

COVARIÂNCIA, INVARIÂNCIA E PRINCÍPIO
DE RELATIVIDADE

Miriam Elizabeth Finardi Scaramion



UNICAMP

Autógrafo

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

COVARIÂNCIA, INVARIÂNCIA E O PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE

MIRIAN ELIZABETH FINARDI SCANAVINI

*Este exemplar corresponde a redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida pela S^{te} Mirian
Elizabeth Finardi Scanavini, e
aprovada pela Comissão Julgadora.*

Waldyr

Prof.Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.
Orientador

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Amor e compreensão possibilitaram este trabalho.

A João e nossos filhos
João Eduardo e Helena.

A meus pais, Maria José e
Ferúcio.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Waldyr Alves Rodrigues Jr., pela proposição do tema, pela orientação e principalmente pelo alargamento de horizonte de trabalho, o que considero de relevância inestimável em minha vida profissional.

Ao Prof. Antonio Conde, que me orientou no mestrado e na primeira fase do doutoramento e a quem devo muito de minha formação acadêmica.

A Profa. Ítala M. L. D'Ottaviano, por diversas consultas a respeito deste trabalho e imprescindível suporte na área de Lógica Matemática.

Aos Profs. Erasmo Recami e Alcibíades Rigas pelo incentivo e esclarecimentos.

Aos meus colegas, Sueli I. R. Costa, Adolfo Maia Jr., Vera Lúcia X. Figueiredo, Maria Alice Bozola Grou por sugestões recebidas e indispensável apoio.

INDICE

INTRODUÇÃO.....	i
CAPÍTULO I - Variedades como Tipos de Estrutura.....	1
§1. Teorias de Primeira Ordem e Modelos.....	1
1.1. Teorias de Primeira Ordem.....	2
1.2. Estruturas e Modelos.....	15
§2. Tipos de Estrutura e Variedades.....	22
2.1. Tipos de Estrutura.....	22
2.2. Variedades.....	24
CAPÍTULO II - Estrutura das Teorias Físicas - Grupos de Co- variância e Invariância.....	33
§1. Os Elementos de uma Teoria Física.....	34
§2. Teorias Físicas de Espaço-Tempo.....	35
§3. Covariância de um Sistema de Equações Diferenciais em $\mathbb{R}^4$..	40
§4. Grupos de Covariância de uma Teoria Física.....	50
§5. Grupos de Invariância (Simetria) de uma Teoria Física.....	55
CAPÍTULO III - Teorias Clássicas de Newton	60
§1. Cinemática e Espaço e Tempo Absolutos.....	60
1.1. Cinemática.....	61
1.2. Modelo - Espaço e Tempo Absolutos.....	71

1.3. Sistema de Referência no Espaço-Tempo Absoluto.....	72
§2. As leis de Newton na Ausência da Gravitação e o Princípio de Relatividade de Galileu.....	79
§3. Fibrado Aristotélico e Fibrado Galileano.....	87
§4. A Eletrodinâmica Clássica de Maxwell-Lorentz.....	89
§5. A Teoria Newtoniana da Gravitação e a Existência de Referências Inerciais.....	101
5.1. Teoria da Gravitação no Espaço-Tempo Galileano.....	101
5.2. O Problema dos Referenciais Inerciais.....	104
5.3. A Teoria da Gravitação em um Espaço-Tempo Curvo.....	107
CAPÍTULO IV - Variedades Lorentzianas.....	115
§1. Variedades Lorentzianas e Espaço-Tempo Relativístico.....	115
1.1. Conceito de Variedades Lorentzianas.....	115
1.2. Espaço-Tempo Relativístico.....	118
1.3. Campos Tensoriais em Variedades Lorentzianas..	121
§2. Hipersuperfícies em Variedades Lorentzianas.....	122
2.1. Métricas em Hipersuperfícies.....	122
2.2. Tensores em Hipersuperfícies.....	125
§3. Sistemas de Referência em Variedades Lorentzianas.	129
3.1. Referencial Móvel - Partícula Material.....	129

3.2. Observadores.....	131
§4. Propriedades dos Sistemas de Referência.....	132
4.1. Observadores Infinitamente Vizinhos.....	132
4.2. O Transporte de Fermi.....	136
4.3. 3-Velocidades e 3-Aceleração e Aceleração, Rotação, Cisalhamento e Expansão.....	141
§5. Separação do Espaço-Tempo e Sincronização.....	149
5.1. Distribuição.....	149
5.2. Sincronização.....	151
5.3. Sincronização de Relógios.....	154
CAPÍTULO V - O Princípio da Relatividade.....	160
§1. Relatividade Especial e o Princípio de Relatividade.....	160
1.1. Eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz-Einstein....	160
1.2. Equivalência dos Sistemas de Referência.....	165
§2. O Disco em Rotação no Espaço-Tempo de Minkowski...	173
2.1. Sincronização.....	173
2.2. Tensor Curvatura em Bases Não Coordenadas.....	177
§3. Relatividade Geral e o Princípio de Relatividade..	181
3.1. Relatividade Geral.....	181
3.2. Discussão do Princípio de Relatividade na Teoria da Relatividade Geral	187
§4. O Princípio de Relatividade no Universo que Vivemos.....	188
4.1. Espaço-Tempo Cosmológico.....	188
4.2. Exemplos: Dois Sistemas de Referência: Z,V Lo-	

calmente Inerciais e que não são equivalentes..	192
APÊNDICE.....	196
§1. Definições e Notações Utilizadas no Texto.....	196
§2. O Espaço de Minkowski e os Grupos de Lorentz e Poincaré.....	210
§3. Bases Coordenadas e Não Coordenadas - Tensor Cur- vatura.....	224
§4. Campos Tensoriais sobre Aplicações.....	235
BIBLIOGRAFIA.....	235

INTRODUÇÃO

Os conceitos de Covariância, Invariância e o Princípio da Relatividade que aparecem nas Teorias Físicas de Espaço-Tempo constituem uma das partes mais controvertidas da literatura de Física-Matemática. Em particular, estes conceitos são considerados de muita importância para as Teorias da Relatividade Geral e Especial de Einstein e como pode ser verificado, consultando-se alguns tratados de Relatividade, não existe uma concordância com relação ao significado destes conceitos.

Um dos objetivos deste trabalho é caracterizar os Grupos de Covariância e Invariância das Teorias Físicas de Espaço-Tempo. Para tanto foi necessário introduzir alguns conceitos Lógicos para a formulação do modelo matemático que representa ca da teoria em questão. O modelo matemático para estas teorias é em princípio, uma variedade diferenciável de dimensão quatro, cuja formulação é o objetivo central do capítulo I. Neste capítulo introduzimos os conceitos de Teoria de Primeira Ordem e Modelo, caracterizamos as variedades como um tipo de estrutura e aos poucos vamos enriquecendo esta estrutura com a introdução de objetos geométricos como métrica, conexão, campos vetoriais, etc. É através desses objetos geométricos que poderemos caracterizar objetos físicos como partículas, orbitas de partíciculas, campos gravitacionais, etc.

No capítulo II os Grupos de Covariância e Invariância ,

são definidos rigorosamente e generalizamos os resultados obtidos por Anderson, Scheibe, Hiskes, Recami-Rodrigues e Friedman; Estes conceitos permitem uma discussão mais precisa de modelos para uma Teoria Física de Espaço-Tempo. Para atingir este objetivo foi necessário caracterizar as Teorias Físicas através do conceito de Tipo de Estrutura definido no capítulo I. Introduzimos ainda neste capítulo os Elementos de uma Teoria Física, Sistemas de Coordenadas e Sistemas de Referência, o significado de Grupo de Covariância para um Sistema de Equações Diferenciais e damos também as diferentes interpretações (pontos de vista) para o conjunto de valores atribuídos aos objetos geométricos que satisfazem um Sistema de Equações Diferenciais.

No capítulo III apresentamos as Teorias Clássicas de Newton como Teorias de Espaço-Tempo: Cinemática e Espaço e Tempo Absolutos; as Leis de Newton na Ausência de Gravitação e o Princípio da Relatividade de Galileu; Fibrado Aristotélico e o Galileano; Eletrodinâmica Clássica de Maxwell-Lorentz; a teoria Newtoniana de Gravitação e a Existência de Referenciais Inerciais. A finalidade é mostrar como operam os conceitos de Covariância e Invariância em situações simples e analisar como surge o Princípio de Relatividade de Galileu que é a afirmação que todos os sistemas inerciais são equivalentes do ponto de vista das leis da Mecânica, quando não intervêm forças de-

pendentes da velocidade. O que há de novo neste capítulo é a caracterização de sistemas de referência como campos vetoriais de caracterização bem determinadas sobre a variedade Espaço-Tempo Newtoniano.

No capítulo IV estudamos algumas propriedades das variedades Lorentzianas e as propriedades dos sistemas de referência nestas variedades. Para isto caracterizamos as variedades Lorentzianas, Espaço-Tempo Relativístico, Campos Tensoriais e Hipersuperfícies nestas variedades, Sistemas de Referência e Observadores e suas propriedades, Observadores "infinitesimalmente vizinhos" e discutimos Separação do Espaço-Tempo e Sincronização.

Longe de ser um tratamento completo das propriedades destas variedades, esta apresentação visa a compreensão do Capítulo V.

No Capítulo V discutimos o Princípio de Relatividade nas Teorias de Relatividade Especial e Geral. Tal princípio (na Relatividade Especial) é identificado com a afirmação (PR_2 , pg.167) que todos sistemas inerciais são fisicamente equivalentes do ponto de vista das leis que regem todos os fenômenos físicos da natureza. O Princípio de Relatividade é então formulado de maneira matemática rigorosa com a introdução do conceito de grupo de equivalência de uma teoria física de Espaço-Tempo (definição 1.2.2 cap. V), que é o grupo de difeomorfismos da variedade M , que define a classe de sistemas de referência equivalentes

de acordo com T(definição 1.2.1 cap. V).

Mostramos que não existe nada parecido com o Princípio de Relatividade (afirmação PR_2 ou generalização) na teoria da Relatividade Geral e que a afirmação usual encontrada em textos de Relatividade de que nesta teoria os sistemas localmente inerciais são equivalentes é falsa.

Esta quebra de equivalência foi primeiramente detectada por Rodrigues [45]. Neste trabalho generalizamos este resultado da seguinte maneira: mostramos que existem modelos da teoria que possuem campos vetoriais tipo-tempo (isto é, referenciais) privilegiados no sentido da proposição (5.1.2) (cap. V); fazemos também a construção de um exemplo explícito.

Discutimos também no capítulo V o conceito de teorias neo-Lorentzianas que são teorias rivais da Relatividade Especial de Einstein e mostramos quando estas teorias são ou não equivalentes a Relatividade Especial, problema este que já vem sendo abordado há mais de 70 anos.

O Apêndice contém as definições e notações usadas no texto. Particularmente importante é o §2 que trata das propriedades dos vetores do espaço vetorial de Minkowski. A validade de desigualdades de Schwarz e triangular para as diversas classes de vetores (tipo-tempo, tipo espaço e tipo-luz) é aqui discutida de maneira rigorosa, fato este que não encontramos na literatura disponível.

Achamos que com algumas modificações é possível apresen-

tarmos uma classificação dos sistemas de referência usados no espaço-tempo Newtoniano, com relação a aceleração, rotação, cisalhamento e expansão de maneira análoga ao caso explicitamente desenvolvido no Capítulo IV para as variedades Lorentzianas.

Acreditamos ter obtido com este trabalho soluções originais para alguns problemas considerados importantes na literatura pertinente. Isso foi possível através de um maior rigor na "Modelagem" - Tipos de Estrutura e outros conceitos da Lógica Clássica e da utilização de Métodos Matemáticos que usaram indiscriminadamente conceitos de Geometria, Topologia Diferencial e Física. Nesta abordagem foi particularmente profícua a complementação das formações anteriores do orientador (Física-Matemática) e da orientanda (Matemática-Topologia).

CAPÍTULO I

VARIEDADES COMO TIPOS DE ESTRUTURA

Como um dos objetivos deste trabalho é caracterizar os Grupos de Invariância e Covariância das Teorias Físicas de Espaço-Tempo, necessitamos introduzir alguns conceitos lógicos para a formulação do modelo matemático que representa cada teoria em questão. O modelo matemático para estas teorias é em princípio uma variedade diferenciável de dimensão quatro, cuja formulação é o objetivo central deste capítulo.

No §1, introduzimos os conceitos de Teoria de Primeira Ordem e Modelo. No §2, caracterizamos as Variedades como um Tipo de Estrutura, e aos poucos vamos enriquecendo esta estrutura com a introdução de objetos geométricos como métrica, conexão, campos vetoriais, etc. É através destes objetos geométricos que poderemos caracterizar objetos físicos como partículas, órbitas de partículas, campos gravitacionais, etc.

§1. TEORIAS DE PRIMEIRA ORDEM E MODELOS

Vamos introduzir alguns conceitos lógicos básicos necessários para caracterizar uma Teoria de Primeira Ordem e o

conceito de Modelo (ver Mendelson [35] e Schoenfield [52]). Exemplos de Teorias de Primeira Ordem são Teoria de Grupos e Teoria de Conjuntos. Veremos também os conceitos de Teorema e Teoria Consistente, que serão necessários para a compreensão de resultados posteriores.

A Teoria de Conjuntos Zermelo-Fraenkel (ZF) é subjacente à compreensão do conceito de *típos de estrutura*, que é como caracterizamos variedades. Assim sendo, no exemplo (1.1.11) introduzimos semiformalmente uma axiomática adequada para a teoria ZF. (ver Halmos [21], Schoenfield [52] e Takeuti [54]).

1.1. TEORIAS DE PRIMEIRA ORDEM

DEFINIÇÃO 1.1.1. Uma *linguagem de primeira ordem* tem como símbolos:

- i) Variáveis $x, y, z, w, x', y', z', \dots$;
- ii) Para cada n , os símbolos de funções n -árias e os símbolos de predicados n -ários; e
- iii) os símbolos $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \exists, \forall, (,)$.

Para cada n , o número de símbolos de funções e predicados n -ários pode ser zero, diferente de zero, finito ou infinito.

Um símbolo de função 0-ária é chamado uma constante. Um

símbolo de função ou um símbolo de predicado é chamado símbolo não lógico; os outros símbolos são chamados símbolos lógicos.

Usamos x, y, z e w como variáveis sintáticas para variáveis; f e g para funções; p e q para símbolos de predicados; e c como variável sintática para constantes.

Vamos definir os conceitos de *termo* e *fórmula* através de definições indutivas generalizadas.

DEFINIÇÃO 1.1.2. *Termo*

- i) uma variável é um termo;
- ii) se $u_1, \dots, u_n$ são termos e f é uma função n -ária então $f_{u_1 \dots u_n}$ é um termo.

Observamos que os termos são exatamente as expressões que designam indivíduos. Usamos a, b, c e d como variáveis sintáticas para termos.

DEFINIÇÃO 1.1.3. Uma *fórmula atômica* é uma expressão da forma $p_{a_1 \dots a_n}$ onde p é um predicado n -ário.

DEFINIÇÃO 1.1.4. *Fórmula*

- i) uma fórmula atômica é uma fórmula;
- ii) se u é uma fórmula, então $\neg u$ é uma fórmula;

iii) Se u e v são fórmulas, então $u \vee v$, $u \wedge v$ e $u \rightarrow v$ são fórmulas;

iv) se u é uma fórmula, então $\exists x u$ e $\forall x u$ são fórmulas

Usamos $A, B, C, \dots$ como variáveis sintáticas para fórmulas.

Uma *linguagem* L de *primeira ordem* é uma linguagem na qual os símbolos e fórmulas são como os descritos acima.

Uma linguagem de primeira ordem fica, portanto, completamente determinada por seus símbolos não lógicos.

Daremos agora as definições precisas para *ocorrência livre* e *ligada* de uma variável.

DEFINIÇÃO 1.1.5. Uma ocorrência x em A é *ligada* em A se ela ocorre em uma parte de A da forma $\exists x B$ ou $\forall x B$; em caso contrário ela é *livre* em A .

DEFINIÇÃO 1.1.6. Dizemos que x é *livre* (*ligada*) em A se alguma ocorrência de x é livre (*ligada*) em A .

Usamos $b_x[a]$ para designar a expressão obtida, a partir do termo b , substituindo-se cada ocorrência de x por a , e usamos $A_x[a]$ para designar a expressão obtida a partir da fórmula A , substituindo-se cada ocorrência livre de x por a .

DEFINIÇÃO 1.1.7. Dizemos que a variável x pode ser substituída pelo termo a , na fórmula A , se para cada variável y que ocorre em a nenhuma parte de A da forma $\exists yB$ ou $\forall yB$ contém uma ocorrência de x que é livre em A .

Convencionamos que, ao usarmos $A_x[a]$, subentendemos que A , x e a representam expressões tais que x pode ser substituído por a em A .

Podemos estender essa notação para várias variáveis. Indicamos por $b_{x_1, \dots, x_n}[a_1, \dots, a_n]$ o termo obtido, a partir de b , substituindo-se todas as ocorrências de $x_1, \dots, x_n$ por $a_1, \dots, a_n$ respectivamente; e indicamos por $A_{x_1, \dots, x_n}[a_1, \dots, a_n]$ a fórmula obtida, a partir de A , substituindo-se todas as ocorrências livres de $x_1, \dots, x_n$ por $a_1, \dots, a_n$.

Como no caso de uma variável, convencionamos que, quando $A_{x_1, \dots, x_n}[a_1, \dots, a_n]$ for usado estará subentendida que A , $x_1, \dots, x_n$, $a_1, \dots, a_n$ representam expressões tais que x_i pode ser substituído por a_i em A , para $i = 1, \dots, n$. Podemos omitir os índices $x_1, \dots, x_n$ quando estiverem claros no contexto.

OBSERVAÇÃO 1.1.8. $A \leftrightarrow B$ é, por definição, $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. Chamamos $\neg A$ a negação de A ; $A \vee B$ a disjunção de A e B ; $A \wedge B$ a conjunção de A e B ; $A \rightarrow B$ a implicação de B por A ; $A \leftrightarrow B$ a equivalência de A e B ; $\exists xA$ a instanciação de A por x .

$\forall xA$ a generalização de A por x .

DEFINIÇÃO 1.1.9. Uma *teoria* (ou sistema axiomático) de *primeira ordem* ou simplesmente uma *teoria* é um sistema formal T tal que:

i) a *língua* de T , $L(T)$, é uma *língua* de primeira ordem;

ii) os *axiomas* de T . Estes se subdividem em *axiomas lógicos* (listados abaixo) e *axiomas não lógicos* (específicos de cada teoria).

Os axiomas lógicos e as regras de T são os seguintes:

$$\text{Ax1: } A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\text{Ax2: } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$\text{Ax3: } A \wedge B \rightarrow A$$

$$\text{Ax4: } A \wedge B \rightarrow B$$

$$\text{Ax5: } A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

$$\text{Ax6: } A \rightarrow (A \vee B)$$

$$\text{Ax7: } B \rightarrow (A \vee B)$$

$$\text{Ax8: } (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$$

$$\text{Ax9: } (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$$

$$\text{Ax10: } \neg \neg A \rightarrow A$$

Ax11: $\forall x A(x) \rightarrow A(t)$, se x é livre para t em $A(x)$

Ax12: $A(t) \rightarrow \exists x A(x)$, se x é livre para t em $A(x)$

R_1 : $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$ (Regra de Modus Ponens)

R_2 : $\frac{A \rightarrow C}{\exists x A \rightarrow C}$, se x não é livre em C
(Regra de Introdução do Existe ($\exists$))

R_3 : $\frac{C \rightarrow A}{C \rightarrow \forall x A}$, se x não é livre em C
(Regra de Introdução de qualquer que
seja ($\forall$)).

Assim sendo o que especifica uma teoria são os seus símbolos não lógicos e seus axiomas não lógicos.

EXEMPLO 1.1.10. Teoria de Grupos. O sistema axiomático para grupos é chamado Teoria Elementar de Grupos e indica-se por G . O único símbolo não lógico é o símbolo de função binária $\cdot$. Os axiomas não lógicos de G são

$$G_1 \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$G_2 \quad \exists x (\forall y (xy = y)) \wedge \forall y \exists z (zy = x)$$

EXEMPLO 1.1.11. Teoria dos Conjuntos, conhecida por *Teoria dos Conjuntos Zermelo-Fraenkel* e indicada por ZF. Nesta teoria a idéia intuitiva de coleção de objetos, é a de "conjunto".

Na Linguagem de Primeira Ordem para a teoria ZF, temos:

Variáveis: $x, y, \dots$ referem-se a conjuntos

Símbolos e Predicados: O único símbolo de predicado é o símbolo " $\in$ " do predicado binário de "pertinência"

Conectivos: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \forall, \exists$ e $()$.

Termo: Uma variável individual é um termo

Fórmula Atômica: Se x e y são variáveis individuais, então $x \in y$ é uma fórmula atômica.

Usaremos φ, ψ, η como meta-variáveis para fórmulas.

Fórmula: i) Uma fórmula atômica é uma fórmula

ii) Se φ e ψ são fórmulas, então $\neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \rightarrow \psi$ são fórmulas.

iii) Se φ é uma fórmula e x é uma variável, então $\forall x\varphi$ e $\exists x\varphi$ são fórmulas.

A partir da linguagem acima descrita, acrescentando-se os axiomas não lógicos específicos aos axiomas lógicos e regras de inferência subjacentes às Teorias de Primeira Ordem, obtemos a

a Teoria de Conjuntos Zermelo-Fraenkel.

Em ZF podemos definir a igualdade (=).

DEFINIÇÃO. $a = b =_{df} (\forall x) (x \in a \leftrightarrow x \in b)$

AXIOMA 1 (Axioma da Extensionalidade)

$(\forall a) (\forall x) (\forall y) (x = y \wedge x \in a \rightarrow y \in a)$

Em ZF é fácil demonstrar a partir do Axioma 1, que:

i) $(\forall x) (x = x)$

ii) $(x = y) \rightarrow (\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y))$ (Propriedade da substituição para a igualdade.

Para cada fórmula $\varphi(x, a_1, \dots, a_n)$, introduzimos um símbolo de classe

$$\{x / \varphi(x, a_1, \dots, a_n)\}$$

que é lido como a "classe de todos os x tais que $\varphi(x, a_1, \dots, a_n)$ ". Nossa interpretação principal é que o símbolo de classe $\{x / \varphi(x)\}$ denota a classe dos indivíduos x que tem a propriedade $\varphi(x)$. Observamos que "classe" é uma extensão da noção de conjunto de modo que todo conjunto é uma classe ($a = \{x / x \in a\}$),

porém nem toda classe é conjunto (por exemplo, a classe de todos os conjuntos $V = \{x / x = x\}$).

Introduzimos, em ZF, o predicado $M(A)$ para A é um conjunto. Isto é

DEFINIÇÃO: $M(A) =_{df} (\exists x) (x = A)$

Obtemos então,

$$A \in \{x / \varphi(x)\} \leftrightarrow M(A) \wedge \varphi(A) ,$$

o que significa que A é um conjunto e que satisfaz a propriedade φ .

Com as definições de *par* $\{a,b\}$, *conjunto união* $\cup(A)$ e *conjunto potência* $P(a)$, podemos introduzir mais alguns axiomas de ZF.

DEFINIÇÃO:

$$\{a,b\} =_{df} \{x / x = a \vee x = b\}$$

$$\cup(A) =_{df} \{x / \exists y (x \in y \wedge y \in A)\}$$

$$A \subseteq B =_{df} (\forall x) (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$P(a) =_{df} \{x / x \subseteq a\}.$$

Postulamos, em ZF, que pares de dois conjuntos quaisquer são conjuntos, a união de um conjunto é um conjunto, e que o conjunto potência de um conjunto qualquer é um conjunto.

AXIOMA 2. (Axioma do Par)

$$(\forall a) (\forall b) \quad M(\{a,b\})$$

AXIOMA 3. (Axioma das Uniões)

$$(\forall a) \quad M(U(a))$$

AXIOMA 4. (Axioma das Potências)

$$(\forall a) \quad M(P(a))$$

O *Axioma da Substituição*, introduzido por Fraenkel, determina que funções levam conjuntos em conjuntos, ou seja, se a fórmula $\varphi(x,y)$ é uma função, então

$$(\forall a) \quad M(\{y / (\exists x \in a), \varphi(x,y)\}).$$

AXIOMA 5. (Axioma da Substituição)

$$\begin{aligned} & [(\forall a) (\forall u) (\forall v) (\forall w) [\varphi(u,v) \wedge \varphi(u,w) \rightarrow v = w] \rightarrow \\ & \rightarrow (\exists b) (\forall y) [y \in b \leftrightarrow (\exists x) [x \in a \wedge \varphi(x,y)]] \end{aligned}$$

O *Axioma da Separação* de Zermelo afirma que a classe de todos os objetos de um conjunto que têm uma dada propriedade é um conjunto, ou seja, $M(a \cap A)$.

AXIOMA 6. (Axioma da Separação)

$$(\forall a) (\exists b) (\forall x) (x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)).$$

Utilizando o Axioma 6, denotamos

$$\{x / x \in a \wedge \varphi(x)\} \text{ por } \{x \in a / \varphi(x)\}$$

Observamos que, a partir do Axioma da Separação, podemos provar que a classe $\{x / x \neq x\}$, a qual denotamos por $\emptyset$, é um conjunto, chamado vazio. O conjunto $\emptyset$ é o primeiro conjunto que exibimos em ZF. De fato, a teoria ZF é uma teoria construtiva, no sentido que os "conjuntos" são construídos a partir do conjunto $\emptyset$.

O Axioma da Separação de Zermelo pode ser demonstrado a partir do Axioma da Substituição de Fraenkel. Entretanto, eles não são equivalentes.

Para excluir a possibilidade que um conjunto possa ser elemento de si mesmo (isto é, excluir $a \in a$) e também para impedir a possibilidade de cadeias de $\in$ (isto é, para $a_1, \dots, a_n$ quaisquer, excluir $a_1 \in a_2 \in \dots \in a_n \in a_1$) temos o *Axioma da*

Regularidade, também conhecido como *Axioma da Fundamentação*, o qual determina que todo conjunto não vazio contém um elemento x com a propriedade que nenhum elemento de x é também um elemento de a (isto é, se $a \neq \emptyset$ então $\exists u \in a$ tal que $u \cap a = \emptyset$).

Axioma 7. (Axioma da Regularidade)

$$a \neq \emptyset \rightarrow (\exists x) (x \in a \wedge x \cap a = \emptyset)$$

O Axioma da Regularidade é relevante na teoria ZF porque a partir dele provamos que $(\forall a) (a \notin a)$ e, como consequência disso, obtemos um resultado central da teoria que diz que a classe $V = \{x / x = x\}$ de todos os conjuntos não é um conjunto.

O Axioma do Infinito postula que existe um conjunto infinito.

AXIOMA 8. (Axioma do Infinito): Existe um conjunto A tal que

- i) $\emptyset \in A$
- ii) $(\forall x) (x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A)$

Pelo Axioma do Infinito provamos que a classe $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados números naturais, é um conjunto (infinito).

AXIOMA 9. (Axioma da Escolha).

Dada uma família não vazia de conjuntos não vazios disjuntos dois a dois, existe um conjunto consistindo de exatamente um elemento de cada conjunto da família.

O axioma pode ser expresso, de forma simplificada, mais fraca, como abaixo, onde f é a "função escolha"

$$(\forall a) (\exists f) (\forall x \in a) ((x \neq \emptyset) \rightarrow (f(x) \in x))$$

Incluimos ainda em 1.1. , os conceitos de *Teorema* e *Teoria Consistente*, porque são necessários para a compreensão de resultados posteriores.

DEFINIÇÃO 1.1.12. *Teorema*.

i) Os axiomas de uma teoria de primeira ordem T são teoremas de T ;

ii) Se todas as hipóteses de uma regra de T são teoremas de T , então a conclusão da regra é um teorema de T .

Denotamos que A é um teorema da teoria T por $\vdash_T A$.

DEFINIÇÃO 1.1.13. Uma teoria T é *consistente* se ela não tem como teorema uma fórmula A e sua negação $\neg A$. Em caso contrário,

a teoria é dita *inconsistente*.

1.2. ESTRUTURAS E MODELOS

O objetivo deste parágrafo é a definição de Estrutura e a de Modelo, que são conceitos que serão utilizados neste trabalho.

Um significado para uma linguagem de primeira ordem consiste de um universo e um significado do tipo apropriado para cada símbolo não lógico. Introduzindo essa noção adequadamente, temos a definição de *estrutura* para uma linguagem de primeira ordem.

DEFINIÇÃO 1.2.1. Seja L uma linguagem de primeira ordem. Uma *estrutura* $\mathcal{A}$ para L consiste de:

i) Um conjunto não vazio $|\mathcal{A}|$ chamado universo de $\mathcal{A}$. Os elementos de $|\mathcal{A}|$ são chamados indivíduos de $\mathcal{A}$.

ii) Para cada símbolo de função n -ária f de L , uma função n -ária $f_{\mathcal{A}}$ de $|\mathcal{A}|$ em $|\mathcal{A}|$.

iii) Para cada símbolo de predicados n -ário p de L , um predicado n -ário $p_{\mathcal{A}}$ em $|\mathcal{A}|$.

Queremos definir que uma fórmula A é válida em uma estrutura $\mathcal{A}$ quando "todos os significados de A são verdadeiros em $\mathcal{A}$ ". Seria então conveniente que, para cada significado de A , pudéssemos ter uma fórmula que expressasse exatamente esse significado.

DEFINIÇÃO 1.2.2. Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura para L . Para cada indivíduo a de $\mathcal{A}$, escolhemos uma nova constante, chamada o nome de a (é claro que atribuímos nomes distintos para indivíduos distintos). A linguagem de primeira ordem obtida, a partir de L , acrescentando-se todos os nomes de indivíduos de $\mathcal{A}$, é designada por $L(\mathcal{A})$.

Usaremos i e j como variáveis sintáticas para nomes.

DEFINIÇÃO 1.2.3. Seja a um termo livre de variáveis de $L(\mathcal{A})$.

i) Se a é um nome, $\mathcal{A}(a)$ é o indivíduo do qual a é o nome.

ii) Se a não é um nome, então a não tem variáveis e deve ser da forma $f_{a_1 \dots a_n}$, com f um símbolo de função de L . Fazemos

$$\mathcal{A}(a) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(a_1), \dots, \mathcal{A}(a_n)) .$$

OBSERVAÇÃO 1.2.4. Uma fórmula A é *fechada* se nenhuma variável é livre em A . Isso significa que A tem apenas um significado.

Queremos definir um *valor de verdade* $\mathcal{O}(A)$ para cada fórmula fechada A em $L(\mathcal{O})$. Para isto introduzimos as funções de verdade.

Selecionamos dois objetos distintos, V e F , os quais chamamos de *valores de verdade*. Atribuímos um valor de verdade a cada fórmula, da seguinte maneira: se a fórmula é verdadeira atribuímos o valor V ; se é falsa, o valor F .

Uma *função de verdade* é uma função H de $\{V, F\}^n$ em $\{V, F\}$:

i) se o símbolo $\wedge$ significa e:

A função binária $H_{\wedge}$ para a e b , valores de verdade de A e B respectivamente, é tal que $H_{\wedge}(a, b)$ é o valor verdade de $A \wedge B$. Essa função de verdade é descrita pelas equações:

$$H_{\wedge}(V, V) = V$$

$$H_{\wedge}(V, F) = H_{\wedge}(F, V) = H_{\wedge}(F, F) = F.$$

ii) Se o símbolo $\vee$ significa ou:

$$H_{\vee}(V, V) = H_{\vee}(V, F) = H_{\vee}(F, V) = V$$

$$H_{\vee}(F, F) = F$$

iii) Se o símbolo $\rightarrow$ significa, se ... então:

$$H_{\rightarrow}(V,V) = H_{\rightarrow}(F,V) = H_{\rightarrow}(F,F) = V$$

$$H_{\rightarrow}(V,F) = F$$

iv) Se o símbolo $\neg$ significa a negação, então

$$H_{\neg}(F) = V \quad \text{e} \quad H_{\neg}(V) = F$$

v) Se o símbolo $\leftrightarrow$ significa se e somente se:

$$H_{\leftrightarrow}(V,V) = H_{\leftrightarrow}(F,F) = V$$

$$H_{\leftrightarrow}(V,F) = H_{\leftrightarrow}(F,V) = F$$

DEFINIÇÃO 1.2.5.

i) Se $A \tilde{=} a = b$ fazemos

$$\mathcal{O}(A) = V \quad \text{se e somente se} \quad \mathcal{O}(a) = \mathcal{O}(b)$$

ii) Se $A \tilde{=} p_{a_1 \dots a_n}$, com p distinto do predicado de igualdade, fazemos

$$\mathcal{O}(A) = V \quad \text{se e somente se} \quad P_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(a_1), \dots, \mathcal{O}(a_n))$$

iii) Se A é $\neg B$, então

$$\mathcal{O}(A) = H_{\neg}(\mathcal{O}(B))$$

iv) Se A é $B \vee C$, então

$$\mathcal{O}(A) = H_{\vee}(\mathcal{O}(B), \mathcal{O}(C))$$

v) Se A é $\exists xB$, então

$$\mathcal{O}(A) = V \text{ se e somente se } \mathcal{O}(B_x[i]) = V \text{ para algum } i \text{ em } L(\mathcal{O})$$

vi) Se A é $\forall xB$

$$\mathcal{O}(\forall xB) = V \text{ se e somente se } \mathcal{O}(B_x[i]) = V \text{ para todo } i \text{ em } L(\mathcal{O})$$

Para os símbolos $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ procede-se de forma análoga. Da mesma maneira, encontramos o valor de verdade para fórmulas do tipo:

$$A_1 \vee \dots \vee A_n, \quad A_1 \wedge \dots \wedge A_n.$$

DEFINIÇÃO 1.2.6. Se A é uma fórmula de L , uma $\mathcal{O}$ -instância de A é uma fórmula fechada da forma $A[i_1, \dots, i_n]$ em $L(\mathcal{O})$.

DEFINIÇÃO 1.2.7. Uma fórmula A de L é *válida* em $\mathcal{A}$ se $\mathcal{A}(A) = V$ para cada $\mathcal{A}$ -instância A' de A .

DEFINIÇÃO 1.2.8. Uma fórmula A fechada de L é *válida* em $\mathcal{A}$ se e somente se $\mathcal{A}(A) = V$.

DEFINIÇÃO 1.2.9. Um *modelo* de uma teoria T é uma estrutura para $L(T)$ na qual todos os axiomas não lógicos de T são válidos.

EXEMPLO 1.2.10. Uma estrutura para $L(G)$ pode ser descrita como um conjunto não vazio (o universo), com uma operação binária (a função associada a $\cdot$). Tal estrutura será um modelo de G se e somente se é um grupo. $(\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \dots)$.

EXEMPLO 1.2.11. Um modelo para ZF é uma coleção qualquer de "objetos", chamados conjuntos, que satisfaz os axiomas da teoria.

DEFINIÇÃO 1.2.12. Uma fórmula é *válida* em T se ela é válida em todos os modelos de T .

O objetivo de um sistema formal é encontrar um processo para provar teoremas. Assim sendo, uma questão particularmente importante para qualquer sistema formal é encontrar um condição necessária e suficiente para que uma fórmula de $L(T)$ seja um

teorema de T .

Essa questão, chamada *problema da caracterização* encontra, com os Teoremas da Completude, uma primeira solução significativa.

TEOREMA DA COMPLETUDE, PRIMEIRA FORMA (Gödel): Uma fórmula A de uma teoria T é um teorema de T se e somente se é válida em T (veja [35])

O teorema tem uma segunda forma, concernente à consistência.

TEOREMA DA COMPLETUDE, SEGUNDA FORMA. Uma teoria T é consistente se e somente se tem um modelo (ver [35]).

É importante observarmos que as duas formas do Teorema da Completude estabelecem a equivalência entre um conceito sintático (teorema; consistência) e um conceito semântico (validade; modelo).

Observamos ainda que, neste trabalho, como é usual em Matemática, quando nos referimos a estruturas para certas linguagens $L(T)$, subentendemos muitas vezes que essas estruturas são modelos das respectivas teorias T .

§2. TIPOS DE ESTRUTURA E VARIEDADES

Estamos interessados em estudar algumas teorias físicas cujos modelos matemáticos são "*tipos de estrutura*" chamados *variedades*. Como a estrutura de variedade não é uma estrutura de primeira ordem, para formulá-la nós utilizaremos uma extensão do sistema ZF (ver §1) que contém todos os conceitos auxiliares que serão necessários, indicaremos esta extensão por ZFT.

Ao tomarmos esta teoria dos conjuntos ZFT como teoria subjacente para a construção de nossos tipos de estruturas, estamos assumindo as noções de conjunto, relação, função, função com propriedades e características específicas, operações entre conjuntos, conjunto das partes (P) etc.; o conjunto dos números reais será denotado por $\mathbb{R}$. Assumiremos também os conceitos de anel, espaço vetorial, espaço topológico, fibrado, etc (ver Apêndice).

Primeiramente veremos uma definição de tipo de estrutura baseada no conceito dado pelo grupo Bourbaki (ver Scheibe [51]); e depois utilizando esta definição caracterizaremos as variedades.

2.1. TIPOS DE ESTRUTURA

DEFINIÇÃO 2.1.1. Um tipo de estrutura σ é um conjunto finito de

fórmulas de ZFT, que dependem de certas variáveis, as quais indicam os conceitos básicos que estão inter-relacionados pelos axiomas (alguns índices são suprimidos).

$$X_1 \neq \emptyset \quad \dots \quad X_n \neq \emptyset$$

$$(1) \quad F_1 \in \sigma_1[X, a] \wedge \dots \wedge F_n \in \sigma_n[X, a]$$

$$\alpha(X, \xi, F)$$

onde

X_μ são os conceitos básicos principais (variáveis)

F_i são conceitos derivados

a_k são conceitos básicos auxiliares (termos), que dependem dos X_μ , F_i e possivelmente de variáveis ξ diferentes de X_μ e F_i .

As tipificações $F_i \in \sigma_i[X, a]$ são as fórmulas e $\sigma_i[X, a]$ são termos construídos de X_μ e a_k por aplicações sucessivas de operações que nos conduzem a conjuntos de partes $P(X_\mu)$ ou a potências destes conjuntos e produtos cartesianos. A natureza de σ é determinada pela segunda linha de (1), em relação a X e a conjuntos constantes de ZFT; $F \in \sigma[X, a]$ fornece todos os termos e predicados necessários; $\alpha(X, \xi, F)$ é uma fórmula (axioma

próprio) nas variáveis X_μ , ξ_k e F_i , satisfazendo a seguinte condição de invariância

$$\vdash_T (X', \xi, F') \leftrightarrow \alpha(X, \xi, F)$$

onde X'_μ resulta de X_μ por uma bijeção qualquer e F'_i resulta de F_i por correspondentes bijeções canônicas que são determinadas pela anterior e pela segunda linha de (1). Consequentemente, F'_i satisfazem a

$$\vdash_T F'_i \in \sigma_i[X', a] \quad (\text{ver Scheibe [51]})$$

Exemplos de tipos de estruturas em Matemática são os modelos das teorias de grupos, anéis, espaços vetoriais, espaços topológicos, variedades e fibrados.

Observamos que as duas primeiras estruturas (grupos, anéis) tem tipos distintos das demais. Enquanto que no primeiro caso "operamos" internamente dentro do conjunto (estrutura de primeira ordem), nos demais necessitamos de conjuntos auxiliares, como $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, ou potências e produtos cartesianos destes.

2.2. VARIEDADES

Estamos interessados em estudar propriedades das teorias

físicas de espaço tempo, cujos modelos matemáticos são tipos de estrutura chamadas variedades. Com esta finalidade introduziremos uma classe especial de variedades; iremos aumentando gradativamente as estruturas em nossas variedades, colocando estruturas adicionais (objetos geométricos) como métrica, campos vetoriais e conexão, etc, de maneira que estas variedades possam descrever modelos para as teorias físicas de espaço tempo.

2.2.1. VARIEDADES GLOBAIS

Inicialmente damos a construção de variedades globais, isto é, variedades que são homeomorfas ao $\mathbb{R}^n$.

Seja M um conjunto básico principal. Consideremos dois conjuntos básicos auxiliares $\mathbb{R}^n$ (com sua topologia usual) e um grupo G dos difeomorfismos de um espaço vetorial real de dimensão n . Uma estrutura será dada por

$$M \neq \emptyset$$

$$(1) \quad F \in P^2(M \times \mathbb{R}^n)$$

$$\alpha_{(vg)}(M, F)$$

onde $\alpha_{(vg)}$ diz que:

- i) os elementos $\varphi \in F$ são bijeções de M sobre $\mathbb{R}^n$;
- ii) Se $\psi, \varphi \in F$ então $\psi\varphi^{-1} \in G$;
- iii) Se $\varphi \in F$ e $g \in G$ então $g\varphi \in F$.

Estas exigências i), ii) iii) transformam F em um sistema de coordenadas globais completo sobre o espaço M , com relação ao grupo G de transformações de coordenadas. Induzimos a topologia em M , a partir da topologia de $\mathbb{R}^n$, exigindo que $A \subset M$ é um subconjunto aberto se e somente se $\varphi(A) \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto. ii) e iii) dizem que o atlas é maximal (para uma carta), isto é, se $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é bijeção, tal que se $\psi \in F$ é $\varphi \circ \psi^{-1} \in G$, então $\varphi \in F$ (pois $(\varphi \circ \psi^{-1}) \circ \psi = \varphi \in F$).

Neste caso poderemos indicar a estrutura de variedade global por (U, F) , onde U é o "universo" da estrutura (U é constituído pelo conjunto M , por $\mathbb{R}^n$, e por potências e produtos cartesianos destes) e F é um objeto geométrico construído a partir dos elementos de U . Para simplificar, utilizaremos (M, F) no lugar de (U, F) .

Os exemplos mais importantes de (vg) aplicados em Física são aqueles nos quais a variedade M é interpretada como espaço-tempo ($n = 4$), F é a classe de sistemas de coordenadas preferencial no espaço-tempo e G é um dos seguintes grupos de

transformação de coordenadas: (G_{new}) , o produto direto dos grupos Euclidianos do espaço-tempo pelo grupo das translações temporais; (G_{gal}) , o grupo de Galileu; (G_{poi}) , o grupo de Poincaré; (G_{dif}) , o grupo dos difeomorfismos, etc. (Ver Capítulo III).

