
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**Crítérios de Solubilidade do Problema de
Dirichlet**

Adilson Eduardo Presoto [†]

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

Co-orientador: Prof. Dr. Francisco Odair de Paiva

Março, 2008

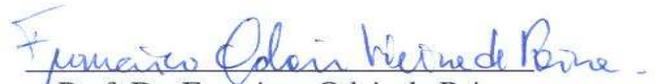
[†]apoiado financeiramente pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e pelo Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) durante o mestrado

Critérios de Solubilidade do Problema de Dirichlet

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Adilson Eduardo Presoto** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 18 de março de 2008


Prof. Dr. Djalmar Guedes de Figueiredo
Orientador


Prof. Dr. Francisco Odair de Paiva
Co-orientador

Banca Examinadora:

- 1 Prof. Dr. Djalmar Guedes de Figueiredo
- 2 Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
- 3 Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em **Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

Presoto, Adilson Eduardo
P926c Critérios de solubilidade do problema de Dirichlet / Adilson Eduardo
Presoto -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientadores : Djairo Guedes de Figueiredo ; Francisco Odair de Paiva
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

I. Critério de Wiener. 2. Método da varredura. 3. Método de Perron. 4.
Dirichlet, Problemas de. I. I. Figueiredo, Djairo Guedes de. II. Paiva,
Francisco Odair de. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Titulo em inglês: Criteria for the solvebility of the Dirichlet problem.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Wiener's criterion. 2. Balayage method. 3. Perron method. 4. Dirichlet problem.

Área de concentração: Matemática – Análise – Equações Diferenciais e Parciais

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (DMA-UFV)
Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 18/03/2008

Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 18 de março de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO



Prof. (a). Dr (a). OLÍMPIO HIROSHI MIYAGAKI



Prof. (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES

*Dedicado à minha mãe: Neide Stela Presoto, e em memória de meu pai:
Nilson Presoto; os quais sempre acreditaram em mim.*

...

E aquela vez foi como nunca e sempre:
vamos ali onde não espera nada
e achamos tudo o que está esperando.

Pablo Neruda - Recordarás

Cem Sonetos de Amor

Prefácio

A intenção deste indento é, devido a escassez de originalidade, estabelecer as referências utilizadas, bem como apontar as pequenas contribuições que dispus para tornar o texto mais conciso e interligado, embora a maioria dos resultados apresentados como elaboração própria sejam de baixo grau de dificuldade ou senão versões distintas de outros resultados já bem conhecidos. Também, agradecer às mais diferentes pessoas que contribuíram significativamente tanto na minha formação de caráter como na profissional .

O primeiro capítulo, essencialmente, serviu-se das referências [5], [6], [12] e [25]. Na primeira seção foi apresentada uma definição de funções subharmônicas e superharmônicas pouco usual encontrada em [12]. A principal tarefa constituiu-se na obtenção dos resultados a partir desta definição. No Método da Varredura de Poincaré incrementou-se o lema (2.19), que inicialmente estava proposto como exercício na bibliografia [6], elaborou-se sua versão para funções superharmônicas no corolário (2.20) e provou-se o teorema (2.26) com a função obtida pelo método de Poincaré ao invés da Função de Perron utilizada na referência orginal. Já no Método de Perron há pouca diferença do livro [5], sendo somente a parte final referente à condição de fronteira com uma quantidade finita de descontinuidades adicionada. Outros pequenos subsídios necessários foram acrescentados no Método de Schwarz como os resultados (2.40) e (2.42). Finalmente, no Método de Wiener destacam-se as inclusões das proposições (2.50) e (2.51), do corolário (2.52) e do teorema (2.47), que foram resultados análogos já desenvolvidos nos métodos anteriores.

O segundo capítulo, entre todos os outros, é o que conta com a menor criatividade. Todo ele foi baseado nas referências [8] e [10]. As principais colobarações neste capítulo foram as demonstrações dos lemas (3.8), (3.19) e (3.23), que estavam subentendidos, e um maior

detalhamento dos outros resultados, principalmente, o lema (3.6) e a proposição (3.26).

No último capítulo fundamentei-me no livro [12] de Kellogg e nos seus artigos [14] e [15]. A contribuição pessoal foram as elaborações das proposições (4.2), (4.3) e o corolário (4.8), suas respectivas demonstrações e um detalhamento das outras.

Além disso, o texto conta com uma exposição particular, inclusão de conexões entre os diferentes métodos, observações, exemplos e dados históricos. O texto foi concebido como uma coletânea de trabalhos concernentes a Teoria do Potencial, em particular ao Problema de Dirichlet, desenvolvidos no fim do séculos XIX e começo do século XX. Em nenhum momento espera-se que seja completo, abstendo-se de muitos outros métodos tão importantes quanto estes obtidos na mesma época como: o Princípio de Dirichlet, o Método da Média Aritémica de Neumann e o Método da "Nested Sequence" de Kellogg, entre outros tantos.

Por fim, pretendo fazer alusões a diferentes fatores que tornaram possível o mestrado. Os apoios institucionais da CAPES e da CNPq foram cruciais, sem eles não seria possível o presente projeto. Aproveito a oportunidade para agradecer a cada contribuinte brasileiro que, de fato, foram os verdadeiros financiadores do projeto, aos quais deixo o compromisso de batalhar para melhorar o quadro educacional brasileiro

Agora, é fundamental fazer uma justa homenagem a tantas pessoas que foram ou ainda são muito queridas. Inicialmente, como não poderia ser diferente, aos meus pais. À mãe pelo seu amor incondicional e a cada minuto dedicado a mim, simplesmente, a quem devo tudo. E ao pai, já não mais presente mas vivo na memória, do qual fui um ávido aprendiz, por tudo que pode me proporcionar em vida. Também em memória, ao meu avô Silvio, que com grande estima o guardo nas lembranças. Completando a família, os dois irmãos: Anderson, um excelente amigo e o meu maior incentivador, admirado pela determinação e coragem; e Alan que sempre ajudou-me quando fez-se necessário.

Também usufruo da ocasião para agradecer a educação escolar desde o jardim de infância até o mestrado ofertada inteiramente pelo Estado. A qual, embora com muitos problemas, tornou possível a formação e o desenvolvimento da profissão. Aproveito para explicitar as escolas E.E. Prof. Amanda Santana Polenti e E.E. Prof. José Silva Júnior tal como os seus professores e diretores, principalmente, a professora Tânia, que acreditaram na transposição

de barreiras. Também a Universidade Federal de São Carlos pela qualidade de ensino, e aos seus professores: Roberto Paterline e Ruidival dos Santos Filho que me orientaram e incentivaram durante a graduação; João Sampaio por sua carisma e apoio; e Ruy Tojeiro pelo excelente profissionalismo e pela motivação. Por fim, a UNICAMP pela oportunidade de estudar nesse grande centro educacional, aos professores Djairo Guedes de Figueiredo e Odair Francisco de Paiva pela orientação e dedicação, tal como os outros professores que ministrando aulas ou em conversas enriqueceram a minha cultura matemática ou impulsionaram-me. Também agradeço todo o apoio dos funcionários da UNICAMP como a secretária Tânia.

Finalmente, gostaria de citar alguns magníficos amigos que tive a honra de estar aos seus lados. Entre eles, dois eternos: Maria Tereza Zampieri, ou simplesmente Maitê, e Raphael Cyrillo Ruiz Sanches; Maitê pela sua presença alegre e doce, que embora tão pouco pude desfrutar, foi insubstituível e única; e Raphael que não possuo palavras para descrever todo o carinho e adoração que tenho por ele, só queria agradecer cada minuto da sua fiel companhia nos meus árduos quatro anos de graduação. Ainda entre os amigos de faculdade é obrigação citar Patrícia, Angelo, Carina, Miriam, Joyce, Aline, Rodrigo Dantas, Tiago, Keith e Anelise, os quais foram valiosíssimos, e todos os colegas de classe. Na infância devo mencionar Rodrigo Gobbi e os meus primos. Enquanto no mestrado Ariane e Maribel foram essenciais, não menos importantes foram os colegas da turma. Entre os amigos não poderia esquecer dos mais novos: Danilo, Durval e Luís, que proporcionaram ótimos momentos de subterfúgio. Em suma, reverencio a todos que com um olhar ou uma palavra carinhosa ou um gesto amigável tornaram-me uma pessoa melhor.

Jundiaí, 18 de março de 2008

Resumo

Abordaremos diferentes métodos da Teoria do Potencial desenvolvidos no fim do século XIX e no começo do século XX para solucionar o Problema de Dirichlet. Iniciamos o primeiro capítulo com o Método da Varredura de Poincaré que transcendeu os anteriores e focalizou o problema sob uma nova óptica. Neste método, uma função harmônica, num domínio geral, era obtida, uma vez que condição de contorno fosse dada. Então condições na fronteira eram analisadas afim de que a função harmônica fosse, de fato, a solução do Problema de Dirichlet. Até então, as principais resoluções se baseavam no Princípio de Dirichlet que admitia soluções minimizantes para integrais de energia, se fundamentando em argumentos físicos. Contudo, tais argumentos continham alguns deslizes matemáticos como a admissão do mínimo para essas integrais. Posteriormente, surgiram os métodos de Perron e de Wiener dentro do espírito o Método do Poincaré. Ainda no primeiro capítulo, apresentamos um antecessor do método de Poincaré: o Método de Schwarz. O segundo capítulo é dedicado ao Método das Equações Integrais de Fredholm, no qual a Análise Funcional e as Equações Diferenciais Parciais caminharam lado a lado. Por fim, no último capítulo temos um resultado devido a Wiener que caracteriza os pontos regulares em termos de convergência de uma série envolvendo a capacidade de alguns conjuntos.

Abstract

We will present different methods of Potential Theory developed at the end of the nineteenth century and the beginning of the twentieth century to solve the Dirichlet Problem. We start in the first chapter, with the Poincaré's Sweeping out Method, which transcended the former ones and focused the problem in a new insight. In this method, a harmonic function in a general domain is obtained, once a boundary condition is given. Then, conditions in the boundary are discussed so that this harmonic function is indeed the solution of the Dirichlet Problem. Until then, the key results were based on Dirichlet Principle which admitted minimizing solutions to energy integrals, by using some physical arguments. However, such arguments contained a few Mathematical gaps like the admission of a minimum to these integrals. Later, it appeared the Perron and Wiener Methods in the spirit of the Poincaré Method. Even in the first chapter, we discuss a predecessor of Poincaré's Method: the Schwarz's Method. The second chapter is devoted to the Integral Equations Method, where the Functional Analysis and Differential Equations walked side by side. Finally, the last chapter is a result due to Wiener that characterizes the regular points in terms of convergence of a series involving the capacity of some sets.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Prefácio | vi |
| Resumo | viii |
| Abstract | ix |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 Métodos Alternantes | 4 |
| 2.1 Funções subharmônicas e superharmônicas | 4 |
| 2.2 Método da Varredura de Poincaré | 9 |
| 2.3 Método de Perron | 18 |
| 2.4 Método de Schwarz | 23 |
| 2.5 A Função de Wiener | 28 |
| 3 Método das Equações Integrais | 34 |
| 3.1 Alternativa de Fredholm | 35 |
| 3.2 Potencial de Camada Dupla | 36 |
| 3.3 Potencial de Camada Simples | 49 |
| 3.4 O Problema de Dirichlet para Domínios \mathcal{C}^2 | 54 |
| 4 Critério de Wiener | 57 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.1 | Potencial Condutor | 57 |
| 4.2 | Capacidade | 61 |
| 4.3 | Critério de Wiener | 63 |
| A | Funções Harmônicas | 67 |
| A.1 | Resultados Principais | 67 |
| A.2 | Convergência de Funções Harmônicas | 70 |
| B | Identidades de Green | 73 |
| B.1 | Primeira Identidade de Green | 74 |
| B.2 | Segunda Identidade de Green | 74 |
| B.3 | Terceira Identidade de Green | 74 |

Capítulo 1

Introdução

A matemática ao longo do tempo desenvolve-se numa teia de idéias e conceitos. Muitas vezes, a sua profusão deixa-nos perdidos num paraíso repleto de belezas, sem sabermos qual o caminho a ser seguido. Esse trabalho pretende auxiliar-nos percorrendo os atalhos, construindo pontes entre ilhas dispersas e interpretando os significados dos objetos encontrados.

O assunto central da dissertação concerne a um clássico e antigo problema da Teoria do Potencial, conhecido como Problema de Dirichlet: dados um domínio com condição contorno contínua, determinar se existe uma extensão contínua dos dados de fronteira que seja harmônica no domínio? Provavelmente, a procura por funções harmônicas, isto é, funções u que satisfaçam a equação $\Delta u = 0$, foi iniciada em 1752 por Leonhard Euler no seu famoso “Princípios do Movimento dos Fluidos”. Apesar do estudo de Euler da equação $\Delta u = 0$, esta acabou sendo denominada de Equação de Laplace devido ao trabalho posterior de Laplace em campos gravitacionais no ano de 1780, onde usou extensivamente a equação. A Equação de Laplace está relacionada a uma variedade de fenômenos físicos, em especial aos fenômenos estacionários, ou seja, aqueles que não variam com o tempo.

Durante, aproximadamente, quatro décadas, desde o ano de 1833 com os primeiros estudos de Green, julgava-se que pudesse resolver o Problema de Dirichlet, independentemente do domínio e da condição de contorno considerados, através do Princípio de Dirichlet. O método recebeu esse nome por Riemann na sua tese de doutorado em 1851, que homenageou um de

seus professores: Dirichlet, que popularizou o princípio em suas aulas. Neste, considerava-se o funcional

$$\phi(u) = \int |\nabla u|^2 dx,$$

definido em $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), u = f \text{ em } \partial\Omega \text{ e } \phi(u) < \infty\}$ e admitia-se que o ponto de mínimo de ϕ era solução do Problema de Dirichlet com condição de contorno f . Sabemos que a existência do mínimo é algo duvidoso, porém passou despercebido por matemáticos do porte de Green, Dirichlet e Riemann, provavelmente, devido à sustentação em fenômenos físicos. Até que em 1870, Weierstrass construiu um funcional similar limitado inferiormente que não tinha mínimo. Com o exemplo a crença no método dissipou-se. Ainda a seguir, vieram os exemplos de Prym em 1871 de uma função $u \in \mathcal{C}^\infty(B_1) \cap \mathcal{C}(\overline{B_1})$ harmônica tal que $\phi(u) = \infty$, onde $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ é o disco unitário; e de Hadamard em 1906, no qual exibiu um domínio e uma condição de fronteira com $\mathcal{A} = \emptyset$. O princípio demoraria mais de trinta anos para ser revivido por Hilbert, mas considerando a solução num sentido mais amplo. Diante do descrédito do Princípio de Dirichlet fazia-se necessário um outro método que pudesse solucionar o Problema de Dirichlet. A partir de então, uma ampla quantidade de métodos surgiu. Entre os quais apresentaremos alguns que se destacaram.

