^{m+k-1-r} = 0 \quad \text{para } r < r_0.$$

Portanto,

$$p^*(v_{i_1} \dots v_{i_j}) c^{m+k-1-r_0} = 0.$$

Para $r_0 = m$, temos

$$p^*(v_{i_1} \dots v_{i_j}) c^{k-1} = 0$$

para toda partição de m , o que implica que $v_{i_1} \dots v_{i_j} = 0$.

Portanto, todos os números de Whitney de ξ são nulos. Assim ξ é bordante a um fibrado complexo trivial.

PROPOSIÇÃO 4.39. Seja (M^{2n}, T) uma ação semi-livre de S^1 em uma $2n$ -variedade fechada, e seja o conjunto de pontos fixos F^{2k} de T uma $2k$ -variedade conexa. Se todas as classes de Stiefel-Whitney de F^{2k} são nulas, então $[M^{2n}] = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\partial j[M, T] = [S(\xi), S] = 0$ em $N_{2m}(BU_k)$, então

pelo resultado anterior o fibrado normal a F^{2k} é trivial. Portanto,

$$\bar{J}(\xi \rightarrow F^{2k}) = [F^{2k}] \theta^k = 0$$

pois, F^{2k} é bordo. Como também

$$\bar{J}(M^{2n}, T) = [M^{2n}] \theta^n + \text{pot.} > \text{ de } \theta,$$

devemos ter $[M^{2n}] = 0$.

IV - 6. INTERPRETAÇÃO ALGÉBRICA DA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA K

Como em (II - 2), nesta secção vamos expressar $SF_*(S^1)$ como uma soma direta de determinados submódulos de $SF_*(S^1)$.

Seja $[\mathbb{CP}(n), T_0] \in SF_{2n}(S^1)$, onde

$$T_0 : (z_0, \dots, z_n) \longmapsto (sz_0, z_1, \dots, z_n).$$

O conjunto de pontos fixos dessa ação semi-livre de S^1 é

$$(1_{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{CP}(0)) \cup (\lambda \rightarrow \mathbb{CP}(n-1)).$$

Portanto, podemos escrever $[\mathbb{CP}(n), T_0] = \alpha_n + \alpha_1^n$ onde $\alpha_n = [\mathbb{CP}(n-1), \lambda]$. Assim $\alpha_n = [\mathbb{CP}(n), T_0] + \alpha_1^n$. Como $M_*(S^1)$ é uma

álgebra polinomial sobre N_* gerada pelos elementos $\alpha_n \in M_{2n}(S^1)$, para $n \geq 1$, temos que os elementos $[\mathbb{CP}(n), T_0]$ para $n \geq 2$, junto com $\alpha_1 = i \in M_2(S^1)$, formam outro sistema de geradores polinomiais de $M_*(S^1)$. Vamos denotar por $\mathbb{Q}$ a subálgebra polinomial de $SF_*(S^1)$ gerada por $[\mathbb{CP}(n), T_0]$; e por $\mathbb{Q}_{2m}$ a intersecção $\mathbb{Q} \cap SF_{2m}(S^1)$. Assim, $M_*(S^1) = \mathbb{Q}[i]$. Por (4.15), $SF_{2m}(S^1)$ consiste dos polinômios P em i sobre $\mathbb{Q}$ para os quais $\bar{J}(P)$ está no ideal gerado por θ^m .

Seja $\epsilon : \mathbb{Q} \rightarrow N_*$, a aumentação. Temos:

LEMA 4.40. Seja $q_j \in SF_{2(m-j)}(S^1)$ para $0 \leq j \leq m$. Então $Kq_j \in SF_{2(m-j+1)}(S^1)$, onde denotamos por Kq_j o elemento

$$i(q_j + [w_j^{2(m-j)}]).$$

Sendo $[w_j^{2(m-j)}] = \epsilon(q_j)$.

DEMONSTRAÇÃO. Análoga a (2.11).