Para uma descrição mais completa da realidade física teremos que enriquecer as (vg) com estruturas adicionais como métrica, conexão, campos vetoriais, etc.

2.2.2. VARIEDADES - CASO GERAL

Até aqui estudamos variedades M que são homeomorfas ao $\mathbb{R}^n$ (variedades com coordenadas globais (vg)). Vamos agora introduzir um tipo de estrutura para variedades com qualquer sistema de coordenadas locais. Para isto, substituímos a exigência de G ser um grupo dos difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ pela afirmação que $G = G_p$ é um pseudo-grupo de difeomorfismos locais em $\mathbb{R}^n$ (ver Apêndice).

A extensão do conceito de variedade global à variedade será feita através da extensão de tipo de estrutura.

Dado um tipo de estrutura (σ, α) , ele pode ser estendido adicionando-se novas tipificações $F \in \sigma[X, a]$ e axiomas $\alpha(X, \tilde{\epsilon}, F_0, S)$, ambos referindo-se à antiga base de conjuntos tais que $(\sigma_0 \times \sigma; \alpha_0 \wedge \alpha)$ ainda é um tipo de estrutura.

No que se segue as extensões que vamos fazer além de generalizar a definição de variedade incluem novas tipificações que permitirão a introdução de métrica e conexão na variedade.

DEFINIÇÃO DE VARIEDADE

Seja $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ ($M_i \subset M$ é um subconjunto aberto)

Conjuntos básicos principais M_i , $i \in I$

Conjuntos básicos auxiliares $\mathbb{R}^n$, G_p

F_i , $i \in I$, conjuntos derivados, $F_i \subset P^2(M_i \times \mathbb{R}^n)$

tais que

$M_i \neq \emptyset$, para todo $i \in I$

$$(1) \quad F_1 \in P^2(M_1 \times \mathbb{R}^n) \wedge \dots \wedge F_i \in P^2(M_i \times \mathbb{R}^n) \wedge \dots \\ \alpha_v(M, F)$$

onde α_v diz que

a) os elementos φ_i de F_i são bijeções de M_i sobre $\mathbb{R}^n$

b) Se φ_i e ψ_i são elementos de F_i então $\varphi_i \circ \psi_i^{-1} \in G_p$

c) Se $\varphi_i \in F_i$ e $g \in G_p$ então $g \circ \varphi_i^{-1} \in F_i$

d) Se $M_i \cap M_j \neq \emptyset$, $\varphi_i \in F_i$ e $\varphi_j \in F_j$ então,
 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in G_p$ e $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \in G_p$.

e) Se $\bar{\varphi}$ é uma bijeção de W em $\mathbb{R}^n$, onde W é um subconjunto aberto de M , e se $W \cap M_i \neq \emptyset$, para algum i e $\bar{\varphi} \circ \varphi_i^{-1} \in G_p$ e $\varphi_i \circ \bar{\varphi}^{-1} \in G_p$, então $\bar{\varphi} \in F_k$ para algum k ($k \in I$).

Analogamente ao caso anterior da variedade com coordenadas globais (vg), nossa variedade pode ser indicada por (M, F) .

2.2.3. MÉTRICA NA VARIEDADE

Podemos introduzir uma extensão da estrutura como o realizado no caso (vg), para obtermos uma descrição mais completa da realidade física. Este conceito é suficientemente geral para incluir todos os tipos de variedades que são conhecidos pela geometria diferencial tais como variedades riemannianas, variedades com conexão afim, etc.

Seja (M, F) uma variedade como em (2.2.2). Para cada ponto $p \in M$, associamos um espaço vetorial real de dimensão n , $\mathbb{R}^n$, que indicamos por $T_p M$ - espaço tangente a M em p

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i, \quad (M_i \text{ é subconjunto aberto de } M).$$

Conjuntos básicos principais, M_i , $i \in I$

Conjuntos básicos auxiliares, $\mathbb{R}^n$, G_p , $\mathbb{R}$

Conjuntos derivados $F_i \in \mathcal{P}^2(M_i \times \mathbb{R}^n)$ e

$$S_k \in \mathcal{P}(T_p M \times T_p M \times \mathbb{R})$$

tais que

$$M_i \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in I$$

$$F_1 \in \mathcal{P}^2(M_1 \times \mathbb{R}^n) \wedge \dots \wedge F_i \in \mathcal{P}^2(M_i \times \mathbb{R}^n) \wedge \dots$$

$$S_k \in \mathcal{P}(T_p M \times T_p M \times \mathbb{R})$$

$$\alpha_v(M, F) \wedge \beta_v(M, F, S)$$

onde

$\alpha_v(M, F)$ são os axiomas que dão estrutura de variedade (ver 2.2.2)

$\beta_v(M, F, S)$ diz que: para todo u e v pertencentes a $T_p M$, se $g \in S_k$ então $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica, isto é, $g(u, v) = g(v, u)$.

O conjunto M com estrutura de variedade e com métrica g , será indicado por (M, F, g) ou simplesmente (M, g) .

2.2.4. CONEXÃO NA VARIEDADE

Vamos acrescentar à nossa variedade (M, F) a conexão. A cada subconjunto aberto $U_i \subset M$, associamos uma aplicação $f_i \in P(U_i \times \mathbb{R}^n)$, que será chamada um campo vetorial em M . Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i ; (M_i, i \in I, \text{ é subconjunto aberto de } M)$$

Conjuntos básicos principais $M_i, i \in I$

Conjuntos básicos auxiliares $\mathbb{R}^n, G_p$

Conjuntos derivados F_i e C_j

axiomas α_v e γ_v

tais que

$$M_i \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in I$$

$$F_1 \in P^2(M_1 \times \mathbb{R}^n) \wedge \dots \wedge F_i \in P^2(M_i \times \mathbb{R}^n) \wedge \dots \wedge$$

$$C_j \in P(\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)) \times \mathcal{X}(M)$$

$$\alpha_v(M, F) \times \gamma_v(M, F, C)$$

onde $\alpha_v(M,F)$ são os axiomas que dão a estrutura de variedades (ver 2.2.2)

e $\gamma_v(M,F,C)$ diz que: se D é um elemento de C_j , então D satisfaz as propriedades:

$$i) D(fX + fY, Z) = fD(X,Y) + gD(Y,Z)$$

$$ii) D(X, Y + Z) = D(X,Y) + D(X,Z)$$

$$iii) D(X, fY) = fD(X,Y) + X(f)Y$$

onde X,Y,Z são elementos de $\mathfrak{X}(M)$ e f,g elementos de $\mathcal{D}(M)$ e $X(f)$ é a derivada direcional da função f na direção do campo X .

O conjunto M com estrutura de variedade e com conexão D , será indicado por (M,F,D) ou simplesmente por (M,D) .

No Capítulo III para descrevermos as teorias físicas de espaço-tempo precisamos introduzir estruturas adicionais a estas variedades. Necessitamos de novos objetos geométricos (tipificações) que descreverão os objetos físicos sujeitos a investigação como órbitas de partículas, campos de vetores, etc. Além disso, os axiomas terão acréscimos necessários para que possamos descrever as leis físicas que estes objetos devem obedecer tais como leis de movimentos, leis de propagação, etc.

CAPÍTULO II

ESTRUTURA DAS TEORIAS FÍSICAS - GRUPOS DE COVARIÂNCIA E INVARIÂNCIA

Vamos, em primeiro lugar, caracterizar as Teorias Físicas através do conceito de tipo de estrutura visto no Capítulo I. Com este objetivo introduzimos os Elementos de uma Teoria Física (§1); definimos o que são Teorias Físicas de Espaço-Tempo e discutimos como estas podem ser formuladas de maneira intrínseca e extrínseca (§2).

O principal objetivo deste capítulo é caracterizar os *Grupos de Covariância* (§4) e *Grupos de Invariância* (§5). Estes conceitos permitem uma discussão mais precisa de modelos para uma Teoria Física de Espaço-Tempo. Para isto é necessário definirmos: sistemas de coordenadas e sistemas de referência, o significado de Grupo de Covariância de um sistema de equações diferenciais e ainda darmos as diferentes interpretações (pontos de vista) para o conjunto de valores atribuídos aos objetos geométricos que satisfazem um sistema de equações diferenciais (§3) (ver Anderson [2], Scheibe [45], Hiskes [24], Rodrigues-Recami [40], Friedman [18]).

§1. OS ELEMENTOS DE UMA TEORIA FÍSICA

Neste trabalho as teorias físicas serão caracterizadas por

- (i) Certos tipos de estrutura como descrito no Capítulo I, ou estrutura matemática por simplicidade;
- (ii) Sua interpretação física;
- (iii) Sua compreensão e aplicações atuais.

É necessário que fique bem claro que na exposição matemática de uma dada teoria física T os postulados ou axiomas básicos são apresentados como definições.

Tais definições significam que os sistemas físicos descritos por T se comportam de uma dada maneira. Portanto, as definições requerem uma motivação maior que as definições puramente matemáticas. Reichenbach [41] chama as definições físicas de definições correlativas. É necessário também que fique claro que motivações completamente convincentes e genuínas para as definições correlativas em geral não podem ser fornecidas, pois que elas se referem à natureza como um todo e à teoria física T como um todo.

Neste trabalho admitimos os conceitos matemáticos que definem a teoria T (um tipo de estrutura) como primitivos e vamos definir (correlativamente) as entidades observacionais em termos

deles. Entretanto não endossamos o ponto de vista do convencionalismo segundo o qual deve ser possível, pelo menos em princípio, associar todos os objetos matemáticos que definem T com os elementos dos sistemas físicos, que são supostamente descritos por T . Em outras palavras, o tipo de estrutura que define a teoria T pode em princípio conter mais objetos matemáticos do que aqueles que podem ser identificados com os elementos dos sistemas físicos descritos por T , sem que estes objetos sejam superfluos.

A noção básica comum a todas as teorias físicas é a noção de evento. Por um evento entendemos uma ocorrência idealizada no mundo físico. Por exemplo, a explosão de uma estrela, a colisão de duas bolas de bilhar, etc, representam evento. Cada fenômeno físico é uma coleção de ocorrências no mundo físico e portanto representado idealmente como uma certa coleção de eventos.

O objetivo das teorias físicas é relacionar e prever a relação entre os eventos que ocorrem devido as interações dos sistemas físicos que compõe o mundo que vivemos.

§2. TEORIAS FÍSICAS DE ESPAÇO-TEMPO

As teorias físicas de espaço-tempo são aquelas que fazem a suposição de que a coleção de todos os eventos que representam

todas as ocorrências do mundo físico constitui o que chamamos de *espaço-tempo* e indicamos por M . M é suposta uma variedade diferenciável de dimensão (real) igual a 4. Evento é um ponto $p \in M$.

A variedade espaço-tempo por si só não é suficiente para a descrição da maioria dos sistemas físicos. Na construção de uma teoria T para um conjunto F de fenômenos (sistemas) físicos é necessário, em geral, a introdução de objetos geométricos na variedade M , como por exemplo, campo de vetores tangentes, métrica, conexão, etc.

2.1. As Teorias de espaço-tempo que vão ser examinadas nesse trabalho fazem uso do conceito de partícula material

DEFINIÇÃO 2.1.1. Uma partícula material é um par (m, σ) onde $m \in [0, \infty)$ é chamado a massa da partícula e $\sigma : I \rightarrow M$, $(I \subset \mathbb{R})$, é uma curva. Indicaremos por T_σ o campo de vetores tangentes à curva $\sigma \subset M$.

Seja $T = (M, \phi^1, \dots, \phi^n, T_\sigma)$ a teoria física de um conjunto F de fenômenos (sistemas físicos). Os $T_\sigma, \phi^i, i=1, \dots, n$ são objetos matemáticos independentes de T que supostamente podem ser usados para descrever qualquer fenômeno $f \in F$. Em geral os ϕ^i tomam valores em um certo conjunto V que depende da particular teoria T .

DEFINIÇÃO 2.1.2. A especificação de um possível conjunto de valores para os ϕ^i , $i = 1, 2, \dots, n$ e T_σ é chamada uma *trajetória cinematicamente possível* (tcp) de T .

DEFINIÇÃO 2.1.3. Chamaremos *trajetória dinamicamente possível* (tdp) as tcp que correspondem aos fenômenos reais, isto é, aqueles conjuntos de valores para os objetos ϕ^i , $i = 1, \dots, n$ e T_σ que satisfazem as leis físicas (ou equações de movimento) da teoria T .

2.2. As leis físicas ou equações de movimento são evidentemente fornecidas pelos axiomas não lógicos de T (ver Capítulo I)

Em geral, a apresentação dos axiomas não lógicos das teorias de espaço-tempo é feita intrinsecamente ou extrinsecamente.

FORMULAÇÃO INTRÍNSECA. Neste caso não se faz referências à utilização de cartas locais na variedade M . As equações de uma dada teoria T separam uma certa classe de modelos $(M, \phi^1, \dots, \phi^n, T_\sigma)$, onde M é uma variedade de dimensão 4, $\phi^1, \dots, \phi^n$ são os objetos geométricos postulados por T , T_σ são campos de vetores tangentes a uma curva σ em M . Os $\phi^1, \dots, \phi^n$ satisfazem as equações de campo de T e T_σ satisfazem as leis de movimento de T . Aqui a classe de modelos, separada para T , independe da particular escolha de um sistema de coordenadas em M .

FORMULAÇÃO EXTRÍNSECA. Neste caso introduzimos um atlas em M e numa carta local que define o particular sistema de coordenadas $x = \langle x^i \rangle$ ($i = 0, 1, 2, 3$) ($x : U \rightarrow x(U)$, onde $U \subset M$, $x(U) \subset \mathbb{R}^4$ são conjuntos abertos) trabalhamos com as componentes dos objetos geométricos.

No sistema de coordenadas dado, as componentes dos objetos geométricos satisfazem um sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^4$ (*). Por exemplo a equação da geodésica na formulação intrínseca é $D_{T_\sigma} T_\sigma = 0$, e em termos de um particular sistema de coordenadas $x = \langle x^i \rangle$ é dada pelas equações diferenciais.

$$\frac{da^i}{du} + \Gamma_{jk}^i a^j a^k = 0 \quad (2.2.1)$$

onde os a^i e Γ_{jk}^i são respectivamente as componentes do vetor tangente T_σ e da conexão D em $\langle x^i \rangle$, e u é o parâmetro de inclusão $\sigma : I \rightarrow M$, ($I \subset \mathbb{R}$) ($u \rightarrow \sigma(u)$).

(*) Podemos em princípio imaginar teorias tais que os objetos geométricos satisfaçam equações integrais ou íntegro-diferenciais e mesmo equações não locais. Neste trabalho analisamos apenas teorias locais.

DEFINIÇÃO 2.2.2. Seja M uma variedade chata^(*). Um sistema de coordenadas inercial $\langle x^i \rangle$ é aquele onde $\Gamma_{jk}^i = 0$, $\forall x \in M$.

Em um sistema de coordenadas inercial em $U \subset M$ a equação geodésica $D_{T_\sigma} T_\sigma = 0$ ^(**) se escreve como

$$\frac{da^i}{du} = 0 \quad (2.2.2)$$

Seja $y = \langle y^j \rangle$ ($j = 0, 1, 2, 3$) ($y : V \rightarrow y(V)$ onde, $V \subset M$ e $y(V) \subset \mathbb{R}^4$ são conjuntos abertos), um outro sistema de coordenadas em $V \subset M$, não inercial. Em $\langle y^j \rangle$ as equações da geodésica se escreve como

$$\frac{d\bar{a}^j}{du} + \bar{\Gamma}_{kl}^j \bar{a}^k \bar{a}^l = 0 \quad (2.2.3)$$

onde os $\bar{a}^j$ e $\bar{\Gamma}_{kl}^j$ são respectivamente os componentes do vetor tangente T_σ e da conexão D em $\langle y^j \rangle$.

Observemos que se fixamos um sistema de coordenadas $x = \langle x^i \rangle$ em $U \subset M$ e um sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^4$ para as componentes de um dado objeto geométrico (por exemplo $da^i/du = 0$ para as componentes do campo de vetores

(*) Em uma variedade chata (flat) o tensor de Riemann associado a conexão é por definição nulo. Quando tratamos de teorias particulares, como as Teorias Newtonianas ou a Teoria da Relatividade, fornecemos novas definições de sistemas inerciais no contexto destas teorias.

(**) Para a definição da conexão sobre χD Ver Apêndice

tangentes T_O), tal sistema de equações separa uma classe de objetos geométricos em M , mas tal classe depende obviamente do sistema de coordenadas utilizado. De fato, se utilizamos o sistema não inercial $\langle y^j \rangle$ no exemplo acima, as equações diferenciais $d\bar{a}^j/du = 0$ separam, em geral, uma classe de vetores tangentes distinta da obtida anteriormente (em $U \cap V$). Concluimos que a formulação extrínseca não especifica uma classe bem definida de modelos - diferentes escolhas dos sistemas de coordenadas, mantendo-se a mesma equação diferencial, em geral nos leva a modelos distintos.

Para solucionarmos o problema de saber quando os modelos são distintos ou não precisamos introduzir o conceito de covariância de um sistema de equações diferenciais.

§3. COVARIÂNCIA DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM $\mathbb{R}^4$.

3.1. Suponhamos que as equações de uma teoria física T são dadas por intermédio de um sistema de equações diferenciais em um subconjunto $x(U) \subset \mathbb{R}^4$, com condições de bordo pertencentes a um conjunto B . Especificamente seja $x = \langle x^i \rangle$, $i = 0, 1, 2, 3$, ($x : U \rightarrow x(U)$, onde $U \subset M$, $x(U) \subset \mathbb{R}^4$ são subconjuntos abertos) e o sistema de equações diferenciais é dado por

$$D_{\langle x^i \rangle} (\phi_{\langle x^i \rangle}) = 0 \quad , \quad b_i \in B \quad , \quad \phi_{\langle x^i \rangle} = (\phi_{\langle x^i \rangle}^1, \dots, \phi_{\langle x^i \rangle}^n).$$

Um tal sistema de equações diferenciais juntamente com as condições de bordo determina uma classe bem definida de modelos que indicaremos por $T = (M, \phi)$, onde $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ são os

objetos geométricos definidos em M , cuja representação em $\langle x^i \rangle$ é dada pelos objetos: $\phi^1_{\langle x^i \rangle}, \dots, \phi^n_{\langle x^i \rangle}$.

Consideremos agora um sistema de coordenadas $y = \langle y^j \rangle$, $j = 0, 1, 2, 3$, ($y : V \rightarrow y(V)$, onde $V \subset M$ e $y(V) \subset \mathbb{R}^4$ são subconjuntos abertos). A aplicação $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ é um difeomorfismo chamado mudança de coordenadas. Em relação a $\langle y^j \rangle$ os objetos $\phi^1, \dots, \phi^n$ tem a representação $\phi^1_{\langle y^j \rangle}, \dots, \phi^n_{\langle y^j \rangle}$. Seja

$$D_{\langle y^j \rangle}(\phi_{\langle y^j \rangle}) = 0, \quad \bar{b}_j \in \bar{B}, \quad \phi_{\langle y^j \rangle} = (\phi^1_{\langle y^j \rangle}, \dots, \phi^n_{\langle y^j \rangle})$$

o conjunto de equações diferenciais em $y(V) \subset \mathbb{R}^4$ que possui a mesma forma funcional em relação a $\phi_{\langle y^j \rangle}$ que o sistema $D_{\langle x^i \rangle}(\phi_{\langle x^i \rangle}) = 0$ possui em relação a $\phi_{\langle x^i \rangle}$; e onde $\bar{B}$ é o conjunto de condições de bordo que se pode impor as equações $D_{\langle y^j \rangle}(\phi_{\langle y^j \rangle}) = 0$ em $\langle y^j \rangle$.

DEFINIÇÃO 3.1.1. O sistema de equações diferenciais $D_{\langle x^i \rangle}(\phi_{\langle x^i \rangle}) = 0$ é dito *covariante* sob a transformação de coordenadas $\langle x^i \rangle \rightarrow \langle y^j \rangle$, se a mesma classe de modelos é definida em $\langle x^i \rangle$ e $\langle y^j \rangle$, isto é,

$$D_{\langle x^i \rangle}(\phi_{\langle x^i \rangle}) = 0, \quad b_i \in B|(U \cap V)$$

se e somente se $D_{\langle y^j \rangle}(\phi_{\langle y^j \rangle}) = 0$, para algum $\bar{b}_j \in B|(U \cap V)$

(onde $D_{\langle y^j \rangle}(\phi_{\langle y^j \rangle}) = 0, \quad \bar{b}_j \in \bar{B}(U \cap V)$ é o sistema de equações diferenciais que possui a mesma forma funcional do sistema

$$D_{\langle x^i \rangle}(\phi_{\langle x^i \rangle}) = 0, \quad b_i \in B|(U \cap V).)$$

3.2. SISTEMAS DE COORDENADAS E SISTEMAS DE REFERÊNCIA

O sistema de coordenadas $\langle x^i \rangle$, $\langle y^j \rangle$ são instrumentos teóricos que pessoas usam para efetuar cálculos em sua teoria T. Associado ao sistema $\langle x^i \rangle$ temos os campos vetoriais $\langle \partial/\partial x^0, \partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3 \rangle$ definidos em $U \subset M$. Como explicamos no início desse capítulo não imporemos que estes campos vetoriais sejam materializados por algum sistema físico descrito na Teoria T. Por exemplo, o tempo das efemérides é um tempo teórico [3] (tempo teórico, definido de maneira tal que as equações da Teoria de Newton descrevam o movimento do sistema solar).

As experiências físicas são realizadas em laboratórios^(*) por pessoas que chamaremos no que segue de observadores. Um observador pode utilizar um ou mais sistemas de coordenadas para descrever os fenômenos físicos sob estudo e que supostamente são descritos pela teoria T. Também fenômenos físicos particulares podem ser estudados em laboratórios distintos, e em princípio um dado laboratório pode ter um movimento arbitrário em relação a um outro dado laboratório.

Precisamos, portanto, introduzir um critério que nos permita saber quando dois sistemas de coordenadas $\langle x^i \rangle$ e $\langle y^j \rangle$ se referem a rotulação dos eventos de M em um mesmo laboratório.

(*) Um laboratório será chamado no que segue de sistema de referência.

O critério procurado é dado por

DEFINIÇÃO 3.2.1. Dois sistemas de coordenadas $\langle x^i \rangle$, $\langle y^j \rangle$ se referem ao mesmo sistema de referência se a aplicação $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ é tal que

$$y^0 = f^{(0)}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$y^k = f^{(k)}(x^1, x^2, x^3) \quad , \quad k = 1, 2, 3 \quad .$$

Em outras palavras, $\langle x^i \rangle$ e $\langle y^j \rangle$ se referem ao mesmo sistema de referência se essas coordenadas espaciais y^k , $k = 1, 2, 3$ não dependem explicitamente da coordenada tipo-tempo x^0 . Dizemos, nesse caso, que o sistema de referência ao qual está associado $\langle y^j \rangle$ não se move em relação ao sistema de referência ao qual está associado $\langle x^i \rangle$.

Observamos que quando $\langle y^j \rangle$ são tais que as funções $f^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$ dependem explicitamente de x^0 dizemos que o sistema de referência associado a $\langle y^j \rangle$ está em movimento em relação ao sistema de referência associado a $\langle x^i \rangle$.

Além disso, é óbvio que dada uma transformação de coordenadas $y \circ x^{-1}$ completamente arbitrária pode não existir fisicamente nenhum laboratório físico habitado por observadores ao qual o sistema $\langle y^j \rangle$ pode estar associado. Tal fato não nos

deve causar preocupação pois como dissemos anteriormente os sistemas de coordenadas $\langle x^i \rangle$, $\langle y^j \rangle$, etc, são instrumentos teóricos.

3.3. PONTOS DE VISTA

3.3.1. PONTO DE VISTA PASSIVO

Como já dissemos anteriormente no §2 qualquer conjunto $d = \{\phi_{\langle x^i \rangle}^{(\alpha)}(p)\}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) de possíveis valores para os objetos geométricos $\phi_{\langle x^i \rangle}^{(\alpha)}$ que satisfazem o sistema de equações diferenciais $\mathcal{D}_{\langle x^i \rangle}(\phi_{\langle x^i \rangle}^{(\alpha)}) = 0$, com condições de bordo $b_i \in B$ é conhecido como as tdp que caracterizam um particular fenômeno $f \in F$ (F é conjunto dos fenômenos físicos) descrito pela teoria T na carta local $\langle x^i \rangle$ do sistema de referência R .

Suponhamos que o sistema de coordenadas $\langle y^j \rangle$ não satisfaça as condições de definição 3.2.1 e portanto esteja associado a um sistema de referência $\bar{R} \neq R$.

O conjunto $\bar{d} = \{\phi_{\langle y^j \rangle}^{(\beta)}(p)\}$, ($\beta = 1, \dots, n$) que satisfaz $\mathcal{D}_{\langle y^j \rangle}(\phi_{\langle y^j \rangle}^{(\beta)}) = 0$, $\bar{b}_j \in \bar{B}$ pode ser interpretado com as tdp do mesmo fenômeno $f \in F$ descrita na carta local $\langle y^j \rangle$ associada ao sistema de referência $\bar{R}$, se $\bar{b}_j$ corresponde as condições

de bordo b_i formuladas com relação a $\langle y^j \rangle$. Esquematicamente temos

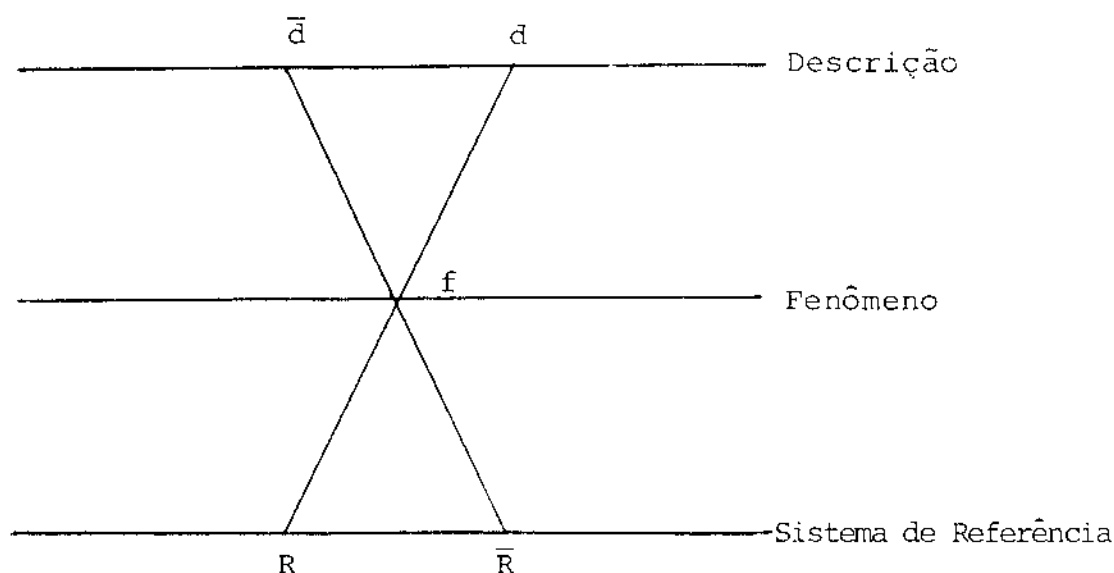


Figura 1 - Ponto de Vista Passivo

3.3.2. PONTOS DE VISTA ATIVO

Existe uma outra maneira de definirmos a noção de covariância de um sistema de equações $\mathcal{D}(\phi) = 0$ em M . Considere-mos $U \subseteq M$ subconjunto aberto onde está definido o sistema de coordenadas $x = \langle x^i \rangle$. Seja $h: A \rightarrow h(A)$ ($A \subseteq U$) um difeomorfismo. A aplicação $y = x \circ h$ é uma carta local que indicaremos por $\langle y^j \rangle$.

Sabemos que sob uma mudança de coordenadas as componentes de um objeto geométrico $\phi^{(\alpha)}$ mudam de $\phi^{(\alpha)}_{\langle x^i \rangle}$ para $\phi^{(\alpha)}_{\langle y^j \rangle}$. Sob a ação de um difeomorfismo h os objetos geométricos mudam de

$\phi \rightarrow h_*\phi$, onde $h_*\phi$ é um novo objeto geométrico definido como segue

(i) Se f é uma função, $f \in T^{(0,0)}(A)$ então $h_*f(h_p) = f(p)$, $\forall p \in A$;

(ii) Se ϕ é um tensor tipo (r,s) , $\phi \in T^{(r,s)}(A)$ então

$$(h_*\phi)_{h_p}(h_*w_1, \dots, h_*w_r, h_*X_1, \dots, h_*X_s) = \phi_p(w_1, \dots, w_r, X_1, \dots, X_s)$$

(iii) Se D é uma conexão afim em A , então

$$(h_*D_{h_*X}h_*Y)_{h_p} h_*f = (D_X Y)_p f.$$

Portanto se θ é um objeto geométrico em A (um campo tensorial ϕ ou uma conexão D) as equações acima nos dizem que as componentes do objeto geométrico $h_*\phi$ em relação a $\langle x^i \rangle$ em h_p são iguais as componentes de ϕ em relação a $\langle y^j \rangle$ em p , isto é,

$$h_*\phi_{\langle x^i \rangle}(h_p) = \phi_{\langle y^i \rangle}(p) ; \quad y^i(p) = x^i(h_p)$$

Como já sabemos $(M, \phi_{\langle x^i \rangle}^{(\alpha)})$ é um modelo de T quando $\mathcal{D}_{\langle x^i \rangle}(\phi_{\langle x^i \rangle}^{(\alpha)}) = 0$, $b_i \in B$. Temos então a

DEFINIÇÃO 3.3.1. Dizemos que o sistema de equações diferenciais $\mathcal{D}(\phi) = 0$ em $\mathbb{R}^4$ é *covariante* em relação ao difeomorfismo local h (acima definido) se para cada modelo $(M, \phi_{\langle x^i \rangle}, b_i)$ de T obtido em relação ao sistema $\langle x^i \rangle$, $(M, h_*\phi_{\langle x^i \rangle}, \bar{b}_i)$; $\bar{b}_i \in B$, $\bar{b}_i \neq b_i$) é também modelo de T em relação a $\langle x^i \rangle$, isto é,

$$\mathcal{D}_{\langle x^i \rangle}(\phi_{\langle x^i \rangle}) = 0 ; \quad b_i \iff \mathcal{D}_{\langle x^i \rangle}(h_*\phi_{\langle x^i \rangle}) = 0 ; \quad \bar{b}_i$$

para todos os ϕ em M , $b_i, \bar{b}_i \in B$.

Vamos dar uma interpretação ao conjunto de objetos $\bar{d} = \{h_*\phi_{\langle x^i \rangle}^{(\alpha)}\}$, soluções do sistema de equações $\mathcal{D}_{\langle x^i \rangle}(h_*\phi_{\langle x^i \rangle}) = 0$, com condições de bordo $\bar{b}_i \in B$. $\bar{d}$ é a trajetória de um novo fenômeno $\bar{f} \in \bar{F}$ descrito no mesmo sistema de referência R onde está descrito o fenômeno f cuja tdp é $\bar{d} = \{\phi_{\langle x^i \rangle}^{(\alpha)}\}$, $\mathcal{D}_{\langle x^i \rangle}(\phi_{\langle x^i \rangle}^{(\alpha)}) = 0$, $b_i \in B$. Uma tal interpretação do conjunto $\{h_*\phi_{\langle x^i \rangle}^{(\alpha)}\}$ é conhecida como o 2º ponto de vista ativo e está ilustrado na figura 2.

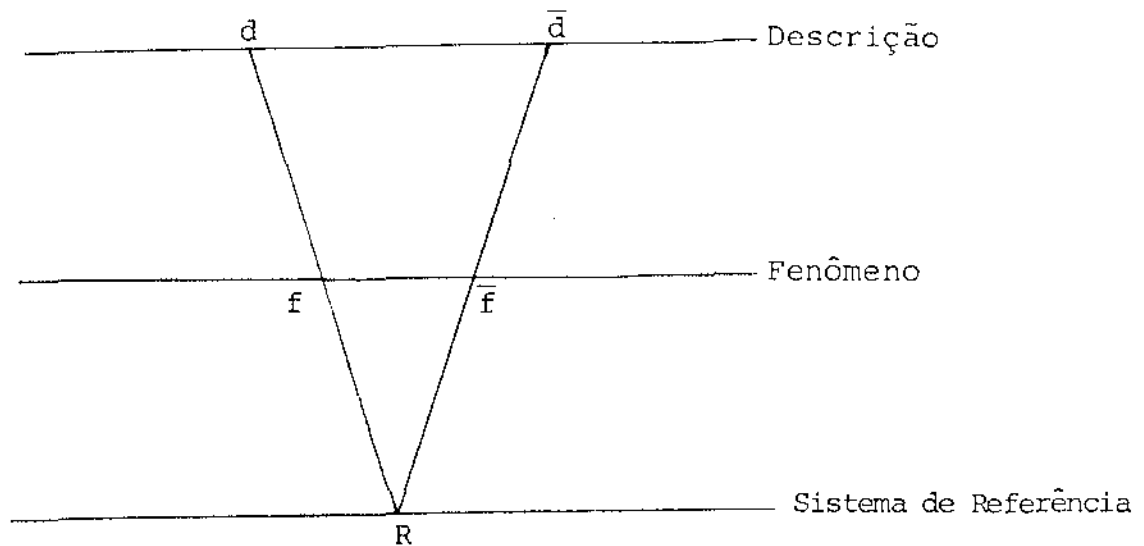


Figura 2 - 2º Ponto de Vista Ativo

Observe agora que em relação ao sistema de referência $\bar{R}$ ao qual o sistema de coordenadas $\langle y^i \rangle$ está associado o sistema de equações

$$D_{\langle y^i \rangle} (h_{*} \phi^{(\alpha)}_{\langle y^j \rangle}) = 0, \quad \bar{b}_j \in \bar{B}$$

descreve o fenômeno $\bar{f}$, em relação a $\langle y^j \rangle$, que tem descrição idêntica a um fenômeno f ($f \neq \bar{f}$), em relação a $\langle x^i \rangle$ se $\bar{b}_j \in \bar{B}$ em relação a $\bar{R}$ é idêntico a $b_i \in B$ em relação a $\langle x^i \rangle$.

Esta situação corresponde ao que chamamos o 1º ponto de vista ativo que está ilustrado na Figura 3

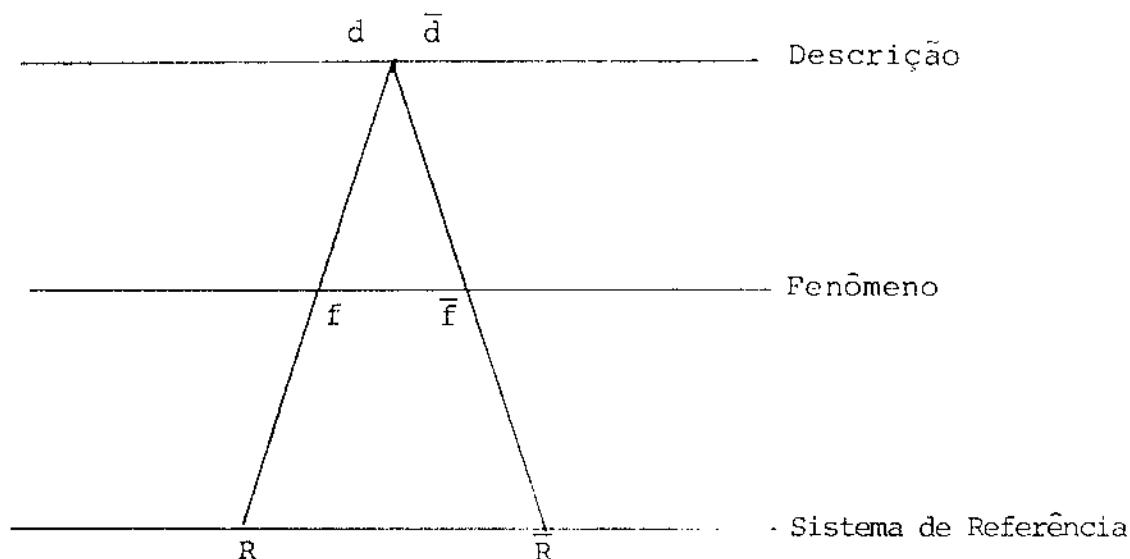


Figura 3 - 1º Ponto de Vista Ativo

Tendo em vista que

$$\mathcal{D}_{\langle y^j \rangle}(\phi^{(\alpha)}_{\langle y^j \rangle}) \Big|_p = \mathcal{D}_{\langle x^i \rangle}(h_* \phi^{(\alpha)}_{\langle x^i \rangle}) \Big|_{h_p} ; x^i(h_p) = y^i(p)$$

os pontos de vista passivo e o 1º ponto de vista ativo serão equivalentes se $B = \bar{B}$.

3.4. Vamos dar agora a definição de Grupo de Covariância para um sistema de equações diferenciais

DEFINIÇÃO 3.4.1. Seja $\mathcal{D}(\phi) = 0$ um sistema de equações diferenciais. Chamamos de grupo de covariância do sistema de equações

diferenciais $\mathcal{D}(\phi) = 0$ ao maior grupo de transformação de coordenadas tal que cada transformação do grupo satisfaz a condição

$$\mathcal{D}_{\langle x^i \rangle}(\phi_{\langle x^i \rangle}) = 0, \quad b_i \in B \quad \text{se e somente se} \quad \mathcal{D}_{\langle y^j \rangle}(\phi_{\langle y^j \rangle}) = 0$$

para algum $\bar{b}_j \in \bar{B}$

EXEMPLO 3.4.2. As equações da geodésica em uma variedade M chata se escrevem em sistemas de coordenadas inercial como

$$\frac{da^i}{du} = 0.$$

Quais são as transformações de coordenadas que pertencem ao grupo de covariância do sistema de equações acima? São exatamente aquelas que relacionam os novos sistemas de coordenadas $\langle y^j \rangle$ linearmente com os $\langle x^i \rangle$, isto é, tal que $\partial^2 x^i / \partial y^k \partial y^l = 0$, pois nesse caso as equações acima se transformam em $d\bar{a}^j/du = 0$ e obtemos as mesmas geodésicas nos dois casos.

§4. GRUPOS DE COVARIÂNCIA DE UMA TEORIA FÍSICA

4.1. Queremos agora definir o que entendemos por *covariância* de uma teoria física.

A parte matemática de uma teoria física (o formalismo que é peculiar a ela) pode ser formulada com várias espécies de estruturas.

Covariância é uma espécie de equivalência entre duas (ou mais) formulações de uma teoria física - dois tipos de estrutura são equivalentes se podemos transformar o formalismo de uma delas e obter a outra.

Para formalizarmos a definição de covariância, nos utilizaremos das noções de Lógica apresentadas no Capítulo I.

Uma *estrutura* é um conjunto de objetos $(U, O_1, \dots, O_n)$ onde U é um conjunto não vazio, chamado "universo" da estrutura, e os objetos O_i são conjuntos construídos a partir dos elementos de U .

Um *Modelo* de uma teoria é uma estrutura $(U, O_1, \dots, O_n)$ onde os objetos $O_1, \dots, O_n$ satisfazem as equações e axiomas da teoria (ver capítulo I).

Dada uma aplicação entre dois universos U e U' , $h: U \rightarrow U'$, h pode induzir de maneira única uma transformação h_* dos objetos definidos em U nos objetos definidos em U' .

DEFINIÇÃO 4.1.1. Seja $\text{Mod } T$ uma classe de estruturas. Então $h: U \rightarrow U'$ é uma *transformação covariante* de $\text{Mod } T$ se e somente se h é uma bijeção entre os dois universos U e U' de $\text{Mod } T$,

tal que, se S é elemento de $\text{Mod } T$ em U , então $h_*(S)$ é elemento de $\text{Mod}(T)$ em U' .

As *transformações covariantes* não estão definidas em um mesmo universo U . O conjunto das transformações covariantes com a operação composição de funções formam um grupóide que indicaremos por G_c (ver apêndice). A estrutura de Grupóide é suficiente para determinar uma relação de equivalência em uma classe de modelos.

DEFINIÇÃO 4.1.2. Dizemos que dois modelos m e m' da teoria T são *isomorfos* se existe uma transformação covariante $h: U \rightarrow U'$ tal que $h_*(m) = m'$, isto é, os objetos geométricos induzidos (a partir dos objetos geométricos de T , definidos em U), por h em U' coincidem com os objetos geométricos de T em U' .

EXEMPLO 4.1.3. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis de dimensão n , com métricas g_1 e g_2 respectivamente e $h: M_1 \rightarrow M_2$ um difeomorfismo de classe C^k , $k \geq 1$. Dizemos que h é um *isomorfismo* entre as estruturas (M_1, g_1) e (M_2, g_2) se a métrica induzida em M_2 por g_1 , através de h , coincide com a métrica g_2 , isto é,

$$g_1(p, u, v) = g_2(h(p), h_*(u), h_*(v)) \quad (4.1.3)$$

para todo $p \in M_1$ e quaisquer que sejam $u, v \in T_p M$.

Dizemos que (M_1, g_1) e (M_2, g_2) são estruturas isomorfas se existe $h: M_1 \rightarrow M_2$, h difeomorfismo de classe $\mathbb{C}^k$, $k \geq 1$, tal que h verifica a condição (4.1.3).

EXEMPLO 4.1.4. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis de dimensão n , com conexão D_1 e D_2 respectivamente e $h: M_1 \rightarrow M_2$ um difeomorfismo de classe $\mathbb{C}^k$, $k \geq 1$. Dizemos que h é um *isomorfismo* entre as estruturas (M_1, D_1) e (M_2, D_2) se a conexão induzida em M_2 , através de h , coincide com a conexão D_2 , isto é

$$h_*(D_1 Y) = D_2 h_* Y \quad (4.1.4)$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M_1)$.