Um dos primeiros foi o Método Alternante de Schwarz desenvolvido em torno de 1870, que restringe-se ao plano. Nele divide-se o domínio em dois que sempre admitem soluções para o Problema de Dirichlet com quaisquer dados de fronteira e constrói duas sequências de funções, cada uma delas definida num dos domínios, que convergem a funções harmônicas que coincidem na interseção e, portanto, obtém-se uma solução do problema inicial. A seguir, em 1887, surgiu o inovador Método de Varredura de Poincaré, nele, ao contrário do Método de Schwarz que varre a carga de bolas alternadamente, varre a carga de cada bola infinitas vezes. Outra diferença crucial entre Método de Poincaré e outros precedentes é que para qualquer domínio com condição de fronteira obtinha-se uma função harmônica, que seria a solução do Problema de Dirichlet, caso o mesmo tivesse uma. Prevendo que nem todo domínio fosse de Dirichlet, Poincaré também passou a estudar quais condições deveriam ser impostas à fronteira de forma que a função fosse, de fato, uma solução. No ano de 1911 apareceu o primeiro exemplo de um Problema de Dirichlet que não possuía solução. Doravante, os métodos não se preocupavam mais resolver o problema para qualquer domínio e condição de

contorno, mas sim caracterizar os domínios que sempre admitissem solução. Já neste sentido e seguindo direção apontada por Poincaré vieram os Métodos de Perron e de Wiener nas décadas 1910 e 1920, respectivamente..

Embora o método de procurar soluções representadas por potenciais de camada dupla tenha sido originado por Green, C. Neumann em 1877 foi quem iniciou um estudo sistemático para domínios convexos. Contudo, a exposição segue as idéias de Fredholm, devido a elegância, por tratar de domínios bastante gerais: os domínios de classe \mathcal{C}^2 , e acima de tudo pelo grande desenvolvimento que proporcionou à Análise Funcional. Sem mudanças relevantes podemos estender os resultados obtidos a superfícies de classe $\mathcal{C}^{1+\alpha}$, com $\alpha > 0$. Quando a superfície é apenas de classe \mathcal{C}^1 a abordagem é acentuadamente distinta, Fabes, Jodeit e Riviére tem iniciado o estudo, suas técnicas baseam-se em difíceis resultados sobre as integrais singulares obtidas por Calderón, Meyer entre outros.

Nosso último tema: Critério de Wiener, demonstrado por Wiener em 1923, caracteriza os pontos regulares, que são os pontos da fronteira em que as soluções generalizadas obtidas por Poincaré ou Perron convergem ao dado inicial, em termos de convergência de uma série. Os termos da série envolvem capacidade de conjuntos, conceito originário do meio físico que tem ganhado nova forma no campo da Teoria de Medida e Integração.

Capítulo 2

Métodos Alternantes

Nesse capítulo apresentaremos alguns métodos surgidos a partir do descrédito do Princípio de Dirichlet pelos grandes matemáticos: Poincaré, Schwarz, Perron e Wiener para solucionar o Problema de Dirichlet. O nome dado ao capítulo deve-se a Henri Poincaré, o qual denominou os vários métodos desenvolvidos entre 1870 e 1890 para solucionar o Problema de Dirichlet de Métodos Alternantes.

2.1 Funções subharmônicas e superharmônicas

Nos métodos a seguir as funções subharmônicas e superharmônicas desenvolverão um papel central. Entre as diversas formas de defini-las adotaremos a mais auto-explicativa.

Definição 2.1 *Uma função contínua $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é subharmônica (superharmônica) se para quaisquer aberto $\Omega' \subset\subset \Omega$ e função contínua $u : \overline{\Omega'} \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica em Ω' tais que $v \leq (\geq) u$ em $\partial\Omega'$, temos que:*

$$v(x) \leq (\geq) u(x), \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega'}.$$

Da definição acima segue que se v é subharmônica então $-v$ é superharmônica e vice-versa. Com efeito, dados $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $u : \overline{\Omega'} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e harmônica em Ω' tais que $-v(x) \geq u(x)$ para $x \in \partial\Omega'$, tomando $u' : \overline{\Omega'} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u'(x) = -u(x)$, teremos que

$v(x) \leq u'(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega'}$, ou seja, $-v(x) \geq u(x)$ se $x \in \overline{\Omega'}$. De modo análogo, prova-se o outro caso.

Uma outra conseqüência da definição é que as operações de máximo e mínimo são fechadas no espaço vetorial da funções subharmônicas e superharmônicas, respectivamente.

Proposição 2.2 *Se $v_1, \dots, v_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções subharmônicas então $\max\{v_1, \dots, v_n\}$ também é subharmônica.*

Demonstração: Sejam $\Omega' \subset \subset \Omega$ e $u : \overline{\Omega'} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e harmônica em Ω' tais que $w(x) \leq u(x)$ para todo $x \in \partial\Omega'$, onde $w(x) = \max\{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$, ou seja, $v_j(x) \leq u(x)$ para todos $j \in \{1, \dots, n\}$ e $x \in \partial\Omega'$. Logo, pela definição $v_j(x) \leq u(x)$ para todos $x \in \overline{\Omega'}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$. Portanto,

$$w(x) = \max\{v_1(x), \dots, v_n(x)\} \leq u(x),$$

para todo $x \in \overline{\Omega'}$. ■

Com demonstração análoga obtemos

Proposição 2.3 *Se $v_1, \dots, v_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções superharmônicas então $\min\{v_1, \dots, v_n\}$ também é superharmônica.*

Proposição 2.4 *Seja $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função subharmônica (superharmônica). Então para todos $x \in \Omega$ e $B_r(x) \subset \subset \Omega$ têm-se*

$$v(x) \leq (\geq) \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} v d\sigma.$$

Demonstração: Seja $u : \overline{B_r(x)} \rightarrow \mathbb{R}$ a solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{se } x \in B_r(x) \\ u(x) = v(x) & \text{se } x \in \partial B_r(x). \end{cases}$$

Logo, pela Fórmula do Valor Médio para funções harmônicas

$$v(x) \leq (\geq) u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u d\sigma = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} v d\sigma. \quad \blacksquare$$

Agora, veremos que as desigualdades afirmadas acima serão suficientes para garantir o Princípio do Máximo para as funções subharmônicas e o Princípio do Mínimo para as funções superharmônicas.

Teorema 2.5 (Princípio do Máximo) *Seja $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função subharmônica, onde Ω é conexo. Suponhamos que exista um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que $x_0 = \sup_{\Omega} v$ então v é constante.*

Demonstração: Seja $A = \{x \in \Omega \mid x = \sup_{\Omega} v\}$. Logo, por hipótese $A \neq \emptyset$. Se $x \in A$ temos que

$$M = v(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} v d\sigma \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} M d\sigma = M,$$

onde $M = \sup_{\Omega} v$ e $B_r(x) \subset\subset \Omega$. Daí v é constante em $B_r(x)$, de fato, se para algum $y \in B_r(x)$ temos que $v(y) < M$ então existiriam $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que para todo $z \in B_{\delta}(y)$ $v(z) \leq M - \epsilon$. Logo, se $r' = |x - y|$ segue que

$$\begin{aligned} M &= v(x) \leq \frac{1}{\omega_n r'^{n-1}} \int_{\partial B_{r'}(x)} v d\sigma \\ &= \frac{1}{\omega_n r'^{n-1}} \int_{\partial B_{r'}(x) \setminus B_{\delta}(y)} v d\sigma + \frac{1}{\omega_n r'^{n-1}} \int_{\partial B_{r'}(x) \cap B_{\delta}(y)} v d\sigma \\ &\leq \frac{1}{\omega_n r'^{n-1}} \int_{\partial B_{r'}(x) \setminus B_{\delta}(y)} M d\sigma + \frac{1}{\omega_n r'^{n-1}} \int_{\partial B_{r'}(x) \cap B_{\delta}(y)} (M - \epsilon) d\sigma \\ &= M - \frac{1}{\omega_n r'^{n-1}} \int_{\partial B_{r'}(x) \cap B_{\delta}(y)} \epsilon d\sigma < M \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Provamos, então, que A é aberto. O fato de que A é fechado é trivial, uma vez que v , sendo subharmônica, é contínua. Portanto, $A = \Omega$, isto é, v é constante. ■

Corolário 2.6 *Se $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e subharmônica em Ω , então*

$$\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v.$$

Como $-v$ é superharmônica quando v é subharmônica, seguem os dois próximos resultados

Teorema 2.7 (Princípio do Mínimo) *Seja $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função superharmônica, onde Ω é conexo. Suponhamos que exista um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que $x_0 = \inf_{\Omega} v$ então v é constante.*

Corolário 2.8 *Se $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e superharmônica em Ω , então*

$$\min_{\bar{\Omega}} v = \min_{\partial\Omega} v.$$

Um fato interessante é que as desigualdades estabelecidas na proposição (2.4) não são apenas necessárias, mas também caracterizações de funções subharmônicas e superharmônicas.

Teorema 2.9 *Uma função $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é subharmônica (superharmônica) se, e somente se, para todo $x \in \Omega$ e $B_r(x) \subset\subset \Omega$ temos que:*

$$v(x) \leq (\geq) \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} v d\sigma.$$

Demonstração: Devido à proposição (2.4) basta provar que a condição enunciada acima é suficiente para que uma função seja subharmônica. Então, sejam $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que para todo $x \in \Omega$ e $B_r(x) \subset\subset \Omega$ satisfaça:

$$v(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} v d\sigma \tag{2.9.1}$$

e $u : \bar{\Omega}' \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, harmônica em Ω' e $v \leq u$ em $\partial\Omega'$, onde $\Omega' \subset\subset \Omega$. Logo, $v|_{\Omega'} - u : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ será uma função em que vale a desigualdade (2.9.1) com v trocado por $v|_{\Omega'} - u$ e $B_r(x) \subset\subset \Omega'$. Da demonstração do Princípio do Máximo podemos concluir que o mesmo também valerá para $v|_{\Omega'} - u$, portanto, como $v - u \leq 0$ em $\partial\Omega'$ temos que $v \leq u$ em Ω' . O caso das funções superharmônicas é análogo. ■

Notemos que o Princípio do Máximo continua válido se para cada $x \in \Omega$ exista $R_x > 0$ tal que para todo $0 < r < R_x$ tem-se

$$v(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} v d\sigma. \tag{2.9.2}$$

Logo, da demonstração do teorema acima (2.9) concluímos que $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ será subharmônica se v satisfizer a condição acima. Portanto, temos uma boa inspiração para definir o que vem a ser subharmônica (superharmônica) num ponto.

Definição 2.10 *Dizemos que uma função $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é subharmônica (superharmônica) em x se existe R_x tal que para $0 < r \leq R_x$ tem-se*

$$v(x) \leq (\geq) \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} v d\sigma.$$

Portanto, se D é um aberto contido em Ω e $v|_D$ é subharmônica então v é subharmônica em D . E também temos que uma função é subharmônica se, e somente se, é subharmônica em todos os seus pontos.

Proposição 2.11 *Sejam $v, u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções subharmônicas (superharmônicas), então:*

1. $v + u$ é uma função subharmônica (superharmônica)
2. cv é uma função subharmônica (superharmônica), se $c \geq 0$ e
3. cv é uma função superharmônica (subharmônica), se $c < 0$.

Logo, se v, u são funções subharmônica e superharmônica, respectivamente, temos que $v - u$ e $u - v$ são subharmônica e superharmônica. Em particular, $v + c$ e $u + c$ são subharmônica e superharmônica com qualquer constante c .

Na construção de uma função harmônica Poincaré fez uso de uma seqüência de funções em que uma era obtida da anterior via um processo de harmonização, isto é, num aberto harmonizava a função e no restante do domínio permanecia com a função inicial. Vamos, precisamente, definir esse conceito.

Definição 2.12 *Dados uma função contínua $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e um aberto $D \subset\subset \Omega$ tal que o Problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \text{se } x \in D \\ u(x) = v(x) & \text{se } x \in \partial D \end{cases} \quad (2.12.1)$$

admita uma solução u , então definimos a harmonizada de v em D , que denotaremos por v^D , como

$$v^D(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in D \\ v(x), & \text{se } x \in \Omega \setminus D, \end{cases} .$$

Notemos que a função $v^D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em Ω , pois ela é igual a funções contínua em dois conjunto fechados de Ω , a saber em \bar{D} e $\Omega \setminus D$, e coincidem na sua interseção, logo, é bem conhecido que uma função assim construída é contínua. Quando v for subharmônica (superharmônica) dizemos que v^D é o levantamento (rebaixamento) harmônico de v em D .

Proposição 2.13 *Sejam $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função subharmônica (superharmônica) e $D \subset\subset \Omega$ tal que o Problema de Dirichlet (2.12.1) admita solução. Então o seu levantamento (rebaixamento) harmônico $v^D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ também será subharmônico (superharmônico) e $v \leq (\geq)v^D$ em Ω .*

Demonstração: Como observado acima temos que $v^D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Nos pontos de $\Omega \setminus D$ é imediato que $v \leq v^D$, pois $v = v^D$ neste conjunto. Agora, em D pela definição de subharmônica temos que $v \leq v^D$. Por fim, mostremos que a harmonizada $v^D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é subharmônica. Em D e $\Omega \setminus \bar{D}$ é claro que $v^D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é subharmônica. Sejam, então, $x \in \partial D$ e $B_r(x) \subset\subset \Omega$. Como v é subharmônica temos que:

$$v^D(x) = v(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} v ds \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} v^D ds.$$

O caso de superharmônica é inteiramente análogo. ■

2.2 Método da Varredura de Poincaré

Nessa seção exibiremos o Método de Varredura (Balayage) de Poincaré, que revolucionou a abordagem do Problema de Dirichlet. A partir de então muitos outros matemáticos o seguiram na busca de funções harmônicas, as quais, em geral, não satisfizeriam a condição de contorno. O método foi elaborado na última metade do século XIX, publicado pela primeira vez no artigo "Sur le Problème de la Distribution Électrique" de sua autoria em 1887, em 1890 reapareceu corrigido e mais detalhado num segundo artigo [24] e apresentado à comunidade científica em palestras de 1894 a 1895 na Universidade de Sorbonne.