Vamos denotar por K^2q_j o elemento iKq_j . Temos, pelo lema anterior, que K^2q_j pertence a $SF_{2(m-j+2)}(S^1)$. Assim, sucessivamente, $K^nq_j = iK^{n-1}q_j$ pertence a $SF_{2(m-j+n)}(S^1)$ e $K^nq_j = i^nq_j + [w_j^{m-j}]i^n$.

LEMA 4.41. Sejam $q_j \in SF_{2(m-j)}(S^1) \cap \mathbb{Q}$, $j = 0, \dots, m$. Se

$$y = q_0 + q_1 i + q_2 i^2 + \dots + q_m i^m$$

pertence a $SF_{2m}(S^1)$, então

$$y = q_0 + Kq_1 + K^2q_2 + \dots + K^mq_m$$

e $\varepsilon(q_j) = 0$.

Denotando por $\mathbb{Q}_{2m}^+ = \text{Ker}(\mathbb{Q}_{2m} \rightarrow N_{2m})$, temos:

TEOREMA 4.42. $SF_{2m}(S^1)$ é a soma direta de $\mathbb{Q}_{2m}$ e dos $K^n \mathbb{Q}_{2(m-n)}^+$ para $m \geq n > 0$, e K^n mergulha $\mathbb{Q}_{2(m-n)}^+$ em $SF_{2m}(S^1)$.

TEOREMA 4.43. O N_* -módulo $SF_*(S^1)$ é a soma direta de $\mathbb{Q}$ e dos N_* -submódulos $K^n \mathbb{Q}^+$ para $n > 0$, e K^n mergulha $\mathbb{Q}^+$ em $SF_*(S^1)$, onde $\mathbb{Q}^+ = \text{Ker}(\mathbb{Q} \rightarrow N_*)$.

V. AÇÕES DE $\mathbb{Z}_p$, p UM PRIMO ÍMPAR

Denotamos por (M^n, T) uma variedade fechada M^n junto com um difeomorfismo T de período p , p um primo ímpar. Os grupos de bordismo: $N_*(\mathbb{Z}_p)$ um grupo de bordismo de $\mathbb{Z}_p$ -ações livres, $SF_*(\mathbb{Z}_p)$ e $M_*(\mathbb{Z}_p)$ dois grupos de bordismo de $\mathbb{Z}_p$ -ações semi-livres são definidos de modo análogo aos grupos $N_*(S^1)$, $SF_*(S^1)$ e $M_*(S^1)$, respectivamente.

TEOREMA 5.01. Temos a sequência exata longa

$$\dots \longrightarrow N_n(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow SF_n(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{j_*} M_n(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow N_{n-1}(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \dots$$

onde

$$M_n(\mathbb{Z}_p) = \oplus N_{n-2k}(BU(k_1) \times \dots \times BU(k_{(p-1)/2}))$$

(veja [11], 38.3).

Seja $\tilde{N}_*(\mathbb{Z}_p)$ o grupo reduzido, isto é, $\tilde{N}_*(\mathbb{Z}_p) = \text{Ker } \bar{\epsilon}$, onde $\bar{\epsilon} : N_*(\mathbb{Z}_p) \rightarrow N_*$ é definido por $\bar{\epsilon} [M^n, T] = [M^n/T]$.

TEOREMA 5.02. A sequência curta

$$0 \longrightarrow N_n \xrightarrow{i_*} SF_n(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{j_*} M_n(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\partial} \tilde{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow 0$$

é exata. Aqui

$$i_* : N_n \rightarrow SF_n(\mathbb{Z}_p)$$

é definida por

$$i_*[M^n] = [M^n \times \mathbb{Z}_p, 1 \times \sigma]$$

onde σ é a aplicação de período p que troca os elementos de $\mathbb{Z}_p$.

TEOREMA 5.03. $\tilde{N}_*(\mathbb{Z}_p)$ é um N_* -módulo gerado pelos elementos $\{[S^{2k-1}, \rho]\}$, onde $\rho = \frac{2\pi i}{p}$.