Dizemos que (M_1, D_1) e (M_2, D_2) são estruturas *isomorfas* se existe $h: M_1 \rightarrow M_2$, difeomorfismo de classe $\mathbb{C}^k$ que verifica a condição (4.1.4).

4.2. Indicaremos o conjunto de classes de equivalência de $\text{Mod } T$, por $\text{Mod}/\sim$,

$$\text{Mod } T/\sim = \{[m], m \in \text{Mod } T\}, \text{ onde } [m]$$

é tal que, $m' \in [m]$ se e somente se existe uma transformação

$h : U \rightarrow U'$ covariante tal que $h_*(m') = m$.

Podemos desta maneira dividir a classe de $\text{Mod } T$ em conjuntos disjuntos. Se trabalharmos com sistemas de coordenadas em uma vizinhança de um ponto $p \in M$, estas classes de equivalência podem ser interpretadas como as classes de equivalência das tdp dos objetos geométricos (ver §3). De acordo com o *ponto de vista passivo*, todas as tdp que pertencem a uma mesma classe de equivalência $[m]$ são as descrições de um mesmo fenômeno f , descrito por observadores diferentes que podem ser transformados um no outro através de um elemento do grupo de covariância. De acordo com o 2º *ponto de vista ativo*, as tdp que pertencem a uma mesma classe de equivalência, representam as descrições, feitas por um mesmo observador, de fenômenos diferentes f e f' que podem ser transformados um no outro através de um elemento do grupo de covariância. Estes pontos de vista são equivalentes nas condições descritas no §3, e que supomos que são satisfeitas.

EXEMPLO 4.2.1. Nas teorias físicas de espaço-tempo o grupo de covariância G_c é o grupo de transformações de coordenadas (difeomorfismos locais).

A partir de agora quando falarmos na classe de $\text{Mod } T$ estamos nos referindo aqueles modelos que exibam certas regularidades como: dois universos quaisquer associados a uma classe $\text{Mod } T$ devem estar relacionados por uma transformação covariante podemos

pensar então que todos os modelos estão definidos em um mesmo universo U , pois todos os universos são indistinguíveis em relação a $\text{Mod } T$ desde que cada modelo tem reprodução isomorfa em cada universo.

§5. GRUPOS DE INVARIÂNCIA (SIMETRIA) DE UMA TEORIA FÍSICA

5.1. Queremos agora definir os *Grupos de Invariância* de uma teoria física. A melhor sugestão foi feita por Anderson [2].

DEFINIÇÃO 5.1.1. Seja S uma estrutura em U . Então a aplicação covariante $h : U \rightarrow U$ é uma *transformação simétrica (invariante)* de S se e somente se $h_*(S) = S$. Além disso se O_i é um objeto geométrico definido em U , e $h_*(O_i) = O_i$, então dizemos que h é *simétrica (invariante)* em relação a O_i .

5.2. OBJETOS ABSOLUTOS E DINÂMICOS

Suponhamos que é dada uma classe de modelos de T , $\text{Mod } T$, onde estes modelos são da forma $(U, O_1, \dots, O_n)$. De acordo com o propósito de Anderson, um objeto O_i que pertence a um modelo $(U, O_1, \dots, O_n)$ é *absoluto*, se para qualquer outro modelo da

teoria T , $(U, O'_1, \dots, O'_n)$, existe uma transformação covariante $h : U \rightarrow U$ tal que $h_*(O_i) = O'_i$. A intenção de Anderson é que a classe de todos os objetos absolutos da teoria deve consistir precisamente daqueles objetos que servem como "estrutura de fundo" na definição de valores admissíveis para as variáveis restantes da teoria, variáveis estas que seriam classificadas como *objetos dinâmicos* da teoria.

DEFINIÇÃO 5.2.1. Seja $\text{Mod } T$ uma classe de modelos da teoria T da forma $(U, O_1, \dots, O_n)$. Então $(U, O_1, \dots, O_r)$, $(r \leq n)$, é uma *estrutura absoluta da teoria* se e somente se

a) para quaisquer subestruturas $(U, O_1, \dots, O_r)$ e $(U, O'_1, \dots, O'_r)$ de $\text{Mod } T$, existe uma transformação covariante $h : U \rightarrow U$ tal que $h_*(U, O_1, \dots, O_r) = (U, O'_1, \dots, O'_r)$, isto é, os objetos da estrutura absoluta são os objetos absolutos.

b) quaisquer que sejam os modelos: $(U, O_1, \dots, O_r, O_{r+1}, \dots, O_n)$ e $(U, O_1, \dots, O_r, O'_{r+1}, \dots, O'_n)$ da classe de $\text{Mod } T$, $(U, O_{r+1}, \dots, O_n)$ é isomorfo a $(U, O'_{r+1}, \dots, O'_n)$ se e somente se existe uma transformação covariante $h : U \rightarrow U$ tal que $h_*(U, O_1, \dots, O_r, O_{r+1}, \dots, O_n) = (U, O_1, \dots, O_r, O'_{r+1}, \dots, O'_n)$.

c) o conjunto das variáveis, $A = \{O_i, i = 1, \dots, r\}$ é maximal no sentido que se O_j é um objeto absoluto então $O_j \in A$.

Observamos que se nós considerarmos o conjunto $\text{Mod } T$ das classes de equivalência, os objetos que distinguem estas classes são os objetos dinâmicos.

Seja $\text{Mod } T$ uma classe de modelos m , da teoria T , da forma $m = (U, O_1, \dots, O_n)$. Para $i = 1, \dots, n$, seja π_i a aplicação projeção definida por $\pi_i(U, O_1, \dots, O_n) = O_i$ e seja α_i a aplicação definida por $\alpha_i(U, O_1, \dots, O_i, \dots, O_n) = (U, O_1, \dots, O_{i-1}, O_{i+1}, \dots, O_n)$.

DEFINIÇÃO 5.2.2. Nas condições acima, seja $S = (U, \pi_{i_1}(m), \dots, \pi_{i_r}(m))$ uma subestrutura de $\text{Mod } T$. Definimos $\text{Mod } T/S = (S, D_i)$, onde $Q \in D_i$ se e somente se, para algum $m' \in \text{Mod } T$, $\pi_j(m) = \pi_j(m')$, $j = i_1, \dots, i_r$ e $Q = \alpha_{i_1}'(m'), \dots, \alpha_{i_r}'(m')$.

Nossa classe de $\text{Mod } T$ da teoria T pode então ser considerada como $\text{Mod } T/\text{AbS}$, onde AbS é uma estrutura absoluta da teoria T .

Das duas últimas definições podemos concluir que a estrutura absoluta serve como "pano de fundo" em uma teoria, no sentido que ela aparece em todos os modelos. A estrutura absoluta inclui precisamente aqueles objetos necessários para definir os valores das variáveis restantes. Além disso os elementos isomorfos de D_i estão relacionados por uma simetria da estrutura absoluta AbS .

Quaisquer duas estruturas isomorfas AbS e AbS' determinam as mesmas classes de equivalência. Portanto em uma teoria, as leis que especificam valores para as variáveis dinâmicas são indiferentes de um valor particular para a estrutura absoluta AbS .

DEFINIÇÃO 5.2.3. Seja $Mod\ T$ uma classe de modelos da teoria T . O grupo simétrico (invariante) de T será o grupo simétrico de $Mod\ T/AbS = (AbS, D_1)$.

O grupo simétrico caracteriza uma relação de equivalência irredutível nos sistemas da teoria. Isto é, utilizando-se somente leis e variáveis da teoria é impossível distinguirmos dois sistemas relacionados por transformações simétricas. Eles podem ser distinguidos somente em relação a escolha de um referencial particular ou de um sistema de medidas.

Os sistemas que não estão relacionados por um elemento do grupo de simetria podem ser distinguidos independentemente da escolha de um referencial, desde que suas variáveis dinâmicas não assumem valores isomorfos.

Observemos ainda que, se uma teoria não possui objetos absolutos então seu grupo de simetria será exatamente um grupo de covariância.

Nos capítulos que seguem aplicaremos os conceitos de

ovariância e invariância aqui definidas para diversas teorias físicas. Poderemos dessa maneira elucidar diversos pontos obscuros da literatura de Física e em especial fornecer uma formulação consistente de que se entende por Princípio de Relatividade.

CAPÍTULO III

TEORIAS CLÁSSICAS DE NEWTON

Neste capítulo vamos formular as teorias clássicas de Newton como particulares teorias de espaço-tempo. Desta maneira, teremos oportunidade de ver com detalhes como operam os conceitos de covariância e invariância introduzidos no Capítulo II. Esclareceremos também a relação entre o grupo de invariância de particulares teorias Newtonianas e o Princípio de Relatividade de Galileu. Referências: Friedman [18], Choquet-Bruhat [10].

§1. CINEMÁTICA E ESPAÇO E TEMPO ABSOLUTOS

No "Mathematical Principles of Natural Philosophy, I. Newton, (ver [37]) introduz os conceitos de espaço absoluto e tempo absoluto como segue:

(i) Absolute space, in its own nature, without relation to anything external remains always similar and immovable.

(ii) Absolute, true, and mathematical time, of itself and from its own nature flows equally without relation to anything

external.

Não há a mínima dúvida que o espaço absoluto a que Newton se refere é o espaço euclidiano tridimensional.

1.1. CINEMÁTICA

Queremos agora formular as teorias Newtonianas das partículas materiais (definidas no Capítulo II) e suas interações como teorias de espaço-tempo.

Vamos descrever o espaço e tempo absolutos de Newton como um tipo de variedade.

Seja M a variedade espaço-tempo absoluto de Newton. A primeira condição é que o espaço-tempo de Newton seja chato (flat), isto é, existe em M uma conexão chata D . Então, para cada $p \in U \subseteq M$ existe uma carta local (U, ϕ) tal que as componentes Γ_{jk}^i da conexão D , nesta carta, se anulam. Então o tensor de curvatura K é nulo em p e nossa primeira equação de campo é

$$K = 0, \quad (\forall p \in M)$$

Postulamos em seguida que as partículas livres seguem geodésicas de M , isto é, a equação de movimento das partículas livres é

$$D_{T_\sigma} T_\sigma = 0 \quad .$$

Em um sistema de coordenadas inercial $\langle x^i \rangle$ onde $\Gamma_{jk}^i = 0$ a equação acima se escreve

$$\frac{d^2 x^i}{du^2} = 0 \quad .$$

DEFINIÇÃO 1.1.0 Quando uma partícula segue um movimento não geodésico sua equação de movimento é dada por

$$D_{T_\sigma} T_\sigma = a \neq 0$$

e a é dita aceleração.

Dados dois eventos $p, q \in M$ existe a noção de intervalo temporal entre p e q , que está bem definido independentemente do sistema de referência utilizado. Dado um evento qualquer $p \in M$ existe a noção de eventos simultâneos à p (o conjunto de eventos cujo intervalo temporal em relação a p é nulo). Chama-remos a este conjunto de eventos de *plano de simultaneidade absoluta*. M pode ser dividida em uma sucessão de espaços tridimensionais de simultaneidade, cada um deles representando o conjunto de todos os eventos simultâneos a um dado evento. A distância entre dois planos quaisquer de simultaneidade representa duração temporal. Cada um desses planos tridimensionais é um

espaço euclidiano. Temos portanto, uma geometria euclidiana em cada triplano de simultaneidade, mas não definimos até agora as relações espaciais entre pontos que estão em planos de simultaneidades distintos. Para combinarmos os diferentes triplanos de simultaneidade em um espaço (tridimensional) absoluto é necessário a introdução de uma estrutura geométrica adicional. Vamos introduzir objetos geométricos que descrevam de maneira satisfatória os conceitos de tempo e espaço absolutos. Para isto, vamos considerar uma aplicação

$$t : M \rightarrow \mathbb{R} , \text{ dada por } p \rightarrow t(p) ,$$

onde $t(p)$ é o tempo do evento p . $|t(p) - t(q)|$ é interpretado como o intervalo temporal entre p e q e dizemos que os eventos p e q são simultâneos se $t(p) = t(q)$. Se t' é uma aplicação, tal que, $t' = t + b$, onde b é uma constante real, é claro que $t'(p) = t'(q)$ se $t(p) = t(q)$. Assim as funções do tipo t' definem a mesma noção de simultaneidade que t , mas associam um tempo absoluto diferente aos eventos, o que é irrelevante.

DEFINIÇÃO 1.1.1. O tempo absoluto em M será caracterizado pelo objeto geométrico $\omega \in T^*_p M$, $\forall p \in M$, ($T^*_p M$ = fibrado cotangente de M em p), tal que $\omega = dt$, onde

$$dt : T_p M \rightarrow \mathbb{R} , \quad (\forall p \in M)$$

dt associa a cada vetor $X \in T_p M$, o número real $dt(X) = Xt$ (derivada direcional) de t na direção de X).

Associada a $\omega = dt$ existe uma família de aplicações $\{t+b\}$, onde b é constante real. Todas estas aplicações concordam na duração e simultaneidade entre eventos p e $q \in M$; as componentes de dt em um sistema de coordenadas $\langle x^i \rangle$ são dadas por

$$t_i = \frac{\partial t}{\partial x^i} = \frac{\partial (t+b)}{\partial x^i}$$

Impomos agora para $\omega = dt$ as seguintes condições

- (i) $dt \neq 0$, $\forall p \in M$
- (ii) $D_X dt = 0$, $\forall X \in TM$

A condição (i) nos garante que cada ponto $c \in \mathbb{R}$ é valor regular de t , pois $dt_p \neq 0$, para $p \in M$, tal que $t(p) = c$, então $t^{-1}(c)$ é uma subvariedade tridimensional em M , que identificaremos com um triplano de simultaneidade. Estes triplanos de simultaneidade devem ser chatos uma vez que são espaços euclidianos tridimensionais e (ii) é a garantia de que esta condição é satisfeita.

DEFINIÇÃO 1.1.2. *Vetores Tipo-Tempo e Tipo-Espaço.* A 1-forma $\omega = dt$ induz para cada $p \in M$ uma divisão no espaço tangente $T_p M$ como segue: Seja $X \in T_p M$. Dizemos que X é *tipo-tempo* se

$$dt_p(X) \neq 0$$

e que X é *tipo-espaço* se

$$dt_p(X) = 0.$$

Dizemos que os vetores tipo-espaço são "ortogonais" à "direção" tempo absoluto.

Os vetores tipo-espaço (juntamente com o vetor zero) formam um subespaço de dimensão três em $T_p M$, que é tangente ao plano de simultaneidade absoluta em p .

DEFINIÇÃO 1.1.3. Dada uma curva $\sigma : I \rightarrow M$ ($I \subset \mathbb{R}$), dizemos que σ é uma *curva tipo-tempo* (tipo-espaço), se e somente se os vetores tangentes a σ , T_σ , são tipo-tempo (tipo-espaço).

Queremos agora descrever a geometria dos triplanos de simultaneidade. Não queremos um tensor métrico definido em todo M , o que desejamos é uma família de tensores métricos

tridimensionais, cada um deles definido em um plano de simultaneidade. Para isto vamos introduzir a forma bilinear simétrica h_p no espaço cotangente T_p^*M , ($\forall p \in M$).

DEFINIÇÃO 1.1.4. Seja $h_p : T_p^*M \times T_p^*M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- (i) h_p é simétrica
- (ii) $h_p(dt_p, \omega) = 0$, $\forall \omega \in T_p^*M$
- (iii) Se $h_p(v, \omega) = 0$, $\forall \omega \in T_p^*M \Rightarrow v = k dt_p$, onde k é constante
- (iv) $h_p(\omega, \omega) \geq 0$

A condição (ii) nos diz que a forma bilinear h_p é singular. Apesar disto, h_p tem propriedades próximas a de uma métrica em T_p^*M . Como h_p é uma forma bilinear simétrica podemos representá-la por uma matriz 4×4 . Existe uma base de T_p^*M em relação a qual a matriz que representa h_p é diagonal, com elementos na diagonal igual a 1 ou 0, ou seja, com assinatura $(3,0,1)$ (Ver Apêndice, 1.5).

OBSERVAÇÃO 1.1.5. Seja R_0 o subconjunto de T_p^*M consistindo de todos elementos $v \in T_p^*M$, tal que $h_p(v, \omega) = 0$, $\omega \in T_p^*M$. Então R_0 é um subespaço de dimensão um em T_p^*M .

A forma bilinear h_p com as propriedades acima definidas, induz uma métrica nos subespaços tridimensionais de vetores tipo-espaço em $T_p M$. Para isto, definimos:

DEFINIÇÃO 1.1.6. Seja

$$H_* : T_p^* M \rightarrow T_p M$$

tal que, a cada $v \in T_p^* M$ associa $H_*(v) \in T_p M$, de maneira tal que, $\forall \omega \in T_p^* M$, onde

$$\omega(H_*(v)) = h_p(v, v) .$$

Se tomamos $\omega = dt$, então $\forall v \in T_p^* M$ temos

$$dt(H_*(v)) = h_p(dt_p, v) = 0$$

de acordo com a definição 1.1.3.

Portanto $H_*(v)$ é sempre um vetor tipo espaço em $T_p M$. Além disso, H_* é uma aplicação linear cujo núcleo é R_0 . Portanto, H_* não é injetora pois $H_*(v) = H_*(v + h dt_p)$, k é constante. Entretanto podemos definir nos subespaços tridimensionais tipo-espaço de $T_p M$ uma métrica h_p^* como segue

DEFINIÇÃO 1.1.7. Seja $h_p^* : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h_p^*(X, Y) = h_p(w, v) \quad , \quad \text{se} \quad H_*(w) = X \quad , \quad H_*(v) = Y$$

h_p^* está bem definida pois

(i) Se $H_*(\omega_1) = X$ e $H_*(\omega_2) = X$, $H_*(v) = Y$ então

$$h_p^*(X, Y) = h_p(\omega_1, v) \quad \text{e} \quad h_p^*(X, Y) = h_p(\omega_2, v)$$

Mas observemos que se $H_*(\omega_1 - \omega_2) = 0$ então $\omega_1 - \omega_2 \in \text{Ker } H_* = R_0$ e portanto $\omega_1 - \omega_2 = hdt_p$. Portanto $h_p(\omega_1 - \omega_2, v) = 0$, $\forall v \in T_p^* M$. Portanto $h_p(\omega_1, v) = h_p(\omega_2, v)$.

(ii) h_p^* é métrica euclidiana, pois para todo $X \in T_p M$, $h_p^*(X, X) = h_p(\omega, \omega) \geq 0$ ($X = H_*(\omega)$).

Para qualquer plano de simultaneidade, $S(p)$, colocamos $g_{S(p)} = h_q^*$, $\forall q \in S(p)$. Para assegurarmos que $S(p)$ seja chato postulamos que h seja compatível com D , isto é, pomos $D_X(h) = 0$, $\forall X \in TM$.

Portanto as equações de campo para h são

$$D_X(h) = 0 \quad , \quad \forall X \in T_p M$$

$$h(dt, \omega) = 0 \quad , \quad \forall \omega \in T_p^* M$$

DEFINIÇÃO 1.1.8. O *espaço-absoluto* é caracterizado pela introdução de um sistema de referência privilegiado em M . Tal sistema de referência é definido por um campo vetorial V tipo-tempo definido em M , tal que

$$(i) \quad dt(V) = 1$$

$$(ii) \quad D_X V = 0, \quad \forall X \in T_p M$$

As curvas $\sigma : I \rightarrow M$ ($I \subset \mathbb{R}$), tais que $T_{\sigma} = V$, que são curvas integrais de V , são tipo-tempo (i) e (ii) da definição 1.1.7 nos garante que elas são geodésicas.

1.1.9. Desejamos mostrar agora, como a introdução de V_p permite a extensão da noção de comprimento a qualquer vetor $X \in T_p M$. Já sabemos que se X é tipo-espaço então $|X|^2 = h_p^*(X, X)$. Se X não é tipo-espaço, consideramos o vetor $\bar{X} = X - dt_p(X)V_p$. $\bar{X}$ é tipo-espaço pois $dt_p(\bar{X}) = 0$. Então $\bar{X}$ é a projeção de X no subespaço tridimensional tipo-espaço de $T_p M$. Definimos o comprimento de X como sendo $|X| = h_p^*(\bar{X}, \bar{X})$.

DEFINIÇÃO 1.1.10. $X \in T_p M$ é dito *nulo* se $|X| = 0$.

Os vetores nulos em p formam um subespaço unidimensional de $T_p M$ "ortogonal" ao subespaço-tipo espaço de $T_p M$. Eles são

portanto da forma $X = bV_p$.

DEFINIÇÃO 1.1.11. Uma trajetória σ é dita em *repouso absoluto* se seus vetores tangentes são nulos, isto é, se $T_\sigma = bV$.

As trajetórias que se encontram em repouso absoluto são portanto as linhas integrais de bV .

Na descrição da cinemática Newtoniana das partículas livres, como uma teoria de espaço-tempo, introduzimos os seguintes objetos geométricos na variedade espaço-tempo M : uma conexão afim D , um campo de 1-formas dt , uma forma bilinear simétrica, positiva definida h em T_p^*M , ($\forall p \in M$), e um campo de vetorial V , como secção de TM .

Postulamos que estes objetos satisfazem as seguintes equações de campo

$$K = 0$$

$$D_X(dt) = 0, \quad \forall X \in T_p M$$

$$D_X(h) = 0, \quad \forall X \in T_p M$$

(1.1.12)

$$h(dt, \omega) = 0, \quad \forall \omega \in T_p^* M$$

$$D_X(V) = 0, \quad \forall X \in T_p M$$

$$dt(V) = 1,$$

$$D_{T_\sigma} T_\sigma = 0, \quad dt(T_\sigma) = 1$$

1.2. MODELO - ESPAÇO E TEMPO ABSOLUTOS

Um modelo para esta teoria é (M, D, h, dt, V, T_g) onde os objetos geométricos satisfazem os axiomas não lógicos dados em (1.1.12).

O grupo de covariância desta teoria é o G_p (ver Capítulo I) . O grupo de invariância da teoria, aquele que preserva seus objetos absolutos, que são neste caso, D, h, dt, V é o grupo

$$\{T_3^a \times T_1^t\} \otimes \{SO(3)\} , \quad (1.2.1)$$

onde T_3^a é o grupo das translações espaciais.

T_1^t é o grupo das translações temporais.

$SO(3)$ é o grupo das rotações próprias em três dimensões.

$\otimes$ significa produto semi-direto e $\times$ o produto direto ($E_3 = T_3^a \otimes SO(3)$ é chamado grupo euclidiano).

A determinação deste grupo de invariância é feita a partir das transformações de coordenadas que deixam os objetos absolutos invariantes. Estas são dadas por: $\langle x^i \rangle \rightarrow \langle y^i \rangle$, $i = 0, 1, 2, 3$, $x^i \rightarrow y^i = x^i + \epsilon_j^i x^j + \epsilon^i$, onde $\epsilon_0^i = \epsilon_i^0 = 0$ e $\epsilon_j^i + \epsilon_i^j = 0$, $i, j = 1, 2, 3$. (ver Lopes [32], Friedman [18]).

1.3. SISTEMAS DE REFERÊNCIA NO ESPAÇO-TEMPO ABSOLUTO

DEFINIÇÃO 1.3.1. Um sistema de coordenadas $\langle x^i \rangle$ em M é dito *inercial*, se neste sistema é válido

$$r_{jk}^i = 0 \quad , \quad dt = (1, 0, 0, 0) \quad , \quad h = \text{diag}(0, 1, 1, 1) \quad , \quad \forall p \in M$$

Observemos que existe um sistema inercial em torno de cada ponto $p \in M$.

Em um sistema inercial, consideremos as curvas coordenadas $x^i = u$, $x^j = a^j$ ($j \neq i$) onde os a^j são constantes e $u \in \mathbb{R}$. O vetor tangente T_{x^i} a curva coordenada x^i é $\partial/\partial x^i$. Nesse sistema de coordenadas $T_{x^j}^i = (\delta_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$. Ainda mais, temos $D_{T_{x^i}} T_{x^i} = 0$, de maneira que cada curva coordenada é uma geodésica. T_{x^0} é tipo-tempo pois $dt T_{x^0} = 1$ e T_{x^j} ($j = 1, 2, 3$) é tipo-espaco, pois $dt T_{x^j} = 0$ ($j = 1, 2, 3$). Cada hiperplano $x^0 = \tau$, $\tau = \text{constante}$ é um plano de simultaneidade absoluta onde as coordenadas x^1, x^2, x^3 variam. Como $h = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$ no sistema de coordenadas inercial, a métrica h^* é euclidiana em qualquer plano de simultaneidade.

PROPOSIÇÃO 1.3.2. $x^0 = t$ é parâmetro afim para geodésicas tipo tempo.

DEMONSTRAÇÃO. Uma geodésica tipo-tempo $\sigma : U \rightarrow M$ satisfaz em qualquer sistema inercial a equação

$$\frac{d^2}{du^2} (x^i \circ \sigma) = 0$$

cuja solução é $x^i = a^i u + b^i$ onde a^i, b^i são constantes. Em particular $x^0 = t = a^0 u + b$ e segue que t é parâmetro afim para geodésicas tipo-tempo.

Seja agora $\sigma : R \rightarrow M$ dada por $t \mapsto \sigma(t)$ uma curva arbitrária. Curvas arbitrárias correspondem a trajetórias de partículas com aceleração não nula.

Recordemos que se T_σ é o vetor tangente a curva σ , a aceleração da curva é

$$a = D_{T_\sigma} T_\sigma .$$

Em um sistema de coordenadas arbitrárias $\langle y^i \rangle$ as equações paramétricas da curva arbitrária se escrevem $y^i(t) = y^i \circ \sigma(t)$. O vetor velocidade $T_\sigma = u = u^i \partial / \partial y^i$ tem coordenadas $u^i = dy^i / dt$ e o vetor aceleração tem componentes

$$a^i = \frac{d^2 y^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}$$

Em um sistema inercial $\langle x^i \rangle$ temos

$$u = (1, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt})$$

$$a = (0, \frac{d^2x^1}{dt^2}, \frac{d^2x^2}{dt^2}, \frac{d^2x^3}{dt^2})$$

e vemos imediatamente que u é tipo-tempo ($dt(u) = 1$) e a é tipo-espaço ($dt(a) = 0$).

DEFINIÇÃO 1.3.3. Um *sistema de referência arbitrário* em M é um campo vetorial tipo-tempo definido em $U \subseteq M$ e tal que cada uma de suas linhas integrais representa idealmente a trajetória de uma partícula.

DEFINIÇÃO 1.3.4. Um *sistema de referência* Z em M é dito *inercial* se $DZ=0$.

Um sistema de referência inercial é portanto um sistema de coordenadas inercial que é naturalmente adaptado a uma partícula livre. Nesse caso a trajetória da partícula $\sigma(t)$ satisfaz $x^0 = t, x^i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) no sistema de coordenadas associado. Portanto, uma partícula se encontra em repouso na origem do seu sistema de coordenadas associado. Além do mais um sistema de referência inercial não roda (ver páginas 77 e 78).

DEFINIÇÃO 1.3.5. Um sistema de referência Q não inercial é dito

euclidiano rígido se

(i) cada uma de suas linhas integrais σ representa uma partícula com trajetória arbitrária, isto é, se $T_\sigma = Q$, então

$$D_{T_\sigma} T_\sigma = a \neq 0$$

e

(ii) é possível naturalmente associar a Q um sistema de coordenadas $\langle y^i \rangle$ tal que

$$y^0 = t \quad \text{e} \quad h = \text{diag}(0, 1, 1, 1).$$

Um sistema de referência euclidiano rígido é portanto um sistema de coordenadas $\langle y^i \rangle$ adaptado a uma trajetória arbitrária $\sigma(t)$ que satisfaz em $\langle y^i \rangle$ as equações $y^0 = t$, $y^j = 0$, ($j = 1, 2, 3$). As coordenadas y^1, y^2, y^3 são cartesianas em cada plano de simultaneidade, mas os sucessivos planos de simultaneidade não estão relacionados entre si da mesma maneira que em um sistema inercial. A principal diferença é que em geral as coordenadas y^1, y^2, y^3 estão "rodadas" nos diferentes planos de simultaneidade.

Em um sistema de referência euclidiano rígido Q , as componentes Γ_{jk}^i da conexão em geral não se anulam, e fornecem informação a respeito da aceleração e da rotação de Q .

Para esclarecermos este ponto, vamos considerar o sistema de coordenadas $\langle y^i \rangle$ naturalmente associado a Q , da definição (1.3.6).

Seja $\langle x^i \rangle$ um sistema de coordenadas inercial. Para cada instante de tempo t , $\langle y^i \rangle$ está relacionado com $\langle x^i \rangle$ pela composição de uma rotação e uma translação, isto é, para cada t

$$y^0 = x^0 = t \quad (1.3.7)$$

$$y^j = a_i^j(t) x^i - b^j(t), \quad j=1,2,3, \quad i=0,1,2,3$$

onde os $a_i^j(t)$ formam uma matriz ortogonal. Como as componentes de D se anulam em $\langle x^i \rangle$, a lei de transformação da conexão

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial^2 x^m}{\partial y^k \partial y^j} \frac{\partial y^i}{\partial x^m}$$

nos fornece

$$\Gamma_{00}^j = a_i^j \ddot{a}_0^i y^0 + a_i^j \ddot{b}^i \quad (j,i,a = 1,2,3)$$

$$\Gamma_{i0}^j = \Gamma_{0i}^j = a_\alpha^j \dot{\ddot{a}}_i^\alpha$$

e todos as demais componentes são nulas,

(onde os pontos indicam derivação em relação ao tempo t .)

O significado físico dos coeficientes Γ_{00}^j e Γ_{i0}^j pode ser entendido como segue. Seja σ uma das linhas integrais de Q . Em relação ao sistema $\langle y^i \rangle$ a equação de movimento $a = D_u u$, ($u = T_\sigma$) se escreve

$$a^i = \frac{d^2 y^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dy^j}{dt} \frac{dy^k}{dt}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

e

$$a^0 = 0$$

$$a^j = \frac{d^2 y^j}{dt^2} + \Gamma_{00}^j + 2\Gamma_{i0}^j \frac{dy^i}{dt}.$$

Se σ está na origem do sistema de coordenadas então suas equações paramétricas são $y^0 = t$ e $y^i = 0$ e nesse caso

$$a^j = \Gamma_{00}^j \equiv a_i^j \ddot{b}^i$$

é a aceleração inercial. Assim concluímos que cada uma das linhas integrais de Q , tem a seguinte equação de movimento

$$\frac{d^2 y^j}{dt^2} + a_i^j \ddot{a}_\alpha^i y^\alpha + 2a_\alpha^j \dot{a}_i^\alpha \frac{dy^i}{dt} = 0$$

$\Gamma_{i0}^j = a_\alpha^j \dot{a}_i^\alpha = \Omega_i^j$ é chamada matriz de rotação^(*) e o termo $2\Omega_i^j dy^i/dt$ é a chamada aceleração de Coriolis. O termo $a_i^j \ddot{a}_\alpha^i y^\alpha$ é a chamada aceleração centrípeta.

A equação geral de movimento de uma partícula que se move na trajetória $\gamma: t \rightarrow \gamma(t)$ e tal que $D_{T_{\gamma}} T_{\gamma} = 0$ é no sistema (y^i)

$$\frac{d^2 y^j}{dt^2} + (a^j - \alpha^j) + a_i^j \ddot{a}_\alpha^i y^\alpha + 2\Omega_i^j \frac{dy^i}{dt} = 0.$$

SISTEMA DE REPOUSO (ABSOLUTO)

Vimos que o espaço-absoluto é caracterizado pela existência em M de um sistema de referência privilegiado definido pelo campo vetorial V (tipo-tempo e nulo) que satisfaz as equações da definição 1.1.8

Em um sistema de coordenadas inercial as componentes de V são $(1, v^1, v^2, v^3)$, e uma transformação linear nos fornece $V = (1, 0, 0, 0)$.

(*) Observe que $D_u h = 0 \Rightarrow \Gamma_{oi}^j = -\Gamma_{oj}^i$.

DEFINIÇÃO 1.3.6. Um sistema de coordenadas é dito naturalmente adaptado ao sistema de repouso (absoluto) se $\Gamma_{jk}^i = 0$, $dt = (1, 0, 0, 0)$, $h = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$ e $V = (1, 0, 0, 0)$.

Recordando que uma partícula é dita em repouso absoluto se sua trajetória σ é uma geodésica nula (definição 1.1.11) e que então $T_\sigma = bV$, temos que, em qualquer sistema de repouso, as equações paramétricas de uma tal trajetória são $x^0 = bt$, $x^j = a^j$ (a^j são constantes). Finalmente recordamos que uma trajetória geodésica arbitrária tipo-tempo (não necessariamente nula) tem equações paramétricas em um sistema de repouso dadas por $x^0 = t$, $x^j = v^j t + b^j$ (v^j, b^j são constantes). (1.3.7).

§2. AS LEIS DE NEWTON NA AUSÊNCIA DA GRAVITAÇÃO E O PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE DE GALILEU

2.1. A Mecânica Newtoniana é uma teoria dos sistemas de partículas materiais e sólidos rígidos e suas causas. O conceito de partícula foi introduzido na definição (2.1.1), (capítulo II). As leis de Newton que regem as leis do movimento, na ausência da gravitação são:

1^a Lei de Movimento: Cada partícula material segue uma geodésica tipo-tempo em M , a menos que seja compelida a mudar o seu estado de movimento por forças que agem sobre ela.

Se $\sigma : t \rightarrow \sigma(t)$, a primeira lei é representada pela equação

$$D_{T_\sigma} T_\sigma = 0 .$$

DEFINIÇÃO 2.1.1. O produto mT_σ obtido do par (m, σ) que caracteriza uma partícula material é chamado o *momento* (linear) da partícula.

2ª Lei do Movimento: A alteração no movimento geodésico de uma partícula material é proporcional a força motiva que age na partícula e é feita na direção da força. Explicitamente postulamos que

$$mD_{T_\sigma} T_\sigma = f .$$

Observe que $dt(T_\sigma) = 1$ e como $D_X(dt) = 0$, $\forall X \in TM$, $dt(mD_{T_\sigma} T_\sigma) = 0$, o que implica que $dt(f) = 0$. Assim, em um sistema inercial temos que $f = (0, f^1, f^2, f^3) = (0, \vec{f})$. f é portanto um vetor tipo-espaço.

A Mecânica Newtoniana lida com sistemas de muitas partículas e as possíveis formas de f são restritas pela

3ª Lei do Movimento: A cada ação corresponde uma reação igual

e oposta; ou, as ações mútuas entre dois corpos a e b entre si são sempre iguais na mesma direção e em sentidos opostos e são simultâneas.

A terceira lei é expressa matematicamente pela condição

$$f_{ab}(t) = - f_{ba}(t)$$

A força f que age em uma certa partícula é um vetor. Ela precisa portanto ser uma combinação linear dos vetores que temos a nossa disposição (na teoria que estamos formulando) com coeficientes que são escalares. Por exemplo, se temos uma força que depende da velocidade da partícula, então sua expressão mais geral que satisfaz $dt(f) = 0$ é

$$f = \alpha(T_\sigma - V) \quad (2.1.2)$$

onde $\alpha : (T_\sigma, T_\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ [$h^*(\bar{T}_\sigma, \bar{T}_\sigma)$], onde $f : h^*(T_\sigma, T_\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{T}_\sigma$ é definido em (1.1.9) (Capítulo III).

Seja (x^i) um sistema de coordenadas em M . A força $f = f^i \partial / \partial x^i$ mais geral e que não depende da velocidade tem componentes

$$f_{ab}^i = \phi(\ell_{ab}) h^{ij}(z_a) \frac{\partial \ell_{ab}}{\partial z_a^j} \quad (2.1.3)$$

onde $z_a^i = x^i \circ \sigma_a$ são as equações paramétricas da partícula a(b) cuja trajetória é σ_a . ℓ_{ab} é a distância euclidiana no instante t entre as partículas a e b

$$\ell_{ab} : (z_a^i, z_b^j) \rightarrow (h_*)_{ij} z_a^i z_b^j .$$

Finalmente, $\frac{\partial \ell_{ab}}{\partial z_a^j}$ significa $\frac{\partial \ell_{ab} \circ (\sigma_a, \sigma_b)}{\partial x^j}$.

É comum a introdução de um potencial $U(\ell_{ab})$, tal que

$$\frac{dU}{d\ell_{ab}} = -\phi$$

e temos

$$f_{ab}^i = - h^{ij}(z_a) \frac{\partial U}{\partial z_a^j}(\ell_{ab})$$

2.2. MODELO-TEMPO ABSOLUTO E ESPAÇO RELATIVÍSTICO - O PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE DE GALILEU

É absolutamente claro que se o campo vetorial V que define o sistema privilegiado não aparece em nenhuma lei física,

isto é, se não temos forças dependentes da velocidade (como em (2.1.2)), mas apenas forças do tipo (2.1.3), então no modelo da teoria newtoniana é dado por

$$T_N = (M, D, dt, h, T_0, f)$$

onde D, dt, h satisfazem as equações

$$K = 0$$

$$D_x dt = 0, \quad \forall x \in T_p M$$

$$D_x(h) = 0, \quad \forall x \in T_p M$$

$$h(dt, \omega) = 0, \quad \forall \omega \in T_p^* M$$

e que

$$D_{T_\sigma} T_\sigma = f.$$

O grupo de Covariância desta teoria é G_p . O grupo de Invariância da teoria, aquele que preserva seus objetos absolutos que são neste caso D, dt, h é o grupo de Galileu $\bar{G}$

$$\bar{G} = \{T_3^a \times T_1^t\} \otimes \{T_3^v \otimes SO(3)\},$$

onde $T_3^a, T_1^t, SO(3)$ são como descritos em (1.2.1) e T_3^v é o grupo das transformações especiais de Galileu.

A determinação deste grupo de invariância é feita a partir das transformações de coordenadas que deixam os objetos absolutos invariantes. Estas são dadas por: $\langle x^i \rangle \rightarrow \langle y^i \rangle$, $i = 0, 1, 2, 3$; $x^i \rightarrow y^i + \epsilon_j^i x^j + \epsilon^i$ onde $\epsilon_0^i \neq 0$, $\epsilon_i = 0$, $\epsilon_j^i + \epsilon_i^j = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$). (Ver Lopes [32], Friedman [18]). Neste caso, as transformações especiais de Galileu, são representadas por $x^0 \rightarrow y^0 = x^0$, $x^i \rightarrow y^i + v^i x^0$, $v^i = \epsilon_0^i$.

Observemos que as transformações dadas pelas equações (1.2.1) - Capítulo III) definem uma classe de sistemas de referência em repouso (absoluto), enquanto que as transformações dadas pelas equações acima definem uma classe de sistemas em movimento relativo linear e uniforme (sistemas inerciais).

O PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE DE GALILEU: é a afirmação que todos os sistemas inerciais são equivalentes, do ponto de vista das leis da Mecânica, quando não intervêm forças dependentes de V , isto é, na forma dada pelas equações (2.1.2).

Tornamos agora preciso o conceito de equivalência entre sistemas de referência no âmbito da Mecânica. Seja então T uma teoria de espaço-tempo da Mecânica de partículas e suas interações e sejam Z e Z' dois sistemas de referência, isto é, dois campos vetoriais tipo-tempo em M . Como vimos no §1 deste Capítulo o estado de movimento de um sistema de referência arbitrário Z é dado pelas componentes da conexão D em um sistema de

coordenadas adaptado a Z e pelas componentes do campo vetorial absoluto (tipo-tempo) V . Seja $\langle x^\mu \rangle \rightarrow \langle y^\mu \rangle$ a transformação que relaciona o sistema de coordenadas $\langle x^\mu \rangle$ naturalmente adaptado a Z com um sistema de coordenadas $\langle y^\mu \rangle$ naturalmente adaptado a Z' . Esta transformação induz como sabemos um difeomorfismo $h: M \rightarrow M$ tal que se $p \in M$, então $x^\mu(h_p) = y^\mu(p)$, e h também induz a aplicação h_* que leva qualquer objeto geométrico ϕ em $h_*\phi$, cujas componentes em Z em h_p são iguais às componentes de ϕ em Z' em p . Assim, $D \rightarrow h_*D$ e se V está presente $V \rightarrow h_*V$, de maneira tal que $h_*D(h_*V)$ atribua o mesmo estado de movimento a Z que $D(V)$ atribua a Z' . Temos então a

DEFINIÇÃO 2.2.1. Z e Z' são equivalentes ou indistinguíveis de acordo com a teoria T se não existir nenhuma experiência mecânica realizada com os sistemas físicos $\{f\}$ descritos por T que possa distinguir $D(V)$ de $h_*D(h_*V)$ de acordo com os axiomas não lógicos de T .

EXEMPLO 2.2.2. Seja (M, D, dt, h, V, T_G) um modelo da cinemática Newtoniana e sejam Z e Z' dois sistemas de referência inerciais. A única diferença teórica entre Z e Z' se refere às componentes de V ; em Z , $V = (1, -v_Z)$; em Z' , $V = (1, -v_{Z'})$; onde v_Z e $v_{Z'}$ são as velocidades absolutas de Z e Z' em relação a V .

Z e Z' concordam no valor das componentes de D , dt e h .

Não podemos distinguir Z e Z' pelas leis da cinemática Newtoniana. De fato, seja $g : M \rightarrow M$ o difeomorfismo associado a uma dada transformação de Galileu, então $V \mapsto g_* V$. É trivial verificarmos que $(M, D, dt, h, g_* V, T_g)$ é também um modelo da cinemática Newtoniana. Portanto, do ponto de vista da cinemática Newtoniana não podemos inferir se estamos no sistema Z ou em Z' .

EXEMPLO 2.2.3. Contrastando com o caso em que Z e Z' são referenciais inerciais observamos que se Z é inercial e Z' é um sistema euclidiano rígido com aceleração absoluta a então eles são distinguíveis de acordo com a cinemática Newtoniana. De fato, em Z , $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = 0$, em Z' , $\Gamma_{00}^{\prime\mu} = a^\mu$. Mudemos agora D para uma nova conexão D' , tal que as componentes em Z são iguais as componentes de D em Z' , isto é $D' = f_* D$ onde f é o difeomorfismo associado a uma transformação de forma (1.3.7). (M, D', dt, h, T_g) não é um modelo da cinemática Newtoniana, pois qualquer trajetória σ em $\tilde{\sigma}$ satisfaz

$$\frac{d^2 (x^\mu \circ \sigma)}{dt^2} = 0$$

em Z por hipótese, e a lei de movimento em Z relativamente a D' é

$$\frac{d^2 (x^\mu \circ \sigma)}{dt^2} + a^\mu = 0$$

Portanto, T_g não satisfaz a lei Newtoniana do movimento relativamente a D' .