No Método de Poincaré suporemos que a condição de fronteira pode ser estendida de forma contínua e subharmônica. Contudo, como veremos nos dois próximos lemas, isso não apresentará restrições a resolução do Problema de Dirichlet. No restante do texto Ω , além de ser um aberto, será limitado.

Lema 2.14 *Suponhamos que o Problema de Dirichlet:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{se } x \in \Omega \\ u(x) = f(x) & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.14.1)$$

pode ser resolvido para toda função f que admite extensão contínua em $\bar{\Omega}$ e subharmônica em Ω , então o mesmo será solúvel se f for um polinômio.

Demonstração: Seja $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Logo, naturalmente f admite uma extensão contínua a $\bar{\Omega}$. Agora, sendo $f \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ podemos escrevê-la como diferença de duas funções subharmônicas, a saber:

$$g(x) = f(x) + A|x|^2 \quad \text{e} \quad h(x) = A|x|^2,$$

onde A é tal que $\Delta g \geq 0$. Por hipótese teremos que existem funções harmônicas $u_1, u_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $u_1|_{\partial\Omega} = g$ e $u_2|_{\partial\Omega} = h$. Portanto, $u_1 - u_2$ será uma função harmônica em Ω , contínua em $\bar{\Omega}$ e $(u_1 - u_2)|_{\partial\Omega} = g - h = f$, ou seja, $u_1 - u_2$ é solução do Problema de Dirichlet (2.14.1). ■

Lema 2.15 *Se o problema de Dirichlet (2.14.1) tem solução com f polinomial então podemos resolvê-lo com f sendo uma função contínua arbitrária.*

Demonstração: Dada uma função contínua $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ arbitrária teremos pelo Teorema de Aproximação de Weirestrass que existe uma sequência de polinômios $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente para f . Mas, por hipótese o Problema de Dirichlet (2.14.1) com $f = f_k$ admite solução u_k . Logo, pelo teorema (A.13) $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergirá uniformemente para solução do problema (2.14.1) com condição de contorno f . ■

Portanto pelos lemas (2.14) e (2.15) temos que se o Problema de Dirichlet (2.14.1) puder ser resolvido para qualquer condição de fronteira que admite extensão contínua em $\bar{\Omega}$ e subharmônica em Ω então o mesmo será solúvel com qualquer condição de fronteira contínua. Neste caso, dizemos que Ω é um Domínio de Dirichlet. Precisamente,

Definição 2.16 *Um domínio Ω é de Dirichlet se o Problema de Dirichlet em Ω com qualquer condição de fronteira admite solução.*

Teorema 2.17 (Método da Varredura de Poincaré) *Seja $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que admite uma extensão contínua a $\bar{\Omega}$ e subharmônica em Ω , então existe uma função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica em Ω tal que $u|_{\partial\Omega} = f$.*

Demonstração: Dada $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, denotemos por \bar{f} a sua extensão subharmônica. Cobrimos Ω por uma coleção enumerável de bolas $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dessa coleção formemos uma nova seqüência em que cada bola apareça uma quantidade infinita de vezes, por exemplo, tomemos a seqüência:

$$B_1, B_1, B_2, B_1, B_2, B_3, \dots, B_1, B_2, \dots, B_n, B_1, \dots \quad (2.17.1)$$

E de forma recursiva, definimos $f_k = f_{k-1}^{B_{j_k}}$, para $k \geq 1$ e $f_0 = \bar{f}$, onde B_{j_k} é o k -ésimo elemento da seqüência (2.17.1). Logo, da proposição (2.13) e do Princípio do Máximo para funções subharmônicas temos que $f_0 \leq f_1 \leq \dots \leq f_k \leq \dots \leq \sup f$. Portanto, podemos definir

$$u(x) = \lim f_k(x),$$

para cada $x \in \bar{\Omega}$. Como $f_k|_{\partial\Omega} = f$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $u|_{\partial\Omega} = f$. Para provar que u é harmônica em Ω mostremos que u é harmônica em cada bola da seqüência (2.17.1). Seja B_{j_k} uma destas bolas. Logo, as funções harmonizadas em B_{j_k} formam uma seqüência não-decrescente limitada $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_n \leq \dots \leq \sup f$ de funções harmônicas em B_{j_k} , conseqüentemente, pelo corolário (A.12) o seu limite é uma função harmônica. Mas esta seqüência é uma subseqüência de $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, portanto, o limite de g_k é u . ■

Do exemplo de Zaremba, que veremos a seguir, temos que existe um domínio limitado com uma condição de fronteira contínua que não admite solução do Problema de Dirichlet. Logo, pelo teorema acima e do exemplo de Zaremba podemos construir uma seqüência $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de funções uniformemente contínua num compacto que converge para uma função descontínua.

O exemplo de Stanislaw Zaremba (1863-1942) de um domínio que não é de Dirichlet, dado em [30], foi uma conseqüência imediata da demonstração de Maxime Bôcher (1867-1918) no ano de 1903, encontrado em [1], no qual afirma que podemos estender funções harmônicas em pontos isolados da fronteira de forma harmônica, resultado conhecido como Princípio da Singularidade Removível. Até tal exemplo acreditava-se que todo domínio seria de Dirichlet.

Exemplo 2.18 (Zaremba) *O disco perfurado $D \setminus \{0\}$ não é um Domínio de Dirichlet. De fato, tomando a condição de contorno f em que vale 0 se $|x| = 1$ e $f(0) = 1$ teremos que o Problema de Dirichlet não terá solução, pois se existisse uma solução u do problema pelo Princípio da Singularidade Removível seria harmônica em todo $B(0)$ e, portanto, pelo*

Princípio do Máximo, nula, o que contradiz o fato de que $u(0) = 1$.

Uma questão que podemos levantar do método acima é se o método depende da extensão de f e da seqüência enumerável de bolas que cobre Ω , consideradas. A esta questão temos como resposta a próxima proposição, que fará uso do lema abaixo.

Lema 2.19 *Sejam Ω um domínio e $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função subharmônica. Se para cada $y \in \partial\Omega$ definimos $g(y) = \limsup_{x \rightarrow y} v(x)$ então $v(x) \leq \sup_{\partial\Omega} g$, para todo $x \in \Omega$.*

Demonstração: O caso em que $\sup_{\partial\Omega} g = +\infty$ é imediato, enquanto o caso $\sup_{\partial\Omega} g = -\infty$ não pode ocorrer, pois teríamos que $g(y) = -\infty$, para todo $y \in \partial\Omega$, mas sendo $\partial\Omega$ compacto poderíamos para qualquer constante positiva K encontrar uma vizinhança $B(\partial\Omega, \epsilon)$ em que $v \leq -K$ nesta vizinhança. Daí pelo Princípio do Máximo obteríamos uma contradição. Agora, suponhamos que $\sup_{\partial\Omega} g$ é um número real. Inicialmente, observemos

que $\limsup_{x \rightarrow y} v(x) = \inf_{\eta > 0} \left(\sup_{|x-y| < \eta} v(x) \right)$, pois, $\sup_{|x-y| < \eta} v(x)$ como função de η é não-decrescente. Portanto, dado $\epsilon > 0$ para cada $y \in \partial\Omega$ existe $\eta_y > 0$ tal que

$$\sup_{|x-y| < \eta_y} v(x) < g(y) + \epsilon \leq \sup_{\partial\Omega} g + \epsilon,$$

ou seja, $v(x) \leq \sup_{\partial\Omega} g + \epsilon$ em $B(y, \eta_y) \cap \Omega$. Mas como $\partial\Omega$ é compacto temos que existe $\delta > 0$ tal que $B(\partial\Omega, \delta) \subset \cup_{y \in \partial\Omega} B(y, \eta_y)$. Por fim, considerando o domínio $\Omega_\delta = \Omega \setminus B(\partial\Omega, \delta/2)$, temos que $v|_{\overline{\Omega_\delta}}$ é contínua, subharmônica em Ω_δ e $v(x) \leq \sup_{\partial\Omega} g + \epsilon$ para $x \in \partial\Omega_\delta$, logo, pelo Princípio do Máximo $v(x) \leq \sup_{\partial\Omega} g + \epsilon$ para $x \in \Omega_\delta$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$, obtemos que $v(x) \leq \sup_{\partial\Omega} g + \epsilon$, para $x \in \Omega$. Como ϵ é arbitrário, concluímos que $v(x) \leq \sup_{\partial\Omega} g$. ■

Como de praxe, propriedades referentes a funções subharmônicas, com as devidas alterações, resultam em propriedades simétricas para funções superharmônicas

Corolário 2.20 *Sejam Ω um domínio e $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função superharmônica. Se para cada $y \in \partial\Omega$ definimos $g(y) = \liminf_{x \rightarrow y} v(x)$ então $v(x) \geq \inf_{\partial\Omega} g$, para todo $x \in \Omega$.*

Demonstração: Dada uma função superharmônica $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função $u = -v$ é subharmônica. Logo, se definirmos $h(y) = \limsup_{x \rightarrow y} u(x) = -\liminf_{x \rightarrow y} v(x) = -g(y)$ teremos pelo lema acima que $u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} h = -\inf_{\partial\Omega} g$, ou seja, $v(x) \geq \inf_{\partial\Omega} g$. ■

Proposição 2.21 *Se $f_1, f_2 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ são duas extensões contínuas e subharmônicas em Ω de $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\{B_i^1\}_{i \in \mathbb{R}}, \{B_i^2\}_{i \in \mathbb{N}}$ são duas seqüências de bolas como aquela da demonstração do teorema (2.17), então $u_1 = u_2$, onde $u_j(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_j^k(x)$, $f_j^0 = f_j$ e $f_j^k = (f_j^{k-1})^{B_k^j}$ se $k \geq 1$, para $j = 1, 2$.*

Demonstração: Como $f_2^0 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $u_2 \geq f_2^0$, para cada $y \in \partial\Omega$ temos que

$$\liminf_{x \rightarrow y} u_2(x) \geq \liminf_{x \rightarrow y} f_2^0(x) = f_2^0(y) = f(y).$$

E da continuidade das funções $f_1^k : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se $\lim_{x \rightarrow y} f_1^k(x) = f_1^k(y) = f(y)$, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Logo,

$$\limsup_{x \rightarrow y} (f_1^k(x) - u_2(x)) = \lim_{x \rightarrow y} f_1^k(x) - \liminf_{x \rightarrow y} u_2(x) \leq 0,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Daí usando o lema acima com $v(x) = f_1^k(x) - u_2(x)$, obtemos que $f_1^k(x) \leq u_2(x)$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Portanto, $u_1(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_1^k(x) \leq u_2(x)$. Trocando os papéis de 1 e 2 acima, também concluímos que $u_2 \leq u_1$, logo, $u_1 = u_2$. ■

Do teorema de Poincaré vemos que o único item restante para que u dada pelo teorema seja solução do Problema de Dirichlet (2.14.1) é que seja contínua em $\overline{\Omega}$. Diante das dificuldades de se provar, erroneamente, que qualquer domínio fosse de Dirichlet Poincaré começou a estudar domínios com características peculiares. Nesse espírito, no artigo [24] Poincaré definiu que um ponto da fronteira é regular quando satisfaz a condição da esfera exterior, isto é, existe uma bola que intersectado com o fecho do domínio só dá o ponto; e ainda provou que em tais pontos a função obtida pelo método da varredura converge ao dado inicial.

Definição 2.22 (Condição da Esfera Exterior) *Dizemos que $x_0 \in \partial\Omega$, satisfaz a condição da esfera exterior se existem um ponto $y \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ tais que $B(y, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ e $\overline{B(y, r)} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Caso contrário, dizemos que x_0 não satisfaz a condição da esfera exterior.*

Poincaré ainda observou que para qualquer um desses pontos era possível construir uma função harmônica em Ω , contínua em $\overline{\Omega}$ que se anula nele e é positiva nos pontos restantes. De fato, dado $x_0 \in \partial\Omega$ que satisfaz a condição da esfera exterior, com as notações da definição

acima, basta tomar

$$\omega(x) = \begin{cases} \log \frac{|x-y|}{r} & \text{se } n = 2 \\ 1 - \frac{r^{n-2}}{|x-y|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

Daí surgiu a noção de barreira, utilizada implicitamente por Poincaré e definida precisamente por Henri Léon Lebesgue (1875-1941) em [19] no ano de 1924.

Definição 2.23 *Dados um domínio Ω e um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ uma função contínua $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma barreira em x_0 se w é superharmônica em Ω , $w(x_0) = 0$ e $w(x) > 0$ se $x \in \bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$. E um ponto da fronteira é regular se este admite uma barreira e, caso contrário, irregular.*

Embora a definição de barreira é global, isto é, a função é definida em todo $\bar{\Omega}$, Georges Bouligand observou que é uma propriedade local.

Proposição 2.24 *Se $x_0 \in \partial\Omega$ tem uma barreira em $\Omega \cap B_r(x_0)$ para algum $r > 0$ então x_0 tem barreira em todo Ω .*

Demonstração: Seja $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma barreira de x_0 em $\Omega \cap B_r(x_0)$. Como $\varphi(x) > 0$ para $x \neq x_0$ temos que $m := \min_B \varphi > 0$, onde $B = \overline{\Omega \cap B_r(x_0)} \setminus B_{r/2}(x_0)$. Logo, a função $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} \min\{\varphi(x), m\} & \text{se } x \in \bar{\Omega} \cap B_r(x_0) \\ m & \text{se } x \in \bar{\Omega} \setminus B_r(x_0) \end{cases}$$

será uma barreira de x_0 em Ω . ■

A definição de regularidade mais antiga é a do cone exterior estabelecida por Poincaré e Zaremba, onde dizemos que um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ satisfaz a condição do cone exterior se podemos construir um cone circular reto com vértice em x_0 contido em $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Como veremos tal condição de regularidade é mais forte de que a dada acima.