Os N_* -módulos $SF_*(\mathbb{Z}_p)$ e $M_*(\mathbb{Z}_p)$ são anéis graduados com multiplicação induzida pelo produto cartesiano:

$$[M_0, T_0] [M_1, T_1] = [M_0 \times M_1, T_0 \times T_1].$$

Se na sequência exata

$$0 \rightarrow N_* \xrightarrow{i_*} SF_*(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{j_*} M_*(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\partial} \tilde{N}_*(\mathbb{Z}_p) \rightarrow 0$$

tomarmos $I = \text{imagem de } i_*$, I é um ideal de $SF_*(\mathbb{Z}_p)$, gerado por $[\mathbb{Z}_p, \sigma]$, desde que j_* é um homomorfismo de anel. Portanto, se

$$\widehat{SF}_*(\mathbb{Z}_p) = SF_*(\mathbb{Z}_p) / I$$

então $\widehat{SF}_*(\mathbb{Z}_p)$ é também um anel e temos:

TEOREMA 5.04. A sequência

$$0 \longrightarrow \widehat{SF}_*(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{j_*} M_*(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\partial} \widetilde{N}_*(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow 0$$

é exata.

Considere o conjunto gerador $\{\bar{\alpha}_{2k-1} : k = 1, 2, \dots\}$ para $\widetilde{N}_*(\mathbb{Z}_p)$ onde

$$\bar{\alpha}_{2k-1} = [S^{2k-1}, \rho] \quad \text{e} \quad \rho = \exp(2\pi i/p).$$

Existem variedades fechadas M^{4k} , $k = 1, 2, \dots$ tais que para cada k ,

$$\bar{\beta}_{2k-1} = p\bar{\alpha}_{2k-1} + [M^4]\bar{\alpha}_{2k-5} + [M^8]\bar{\alpha}_{2k-9} + \dots = 0$$

em $\widetilde{N}_*(\mathbb{Z}_p)$. Assim $\widetilde{N}_*(\mathbb{Z}_p)$ é isomorfo como um N_* -módulo ao quociente do N_* -módulo livre graduado gerado por

$$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_5, \dots$$

pelo submódulo gerado por

$$\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_3, \bar{\beta}_5, \dots$$

Agora considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & SF_*(S^1) & \xrightarrow{j} & M_*(S^1) & \longrightarrow & N_*(S^1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow r_p & & \downarrow r'_p & & \downarrow r''_p \\ 0 & \longrightarrow & \hat{SF}_*(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{j_*} & M_*(\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & \tilde{N}_*(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde r_p é o homomorfismo definido enviando uma S^1 -ação $[M, S]$ a uma $\mathbb{Z}_p$ -ação (restrição).

Como $N_*(S^1)$ é um N_* -módulo livre gerado por $\alpha_{2k-1} = [S^{2k-1}, S]$ onde S é uma S^1 -ação em S^{2k-1} dada por

$$S(t, (z_0, \dots, z_{2k-1})) = (tz_0, tz_1, \dots, tz_{2k-1}), \quad t \in S^1;$$

e $M_*(S^1)$ é uma álgebra polinomial gerada por $\lambda_i : [\lambda \rightarrow \mathbb{CP}(i)]$, vamos definir um N_* -submódulo B de $M_*(S^1)$ do seguinte modo: O núcleo de r''_p é o N_* -módulo livre gerado por

$$\beta_k = p\alpha_{2k-1} + [M^4]\alpha_{2k-5} + [M^8]\alpha_{2k-9} + \dots$$

onde

$$r''_p(\beta_k) = \bar{\beta}_{2k-1} = 0 \quad \text{em} \quad \tilde{N}_*(\mathbb{Z}_p).$$