§3. FIBRADO ARISTOTÉLICO E FIBRADO GALILEANO

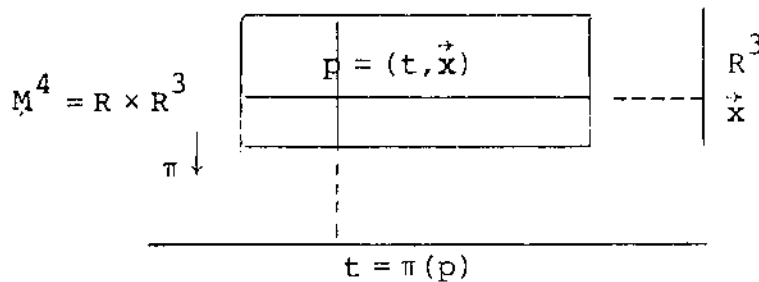
A estrutura do espaço-tempo pode ser vista como uma estrutura de fibrado (ver Apêndice, definição 1.8.1).

3.1. O espaço-tempo (M, D, dt, h, V) é chamado espaço-tempo Newtoniano (ou Aristotélico). Neste caso temos o espaço e o tempo absolutos.

Então M é simplesmente o produto cartesiano

$$M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \text{ e, o fibrado } \{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \pi, \mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \psi, G\},$$

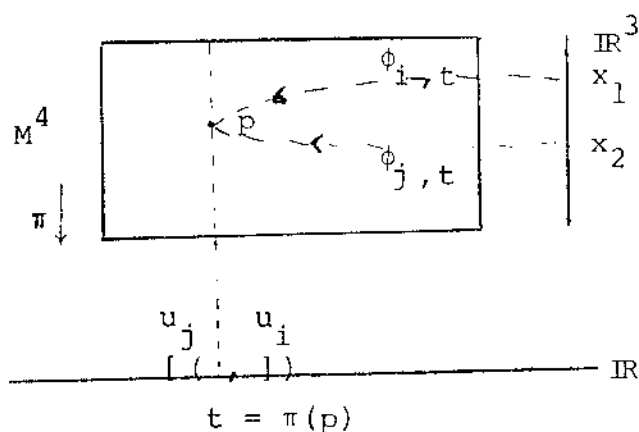
onde a aplicação identidade, G é o grupo, $G = \{e\}$.



Cada evento p é definido pelo instante de tempo t e sua localização no espaço. $M^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ onde $\mathbb{R}$ é o eixo do tempo e $\mathbb{R}^3$ é o espaço tridimensional.

3.2. No espaço-tempo de Galileu o tempo permanece absoluto mas o espaço é relativo, o Princípio da Relatividade de Galileu (quando se aplica) implica que não há referencial inercial privilegiado, e então o espaço-tempo não é simplesmente o produto cartesiano do espaço pelo tempo. A estrutura de fibrado no

espaço-tempo de Galileu é dada por $\{M^4, \pi, \mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \{\phi_i\}, G\}$



A função projeção $\pi: M^4 \rightarrow \mathbb{R}$ associa a cada evento p de M^4 o correspondente instante de tempo t , $t = \pi(p)$. M é chamado espaço total, R é dito espaço base e $\mathbb{R}^3$ é a fibra típica. Os ϕ_i são homeomorfismos de $U_i \times \mathbb{R}^3$ em $\pi^{-1}(U_i)$ (U_i é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$). Neste exemplo as fibras são isomorfas e é possível representar este fibrado como um produto cartesiano (pois o fibrado é trivial-base é contrátil). Entretanto esta representação depende do particular sistema inercial escolhido, isto nos informa que não existe um isomorfismo canônico entre as fibras. O grupo estrutural do fibrado é o grupo G ,

$$G = T_3^a \otimes \{T_3^v \otimes SO(3)\}, \text{ onde}$$

$\otimes$ é o produto semi-direto.

T_3^a são as translações no espaço ($\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$) ; $SO(3)$ são as rotações próprias ($\vec{x} \rightarrow R\vec{x}$) ; T_3^v são as transformações especiais de Galileu ($\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{v}t$).

G é um subgrupo do grupo de Galileu definido em §2, (capítulo III) ,

$$\bar{G} = \{ T_3^a \times T_1 \} \otimes \{ T_3^v \otimes SO(3) \} .$$

O grupo G age na fibra $\pi^{-1}(p)$, da seguinte maneira , se $t = \pi(p)$, $(p = (t, \vec{x}_1) = (t, \vec{x}_2))$, então $g_{ij}(t) = \phi_{i,t}^{-1} \phi_{j,t}$ é o elemento de G , tal que

$$g_{ij}(t)(\vec{x}_1) = R\vec{x}_1 + \vec{v}t + \vec{a} = \vec{x}_2 , \text{ onde}$$

$R\vec{x}_1$ é rotação própria de $\vec{x}_1$; $\vec{v}t$ é a aceleração e $\vec{a}$ é um vetor constante.

§4. A ELETRODINÂMICA CLÁSSICA DE MAXWELL-LORENTZ

4.1. Como vimos em § 2, se as forças que não dependem da velocidade não são levadas em consideração, então vale o Princípio da Relatividade de Galileu, que diz que sistemas de referência inerciais são equivalentes (fisicamente). A seguir apresentaremos uma formulação da eletrodinâmica clássica de Maxwell-Lorentz

sobre o espaço-tempo Newtoniano. Veremos que nesta teoria além de existirem forças dependentes da velocidade, existe também uma outra particularidade referente ao modo de propagação de sinais luminosos que permite em princípio detetarmos a presença do campo V , que define o sistema privilegiado, e que destrói por tanto, a equivalência (física) dos sistemas inerciais.

As equações de Maxwell-Lorentz são usualmente apresentadas por

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (4.1.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

onde $\vec{E}$ é o vetor campo elétrico, $\vec{B}$ o campo (de indução) magnético, $\vec{j}$ é a densidade de corrente; $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{j}$ são funções de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dadas respectivamente por

$$(t, \vec{x}) \mapsto \vec{E}(t, \vec{x}) \quad , \quad (t, \vec{x}) \mapsto \vec{B}(t, \vec{x}) \quad , \quad (t, \vec{x}) \mapsto \vec{j}(t, \vec{x}) \quad .$$

ρ é a densidade de corrente $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, \vec{x}) \mapsto \rho(t, \vec{x})$ e operador $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. c é uma constante.

Os campos elétrico e magnético agem em partículas carregadas e a força resultante, conhecida como força de Lorentz é dada por

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.1.3)$$

onde $\vec{v}$ é a tri-velocidade da partícula. A equação de movimento de uma partícula carregada é então

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.1.4)$$

Observemos que o conjunto de equações (4.1.1) e (4.1.2) admite soluções quando $\rho, \vec{j} = 0$. Neste caso cada uma das componentes cartesianas de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfaz uma equação de onda,

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano em $\mathbb{R}^3$.

Sabe-se que tal equação possui uma solução na forma

$$\phi = \phi_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] \quad , \quad \frac{\omega}{|\vec{k}|} = c$$

que descreve uma onda eletromagnética se propagando com

velocidade c . Surge então a pergunta: em relação a que sistema de referência as ondas eletromagnéticas viajam com velocidade c ?

Para Maxwell e contemporâneos a resposta era óbvia - a luz se move com velocidade c em relação a seu carregador - o éter.

Portanto, as equações (4.1.1) e (4.1.2) só podem ser válidas em uma classe limitada de referenciais inerciais, todos os membros da classe estando em repouso relativo e ainda mais estando o éter também em repouso em relação a esta classe de sistemas. De fato, segue das transformações de Galileu que se uma trajetória possui tri-velocidade $\vec{v}_R$ em relação ao referencial R e se R se move com velocidade constante $\vec{v}$ em relação a $\bar{R}$, então a velocidade da trajetória no referencial $\bar{R}$ é

$$\vec{v}_{\bar{R}} = \vec{v}_R - \vec{v}.$$

Portanto, se as equações (4.1.1) e (4.1.2) valem em R , elas somente serão válidas em $\bar{R}$ se $\vec{v} = 0$. No que se segue, identificaremos a classe dos sistemas onde as equações de Maxwell-Lorentz são válidas, com os sistemas de repouso (ver definição 1.3.6). Usaremos também a partir daqui um sistema de unidades tal que $c = 1$ (sistema de unidades natural).

Queremos formular a eletrodinâmica de Maxwell - Lorentz

como uma teoria de espaço-tempo (sobre o espaço-tempo Newtoniano). Para isto, vamos introduzir um tensor tipo $(2,0)$, g^*

$$g^* = V \otimes V - h$$

onde V, h são os definidos em §3.2 (capítulo III).

Nos sistemas de repouso, $h = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$, $V = (1, 0, 0, 0)$ e resulta que

$$g^* = \text{diag}(1, -1, -1, -1) .$$

Observemos que g^* induz uma aplicação

$$G_* : T_p^*M \rightarrow T_p M , \quad \text{dada por}$$

$\omega \rightarrow G_*(\omega)$, onde $G_*(\omega)$ é tal que, se $\alpha, \omega \in T_p^*M$ então

$$\alpha(G_*(\omega)) = g_p^*(\omega, \alpha) .$$

Como G_* é não singular, existe a aplicação inversa, que chamaremos G ,

$$G : T_p M \rightarrow T_p^*M , \quad \text{tal que se}$$

$X \in T_P M$, $\omega \in T_P^* M$ então $g_P^*(G(X), \omega) = \omega(X)$. G_* induz um tensor g do tipo $(0,2)$ em $T_P M \times T_P M$, tal que se $v, \omega \in T_P M$ então

$$g_P(X, Y) = g_P^*(G(X), G(Y)) .$$

Observemos que se as componentes de g_P^* , em uma base coordenada são

$$g^{ij} = g_P^*(dx^i, dx^j)$$

então as componentes de g_P , são

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_P^*\left(G\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)$$

Daqui segue que $g^{ij}g_{kj} = \delta^i_k$. g possui então todas as características de uma métrica de Lorentz e é de fato, a métrica do espaço-tempo de Minkowski, que é o espaço-tempo que serve de modelo para a Teoria da Relatividade Especial de Einstein (ver Capítulo IV). Em um sistema em repouso

$$g = \text{diag}(1, -1, -1, -1) .$$

DEFINIÇÃO 4.1.5. O operador de abaixamento de índice $\downarrow_b^a$, com $1 \leq a \leq r$; $1 \leq b \leq s$ é a aplicação $\downarrow_b^a : T_p^{(r,s)}(M) \rightarrow T^{(r-1,s+1)}(M)$ tal que se $\theta \in T^{r,s}(M)$, então $\downarrow_a^b \theta \in T^{r-1,s+1}(M)$ e vale

$$\downarrow_b^a \theta(\omega_1, \dots, \omega_{r-1} ; X_1, \dots, X_{s+1})$$

$$= \theta(\omega_1, \dots, \omega_{a-1}, G(X_b, \cdot), \omega_{a+1}, \dots, \omega_{r-1}; X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{s+1})$$

onde $\omega_1, \dots, \omega_{r-1}$ e $X_1, \dots, X_{s+1}$ são respectivamente, 1-formas e campos vetoriais arbitrários.

OBSERVAÇÃO. Quando $a=b=m$, $\downarrow_m^m$ é usualmente indicado por G^m . $\downarrow_b^a$ é claramente $\mathcal{D}(M)$ -linear^(*), e é de fato um isomorfismo, uma vez que existe a operação inversa $\uparrow_b^a : T^{(r,s)}(M) \rightarrow T^{(r+1,s-1)}(M)$ chamada operação de levantamento de índices.

DEFINIÇÃO 4.1.6. A aplicação $\uparrow_b^a : T^{(r,s)}(M) \rightarrow T^{(r+1,s-1)}(M)$ é dada por,

$$\begin{aligned} & \uparrow_b^a \theta(\omega_1, \dots, \omega_{r+1} ; X_1, \dots, X_{s-1}) \\ &= \theta(\omega_1, \dots, \omega_{b-1}, \omega_{b+1}, \dots, \omega_{r+1} ; X_1, \dots, X_{a-1}, G_\star(\omega_b), X_{a+1}, \dots, X_{s-1}) \end{aligned}$$

onde $\omega_1, \dots, \omega_{r+1}$ e $X_1, \dots, X_{s-1}$ são respectivamente, 1-formas e campos vetoriais arbitrários.

OBSERVAÇÃO: quando $a=b=m$, $\uparrow_m^m$ é denotado por $G_\star^m$.

(*) $\mathcal{D}(M)$ é o anel das funções $\mathbb{C}^\infty$ em M

EXEMPLO 4.1.7. Se $\theta \in T_p^{(2,2)}(M)$

$$G^1\theta(\omega; Z, X, Y) = \theta(G(Z), \omega; X, Y)$$

e escolhendo $\omega = dx^m$, $Z = e_\ell$, $X = e_j$, $Y = e_k$

$$\begin{aligned}(G^1\theta)_{\ell jk}^m &= g_{i\ell} \theta(dx^i, dx^m; e_j, e_k) \\ &= g_{i\ell} \theta_{jk}^{im}\end{aligned}$$

$$G^2\theta(\omega; X, Z, Y) = \theta(\omega, G(Z); X, Y)$$

$$(G^2\theta)_{j\ell k}^m = g_{i\ell} \theta_{jk}^{mi}$$

DEFINIÇÃO 4.1.8. A aplicação contração $\text{tr}^{pq}: T_p^{(r,s)}(M) \rightarrow T_p^{(r-1,s-1)}(M)$

($1 \leq p \leq r$; $1 \leq q \leq s$) dada por $\theta \rightarrow \text{tr}^{pq}\theta$, onde

$$\text{tr}^{pq}\theta(\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1})$$

$$= \sum_k \theta(\omega_1, \dots, \omega_{p-1}, dx^k, \omega_p, \omega_{p+1}, \dots, \omega_{r-1}, X_1, \dots, X_{q-1}, \frac{\partial}{\partial x^k}, X_q, \dots, X_{q+1}, \dots, X_{s-1}).$$

Por exemplo se $\theta \in T_p^{(2,2)}(M)$ então verificamos imediatamente que

$$(\text{tr}^{12}\theta)_i^\ell = \sum_k \theta_{ik}^{k\ell}$$

$$(\text{tr}^{22}\theta)_i^\ell = \sum_k \theta_{ik}^{\ell k}$$

Estamos agora equipados para escrevermos a teoria de Maxwell-Lorentz como uma teoria de espaço-tempo.

4.2. FORMULAÇÃO DA ELETRODINÂMICA DE MAXWELL-LORENTZ

Introduzimos um campo vetorial covariante J que representa a densidade de carga-corrente e uma 2-forma F que representa o campo eletromagnético.

Em um sistema de repouso fazemos a identificação

$$J = (\rho, \vec{j}) \quad (4.2.1)$$

e

$$F_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.2.2)$$

Introduzimos ainda conceito de partícula carregada.

DEFINIÇÃO 4.2.1. Uma partícula carregada é uma tripla (σ, m, q) onde $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma curva tipo-tempo, $m \in (0, \infty)$ e $q \in \mathbb{R}$.

Finalmente a teoria de Maxwell-Lorentz (ML)

$T_{ML} = (M, D, dt, h, V, F, \vec{J}, T_0)$ é descrita pelas equações de campo

$$K = 0$$

$$D_X(dt) = 0 \quad , \quad \forall X \in T_p M$$

$$D_X(h) = 0 \quad , \quad \forall X \in T_p M$$

$$h(dt, \omega) = 0 \quad , \quad \forall \omega \in T_p^* M \quad (4.2.4)$$

$$D_X(V) = 0 \quad , \quad \forall X \in T_p M$$

$$dt(V) = 1$$

$$\delta F = -4\pi J$$

$$dF = 0$$

e a equação de movimento das partículas carregadas de massa m e carga q é

$$m D_{T_\sigma} T_\sigma = q \operatorname{tr}^{21}(G_\star^1 F \otimes T) - dt [q \operatorname{tr}^{21}(G_\star^1 F \otimes T_\sigma)] V \quad (4.2.5)$$

Nas equações (4.2.4) d é o operador diferencial e $\Delta \omega = (-)^{p-1} d \star \omega$, $\omega \in \Lambda^p(M)$ e $\star$ é o operador estrela de Hodge. [Ver Apêndice 1.4]. Observe também que a força que aparece em (4.2.5) é justamente a "projeção" espacial do vetor $\operatorname{tr}^{21}(G_\star^1 F \otimes T_\sigma)$.

4.3. COMENTÁRIO DE CARÁTER EMINENTEMENTE FÍSICO

T_{ML} implica que as equações (4.1.1), (4.1.2) são válidas apenas nos sistemas de repouso. Tal é consequência do fato que o grupo de simetria da teoria é, como já determinado no §3,

$\{T_3^a \times T_1^t\} \otimes SO(3)$. Todas as evidências experimentais sugerem que as equações (4.1.1) e (4.1.2) valem em todos os sistemas inerciais, quando as coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) de um dado sistema inercial estão diretamente associadas a medidas realizadas por relógios reais em repouso no dado sistema inercial e sincronizados à l'Einstein e por réguas "rígidas" ideais. Para uma discussão detalhada deste ponto o leitor deve consultar (Rodrigues (1983) [46], Rodrigues-Tiomno (1985) [47]).

Desejamos também chamar a atenção aqui ao fato que a dependência explícita da força eletromagnética (que age sobre uma partícula) de V foi motivo de experiências como a de Trouton-Noble [42] e os resultados da experiência não revelaram V .

Observamos aqui que os relógios ideais da teoria Newtoniana são supostos registrarem a passagem do tempo absoluto - eles devem registrar um tempo tal que as leis de Newton sejam válidas. Este tempo é que os astrônomos chamam de tempo das efemérides, ou tempo Newtoniano [3], e como já salientamos no Capítulo II é um tempo teórico ("relógio de papel"). O problema da existência ou não de relógios físicos na Natureza que registrem o tempo das efemérides e que satisfaçam as demais propriedades exigidas pelos relógios ideais da teoria Newtoniana nunca é discutido nos textos. Em particular para registrar o tempo absoluto em todos os sistemas inerciais é necessário que o ritmo do relógio ideal Newtoniano não dependa do seu estado de movimento.

Isto posto, desejamos enfatizar que a afirmação usual de que a validade das equações (4.1.1) e (4.1.2) em todos os sistemas inerciais implica que as transformações de Galileu estão erradas é "non-sequitur". A afirmação correta é que as transformações de Galileu não relacionam de maneira correta as coordenadas de espaço-tempo em sistemas inerciais em movimento relativo, se as determinações dessas coordenadas são realizadas por relógios reais e réguas rígidas reais. Isto é explicado em detalhes, por exemplo em Rodrigues-Tiomno (1985) porque os relógios e réguas reais não satisfazem as condições de serem réguas e relógios ideais Newtonianos.

Mas, se as equações (4.1.1) e (4.1.2) são válidas em todos os sistemas inerciais, quais as transformações corretas entre as coordenadas espaço-tempo de sistemas inerciais distintos ou ainda, qual o grupo de covariância dessas equações?

A resposta é que o grupo de covariância dessas equações é o grupo de isometrias de g , introduzido pela equação $g_p(X,Y) = g_p^*(G(X),G(Y))$. Tal grupo é chamado grupo de Poincaré e desempenha um papel de destaque na Física contemporânea. A discussão desse grupo se encontra no Apêndice 2.3.

Em conclusão, nenhuma experiência clássica pode revelar h , dt , V , e a solução encontrada por Einstein foi a de reter g^* (ou g) e D como objetos absolutos e relegar h , dt e V ao esquecimento. Voltaremos a este ponto no Capítulo V.

§5. A TEORIA NEWTONIANA DA GRAVITAÇÃO E A EXISTÊNCIA DE REFERENCIAIS INERCIAIS

Nesta seção vamos apresentar duas versões da teoria da Gravitação Universal de Newton como teorias de espaço-tempo. A primeira versão da teoria é construída sobre o espaço-tempo de Galileu e a segunda versão é uma teoria sobre um espaço-tempo com curvatura de Riemann não nula. Em particular a segunda versão nos levará naturalmente a questionar a validade de se postular a existência de referências inerciais no Universo Físico. Tal questionamento é importante em conexão com um dos problemas principais desse trabalho (Capítulo V) que mostra em detalhes qual o limite da validade do Princípio da Relatividade de Einstein quando aplicado ao mundo real que habitamos. (No que segue indicaremos a conexão chata do espaço-tempo de Galileu por $\overset{\circ}{D}$).

5.1. TEORIA DA GRAVITAÇÃO NO ESPAÇO-TEMPO GALILEANO

Vimos no §2 que a 2^a lei de Newton estipula que o movimento de uma partícula material (σ, m) , sujeita a ação de uma força F , é

$$m \overset{\circ}{D}_{T_{\sigma}} T_{\sigma} = F$$

e em um sistema inercial esta equação toma a forma

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = F^i ; \quad i = 1, 2, 3$$

Na teoria da Gravitação de Newton a força $\vec{F}$ é dada por

$$\vec{F} = m \vec{G}$$

onde $\vec{G}$ é o campo gravitacional, e

$$\vec{G} = - \nabla \phi$$

onde ϕ é o potencial escalar, e ∇ é o gradiente (tridimensional).

A teoria Newtoniana postula que o potencial ϕ está relacionado com a densidade de massa ρ pela equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi K \rho \quad (5.1.1)$$

onde K é a constante de gravitação universal, e ∇^2 é o Laplaciano (tridimensional).

Para produzirmos uma versão da teoria de Newton sobre o espaço-tempo de Galileu, começemos por recordar que a forma bilinear h (§1, Capítulo III) induz a aplicação

$$H_* : T_P^* M \rightarrow T_P M , \quad v \mapsto H_*(v) ,$$

tal que $\forall \omega \in T_p^*M$, temos $\omega(H_*(v)) = h_p(\omega, v)$.

Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, definimos

$$\text{grad } \phi = H_*(d\phi)$$

$$\text{del } \phi = \text{div}(\text{grad } \phi)$$

onde $\text{div} : T^{(1,0)} \rightarrow T^{(0,0)}$, dada por $X \mapsto \text{tr}^{11}(\bar{D}X)$, e $\bar{D}$ é operador de derivada covariante.

Portanto, se ϕ é o potencial gravitacional (em M) a força gravitacional se escreve

$$F = -m(\text{grad } \phi) .$$

Como a imagem de H_* consiste somente de vetores tipo espaço (§1, Capítulo III) F tem as propriedades desejadas.

A teoria da Gravitação de Newton em espaço de Galileu tem então o modelo, $T_{NG} = (M, \overset{\circ}{D}, dt, h, \phi, \rho, T_\sigma)$, onde os objetos geométricos satisfazem os axiomas não lógicos:

$$K = 0$$

$$\overset{\circ}{D}_X(dt) = 0, \quad \forall X \in T_p M \quad (5.1.2)$$

$$h(dt, \omega) = 0, \quad \forall \omega \in T_p^*M$$

$$\text{del}(\phi) = 4\pi K\rho$$

e a lei de movimento das partículas materiais é

$$m \overset{\circ}{D}_{T_\sigma} T_\sigma = -m(\text{grad } \phi) \quad . \quad (5.1.3)$$

O grupo de Invariância de T_{NG} é o grupo de Galileu $\bar{G}$ (§2, Capítulo III).

5.2. O PROBLEMA DOS REFERENCIAIS INERCIAIS

Seja $\langle x^i \rangle$ um sistema inercial e $\langle y^j \rangle$ um sistema euclidiano rígido (definição 1.3.6, Capítulo III) adaptado a trajetória σ , tal que $D_{T_\sigma} T_\sigma \neq 0$. Suponhamos que o sistema $\langle y^j \rangle$ não possui rotação em relação a $\langle x^i \rangle$. Neste caso as transformações que ligam os dois sistemas são

$$\begin{aligned} y^0 &= x^0 = t \\ y^i &= x^i - b^i(t) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Naturalmente, $\ddot{b}^i(t)$ é a aceleração de σ relativamente a $\langle x^i \rangle$.

Como saber que $\langle y^j \rangle$ não é um sistema inercial? Em um sistema inercial $\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i = 0$ e em $\langle y^j \rangle$, $\Gamma_{00}^i = \ddot{b}^i$ e todos os demais $\Gamma_{jk}^i = 0$ (§1.3, Capítulo III).

As leis de movimento de uma partícula material (σ, m) em

$\langle x^i \rangle$ sujeita ao campo gravitacional ϕ é

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x^i} = 0 \quad (5.2.2)$$

e em $\langle y^j \rangle$ temos

$$\frac{d^2 y^j}{dt^2} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y^j} + \ddot{b}^j = 0$$

Esta última equação não é a lei de movimento em um sistema inercial, mas a questão seguinte surge naturalmente:

Como é que os observadores que se encontram no sistema $\langle y^j \rangle$ podem saber que o potencial gravitacional real é ϕ e não

$$\eta = \sum_j \ddot{b}^j x^j + \phi \quad ?$$

De fato, se o potencial gravitacional é η , então em $\langle y^j \rangle$ a equação de movimento é

$$\frac{d^2 y^k}{dt^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x^k} = 0$$

e $\langle y^j \rangle$ será um sistema inercial para os observadores que se encontram no referencial $\langle y^j \rangle$. É claro que estes observadores não estão em condições de responder, com questões locais, o problema

de determinar qual potencial é o real, η ou ϕ . De fato, se $\overset{\circ}{D}$ é a conexão chata original cujas componentes se anulam em $\langle x^i \rangle$ e $\overset{\circ}{D}'$ é uma conexão chata cujas componentes se anulam em $\langle y^j \rangle$, então $\langle x^i \rangle$ é inercial de acordo com $\overset{\circ}{D}$ e $\langle y^j \rangle$ é inercial de acordo com $\overset{\circ}{D}'$. Somos assim tentados a concluir que se $1 = (M, \overset{\circ}{D}, dt, h, \phi, \rho, T_\sigma)$ é o modelo de T_{NG} , também $2 = (M, \overset{\circ}{D}', dt, h, \eta, \rho, T_\sigma)$ é modelo de T_{NG} . Contudo, recordando nossa discussão do ponto de vista ativo (Capítulo II, pg.49) vemos que tal conclusão só é correta se o conjunto de condições de bordo que se pode impor nas equações diferenciais em 1 está apropriadamente relacionado com o conjunto de condições de bordo que se pode impor nas equações diferenciais em 2.

DEFINIÇÃO 5.2.3. Um sistema de coordenadas é dito *Galileano* se for euclidiano rígido e não rodar, a lei de movimento sendo dada por

$$\frac{d^2 y^k}{dt^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x^k} = 0$$

Tanto $\langle x^i \rangle$ como $\langle y^j \rangle$ são sistemas Galileanos, e em qualquer sistema Galileano a equação de movimento é da forma

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0$$

para algum potencial ψ .

Vemos que a única forma de especificarmos um potencial ϕ bem determinado é impor que existam "sistemas Galileanos globais" e tal que se $\langle x^i \rangle$ é um sistema Galileano global, então em $\langle x^i \rangle$, $\phi \rightarrow 0$ quando $x^j \rightarrow \pm \infty$ ($j=1,2,3$). Sistemas galileanos globais concordam portanto sobre a função potencial gravitacional e não se encontram acelerados, um em relação dos outros.

O problema com a condição de bordo acima sugerida para ϕ é que (do fato que ϕ deve satisfazer a equação de Poisson), tal implica em um Universo onde toda a matéria esteja concentrada em uma certa região finita do R^3 . Ora, esse é longe de ser o caso no Universo que habitamos e portanto as condições de bordo que sugerimos acima não ajudam muito no nosso problema de encontrar os sistemas inerciais.

A discussão acima nos sugere que em uma teoria mais realista o potencial gravitacional ϕ e a conexão chata $\overset{\circ}{D}$ existam somente em relação a uma escolha arbitrária do sistema de coordenadas galileano, onde a lei de movimento é dada pela equação (5.2.2).

5.3. A TEORIA DA GRAVITAÇÃO EM UM ESPAÇO-TEMPO CURVO

Uma teoria mais realista da gravitação, pode ser construída

se substituimos a conexão chata $\overset{\circ}{D}$, cujas componentes se anulam nos sistemas inerciais, por uma conexão não chata, tal que suas componentes satisfazem $\Gamma_{00}^i = \partial\phi/\partial x^i$ e todos os demais $\Gamma_{jk}^i = 0$, para algum potencial ϕ em um sistema galileano arbitrário. A lei do movimento de uma partícula sujeita somente ao campo gravitacional é $D_{T_\sigma} T_\sigma = 0$, que se reduz a (5.2.2) nos sistemas galileanos.

É conveniente enfatizar que não foi eliminada a noção de aceleração - foi eliminada somente a noção de aceleração em relação a conexão $\overset{\circ}{D}$. Mas, continua a existir a noção de aceleração em relação a D , isto é, partículas sujeitas a ação de forças não gravitacionais terão aceleração

$$a = D_{T_\sigma} T_\sigma.$$

Tal observação nos permite introduzir a noção importantíssima de referencial inercial local.

DEFINIÇÃO 5.3.1. Um *referencial inercial local* (RIL) é um sistema de coordenadas adaptado a uma trajetória σ que é uma geodésica de D e tal que $\Gamma_{jk}^i = 0$ ao longo de σ .

Como exemplo, consideremos o sistema $\{y^j\}$ adaptado a trajetória $\sigma(t)$ e definido pelas equações (5.2.1). A aceleração de

$\sigma(t)$ em relação a D é

$$a^i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \ddot{b}^i .$$

Portanto se $\partial \phi / \partial x^i = -\ddot{b}^i$ então $\sigma(t)$ estará em queda livre no campo gravitacional original. Se $\sigma(t)$ experimenta uma aceleração não gravitacional, isto é, se $a \neq 0$, o sistema $\langle y^j \rangle$ será galileano mas não RIL.

Para encerrarmos este Capítulo formulamos agora as equações de campo da teoria da Gravitação Newtoniana em espaço curvo e damos o grupo de invariância da teoria.

Começamos por observar que a equação (5.1.2) se escreve em um sistema $\langle x^i \rangle$ arbitrário como

$$m \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right) = -m h^{ir} \phi_{;r}$$

onde ; significa derivada covariante.

Se introduzimos uma conexão D tal que

$$\Gamma_{jk}^i = \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i + h^{ir} \phi_{;r} t_j t_k \quad (5.3.3)$$

onde os $t_j = \frac{\partial t}{\partial x^j}$ são as componentes de dt em $\langle x^i \rangle$, então a equação acima pode ser escrita como

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

A conexão D é não chata. De fato, as componentes do tensor de Riemann em $\langle x^i \rangle$ ficam

$$R_{jkl}^i = 2t_j h^{ir} \phi_{;r[k} t_{l]}]$$

onde o colchete indica antissimetrização (ver Apêndice). Podemos também verificar que $D_X(dt) = 0$ e $D_X(h) = 0$, ($\forall X \in T_p M$).

Temos também de (5.3.4) a validade das equações

$$t_{[a} R_{j]kl}^i = 0 \quad \text{e} \quad h^{ia} R_{ka\ell}^j = h^{ja} R_{\ell ak}^i \quad (5.3.5)$$

e pode-se mostrar (vide por exemplo, Trautman [56]) que as equações (5.3.5) implicam na existência de uma função escalar ϕ e uma conexão chata $\tilde{D}$, tal que (5.3.3) é válida.

As componentes do tensor de Ricci ficam

$$R_{jk} = R_{jka}^a = -h^{ar} \phi_{;a;r} t_j t_k$$

e comparando com a equação de Poisson (5.1.1) temos

$$R_{jk} = 4\pi\rho t_j t_k$$

As equações de campo podem então ser escritas como

$$\begin{aligned}
 (dt \otimes K)_{1a_2} &= 0 \\
 H^2_{*K}(w, v, X, Y) &= H^2_{*K}(v, w, X, Y) \\
 D_X(dt) &= 0, \quad \forall X \in T_p M \\
 D_X(h) &= 0, \quad \forall X \in T_p M \\
 h(dt, \omega) &= 0, \quad \forall \omega \in T_p^* M \\
 Ric &= -4\pi k_p dt \otimes dt
 \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

onde $(\)_{1a_2}$ significa antisimetrização (ver Apêndice) entre o primeiro e a segundo argumento de $dt \otimes K$. A lei de movimento das partículas sujeitas ao campo gravitacional é

$$D_{T_\sigma} T_\sigma = 0.$$

Nesta formulação da teoria da Gravitação não existe mais uma classe privilegiada de referências inerciais, pois em geral não temos sistemas de coordenadas onde as componentes de conexão $\Gamma^i_{jk} = 0$. Restam os sistemas euclidianos rígidos onde $x^0 = t$ e $h = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$, pois podemos sempre decompor D como em (5.3.2) em parte inercial e em gravitacional. De fato, quando $\overset{\circ}{\Gamma}^i_{jk} = 0$, $\Gamma^i_{jk} = h^{ir} \phi_{;r} t_j t_k$ e $D(dt) = 0$ e $D(h) = 0$, implicam

$\partial t_i / \partial x^j$ e $\partial h / \partial x^k = 0$ e então as componentes de dt e h são constantes e uma transformação linear permite encontrar um sistema onde $x^0 = t$ e $h = \text{diag}(0,1,1,1)$. Este resultado implica que apesar do espaço-tempo ser curvo, os hiperplanos de simultaneidade são chatos e euclidianos.

O sistema de coordenadas $x^0 = t$, $h = \text{diag}(0,1,1,1)$ não é apenas euclidiano rígido, ele é também galileano, isto é, existe potencial ϕ tal que $\Gamma_{00}^j = \partial \phi / \partial x^i$ e todos os demais $\Gamma_{jk}^i = 0$. Entretanto a classe dos sistemas euclidianos rígidos é maior que a classes dos sistemas galileanos. De fato, dois sistemas euclidianos rígidos estão relacionados por

$$y^0 = x^0$$

$$y^i = a_j^i(t)x^j - b^i(t) \quad , \quad i=1,2,3 \quad ; \quad j=0,1,2,3 \quad .$$

Portanto, se $\langle x^i \rangle$ é galileano $\langle y^j \rangle$ em geral não será galileano, pois em $\langle y^j \rangle$ temos

$$\Gamma_{00}^i = \phi_{;i} + a_j^i \ddot{a}_k^j x^k + a_j^i \ddot{b}^j \quad (5.3.7)$$

$$\Gamma_{ko}^i = \Gamma_{ok}^i = a_j^i \ddot{a}_k^j \quad , \quad i,k=1,2,3 \quad ; \quad j=0,1,2,3 \quad .$$

O sistema $\langle y^j \rangle$ é galileano somente quando $\ddot{a}_k^i = 0$, o que significa que $\langle y^j \rangle$ não está rodando em relação a um sistema

galileano.

Dado um particular sistema galileano $\langle x^i \rangle$, podemos definir uma conexão chata por

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - h^{ir} \phi_{;r} t_j t_k$$

Em relação a $\overset{\circ}{D}$ podemos definir uma classe de sistemas inerciais, e obter a formulação da teoria como a formulada no espaço-tempo galileano. Contudo esta classe de referenciais inerciais não tem mais um significado especial porque $\overset{\circ}{D}$ depende do particular sistema galileano que escolhemos. Para um segundo sistema galileano segue de (5.3.7) com $\dot{a}_k^i = 0$ que $\Gamma_{jk}^i = h^{ir} \eta_{;r} t_j t_k$,

$$\eta = \phi + \sum_k \ddot{b}_x^k x^k.$$

Isto nos fornece um segundo potencial η e uma segunda conexão chata $\overset{\circ}{D}'$. Como já dissemos a escolha de um potencial único está associada a possibilidade de impormos certas condições de bordo apropriadas para as equações diferenciais satisfeitas pelos potenciais, o que somente é possível se a matéria do universo estiver confinada em um domínio finito do R^3 .

Em resumo, não podemos construir sistemas inerciais e isto é consequência direta da conexão D não ser mais um objeto

absoluto. Ela agora depende da distribuição da matéria representada por ρ .

O grupo de invariância (ou simetria) dessa teoria $\tilde{T}_{NG} = (M, D, h, dt, \rho, T_G)$ é "maior" que o grupo de Galileu. De fato, agora um tal grupo precisa somente deixar h e dt invariantes e portanto seus geradores X devem satisfazer $\mathcal{L}_X h = \mathcal{L}_X dt = 0$. Este grupo pode ser representado pelo grupo de transformações $\langle x^i \rangle \rightarrow \langle y^i \rangle$

$$y^0 = x^0 + c^0$$

$$y^\mu = a_j^\mu(t) x^j + b^\mu(t) \quad (\mu = 1, 2, 3) \quad (j=0, 1, 2, 3)$$

onde para cada t , $a_j^\mu(t)$ é uma matriz ortogonal (ver Friedman [18]).

CAPÍTULO IV

VARIEDADES LORENTZIANAS

Neste capítulo vamos estudar algumas propriedades das Variedades Lorentzianas que nos serão úteis para o estudo que será feito no Capítulo V da Teoria da Relatividade Especial e Teoria da Relatividade Geral.

No §1, definimos as Variedades Lorentzianas, Espaço-Tempo Relativístico e Campos Tensoriais nestas variedades. No §2, discutimos as Hipersuperfícies em Variedades Lorentzianas e damos a definição de métrica e de tensores nestes Hipersuperfícies. No §3, caracterizamos os Sistemas de Referência e Observadores. No §4, estudamos as propriedades dos Sistemas de Referência e Observadores "infinitesimalmente vizinhos". No §5, discutimos separação de Espaço-Tempo e Sincronização.

REFERÊNCIAS: Bishop-Goldberg [7], Choquet-Bruhat [10], Davis [11], O'Neill [38], Ryan-Shepley [48], Sachs-Wu [49], Von Westenholtz [57].

§1. VARIEDADES LORENTZIANAS E ESPAÇO-TEMPO RELATIVÍSTICO

1.1. CONCEITO DE VARIEDADES LORENTZIANAS

DEFINIÇÃO 1.1.1. Uma *Variedade Lorentziana* é um par (M, g) onde M é uma variedade de Hausdorff, C^∞ , conexa, de dimensão quatro, orientada e g é um tensor métrico com assinatura $(1, 3, 0)$.

As variedades Lorentzianas que modelam os espaço-tempo

das teorias da Relatividade Especial (RE) e Relatividade Geral (RG) são *orientadas no tempo*. Vimos no Apêndice que a métrica g divide os vetores $X \in T_p M$, ($\forall p \in M$), em três classes: Se $g(X,X) > 0$, X é dito *tipo-tempo*, se $g(X,X) < 0$ ou $X = 0$, X é dito *tipo-espaço* e se $g(X,X) = 0$, X é dito *tipo-luz*. Podemos estender esta noção sobre campos vetoriais sobre M . É possível definirmos para os vetores tipo-tempo em $T_p M$, ($\forall p \in M$), uma relação de equivalência (futuro-passado) (Ver Apêndice 2.1.5). Dado um vetor tipo-tempo $X \in T_p M$, podemos então dizer se X está orientado para o futuro ou o passado. Se $T_p M$ pode ser orientado de maneira contínua em cada ponto $p \in M$, então M é dita *orientada no tempo*.

Seja $X \in T_p M$, ($\forall p \in M$), consideremos o subespaço vetorial gerado pelo vetor X , $[X]$.

DEFINIÇÃO 1.1.2. Seja $X \in T_p M$, ($\forall p \in M$), definimos o *caráter causal* de X como sendo o caráter causal de $[X]$ (Ver Apêndice, def. 2.1.3). Dizemos que X é *causal* se e somente se X não é tipo-espaço.

DEFINIÇÃO 1.1.3. Seja TM o fibrado tangente a (M,g) e $\pi: TM \rightarrow M$ a projeção canônica. O *caráter causal* de $(p,X) \in TM$ é o caráter causal de X .

Seja τ o conjunto de todos os pontos tipo-tempo em TM .

τ é uma subvariedade aberta que tem uma ou duas componentes conexas (ver Sachs-Wu [49], pg. 26).

DEFINIÇÃO 1.1.4. Uma variedade Lorentziana (M,g) é dita *orientável no tempo* se e somente se τ possui duas componentes conexas.

DEFINIÇÃO 1.1.5. Uma variedade Lorentziana (M,g) orientável no tempo é dita *orientada no tempo* se e somente se uma componente de τ denominada τ^+ é chamada *futuro*, e o complemento de τ^+ em τ , denotada por τ^- é chamada *passado*.

Suponhamos que exista um campo causal X em (M,g) . Definimos uma aplicação sobrejetora $\psi : \tau \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, por $\psi(p, W) = g(X, W)$, ψ é $\mathbb{C}^\infty$. Então τ não é conexa e (M,g) é orientável no tempo. Se designarmos, $\psi^{-1}(0, +\infty)$ por τ^+ , dizemos que (M,g) é *orientada no tempo por X* . Neste caso, o futuro é a componente de τ cujo fecho contém $X(p)$, $\forall p \in M$.

Seja (M,g) uma variedade Lorentziana orientada no tempo com dimensão n , $n \geq 3$. Então

i) para cada $p \in M$, definimos

$$\tau_p^+ = \tau^+ \cap \pi^{-1}(p), \quad (\pi^{-1}(p) \subset T_p M).$$

ii) para cada $p \in M$, seja $\mathcal{L}_p$ o cone de luz em p (ver

apêndice 2.1.5). Se X é um vetor tipo-tempo em $T_p M$, o subconjunto de $\mathcal{L}_p$, $\mathcal{L}_p^+ = \{Y \in \mathcal{L}_p / g(X,Y) > 0\}$ é chamado o cone de luz do futuro em $T_p M$.

DEFINIÇÃO 1.1.6. Dizemos que o vetor $X \in T_p M$, ($p \in M$), aponta para o futuro se e somente se $X \in \tau_p^+ \cup \mathcal{L}_p^+$.