Definição 2.25 *O cone circular reto $K(x_0, \lambda, a, b)$ de vértice x_0 , eixo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ com $|\lambda| = 1$, amplitude $b > 0$ e de geratriz $a > 0$ é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $\cos(x - x_0, \lambda) \geq b$ e $|x - x_0| < a$, ou em outros termos,*

$$K(x_0, \lambda, a, b) = B_a(x_0) \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \frac{\langle x - x_0, \lambda \rangle}{|x - x_0|} \geq b \right\}.$$

O próximo resultado foi pela primeira vez estabelecido por Zaremba também em [30]. Na sua versão original, Zaremba provou que a Função de Green Generalizada converge a 0 nos pontos que satisfaz a condição do cone exterior.

Teorema 2.26 *Se um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ satisfaz a condição do cone exterior então x_0 é um ponto regular.*

Demonstração: Sejam $x_0 \in \partial\Omega$ e $K(x_0, \lambda, a, b)$ o cone circular reto com vértice em x_0 . Consideremos o domínio $G = B_a(x_0) \setminus \overline{K}$ e a função u harmônica em G obtida pelo Método da Varredura de Poincaré com condição de contorno $f(x) = |x - x_0|$ em ∂G . Mostremos que u é uma barreira local em x_0 . Como u é harmônica em G é claro que o será em $\Omega \cap B_a(x_0) \setminus \{x_0\}$, e em particular, superharmônica, e da harmonicidade de u em G também é imediato que u será contínua em $\overline{\Omega \setminus B_a(x_0)} \setminus \{x_0\}$. Terminaremos a demonstração se provarmos que u é contínua em x_0 e $u(x_0) = 0$, pois teremos pelo Princípio do Máximo que u será positiva nos pontos de $\overline{\Omega \setminus B_a(x_0)}$, exceto em x_0 e, portanto, u será uma barreira local de x_0 . Para tal propósito observemos, inicialmente, que para toda f_n da seqüência obtida pelo Método da Varredura de Poincaré tem-se que $0 \leq f_n \leq \sup_{\partial G} f$, de onde

$$0 \leq u(x) \leq \sup_{\partial G} f, \quad (2.26.1)$$

para todo $x \in G$. Agora, definamos $G' = B_{a/n}(x_0) \setminus \overline{K}$ e $u'(x) = u(x_0 + n(x - x_0))$ para todo $x \in \overline{G'}$. Notemos que se $x \in \partial G' \cap \partial B_{a/n}(x_0)$ então $u'(x) = u(x_0 + n(x - x_0)) = a$, e pelo Princípio do Máximo $u(x) < a$. Mas como $\partial G' \cap \partial B_{a/n}(x_0)$ é compacto $M := \max_B u(x) < a$, onde $B = \partial G' \cap \partial B_{a/n}(x_0)$. Logo, tomando $c = M/a$. temos que $c < 1$ e

$$u(x) \leq cu'(x),$$

desde que $x \in \partial G' \cap \partial B_{a/n}(x_0)$. E se $x \in \partial G' \cap \overline{K}$ segue que $u(x) = |x - x_0|$ e $u'(x) = u(x_0 + n(x - x_0)) = n|x - x_0| = nu(x)$. De onde

$$u(x) \leq \frac{1}{n}u'(x),$$

no caso em que $x \in \partial G' \cap \overline{K}$. Portanto, existe $0 < d < 1$ tal que $u(x) \leq du'(x)$ para todo $x \in \partial G'$. O nosso próximo passo será mostrar que a desigualdade acima continuará válida

em todo G' . Seja

$$M = \sup_{G'} \{u(x) - du'(x)\},$$

o qual está bem definido em virtude de (2.26.1). Tomando $\epsilon < a/n$ e a função

$$u_\epsilon(x) = \frac{M}{c} \left(\frac{1}{|x - x_0|^{n-2}} - \frac{n^{n-2}}{a^{n-2}} \right),$$

onde c é tal que $u_\epsilon(x) = M$ quando $|x - x_0| = \epsilon$, temos que $u(x) - du'(x) \leq u_\epsilon(x)$ para todo $x \in \partial G_\epsilon$ onde $G_\epsilon = (B_{a/n}(x_0) - B_\epsilon(x_0)) \setminus \overline{K}$. Sendo ambas funções harmônicas em G_ϵ concluimos que $u(x) - du'(x) \leq u_\epsilon(x)$ em G_ϵ . Notando que fixado $x \in G'$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x) = 0$ concluimos que

$$u(x) \leq du'(x), \tag{2.26.2}$$

para todo $x \in G'$. Por fim, pondo

$$m_\eta = \inf_{|x-x_0|=\eta} u(x) \quad \text{e} \quad M_\eta = \sup_{|x-x_0|=\eta} u(x)$$

temos pela primeira desigualdade de (2.26.1) que

$$0 \leq \liminf_{\eta \rightarrow 0} m_\eta \leq \limsup_{\eta \rightarrow 0} m_\eta \leq \limsup_{\eta \rightarrow 0} M_\eta.$$

Além disso, $\limsup_{\eta \rightarrow 0} M_\eta = 0$, pois se $\limsup_{\eta \rightarrow 0} M_\eta = a > 0$ teríamos que definindo $M'_\eta = \sup_{|x-x_0|=\eta} u'(x)$, $\limsup_{\eta \rightarrow 0} M'_\eta = \limsup_{\eta \rightarrow 0} M_\eta = a$. Mas em virtude de (2.26.2) seguiria que

$$a = \limsup_{\eta \rightarrow 0} M_\eta \leq d \limsup_{\eta \rightarrow 0} M'_\eta = da,$$

ou seja, $a < a$, o que é uma contradição. Portanto, $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$. ■

Exemplo 2.27 *Como, claramente, todo ponto $x_0 \in \partial\Omega$ que satisfaz a condição da esfera também satisfazerá a condição do cone exterior, temos mais uma vez que tais pontos são regulares, tal como os pontos do contorno de poliedros.*

Notemos que se Ω é um Domínio de Dirichlet então todos os seus pontos são regulares. Com efeito, dado $x_0 \in \partial\Omega$ temos que a função $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x - x_0|$, é uma função contínua. Portanto, por hipótese o Problema de Dirichlet com condição de contorno f tem solução, daí e pelo Princípio do Máximo a função obtida é uma barreira para x_0 .

Agora, passaremos a demonstrar a recíproca desse resultado.

Teorema 2.28 *Se f é uma função real contínua em $\partial\Omega$ que admite uma extensão contínua em $\bar{\Omega}$ e subharmônica em Ω , a função dada pelo Método da Varredura de Poincaré é contínua em todos os pontos regulares.*

Demonstração: Seja $y \in \partial\Omega$. Como $u(x) \geq f(x)$, onde também estamos denotando por f a extensão subharmônica de f considerada no Método de Varredura da Poincaré, temos que

$$\liminf_{x \rightarrow y} u(x) \geq \liminf_{x \rightarrow y} f(x) = f(y). \quad (2.28.1)$$

Pela continuidade da f em $\partial\Omega$ temos que dado $\epsilon > 0$ existe $B_\delta(y) \subset \mathbb{R}^n$ tal que se $x \in B_\delta(y) \cap \partial\Omega$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Sejam w uma barreira para Ω em y e $w_0 = \min_{\partial\Omega \setminus B_\delta(y)} w$, onde o diminuimos, se necessário, para que o mínimo não seja tomado num conjunto vazio. Como $w(x) > 0$ se $x \neq y$, temos que $w_0 > 0$. Logo, se considerarmos a função

$$v(x) = f(y) + \epsilon + \frac{w(x)}{w_0}(M - f(y)), \quad (2.28.2)$$

onde $M = \max_{\partial\Omega} f$, teremos que v será superharmônica. Além disso, $f - v < 0$ em $\partial\Omega$. De fato, se $x \in B_\delta(y) \cap \partial\Omega$ tem-se:

$$f(x) - v(x) = f(x) - f(y) - \epsilon - \frac{w(x)}{w_0}(M - f(y)) \leq f(x) - f(y) - \epsilon < 0,$$

já no caso de $x \in \partial\Omega \setminus B_\delta(y)$ temos que $w(x) \geq w_0$, de onde

$$\begin{aligned} f(x) - v(x) &= f(x) - f(y) - \epsilon - \frac{w(x)}{w_0}(M - f(y)) \\ &\leq f(x) - f(y) - \epsilon - (M - f(y)) = f(x) - M - \epsilon \leq -\epsilon < 0. \end{aligned}$$

Pelo Princípio do Máximo para funções subharmônicas seguirá que $f - v < 0$ em $\bar{\Omega}$. Agora, se f_1 é a harmonizada de f em B_1 temos que $f_1 - v = f - v < 0$ em $\partial\Omega$, mas como $f_1 - v$ também é subharmônica em Ω e contínua em $\bar{\Omega}$ seguirá pelo mesmo princípio que $f_1 - v < 0$ em Ω . Portanto, por indução toda f_k do método de Poincaré satisfaz $f_k < v$ em Ω . Daí, $u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \leq v(x)$ se $x \in \Omega$. Finalmente, usando a equação (2.28.2) temos que

$$\limsup_{x \rightarrow y} u(x) \leq \limsup_{x \rightarrow y} v(x) = f(y) + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, obtemos $\limsup_{x \rightarrow y} u(x) \leq f(y)$, que junto com (2.28.1) concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow y} u(x) = f(y). \quad \blacksquare$$

Conforme esperado, enunciaremos um teorema que caracteriza os Domínios de Dirichlet. O fato formidável no próximo resultado é que dado qualquer domínio basta que a fronteira saísfaça uma condição de regularidade para que o Problema de Dirichlet sempre admita solução, não importando qual seja a condição de contorno.

Teorema 2.29 *Um domínio Ω é de Dirichlet se, e somente se, todos os pontos da sua fronteira são regulares.*

Demonstração: Se todos os pontos de $\partial\Omega$ são regulares pelo teorema (2.28) temos que a função harmônica dada pelo Método da Varredura de Poincaré será contínua em $\overline{\Omega}$, portanto, tal função será solução do Problema de Dirichlet com contorno igual a f ; e a recíproca já havíamos afirmado. ■

2.3 Método de Perron

A estratégia, inaugurada por Poincaré, de a partir de um aberto limitado com uma condição de contorno determinar uma função harmônica e, por conseguinte, analisar o comportamento dessa função na fronteira, também foi explorada por Oskar Perron (1880-1975).

O trabalho principal de Perron está contido no seu artigo [22]. Wiener em [29], embora com algumas críticas, como não responder de forma completa os problemas concernentes ao problema de Dirichlet e que alguns resultados são casos particulares de outros desenvolvidos anteriormente por Kellogg, fez a seguinte menção “ele é distinguido pela sua peculiar elegância e simplicidade”.

Um fato inesperado é que se poder aplicar o Método da Varredura de Poincaré à condição de contorno então ambos os métodos levaram-nos à mesma função harmônica. Fato já esperado quando todos os pontos da fronteira são regulares, pois, como já vimos, a função obtida pelo processo de varredura de Poincaré será solução do Problema de Dirichlet, bem como a função de Perron, vide proposição (2.32). Logo, como a solução do problema de Dirichlet é única temos que ambas as funções são iguais. Já o caso geral é encontrado em

(2.33).

Definição 2.30 Se Ω e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são limitados definimos a classe de subfunções de Ω associadas a f como

$$\mathcal{A}_f = \{v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua; } v \text{ é subharmônica em } \Omega \text{ e } v \leq f \text{ em } \partial\Omega\}.$$

e a função de Perron $U_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de Ω associado a f por

$$U_f(x) = \sup_{v \in \mathcal{A}_f} v(x).$$

A imposição da hipótese de f ser limitada tem a finalidade de que \mathcal{A}_f seja não vazio e que a função de Perron esteja bem definida. De fato, a função $v = \inf_{\partial\Omega} f \in \mathcal{A}_f$ e pelo Princípio do Máximo toda $v \in \mathcal{A}_f$ satisfaz $v(x) \leq \sup_{\partial\Omega} v \leq \sup_{\partial\Omega} f$, logo, $\sup_{v \in \mathcal{A}_f} v(x) \leq \sup_{\partial\Omega} f < \infty$.

Teorema 2.31 A função de Perron $U_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica.

Demonstração: Seja $B = B_r(x_0) \subset\subset \Omega$. Mostraremos que U_f é harmônica em B . Pela definição de U_f temos que existe uma seqüência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de funções em \mathcal{A}_f tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x_0) = U_f(x_0).$$

Observemos que podemos supor que a seqüência é não-decrescente, pois, caso não fosse, bastaria tomar seqüência $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, cujo k -ésimo termo é dado por $v_k = \max\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$. Se considerarmos a harmonizada u_k^B de u_k em B teremos pelo Princípio do Máximo que $\{u_k^B\}_{k \in \mathbb{N}}$ também será não-decrescente e $u_k \leq u_k^B$, o que juntamente com o fato de que $u_k^B \in \mathcal{A}_f$ para todo $k \in \mathbb{N}$, nos dá

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k^B(x_0) = U_f(x_0).$$

Portanto, pelo corolário (A.12), $\{u_k^B\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge em B para uma função harmônica que denotaremos por U . Logo, a demonstração terminará se tivermos $U = U_f$ em B . Como $u_k^B \in \mathcal{A}_f$, para todo $k \in \mathbb{N}$, é imediato que $U \leq U_f$ em B . Assim, resta provar que $U_f(x) \leq U(x)$ para todo $x \in B$. Suponhamos que exista $y \in B$ tal que $U(y) < U_f(y)$. Analogamente como acima consideremos uma seqüência $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{A}_f tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(y) = U_f(y)$. Mas,

agora, tomemos $w_k = \max\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k\}$ e w_k^B . Também é fácil ver que $w_k^B \in \mathcal{A}_f$ e $w_{k+1}^B \geq w_k^B$, $w_k^B \geq w_k \geq \max\{u_k, v_k\}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w_k^B(y) = U_f(y) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} w_k^B(x_0) = U_f(x_0). \quad (2.31.1)$$

Novamente, pelo corolário (A.12) seguirá que $\{w_k^B\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergirá para uma função W harmônica em B . De $w_k^B \geq u_k^B$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que a função harmônica $W - U$ é não-negativa em B . Mas $W(x_0) = U(x_0)$, logo, pelo Princípio do Mínimo temos que $W = U$, o que é uma contradição, pois de (2.31.1) teríamos que $W(y) = U_f(y) > U(y)$. ■

Perron no seu artigo [22] foi um pouco mais além, definindo a classe das superfunções de Ω associadas a f como

$$\mathfrak{B}_f = \{v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua; } v \text{ é superharmônica em } \Omega \text{ e } v \geq f \text{ em } \partial\Omega\}.$$

e considerou a função

$$V_f(x) = \inf_{v \in \mathfrak{B}_f} v(x).$$

Por conseguinte, provou que V_f também é harmônica e que se f é contínua então as subfunção e superfunção associadas a f são idênticas.