Seja $\hat{\beta}_k$ definido por

$$\hat{\beta}_k = p\lambda_0^k + [M^4]\lambda_0^{k-2} + [M^8]\lambda_0^{k-4} + \dots \in M_*(S^1),$$

e seja B o N_* -módulo livre gerado por $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_5, \dots$ que é um submódulo de $M_*(S^1)$. Assim,

$$\bar{J}(\hat{\beta}_k) = 1 + [M^4]\theta^2 + [M^8]\theta^4 + \dots$$

onde $\bar{J}$ é o homomorfismo de Boardman. Denotando por x_n um elemento de base de N_* de dimensão n , temos que:

$$\bar{J}(x_{2k-2}\hat{\beta}_1) = x_{2k-2}\theta^{k-1} + \dots$$

$$\bar{J}(x_{2k-6}\hat{\beta}_3) = x_{2k-6}\theta^{k-3} + x_{2k-6}[M^4]\theta^{k-1} + \dots$$

$$\bar{J}(x_{2k-10}\hat{\beta}_5) = x_{2k-10}\theta^{k-5} + x_{2k-10}[M^4]\theta^{k-3} + \dots$$

⋮

$$\bar{J}(x_4\hat{\beta}_{k-2}) = x_4\theta^2 + x_4[M^4]\theta^4 + \dots$$

$$\bar{J}(\hat{\beta}_k) = 1 + [M^4]\theta^2 + [M^8]\theta^4 + \dots$$

é, portanto, qualquer combinação dos elementos acima apresenta potência de $\theta \leq k - 1$, o que implica que não existe nenhum

elemento em $SF_{2k}(S^1)$ com imagem não nula em B . Assim, temos que

$$j(SF_*(S^1)) \cap B = (0).$$

TEOREMA 5.05. O homomorfismo

$$r_p : SF_*(S^1) \rightarrow \hat{SF}_*(\mathbb{Z}_p)$$

é injetivo.

DEMONSTRAÇÃO. Temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow SF_*(S^1) & \xrightarrow{j} & M_*(S^1) & \xrightarrow{\simeq} & \oplus N_k(BU(r)) \\ \downarrow r_p & & \downarrow r'_p & & \downarrow r \\ 0 \rightarrow \hat{SF}_*(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{j_*} & M_*(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\simeq} & \oplus N_*(BU(r_1) \times \dots \times BU(r_k)) \end{array}$$

onde r é induzido pela inclusão no primeiro fator. Portanto, r é injetivo, o que implica que r'_p também é injetivo. Como $r'_p \circ j = j_* \circ r_p$, e j e j_* são injetivos, temos que r_p também é injetivo.

OBSERVAÇÃO 5.06. Para $p=3$, temos que r'_p é um isomorfismo pois, $M_*(S^1) \simeq \oplus N_*(BU(r))$ e também $M_*(\mathbb{Z}_3) \simeq \oplus N_*(BU(r))$ e a

aplicação r é um isomorfismo. Assim, como $B \cap j(SF_*(S^1)) = (0)$, temos que $j_*(\widehat{SF}_*(\mathbb{Z}_3)) \simeq j(SF_*(S^1)) \oplus B$, e sendo $j_* 1 = 1$,

$$\widehat{SF}_*(\mathbb{Z}_3) \simeq j(SF_*(S^1)) \oplus B.$$

Portanto,

$$SF_*(\mathbb{Z}_3) \simeq N_* \oplus j(SF_*(S^1)) \oplus B.$$

Vamos denotar por $(\mathbb{Z}_p)_n^k$ o conjunto de classes no grupo de cobordismo não orientado N_n que são representadas por uma n -variedade que é o conjunto de pontos fixos de uma $(n+k)$ -variedade fechada com uma $\mathbb{Z}_p$ -ação semi-livre. Temos que $(\mathbb{Z}_p)_n^k$ é um subgrupo de N_n , $(\mathbb{Z}_p)_n^0 = N_n$ e $(\mathbb{Z}_p)_*^k = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathbb{Z}_p)_n^k$ é um ideal de N_* .