DEFINIÇÃO 1.1.7. Seja $U \subset M$, dizemos que um campo vetorial X definido em U aponta para o futuro se e somente se, para cada $p \in U$, $X(p) \in T_p M$ aponta para o futuro.

1.2. ESPAÇO-TEMPO RELATIVÍSTICO

DEFINIÇÃO 1.2.1. Um espaço-tempo relativístico (ETR) é uma tripla (M, g, D) onde (M, g) é uma variedade Lorentziana orientada no tempo e D é a conexão de Levi-Civita compatível com a métrica g .

OBSERVAÇÃO. Dois modelos de espaço-tempo (M, g, D) e (M', g', D') são isomorfos se existe um difeomorfismo h de classe $\mathbb{C}^k$, $k \geq 1$, $h: M \rightarrow M'$ tal que $h^*(g) = g'$ e $h^*(D) = D'$ (Ver Capítulo II, exemplos 4.1.3 e 4.1.4).

Os eventos em $U \subset M$ em uma carta particular de um dado atlas (orientado) tem coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) e estes rótulos não possuem necessariamente um significado métrico. A métrica

(tensor métrico) da variedade em uma base coordenada é dada por:

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (1.1.10)$$

onde $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = g_{ji}$ e $g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ é calculada para cada $p \in M$ em $T_p M$. As distâncias no espaço tangente definida pela métrica estão relacionadas com as distâncias na variedade da seguinte maneira:

Seja $\gamma: I \rightarrow M$, ($I \subset \mathbb{R}$), uma curva contínua e diferenciável por partes. Denotamos a função inclusão $I \rightarrow \mathbb{R}$, por u ; e o campo vetorial distinguido em I por d/du . Para cada $u \in I$, $\gamma_* u = T_\gamma(u)$ denota o vetor tangente a γu , $\gamma u \in M$.

DEFINIÇÃO 1.2.2. γ é chamada *tipo-tempo*, *tipo-luz* ou *tipo-espaço* quando para todo $u \in I$, $g(\gamma_* u, \gamma_* u) > 0$, $g(\gamma_* u, \gamma_* u) = 0$ ou $g(\gamma_* u, \gamma_* u) < 0$ respectivamente.

DEFINIÇÃO 1.2.3. Sejam $a, b \in I$, $\gamma: I \rightarrow M$ ($I \subset \mathbb{R}$) uma curva, o comprimento de arco entre $x_1 = \gamma(a)$ e $x_2 = \gamma(b)$ ao longo de γ e tal que $g(\gamma_* u, \gamma_* u)$ tem o mesmo sinal ao longo de γ , é dado por

$$\int_a^b |g(\gamma_* u, \gamma_* u)|^{\frac{1}{2}} du.$$

Se tomarmos o ponto $\sigma(a)$ como um ponto de referência, podemos usar a equação acima para definir a função $u : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$s(u) = \int_a^u |g(\gamma_* u', \gamma_* u')|^{\frac{1}{2}} du' \quad (1.2.4)$$

Utilizando-se esta equação podemos calcular ds/du

$$\frac{ds}{du} = |g(\gamma_* u, \gamma_* u)|^{\frac{1}{2}} = |g_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du}|^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.5)$$

onde $x^i \equiv x^i \circ \gamma$. Da equação (1.2.5) textos antigos de geometria diferencial e a maioria dos livros sobre Teoria da Relatividade inferem a notação

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.2.6)$$

suposta representar o quadrado do comprimento do arco "infinitesimal" determinado pelo deslocamento infinitesimal das coordenadas

$$x^i(a) \rightarrow x^i(a) + \frac{dx^i}{du}(a) \epsilon$$

onde ϵ é um número real tão pequeno quanto se queira e $a \in I$. Usaremos eventualmente a equação (1.2.6) quando disto não

resultar nenhuma confusão.

1.3. CAMPOS TENSORIAIS EM VARIEDADES LORENTZIANAS

Nas teorias físicas onde o espaço-tempo é uma variedade Lorentziana orientada é possível definirmos uma relação de equivalência para os campos tensoriais. Assim as quantidades físicas que são representadas por campos tensoriais são representadas pelas respectivas classes de equivalência.

No Capítulo III introduzimos [definições 4.1.5 e 4.1.6] os operadores $\uparrow_b^a$ e $\downarrow_b^a$.

Em uma variedade Lorentziana definimos o análogo daqueles operadores que vamos representar com os mesmos símbolos como segue:

PROPOSIÇÃO 1.3.1. Seja (M, g) uma variedade Lorentziana, $X \in TM$, e $GX \in T^*M$ um campo de 1-formas tal que

$$GX(V) = g(X, V) \quad , \quad \forall V \in TM$$

Então a aplicação $X \mapsto GX$ é um $\mathcal{D}(M)$ -isomorfismo linear de $TM \rightarrow T^*M$. ($\mathcal{D}(M)$ é o anel das funções reais $\mathbb{C}^\infty$ em M).

A prova da Proposição 1.3.1. pode ser encontrada em O' Neill [38], [Proposição 10 Cap. III].

Portanto, em uma variedade Lorentziana podemos livremente transformar um campo vetorial V em uma 1-forma $\omega = GX$, e vice-versa, isto é, o campo vetorial equivalente a 1-forma ω é $V = G_*\omega$, onde $G_*\omega = \hat{g}(\omega, \cdot)$ e $\hat{g} = g^{ij}\theta_i \otimes \theta_j$ e $g^{ij}g_{ji} = \delta_j^i$. Pares correspondentes $X \longleftrightarrow \omega$, contêm exatamente a mesma informação e são ditos "*fisicamente equivalentes*". Generalizamos a noção de fisicamente equivalente introduzindo em (M, g, D) o análogo dos operadores $\uparrow_b^a$ e $\uparrow_a^b$ das definições [4.1.5 e 4.1.6] do Capítulo III.

DEFINIÇÃO 4.11. Todos os tensores possíveis de serem obtidos de um dado tensor pelas operações de levantamento ou abaixamento são *fisicamente equivalentes*.

§2. HIPERSUPERFÍCIES EM VARIEDADES LORENTZIANAS

2.1. MÉTRICA EM HIPERSUPERFÍCIES

Sejam (M, g) uma variedade Lorentziana, S uma variedade de dimensão três e $\varphi: S \rightarrow M$ um mergulho (φ é imersão e φ é um homeomorfismo de S sobre o subespaço $\varphi(S) \subset M$). Então $\varphi(S)$ é uma subvariedade de dimensão três de M .

DEFINIÇÃO 2.1.1. Nas condições acima dizemos que $\varphi(S)$ é uma

hipersuperfície de M .

Temos então a inclusão $i : \varphi(S) \rightarrow M$. Em cada ponto $p \in S$, $\varphi(p) \in \varphi(S)$, identificamos o espaço tangente $\varphi_*(T_p(S)) = H_{\varphi(p)}$ com um subespaço de $T_{\varphi(p)}M$ por meio da aplicação linear injetora $di(p) : H_{\varphi(p)} \rightarrow T_{\varphi(p)}M$. Se $p \in S$ a imagem $\varphi_*(T_p S) = H_{\varphi(p)} \subset T_{\varphi(p)}M$ sob a ação da derivada φ_* é um hiperplano de dimensão três que passa pela origem. Portanto existe uma 1-forma $\alpha \in T_{\varphi(p)}^*M$ tal que $\forall X \in T_p S, \alpha(\varphi_*(X)) = 0$. A 1-forma α é única a menos de sinal e fator de normalização e $\varphi(S)$ é dada localmente pela equação $f = 0, (f : M \rightarrow \mathbb{R})$, onde $df \neq 0$, então α pode ser tomada localmente como sendo df .

Temos a métrica g de M , através de φ podemos induzir uma métrica φ_*g , da seguinte maneira:

Se $X, Y \in T_p S$, definimos: $\varphi_*g(X, Y)|_p = g(\varphi_*X, \varphi_*Y)|_{\varphi(p)}$. Esta métrica é chamada 1^a forma fundamental de S .

DEFINIÇÃO 2.1.2.

i) Se $\hat{g}(\alpha, \alpha) < 0$, então $\varphi(S)$ é dita *hipersuperfície tipo-tempo*.

ii) Se $\hat{g}(\alpha, \alpha) = 0$, então $\varphi(S)$ é dita *hipersuperfície nula*.

iii) Se $\hat{g}(\alpha, \alpha) > 0$, então $\varphi(S)$ é dita *hipersuperfície tipo-espaço*.

Para entendermos a razão da definição 2.1.2. consideremos um campo vetorial Z fisicamente equivalente a α , isto é, $z = \hat{g}(\alpha,)$ (ou $\alpha = g(Z,)$). Z é ortogonal a todos os vetores tangentes a $\varphi(S)$, isto é, todos os vetores do subespaço $H_{\varphi(p)} = \varphi_*(T_p(S)) \subset T_{\varphi(p)}M$. Vamos analisar dois casos:

i) Suponhamos que $Z \notin H_{\varphi(p)}$. Neste caso, se (X_1, X_2, X_3) é uma base para $T_p S$ então (Z, X_1, X_2, X_3) forma uma base para $T_{\varphi(p)}M$, pois os vetores são linearmente independentes. As componentes de g em relação a esta base são dadas por

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} g(Z, Z) & 0 \\ 0 & g(\varphi_*(X_i), \varphi_*(X_j)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g(Z, Z) & 0 \\ 0 & \varphi^*g(X_i, X_j) \end{vmatrix}$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e $i, j = 1, 2, 3$.

Como por hipótese g é métrica de Lorentz, ela é não degenerada, logo, $g(Z, Z) \neq 0$. Se $g(Z, Z) > 0$ então φ^*g deve ser negativa definida, pois a matriz das componentes de g possui somente um auto-valor positivo. Analogamente se $g(Z, Z) < 0$, então φ^*g é métrica Lorentziana.

ii) Suponhamos Z é tangente a $\varphi(S)$, isto é, $Z \in T_{\varphi(p)}$. Neste caso, existe algum vetor não nulo X em $T_p S$ tal que $\varphi_*(X) = Z$. Mas se $g(Z, \varphi_*Y) = 0, \forall Y \in T_p S$, então $\varphi^*g(X, Y) = 0$. Então

concluimos que φ^*g é degenerada. Além disso, se tomarmos $Y = X$, teremos $g(Z, Z) = 0$.

2.2. TENSORES EM HIPERSUPERFÍCIES

No caso que $\hat{g}(\alpha, \alpha) \neq 0$, podemos normalizar a 1-forma de maneira que $\hat{g}(\alpha, \alpha) = \pm 1$. Então a aplicação $\varphi^* : T_{\varphi(p)}^* M \rightarrow T_p^* S$ será injetora e sobre no subespaço $H_{\varphi(p)}^* \subset T_{\varphi(p)}^* M$. Onde $H_{\varphi(p)}^*$ é o subespaço constituído das 1-formas ω em $\varphi(p)$ tais que, $\hat{g}(\alpha, \omega) = 0$, pois $\varphi^*\alpha = 0$ e $\alpha \notin H_{\varphi(p)}^*$. Existe portanto a aplicação inversa de φ^* , que indicaremos $\tilde{\varphi}_*, \tilde{\varphi}^* : T_p^* S \rightarrow H_{\varphi(p)}^*$.

Podemos estender esta aplicação a uma aplicação que leva tensores covariantes de S em tensores de $\varphi(S) \subset M$. Temos a aplicação (*),

$$\varphi_* : T^{(r,0)}(p) \rightarrow T^{(r,0)}(\varphi(p)) .$$

(*) De agora em diante, quando isto não causar dúvidas, denotaremos

$$T_p^{(r,s)}(S) \quad \text{por} \quad T^{(r,s)}(p)$$

e

$$T_{\varphi(p)}^{(r,s)}(\varphi(S)) \quad \text{por} \quad T^{(r,s)}(\varphi(p))$$

podemos estendê-la a uma aplicação

$\tilde{\varphi}_* : T^{(r,s)}(p) \rightarrow T^{(r,s)}(\varphi(p))$ da seguinte maneira. Se $T \in T^{(r,s)}(p)$ então se $\omega^1, \dots, \omega^r \in T_{\varphi(p)}^* M$ e $X_1, \dots, X_n \in T_p(S)$, definimos

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_* T(\omega^1, \dots, \omega^r ; \varphi_*(X_1), \dots, \varphi_*(X_n)) &= \\ &= T(\varphi^* \omega^1, \dots, \varphi^* \omega^r ; X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Esta aplicação $\tilde{\varphi}_*$ tem a propriedade que $\tilde{\varphi}_* T$ tem contração zero com α em todos os índices, isto é, $\forall T \in T^{(r,s)}(p)$, temos

$$(\tilde{\varphi}_* T)^{\mu \dots \nu} \rho \dots \beta \alpha_{\mu} = 0 \quad \text{e} \quad (\tilde{\varphi}_* T)^{\mu \dots \nu} \rho \dots \beta g^{\rho\gamma} \alpha_{\gamma} = 0.$$

verifica-se isto facilmente utilizando-se o fato que $\varphi^* \alpha = 0$.

Para nosso estudo é particularmente interessante o tensor h em S dado por

$$h = \tilde{\varphi}_*(\varphi^* g)$$

isto implica que,

$$\varphi^* h = \varphi^* g.$$

Em termos da 1-forma normalizada α , ($\hat{g}(\alpha, \alpha) = \pm 1$), temos

$$h = \pm \alpha \otimes \alpha + \hat{g}$$

que satisfaz $\varphi^*h = \varphi^*g$, pois $\varphi^*\alpha = 0$. A equação acima implica que

$$h(Z, \cdot) = 0, \quad Z = \hat{g}(\alpha, \cdot).$$

Consideremos agora o tensor $\tilde{h} = \uparrow_1^1 h \in T_{(\varphi(p))}^{(1,1)}$ cujas componentes são dadas por $h_{\beta}^{\alpha} = g^{\alpha\gamma} h_{\gamma\beta}$. Este tensor é um operador projeção uma vez que $h_{\beta}^{\alpha} h_{\gamma}^{\beta} = h_{\gamma}^{\alpha}$. $\tilde{h}$ projeta o vetor $V \in T_{\varphi(p)}^M$ no subespaço $H_{\varphi(p)} \subset T_{\varphi(p)}^M$. Temos então,

$$V = \pm Z(\alpha(V)) + \tilde{h}(V, \cdot)$$

onde o primeiro termo representa a parte de V ortogonal a $\varphi(S)$. Em componentes esta equação tem a forma,

$$V^{\mu} = \pm \alpha^{\mu}_{\alpha} V^{\alpha} + h^{\mu}_{\beta} V^{\beta}.$$

Para a 1-forma $\omega \in T_{\varphi(p)}^{*M}$, temos

$$\omega = \pm \alpha(Z(\omega)) + \tilde{h}(\omega, \cdot)$$

ou em componentes

$$\omega_\mu = \pm \alpha_\mu^\nu \omega_\nu + h_\mu^\beta \omega_\beta$$

Analogamente, podemos projetar qualquer tensor $T^{(r,s)}_{(\varphi(p))}$ em sua parte que pertence a

$$H^{(r,s)}_{(\varphi(p))} = \underbrace{H_{\varphi(p)} \otimes \dots \otimes H_{\varphi(p)}}_{r\text{-fatores}} \otimes \underbrace{H^*_{\varphi(p)} \otimes \dots \otimes H^*_{\varphi(p)}}_{s\text{-fatores}}$$

isto é, sua parte ortogonal a α em todos os índices .

A aplicação $\varphi_* : T_p S \rightarrow H_{\varphi(p)} = \varphi_*(T_p S)$ é bijetora. Podemos portanto definir a aplicação $\tilde{\varphi}^* : T_{\varphi(p)}^M \rightarrow T_p S$, projetando primeiramente com h em $H_{\varphi(p)}$ e então usando a imagem inversa $(\varphi_*)^{-1}$. Como já temos uma aplicação $\varphi^* : T^*_{\varphi(p)}(\varphi(S)) \rightarrow T^*_p S$, podemos estender a definição de φ^* para uma aplicação $\tilde{\varphi}^* : T^{(r,s)}_{(\varphi(p))} \rightarrow T^{(r,s)}(p)$. Esta aplicação tem a propriedade $\tilde{\varphi}^*(\tilde{\varphi}_* T) = T$, $\forall T \in T^{(r,s)}(p)$ e $\tilde{\varphi}_*(\tilde{\varphi}^* K) = K$, $\forall K \in H^{(r,s)}_{\varphi(p)}$. No que segue vamos identificar tensores em $T^{(r,s)}(p)$ com tensores em $H^{(r,s)}_{(\varphi(p))}$ se eles se correspondem sob a ação das aplicações $\tilde{\varphi}_*$ e $\tilde{\varphi}^*$. Com esta identificação h pode ser interpretada como a métrica induzida em $\varphi(S)$.

§3. SISTEMAS DE REFERÊNCIA EM VARIEDADES LORENTZIANAS

3.1. REFERENCIAL MÓVEL - PARTÍCULA MATERIAL

DEFINIÇÃO 3.1.1. Seja (M, g) uma variedade Lorentziana e $p \in M$. Um *referencial móvel* em $p \in M$ é uma base ortonormal para o espaço tangente $T_p M$.

TEOREMA 3.1.2. Seja Q um campo vetorial tipo-tempo em TM tal que $g(Q, Q) = 1$. Então, existe, em uma vizinhança coordenada U de p ($p \in M$) três campos vetoriais tipo-espaco que junto com Q formam um referencial móvel em U .

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\theta^0 = g(Q, \cdot) = g_{ij} Q^i dx^j$; $i, j = 0, 1, 2, 3$ e tomemos $h = g - \theta^0 \otimes \theta^0$

Logo

$$g = g_{ij} dx^i dx^j = \theta^0 \otimes \theta^0 + h_{ij} dx^i \otimes dx^j .$$

Como a variedade é Lorentziana a forma quadrática $h_{ij} v^i v^j$ pode ser decomposta em uma soma negativa de três quadrados, isto é,

$$h_{ij} dx^i \otimes dx^j = - \sum_{m=1}^3 \theta^m \otimes \theta^m$$

O conjunto $(\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3)$ é então o referencial móvel em $\mathcal{U}$.

Observemos que se $Q = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial x^0}$, então $\theta^0 = \sqrt{g_{00}} dx^0 +$
 $+ \frac{g_{i0}}{\sqrt{g_{00}}} dx^i$ e

$$h_{ij} dx^i \otimes dx^j = \left(-\frac{g_{i0} g_{j0}}{g_{00}} + g_{ij} \right) dx^i \otimes dx^j,$$

isto é provado utilizando o fato que como as componentes de Q são dadas por

$$Q^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial x^0} \quad \text{e} \quad Q^i = 0, \quad i=1,2,3$$

$$\text{então, } Q_0 = g_{00} Q^0 = \sqrt{g_{00}} \quad \text{e} \quad Q_i = g_{i0} Q^0 = \frac{g_{i0}}{\sqrt{g_{00}}}.$$

Dissemos que as teorias da Relatividade Geral (RG) e da Relatividade Especial (RE) usam variedades Lorentzianas orientadas no tempo como modelos do espaço-tempo. O conceito de partícula utilizado nestas teorias é dado pela definição abaixo.

DEFINIÇÃO 3.1.3. Uma *partícula material* é um par (m, σ) onde onde $\sigma : I \rightarrow M$, $(I \subset \mathbb{R})$ é uma curva causal que aponta para o futuro e $m \in [0, +\infty)$ é chamada massa de repouso.

Quando σ é tipo-luz e $m = 0$ a partícula é chamada *fóton*; quando $m \in (0, +\infty)$ a partícula é dita *material* ou um

bradyon.

σ é chamada linha do universo da partícula.

A relação entre m e σ é dada pela

PROPOSIÇÃO 3.1.4. Para cada par (p, m) , $p \in M$, $m \in (0, \infty)$ existe uma única curva $\sigma : I \rightarrow M$, $(I \subset \mathbb{R})$, com imagem fechada $\sigma(I)$ tal que $\forall u \in I$: (i) $\sigma_* u$ aponta para o futuro; (ii) $g(\sigma_* u, \sigma_* u) = m^2$.

A prova desta Proposição pode ser construída como uma extensão imediata da Proposição 0.2.1 em Sachs & Wu [49]. Quando $g(\sigma_* u, \sigma_* u) = m^2$, $\sigma_* u$ é dito o momento da partícula.

3.2. OBSERVADORES

DEFINIÇÃO 3.2.1. Um *observador* em (M, g, D) é uma curva tipo-tempo $\gamma : I \rightarrow M$, $(I \subset \mathbb{R})$, que aponta para o futuro, tal que $g(\gamma_*, \gamma_*) = 1$. O parâmetro de inclusão $I \rightarrow \mathbb{R}$ neste caso é chamado o *tempo-próprio* ao longo da curva γ . A curva γ é chamada a *linha de universo* do observador.

DEFINIÇÃO 3.2.2. Um observador instantâneo é um par ordenado (z, Z) onde $z \in M$ e $Z \in T_z M$ é um vetor tipo-tempo que aponta para o futuro.

DEFINIÇÃO 3.2.3. Um *sistema de referência* em (M, g, D) é um campo vetorial tipo-tempo tal que cada uma de suas linhas integrais é um observador.

Portanto um campo vetorial Q é um sistema de referência se e somente se $g(Q, Q) = 1$ e Q aponta para o futuro.

OBSERVAÇÃO. Certos autores como por exemplo O'Neill [38] chamam os campos vetoriais da definição 3.2.3 de campo de observadores.

§4. PROPRIEDADES DOS SISTEMAS DE REFERÊNCIA

4.1. OBSERVADORES INFINITAMENTE VIZINHOS

Nas teorias da RE e RG o conceito intuitivo de observadores "infinitesimalmente vizinhos" é importante. Vamos agora formalizar este conceito intuitivo.

Seja Z um campo vetorial tipo-tempo, $g(Z, Z) = 1$, em (M, g, D) e seja μ_s o seu fluxo (Ver Apêndice, 1.10.) e $\gamma : I \rightarrow M$, $(I \subset \mathbb{R})$, uma curva integral de Z .

Fixemos um ponto $u \in I$ e um vetor $\bar{W} \in T_{\gamma u} M$. Vamos supor que exista um campo vetorial V em M tal que $V(\gamma u) = \bar{W}$ e tal que a derivada de Lie de V se anule, $\mathcal{L}_Z V = 0$. Então para cada par (s, y) , $s \in \mathbb{R}$ e $y \in M$, tal que $\mu_s y$ é definido, temos

$$(\mu_s)_* V(\gamma) = V(\mu_s \gamma).$$

Em particular, se $\gamma = \gamma r$, onde $r \in I$, temos

$$(A) \quad V(\gamma(s+r)) = (\mu_s)_* V(\gamma r).$$

Em geral V não existe e se existir ele pode não ser único.

DEFINIÇÃO 4.1.1. Um campo vetorial W sobre γ é *Lie-paralelo* (com relação a Z) se e somente se

$$W(u+s) = (\mu_s)_* W(u) \quad , \quad \forall u \in I \text{ e } u+s \in I$$

Se existe W um campo Lie-paralelo, então os resultados obtidos por Bishop-Goldberg (5.8.1) [7], nos garantem a existência e unicidade de W , tal que

(B) Para cada par $(u, \bar{W})$ tal que $u \in I$ e $\bar{W} \in T_{\gamma(u)} M$, existe um campo vetorial Lie-transportado, tal que $W(u) = \bar{W}$.

Mais geralmente, podemos introduzir uma derivada de Lie $\mathcal{L}_Z$ que age em campos vetoriais sobre γ . Então $\mathcal{L}_Z W = 0$ se e somente se W é Lie-paralelo, o que segue diretamente da definição de derivada de Lie.

Suponhamos agora que Z nunca se anule. Então localmente não temos nada de novo. De fato, existe para $U \subset M$ uma carta local $\langle x^i \rangle$ do atlas orientado de M tal que $Z|_U = \partial/\partial x^0$ (Bishop-Goldberg, Teorema 5.3.1) e $\gamma u \in U$.

Um campo vetorial V em U obedece $\mathcal{L}_Z V = 0$ se e somente se $V = f^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ onde cada f^μ é uma função tal que $Z(f^\mu) = 0$. Sejam $\{a^\mu\}$ as constantes para as quais $\bar{W} = a^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \Big|_{\gamma u}$ pela condição B ; se definirmos $V = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, então $\mathcal{L}_Z V = 0$.

Seja $E \subset I$ o maior intervalo conexo tal que se $u \in E$, então $(E) \cap U$ é conexo. Aplicando B a $\gamma|_E$ e usando A obtemos

C. Suponhamos que Z nunca se anule. Então $W: I \rightarrow TM$ é Lie-paralelo com respeito a Z se e somente se, para cada $u \in I$, existe uma vizinhança E de u , uma vizinhança U de γu , e um campo vetorial V em U tal que $\mathcal{L}_Z V = 0$ e $W = V \circ \gamma$ em E .

Aplicamos agora a interpretação geométrica usual da derivada de Lie.

Suponhamos novamente que Z nunca se anule. Seja $\langle x^i \rangle: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ e $W|_E = a^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \circ \gamma|_E \right)$. Podemos escrever $U = \{ (x^0, x^1, x^2, x^3) \mid |x^\mu| < \epsilon \forall \mu \}$ e supor que $\gamma|_E$ é dada por $\gamma u = (u, 0, 0, \dots)$ uma vez que $Z|_U = \frac{\partial}{\partial x^0}$.

Existe uma congruência de curvas integrais de Z determinadas por

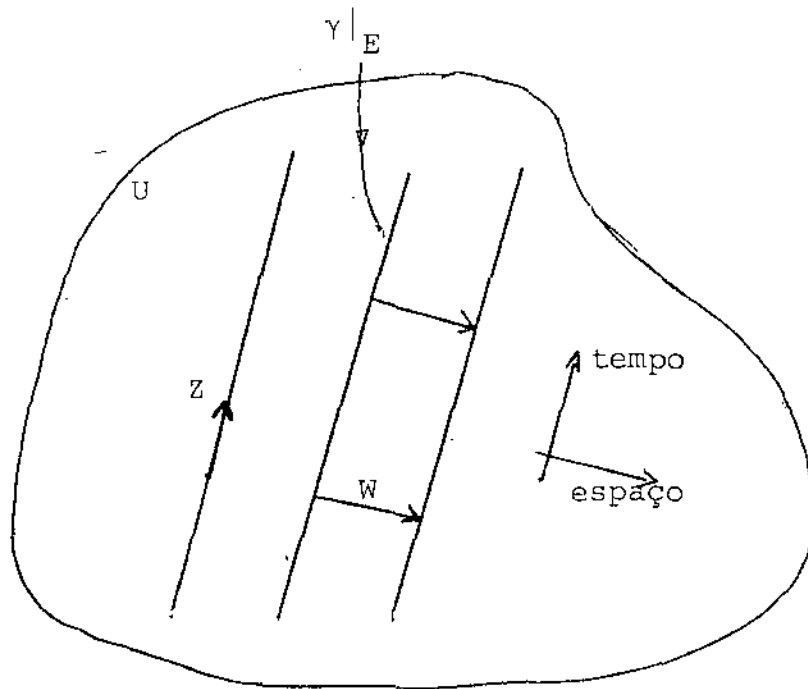
$$(u, t) \rightarrow (u + a^0 t, a^1 t, a^2 t, a^3 t)$$

e $t = 0$ fornece $\gamma|_E$ e t vezes uma constante apropriada fornece uma outra curva da congruência em U , onde vale a parametrização dada pela carta local $\langle x^i \rangle$. Quando $W|_E$ e $Z \circ \gamma$ são linearmente independentes, curvas diferentes possuem imagens distintas. Esta família determina univocamente $W|_E$ como seu CAMPO VETORIAL TRANSVERSAL. Especificamente,

$$(Wf)(u) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \{ f(u + a^0 t, a^1 t, a^2 t, a^3 t) \} \right]_{t=0}$$

para cada $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ e $u \in E$. Inversamente, dado $W|_E$ a família é determinada até primeira ordem em t , no sentido de uma série de Taylor.

D. Um campo vetorial W sobre uma curva integral de Z é Lie-paralelo com respeito a Z se e somente se W é a versão linearizada (isto é, "infinitesimal") de uma família a um parâmetro de curvas integrais de Z próximo a γ .



Em outras palavras, interpretamos W como representando a separação de pontos cujas distâncias são constantes entre duas curvas "infinitesimalmente vizinhas" (ver Figura acima).

4.2. O TRANSPORTE DE FERMI

Seja $(z, \bar{Z})$ um observador instantâneo. O subespaço gerado pelo vetor $\bar{Z}, [\bar{Z}]$, seu eixo-temporal local, é um subespaço tipo-tempo 1-dimensional de $T_z M$. $[\bar{Z}]^\perp$ é o espaço de repouso local. A soma direta $T_z M = [\bar{Z}]^\perp \oplus [\bar{Z}]$ é a decomposição ortogonal associada. Escrevemos $[\bar{Z}]^\perp = H_z$, $T = [\bar{Z}]$ e denotamos por $p: T_z M \rightarrow H_z$ e $q: T_z M \rightarrow T$ as projeções ortogonais. Quando $\gamma: I \rightarrow M$ ($I \subset \mathbb{R}$), é um observador escrevemos $T_{\gamma u} M = H_u \oplus T_u$, $H_u = (\gamma_* u)^\perp$ e $T_u = [\gamma_* u]$ para a decomposição ortogonal de $(\gamma u, \gamma_* u)$. Definimos

$p_u : T_{\gamma u} M \rightarrow H_u$; $q_u = T_{\gamma u} M \rightarrow T_u$ de maneira que se X é um campo vetorial sobre γ , então pX e qX são campos vetoriais sobre γ que satisfazem $(pX)u = p_u(Xu)$; $(qX)u = q_u(Xu)$.

DEFINIÇÃO 4.2.1. O observador instantâneo $(z, \bar{z})$ encontra o tensor de projeção ortogonal h da seguinte maneira: Se $p : T_z M \rightarrow H_z$ então

$$h(X, Y) = g(pX, pY) \quad , \quad \forall X, Y \in T_z M \quad ,$$

onde, h é uma forma bilinear simétrica em $T_z M$ que satisfaz as propriedades: (i) $h|_{H_z} = g_z|_{H_z}$; (ii) $h(\bar{z}, \cdot) = 0$; (iii) $h(X, \cdot) = g(X, \cdot) \Leftrightarrow g(X, z) = 0$; (iv) contração $\tilde{h} = -3$, onde $\tilde{h}$ é o tensor (1,1) fisicamente equivalente a h ; (v) $\tilde{h} = p$; (vi) $h = g - g(\bar{z}, \cdot) \otimes g(\bar{z}, \cdot) = g - \omega \otimes \omega$.

Assim, se $X \in T_z M$, então podemos escrever

$$X = pX - \bar{z}(\omega(X)) ; \quad pX = \tilde{h}(X, \cdot) \quad .$$

Antes de prosseguirmos observamos que a notação introduzida para $p = \tilde{h}$, etc, é compatível com aquela que usamos na teoria das hipersuperfícies. Como naquele caso, qualquer tensor $T \in T^{(r,s)}(z)$ pode ser projetado em:

$$H^{(r,s)}(z) = \underbrace{H_z \otimes \dots \otimes H_z}_r \otimes \underbrace{H_z^* \otimes \dots \otimes H_z^*}_s .$$

r-fatores s-fatores

Investigamos agora o seguinte problema: Como um observador $\gamma: I \rightarrow M$, $I \subset \mathbb{R}$, pode detectar rotação? A resposta intuitiva é: Se $X \in H_u$ um vetor unitário pode ser comparado com $\hat{X} \in H_{\hat{u}}$ (unitário) e se pudermos afirmar que ambos tem a "mesma direção espacial".

Quando γ é uma geodésica, isto é, $D_{T_Y} T_Y = 0$, podemos formalmente dizer que X e $\hat{X}$ tem a mesma direção espacial se e somente se X é um transporte paralelo de $\hat{X}$ ao longo de γ . Contudo se $D_{T_Y} T_Y = A_Y \neq 0$, então $X \in H_u$ não implica que o transporte paralelo de X esteja no espaço de repouso local em $\hat{u}$. Para solucionarmos o problema precisamos uma modificação do transporte paralelo o que é feito com a introdução da conexão de Fermi.

PROPOSIÇÃO 4.2.2. Existe precisamente uma conexão F (a conexão de Fermi) sobre γ tal que

$$F_Y X = [p(\gamma^* D)_Y p + q(\gamma^* D)_Y] X, \quad \forall \text{ o campo vetorial } Y \text{ em } I \text{ e}$$

qualquer que seja o campo vetorial sobre $\gamma: I \rightarrow M$, $(I \subset \mathbb{R})$.

DEMONSTRAÇÃO. $F_Y X$ é $\mathbb{R}$ -linear em X e linear (com relação as

funções $\mathbb{C}^\infty$ sobre γ) em Y . Se f é uma função $\mathbb{C}^\infty$ sobre γ , então

$$\begin{aligned} F_Y(fX) &= fF_Y(X) + (Yf)(p^2 + q^2)X \\ &= fF_Y(X) + (Yf)X. \end{aligned}$$

Se impusermos que $F_Y f = Yf$, então existe, de acordo com a nossa discussão no Apêndice §4, uma única derivação de campos tensoriais sobre γ que comuta com as contrações e concorda com F_Y sobre campos vetoriais e funções sobre γ . ■

Como explicado no Apêndice, §4 vamos considerar

$$F_{Y_*} \quad \text{ou} \quad F_{T_Y} \quad \text{para} \quad F \frac{d}{du}$$

As propriedades principais de F estão resumidas na seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 4.2.3. Sejam X e Y campos vetoriais sobre γ . A conexão de Fermi sobre γ satisfaz

$$(i) \quad F_{Y_*} X = D_{Y_*} X + g(Y_*, X)A_Y - g(A_Y, X)Y_*$$

$$\text{onde} \quad D_{Y_*} Y_* = A_Y.$$

$$(ii) \quad F_{Y_*} X = D_{Y_*} X, \quad \forall X \in TM \iff A_Y = 0$$

$$(iii) \frac{d}{du} g(X, Y) = g(F_{\gamma_*} X, Y) + g(X, F_{\gamma_*} Y)$$

$$(iv) F_{\gamma_*} \gamma_* = 0$$

$$(v) \text{ Se } X_u \in H_u, Y_u \in H_u, \forall u \in I, \text{ então}$$

$$F_{\gamma_*} X \in H_u, F_{\gamma_*} Y \in H_u, \forall u \in I$$

e

$$g(F_{\gamma_*} X, Y) = F(D_{\gamma_*} X, Y).$$

Como γ é uma curva, a propriedade padrão das conexões nos diz que se $\bar{V} \in T_{\gamma_u} M$ para algum $u \in I$, então existe um único campo vetorial V F -paralelo sobre γ tal que $Vu = \bar{V}$. Então, se $u_0 \in I$ e $\{\bar{X}_\mu\}$ é uma base de $T_{\gamma_{u_0}} M$, então existe precisamente um conjunto de campos vetoriais $\{X_\mu\}$ sobre γ tais que $X_\mu u_0 = \bar{X}_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Em particular se $\{\bar{X}_\mu\}$ é ortonormal, então (iii) da Proposição 4.2.3 implica que $\{X_i u\}$ é um referencial móvel, $\forall u \in I$. Se $\bar{X}_0 = \gamma_* u_0$, então $X_0 = \gamma_*$ e por (iv) da Proposição 4.2.3 $\{X_i u\}$, $i=1, 2, 3$ então $\in H_u$, $\forall u \in I$. $X_i u$ é interpretado como o vetor unitário no tempo próprio u . Dois vetores unitários $X_1 \in H_{u_1}$ e $X_2 \in H_{u_2}$ são definidos como tendo a mesma direção espacial se e somente se para os reais (a^1, a^2, a^3) , $X_1 = a^i (X_i u_1)$, $X_2 = a^i (X_i u_2)$.

4.3.3-VELOCIDADES E 3-ACELERAÇÕES E ACELERAÇÃO, ROTAÇÃO, CISALHAMENTO E EXPANSÃO.

No §4.1, interpretamos o campo vetorial W como representando a separação de pontos cujas distâncias são constantes entre duas curvas "infinitamente vizinhas" da congruência definida por Z . Se adicionarmos um múltiplo de Z a W então este vetor vai representar a separação de pontos nas mesmas duas curvas, mas com distâncias diferentes entre as curvas. Estamos interessados somente na separação das curvas e não na separação de pontos arbitrários da curva. Estamos portanto interessados em W módulo uma componente paralela a Z , isto é, somente com a projeção de W em cada ponto $z \in M$ no espaço $Z^\perp$ constituído da classe de equivalência de vetores que diferem entre si pela adição de um múltiplo de Z .

DEFINIÇÃO 4.3.1. Um campo vetorial W sobre γ é chamado um *vizinho* de γ em Z se e somente se existe $W' = pW$ sobre γ tal que $\mathcal{L}_Z W' = 0$.

Definimos agora os conceitos de 3-velocidade e 3-aceleração relativas de um vizinho como segue.

DEFINIÇÃO 4.3.2. Seja F a conexão de Fermi sobre γ . $F_{\gamma*} W$ é chamada a 3-velocidade relativa do vizinho (W) em relação a γ e

$F_{\gamma_*}^2 W = F_{\gamma_*}(F_{\gamma_*} W)$ é chamada a 3-aceleração do vizinho relativamente a γ .

Note que $(F_{\gamma_*} W)u$, $(F_{\gamma_*}^2 W)u \in H_u$, $\forall u \in I$ como consequência de (iii) e (iv) da Proposição 4.2.3 o que justifica o "3" nas definições.

Qual é a interpretação da 3-velocidade e da 3-aceleração? Para este fim, veremos as seguintes proposições:

PROPOSIÇÃO 4.3.3. Seja Z um sistema de referência geodésico em (M, g, D) , isto é $D_Z Z = 0$ e seja W um vizinho de um observador $\gamma : I \rightarrow M$, $(I \subset \mathbb{R})$, em Z . Então a 3-aceleração de W relativamente a γ é

$$F_{\gamma_*}^2 W = K(\gamma_*, W) \gamma_*,$$

onde K é o tensor Riemann de (M, g, D) .

DEMONSTRAÇÃO. (i) Precisamos primeiramente provar que $\mathcal{L}_Z W = 0$, onde $pW' = W$ e $\mathcal{L}_Z W' = 0$. Este ponto é trivial se observamos que $W = \tilde{h}(W', \cdot) = W' - Z(\omega(W))$, $\omega = g(Z, \cdot)$.

(ii) Seja $u \in I$ e seja $\tilde{W}$ um campo vetorial definido em alguma vizinhança de γu e tal que $[\tilde{W}, Q] = 0$ e $\tilde{W} \circ \gamma = W$. Temos

$$\begin{aligned}
D_Z^2 \tilde{W} &= D_Z D_Z \tilde{W} = D_Z (D_{\tilde{W}} Z + [Z, \tilde{W}]) \\
&= D_Z D_{\tilde{W}} Z - D_{\tilde{W}} D_Z Z + D_{\tilde{W}} D_Z Z + D [Z, \tilde{W}] Z \\
&= K(Z, \tilde{W}) Z
\end{aligned}$$

Restringindo-se a γ , e observando que $D_{\gamma_*} = F_{\gamma_*}$ pois γ é uma geodésica, a proposição fica provada. ■

A equação $F_{\gamma_*}^2 W = K(\gamma_*, W) \gamma_*$ é conhecida como equação da separação das geodésicas ou equação de Jacobi.

PROPOSIÇÃO 4.3.4. Sejam U um sistema de referência em (M, g, D) e $\gamma: I \rightarrow M$, $(I \subset \mathbb{R})$, um observador em U . A correspondência $X \mapsto D_X U$ define uma transformação linear

$$A_U: H_s \rightarrow H_s, \quad s \in I,$$

que associa a cada vizinho de γ em U a sua 3-velocidade relativa a γ .

DEMONSTRAÇÃO. Vamos primeiro demonstrar que $A_U H_s \subset H_s$. Para isto observemos que

$$g(A_U X, U) = g(-D_X U, U) = -\frac{1}{2} X g(U, U) = 0, \quad \forall X \in H_s.$$

Seja agora W um vizinho de γ em U . Devemos mostrar que $\forall s \in I$, $F_{\gamma_* s} W = D_{W s} U$, isto é equivalente a se mostrar que,

$$g(F_{\gamma_* s} W, V) = g(D_{W s} U, V) \quad , \quad \forall V \in H_s .$$

Como por (v) da proposição 4.2.3, temos que

$$g(F_{\gamma_* s} W, V) = g(D_{\gamma_* s} W, V)$$

só nos resta mostrar que $g(D_{\gamma_* s} W, V) = g(D_{W s} U, V)$, $\forall V \in H_s$.

Seja W' um campo vetorial sobre γ tal que $pW' = W$ e $L_Z W' = 0$, e seja $W' - W = f\gamma_*$, para alguma função f , C^∞ , sobre γ . $\tilde{W}'$ o campo vetorial definido em alguma vizinhança U de γ_s tal que

$$W' \circ \gamma = W' \quad \text{e} \quad [W', Z] = 0 .$$

Podemos supor U tão pequeno de modo que exista uma função C^∞ , $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F \circ \gamma = f$.

Definimos agora o campo vetorial $\tilde{W} = \tilde{W}' - FU$, então $\tilde{W} \circ \gamma = W$.