Provada a harmonicidade de U_f em Ω passamos ao improvável resultado citado no preâmbulo da seção: da unicidade dos Métodos da Varredura de Poincaré e Perron. Contudo, antes mostraremos que no caso do Problema de Dirichlet possuir uma solução esta será a função de Perron.

Proposição 2.32 *Se o Problema de Dirichlet com condição de contorno f tiver uma solução u então $u = U_f$.*

Demonstração Observemos que até o momento estamos considerando apenas soluções no sentido clássico, então f necessariamente tem que ser contínua. É imediato que u é uma subfunção, logo, $u \leq U_f$. Por fim, provemos que $U_f \leq u$. Mas, para isto observe que para qualquer subfunção v temos que $v - u \leq 0$ em $\partial\Omega$, de onde pelo Princípio do Máximo segue que $v \leq u$. Portanto, $U_f \leq u$. ■

Proposição 2.33 *Seja $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Se f admitir uma extensão contínua a $\bar{\Omega}$ e subharmônica em Ω então as funções harmônicas obtidas pelo Método de Perron e da Varredura de Poincaré serão a mesma.*

Demonstração: Seja u a função harmônica obtida pelo Método da Varredura de Poincaré aplicado a f_0 , onde f_0 é uma extensão contínua de f em $\bar{\Omega}$ e subharmônica em Ω . Sendo f_k como na demonstração do Método da Varredura temos que $f_k \in \mathcal{A}_f$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, logo,

$$u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \leq U_f(x).$$

Para provar que $U_f(x) \leq u(x)$ para todo $x \in \Omega$, suponhamos que isto não ocorra, ou seja, existe $y \in \Omega$ tal que $u(y) < U_f(y)$. Logo, pela definição de U_f existe $v \in \mathcal{A}_f$ tal que $u(y) < v(y)$. Tomando $u_0(x) = \max\{v(x), f_0(x)\}$, ao aplicar o Método de Varredura a u_0 obteremos novamente u , pois pela proposição (2.21) o método independe da extensão considerada. Porém, teríamos a contradição $u(y) \geq u_0(y) = v(y) > u(y)$. Portanto obtemos que $U_f = u$. ■

Através da última proposição, no caso da função de contorno ser contínua, teremos que todos os resultados inerentes à função obtida pelo Método da Varredura de Poincaré também serão válidos para a função de Perron, inclusive os dois próximos teoremas.

Teorema 2.34 *Seja $x_0 \in \partial\Omega$ um ponto regular de Ω . Se f é contínua em x_0 então*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} U_f(x) = f(x_0).$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$ pela continuidade de f em x_0 , temos que existe $\lambda > 0$ tal que se $x \in \partial\Omega$ e $|x - x_0| < \lambda$ então

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{2.34.1}$$

Agora, consideremos a barreira $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ de x_0 em Ω , $\varphi_0 = \min_{\bar{\Omega} \setminus B_{x_0}(\delta)} \varphi > 0$ e $M = \sup_{\partial\Omega} f$. Se $x \in \partial\Omega \setminus B_{x_0}(\delta)$ tem-se que

$$f(x) < f(x_0) + \epsilon + \frac{\varphi(x)}{\varphi_0}(M - f(x_0)) \tag{2.34.2}$$

$$\text{e } f(x) > f(x_0) - \epsilon - \frac{\varphi(x)}{\varphi_0}(M + f(x_0)). \tag{2.34.3}$$

Logo, de (2.34.1) vemos que as desigualdades acima são verificadas em $\partial\Omega$. Definindo $u(x) = f(x_0) - \epsilon - \frac{\varphi(x)}{\varphi_0}(M + f(x_0))$ e $v(x) = f(x_0) + \epsilon + \frac{\varphi(x)}{\varphi_0}(M - f(x_0))$ teremos que u é uma subfunção e v é superharmônica, de onde, v majora toda subfunção. Portanto,

$$f(x_0) - \epsilon - \frac{\varphi(x)}{\varphi_0}(M - f(x_0)) \leq U_f(x) \leq f(x_0) + \epsilon + \frac{\varphi(x)}{\varphi_0}(M - f(x_0)),$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$. Por fim, da continuidade de φ em x_0 , onde vale 0, e da arbitrariedade de $\epsilon > 0$ segue que $\lim_{x \rightarrow x_0} U_f(x) = f(x_0)$. ■

No prosseguimento do trabalho será necessário a definição de solução do Problema de Dirichlet quando a condição de contorno não for contínua.

Definição 2.35 *Sejam Ω um aberto limitado e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Diremos que uma função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é solução do Problema de Dirichlet com condição de contorno f se u é harmônica em Ω e $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = f(x_0)$ para todo $x_0 \in \partial\Omega$ em que f é contínua.*

Observação 2.36 *Nesse caso mais geral não teremos unicidade de soluções. Como exemplo, podemos considerar $\Omega = B(0) \subset \mathbb{R}^2$ e $f(x) = 1$ se o ângulo entre x e 0 é irracional e $f(x) = 0$ caso contrário. Como f não é contínua em nenhum ponto, qualquer função harmônica em $B(0)$ será solução do Problema de Dirichlet. Em particular, todas as constantes.*

Mas, evidentemente, que a partir do teorema (2.34) temos a seguinte proposição

Proposição 2.37 *Seja Ω um aberto tal que todos os pontos da sua fronteira são regulares. Então o Problema de Dirichlet tem ao menos uma solução limitada para qualquer condição de contorno limitada.*

Também do último teorema segue

Teorema 2.38 *Um domínio é de Dirichlet se, e somente se, todos os seus pontos são regulares.*

2.4 Método de Schwarz

Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) notou que os domínios $\Omega \subset \mathbb{C}$ que admite uma aplicação conforme $h : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{B}_1(0)$, onde $B_1(0)$ é o disco unitário em \mathbb{C} , tal que $h : \partial\Omega \rightarrow B_1(0)$ é um homeomorfismo são Domínios de Dirichlet. De fato, dada $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ consideremos uma função harmônica $v : \bar{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ com $v = f \circ h^{-1}$ em $\partial B_1(0)$, logo, $u = v \circ h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é solução do Problema de Dirichlet com condição de contorno f , pois h sendo uma aplicação conforme é analítica.

Observado este fato, Schwarz, juntamente com Kar Gottfried Neumann (1793-1870), passou a construir aplicações conformes para polígonos convexos e, conseqüentemente, ambos conseguiram por aproximações representações conformes para regiões convexas. Com tais resultados, Schwarz resolveu o Problema de Dirichlet para uma grande classe de abertos do plano, a qual foi alargada com a sua demonstração de que reunião de domínios suaves de Dirichlet que não se tangenciam também é um domínio de Dirichlet, resultado que será, agora, nosso objetivo. Porém, primeiramente, é necessário compreender o que vem a ser um aberto suave.

Definição 2.39 *Um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito suave se para qualquer ponto $x_0 \in \partial\Omega$ existem um aberto $W \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ tal que $\nabla\psi(x) \neq 0$ para todo $x \in W$ e $W \cap \partial\Omega = \psi^{-1}(0)$.*

Se supusermos também que $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ é conexo teremos que para cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ existe um caminho contínuo de x_0 ao infinito contido em $\mathbb{R} \setminus \Omega$ e, conseqüentemente, estaremos aptos a considerar uma função argumento $arg_{x_0} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, onde definimos $arg_{x_0}(x_0) = 0$. Portanto, arg_{x_0} será uma função contínua em $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$ e harmônica em Ω . Além disso, como $\partial\Omega$ tem tangente em x_0 temos que

$$\lim_{\substack{x \in \partial\Omega \\ x \rightarrow x_0^+}} arg_{x_0}(x) - \lim_{\substack{x \in \partial\Omega \\ x \rightarrow x_0^-}} arg_{x_0}(x) = \pi.$$

Já sabemos do teorema (2.37) que todo Domínio de Dirichlet com condição de fronteira seccionalmente contínua tem uma solução limitada. Agora, faremos uso da função argumento

para construir uma solução explícita. Dados um Domínio de Dirichlet Ω e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente contínua, com pontos de descontinuidades $\{x_1, \dots, x_n\}$, considerando $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\text{arg}_{x_i}(x)}{\pi} & \text{se } x \in \partial\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \\ 0 & i=1, \dots, n \end{cases},$$

onde α_i é o salto da função f em x_i , isto é, $\alpha_i = \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$, $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ será contínua. Seja, então, $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ a solução do Problema de Dirichlet com condição de fronteira g . Portanto, $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = v(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\text{arg}_{x_i}(x)}{\pi}$$

é uma solução procurada.

Agora, provemos que também temos unicidade de soluções limitadas do Problema de Dirichlet com condição de fronteira descontínua numa quantidade finita. Portanto, a função obtida acima é a mesma de Perron.

Proposição 2.40 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$ e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, exceto numa quantidade finita $\{x_1, \dots, x_n\}$. Então o Problema de Dirichlet com condição de contorno f admite no máximo uma solução limitada.*

Demonstração: Sejam u_1 e u_2 duas soluções limitadas do problema de Dirichlet com condição de contorno f então $u = u_1 - u_2 = 0$ em $\partial\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, existe $M > 0$ tal que $|u(x)| \leq M$ para todo $x \in \Omega$ e u é harmônica em Ω . Mostremos que u é identicamente nula. Seja $0 < \epsilon < 1$ suficientemente pequeno, de forma que $B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_j) = \emptyset$ para $i \neq j$. Consideremos a função

$$v_\epsilon(x) = M\epsilon^{n-2} \left(\frac{1}{|x - x_1|^{n-2}} + \dots + \frac{1}{|x - x_n|^{n-2}} \right).$$

Vemos que u e v_ϵ são funções harmônicas em $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus B_\epsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\epsilon(x_n)$ e contínuas em $\bar{\Omega}_\epsilon$. Além disso, $u \leq v_\epsilon$ em $\partial\Omega_\epsilon$, de onde, pelo Princípio do Máximo $u \leq v_\epsilon$ em $\partial\Omega_\epsilon$. Dado $x \in \Omega$ temos que $u(x) \leq v_\epsilon(x)$ para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, fazendo ϵ tender a zero $u(x) \leq v_\epsilon(x) = 0$, portanto, concluímos que $u \leq 0$. Trocando os papéis de u_1 e u_2 na demonstração temos que $u \geq 0$. Logo, $u = 0$. ■

No caso de nosso interesse, do plano, uma demonstração nos mesmos moldes é dificultada pela natureza distinta da solução fundamental. Contudo, uma outra foi obtida por Kellogg em [16] ao demonstrar que a proposição acima é válida caso o seguinte lema também o seja.

Lema 2.41 (Lema Fundamental) *Qualquer conjunto fechado e limitado de pontos de capacidade positiva tem ao menos um ponto regular*

No mesmo artigo, assegurou a asserção no caso bi-dimensional. A definição de capacidade no caso \mathbb{R}^2 é apresentada por Wiener em [27], no capítulo 4) introduziremos o conceito para $n \geq 3$.

Sejam Ω um Domínio de Dirichlet, $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \gamma_1 \\ 0 & \text{se } x \in \overline{\gamma_2} \end{cases},$$

onde γ_1 e γ_2 são dois abertos em $\partial\Omega$ tais que $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \partial\Omega$ e $\overline{\gamma_1} \cap \overline{\gamma_2} = \{p, q\}$, e u_0 a solução

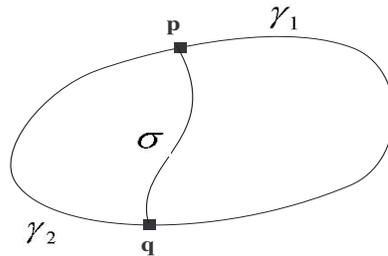


Figura 2.1.

limitada do Problema de Dirichlet de Ω com condição de contorno f . Se tivermos uma curva diferenciável $\sigma : [0, 1] \rightarrow \overline{\Omega}$ tal que $\sigma(s) \in \Omega$ para $0 < s < 1$, $\sigma(0) = p$ e $\sigma(1) = q$ teremos pelo Princípio do Máximo $u_0(\sigma(s)) < 1$ para $0 < s < 1$, pois pela proposição (2.40) u_0 é igual a função de Perron associada a f que é menor que 1 em todos os pontos de Ω . Além disso, se σ não tangenciar $\partial\Omega$ em p e em q , devido a forma de u_0 , também seguirá que $\lim_{s \rightarrow 0} u_0(\sigma(s)) = < 1$ tal como $\lim_{s \rightarrow 1} u_0(\sigma(s)) = < 1$. Assim,

$$\theta_\sigma = \max_\sigma u < 1$$

No transcorrer do texto precisaremos generalizar o Princípio do Máximo, para que seja aplicável em funções harmônicas com fronteira seccionalmente contínua.

Proposição 2.42 (*Princípio do Máximo Generalizado*) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um Domínio de Dirichlet, $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função descontínua numa quantidade finita de pontos tal que $f \leq M$, onde M é uma constante, e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função subharmônica e contínua em $\overline{\Omega}$, exceto nos pontos de descontinuidade de f . Se $\limsup_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq M$ para todo ponto x_0 de descontinuidade de f então*

$$u(x) \leq M, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Demonstração: Sejam x_1, x_2, \dots, x_k os pontos de descontinuidade de f e $\epsilon > 0$ tais que $\sup_{B_\epsilon(x_j)} u(x) \leq M + \epsilon$, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Como u é subharmônica em $\Omega \setminus \cup_j B_\epsilon(x_j)$ temos pelo Princípio do Máximo que $u(x) \leq M + \epsilon$ em $\Omega \setminus \cup_j B_\epsilon(x_j)$. Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos que $u(x) \leq M$. ■

Com a demonstração baseada nas mesmas idéias da anterior também temos a seguinte:

Proposição 2.43 (*Princípio do Mínimo Generalizado*) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um Domínio de Dirichlet, $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função descontínua numa quantidade finita de pontos tal que $f \geq m$, onde m é uma constante, e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função superharmônica e contínua em $\overline{\Omega}$, exceto nos pontos de descontinuidade de f . Se $\liminf_{x \rightarrow x_0} u(x) \geq m$ para todo ponto x_0 de descontinuidade de f então*

$$u(x) \geq m, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Lema 2.44 *Sejam Ω um Domínio de Dirichlet, γ_1 e γ_2 como acima. Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ é harmônica em Ω e $u = 0$ em γ_2 então*

$$\max_{\sigma} u \leq \theta_{\sigma} \max_{\partial\Omega} u \tag{2.44.1}$$

Demonstração: Considerando a função u_0 acima, temos que $Mu_0 - u \geq 0$ em $\partial\Omega$, onde $M = \max_{\partial\Omega} u$. Logo, pelo Princípio do Mínimo Generalizado (2.43) temos que $Mu_0 - u \geq 0$ em Ω . Em particular,

$$u(x) \leq \theta_{\sigma} M,$$

para todo $x \in \sigma$. ■

Finalmente, provaremos o resultado central da seção.