PROPOSIÇÃO 5.07. $(\mathbb{Z}_p)_n^2 \simeq N_n$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja

$$\hat{\beta}_k = p\lambda_o^k + [M^4]\lambda_o^{k-2} + [M^8]\lambda_o^{k-4} + \dots \in M_*(\mathbb{Z}_p).$$

Como $\partial(\hat{\beta}_k) = 0 \in \tilde{N}_*(\mathbb{Z}_p)$, temos que $\hat{\beta}_k$ pertence à imagem de j_* . Em particular, $\hat{\beta}_1 = p\lambda_o$ pertence à imagem de j_* . Assim também $[x_n]p\lambda_o$ pertence à imagem de j_* , onde x_n é um gerador

de dimensão n , $n \neq 2^r - 1$, de N_* . Assim existe uma $\mathbb{Z}_p$ -ação semi-livre $[M^{n+2}, T]$ com conjunto de pontos fixos $[x_n] + \dots + [x_n]$ (p -vezes), onde p é um número primo ímpar. Como $[x_n] + \dots + [x_n] = [x_n]$, temos que $[x_n] \in (\mathbb{Z}_p)_n^2$. Portanto, $(\mathbb{Z}_p)_n^2 \simeq N_n$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALEXANDER, J. C.: The bordism ring of manifold with involutions. Proc. Amer. Math. Soc. 31(1972), 536 - 542.
- [2] BOARDMAN, J. M.: On manifolds with involution. Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), 136 - 138.
- [3] BOARDMAN, J. M.: Cobordism of involutions revisited. Lecture Notes in Math. N° 298, Springer-Verlag, Berlin (1972), 131 - 151.
- [4] BREDON, G. E.: "Introduction to compact transformation groups". Academic Press, New York and London, 1972.
- [5] CAPOBIANCO, F. L.: Involutions and semi-free S^1 -actions. Thesis, University of Virginia, 1975.
- [6] CAPOBIANCO, F. L.: Manifolds with involution whose fixed set has codimension four. Proc. Amer. Math. Soc. 61 (1976), 157 - 162.
- [7] CAPOBIANCO, F. L.: Fixed sets of involutions. Pacific J. Math. 75(1978), 339 - 345.
- [8] CONNER, P. E.: Lectures on Boardman's theory, (mimeographed notes), University of Virginia, 1966.
- [9] CONNER, P. E.: The Bordism class of a Bundle Space. Mich. Math. Journal, 14(1967), 289 - 303.
- [10] CONNER, P. E. and FLOYD, E. E.: Differentiable periodic maps. Bull. Amer. Math. Soc. 68(1962), 76 - 86.

- [11] CONNER, P. E. and FLOYD, E. E.: "Differentiable Periodic Maps". Springer-Verlag, Berlin and New York, 1964.
- [12] CONNER, P. E. and FLOYD, E. E.: Fibring within a Cobordism class. Michigan Math. Journal, 12(1965), 33 - 47.
- [13] KIIHL, J. C. S.: On the bordism of weakly complex involutions. Thesis, University of Chicago, 1975.
- [14] KIIHL, J. C. S.: Bordismo de involuções. Atas do 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1975.
- [15] KIIHL, J. C. S.: On a dual submanifold homomorphism. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, Serie II, Tomo XXIX (1980), 411 - 419.
- [16] KIIHL, J. C. S.: Bordismo e Involuções. Universidade de Campinas, 1985.
- [17] MILNOR, J. W. and STASHEFF, J. D.: "Characteristic Classes". Ann. of Math. Studies Nº 76, Princeton Univ., Press, Princeton, New Jersey, 1974.
- [18] OSSA, E.: Fixpunktfreie S^1 -Aktionen. Math. Ann. 186(1970), 45 - 52.
- [19] SHIMADA, N. and WU, C. M.: Bordism algebras of periodic transformations. Osaka J. Math. 10(1973), 25 - 32.
- [20] STONG, R. E.: Unoriented Bordism and Actions of finite Groups, Memoirs of the AMS, Nº 103, 1970.

- [21] STONG, R. E.: On fibering of cobordism classes. Trans. Amer. Math. Soc. 178(1973), 431 - 447.
- [22] UCHIDA, F.: Bordism algebra of involutions. Proc. Japan Acad. 46(1970), 615 - 619.
- [23] UCHIDA, F.: Cobordism groups of semi-free S^1 and S^3 -actions., Osaka J. Math. 7(1970), 345 - 351.