Temos que

$$\begin{aligned}
D_{\tilde{W}}U &= D_U\tilde{W} + [\tilde{W}, U] \\
&= D_U\tilde{W} + [W' - FU, U] \\
&= D_U\tilde{W} - [FU, U] \\
&= D_U\tilde{W} + (UF)F .
\end{aligned}$$

Em s temos,

$$D_{WS}U = D_{\gamma_*S}W + f'(s)\gamma_*s .$$

Isto implica que, $g(D_{\gamma_*S}W, V) = g(D_{WS}U, V)$, $\forall V \in H_S$ e então obtemos,

$$F_{\gamma_*W} = A_U W \quad (4.3.4)$$

$$\therefore F_{\gamma_*}W = D_WU . \quad \blacksquare$$

Qual o significado geométrico (e físico) da equação (4.3.4)? Para responder observamos que como W é ortogonal a U , então em relação a base (U, X_1, X_2, X_3) , W tem somente componentes espaciais. Então a equação (4.3.4) pode ser escrita como

$$\frac{d}{ds} W^i(s) = \sum_{j=1}^3 A_{ij}(s) W^j(s)$$

que tem solução

$$W^i(s) = \sum_{j=1}^3 A_{ij}(s) W^j(r)$$

onde $r \in I$ é um ponto de referência e

$$A = \exp\left(\int_r^s A(s') ds'\right), \text{ onde } A = (A_{ij}).$$

Substituindo-se a expressão acima, na equação $F_{Y*} W = D_W U$, obtemos que a matriz (A_{ij}) deve satisfazer a equação diferencial

$$\frac{d}{ds} A_{ij}(s) = \sum_{k=1}^3 U_{i;k} A_{kj}(s)$$

A matriz A pode ser escrita como:

$$(A_{ij}) = (O_{ik})(S_{kj})$$

onde (O_{ik}) é uma matriz ortogonal com determinante positivo e (S_{kj}) é uma matriz simétrica. Ambas são escolhidas de modo que sejam a matriz identidade em r , isto é, $S_{jk}(r) = O_{jk}(r) = \delta_{jk}$.

Interpretamos (O_{ik}) como a matriz que representa a rotação que uma das curvas vizinhas a curva γ teve em um lapso de tempo próprio $(s-r)$, com relação a base ortonormal Fermi-paralela.

(S_{kj}) representa a separação entre a curva γ e as suas vizinhas. O determinante de (S_{kj}) pode ser interpretado como representando o elemento de volume 3-dimensional da hipersuperfície ortogonal a γ , determinado por curvas vizinhas a γ .

Em r , onde $A_{ij} = \delta_{ij}$, $(\frac{dO}{du})_{ij}$ é matriz antissimétrica e $(\frac{dS}{du})_{ij}$ é simétrica. Então a razão de rotação de curvas vizinhas em r é dada pela parte antissimétrica de $u_{i;j}$; enquanto que a razão de separação em relação a γ é dada pela parte simétrica de $u_{i;j}$; e finalmente a razão de alteração do volume é dado pelo traço de $u_{i;j}$.

PROPOSIÇÃO 4.3.5. Seja U um sistema de referência em (M, g, D) e seja $u = g(U, \cdot)$ a 1-forma fisicamente equivalente a U . Então, para cada ponto $x \in M$:

$$(Du)_x = a \otimes u + \sigma + \omega + \frac{1}{3} \theta h$$

onde $a = g(A, \cdot)$, $A = (D_u U)_x$ é a aceleração, $\omega \in H_x^* \otimes H_x^*$ é um tensor antissimétrico chamado *tensor de rotação*, $\sigma \in H_x^* \otimes H_x^*$ é um tensor com traço nulo em relação a $h|_{H_x} = g_x|_{H_x}$, chamado *tensor de cisalhamento* e $\theta = (\text{div } U)_x$ é a *expansão*.

DEMONSTRAÇÃO. Escrevendo $DU = u_{\mu;\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ em uma base local em $U \in M$, $x \in U$, a prova consiste na simples verificação que

$$(i) \quad \sigma_{\mu\nu} = \left[\frac{1}{2} (u_{\sigma;\tau} + u_{\tau;\sigma}) \right] h_{\mu}^{\sigma} h_{\nu}^{\tau} - \frac{1}{3} \theta h_{\mu\nu}$$

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (u_{\sigma;\tau} - u_{\tau;\sigma}) h_{\mu}^{\sigma} h_{\nu}^{\tau}$$

$$\theta = u^{\alpha}_{;\alpha} = \text{div } u$$

satisfazem as propriedades desejadas, o que é trivial e que

$$(ii) \quad u_{\sigma;\tau} h_{\mu}^{\sigma} h_{\nu}^{\tau} = u_{\mu;\nu} - a_{\mu} u_{\nu} \quad \blacksquare$$

É instrutivo observarmos que se escolhemos em $T_x V$ o referencial móvel (U, X_1, X_2, X_3) então obtemos,

$$a_i = \gamma_{00}^i ; \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{i0}^j - \gamma_{j0}^i) ; \quad \sigma_{ij} = -\frac{1}{2} (\gamma_{j0}^i + \gamma_{i0}^j) - \frac{1}{3} \gamma_{j0}^j ;$$

$$\theta = \gamma_{j0}^j ,$$

o que mostra bem o significado das diversas componentes da conexão no referencial móvel considerado.

Para encerrarmos esta seção, mostramos que o tensor de rotação possui uma definição especialmente simples em termos de formas diferenciais e é equivalente a um vetor Ω que é ortogonal a U . De fato, seja $u = g(U, \cdot)$, definimos uma 3-forma $\tilde{\Omega} = du \wedge u$ e

DEFINIÇÃO 4.3.6. O vetor de rotação associado a U é

$$\Omega = g(\star(du \wedge u), \cdot)$$

Podemos então mostrar que em uma carta local $\langle x^\mu \rangle$ do atlas orientado de M as componentes de Ω são

$$\Omega^\beta = \frac{1}{3!} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\beta\mu\nu\gamma} \tilde{\Omega}_{\mu\nu\gamma}$$

Na equação acima $\epsilon^{\beta\mu\nu\gamma}$ são as componentes do tensor completamente antissimétrico em todos os índices e tal que $\epsilon^{0123} = +1$ e $\tilde{\Omega}_{\mu\nu\gamma}$ são as componentes de $\tilde{\Omega}$ dadas por

$$\tilde{\Omega}_{\mu\nu\gamma} = [u_\mu(u_{\nu;\gamma} - u_{\gamma;\nu}) + u_\nu(u_{\gamma;\mu} - u_{\mu;\gamma}) + u_\gamma(u_{\mu;\nu} - u_{\nu;\mu})]$$

Com estas expressões é possível verificar-se que $g(\Omega, U) = 0$ e também escolhendo-se o referencial móvel (U, X_1, X_2, X_3) verifica-se que as componentes espaciais $\Omega_i = g_{i\alpha} \Omega^\alpha$ são equivalentes as três componentes independentes de $\omega_{\mu\nu}$.

§5. SEPARAÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO E SINCRONIZAÇÃO

5.1. DISTRIBUIÇÃO

DEFINIÇÃO 5.1.1. Uma distribuição α , k -dimensional em sub-

conjunto $A \subset M$ é uma aplicação $\mathcal{D}$ que associa a cada $p \in A$ um subespaço k -dimensional $\mathcal{D}_p \subset T_p^*M$.

Dizemos que $\mathcal{D}$ é $\mathbb{C}^\infty$ se A é aberto e para cada ponto $p \in A$ existem k -campos de 1-formas linearmente independentes $\omega^1, \dots, \omega^k$ que geram $\mathcal{D}_m$, para todos os pontos m pertencentes a uma vizinhança de p .

Qualquer variedade Lorentziana (M, g) admite uma distribuição 1-dimensional tipo-tempo α , isto é $\hat{g}(\omega, \omega) > 0$, para todo $\omega \in \alpha$, $\hat{g}$ é o tensor $(2,0)$ fisicamente equivalente a g . (ver Hall, Teoremas 2,3 [20]).

DEFINIÇÃO 5.1.2. Uma distribuição 1-dimensional α em M é fechada se e somente se é gerada localmente por um gradiente, isto é, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança V_p de p e uma função f de classe $\mathbb{C}^k$ em V_p , tal que $df \neq 0$ e $\alpha = df$ em V_p .

É claro que $\alpha^\perp$, o complemento ortogonal de qualquer distribuição tipo-tempo α em M é uma distribuição tipo-espaço em M , isto é, $\hat{g}(\omega, \omega) < 0$, $\forall \omega \in \alpha^\perp$.

DEFINIÇÃO 5.1.3. Uma variedade tri-dimensional $N \subset M$ é dita uma variedade integral da 1-forma α , se α é nula no espaço-tangente $T_p N$, $\forall p \in N$, isto é

$$\alpha(X) = 0, \quad \forall X \in T_p N$$

5.2. SINCRONIZAÇÃO

DEFINIÇÃO 5.2.1. Seja α a 1-forma fisicamente equivalente a Q , onde Q é um sistema de referência em (M, g, D) . Dizemos que

- (i) Q é *localmente sincronizável* se e somente se $du \wedge \alpha = 0$
- (ii) Q é *localmente tempo-próprio sincronizável* se e somente se $du = 0$.
- (iii) Q é *sincronizável* se existem aplicações $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $t : M \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $h \neq 0$ e $\alpha = hdt$.
- (iv) Q é *tempo-próprio sincronizável* se e somente se $\alpha = dt$.

É claro que (ii) $\Rightarrow$ (i) e (iv) $\Rightarrow$ (ii) e as recíprocas valem localmente.

DEFINIÇÃO 5.2.2. Quando Q é sincronizável (tempo-próprio sincronizável) qualquer função t como na definição 5.2.1 é dita uma *função tempo* (*função tempo-próprio*).

Quando uma função tempo existe, ela não é única. Se uma função tempo-próprio existe, ela obedece $du = \alpha^*(dt) \forall \gamma : I \rightarrow Q$, e $\gamma : I \rightarrow M$, $(I \subset \mathbb{R})$, u é o parâmetro de inclusão.

Se Q é sincronizável então todas as hipersuperfícies da função tempo t são ortogonais a Q , portanto ortogonais a todos os observadores em Q . Estas hipersuperfícies são tipo-espaco. Então M pode ser "separado" em TEMPO $\times$ ESPAÇO, $M = I \times E$, onde E

é uma hipersuperfície tipo-espaço e $I \subset \mathbb{R}$.

Se $d\alpha \wedge \alpha \neq 0$, isto significa que os "pedaços" das hipersuperfícies que contêm os vetores X , tais que $\alpha(X) = 0$, não podem sem distorção serem "combinados" para formar uma hipersuperfície tipo-espaço.

Vamos agora analisar quando uma variedade espaço-tempo (M, g, D) pode ser separada em TEMPO $\times$ ESPAÇO.

Se acrescentarmos a hipótese que M é contrátil (isto é, M é conexa por caminhos e $\pi_1(M) = 0$) temos pela recíproca do Lema de Poincaré:

"Se α é uma p -forma ($p \neq 0$) em M tal que $d\alpha = 0$, então existe uma $(p-1)$ forma ω tal que $\alpha = d\omega$ " (von Westenholz, pp. 165 [57]).

Podemos então concluir que

PROPOSIÇÃO 5.2.3. Seja (M, g, D) um espaço-tempo relativístico tal que M é contrátil. Se existe em M uma 1-forma α tal que $d\alpha = 0$, então M pode ser separada em Espaço $\times$ Tempo.

DEMONSTRAÇÃO. Neste caso existe uma função t (t de classe $\mathbb{C}^k$) tal que $dt = \alpha$ e portanto como já observado todas as hipersuperfícies da função t são ortogonais a $Q = \hat{g}(\alpha, \cdot)$ e então $M = I \times E$. ■

Suponhamos agora que M não é contrátil. Seja dada a 1-forma α que não é identicamente nula em $T_p M$, $p \in M$.

Quando existe uma $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $df \neq 0$ em $T_p M$ e tal que as subvariedades (hipersuperfícies) do tipo

$$N = \{x \in U \mid f(p) = \text{constante}, df(p) \neq 0\}$$

são variedade integrais de α ?

Uma condição necessária para a existência de f é a condição de Frobenius (von Westenholz, pp. 214) [57])

$$d\alpha \wedge \alpha = 0$$

Temos portanto a

PROPOSIÇÃO 5.2.4. Seja (M, g, D) um espaço-tempo. Se existe em M uma 1-forma tal que $d\alpha \wedge \alpha = 0$ então M pode ser separada em Espaço $\times$ Tempo.

A prova é a aplicação da condição de Frobenius. ■

Do ponto de vista matemático a terminologia usada nas definições desse parágrafo são justificadas como segue:

(i) Se Q é tempo próprio-sincronizável, seja N_a a hipersuperfície ortogonal a Q em $t = a$. Por simplicidade consideremos

o caso em que cada observador em Q , encontra N_a somente uma vez. Então cada observador $\gamma: I \rightarrow M$, ($I \subset \mathbb{R}$), em Q pode ajustar seu "relógio ideal" I de maneira que o tempo-próprio é zero quando sua linha de universo intercepta a hipersuperfície N_0 . Como $du = \gamma^*(dt)$, segue que o tempo próprio a de cada observador em Q é quando a sua linha de universo intercepta N_a .

(ii) Se Q é somente sincronizável, mas não é tempo-próprio sincronizável, e t é uma função tempo para Q , então $du = (h \circ \gamma) \gamma^* dt$ para cada observador γ em Q . Como $h \circ \gamma$ não é identicamente igual a 1, $t \circ \gamma$ não é mais igual a u (módulo uma constante aditiva), mas pode ser expresso em termos de u pela equação

$$t \circ \gamma = \int \frac{du}{h\gamma_u}.$$

Então nesse caso cada observador concorda em usar um tempo modificado que não é o tempo próprio medido pelos relógios ideais em repouso no referencial Q .

5.3. SINCRONIZAÇÃO DE RELÓGIOS

Para entendermos o que significa fisicamente a sincronização de relógios na teoria da Relatividade precisamos introduzir dois Postulados de caráter eminentemente físico. Para tanto

recordemos primeiramente que se o par (γ, m) é uma partícula [definição 3.1.3.], então g supre γ com uma noção de comprimento de arco definição (1.2.3) Capítulo IV.

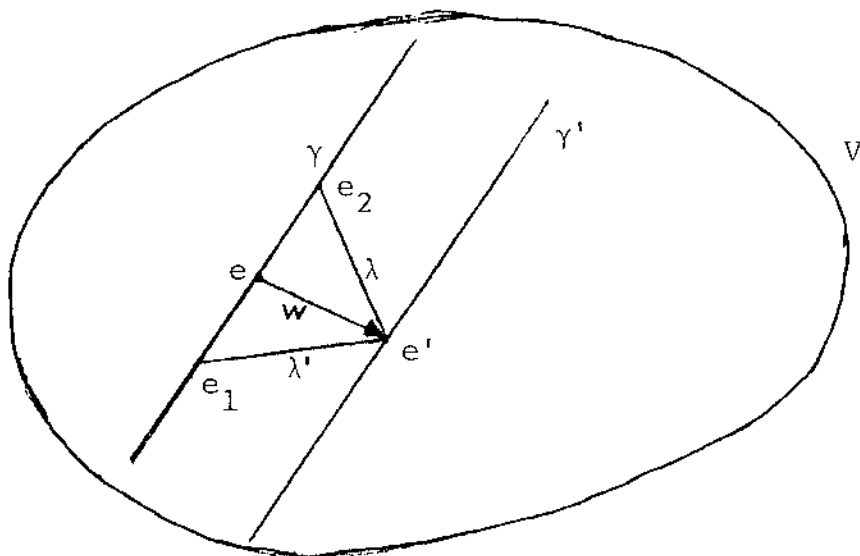
POSTULADO I. Seja γ um observador. Existem relógios padrões que "podem ser carregados" por γ e tal que com seu tic-tac podemos registrar em γ o tempo-próprio, isto é, o parâmetro de inclusão u da definição de observador.

POSTULADO II. Seja (λ, m_λ) um fóton, isto é, $m_\lambda = 0$ e $\lambda: I \rightarrow M$, $(I \subset \mathbb{R})$, é tipo-luz. Então em qualquer espaço-tempo relativístico a linha de universo λ de qualquer fóton é sempre uma geodésica nula. Fótons são também chamados de sinais de luz.

PROPOSIÇÃO 5.3.1. Seja $\gamma: I \rightarrow M$, $(I \subset \mathbb{R})$, um observador em (M, g, D) . Suponhamos que $u_e \in I$ seja dado. Então existe um intervalo aberto $E \subset I$, $u_e \in E$ e uma vizinhança aberta V de $e = \gamma_{u_e}$ tal que $\forall e' \in V - \gamma E$, existem $u_{e_1}, u_{e_2} \in E$, e um sinal de luz λ de e' até $e_2 = \gamma_{u_{e_2}}$ e um sinal de luz λ' de $e_1 = \gamma_{u_{e_1}}$ até e ; $u_{e_1}, u_{e_2}, \lambda, \lambda'$ são únicos.

A prova desta proposição pode ser encontrada em Sachs-Wu (pp. 143), [49].

Seja Q um sistema de referência em (M, g, D) e sejam γ e γ' duas curvas integrais de Q "infinitamente vizinhas" no sentido já introduzido em 4.3.



Suponhamos que γ' contenha e' da Proposição 5.3.1.

De acordo com o Postulado I, os observadores em γ e γ' conseguem ordenar todos os eventos em suas respectivas linhas de universo. Escrevemos por exemplo $e_1 < e < e_2$ para indicar que de acordo com γ o evento e é posterior a e_1 e e_2 é posterior a e .

O problema da sincronização de relógios é o seguinte : Qual evento e na linha de universo de γ é simultâneo (ou síncrono) com o evento e' em γ' ?

A resposta a esta questão depende de uma *definição*. Intuitivamente consideramos que o evento e' simultâneo a e não deve estar causalmente relacionado com e , isto é, não deve

existir nenhuma curva causal unindo e' a e . Ora, a Proposição 5.3.1 e a definição de vizinho nos garantem que não existe nenhuma curva causal unindo e' a e qualquer que seja $e_1 < e < e_2$. Sejam $\langle x^i \rangle : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma carta local do atlas orientado de M e

$$e_1 = (x_{e_1}^0, 0, 0, 0), e_2 = (x_{e_2}^0, 0, 0, 0), e = (x_e^0, 0, 0, 0)$$

$e' = (x_{e'}^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$ as coordenadas de espaço e tempo dos respectivos eventos. A Teoria da Relatividade seleciona um único evento e como simultâneo a e' como aquele cuja coordenada temporal x_e^0 , satisfaz

$$x_e^0 = x_{e_1}^0 + \frac{1}{2} [(x_{e'}^0 - x_{e_1}^0) + (x_{e_2}^0 - x_{e'}^0)].$$

Fisicamente tal significa que o observador em γ' procede como segue: (i) em e_1 ele envia um sinal luminoso λ' para e' , (ii) o sinal é refletido imediatamente, retornando como λ e chegando em γ no evento e_2 . (Este processo de sincronização com sinal de luz é chamado Sincronização "à L'Einstein".

Chamando $\Delta x_1^0 = x_{e'}^0 - x_{e_1}^0$, $\Delta x_2^0 = x_{e_2}^0 - x_{e'}^0$, e tendo em conta que os comprimentos dos arcos $e_1 e'$ ao longo de λ' e $e' e_2$ ao longo de λ podem ser representados pelos vetores $W_{\lambda'} = (\Delta x_1^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$ e $W_{\lambda} = (\Delta x_2^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$, e além disso como

$$g(W_{\lambda}, W_{\lambda}) = g(W_{\lambda}, W_{\lambda}) = 0$$

temos:

$$x_e^0 = x_{e'}^0 - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \Delta x^i \neq x_{e'}^0.$$

Esta equação permite a sincronização de dois relógios "infinitesimalmente vizinhos" γ e γ' no sistema de referência Q , e na carta local $\langle x^i \rangle : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ naturalmente adaptado a Q , isto é, uma carta tal que as componentes $q^\mu = Q(dx^\mu)$ não são funções de coordenada temporal x^0 , $\forall x \in U$. A sincronização unívoca de todos os relógios em Q só é possível se existe um sistema de coordenadas naturalmente adaptado a Q e tal que nesse sistema $g_{i0} = 0$, $\forall x \in U$.

Se um sistema de referência tempo-próprio sincronizável, existe em (M, g, D) , isto é, se $\omega = dt$, onde $\omega = g(Q, \cdot)$ e $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ é função $\mathbb{C}^\infty$ dita tempo-próprio, então existe uma carta local onde $Q = \partial/\partial x^0$, $\exists \partial/\partial t$ e $g_{00} = 1$. Como todas as "hiper-superfícies de nível" da função t são ortogonais a Q (e então ortogonais a todos os observadores em Q) as coordenadas espaciais x^i , são tais que $g(\partial/\partial x^0, \partial/\partial x^i) = g_{0i} = 0$, $\forall x \in M$.

Evidentemente, dado um sistema de referência arbitrário Z em $U \subset M$ em geral não existe um sistema de coordenadas adaptado

a Q e tal que $g_{00} = 1$ e $g_{0i} = 0$, $\forall x \in U$, esta sendo a razão da classificação geral de Z quanto a sua sincronizabilidade no inicial do parágrafo.

Seja Z um sistema de referência em $U \subseteq M$ que não é localmente sincronizável e seja $\langle x^\mu \rangle$ um sistema de coordenadas adaptado a Z . Então nesse sistema em geral $g_{00} = 1$ e $g_{i0} \neq 0$, $\forall x \in U$.

Seja Q um sistema de referência em $U \subseteq M$ tal que Q é tempo-próprio sincronizável, e seja $\langle \tilde{x}^\mu \rangle$ o sistema de coordenadas em U naturalmente adaptado a Q . A transformação $\langle x^\mu \rangle \rightarrow \langle \tilde{x}^\mu \rangle$ deve então satisfazer

$$g^{\mu\nu}(x) \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^\nu} = \tilde{g}^{00}(\tilde{x}) = 1$$

$$g^{\mu\nu}(x) \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^\nu} = \tilde{g}^{i0}(\tilde{x}) = 0$$

$$g^{\mu\nu}(x) \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^\nu} = \tilde{g}^{ij}(\tilde{x})$$

onde $g^{\mu\nu}(x) = \hat{g}_X(dx^\mu, dx^\nu)$; $\tilde{g}^{\mu\nu}(\tilde{x}) = \hat{g}_{\tilde{X}}(d\tilde{x}^\mu, d\tilde{x}^\nu)$

As equações acima tem a forma da equação de Hamilton-Jacobi relativística para uma partícula livre [Davis [11], pp. 116]. Estas equações podem ser de solução muito difícil e não discutiremos o assunto aqui. Apenas comentamos que se estas equações possuem solução em uma dada variedade (M, g, D) então a transformação $\langle x^\mu \rangle \rightarrow \langle \tilde{x}^\mu \rangle$ permite que identifiquemos um sistema de referência tempo-próprio sincronizável em $U \subseteq M$.

CAPÍTULO V

O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE

§1. RELATIVIDADE ESPECIAL E O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE

1.1. ELETRODINÂMICA DE MAXWELL-LORENTZ-EINSTEIN

A Relatividade Especial (RE) foi desenvolvida por Einstein, Lorentz, Poincaré e Minkowski [16], como uma resposta a não detecção dos objetos absolutos h, dt, V , que entram na descrição da estrutura de variedade do espaço-tempo Newtoniano. Como já mencionamos no Capítulo III, Einstein construiu uma nova teoria da interação entre partículas carregadas e o campo eletromagnético, iniciando por suprimir os objetos absolutos h, dt, V e introduzindo em seu lugar uma métrica Lorentziana g na variedade que segundo Minkowski deveria representar o espaço-tempo.

Assim, o espaço-tempo da RE, também chamado espaço-tempo de Minkowski é simplesmente um espaço-tempo relativístico (ver Capítulo IV, def. 1.2.1), (M, g, D) onde $K(D) = 0$ e $D(g) = 0$.

A eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz-Einstein tem agora a seguinte formulação $T_{MLE} = (M, g, D, F, J, (T_\sigma, m, q))$ onde (σ, m, q) é uma partícula carregada, isto é, $\sigma : I \rightarrow M$, $I \subset \mathbb{R}$, dada por $u \mapsto \sigma(u)$ e u é o tempo-próprio, $m \in (0, +\infty)$, $q \in (-\infty, +\infty)$ e

$F \in \Lambda^2 M$, $J \in T^*M$ e os axiomas não lógicos são

$$K(D) = 0$$

$$D(g) = 0$$

$$\delta F = -4\pi J \quad (1.1.1)$$

$$dF = 0$$

e a equação de movimento é [compare com a eq.(4.2.5) Cap. III].

$$mD_{T_\sigma} T_\sigma = q \text{tr}^{12} (G_1^* F \otimes T_\sigma). \quad (1.1.2)$$

Como D é uma conexão chata existe uma classe de sistemas de referência I e sistemas de coordenadas globais $\langle x^\mu \rangle$ naturalmente adaptados a cada $I \in I$ tal que $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = 0$, $g = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Os sistemas $I \in I$ são ditos inerciais e os $\langle x^\mu \rangle$ são chamadas coordenadas no calibre de Einstein-Lorentz (Rodrigues - Tiomno [47]). As transformações de coordenadas $\langle x^\mu \rangle \rightarrow \langle \bar{x}^\mu \rangle$ entre sistemas inerciais definem um grupo de Lie a 10 parâmetros dito grupo de Poincaré (ver Apêndice 2.3). Tais transformações induzem difeomorfismos $P : M \rightarrow M$ que no presente caso são isometrias, isto é, $P_* g = g$ (ver Cap. II).

Se $\langle x^\mu \rangle$ está naturalmente adaptado ao sistema de referência inercial $I \in I$ e no calibre de Einstein-Lorentz, então as eqs.(1.1.1) se escrevem

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\gamma} = 0 \quad (a)$$

$$g_{\mu\nu;\alpha} = 0 \iff \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = 0$$

(1.1.3)

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = 4\pi J^{\mu} \quad (b)$$

$$F_{[\mu\nu;\alpha]} = 0$$

e com a identificação dada pelas eqs. (4.2.1) e (4.2.2) (cap. III) obtemos,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi \vec{j}; \quad t = x^0$$

(1.1.4)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

que são as equações de Maxwell.

A eq. (1.1.2) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} p^{\mu} = q F^{\mu}_{\nu} \frac{dx^{\nu}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dp^0}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v} & (a) \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) & (b) \end{cases} \quad (1.1.5)$$

$p^0 = m / \sqrt{1 - v^2}$ é a energia relativística, $\vec{v}$ é a 3-velocidade e $\vec{p} = m\vec{v} / \sqrt{1 - v^2}$ é a 3-momento. Chamaremos o conjunto das eqs. (1.1.4) e (1.1.5) de formulação standard de T_{MLE} .

Como observamos no Cap. III as equações de Maxwell-Lorentz (eq. 1.1.4) implicam que as ondas eletromagnéticas se propagam no vácuo com 3-velocidade constante $c = 1$, em relação ao sistema de repouso. Na T_{MLE} as equações de Maxwell-Lorentz na forma (1.1.4) valem em todos os sistemas inerciais, o que implica que a 3-velocidade da luz é a mesma em todos os sistemas inerciais. Tal conclusão tem gerado uma contínua confusão na literatura, mas aqui não discutiremos mais o assunto - observamos apenas que não existe nenhum paradoxo quando levamos em conta o significado operacional das coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) no calibre de Lorentz-Einstein. Para uma discussão exaustiva desse tema recomendamos os artigos de Rodrigues - Tiomno [46, 47].

Os objetos absolutos de T_{MLE} são D, g e portanto o grupo de invariância da teoria é o grupo de Poincaré (ver, por exemplo, Anderson [2]). Ocorre que o grupo de covariância da formulação standard de T_{MLE} é também o grupo de Poincaré. Esta coincidência e mais uma a ser reportada mais abaixo geraram uma confusão "não trivial" entre os conceitos de invariância e covariância como bem atestam os inúmeros textos sobre a Teoria da Relatividade^(*).

(*) Para se ter uma idéia compare os conceitos de invariância e covariância como usados por Weinberg [58], Ohanian [33], Anderson [2], Bergman [4].

Em seu artigo original sobre a RE Einstein [16] inicia com a observação que a eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz [Cap. III, § 4] como entendida naquele tempo, quando aplicada a corpos em movimento, levava a certas assimetrias que não pareciam ser inerentes aos fenômenos. Esta observação combinada com as tentativas frustradas (até 1905) de se descobrir qualquer movimento da Terra em relação ao "carregador de luz" (o eter) [isto é, os objetos absolutos h, dt, V , Cap. III] sugeriram a Einstein que os fenômenos da eletrodinâmica, bem como os processos mecânicos não possuíam propriedades correspondentes a idéia de repouso absoluto. Ele cita que já era conhecido, que em primeira ordem em (v/c) , as mesmas leis da eletrodinâmica e da óptica eram válidas para todos os sistemas de referência para os quais as leis da Mecânica eram válidas, pelo menos em primeira aproximação. Einstein então elevou a conjectura de que tal deveria ser verdadeiro em todas as ordens em (v/c) ao status de postulado e o chamou de *Princípio de Relatividade* (PR).

O que Einstein entendia então em 1905 como Princípio de Relatividade era o fato que do ponto de vista das leis de T_{MLE} os sistemas inerciais eram "equivalentes" ou "indistinguíveis".

Explicitamente, se $(M, D, g, F, J, T_g, b \in B)$ é um modelo de T_{MLE} no sistema de coordenadas inercial (x^μ) naturalmente adaptada a

$I \in I$ e se $P: M \rightarrow M$ é o difeomorfismo associado a transformação de Poincaré $\langle x^H \rangle \rightarrow \langle y^H \rangle$, onde $\langle y^H \rangle$ é o sistema de coordenadas naturalmente adaptado a $I' \in I$, então $(M, P_*D, P_*g, F, J, T_G, \bar{b} \in \bar{B})$ é também modelo de T_{MLE} . De fato, $P_*D = D$ e $P_*g = g$.

1.2. EQUIVALÊNCIA DE SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Depois de Einstein os físicos passaram a conjecturar que deveria existir um Princípio de Relatividade aplicável a todas as leis da natureza, e que os sistemas inerciais eram equivalentes do ponto de vista de todas as leis físicas. A formulação precisa do conceito de equivalência de sistemas de referência no âmbito das teorias de espaço-tempo se faz portanto necessária.

Seja T uma particular teoria física de espaço-tempo, suposta descrever os sistemas físicos $f \in F$. Sejam Z e Z' dois sistemas de referência, cada um deles possuindo um estado de movimento bem definido de acordo com T . Como vimos nos capítulos III e IV o estado de movimento de um sistema de referência Z é dado pelos componentes da conexão D em um sistema de coordenadas adaptado a Z (e quando presente, pelo campo vectorial absoluto tipo tempo V). Seja $h: M \rightarrow M$ um difeomorfismo associado a transformação de coordenadas $\langle x^H \rangle \rightarrow \langle y^H \rangle$, naturalmente associadas a Z e Z' respectivamente. h induz

as aplicações h_* , $D \rightarrow h_*D$, (e se V está presente $V \rightarrow h_*V$) de tal maneira que $h_*D(h_*V)$ atribue o mesmo estado de movimento a Z que $D(V)$ atribue a Z' .

DEFINIÇÃO 1.2.1: Dizemos que os sistemas de referência Z e Z' são *equivalentes* ou *indistinguíveis* de acordo com a teoria T , se não existir nenhuma experiência realizada com os sistemas físicos $f \in F$, descritos por T , que possa distinguir $D(V)$, de $h_*D(h_*V)$, através dos axiomas não lógicos de T . Isto é, se $(M, D, g, V, \dots, b \in B)$ e $(M, h_*D, h_*g, h_*V, \dots, \bar{b} \in B)$ são ambos modelos de T (na interpretação ativa).

DEFINIÇÃO 1.2.2. Quando o conjunto $\{h\}$, dos difeomorfismos $h : M \rightarrow M$, que define a classe de equivalência dos sistemas de referência $\{Z\}$, de acordo com a teoria T , forma um grupo, então ele é dito *grupo de equivalência* de T .

Utilizando as duas últimas definições vemos que o grupo de equivalência de T_{MLE} é o grupo de Poincaré. Assim na T_{MLE} , os grupos de invariância, de equivalência e de covariância da formulação standard coincidem! Tal coincidência nos permite compreender a razão das diversas apresentações do Princípio da Relatividade. Vamos citar as três mais comuns:

PR_1 : Todas as teorias físicas de espaço-tempo possuem o grupo

de Poincaré como seu grupo de invariância (simétrica) (Anderson [2]).

PR_2 : Todos os sistemas inerciais são fisicamente equivalentes do ponto de vista das leis que regem todos os fenômenos físicos da natureza (Barut,[4]).

PR_3 : As leis de todas as teorias físicas são representadas por equações matemáticas que tem a mesma forma, isto é, são covariantes em todos os sistemas inerciais (Bergmann [6]).

Como qualquer teoria física de espaço-tempo pode ser escrita em forma intrínseca, com a introdução de um número adequado de objetos absolutos (ver Krestschmann [28], Anderson [2]), o enunciado PR_3 como representante do Princípio da Relatividade deve ser descartado. Adicionando-se a PR_2 a afirmação,

PR'_2 : Se dois sistemas de referência são equivalentes de acordo com T , eles devem ser teoricamente idênticos (de acordo com T).

PROPOSIÇÃO 1.2.3. $(PR_2 \text{ e } PR'_2)$ é equivalente a PR_1 , para todas as teorias T de espaço tempo que possuem o espaço tempo de Minkowski como parte de sua estrutura, e que não contém um campo V tipo-tempo absoluto. $((PR_2 \text{ e } PR'_2) \sim PR_1)$.

DEMONSTRAÇÃO: h pertence ao grupo de equivalência de uma teoria T (que descreve campos e partículas em interação),

Se existe um modelo de T com um campo fixo e uma trajetória de partícula fixa, tal que, este modelo contém D, g (e V se existir), um outro modelo contém h_*D, h_*g , (e h_*V se existir). Se T satisfaz PR_2 , e portanto possui sistemas inerciais, D será um objeto absoluto de T (também V será absoluto, se presente), por hipótese além disso se T satisfaz também PR'_2 então os elementos do grupo de equivalência devem deixar D (e V , se presente) invariante isto é, $h_*D=D$, $(h_*V=V)$.

Podemos ainda supor, sem perda de generalidade, que $g(V, V) = +1$. Se $U \subseteq M$, existe uma carta local $\langle x^i \rangle$, tal que $V|_U = \frac{\partial}{\partial x^0}$ (capítulo III). Segue então que o grupo de invariância local de V é $SO(3)$, enquanto que o grupo de invariância de D e g é o grupo de Poincaré. Isto implica que se T não contém V em sua formulação, e satisfaz $(PR_2 \wedge PR'_2)$ então o grupo de equivalência de T é idêntico ao grupo de simetria de T , isto é) $(PR_2 \wedge PR'_2) \sim PR_1$. ■

OBSERVAÇÃO 1.2.4: Vamos supor que construímos uma teoria física T de espaço tempo (que possui o espaço-tempo de Minkowski como parte de sua estrutura) e que tem um campo de 1-formas tipo-tempo A , em sua formulação. Explicitamente, $T_D = (M, g, D, A)$, tal que

$$K(D) = 0 \quad (a)$$

$$D(g) = 0 \quad (b)$$

$$\delta F = -4\pi J \quad (c) \quad (I_1)$$

$$dF = 0 \quad (d)$$

$$F = dA \quad (e)$$

$$J = A \quad (f)$$

A equação (e) não define A univocamente, pois se $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ então $A + d\phi = A' \Rightarrow dA' = dA$. Além disso (c) e (f) implicam que $\delta A = 0$. Logo A fica definido a menos do gradiente de uma função ϕ , tal que, $\delta d\phi = 0$.

Vamos juntar agora ao conjunto destas equações acima a condição de calibre não linear

$$\hat{g}(A, A) = K^2 > 0 \quad (II)$$

$\hat{g}(A,)$ é então um campo vetorial tipo tempo e $K^{-2}\hat{g}(A,)$ é um sistema de referência de acordo com a definição. A teoria que acabamos de formular é basicamente a *eletrodinâmica não linear de Dirac*.

T_D possui o grupo de Poincaré como seu grupo de simetria, desde que os seus únicos objetos absolutos são D e g . Observe-se que a condição $(I_1.e)$ não fixa A com o mesmo valor, $\forall p \in M$, em todos os modelos de T_D . O grupo de equivalência de

T_D é o grupo de Poincaré.

Este resultado está em contraste com afirmações contrárias na literatura, como por exemplo em Dirac [14] e Rodrigues [45]. A razão da confusão nos trabalhos citados vem do fato dos autores suporem que para qualquer solução do sistema (I_1) existe um sistema de coordenados $\langle x^\mu \rangle$ adaptado a um referencial inercial I onde $K^{-1}A = (1, 0, 0, 0), \forall p \in M$. Ora, tal conclusão só vale localmente para qualquer solução do sistema. De fato dado $p \in M$ existe sempre uma vizinhança U de p , onde podemos por $K^{-1}A|_U = \frac{\partial}{\partial x^0}$ como explicado no Capítulo IV.

Suponhamos que aumentamos a estrutura do espaço-tempo de Minkowski introduzindo neste espaço um campo vetorial tipo-tempo absoluto V . Seja (M, D, g, V) esta estrutura, onde

$$K(D) = 0$$

$$D(g) = 0$$

$$D(V) = 0$$

$$g(V, V) = +1$$

DEFINIÇÃO 1.2.5. Seja $T_L = (M, g, D, V, \dots)$ uma teoria de espaço-tempo que possue $(M, g, D, V, \dots)$ como parte de sua estrutura. Então ela é chamada *Não-Lorentziana*, (M, g, D, V) será chamado espaço tempo de Lorentz.

T_L não possui o grupo de Poincaré como o seu grupo de

simetria e portanto T_L não satisfaz PR_1 . Entretanto é possível inventarmos muitas teorias $T_L, T'_L, \dots$ que satisfazem PR_2 . Condição necessária é que V não apareça nas equações básicas de T_L , isto é, que V não interaja com os sistemas físicos $f \in F$ descritos por T_L .

EXEMPLOS 1.2.6. É fato empírico que nosso sistema de referência, a Terra, se move em um mar de ftons conhecido como a radiação negra de fundo. Esta radiação é descrita por um campo eletromagnético F_e como usual. Existe apenas um sistema de referência onde a radiação é isotrópica, este sistema define V . Assim o sistema de referência V é "materializado" pela radiação negra de fundo, mas tal não implica necessariamente na quebra da equivalência dos sistemas inerciais, para a maioria das teorias físicas conhecidas. De fato é F_e quem interage na maioria ds teorias com as partículas carregadas e não V .

Temos então a seguinte situação: podemos determinar a velocidade de nosso laboratório em relação a V , mas tal fato não implica na quebra da equivalência dos sistemas inerciais para todas as experiências que não envolvam o acoplamento do campo V com algum sistema físico em um dado referencial.

Estas observações longe de serem triviais resolvem um problema que desafiou gerações de cientistas nesse século: Uma

teoria relativista T_E com a estrutura adicional V é chamada T_L (teoria do eter de Lorentz quanto $T_E \equiv T_{MLE}$). São estas teorias equivalentes ou não?

A resposta a questão é: *não* se em T_L , V aparece na formulação de alguma lei física, *sim* se em T_E , V não aparece na formulação de alguma lei física.

Vemos que a situação é parecida com a formulação da Dinâmica Newtoniana no espaço-tempo de Newton - onde os sistemas inerciais são equivalentes (Princípio de Relatividade de Galileu) desde que forças que não dependem da velocidade não estejam envolvidas nas experiências em questão. [De fato, esta foi a razão principal do Capítulo III nesta tese].

Durante os últimos 70 anos apareceram na literatura de Física, inúmeros artigos "provando" ora que T_L era equivalente a T_E e ora que não eram equivalentes. Pode-se afirmar sem receio que todas as "provas" apresentadas até o trabalho de Rodrigues e Tiomno [46,47] estão erradas. Rodrigues e Tiomno foram os primeiros a perceber que a quebra de equivalência dos sistemas inerciais, isto é, de PR_2 implicava em V aparecer nas leis físicas de maneira direta. Eles fabricaram modelos explícitos para teorias com tal interação e compararam os resultados com algumas experiências recentes que clamam terem detectado pequenas violações do "Princípio da Relatividade", como em Marínov [34] e Kolen-Torr [55]. Ver também Santilli [50]. Entretanto Rodrigues-Tiomno interpretaram a violação do "Princípio de

Relatividade" como violação de PR_1 . Tal violação é óbvia quando se introduz V . A violação que ocorre é de PR_2 , como mostramos.

Antes de prosseguirmos com a análise do "Princípio de Relatividade" na Relatividade Geral" e finalmente no "Universo" que habitamos, vamos estudar com detalhes um problema que tem sido fonte de inúmeros mal entendidos na literatura: O disco em rotação no espaço-tempo de Minkowski.

§2. O DISCO EM ROTAÇÃO NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

2.1 - SINCRONIZAÇÃO

Seja $M = (M, g, D)$ o espaço-tempo de Minkowski e $I \in I$ um sistema de referência inercial. Seja $(\bar{z}, \bar{r}, \bar{\phi}, \bar{z})$ coordenadas cilíndricas naturalmente adaptadas a I . O tensor métrico g se escreve

$$g = d\bar{t} \otimes d\bar{t} - d\bar{r} \otimes d\bar{r} - r^2 d\bar{\phi} \otimes d\bar{\phi} - d\bar{z} \otimes d\bar{z} \quad (2.1.1)$$

Seja

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2 \bar{r}^2}} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \frac{\omega}{\sqrt{1 - \omega^2 \bar{r}^2}} \frac{\partial}{\partial \bar{\phi}}$$

um sistema de referência definido no aberto $U \equiv (-\infty < \bar{t} < \infty,$

$$0 < \bar{r} < \frac{1}{\omega}, 0 \leq \bar{\phi} < 2\pi, -\infty < \bar{z} < \infty \quad (U \subset M).$$

A 1-forma fisicamente equivalente a Q é

$$\theta^0 = g(Q,) = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2 \bar{r}^2}} d\bar{t} - \frac{\omega \bar{r}^2}{\sqrt{1 - \omega^2 \bar{r}^2}} d\bar{\phi}$$

Temos imediatamente que, (ver capítulo IV)

$$d\theta^0 \wedge \theta^0 = -2\omega \bar{r} d\bar{t} \wedge d\bar{r} \wedge d\bar{\phi}$$

e

$$\Omega = g(* (d\theta^0 \wedge \theta^0),) = \omega \frac{\partial}{\partial z}$$

O sistema de referência Q está portanto rodando com velocidade angular ω constante, em torno do eixo z do sistema I , em coordenados no calibre do Einstein-Lorentz. De acordo com nossa discussão do Capítulo IV, definição 5.2.1, Q não é sincronizável.