Teorema 2.45 *Sejam Ω_1 e Ω_2 dois domínios de Dirichlet suaves tais que $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1$ e $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_2$ são conexos. Se Ω_1 e Ω_2 não se tangenciam então $\Omega_1 \cup \Omega_2$ também é um Domínio de Dirichlet.*

Demonstração: A idéia da demonstração é contruir, a partir de $f \in \mathcal{C}(\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2))$, duas seqüências que convergirão para soluções u e v de certos Problemas de Dirichlet em Ω_1 e Ω_2 , respectivamente, coincidentes em $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$. Pois, daí poderemos concluir que a função $w : \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$w(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in \overline{\Omega_1} \\ v(x), & \text{se } x \in \overline{\Omega_2}, \end{cases}$$

será a solução do Problema de Dirichlet em $\Omega_1 \cup \Omega_2$ com condição de contorno f . Dada $f \in \mathcal{C}(\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2))$ estendemos-a a uma função contínua $h_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e definimos $u_1 : \overline{\Omega_1} \rightarrow \mathbb{R}$ como a solução do Problema de Dirichlet em Ω_1 com condição de fronteira h_1 e, daí, $v_1 : \overline{\Omega_2} \rightarrow \mathbb{R}$ solução do Problema de Dirichlet em Ω_2 com condição de fronteira g , dada por $g(x) = f(x)$ se $x \in \partial\Omega_2 \setminus \sigma_1$ e $g(x) = u_1(x)$ se $x \in \sigma_1$. Por recursividade definimos u_k e v_k para $k > 1$ da seguinte forma: u_k a solução do Problema de Dirichlet em Ω_1 com condição de fronteira

$$h_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in \partial\Omega_1 \setminus \sigma_2 \\ v_{k-1}(x), & \text{se } x \in \sigma_2. \end{cases}$$

e v_k em Ω_2 com contorno

$$g_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in \partial\Omega_2 \setminus \sigma_1 \\ u_k(x), & \text{se } x \in \sigma_1, \end{cases}$$

onde σ_1 e σ_2 são os pontos de $\partial\Omega_2$ e de $\partial\Omega_1$ que estão em Ω_1 e Ω_2 , respectivamente. Para

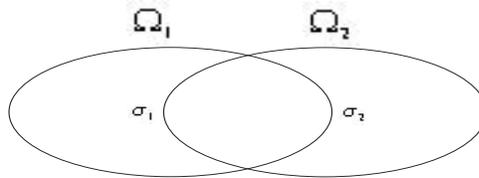


Figura 2.2.

mostrar que u_k e v_k convergem uniformemente escrevemos

$$u_k = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_k - u_{k-1})$$

$$\text{e } v_k = v_1 + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots + (v_k - v_{k-1})$$

Se $M = \max_{\partial\Omega} |f| + \max_{\partial\Omega_1} |h_1|$ temos que $|u_2 - u_1| \leq 2M$ em $\partial\Omega_1$, de onde $|u_2 - u_1| \leq 2M$ em Ω_1 . Como $u_2 - u_1 = 0$ em $\partial\Omega_1 \setminus \sigma_2$, pelo lema precedente seguirá que

$$|u_2 - u_1| \leq 2M\theta_{\sigma_1} \leq 2M\theta$$

em σ_1 , onde $\theta = \max\{\theta_{\sigma_1}, \theta_{\sigma_2}\}$. Logo, $|v_2 - v_1| \leq 2M\theta$ em $\partial\Omega_2$ e, portanto, $|v_2 - v_1| \leq 2M\theta$ em Ω_2 . Usando, novamente, o lema anterior obteremos que $|v_2 - v_1| \leq 2M\theta^2$ em σ_2 . De onde usando mais uma vez o Princípio do Máximo teremos que $|u_3 - u_2| \leq 2M\theta^2$ em Ω_1 . Procedendo indutivamente temos as seguintes desigualdades:

$$|u_k - u_{k-1}| \leq 2M\theta^{2k-4} \quad \text{e} \quad |v_k - v_{k-1}| \leq 2M\theta^{2k-3}.$$

Portanto,

$$|u_1| + |u_2 - u_1| + \dots + |u_k - u_{k-1}| \leq M + \sum_{j=2}^k 2M\theta^{2j-4} \leq M + \frac{2M}{1 - \theta^2}$$

e, analogamente,

$$|v_1| + |v_2 - v_1| + \dots + |v_k - v_{k-1}| \leq M + \frac{2M\theta}{1 - \theta^2},$$

ou seja, u_k e v_k convergem a u e v , as quais pela proposição (A.10) são harmônicas em Ω_1 e Ω_2 , respectivamente. Por fim, notemos que $\{v_k - u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{v_{k-1} - u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergem a $v - u$. Mas $v_k = u_k$ em σ_1 e $v_{k-1} = u_k$ em σ_2 , de onde $v = u$ em $\sigma_1 \cup \sigma_2$. Portanto, teremos $v = u$ em $\Omega_1 \cap \Omega_2$. ■

2.5 A Função de Wiener

Outro matemático que contribuiu significativamente para o enriquecimento da Teoria do Potencial com muitos resultados e conceitos foi Nobert Wiener. Seguindo o caminho de Poincaré e Perron, Wiener, num artigo de 1924 [27], por meio de uma construção distinta também obteve, a partir de um domínio com condição de contorno, uma função harmônica que é solução do Problema de Dirichlet, caso esse admita solução.

Observemos que todo aberto Ω mensurável e limitado de \mathbb{R}^n admite uma seqüência $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\Omega = \cup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$, $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \subset \Omega$, todo aberto $\Omega' \subset \subset \Omega$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$

tal que $\Omega' \subset \Omega_k$ para todo $k \geq k_0$ e Ω_k é um Domínio de Dirichlet para cada $k \in \mathbb{N}$. De fato, se $\Omega \subset \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, com $b_i - a_i \in \mathbb{N}$, basta tomar Ω_k como sendo a união dos blocos da partição $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_n$, onde $\mathcal{P}_i = \{a_i, a_i + 1/2^k, a_i + 2/2^k, \dots, b_i\}$, contidos em Ω . Então, dada $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ tomemos uma extensão contínua \bar{f} em $\bar{\Omega}$ e consideremos $w_k(x) = \bar{f}(x)$ se $x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_k$ e $w_k(x) = u(x)$ se $x \in \Omega_k$, onde $u : \Omega_k \rightarrow \mathbb{R}$ é solução do Problema de Dirichlet com condição de fronteira $\bar{f}|_{\partial\Omega_k}$. Com as notações introduzidas, finalmente, definimos

Definição 2.46 *Se $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua, onde Ω admite uma decomposição $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ do tipo acima, definimos a Função de Wiener em Ω associada a f por*

$$W(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k(x).$$

No teorema a seguir, além de demonstrar que W é harmônica em Ω , demonstraremos que W está bem definida.

Teorema 2.47 *A Função de Wiener $W : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica.*

Demonstração: Suponhamos, inicialmente, que f admita uma extensão contínua em $\bar{\Omega}$ e subharmônica em Ω . Notemos que $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência não-decrescente de funções subharmônicas e pelo Princípio do Máximo limitadas por $\sup_{\partial\Omega} f$. Assim, existe o limite

$$W(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k(x),$$

para cada $x \in \Omega$. Além disso, dado um aberto $\Omega' \subset\subset \Omega$ temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Omega' \subset\subset \Omega_k$, para todo $k > k_0$. Portanto, $\{w_k\}_{k \geq k_0}$ é uma seqüência não-decrescente de funções harmônicas em Ω' que converge pontualmente para W , logo, pelo corolário (A.12) $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a W , e, conseqüentemente, será harmônica em Ω' . Como Ω' é qualquer aberto em Ω , cujo fecho também pertence a Ω , temos que W é harmônica em Ω . Agora, no caso em que f é um polinômio podemos escrever f como diferença de duas funções subharmônicas $f_1 = A|x|^2 + f(x)$, $f_2 = A|x|^2$, com A suficientemente grande. Logo, se w_k, v_k, u_k são as funções obtidas, como acima, de f, f_1 e f_2 temos pela unicidade do Problema de Dirichlet que $w_k = v_k - u_k$. Como v_k e u_k convergem a funções harmônicas U e V e $W = U - V$ temos que W está bem definida e é harmônica em Ω . Por fim,

vejamos o caso em que f é uma função contínua. Sejam $\Omega' \subset\subset \Omega$ e P um polinômio tais que $|f(x) - P(x)| < \epsilon$ para todo $x \in \bar{\Omega}$. Consideremos, também, as seqüências $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ construídas na definição da Função de Wiener de f e de P . Mas, como vimos, $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em Ω' , logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|u_l(x) - u_m(x)| < \epsilon$ se $x \in \Omega'$ e $k, m \geq k_0$. Além disso, de $\Omega' \subset\subset \Omega$ segue que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\Omega' \subset \Omega_k^1 \cap \Omega_k^2$ sempre que $k \geq k_1$, onde $\{\Omega_k^1\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\Omega_k^2\}_{k \in \mathbb{N}}$ são as decomposições de Ω utilizadas na construção das Funções de Wiener de f e de P , respectivamente. Pelo Princípio do Máximo temos que $|w_k - u_k| < \epsilon$ em Ω' desde que $k \geq k_1$. Logo, se $k, l \geq \max\{k_0, k_1\}$ temos que

$$|w_k(x) - w_l(x)| \leq |w_k(x) - u_k(x)| + |u_k(x) - u_l(x)| + |u_l(x) - w_k(x)| < 3\epsilon,$$

para todo $x \in \Omega'$. Portanto, pelo Critério de Cauchy $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em Ω' , e pela proposição (A.10) também temos que W é harmônica em Ω' . ■

A mesma pergunta que surgiu no Método da Varredura de Poincaré referente a unicidade do método ressurge novamente e as duas próximas proposições fornecerão a independência em relação à decomposição do domínio e à extensão da função contorno.

Proposição 2.48 *Sejam $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\Omega'_k\}_{k' \in \mathbb{N}}$ duas decomposições de Ω . Então as funções de Wiener obtidas pelas duas decomposições e por uma função contínua $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ serão iguais*

Demonstração: Suponhamos, inicialmente, que f admite uma extensão subharmônica \bar{f} . Consideremos as Funções de Wiener W_1 e W_2 em $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\Omega'_k\}_{k' \in \mathbb{N}}$, respectivamente, associadas a f , logo, $\bar{f} \leq W_1$ e $\bar{f} \leq W_2$. Dado $x \in \Omega$ temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \Omega_k \cap \Omega_{k'}$ para todo $k, k' \geq k_0$. Como $w_k^1 = \bar{f}$ em $\partial\Omega_k$ pelo Princípio do Máximo temos que

$$w_k^1(x) \leq W_2(x), \tag{2.48.1}$$

para todo $k \geq k_0$, daí $W_1(x) \leq W_2(x)$. De modo análogo $W_2(x) \leq W_1(x)$. Portanto, $W_1(x) = W_2(x)$. Sendo $x \in \Omega$ arbitrário, segue que $W_1 = W_2$. Provado o caso subharmônico, observando a demonstração do teorema anterior, facilmente, vemos que o resultado também é válido no caso em que f é um polinômio e, por fim, no caso geral em que é uma função contínua. ■

Proposição 2.49 *Seja $f \in C(\Omega)$ uma função que admite as extensões f_1 e f_2 contínuas em $\bar{\Omega}$. Então as Funções de Wiener associadas a f_1 e f_2 são iguais.*

Demonstração: Sejam W_1 e W_2 as Funções de Wiener associadas a f_1 e a f_2 , respectivamente. Como $f_1 - f_2$ é contínua em $\bar{\Omega}$ e $f_1 - f_2 = 0$ em $\partial\Omega$ segue que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f_1 - f_2| < \epsilon$ em $B(\partial\Omega, \delta)$. Tomando $k_0 \in \mathbb{N}$, com $\partial\Omega_k \subset B(\partial\Omega, \delta)$ para $k \geq k_0$ temos pelo Princípio do Máximo que

$$|w_k^1(x) - w_k^2(x)| < \epsilon,$$

para todos $x \in \Omega$ e $k \geq k_0$. Logo $|W^1(x) - W^2(x)| < \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário tem-se que $W^1 = W^2$. ■

Proposição 2.50 *Se o Problema de Dirichlet com condição de contorno $f \in C(\partial\Omega)$ admitir uma solução u então $u = W$.*

Demonstração: Sendo $u = f$ em $\partial\Omega$ temos pelo Princípio do Máximo que $w_k \leq u$ em $\bar{\Omega}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, onde a seqüência $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é a utilizada na construção da Função de Wiener. Portanto,

$$W(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k(x) \leq u(x). \tag{2.50.1}$$

Por fim, já vimos que a função de Wiener independe da extensão contínua de f tomada, logo, se considerarmos u como a extensão de f em $\bar{\Omega}$, teremos que $u \leq W$, o que juntamente com (2.50.1) nos fornece $W = u$. ■

Ao procurar resultados análogos aos da última seção obtemos

Proposição 2.51 *Dados um aberto limitado Ω que admite uma decomposição $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua que admite uma extensão contínua a $\bar{\Omega}$ e subharmônica em Ω temos que as Funções de Perron e de Wiener em Ω associadas a f são iguais.*

Demonstração: Como cada w_k , definida na construção de Wiener, é uma subfunção, é imediato que $W \leq U$. Por fim, provemos que $U \leq W$. Suponhamos que ocorra o contrário, ou seja, existe $y \in \Omega$ tal que $W(y) < U(y)$, logo, temos que existe uma subfunção u com $W(y) < u(y)$. Porém, já vimos que a Função de Wiener independe da extensão tomada, daí,

se considerarmos a extensão $\max\{u, \bar{f}\}$, vemos que $W(y) \geq u(y)$, o que é uma contradição. Portanto $W = U$. ■

A última proposição é um caso particular de um dos resultados encontrados no artigo [29] de Wiener, que ampliou os limites do alcance da teoria desenvolvida no artigo [22] de Perron que fora lançado pouco meses antes, em que afirma que no caso da condição de fronteira ser contínua a função de Wiener é simultaneamente igual ao supremo de todas subfunções e o ínfimo de todas as sobrefunções.

Corolário 2.52 *Sejam Ω um aberto limitado e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite uma extensão contínua a Ω e subharmônica em Ω . Então as funções obtidas pelo Método da Varredura de Poincaré, de Perron e de Wiener são as mesmas.*

Por fim, utilizando a última proposição e o teorema (2.38) temos, como nos métodos já vistos, uma boa caracterização dos Domínios de Dirichlet em função da geometria de sua fronteira.

Teorema 2.53 *Um aberto limitado Ω é um Domínio de Dirichlet se, e somente se, todos os pontos de sua fronteira são regulares.*

A analogia dos resultados dos métodos de Poincaré e de Wiener não é uma mera coincidência. Kellogg, em [12], notou que as construções das funções obtidas por tais métodos são casos particulares de uma outra mais geral que leva à uma função harmônica.

Definição 2.54 (Métodos das seqüências) *Sejam Ω um aberto limitado e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que admite uma extensão contínua a $\bar{\Omega}$ e subharmônica em Ω . Dada uma seqüência $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de abertos cujo fecho está contido em Ω tal que*

1. *O Problema de Dirichlet em Ω_k com condição de contorno $\bar{f}|_{\partial\Omega_k}$ é solúvel, para todo $k \in \mathbb{N}$;*
2. *Para cada $x \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \Omega_k$ para uma quantidade infinita de $k \in \mathbb{N}$,*

definimos recursivamente $v_0 = \bar{f}$ e

$$v_k(x) = \begin{cases} v_{k-1}(x) & \text{se } x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_{k-1} \\ u(x) & \text{se } x \in \Omega_k \end{cases},$$

onde u é a solução do Problema de Dirichlet em Ω_k com condição de contorno $\bar{f}|_{\partial\Omega_k}$. Então a Função de Kellogg associada a f é

$$V(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x).$$

Teorema 2.55 *Dadas duas seqüências $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\Omega'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ como na definição acima e duas extensões f_1 e f_2 contínuas de f em $\bar{\Omega}$ e subharmônicas em Ω então as Funções de Kellogg obtidas são iguais.*

Demonstrações análogas às encontradas nas seções precedentes mostram que V é uma função harmônica em Ω que converge a f nos pontos regulares de $\partial\Omega$ e a validade do último teorema. Logo, da unicidade da Função de Kellogg perante escolha das regiões Ω_k e da extensão subharmônica é imediato que as funções harmônicas obtidas por Poincaré e por Wiener têm que ser idênticas.

Capítulo 3

Método das Equações Integrais

O desenvolvimento da Análise Funcional e das Equações Diferenciais e Parciais sempre estiveram extremamente interligados. Como exemplo há o uso da Alternativa de Fredholm para resolver o Problema de Dirichlet para abertos em \mathbb{R}^n de classe \mathcal{C}^2 .

Neste método a questão de solubilidade do Problema de Dirichlet com contorno f será simplificado em determinar a solução de uma equação integral em $L^2(\partial\Omega)$. Pois, como veremos, a função $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} N(x, y) \phi(y) d\sigma(y),$$

onde $\phi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, é harmônica e $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \frac{1}{2} \phi(x_0) + \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} N(x_0, y) \phi(y) d\sigma(y)$. Mais adiante, definiremos um operador em $L^2(\partial\Omega)$ por

$$T_K \psi(x) = \int_{\partial\Omega} K(x, y) \psi(y) d\sigma(y),$$

onde $K(x, y) = \partial_{\nu_y} N(x, y)$. Portanto, o nosso problema transformar-se-á em resolver a equação

$$\frac{1}{2} + T_K = f$$

Um importante paliativo é que se f for contínua então a solução em $L^2(\partial\Omega)$ também será contínua, resolvendo, assim, completamente o Problema de Dirichlet para abertos com fronteira de classe \mathcal{C}^2 . O operador T_K sobressai-se entre os operadores limitados pelo fato de ser compacto, sendo, portanto, aplicável diversos teoremas peculiares e importantes como a Alternativa de Fredholm, fundamental na obtenção de uma solução da equação acima.

3.1 Alternativa de Fredholm

A Alternativa de Fredholm foi provada, primeiramente, por Erik Ivar Fredholm (1866-1927) para uma classe de operadores integrais em L^2 . Já em espaços de Hilbert a demonstração do resultado é devido a F. Riez, enquanto que para espaços de Banach foi obtida por Schauder.

Teorema 3.1 (Alternativa de Fredholm) *Sejam X um espaço de Banach e $T : X \rightarrow X$ um operador compacto. Se*

$$\mathcal{V}_\lambda = \{x \in X; Tx = \lambda x\} \quad e \quad \mathcal{W}_\lambda = \{x \in X; T^*x = \lambda x\},$$

onde λ é um número complexo, temos que

1. A dimensão do espaço gerado pelos autovetores de \mathcal{V}_λ , para $|\lambda| \geq \epsilon$ é finita, com $\epsilon > 0$ arbitrário;
2. Se $\lambda \neq 0$, $\dim(\mathcal{V}_\lambda) = \dim(\mathcal{W}_{\bar{\lambda}})$;
3. Se $\lambda \neq 0$, $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)} = \mathcal{R}(\lambda I - T)$.

Corolário 3.2 *Sejam X um espaço de Hilbert e $T : X \rightarrow X$ um operador compacto. Se $\lambda \neq 0$ então $y = (\lambda I - T)x$, para algum $x \in X$, se, e somente se, $y \in \mathcal{W}_{\bar{\lambda}}^\perp$.*

Demonstração: Lembrando o fato que $\overline{\mathcal{R}(S)} = \mathcal{N}(S^*)^\perp$, qualquer que seja o operador limitado S , segue que se $y = (\lambda I - T)x$ então $y \perp \mathcal{N}((\lambda I - T)^*)$, ou seja, $y \in \mathcal{W}_{\bar{\lambda}}^\perp$. Reciprocamente, se $y \in \mathcal{W}_{\bar{\lambda}}^\perp = \mathcal{N}((\lambda I - T)^*) = \overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)}$ teremos pela Alternativa de Fredholm item 3) que $y \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$. ■

E de que $\dim(\mathcal{V}_\lambda) = \dim(\mathcal{W}_{\bar{\lambda}})$ e do corolário anterior segue o próximo resultado, o qual frutificará uma bela interligação entre a Análise Funcional e as Equações Diferenciais e Parciais.

Corolário 3.3 *Sejam X um espaço de Hilbert e $T : X \rightarrow X$ um operador compacto. Se $\lambda \neq 0$ então $\lambda I - T$ é sobrejetivo se, e somente se, é injetivo.*

3.2 Potencial de Camada Dupla

Se $v \in C^2(\bar{\Omega})$ é harmônica temos pela Terceira Identidade de Green que

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} \left(v(y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x, y) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) N(x, y) \right) d\sigma(y).$$

Agora, se esquecermos o termo contendo a derivada normal de v obtemos uma nova função envolvendo apenas v na fronteira de $\partial\Omega$ e a solução fundamental. Assim, nos inspiramos a fazer a seguinte definição

Definição 3.4 *Seja $\phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. O potencial de camada dupla gerado por ϕ será a função $v : \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x, y) \phi(y) d\sigma(y). \quad (3.4.1)$$

Facilmente vemos que v é uma função harmônica. Fisicamente, v representa o potencial eletrostático determinado por uma distribuição superficial de dipólos elétricos com densidade ϕ . De fato, pela Lei Fundamental da Eletrostática, descoberta por Coulomb, temos que a força exercida entre duas cargas de cargas q_1 e q_2 é dada pela fórmula

$$F = \frac{K q_1 q_2}{r^2},$$

onde K é uma constante que depende do meio. A força sendo de repulsão ou atração se as cargas têm os mesmos ou diferentes sinais, respectivamente. É conveniente tomar a unidade de medida de forma que $K = 1$. O potencial gerado por uma carga q em y é dado por $u(x) = q/|x - y|$, isto é, a força exercida numa carga positiva unitária colocada em x é igual ao negativo do gradiente de u . Agora, se duas cargas q e $-q$ são colocadas em y e z , respectivamente, temos que o potencial gerado num ponto x é

$$u(x) = \frac{q}{|x - z|} - \frac{q}{|x - y|} = q|y - z| \frac{1}{|y - z|} \left(\frac{1}{|x - z|} - \frac{1}{|x - y|} \right).$$

Além disso, se as cargas aproximam-se numa direção fixa n de um ponto w de forma que $q \cdot |y - z| = M$, onde M é uma constante, temos que o potencial gerado no limite é $u(x) = M \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x - w|}$. Por fim, se os dipólos são distribuídos continuamente numa superfície S

com densidade ϕ e a direção dos dipólos em cada ponto é normal a superfície, obtemos o potencial de camada dupla

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x, y) \phi(y) d\sigma(y).$$

Durante esta seção e as seguintes deste capítulo a fim de facilitar os cálculos e demonstrações consideraremos a medida $|x - y|$ em coordenadas locais, pois essa medida e a dada no espaço ambiente têm a mesma ordem de magnitude quando $|x - y| \rightarrow 0$.

Passadas as motivações iniciais pretendemos analisar se é possível estender o potencial de camada dupla a $\partial\Omega$, isto é, dados $x \in \partial\Omega$ e uma função contínua $\phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ faz sentido (3.4.1)? O maior problema está na descontinuidade de $\partial_{\nu_y} N$ em $x = y$. De fato, se $K \in L^2(\partial\Omega \times \partial\Omega)$, facilmente, obtemos que o operador $T_K : L^2(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ dado por

$$T_K \phi(x) = \int_{\partial\Omega} K(x, y) \phi(y) d\sigma(y)$$

está bem definido e ainda será um operador compacto, como veremos adiante. Neste caso, dizemos que K é um Kernel Hilbert-Schmidt.

Proposição 3.5 *Se K é um Kernel Hilbert-Schmidt então T_K , definido acima, será um operador compacto em $L^2(\partial\Omega)$ e $\|T_K\| \leq \|K\|_2$.*

Demonstração: Pelo teorema de Fubini $K(x, \cdot) \in L^2(\partial\Omega)$ para quase todo ponto $x \in \partial\Omega$. Logo, pela desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned} |T_K \phi(x)| &\leq \int_{\partial\Omega} |K(x, y)| |\phi(y)| d\sigma(y) \leq \left(\int_{\partial\Omega} |K(x, y)|^2 d\sigma(y) \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\partial\Omega} |\phi(y)|^2 d\sigma(y) \right)^{1/2} \\ &\leq \|\phi\|_2 \left(\int_{\partial\Omega} |K(x, y)|^2 d\sigma(y) \right)^{1/2} = \|\phi\|_2 \|K(x, \cdot)\|_2. \end{aligned}$$

é finito em quase todo ponto. Além disso, novamente por Fubini

$$\begin{aligned} \|T_K \phi\|_2^2 &= \int_{\partial\Omega} |T_K \phi(x)|^2 d\sigma(x) \leq \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\partial\Omega} |K(x, y)|^2 d\sigma(y) \right) d\sigma(x) \|\phi\|_2^2 \\ &= \int_{\partial\Omega \times \partial\Omega} |K(x, y)|^2 d(\sigma \times \sigma) \|\phi\|_2^2 = \|K\|_2^2 \|\phi\|_2^2. \end{aligned}$$

Portanto, $T_K \phi \in L^2(\partial\Omega)$ e $\|T_K\|_2 \leq \|K\|_2$. Como $L^2(\partial\Omega)$ é separável temos que existe uma base ortonormal $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ de $L^2(\partial\Omega)$, logo, os elementos $\psi(x, y) = \phi_i(x) \phi_j(y)$, para

$i, j = 1, \dots, \infty$, constituem uma base de $L^2(\partial\Omega \times \partial\Omega)$. Portanto, dado $K \in L^2(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ temos que existem a_{ij} tais que $K(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} \psi_{ij}(x, y)$. Tomando

$$K_N(x, y) = \sum_{i,j \leq N} a_{ij} \psi_{ij}(x, y)$$

temos que $T_{K_N} \in \langle \phi_1, \dots, \phi_N \rangle$, portanto, compacto e

$$\|T_K - T_{K_N}\|_2 \leq \|K - K_N\|_2 = \sum_{i,j > N} |a_{ij}| < \epsilon,$$

se N é suficientemente grande. Ou seja, T_K é um operador compacto, pois é um operador limitado aproximado por operadores compactos. ■

Para generalizar o resultado acima para funções K de $\partial\Omega \times \partial\Omega$ com valores reais mais gerais, incluindo $\partial\nu_y N(x, y)$, o seguinte lema técnico será crucial.

Lema 3.6 *Seja S uma hiperfície compacta orientável em \mathbb{R}^n de classe \mathcal{C}^2 . Então existe $c > 0$ tal que*

$$|(x - y)\nu(y)| \leq c|x - y|^2, \tag{3.6.1}$$

para todo $x, y \in S$.