O sistema de referência Q pode ser fisicamente representado por um disco sólido de raio $R < \frac{1}{\omega}$. A condição $R\omega < 1$ é necessária pois para $R\omega \geq 1$ Q deixa de ser tipo-tempo e não pode mais representar o movimento das partículas materiais bradionicas que compõe o disco.

Introduzimos agora uma carta local $\langle t, r, \phi, z \rangle$ em $U \subset M$ e que é naturalmente adaptada a Q , pelas transformações:

$$t = \bar{t} ; r = \bar{r} ; \phi = \bar{\phi} - \omega \bar{t} ; z = \bar{z} \quad (2.1.4)$$

Nas coordenadas (t, r, ϕ, z) o tensor métrico g fica com a representação

$$g = (1 - r\omega^2) dt \otimes dt - [dr \otimes dr + 2\omega r^2 dt \otimes d\phi + r^2 d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz] \quad (2.1.3)$$

que é válida, $\forall p \in U$.

Em relação aos vetores da base natural $(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial t})$ e sua base dual o campo Q e a 1-forma θ^0 tem as componentes

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2 r^2}} \frac{\partial}{\partial t} ; \theta^0 = \sqrt{1 - \omega^2 r^2} dt - \frac{\omega r^2}{\sqrt{1 - \omega^2 r^2}} d\phi$$

Podemos agora aplicar a g a decomposição estabelecida no §3, do Capítulo IV. Temos

$$g = \theta^0 \otimes \theta^0 - [dr \otimes dr + \frac{r^2}{1 - r^2 \omega^2} d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz]$$

O significado da decomposição acima pode ser apreciado se recordamos nossa discussão sobre a sincronização de relógios realizada por dois observadores representados por duas curvas infinitesimalmente vizinhas γ e γ' da congruência definida por Q . Temos imediatamente que se $x_e \in \gamma$ então em uma vizinhança $V_e \subset U$,

$$g^{(3)} = dr \otimes dr + \frac{r^2}{1 - r^2 \omega^2} d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz$$

é a métrica do 3-espaço de repouso do observador instantâneo (x_e, X_e) com $X_e = Q \circ \gamma_e$. Tal espaço não é euclidiano. Em particular se Γ é uma geodésica espacial descrita pelas equações paramétricas

$$\begin{aligned} x^0 \circ \Gamma &= t = \text{constante}; x^1 \circ \Gamma = R = \text{constante}, x^2 \circ \Gamma = \phi', 0 \leq \phi' < 2\pi, \\ x^3 \circ \Gamma &= 0 \quad \text{onde} \quad R < \frac{1}{\omega} \quad \text{e} \quad x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = z, \text{ então} \end{aligned}$$

$$\ell_\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{R}{(1 - R^2 \omega^2)^{1/2}} d\phi' = \frac{2\pi R}{(1 - R^2 \omega^2)^{1/2}} > 2\pi R$$

A integral da 1-forma θ^0 entre dois pontos da curva Γ com coordenados ϕ_1 e ϕ_2 é

$$\Delta T = - \int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{\omega R^2}{\sqrt{1 - \omega^2 R^2}} d\phi' = \frac{\omega R^2 \Delta \phi}{\sqrt{1 - \omega^2 R^2}}$$

o que significa como sabemos da nossa discussão sobre sincronização de relógios (Capítulo IV, §5) que o evento simultâneo com $x_e^0 = t$ em ϕ' é aquele que tem coordenada temporal $x_e^0 + \frac{g_{i0}}{g_{00}} \Delta x^i$.

2.2. TENSOR CURVATURA EM BASES NÃO COORDENADAS

Em muitos textos de Física, como por exemplo, Adler-Bazin-Schiffer [1], Arzèlies [3] usa-se em vez de θ^0 a diferencial $\eta^0 = (1 - \omega^2 r^2)^{-1/2} \theta^0$ e escreve-se $\eta^0 = dt^* = dt - (\omega r^2 / (1 - \omega^2 r^2)) d\phi$.

Obviamente tal notação é imperdoável, pois como já vimos θ^0 não é uma diferencial exata, o mesmo ocorrendo com η^0 . O uso abusivo de notações errôneas levou Arzèlies (e outros) a calcular o tensor de curvatura de g como se $(\eta^0, dr, d\phi, dz)$ fosse uma base coordenada. Se assim se procede, obtêm-se $K \neq 0$, o que é evidentemente absurdo pois o espaço-tempo de Minkowski é chato, por hipótese. O cálculo correto do tensor de curvatura na base $(\eta^0, \eta^1 = dr, \eta^2 = d\phi, \eta^3 = dz)$ é apresentado no que segue. Temos primeiramente

$$g = (1 - \omega^2 r^2) \eta^0 \otimes \eta^0 - dr \otimes dr - \frac{r^2}{1 - \omega^2 r^2} d\phi \otimes d\phi - dz \otimes dz \quad (2.2.1)$$

As componentes do tensor de curvatura são dadas por (Ver apêndice 3.3.2):

(*)

$$R_{\beta\rho\delta}^{\alpha} = \gamma_{\beta\delta,\rho}^{\alpha} - \gamma_{\beta\rho,\delta}^{\alpha} + \gamma_{\mu\rho}^{\alpha} \gamma_{\beta\delta}^{\mu} - \gamma_{\mu\delta}^{\alpha} \gamma_{\beta\rho}^{\mu} - \gamma_{\beta\delta}^{\mu} \gamma_{\rho\mu}^{\alpha} + \gamma_{\beta\mu}^{\alpha} C_{\rho\delta}^{\mu} \quad (2.2.2)$$

e além disso, temos que

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\rho\alpha,\beta} + g_{\rho\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\rho}) + \frac{1}{2} (-C_{\alpha\beta}^{\mu} + g_{\zeta\alpha} g^{\mu\rho} C_{\rho\beta}^{\zeta} + \\ + g_{\zeta\beta} g^{\mu\rho} C_{\rho\alpha}^{\zeta}) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

onde os $g_{\mu\alpha}$ são os coeficientes em (2.2.1) e os $C_{\alpha\delta}^{\mu}$ resolvem a primeira equação de estrutura de Cartan, isto é; [ver Ryan-Shepley, pg. 32].

$$d\eta^{\mu} = \sum_{\alpha < \beta} C_{\alpha\beta}^{\mu} \eta^{\alpha} \wedge \eta^{\beta} \quad (2.2.4)$$

Esta equação pode ser resolvida por inspeção e resulta imediatamente que os únicos coeficientes não nulos são

$$C_{12}^0 = -C_{21}^0 = \frac{2r\omega}{(1-r^2\omega^2)^2} \quad (2.2.5)$$

(*) onde, por exemplo $\gamma_{\beta\delta,\rho}^{\alpha} = \frac{\partial \gamma_{\beta\delta}^{\alpha}}{\partial x^{\rho}}$, isto é, a vírgula de

nota derivada em relação à coordenada x^{ρ} .

As equações (2.2.1), (2.2.3) fornecem juntamente com (2.2.5),

$$\gamma_{01}^0 = \gamma_{10}^0 = -r\omega / (1 - r^2 \omega^2); \gamma_{00}^1 = -r\omega^2; \gamma_{22}^1 = -r / (1 - r^2 \omega^2)^2; \gamma_{21}^2 = \gamma_{12}^2 = \frac{1}{r(1 - r^2 \omega^2)}$$

$$\gamma_{12}^0 = + \gamma_{21}^0 = \frac{+r\omega}{(1 - r^2 \omega^2)^2}; \gamma_{02}^1 = \gamma_{10}^1 = -r\omega / (1 - r^2 \omega^2); \gamma_{10}^2 = \gamma_{01}^2 = \omega / r$$

(2.2.6)

Substituindo (2.2.6) em (2.2.2) resulta $R_{\beta\alpha\delta}^{\mu} = 0$.

OBSERVAÇÃO: A equação de movimento de uma partícula (σ, m) no sistema de referência Q .

Uma partícula com aceleração a satisfaz como sabemos, a equação de movimento

$$a = D_{T_{\sigma}} T_{\sigma} \quad (2.2.7)$$

No sistema inercial I esta equação se escreve em coordenadas cartesianas $(x^0, x^1, x^2, x^3)' = (t, x, y, z)$

$$a = \frac{d^2 x^{\mu}}{dt^2} \quad (2.2.8)$$

No sistema de referência Q temos, como no caso da Mecânica Clássica, termos de conexão correspondentes a aceleração de Coriolis, a aceleração centrífuga e mais um termo de "correção relativística". Não existe necessidade de escrevemos explicitamente a equação aqui, pois não vamos fazer uso da mesma. O importante é observamos que de acordo com a definição (1.2.1) os sistemas I e Q não são equivalentes. As soluções, com condições iniciais análogas da (2.2.8) e da (2.2.7) quando expressa nas coordenadas adaptadas a Q são distintas. De fato, esta é a maneira física pelo qual um observador em Q descobre que não reside em um sistema inercial.

OBSERVAÇÃO 2.2.9. O disco em rotação no espaço-tempo de Lorentz (M, g, D, V) .

Em nossa discussão do disco em rotação no espaço-tempo de Minkowski achamos natural identificar o sistema de referência Q com um disco em rotação uniforme em relação a um dado referencial inercial I , cujas coordenadas estão no calibre de Einstein-Lorentz. Rodrigues e Tiomno [47] observaram que uma possível violação fraca do Princípio de Relatividade, no caso, identificado com PR_2 , pode ocorrer se por exemplo impomos que a rotação de um disco em movimento roto-translacional é constante em relação ao tempo no sistema V (no calibre de Einstein-Lorentz) e não em I . Desta maneira Rodrigues e Tiomno forneceram

pela primeira vez exemplo explícito de Teoria não-lorentziana não equivalente a teoria relativista correspondente.

§ 3 - RELATIVIDADE GERAL E O PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE

3.1. RELATIVIDADE GERAL

A Relatividade Geral de Einstein (RG) é uma teoria do campo gravitacional. Nossa discussão da teoria da gravitação universal de Newton no Capítulo III §3 deixou claro que uma teoria realista da gravitação implica no uso de uma conexão D não chata, o que significa que a variedade espaço-tempo de tal teoria possui curvatura de Riemann não nula.

Em particular vimos que o tensor de Ricci era uma "medida" da densidade de matéria no espaço-tempo pois satisfaz na teoria da gravitação de Newton a equação $\text{Ric} = -4\pi\rho dt \otimes dt$ [eq(III. 5.3.6)] .

Por outro lado, a Relatividade Especial mostrou que o tensor métrico g é um ingrediente importante das teorias de espaço-tempo que substitue os objetos absolutos h, dt, V do espaço-tempo Newtoniano, e que como discutimos, não são observáveis. A idéia genial de Einstein foi intuir que g não era um objeto absoluto e que D precisava ser a conexão de Levi-Civita de g em M .

Assim, modelo da Relatividade Geral é $T_E = (M, g, D, T, T_0)$ onde (M, g, D) é um espaço-tempo relativístico e T é um campo tensorial $(0, 2)$ dito tensor de energia-stress. T representa o conteúdo material (e energético) do espaço-tempo incluindo contribuições de todos os campos (com exceção do campo gravitacional) e partículas. No momento não temos necessidade da forma explícita de T .

Os axiomas não lógicos de T_E são

$$D(g) = 0 \quad (1)$$

$$G = \text{Ric} - \frac{1}{2} Sg = T \quad (2)$$

G é dito tensor de Einstein, Ric é o tensor de Ricci, S é a curvatura escalar. A lei de movimento das partículas que se movimentam somente sob a ação do campo gravitacional é

$$D_{T_\sigma} T_\sigma = 0 \quad (3)$$

T_E não possui objetos absolutos. Assim, o grupo de invariância e o de covariância da teoria coincidem com o grupo de difeomorfismos de M .

Como o espaço não é chato não existem sistemas de referência inerciais (tal qual ocorre no caso da teoria da gravitação de Newton, formulada em espaço-curvo), e portanto a única fórmula

ção standard de T_E é aquela covariante sob a ação do grupo de difeomorfismo de M , que é portanto também o grupo de covariância da formulação standard.

É necessário esclarecermos aqui que a presença do campo gravitacional está associada diretamente com o tensor de Riemann K e não com g ou com D . Tal fato é consequência das Proposições 3.1.2, 3.1.3 e 3.1.1, abaixo.

DEFINIÇÃO 3.1.1. Uma base de campos vetoriais $\{X_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ é dita *normal* em $x \in M$ se e somente se $\{X_\mu x, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ for ortonormal e $(DX_\mu)x = 0, \forall \mu = 0, 1, 2, 3$.

PROPOSIÇÃO 3.1.2. Dado um ponto qualquer $x \in (M, g, D)$, localmente existem campos vetoriais $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ que são normais em x .

A prova pode ser encontrada em Bishop-Goldberg (Proposição 5.13.1 [7]).

PROPOSIÇÃO 3.1.3. Seja $\{\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ campos vetoriais definidos na vizinhança U de x , e seja $g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu)$. Então $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ é *normal* em $x \in U$ se e somente se $g_{\mu\nu}(x) = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ e $\partial_\mu g_{\alpha\beta}(x) = 0, \forall \mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$.

DEMONSTRAÇÃO: É fácil verificar que $\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ são orto-

normais em x . Mostremos que $\partial_\mu g_{\alpha\beta}(x) = 0$. Se $(D\partial_\mu)(x) = 0, \forall \mu = 0, 1, 2, 3$ então

$$\begin{aligned}\partial_\mu g_{\alpha\beta}(x) &= [\partial_\mu g(\partial_\alpha, \partial_\beta)](x) \\ &= [g(D_{\partial_\mu} \partial_\alpha, \partial_\beta + g(\partial_\alpha, D_{\partial_\mu} \partial_\beta)](x) = 0\end{aligned}$$

Inversamente, suponhamos $(\partial_\mu g_{\alpha\beta})(x) = 0 \forall \mu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$. Sabemos que $D_{\partial_\alpha} \partial_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu$ e

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\beta g_{\beta\mu} - \partial_\nu g_{\beta\alpha})$$

Então $(\partial_\mu g_{\alpha\beta})(x) = 0, \forall \mu = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x) = 0, \forall \mu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow$
 $(D\partial_\mu)(x) = 0, \forall \mu = 0, 1, 2, 3$ ■

PROPOSIÇÃO 3.1.4. Seja Q um sistema de referência geodésico e irrotacional em (M, g, D) . Então para cada $x \in M$ existe um sistema de coordenadas adaptado a Q , que é normal em x , isto é, $g_{\mu\nu}(x) = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ e $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x) = 0, \forall \mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$.

DEMONSTRAÇÃO (i) Seja γ uma curva integral de Q e $x = \gamma(t)$. Como sabemos existe uma vizinhança U de x tal que $Q|_U = \partial/\partial t$. Seja $\bar{X}_0 = \frac{\partial}{\partial t} \circ \gamma(t)$.

(ii) Sejam $\bar{X}_i, i = 1, 2, 3$ três vetores ortogonais e tais que $\bar{X} \in H_t$. Então $(\bar{X}_0, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ é uma base ortonormal em

$T_{\gamma(t)}M$. Sabemos da Proposição 4.2.3 que dados os $\bar{X}_i$, existem e são únicos os campos vetoriais F -paralelos sobre γ , tal que $\hat{X}_\mu(t) = \bar{X}_\mu$. Finalmente sejam X_μ os campos vetoriais em U tais que $X_\mu \circ \gamma = \hat{X}_\mu$.

(iii) Agora, como por hipótese Q é geodésico e irrotacional, podemos mostrar que $\alpha = g(Q, \cdot)$ é tal que $d\alpha = 0$ e portanto em U podemos escrever $\alpha = dt$. Então localmente U se separa em espaço $\times$ tempo. A hipersuperfície $S, t = \text{constante}$ é ortogonal a Q . Escolhemos agora coordenadas (x^i) , $i = 1, 2, 3$ em S tais que cada curva $x^i = v^i \lambda$ (onde λ é um parâmetro afim e $v^i \equiv g(\bar{X}_i, \frac{\partial}{\partial x^i})$) seja uma geodésica, temos

$$\bar{X}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x$$

(iv) Portanto na carta local $\{x^u\}$ em U , com $x^0 = t$ e x^i definido como acima temos $g_{uv}(x) = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Substituindo $x^i = v^i \lambda$ na equação das geodésicas obtemos que

$$r_{\mu\nu}^i(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

(v) Usamos agora o fato que Q é geodético e irrotacional. No referencial ortonormal em x as componentes do tensor de rotação ω são (com referência pg. 148).

$$\omega_{ij}(x) = \frac{1}{2}(\Gamma_{j0}^i - \Gamma_{i0}^j)(x) = 0$$

e segue que

$$\Gamma_{0j}^i(x) = \Gamma_{0i}^j(x) = 0; i, j = 1, 2, 3$$

Finalmente como $D_Q Q = 0$ e $Q_{;0}^0 = \partial/\partial x^0$ então $x^0 \circ \gamma$ é também uma curva geodésica e $\Gamma_{00}^0(x) = 0$.

Resulta que $\Gamma_{\alpha\beta}^i(x) = 0, \forall i, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ ■

OBSERVAÇÃO: Podemos mostrar também (ver Misner-Thorne-Wheeler [36], pg. 285) que na carta $\langle x^u \rangle$ em U , $\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha(x) \neq 0$.

Fica portanto justificada nossa afirmação acima de que o campo gravitacional está diretamente associado com o tensor de Riemann, e não com g ou D . A discussão acima sugere a

DEFINIÇÃO: 3.1.5. Um sistema de referência é dito *localmente inercial* se é geodésico e não está rodando.

Notamos também que em T_E a aceleração e a rotação de um sistema de referência Q em (M, g, D) são absolutas (Cap. IV, §). Com efeito só tem sentido falarmos em aceleração e rotação em relação a D . Tais conclusões estão em flagrante contradição com a afirmação de muitos textos de Relatividade Geral que afirmam

que aceleração e rotação são relativas nessa teoria, o que é evidentemente "non-sequitur" (ver por exemplo, Adler-Bazin - Schiffer [1], Eddington [15]).

3.2. DISCUSSÃO DO PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Vimos no §1 deste Capítulo que o Princípio de Relatividade Especial de Einstein deve ser identificado com a afirmação PR_2 que estabelece a equivalência dos sistemas inerciais do ponto de vista das leis da física.

Na Relatividade Geral não temos sistemas inerciais e seguramente não existe nenhuma equivalência entre todos os sistemas de referência, pois como já dissemos aceleração e rotação são absolutas. Os livros textos de Relatividade Geral fazem a afirmação de que os sistemas localmente inerciais (isto é, os sistemas de referência geodésicos e que não rodam) são equivalentes. Contudo como demonstraremos com um exemplo explícito tal afirmação em geral é falsa. De fato, veremos no §4 que existem variedades Lorentzianas que modelam muito bem o nosso espaço-tempo cosmológico e que possuem um campo vetorial tipo-tempo privilegiado V geodésico e que não roda que é distinguido de muitas maneiras. Em particular mostraremos que experiências mecânicas em qualquer outro referencial geodésico que não roda $Z \neq V$ permitem determinar a velocidade de Z em relação a V .

Concluimos portanto que não existe um Princípio de Relatividade Geral em T_E .

§4. O PRINCIPIO DE RELATIVIDADE NO UNIVERSO QUE VIVEMOS

4.1. ESPAÇO-TEMPO COSMOLÓGICO

O Universo físico que vivemos é bem representado pelas métricas do tipo Robertson-Walker (ver, por exemplo, Weinberg[58]). Em particular um modelo bem simples que pode representar a maioria das propriedades observadas do Universo^(*) é formulado como segue:

Sejam $M = \mathbb{R}^3 \times I$, onde $I \subseteq \mathbb{R}$, $R : I \rightarrow (0, \infty)$ dado por $t \mapsto R(t)$ uma função e definamos g em M considerando M como um subconjunto de $\mathbb{R}^4$ por

$$g = dt \otimes dt - R(t)^2 \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i \quad (4.1.1)$$

Então g é uma métrica Lorentziana em M e $\partial/\partial x^0$ ($x^0 = t$) é um campo vetorial em (M, g) . Então (M, g, D) orientado no tempo por $\partial/\partial x^0$ e orientada no espaço por $dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

(*) As regiões perto das grandes massas onde de acordo com a T_E a curvatura é forte são consideradas pequenas irregularidades sobre a curvatura de média.

é um espaço-tempo relativístico que no que segue será chamado *espaço-tempo cosmológico*, quando $I = (0, \infty)$.

PROPOSIÇÃO 4.1.2 Seja V um campo vetorial tipo-tempo, $g(V, V) = 1$, que aponta para o futuro e que é um auto-vetor do tensor de Einstein G no sentido que:

$$G(V, \cdot) = fg(V, \cdot) \quad (i)$$

para alguma função real f , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Então $V = \partial/\partial t$.

DEMONSTRAÇÃO . Primeiramente precisamos calcular o tensor de Einstein para a métrica dada em (4.1.1). Usando, por exemplo, as fórmulas de Dingle (ver Rindler, [42]) obtemos após muitos cálculos que

$$G = \frac{3\dot{R}^2}{R^2} dt \otimes dt, \text{ onde } \dot{R} = \frac{dR}{dt} \quad (ii)$$

Usando (ii) em (i) temos que;

$$\frac{3\dot{R}^2}{R^2} dt(V) dt = fg(V, \cdot) \quad (iii)$$

e então para cada ponto $x \in M$ temos,

$$dt(V)dt(x) = ag_x(V,), \text{ para } a \in \mathbb{R}, (a = \frac{f(x)R^2}{3\dot{R}^2}) \quad (iv)$$

Também $dt(V) \neq 0$ pois dt e V são tipo-tempo. Portanto de (iv) temos $dt(x) = bg_x(V,)$ para algum $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ (v), a equação (v) implica que $V(x) = e(\partial/\partial t)_x$ para algum $e \in \mathbb{R}, e \neq 0$, como V é normalizado e aponta para o futuro $e = 1$. Como o argumento acima vale, $\forall x \in M$, segue que

$$V = \partial/\partial t \quad \blacksquare$$

A proposição 4.1.2 tem notáveis consequências do ponto de nossa compreensão do Princípio de Relatividade. De fato, a proposição mostra que $V = \partial/\partial t$ é canonicamente privilegiado no sentido que pode ser definido somente em termos do tensor métrico g e o da orientação no tempo, sem nos referirmos a estruturas que $\mathbb{R}^4$ possui mas M não possui.

O campo V é chamado o *sistema de referência comóvel* e a razão é a seguinte. Sabemos que $G = T$ (equação de Einstein) e portanto o tensor de energia-stress é $\hat{T} = \frac{3}{R^2} \dot{R}^2 V \otimes V$. Logo a matéria do universo está comovendo com V . Fisicamente são os centros galácticos que são supostos seguirem as linhas integrais de V .

PROPOSIÇÃO 4.1.3 Sejam V o sistema de referência comóvel do

espaço-tempo cosmológico com métrica dada pela equação (4.1.1), e λ um observador em V e W um vizinho de γ em Z . Então

- (A) V é tempo próprio-sincronizável
- (B) V é geodésico e não roda
- (C) A 3-velocidade dos W 's relativamente a γ é $\dot{R}$

DEMONSTRAÇÃO (A) A 1-forma $\alpha = g(V, \cdot)$ fisicamente equivalente a V é $\alpha = dt$, de maneira que t é uma função tempo próprio para V .

(B) Verifica-se que $D_V V = 0$. Por outro lado $d\alpha = d^2 t = 0$ e portanto $d\alpha \wedge \alpha = 0$ e o sistema de referência é irrotacional.

(C) Para calcularmos a 3-velocidade usamos (ii) da Proposição 4.2.3. Temos então

$$F_{\gamma*} W = D_{\gamma*} W$$

e com alguns cálculos obtemos $D_{\gamma*} W = \dot{R}W$.

A interpretação de (C) na Proposição acima é que o Universo está em expansão. As galaxias recedem...

4.2. EXEMPLOS: DOIS SISTEMAS DE REFERÊNCIA. Z , V LOCALMENTE INERCIAIS E QUE NÃO SÃO EQUIVALENTES

Mostramos que $V = \partial/\partial t$ é canonicamente privilegiado, vamos agora investigar o seguinte problema. Seja

$$Z = \frac{(R^2 + u^2)^{1/2}}{R} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{R^2} \frac{\partial}{\partial x^1}; \quad u \text{ é uma constante} \quad (4.2.1)$$

um sistema de referência no espaço-tempo cosmológico. Então verifica-se facilmente que $D_Z Z = 0$ e que Z não roda. Portanto Z é um sistema localmente inercial de acordo com a definição 3.1.5, Capítulo V., e é também tempo-próprio sincronizável.

Temos a questão: É possível com experiências mecânicas realizadas em Z descobrir o movimento de Z em relação a V ? Podemos dar uma resposta a esta questão estudando o movimento de uma partícula livre em Z quando são dadas as condições iniciais do movimento. Precisamos antes de mais nada encontrar um sistema de coordenadas que seja naturalmente adaptado a Z . Notando que se γ é uma curva integral de Z , então sua equação paramétrica é:

$$\frac{dx^1_0}{dt} \gamma = \frac{u}{R(R^2 + u^2)^{1/2}} \quad (4.2.2)$$

escrevemos para as coordenadas $\langle t', x^{1'}, x^{2'}, x^{3'} \rangle$ naturalmente adaptados a Z .

$$x^{1'} = x^1 - u \int_0^t \frac{dt}{R(R^2 + u^2)^{1/2}}; x^{2'} = x^2; x^{3'} = x^3; t' = \int_0^t \frac{R dt}{(R^2 + u^2)^{-1/2}} - u x^{1'}$$

Obtemos então

$$g = dt' \otimes dt' - \bar{R}^2(t') \left[\frac{1-v^2(1-\bar{R}^2)}{1-v^2} \right] (dx^{1'} \otimes dx^{1'} + dx^{2'} \otimes dx^{2'} + dx^{3'} \otimes dx^{3'}) \quad (4.2.4)$$

onde $\bar{R}(t') = R(t(t'))$ e $v = R\left(\frac{dx^1}{dt}\right)_{t=0} = u/(1+u^2)^{1/2}$ é a velocidade métrica do sistema Z em relação do sistema V no instante $t = 0$.

A solução da equação das geodésicas tipo-tempo no sistema Z usando a métrica dada pela equação (4.2.4) e quando $R(t) = 1 + At + \dots$, $A \ll 1$ pode ser encontrada em Rodrigues[45].

Suponhamos que em $t' = 0$ temos uma partícula na origem do sistema de coordenadas $\langle t', x^{1'}, x^{2'}, x^{3'} \rangle$. Então para o movimento no plano $(x^{1'}, x^{2'})$ temos

(i) Se $v_{x^2}^{(0)} = 0$, então a aceleração medida em Z será

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_{x1'}}{dt'} = -A(1-v^2)^{1/2} v_{x1'}(1-v_{x1'}^2) \\ \frac{dv_{x2'}}{dt'} = 0 \end{array} \right.$$

(ii) Se $v_{x1'}(0) = 0$ então

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_{x1'}}{dt'} = vA v_{x2'}^2 / (1-v^2)^{1/2} \\ \frac{dv_{x2'}}{dt'} = -A v_{x2'}(1-v_{x2'}^2) / (1-v^2)^{1/2} \end{array} \right.$$

Estas equações quando comparadas com a derivada em relação ao tempo da (4.2.2) mostram que os sistemas V e Z não são equivalentes e como afirmamos é possível, em princípio, determinar a velocidade inicial v de Z em relação a V. As violações da equivalência são certamente muito pequenas, mas com o avanço da tecnologia podemos esperar que possamos observar a assimetria.

Este resultado justifica também a investigação das Teorias Neo-Lorentzianas de Rodrigues-Tiomno [47] onde supõe-se que a velocidade de rotação de um sólido em movimento roto-translacional livre é constante em relação ao tempo t do referencial

privilegiado.

CONCLUSÃO

A conclusão básica deste trabalho que acreditamos ficou demonstrada neste Capítulo V é que o Princípio de Relatividade entendido como PR_2 é uma aproximação no Universo físico que habitamos e que são bem vindas as experiências que tentem determinar como V acopla com os demais sistemas físicos em experiências realizadas em laboratórios modelados por campos vetoriais tipo-tempo como o Z acima. Os resultados dessas experiências como discutido por Rodrigues-Tiomno [47] e Tiomno-Maciel [33] e Santilli [50] servirão para construirmos teorias físicas mais adequadas para descrevermos os fenômenos da Natureza.

A P Ê N D I C E

§1. DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES UTILIZADAS NO TEXTO

1.1. PRODUTO SEMI-DIRETO

Sejam G e H dois grupos e seja $\text{Aut } G$ o grupo dos automorfismos de G . Seja $\psi: H \rightarrow \text{Aut } G$ um homomorfismo, tal que para cada $h \in H$, temos $\psi(h) \in \text{Aut } G$, que leva $g \in G$ em $\psi(h) \cdot g \in G$.

O produto semi-direto de G por H é o conjunto de pares $(g, h) \in G \times H$ munido da operação

$$(g_1, h_1) (g_2, h_2) = (g_1 \psi(h_1) g_2, h_1 \cdot h_2).$$

Verifica-se que o produto semi-direto de G por H é um grupo cujo elemento identidade é (ℓ_1, ℓ_2) onde ℓ_1 é identidade de G e ℓ_2 identidade de H . O elemento inverso de (g, h) é dado por $(g, h)^{-1} = (\psi(h)^{-1} g^{-1}, h^{-1})$. Denotamos o produto semi direto de G por H , por $G \otimes H$.

1.2. PSEUDOGRUPO

Seja E um espaço topológico, um *pseudogrupo* de transformações é um conjunto G_p de transformações que satisfaz as seguintes propriedades:

i) Cada $f \in G_p$ é um homeomorfismo de um conjunto aberto (chamado domínio de f) de S em outro conjunto aberto (chamado imagem de f) de S ;

ii) Se $f \in G_p$, então a restrição de f , a um subconjunto arbitrário do domínio de f , é um elemento de G_p ;

iii) Se $U = \bigcup_i U_i$ onde $U_i \subset S$, é um subconjunto aberto. Um homeomorfismo f de U em um conjunto aberto de S pertence a G_p se a restrição de f a U_i está em G_p , para todo i ;

iv) Para todo subconjunto aberto U de S , a transformação identidade de U pertence a G_p ;

v) Se $f \in G_p$ então $f^{-1} \in G_p$.

vi) Se $f \in G_p$ é um homeomorfismo de U em V e $f' \in G_p$ é um homeomorfismo de U' em V' , e se $V \cap U'$ é diferente do vazio, então o homeomorfismo

$$f' \circ f : f^{-1}(V \cap U') \rightarrow f'(V \cap U')$$

pertence a G_p .

1.3. GRUPÓIDE

Um conjunto de transformações K é um *grupóide* se e somente se

i) Para cada transformação $F : A \rightarrow B$ existe uma única transformação inversa $F^{-1} : B \rightarrow A$, tal que, $F^{-1} \in K$ e $F \circ F^{-1} = I_B$ e $F^{-1} \circ F = I_A$;

ii) Se $F : A \rightarrow B$ e $G : B \rightarrow C$ são elementos de K , então $G \circ F$ é um elemento de K .

1.4. OPERADOR ESTRELA DE HODGE

Seja L um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $(\cdot, \cdot)$. Suponhamos que a orientação de L é fixada.

Seja $\Lambda^p L$ o espaço vetorial dos p -vetores em L . Em geral, $\Lambda^p L$ ($2 \leq p \leq n$) consiste numa soma formal de p -vetores. Se $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ é uma base para L , então uma base para $\Lambda^p L$ é constituída pelos produtos exteriores

$$\ell_k = \ell_{k_1} \wedge \ell_{k_2} \wedge \dots \wedge \ell_{k_p}, \quad k = \{k_1 < \dots < k_p\}.$$

A dimensão de $\Lambda^p L$ é $\binom{n}{p}$. Observemos que $\Lambda^0 L = \mathbb{R}$, $\Lambda^1 L = L$, $\dots$, $\Lambda^n L = \mathbb{R}$.

Se f é um funcional linear, $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ demonstra-se que existe um único vetor v tal que $f(w) = (w, v)$.

Vamos definir o operador $*$, chamado *operador estrela de Hodge*, que é uma transformação linear

$$* : \Lambda^p L \rightarrow \Lambda^{n-p} L, \quad (1 \leq p \leq n)$$

dado por $\lambda \rightarrow * \lambda$. Este operador $*$ depende do produto interno e da orientação pré-fixados. O $(n-p)$ vetor $* \lambda$ é tal que, para cada λ fixo, definimos uma aplicação linear

$$f_\lambda : \Lambda^{n-p} L \rightarrow \Lambda^n(L), \quad \text{dada por } \mu \rightarrow \lambda \wedge \mu$$

isto é, $f_\lambda(\mu) = \lambda \wedge \mu$. Como f_λ é um funcional linear em $\Lambda^{n-p} L$ então existe um único $(n-p)$ vetor que denotaremos por $* \lambda$, tal que

$$f_\lambda(\mu) = (* \lambda, \mu).$$

1.5. ASSINATURA DA FORMA BILINEAR SIMÉTRICA

Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $h : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. Existe então uma base de V em relação a qual a matriz que representa h é diagonal, com elementos

na diagonal igual a $+1, -1, 0$. O número de elementos da diagonal positivos, negativos e zero é independente da particular escolha da base. Seja n_+ o número de elementos positivos da diagonal, n_- o número de elementos negativos e n_0 o número de zeros na diagonal. Chamaremos de *assinatura da forma bilinear simétrica* a tripla (n_+, n_-, n_0) .

Observemos que se h é não singular então os elementos da diagonal são não nulos. Neste caso dizemos que h é *métrica semi-Riemanniana* e a assinatura de h é $(n_+, n_-, 0)$. Se h é positiva definida então dizemos que h é *métrica Riemanniana* e a assinatura de h é $(n_+, 0, 0)$ ($n_+ = n$).

1.6. HOMOTOPIA

DEFINIÇÃO 1.6.1. Sejam X, Y espaços topológicos e A um subespaço de X , $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações tais que $f|_A = g|_A$. Dizemos que f é *homotópica a g relativamente a A* , e indica-se $f \approx g \text{ rel } A$ se existe uma aplicação

$$F : X \times I \rightarrow Y \quad \text{que satisfaz}$$

- i) $F(x, 0) = f(x) \quad , \quad \forall x \in X$
- ii) $F(x, 1) = g(x) \quad , \quad \forall x \in X$
- iii) $F(x, t) = f(x) = g(x) \quad , \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad \forall t \in I$.

DEFINIÇÃO 1.6.2. Se X é um espaço topológico tal que a aplicação identidade de X , I_X é homotópica a uma função constante em X , então dizemos que X é *contrátil*.

DEFINIÇÃO 1.6.3. Seja X um espaço topológico, dizemos que X é *simplesmente conexo*, se X é conexo por caminhos e seu grupo fundamental é trivial ($\pi_1(X) = 0$, onde $\pi_1(X)$ é o grupo das classes de homotopia de laços em X).

PROPOSIÇÃO 1.6.4. Se X é um espaço contrátil, então X é simplesmente conexo.

1.7. GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES

DEFINIÇÃO 1.7.1. Um grupo G é um *grupo de Lie* se G é uma variedade tal que a operação de grupo $(a,b) \in G \times G \rightarrow ab^{-1} \in G$ é uma aplicação diferenciável de $G \times G$ em G .

DEFINIÇÃO 1.7.2. Um grupo G é um *grupo topológico* se G tem uma topologia tal que: i) g^{-1} é contínua para g em G ; ii) a aplicação de $G \times G \rightarrow G$ dada por $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2$ é contínua. ($G \times G$ possui a topologia produto).

DEFINIÇÃO 1.7.3. Sejam G um grupo topológico e X um espaço

topológico (Hausdorff). Dizemos que o grupo G age sobre X como um grupo de transformações se existe uma aplicação contínua $\theta : G \times X \rightarrow X$, dada por $\theta(g, x) \rightarrow gx$, satisfazendo as seguintes condições:

- i) $\theta(e, x) = x$, $\forall x \in X$ onde e é a identidade de G .
- ii) $\theta(g_1, (g_2, y)) = \theta(g_1 g_2, y)$, $\forall g_1, g_2 \in G$ e $\forall x \in X$.

A aplicação θ é chamada uma ação de g sobre X . O espaço X junto com a ação θ é chamado G -espaço (à esquerda).

Quando θ está explícita no contexto, usamos $g(x)$ ou gx no lugar de $\theta(g, x)$. Neste caso, as condições i) e ii) acima podem ser reescritas como $e(x) = x$ e $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$. A maneira análoga definimos ação de G sobre X à direita ($\theta: X \times G \rightarrow X$).

DEFINIÇÃO 1.7.4. Uma ação de G em Y é efetiva (livre) se $gy = y$, para todo y , implica que $g = e$.

Para cada elemento g de G , a aplicação de Y em Y dada por $y \rightarrow gy$ é um homeomorfismo.

Dada uma ação contínua de G em Y , esta induz uma representação h de G no grupo de homeomorfismo de Y , dada por $g \rightarrow h(g)$, onde $h(g)y = gy$ é um homeomorfismo de Y . Reciprocamente, dada uma representação h de G no grupo de homeomorfismo de Y , $g \rightarrow h(g)$, esta induz uma ação de G em Y dada por $(g, y) \rightarrow h(g)y$.

1.8. FIBRADOS

Sejam E, X espaços de Hausdorff, G um grupo topológico e Y um espaço topológico.

DEFINIÇÃO 1.8.1. Um *fibrado* com grupo estrutural G e fibra Y é um conjunto $\beta = \{E, p, X, Y, G, \{\phi_i\}\}$ onde: E é chamado espaço total e X é dito espaço base.

i) a aplicação $p, p: E \rightarrow X$, chamada projeção, é contínua e sobrejetora;

ii) Existe uma cobertura aberta $(U_i)_{i \in I}$ de X , tal que

$$\begin{array}{ccc} \phi_i : U_i \times Y & \xrightarrow{\quad} & p^{-1}(U_i) \\ & \searrow \pi_1 \quad \swarrow p & \\ & U_i & \end{array}$$

onde ϕ_i são homeomorfismos e o diagrama comuta, isto é, $p\phi_i(x, y) = x = \pi_1(x, y)$.

Além disso se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, temos

$$(U_i \cap U_j) \times Y \xrightarrow[\phi_j]{\phi_i} p^{-1}(U_i \cap U_j)$$

Para cada elemento x de $U_i \cap U_j$, definimos um homeomorfismo

$$\phi_{i,x} : Y \rightarrow p^{-1}(x) \text{ dado por}$$

$$\phi_{i,x}(y) = \phi_i(x,y).$$

A partir daí, definimos

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G, \text{ por } g_{ij}(x) = \phi_{i,x}^{-1} \phi_{j,x}$$

$$\text{então } g_{ij}(x)(y) = \phi_{i,x}^{-1} \phi_{j,x}(y) = \phi_i^{-1} \phi_j(x,y).$$

$g_{ij}(x)$ é um homeomorfismo de Y , portanto corresponde a um elemento de G , (pois G atua livremente em Y)

1.8.2. CONSEQUÊNCIAS

i) $g_{ii}(x) = e$, e elemento neutro de G , para todo x elemento de U_i .

$$\text{ii) } g_{ij}(x)g_{jk}(x) = g_{ik}(x).$$

DEFINIÇÃO 1.8.3. Se o espaço base X pode ser coberto por um único aberto U , $X = U$, tal que

$$\begin{array}{ccc}
 X \times Y & \xrightarrow{\quad} & p^{-1}(x) \\
 \pi_1 \searrow & & \swarrow p \\
 & X &
 \end{array}$$

onde ϕ é o homeomorfismo e o diagrama comuta, então dizemos que o fibrado é *trivial*.

DEFINIÇÃO 1.8.4. Se o espaço base X pode ser coberto por um único aberto U , e se o grupo estrutural $G = \{e\}$ então dizemos que o fibrado é um *fibrado produto*.

Sejam β e β' dois fibrados com mesma fibra e mesmo grupo estrutural. Uma aplicação $h: \beta \rightarrow \beta'$ significa uma função contínua $h: B \rightarrow B'$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) h leva cada fibra Y_x de B homeomorficamente sobre a fibra $Y_{x'}$ de B' , isto induz uma função contínua $\bar{h}: X \rightarrow X'$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{h} & B' \\
 p \downarrow & & \downarrow p' \\
 X & \xrightarrow{\bar{h}} & X'
 \end{array} \quad \bar{h}p = p'h$$

ii) Se $x \in V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k)$ e $h_x: Y_x \rightarrow Y_{x'}$ é a função induzida por h ($x' = \bar{h}(x)$) então a função

$$\bar{g}_{kj}(x) = \phi_{k,x'}^{-1} h_x \phi_{j,x} = p'_k h_x \phi_{j,x}$$

de Y em Y coincide com a operação por um elemento de G e

iii) a função

$$\bar{g}_{kj} : v_j \cap \bar{h}^{-1}(v'_k) \rightarrow G$$

assim obtida é contínua.

DEFINIÇÃO 1.8.5. Dois fibrados β e β' que tem o mesmo espaço base, fibra e grupo são ditos *equivalentes* se existe uma aplicação $h : \beta \rightarrow \beta'$ que induz a função identidade na base comum.

Observemos que se B é um fibrado trivial então B é sempre equivalente a um fibrado produto

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h} & F \times X \\ p \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ X & \xrightarrow{id} & X \end{array}$$

Esta equivalência depende apenas de como h leva cada fibra Y_x de B na fibra Y_x de $F \times X$.

Seja M uma variedade (diferenciável) e G um grupo de Lie.

DEFINIÇÃO 1.8.6. Um *fibrado (diferenciável) principal* sobre M

com grupo G consiste de uma variedade P e uma ação de G sobre P satisfazendo as seguintes condições:

- i) G age livremente em P , à direita $P \times G \rightarrow P$,
 $(u, a) \rightarrow ua \in P$.
- ii) M é o quociente de P pela relação de equivalência induzida por G , $M = P/G$, e a projeção canônica $\pi : P \rightarrow M$ é diferenciável.
- iii) P é localmente trivial, isto é, para cada ponto x de M , existe uma vizinhança U de x , tal que $\pi^{-1}(U)$ é isomorfo a $U \times G$ no sentido que há um difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ tal que $\psi(U) = (\pi(u), \varphi(u))$ onde φ é a aplicação de $\pi^{-1}(U)$ em G que satisfaz $\varphi(ua) = (\varphi(u))a$ para todo $u \in \pi^{-1}(U)$ e $a \in G$.

Um fibrado principal é usualmente denotado por $P(M, G, \pi)$ em $P(M, G)$ ou simplesmente por P . Chamamos P de espaço total, M de espaço base, G de grupo estrutural e π de projeção.

Se M é uma variedade, o fibrado principal de M é o fibrado principal associado ao fibrado tangente TM ,

$$\begin{array}{c} P_{TM} \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$$

onde $P_{TM} = \bigcup_{p \in M} \{(p, v_1, \dots, v_n) / (v_1, \dots, v_n) \text{ é a base do fibrado tangente a } M \text{ em } p\}$.

1.9. TENSORES NA VARIEDADE

Sejam M uma variedade (diferenciável) de dimensão n , $T_p M$ e $T_p^* M$, respectivamente, o espaço tangente e o espaço cotangente a M no ponto p .

Um *tensor* do tipo (r,s) em p é uma transformação $(r+s)$ -linear, $\theta: T_p^* M \times T_p^s M \rightarrow \mathbb{R}$. A coleção de todos os tensores do tipo (r,s) em um ponto $p \in M$ forma um espaço vetorial, que indicamos por $T_p^{(r,s)} M$. Os elementos de $T_p^{(r,0)} M$ são chamados *r-contratensores*; os elementos de $T_p^{(0,s)} M$ são ditos *s-cotensores*.

Observemos que $T_p^{(1,0)} M = T_p M$ e $T_p^{(0,1)} M = T_p^* M$.

ANTI-SIMETRIZAÇÃO DO TENSOR θ

Um tensor é *antissimétrico* em um par de argumentos se e somente se os seus valores mudam de sinal quando estes argumentos são trocados.

Por exemplo, se $\theta \in T_p^{(2,2)} M$, então $\theta(\omega, \omega'; X, X')$, (onde $\omega = a_k dx_k$ e $X = b_i \frac{\partial}{\partial x^i}$), então θ é antissimétrico em seus dois primeiros contra-argumentos, se temos

$$\theta(\omega, \omega'; X, X') = -\theta(\omega', \omega; X, X')$$

Consideremos agora $\theta \in T_P^{(1,4)}(M)$, então $\theta(v, X, Y, Z, W)$. A antissimetrização de θ com relação a segunda e quarta co-variáveis é o tensor

$$\begin{aligned} \theta_2 a_4 = \frac{1}{3!} [& \theta(v, X, Y, Z, W) - \theta(v, X, Y, W, Z) + \\ & + \theta(v, X, W, Y, Z) - \theta(v, X, W, Z, Y) + \theta(v, X, Z, W, Y) - \\ & - \theta(v, X, Z, Y, W)] . \end{aligned}$$

1.10. FLUXO

O *fluxo* de um campo vetorial X , ($X \in TM$) é uma coleção de aplicações $\{\mu_s : E_s \rightarrow M / s \in \mathbb{R}\}$ tal que $\mu_s m = \gamma_m s$ para cada $m \in E_s$, onde γ_m é a curva integral de X que começa em m ($\gamma_0 = m$). Os pontos m e $\mu_s m$ estão sempre na mesma curva integral de X , e $\mu_s m - m = s$. μ_s é uma função que "transporta" cada ponto ao longo da curva integral por uma quantidade igual ao parâmetro s . O domínio E_s é o conjunto daqueles pontos m tais que γ_m está definida para s .

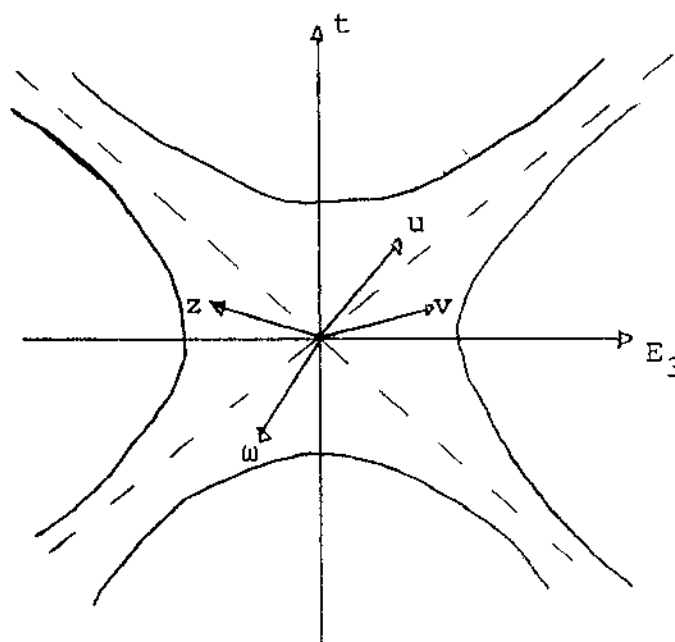
Observamos que $\mu_0 : E_0 \rightarrow M$ é a função identidade, desde que $\gamma_m^0 = m$.

§2. O ESPAÇO DE MINKOWSKI E OS GRUPOS DE LORENTZ E POINCARÉ (*)

2.1. ESPAÇO DE MINKOWSKI

DEFINIÇÃO 2.1.1. O espaço de Minkowski é um espaço vetorial M de dimensão 4, sobre o corpo dos reais, com uma métrica semi-euclidiana com assinatura $\langle 1,3,0 \rangle$, (ver Apêndice 1.5).

DEFINIÇÃO 2.1.2. Seja um vetor u em M . Dizemos que u , é *tipo-tempo* se $u \cdot u > 0$, *tipo luz* ou *vetor nulo* se $u \cdot u = 0$ ($u \neq 0$) e *tipo-espaço* se $u \cdot u < 0$ ou $u \equiv 0$. Geometricamente



u, w representam os vetores tipo-tempo; z, v são vetores tipo-espaço; os vetores nulos são aqueles que estão localizados nas bissetrizes. Se u é tipo-tempo então $\|u\| = \sqrt{u^2}$, se u é tipo-

(*) Este estudo foi desenvolvido em conjunto com a Professora Vera Lúcia Xavier Figueiredo.

espaço $\|u\| = \sqrt{-u^2}$ se u é tipo-luz, então $\|u\| = 0$.

DEFINIÇÃO 2.1.3. Seja S um subespaço vetorial de M , dizemos que o caráter causal de S é:

- i) é *tipo-espaço* se todos os seus vetores são tipo-espaço ;
- ii) é *tipo-tempo* se S contém um vetor tipo-tempo ;
- iii) é *tipo-luz* se S contém um vetor tipo-luz v , tal que $v \cdot u = 0$, para todo u em S .

Observemos que o conjunto de todos os vetores tipo-tempo não é um subespaço vetorial de M ; o conjunto de todos os vetores tipo-espaço também não é um subespaço vetorial em M .

Dado um vetor $u \in M$, o conjunto de vetores ortogonais a u é formado pelos vetores $v \in M$ tais que $u \cdot v = 0$.

2.1.4. PROPRIEDADES

- i) S é tipo-tempo $\iff S^\perp$ é tipo espaço ;
- ii) S é tipo-luz $\iff S \cap S^\perp \neq \{0\} \iff S^\perp$ é tipo luz ;
- iii) Seja S um subespaço qualquer de M , um vetor t em S é um tipo-tempo se e somente se $[t^\perp]$ é tipo-espaço ($[t^\perp]$ = subespaço gerado por $t^\perp$);
- iv) Dois vetores tipo luz são ortogonais se e somente se

eles são proporcionais;

v) Todo vetor ortogonal a um vetor tipo-luz ℓ é tipo espaço ou é proporcional a ℓ ;

vi) Três vetores tipo-espaço ortogonais entre si são linearmente independentes;

vii) Existem apenas dois vetores tipo-espaço ortogonais entre si e tal que ambos sejam simultaneamente ortogonais a um vetor tipo-luz;

viii) Existem apenas três vetores tipo-espaço linearmente independentes que são ortogonais entre si;

xi) Os vetores ortogonais a um vetor tipo-tempo são tipo-espaço e formam um subespaço tridimensional de M .

Podemos concluir que cada subespaço vetorial S de M é precisamente um dos seguintes: tipo-espaço, tipo-luz ou tipo-tempo. Além disso, todo vetor $v \in M$, pode ser escrito na forma

$$v = y + \alpha z$$

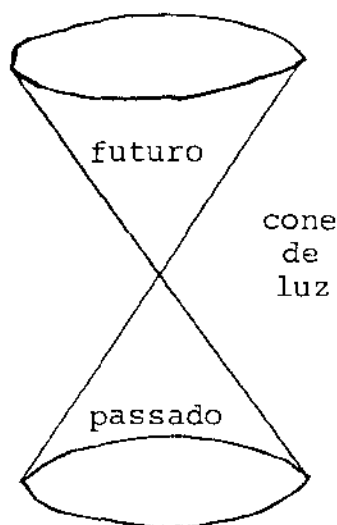
onde z é tipo tempo, y é tipo espaço, $y \cdot z = 0$, e α é um número real.

2.1.5. RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA EM M

Seja τ um conjunto de todos os vetores tipo-tempo de M . Definimos uma relação de equivalência $\uparrow$ em τ , da seguinte maneira

$$\text{para } u, v \in \tau, \quad u \equiv v \pmod{\uparrow} \iff u \cdot v > 0.$$

O espaço quociente $\tau/\uparrow$ contém exatamente dois elementos. Escolhemos um destes elementos como direção positiva do tempo, então dizemos M está orientada no tempo. O elemento escolhido de $\tau/\uparrow$ é chamado *futuro* e o outro é chamado *passado*. O conjunto de todos os elementos tipo-luz forma um cone chamado *cone de luz*, veja a figura abaixo



O conjunto dos vetores tipo-tempo está localizado dentro do cone de luz, este conjunto é separado do conjunto de vetores tipo-espaço pelos vetores tipo-luz.

2.1.6. DESIGUALDADE DE SCHWARZ

PROPOSIÇÃO. Se u e v são dois vetores ambos tipo-espaco (tipo-tempo) tais que o subespaco gerado por u e v é constituído de vetores tipo-espaco (tipo-tempo), então a desigualdade de Schwarz vale na sua forma usual, isto é,

$$(u \cdot v) \leq u^2 \cdot v^2$$

A demonstração é feita de maneira análoga a realizada em um espaco vetorial euclidiano, utilizando aqui o fato que $(\alpha u + v)^2 \leq 0$, $((\alpha u + v)^2 \geq 0)$.

Observemos que a desigualdade de Schwarz é válida na forma inversa em muitos casos, por exemplo:

i) Se u e v são dois vetores tipo-tempo que pertencem ao cone de luz, teremos

$$(u \cdot v)^2 \geq u^2 \cdot v^2$$

sem perda de generalidade podemos considerar

$$u = (u^0, 0, 0, 0) \quad ; \quad u^2 = (u^0)^2 > 0$$

$$v = (v^0, v^1, v^2, v^3) \quad ; \quad v^2 = (v^0)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2 > 0$$

Se u e v se localizam na metade superior (inferior) do cone então $u^0 > 0$ e $v^0 > 0$ ($u^0 < 0$ e $v^0 < 0$) e $u^0 v^0 > 0$. Se eles se localizam em metades distintas então, por exemplo, $u^0 > 0$ e $v^0 < 0$ temos $u^0 v^0 < 0$. Mas em ambos os casos $(u^0 v^0)^2 > 0$. Então:

$$(1) (u \cdot v)^2 = (u^0 v^0)^2$$

$$(2) u^2 \cdot v^2 = (u^0 v^0)^2 - (u^0 v^1)^2 - (u^0 v^2)^2 - (u^0 v^3)^2,$$

portanto, comparando-se (1) e (2) temos

$$(u \cdot v) \geq u^2 v^2 \quad \text{então} \quad |u \cdot v| \geq \|u\| \|v\|.$$

ii) Se pelo menos um dos dois vetores u, v é tipo-luz, é trivial que

$$(u \cdot v)^2 \geq u^2 \cdot v^2$$

iii) Se ambos os vetores u e v são tipo-espço, mas tais que u e v pertencem a subespaços vetoriais distintos, $u \in S_1$, $v \in S_2$ não podemos garantir que vale a desigualdade de Schwarz. Por exemplo, se tomarmos $u = (0, 1, 0, 0)$ e $v = (v^0, v^1, v^2, v^3)$ tal que $(v^0)^2 \geq (v^2)^2 + (v^3)^2$ (1),

$$\text{verificamos que, } (u \cdot v) \geq u^2 \cdot v^2$$

Observemos que os subespaços S_1 e S_2 são distintos, pois se u e v pertencem a um mesmo subespaço tipo-espaço S , então existiria um vetor $t = (t^0, t^1, t^2, t^3)$ tipo-tempo tal que $t \in S^1$ (ver propriedade (1.1.4)(iii))), então

$$t \cdot u = 0 \rightarrow t^1 = 0 \quad (2)$$

$$t \cdot v = 0 \rightarrow t^0 v^0 - t^1 v^1 - t^2 v^2 - t^3 v^3 = 0 \rightarrow t^0 v^0 - t^2 v^2 - t^3 v^3 = 0$$

$$\rightarrow t^0 v^0 = t^2 v^2 + t^3 v^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow (t^0 v^0)^2 = (t^2 v^2)^2 + (t^3 v^3)^2 - 2t^2 v^2 t^3 v^3 \quad (3)$$

$$\text{Como } t \text{ é tipo-tempo então } (t^0)^2 > (t^2)^2 + (t^3)^2 \quad (4)$$

De (1) e (4), obtemos

$$\begin{aligned} (t^0)^2 (v^0)^2 &\geq (v^2)^2 + (v^3)^2 ((t^2)^2 + (t^3)^2) = \\ &= (v^2 t^2)^2 + (v^2 t^3)^2 + (v^3 t^2)^2 + (v^3 t^3)^2 \end{aligned}$$

Além disso, como

$$(t^0 v^0)^2 = (t^2 v^2)^2 + (t^3 v^3)^2 + 2t^2 v^2 t^3 v^3.$$

Então

$$2t^2 v^2 t^3 v^3 \geq (v^3 t^2)^2 + (v^2 t^3)^2.$$

Logo

$$(v^3 t^2 + v^3 t^3)^2 \leq 0 \quad (\text{absurdo}).$$

Portanto, u e v pertencem a subespaços distintos.

2.1.7. DESIGUALDADE TRIANGULAR

No espaço vetorial de Minkowski nem sempre a desigualdade triangular é válida no sentido usual

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad .$$

Se nós tivermos dois vetores u e v para os quais a desigualdade de Schwarz vale no sentido usual

$$(u \cdot v)^2 \leq u^2 \cdot v^2$$

então a desigualdade triangular é válida no sentido usual, pois

$$\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = u^2 + v^2 + 2(u \cdot v) \quad (1)$$

Como

$$(u \cdot v)^2 \leq u^2 \cdot v^2 \quad \text{e} \quad (u \cdot v)^2 \geq 0$$

então temos que $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$.

Além disso

$$u \cdot v \leq |u \cdot v|$$

e

$$u^2 \leq \|u\|^2$$

substituindo em (1) temos que

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Logo

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Mas, se nós estivermos trabalhando, por exemplo com dois vetores tipo-tempo caso (1) anterior, para os quais

$$|(u \cdot v)| \geq \|u\|^2 \|v\|^2, \quad \text{com } u^2 > 0, \quad v^2 > 0$$

a desigualdade triangular é válida no sentido inverso,

$$\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|.$$

Vamos supor que u e v se localizem na mesma metade do cone de luz, por exemplo $u_0 > 0$ e $v_0 > 0$, então

$$\|u + v\|^2 = \pm (u + v)^2 = \pm (u^2 + v^2 + 2(u \cdot v)) \quad (2)$$

$$u^2 = \|u\|^2, \quad v^2 = \|v\|^2.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade que os vetores são:

$$u = (u^0, 0, 0, 0) \quad , \quad \text{com } u^0 > 0$$

$$v = (v^0, v^1, v^2, v^3) \quad , \quad \text{com } v^0 > 0 \quad \text{e} \quad (v^0)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2 > 0$$

então

$$u \cdot v = u^0 v^0 = |u \cdot v|.$$

Voltando a equação (2) , temos

$$\|u + v\|^2 \geq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Então

$$\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$$

2.2. TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

DEFINIÇÃO 2.2.1. Uma aplicação linear, $L : M \rightarrow M$ é dita uma

transformação de Lorentz se para qualquer $u \in M$, temos que $Lu \cdot Lu = u \cdot u$.

Sejam u, v vetores quaisquer de M , então

$$L(u + v) \cdot L(u + v) = (u + v) \cdot (u + v), \text{ ou seja}$$

$$Lu \cdot Lu + 2Lu \cdot Lv + Lv \cdot Lv = u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v,$$

temos então

$$Lu \cdot Lv = u \cdot v.$$

Portanto uma transformação de Lorentz preserva o produto interno.

DEFINIÇÃO 2.2.2. Sejam L_1 e L_2 duas transformações de Lorentz, definimos

$$(L_1 \cdot L_2)(u) = L_1(L_2(u)).$$

O conjunto das transformações de Lorentz, munido com a operação acima tem estrutura de grupo, que é chamado grupo de Lorentz $\mathcal{L}$. É claro que a identidade é uma transformação de Lorentz e como L é não singular então existe a transformação inversa L^{-1} .

Utilizando a notação introduzida em (2.1.5), uma

transformação de Lorentz é dita *ortocrona* se $Lu \equiv u \pmod{\uparrow}$ para todo $u \in \tau$, caso contrário dizemos que L é *antícrona*.

Uma transformação de Lorentz preserva a *orientação* do espaço de Minkowski se para cada base (ortogonal) $\{\ell^\alpha\}$ de M , a matriz mudança de base de $\{\ell^\alpha\}$ para a base $\{L\ell^\alpha\}$ tem determinante positivo ($\det > 0$).

Se L é uma transformação de Lorentz tal que L é ortocrona e L preserva a orientação, então dizemos que L é *própria*. Uma transformação de Lorentz própria preserva a direção no tempo de seus vetores tipo-tempo e a orientação definida pelos três vetores tipo-espaço.

2.2.3. OBSERVAÇÕES

i) Como $Lu \cdot Lu = u \cdot u$ então $\det L = \pm 1$;

ii) Se a matriz da transformação linear L é dada por $[L_j^i]$, então $|L_0^0| \geq 1$;

iii) O grupo de Lorentz $\mathcal{L}$ tem portanto quatro componentes conexas:

$\mathcal{L}_+^\uparrow$, tais que $L_0^0 \geq 1$ e $\det L = 1$

$\mathcal{L}_+^\downarrow$, tais que $L_0^0 \leq -1$ e $\det L = 1$

$\mathcal{L}_-^\uparrow$, tais que $L_0^0 \geq 1$ e $\det L = -1$

$\mathcal{L}_-^\downarrow$, tais que $L_0^0 \leq -1$ e $\det L = -1$

Destas componentes conexas a única que é um subgrupo de $\mathcal{L}$ é $\mathcal{L}_+^\uparrow$ que contém a identidade. A inversão espacial, I_s , é um elemento de $\mathcal{L}_-^\uparrow$, $I_s(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$. A inversão temporal I_t , é um elemento de $\mathcal{L}_-^\downarrow$, $I_t(x^0, x^1, x^2, x^3) = (-x^0, x^1, x^2, x^3)$. A inversão espaço temporal I_{st} é um elemento de $\mathcal{L}_+^\downarrow$.

$\mathcal{L}$ possui subgrupos invariantes, tais como:

$\mathcal{L}_+^\uparrow$, é chamado subgrupo Lorentz próprio ortocrono ;

$\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$, subgrupo Lorentz próprio (ortocrono e anticrono)

$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$, subgrupo Lorentz ortocoro (preserva a orientação do tempo).

2.3. O GRUPO DE POINCARÉ OU GRUPO DE LORENTZ GENERALIZADO

DEFINIÇÃO 2.3.1. Seja L uma transformação de Lorentz e $a \in M$, um vetor qualquer, definimos

$$P(x) = Lx + a.$$

P é dita uma transformação de Poincaré, indicamos $P = (a, L)$.

A transformação identidade pode ser indicada por $P_I = (0, I)$. Vamos definir uma operação no conjunto P das transformações de Poincaré, para P_1 e $P_2 \in P$, se $P_1 = (a_1, L_1)$, $P_2 = (a_2, L_2)$, então

$$P_2 P_1 = (a_2 + L_2 a_1, L_2 L_1) \quad \text{ou seja, se}$$

$$P_1(x) = x' \quad \text{e} \quad P_2 P_1(x) = x'' \quad \text{então}$$

$$x'' = P_2 P_1(x) = P_2(P_1(x)) = P_2(x') = L_2 x' + a_2 =$$

$$= L_2(L_1 x + a_1) + a_2 = L_2 L_1 x + L_2 a_1 + a_2.$$

O conjunto P com esta operação é um grupo, chamado *grupo de Poincaré* ou *grupo de Lorentz generalizado*.

É interessante observarmos que P é o produto semi-direto do grupo das translações em M , pelo grupo de Lorentz — toda transformação de Poincaré $P = (a, L)$ pode ser escrita de maneira única como o produto de uma transformação de Lorentz $(0, L)$ por uma translação pura (a, I)

$$(a, L) = (a, I)(0, L)$$

mas as translações puras não comutam com as transformações de Lorentz, logo $P = T^4 \otimes \mathcal{L}$ (ver Lopes [32]).

§3. BASES COORDENADAS E NÃO COORDENADAS - TENSOR CURVATURA

3.1. BASES COORDENADAS E NÃO COORDENADAS

Seja M uma variedade diferenciável. Para cada ponto $p \in M$, consideremos uma carta local (U, x) , $x = \langle x^i \rangle$, $x^i: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$, (U subconjunto aberto de M), $x^i(p)$ são as coordenadas do ponto $p \in U$. x induz uma base para o espaço tangente $T_p M$, dada por $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, n$. Chamaremos esta base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_p$, $i=1, \dots, n$ de base coordenada.

Nem toda base é uma base coordenada. Qualquer conjunto de n -vetores linearmente independentes em $T_p M$ forma uma base para $T_p M$. Por exemplo a base $\beta = \{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi}\}$ de coordenadas esféricas é uma base com coordenada $\mathbb{R}^3$; mas se tomarmos a base $\beta' = \{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\}$ não é uma base coordenada.

A base $\beta = \{X_1, \dots, X_n\}$ é uma base coordenada se o colchete de Lie de dois quaisquer destes vetores é igual a zero

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i = 0.$$

Dada uma distribuição n -dimensional de campos vetoriais

em um aberto $U \subset M$, $X_1, \dots, X_n$, quando existe um conjunto de funções coordenadas $x^1, \dots, x^n$, definidas em uma vizinhança $V \subset U$ tal que

$$X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

para todo $i = 1, \dots, n$ e para todo $p \in V$?

A resposta está no teorema de Frobenius.

TEOREMA DE FROBENIUS. Seja M uma variedade $\mathbb{C}^\infty$ de dimensão n , e sejam $X_1, \dots, X_n$ um conjunto de campos vetoriais linearmente independentes em uma vizinhança U do ponto $p \in M$. Então existe um conjunto de funções coordenadas $x^1, \dots, x^n$ definidas em uma vizinhança V de p com $V \subset U$ e $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ em V para todo i , se e somente se $[X_i, X_j] = 0$ para todo i e todo j .

Se U e V são dois campos vetoriais em M , definimos

$$[U, V] = UV - VU, \text{ ou seja}$$

$$[U, V]f = U(Vf) - V(Uf).$$

Além disso, o colchete de Lie tem a propriedade

$$[U, V]fg = f[U, V]g + g[U, V]f \quad (3.1.2)$$

então $[U,V]$ é um campo vetorial.

Se considerarmos uma base coordenadas $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$, e se $U = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $V = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ então

$$[U,V] = (u^i \frac{\partial}{\partial x^i} v^k - v^j \frac{\partial}{\partial x^j} u^k) \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (3.1.3)$$

Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma base não coordenada e se $U = a^i x_i$ e $V = b^j x_j$ então

$$[U,V] = \{a^i (x_i b^k) - b^i (x_i u^k) + a^i b^j C_{ij}^k\} x_k \quad (3.1.4)$$

onde as funções C_{ij}^k , chamadas coeficientes de estrutura da base $\{x_1, \dots, x_n\}$, são definidas por

$$[x_i, x_j] = C_{ij}^k x_k \quad (3.1.5)$$

Em uma base geral, os C_{ij}^k não são nulos. Se $C_{ij}^k = 0$, então a base é uma base coordenada.

3.2. TENSOR CURVATURA EXPRESSO EM BASE COORDENADA E BASE NÃO COORDENADA

Seja $X(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores em

uma variedade Lorentziana. Seja D a conexão afim definida em M . $[,]$ o colchete de Lie.

DEFINIÇÃO 3.2.1. A curvatura R da variedade M é uma lei que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = D_Y D_X Z - D_X D_Y Z - D_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Em uma base arbitrária $\{e_j\}$, $j = 1, \dots, n$ as componentes de R são dadas por

$$\begin{aligned} R_{ikl}^j = e_k(\gamma_{li}^j) - e_l(\gamma_{ki}^j) + \gamma_{km}^i \gamma_{li}^m - \gamma_{lm}^j \gamma_{ki}^m - \\ - C_{kl}^m \gamma_{mi}^j \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

onde os γ_{jk}^i são os símbolos da conexão e os C_{kl}^m são os coeficientes de estrutura de Cartan (ver 3.1.5).

Se nós estivermos trabalhando com uma base coordenada $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$, $i = 1, \dots, n$, onde $C_{kl}^m = 0$ para todo m, k, l então as componentes do tensor curvatura K , tomam a forma

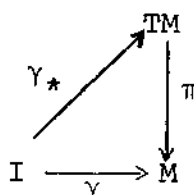
$$R_{ikl}^j = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{li}^j - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{ki}^j + \Gamma_{km}^i \Gamma_{li}^m - \Gamma_{lm}^j \Gamma_{ki}^m \quad (3.2.3)$$

Curiosamente isto tem causado algumas interpretações errôneas na Teoria da Relatividade Geral quando se passa a descrição de um campo de gravitação de uma base coordenada para outra base não coordenada (ver o caso de Disco Girante no livro de H. Arzêlies [3]). A solução correta do problema está no Capítulo V, § 2).

§4. CAMPOS TENSORIAIS SOBRE APLICAÇÕES

4.1. Sejam M, N variedades $\mathbb{C}^\infty$.

Seja $\gamma : I \rightarrow M$, ($I \subset \mathbb{R}$) uma curva. Queremos definir um campo de vetores ao longo de γ . Denotamos por $\gamma_* u$ o vetor tangente a γ em γu : Consideremos o diagrama:

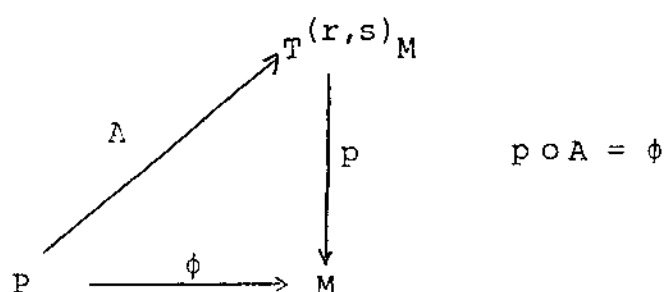


dizemos que γ_* é um campo de vetores (tangentes) ao longo de γ , se $(\pi\gamma_*)u = \gamma u$.

Observemos que se a curva γ tem auto-intersecção transversal — ($\gamma u_1 = \gamma u_2$ para $u_1 \neq u_2$), teremos $\gamma_* u_1 \neq \gamma_* u_2$ (no mesmo ponto $\gamma u_1 = \gamma u_2$). Então o campo de vetores tangentes à curva γ nem sempre é a restrição de um campo de vetores de M .

Vamos estender o conceito de campo vetorial para campo tensorial.

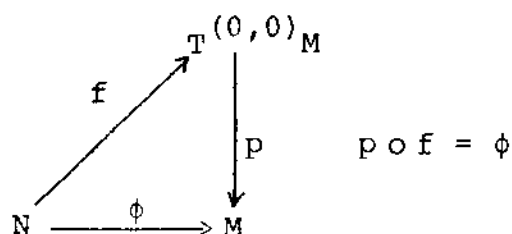
Seja $\phi : N \rightarrow M$ uma aplicação $\mathbb{C}^\infty$, $T^{(r,s)}_M$ o fibrado de tensores do tipo (r,s) sobre M , $p : T^{(r,s)}_M \rightarrow M$. Um campo tensorial sobre ϕ é uma aplicação $A : N \rightarrow T^{(r,s)}_M$ tal que o diagrama abaixo comuta



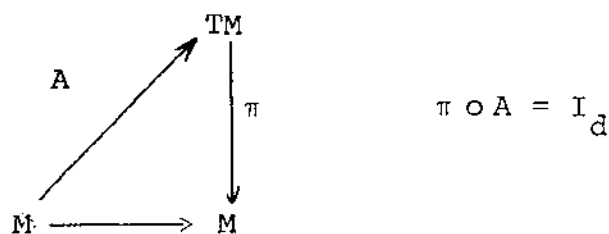
OBSERVAÇÕES:

i) Uma função f sobre ϕ , é justamente a função

$$f : N \rightarrow \mathbb{R}$$



ii) Se $N = M$ e $\phi = I_d$, teremos exatamente o campo vetorial sobre ϕ .



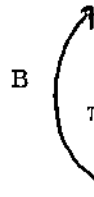
iii) Se $N = I$ ($I \subset \mathbb{R}$), $\phi = \gamma$ e $\gamma : I \rightarrow M$, então teremos o campo vetorial tangente a γ , denotado por γ_*

$$\begin{array}{ccc}
 & & TM \\
 & \nearrow \gamma_* & \downarrow \pi \\
 I & \xrightarrow{\quad} & M
 \end{array}
 \quad \pi \circ \gamma_* = \gamma$$

Para uma aplicação $\phi : N \rightarrow M$, campos tensoriais sobre ϕ aparecem mais naturalmente como se segue:

i) Se B é um campo vetorial em N então a aplicação $y \rightarrow \phi_*(B_y)$, $\forall y \in N$, define um campo tensorial sobre ϕ que será denotado por $\phi_* B$

$$\begin{array}{ccc}
 TN & \xrightarrow{\phi_*} & TM \\
 \downarrow \pi_N & & \downarrow \pi \\
 N & \xrightarrow{\phi} & M
 \end{array}$$

B 

Em particular, dado qualquer campo vetorial X em N , $\phi_* X$ é sempre um campo vetorial bem definido sobre ϕ , mesmo que não exista em M um campo vetorial ϕ relacionado a X .

ii) Se C é um campo tensorial arbitrário em M , então $Y \rightarrow C(\phi Y)$, $\forall Y \in N$ define um campo tensorial sobre ϕ , que será denotado por $C \circ \phi \rightarrow$ é dito restrição de C a ϕ .

Uma *derivação* de campos tensoriais sobre ϕ é uma correspondência que a cada campo tensorial A sobre ϕ associa um campo tensorial ∇A sobre ϕ tal que:

- i) ∇A é do mesmo tipo que A
- ii) $\nabla(C \otimes A) = \nabla C \otimes A + C \otimes \nabla A$ para qualquer campo C sobre ϕ .
- iii) $\nabla(aA + bB) = a\nabla A + b\nabla B$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e qualquer que seja o campo tensorial B sobre ϕ .

Observemos que ∇ é $\mathcal{C}^\infty$ no sentido que ∇A é $\mathcal{C}^\infty$ para qualquer campo tensorial A sobre ϕ (A é $\mathcal{C}^\infty$).

Notemos que esta definição de derivação se aplica se, na notação acima tomarmos A, B como campos vetoriais ou funções sobre ϕ e C uma função sobre ϕ . Chamaremos ∇ de *derivação de funções e campos vetoriais sobre ϕ* .

Suponhamos que uma derivação ∇ de funções e campos vetoriais sobre ϕ é dada, então existe uma única extensão de ∇ a uma derivação de campos tensoriais sobre ϕ que comuta com a contração (ver Bishop-Goldberg [7]).

EXEMPLO. Sejam X, Y campos vetoriais sobre ϕ e ω uma 1-forma sobre ϕ , então

$$\nabla(X \otimes Y \otimes \omega) = \nabla X \otimes Y \otimes \omega + X \otimes \nabla Y \otimes \omega + X \otimes Y \otimes \nabla \omega.$$

Se ∇ comuta com a contração, temos

$$\nabla((\omega Y)X) = (\omega Y)\nabla X + (\omega(\nabla Y)X) + (\nabla \omega(X))Y$$

4.2. CONEXÕES SOBRE APLICAÇÕES

Seja $\phi : N \rightarrow M$ uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$. Uma conexão D sobre ϕ é uma correspondência que a cada campo X em N associa uma derivação D_X de campos tensoriais sobre ϕ , tal que

- i) Se f é uma função sobre ϕ , então $D_X f = Xf$
- ii) D_X é linear em X (com relação as funções $\mathcal{C}^\infty$ em N)
- iii) D_X comuta com a contração.

Estamos interessados em dois casos especiais:

1) $N = M$ e $\phi = I_d$, neste caso uma conexão sobre ϕ é justamente a conexão em M no sentido usual.

2) Se $N = I$ e $\phi = \gamma$, $\gamma : I \rightarrow M$ é uma curva, e D

é a conexão em M , então D dá origem a uma conexão sobre γ , da seguinte maneira:

a conexão induzida $\phi_* D$ é a única conexão, tal que

$$(\phi_* D)_x (A \circ \phi) = D_{\phi(x)} A,$$

$\forall X \in T_x N$, $\forall x \in N$ e qualquer campo tensorial A em M .

Consideremos agora um espaço-tempo Newtoniano (Capítulo III) ou Relativístico (Capítulo IV), e $\gamma: I \rightarrow M$ uma curva. Como a conexão induzida $\gamma_* D$ aparece muitas vezes neste trabalho, denotaremos

i) $(\gamma_* D) \frac{d}{du} (A \circ \gamma)$ por $D_{T_\gamma} A \equiv D_{\gamma_*} A$, onde A é um campo vetorial em M e

ii) $(\gamma_* D) \frac{d}{du} X$ por $D_{\gamma_*} X \equiv D_{T_\gamma} X$

onde X é um campo vetorial sobre γ .

iii) $(g \circ \gamma) (\gamma_*, X \circ \gamma)$ por $g(\gamma_*, X)$

iv) $|(g \circ \gamma) (\gamma_*, \gamma_*)|$ por $|\gamma_*|^2$.

Com esta notação, a aceleração $a_\gamma \equiv a$ é por definição o campo vetorial sobre γ , tal que $D_{\gamma_*} \gamma_* = a$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ADLER, D., M.BAZIN and M. SCHIFFER - Introduction to General Relativity, McGraw-Hill, N.York, (1965).
- [2] ANDERSON, J.L. - Principles of Relativity Physics, Academic Press, N. York, (1967).
- [3] ARZÈLIES, H. - Relativistic Kinematics, Pergamon Press, (1966).
- [4] BARUT, A.O. - Electrodynamics and Classical Theory of Fields Particles, Macmillan, (1968).
- [5] BEEM, J.K. and P.E. EHRLICH - Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker Inc., N. York and Basel, (1981).
- [6] BERGMANN, P.G. - Introduction to the Theory of Relativity, Prentice-Hall, N. York, (1942).
- [7] BISHOP, R.L. and S.I. GOLDBERG - Tensor Analysis on Manifolds, Dover Publications, Inc., (1980).
- [8] CARMO, M.P. - Geometria Riemanniana, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, (1979).
- [9] CHEVALLEY, C. - Theory of Lie Groups, Princeton University Press, (1946).
- [10] CHOQUET BRUHAT, Y; DEWITT MORETTE, C; DILLARD BLEICK, M. - Analysis, Manifolds and Physics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-N.York-Oxford, (1977).

- [11] DAVIS, W.R. - Classical Fields, Particles and the Theory of Relativity, Gordon and Breach, (1970).
- [12] DERDZINSKI, A. - Certain Connections Between Time Functions and Compact Spacelike Submanifolds, Colloquium Math, 39 (1978).
- [13] DERDZINSKI, A. - On Closed Time Like Distribution, Colloquium Math, 37 (1977).
- [14] DIRAC P.A.M. - Nature, 168, 906 (1951); Proc. Roy. Soc. 209.A, 291 (1951), and in B. Graber and R.S. Millman (eds), Symmetries in Science, 1-11, Plenum Press (1980)
- [15] EDDINGTON, A.S. - Mathematical Theory of Relativity, Cambridge Univ. Press (1924).
- [16] EINSTEIN, A.; H.A. LORENTZ; H. MINKOWSKI and H. POINCARÉ, - in A Sommerfield (ed), The Principle of Relativity, Dover Publ. Inc. (1952).
- [17] FLANDERS, H. - Differential Forms with Applications to the Physical Sciences, Academic Press, N.York - London, (1963).
- [18] FRIEDMAN, M. - Foundations of Space - Time Theories, Relativistic Physics and Philosophy of Science, Princeton University Press, Princeton, (1983).
- [19] GREENBERG, M. - Lectures on Algebraic Topology, W.A. Benjamin, Inc., N.York, (1967).
- [20] HALL, G.S., Differential Geometry, Banach Center Publi-

cation, vol. 12, 47-52, (1984).

- [21] HALMOS, P.R. - Teoria Ingênua dos Conjuntos, Editora Polígono, São Paulo, (1970).
- [22] HAWKING, S.W., ELLIS, G.F.R. - The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge University, Press, (1973).
- [23] HERMANN, R. - Topics in General Relativity, Math. SCI Press, Brookline, Massachusetts, (1973).
- [24] HISKES, A.L.D. - Foundations of Physics, vol. 14, nº4, 307-332, (1984).
- [25] HUSENVOLLER, D. - Fibre Bundles, Springer-Verlag, N.York, Heidelberg - Berlin, (1966).
- [26] HYCKS, N.J. - Notes on Differential Geometry, Van Nostrand Reinhold Company, London, (1971).
- [27] KLEENE, S.C. - Introduction to Mathematics, Van Nostrand, N.York, (1952).
- [28] KRESTCHSCHMANN, E. Ann. Physik, 53, 575 (1971).
- [29] KOBAYASHI, S. - NOMIZU, K. - Foundations of Differential Geometry, vol, 1, Interscience Publishers, (1963).
- [30] LIMA, E.L. - Cálculo Tensorial, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, (1965).
- [31] LIMA, E.L. - Variedades Diferenciáveis, Instituto de Ma-

temática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, (1973).

- [32] LOPES, A.A. - A Teoria de Grupos e o Conceito de Massa - Tese de Mestrado, IMECC-UNICAMP, (1983).
- [33] MACIEL, A.K. and J.TIOMNO, Phys. Rev. Letters, 55, 143 (1985).
- [34] MARINOV, S. Cz. J. Phys. B24, 965(1974); General Relativity and Gravitation, 12, 57, (1980).
- [35] MENDELSON, E., Introduction to Mathematical Logic, Van Nostrand, N. York, (1963).
- [36] MISNER, C.W., K. S. THORNE and J.A. WHEELER - Gravitation, W.H. Freeman and Company, S. Francisco, (1971).
- [37] NEWTON, I. - Mathematical Principles of Natural Philosophy, traduzido de latim por A.Motte e revisado por F. Cajori, Univ. of California Press, (1934).
- [38] O'NEILL, B. - Semi-Riemanian Geometry, Academic Press, (1983).
- [39] OHANIAN, H.C. - Gravitation and Space-Time, W. N.Norton & Company Inc., N. York, (1966).
- [40] RECAMI, E. and W.A.RODRIGUES, Jr. Foundations of Physics 12, 709-718, (1982).
- [41] REICHENBACH, H. - The Philosophy of Space-Time Dover Publ. Inc. (1958).

- [42] RINDLER, W. - Essential Relativity, second-edition , Springer Verlag, (1977).
- [43] RODRIGUES Jr., W.A. - in S.Marinov and J.P.WESLEY(eds.), Proc. Int. Conference on Space-Time Absoluteness , East-West Publ. Comp, Graz, Austria, 147-150, (1980).
- [44] RODRIGUES Jr., W.A. - Il Nuovo Cimento, 74B, 199-211 , (1983).
- [45] RODRIGUES Jr., W.A. - Hadronic Journal, 7 436-455 (1984).
- [46] RODRIGUES Jr., W.A. and J.TIOMNO, Rev. Brasileira Física, vol. 14(Supl), 450-465, (1984).
- [47] RODRIGUES Jr., W.A. and J.TIOMNO, Foundations of Physics, 15, 945-961, (1965).
- [48] RYAN Jr., and SHEPLEY, L. C. - Homogeneous Relativistic Cosmologies, Princeton University Press, (1975).
- [49] SACHS, R.K. and WU, H. - General Relativity for Mathematicians, Springer-Verlag, N.York, Heildelberg - Berlin, (1977).
- [50] SANTILLI, R.M. - Il Grande Grido-Ethical Probe on Einstein's Followers, Hadronic Press, Cambridge, Ma, (1984).
- [51] SHEIBE, E. - in I. Niiniluoto and R. Tuomela (eds). The Logic and Epistemology of Scientific Change, Acta Philos. Fenn. XXX, pp. 205-224, (1978).

- [52] SCHOENFIELD, J.R. - Mathematical Logic, Addison-Wesley, Reading, (1967).
- [53] STEENROD, N. - The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press, (1967).
- [54] TAKEUTI, G.; ZARING, W.M. - Introduction to Axiomatic Set Theory, Springer-Verlag, N.York, (1971).
- [55] TORR, D.G. and P.KOLEN - Foundations of Physics, 12, 265 (1982); Found. of Physics, 12, 401 (1982).
- [56] TRAUTMANN, - Fibre Bundles Associated with Space-Time, Reports on Mathematical Physics, vol. 1, (1970), 29-62.
- [57] VON WESTENHOLZ, C. - Differential Forms in Mathematical Physics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-N.York, Oxford (1978).
- [58] WEINBERG, S., Gravitation and Cosmology, John Wiley & Sons, Inc., New York (1972).