Demonstração: Notemos que basta mostrar o lema localmente, isto é, numa vizinhança de cada ponto $x_0 \in S$. De fato, tomemos $B_{r_1}(x_1), \dots, B_{r_n}(x_n)$ tais que se $x, y \in B_{r_i}(x_i) \cap S$ então

$$|(x - y)\nu(y)| \leq c_i|x - y|^2, \tag{3.6.2}$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, e $S \subset \cup_{i=1}^n B_{r_i/2}(x_i)$. Fixemos $1 \leq k \leq n$. Agora, se $x \in B_{r_k/2}(x_k) \cap S$ e $y \notin B_{r_k}(x_k)$ temos que $|x - y| \geq r_k/2$, de onde segue que

$$\left| \frac{\nu(y)}{|x - y|} \right| = \frac{1}{|x - y|} \leq \frac{2}{r_k} \leq m,$$

onde $m = \max\{2/r_i, i = 1, \dots, n\}$. Portanto, $|(x - y)\nu(y)| \leq m|x - y|^2$. O que, juntamente com (3.6.2), nos fornece

$$|(x - y)\nu(y)| \leq \bar{c}_k|x - y|^2,$$

se $x \in B_{r_k/2}(x_k)$ e $y \in S$, onde $\bar{c}_k = \max\{m, c_k\}$. Como $S \subset \cup_{i=1}^n B_{r_i/2}(x_i)$ concluímos que vale (3.6.1) com $c = \max\{\bar{c}_i, i = 1, \dots, n\}$. Passemos a demonstrar que dado $x_0 \in S$

podemos construir uma vizinhança de x_0 que valha (3.6.1). Sendo S uma hiperfície de classe \mathcal{C}^2 temos que S é localmente o gráfico de uma aplicação \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^{n-1} do tipo em que uma coordenada é dada em função das $n-1$ restantes, ou seja, supondo que a variável dependente é a n -enésima, existem $W \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , com $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aberto, que podemos supor convexo, tais que

$$S \cap W = \{(\xi, \varphi(\xi)); \xi \in V\}$$

Como $S \cap W = g^{-1}(0)$, onde $g : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $g(\xi, t) = t - \varphi(\xi)$ também temos que

$$\nu(\xi, \varphi(\xi)) = \pm \frac{\nabla g(\xi, \varphi(\xi))}{|\nabla g(\xi, \varphi(\xi))|} = \pm \frac{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}(\xi), \dots, -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_n}(\xi), 1\right)}{\left| \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}(\xi), \dots, -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_n}(\xi), 1\right) \right|}.$$

Diminuindo V , se necessário, da fórmula de Taylor com resto Lagrange segue que se $\xi, \eta \in V$ então

$$\varphi(\xi) = \varphi(\eta) + \nabla \varphi(\eta)(\xi - \eta) + R_\eta(\xi - \eta),$$

onde $|R_\eta(\xi - \eta)| \leq \frac{M}{2}|\xi - \eta|^2$ e $M = \sup_{\xi \in V} \|\nabla \varphi(\xi)\|$. Portanto, se $x = (\xi, \varphi(\xi)), y = (\eta, \varphi(\eta)) \in S \cap W$ com $x \neq y$, tem-se que

$$\begin{aligned} \left| \frac{(x-y)\nu(y)}{|x-y|^2} \right| &= |\nabla g(\eta, \varphi(\eta))|^{-1} \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(\eta) - \nabla \varphi(\eta)(\xi - \eta)|}{|x-y|^2} \\ &= |\nabla g(\eta, \varphi(\eta))|^{-1} \frac{|R_\eta(\xi - \eta)|}{|x-y|^2} \leq \frac{|R_\eta(\xi - \eta)|}{|\xi - \eta|^2} \\ &\leq \frac{M}{2} := c. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Assim, vemos que

$$\partial \nu_y N(x, y) = \frac{(x-y) \cdot \nu(y)}{\omega_n |x-y|^2} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} = \frac{A(x, y)}{|x-y|^{n-2}},$$

onde A é uma função limitada em $(\partial \Omega \times \partial \Omega) \setminus D$, onde $D = \{(x, x); x \in \partial \Omega\}$. De forma geral, fazemos uso da seguinte definição

Definição 3.7 *Seja S uma hiperfície compacta orientável de classe \mathcal{C}^2 . Uma função mensurável $K : (S \times S) \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$ é um kernel de ordem α , com $0 < \alpha \leq n-2$, se*

$$K(x, y) = A(x, y)|x-y|^{-\alpha}$$

e um kernel de ordem zero se

$$K(x, y) = A(x, y) \log |x - y| + B(x, y),$$

onde A e B são funções limitadas em $(S \times S) \setminus D$, onde $D = \{(x, x); x \in S\}$.

Portanto nessa linguagem, se $K(x, y) = \partial \nu_y N(x, y)$ então K é um kernel de ordem $n - 2$. A cada kernel $K : (S \times S) \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$ de ordem α associamos o operador $T_K : L^2(S) \rightarrow L^2(S)$, dado por

$$T_K \phi(x) = \int_S K(x, y) \phi(y) d\sigma(y). \quad (3.7.1)$$

Logicamente, devemos mostrar que T_K está bem definido, ou seja, $T_K \phi \in L^2(S)$ sempre que $\phi \in L^2(S)$. Sendo necessário no caso de kernel de ordem zero a estimativa de uma integral que faremos a seguir

Lema 3.8 *Existe $C > 0$ independente de ϵ tal que*

$$\int_{B_\epsilon} |\log |y|| d\sigma(y) \leq C \epsilon^{n-1} (1 + |\log \epsilon|),$$

onde $B_\epsilon = B_\epsilon(0) \cap S$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $\epsilon \leq 1$. Se δ é um número real positivo denotaremos $B_\delta = B_\delta(0) \cap S$. Por coordenadas polares e integração por partes

$$\begin{aligned} \int_{B_\epsilon} |\log |y|| d\sigma(y) &= - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{B_\epsilon \setminus B_\eta} \log |y| d\sigma(y) = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\eta^\epsilon \int_{\partial B_\rho} \log |z| d\sigma(z) d\rho \\ &= -\omega_{n-1} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{\rho^{n-1} \log \rho}{n-1} \Big|_\eta^\epsilon - \frac{1}{n-1} \int_\eta^\epsilon \rho^{n-2} d\rho \right) \\ &\leq C \epsilon^{n-1} (1 + |\log \epsilon|). \end{aligned}$$

No caso em que $\epsilon > 1$ separando a integrais em duas partes temos

$$\begin{aligned} \int_{B_\epsilon} |\log |y|| d\sigma(y) &= \int_1^\epsilon \int_{\partial B_\rho} \log |z| d\sigma(z) d\rho - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\eta^1 \int_{\partial B_\rho} \log |z| d\sigma(z) d\rho \\ &\leq \omega_{n-1} \left(\frac{\rho^{n-1} \log \rho}{n-1} \Big|_1^\epsilon - \frac{1}{n-1} \int_1^\epsilon \rho^{n-2} d\rho \right) + C_1 \epsilon^{n-1} \\ &\leq C \epsilon^{n-1} (1 + |\log \epsilon|), \end{aligned}$$

pois, como $\epsilon \geq 1$, temos que $1 - \epsilon^{n-1} \leq 0$. ■

Proposição 3.9 *Seja K um kernel de ordem α , $0 \leq \alpha \leq n - 2$, e T_K o operador associado ao kernel K . Então existe $C > 0$ independente de ϵ tal que*

$$\|T_K \phi\|_2 \leq C \epsilon^{n-1-\alpha} \|A\|_\infty \|\phi\|_2, \quad \text{se } \alpha > 0 \quad e$$

$$\|T_K \phi\|_2 \leq C \epsilon^{n-1} (\|A\|_\infty (1 + |\log \epsilon|) + \|B\|_\infty) \|\phi\|_2, \quad \text{se } \alpha = 0.$$

desde que $\text{sup } K \subset \{(x, y); |x - y| < \epsilon\}$.

Demonstração: Primeiramente, suponhamos que $\alpha > 0$, logo, usando coordenadas polares temos que se $x \in S$

$$\begin{aligned} \int_S |K(x, y)| d\sigma(y) &\leq \|A\|_\infty \int_{B_\epsilon} |x - y|^{-\alpha} d\sigma(y) = \|A\|_\infty \int_0^\epsilon \int_{\partial B_\rho} \rho^{-\alpha} d\sigma(z) d\rho \\ &\leq \omega_{n-1} \|A\|_\infty \int_0^\epsilon \int_{\partial B_\rho(0)} \rho^{n-2-\alpha} d\rho = \frac{\omega_{n-1} \|A\|_\infty}{n-1-\alpha} \epsilon^{n-1-\alpha} \\ &= C \|A\|_\infty \epsilon^{n-1-\alpha}, \end{aligned}$$

onde aqui $B_\delta = B_\delta(x) \cap S$ se δ é um número real positivo. Da mesma forma segue que $\int_S |K(x, y)| d\sigma(x) \leq C \|A\|_\infty \epsilon^{n-1-\alpha}$, para cada $y \in S$ fixo. Já no caso em que $\alpha = 0$ teremos pelo lema acima que

$$\begin{aligned} \int_S |K(x, y)| d\sigma(y) &\leq \|A\|_\infty \int_{B_\epsilon} |\log |x - y|| d\sigma(y) + \|B\|_\infty \int_{B_\epsilon} d\sigma(y) \\ &\leq \|A\|_\infty C_1 \epsilon^{n-1} (|\log \epsilon| + 1) + \|B\|_\infty \alpha_{n-1} \epsilon^{n-1} \\ &= C \epsilon^{n-1} (\|A\|_\infty (1 + |\log \epsilon|) + \|B\|_\infty) \end{aligned}$$

e similarmente, $\int_S |K(x, y)| d\sigma(x) \leq C \epsilon^{n-1} (\|A\|_\infty (1 + |\log \epsilon|) + \|B\|_\infty)$, com $y \in S$. Por fim, observemos como existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{x \in S} \int_S |K(x, y)| d\sigma(y) \leq C \quad e \quad \sup_{y \in S} \int_S |K(x, y)| d\sigma(x) \leq C$$

temos, então, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} |T_K \phi(x)| &\leq \int_S |K(x, y)| |\phi(y)| d\sigma(y) = \int_S |K(x, y)|^{1/2} |K(x, y)|^{1/2} |\phi(y)| d\sigma(y) \\ &\leq \left(\int_S |K(x, y)| d\sigma(y) \right)^{1/2} \cdot \left(\int_S |K(x, y)| |\phi(y)|^2 d\sigma(y) \right)^{1/2} \\ &\leq C^{1/2} \left(\int_S |K(x, y)| |\phi(y)|^2 d\sigma(y) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os lado ao quadrado e integrando em x obtemos ao inverter as integrais que

$$\begin{aligned} \int_S |T\phi(x)|^2 d\sigma(x) &\leq C \int_S \int_S |K(x, y)| |\phi(y)|^2 d\sigma(y) d\sigma(x) \\ &= C \int_S |\phi(y)|^2 \int_S |K(x, y)| d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &\leq C^2 \int_S |\phi(y)|^2 d\sigma(y), \end{aligned}$$

Portanto, $T_K\phi(x)$ é finito para quase todo x e $\|T_K\phi\|_2 \leq C\|\phi\|_2$. ■

Corolário 3.10 *Se K é um kernel de ordem α , com $0 \leq \alpha \leq n - 2$ então o operador $T_K : L^2(S) \rightarrow L^2(S)$ é limitado.*

Demonstração: Basta tomar $\epsilon > \text{diam}(S)$. ■

Não é difícil ver que na realidade T_K é um operador limitado em $L^p(S)$ para qualquer $1 \leq p \leq \infty$. A escolha de $L^2(S)$ como campo de trabalho se deve ao fato desse espaço ser de Hilbert, o que nos permitirá calcular a adjunta de T_K . Dados $\phi, \psi \in L^2(S)$ o produto interno que consideremos em $L^2(S)$ de ϕ por ψ será

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_S \phi(x)\psi(x)d\sigma(x).$$

Se $K(x, y)$ é um kernel de ordem $0 \leq \alpha \leq n - 2$ pela Desigualdade de Hölder teremos que

$$\int_S \left(\int_S K(x, y)\phi(y)d\sigma(y) \right) \phi(x)d\sigma(x) < \infty,$$

de onde pelo Teorema de Fubini seguirá que

$$\begin{aligned} \langle T_K\phi, \phi \rangle &= \int_S T_K\phi(x)\phi(x)d\sigma(x) = \int_S \left(\int_S K(x, y)\phi(y)d\sigma(y) \right) \phi(x)d\sigma(x) \\ &= \int_S \phi(y) \left(\int_S K(x, y)\phi(x)d\sigma(x) \right) d\sigma(y) = \int_S \phi(y)T_{K^*}\phi(y)d\sigma(y) \\ &= \langle \phi, T_{K^*}\phi \rangle, \end{aligned}$$

onde $K^*(x, y) = K(y, x)$. Logo, a adjunta T_K^* de T_K é dada por T_{K^*} .

Finalmente, estamos em condições de demonstrar que os operados da forma (3.7.1) com núcleo de ordem α qualquer, $0 \leq \alpha \leq n - 2$, são operadores compactos em $L^2(S)$.

Teorema 3.11 *Se K é um kernel de ordem α , onde $0 \leq \alpha \leq n - 2$, então o operador $T_K : L^2(S) \rightarrow L^2(S)$ associado ao Kernel K é compacto.*

Demonstração: Para cada $n \geq 0$ seja

$$K_n(x, y) = \begin{cases} K(x, y) & \text{se } |x - y| > 1/n \\ 0 & \text{se } |x - y| \leq 1/n \end{cases}.$$

Logo K_n é limitado em $S \times S$. De fato, se $x \in S$ temos que $|K_n(x, y)| = |A(x, y)|x - y|^{-\alpha} \leq Cn^\alpha$ para todo $y \in S$ tal que $|x - y| > 1/n$, quando $\alpha > 0$. Já se $\alpha = 0$ temos que $|K_n(x, y)| = |A(x, y) \log |x - y| + B(x, y)| \leq \|A\|_\infty |\log |x - y|| + \|B\|_\infty \leq \|A\|_\infty M + \|B\|_\infty$, onde $M = \max\{|\log 1/n|, |\log \text{diam}(S)|\}$ se $|x - y| > 1/n$. De onde segue que existe C tal que $|K_n(x, y)| \leq C$, para $0 \leq \alpha \leq n - 2$. Portanto, K_n é um Kernel Hilbert-Schmidt e, conseqüentemente, pela proposição (3.5) T_{K_n} é compacto em $L^2(S)$. Ainda pela última proposição acima

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_K - T_{K_n}\|_2 = 0.$$

Assim, temos que T_K é um operador limitado aproximado por operadores compactos, portanto, também é. ■

O último passo para estendermos a definição de potencial de camada dupla a $\partial\Omega$ será mostrar que se ϕ for limitado então $T_K\phi$ estará bem definido como função. Contudo, precisaremos restringir a classe dos kernels, restrição que ainda continuará a conter $\partial\nu_y N$.

Proposição 3.12 *Seja K um kernel contínuo de ordem α , com $0 \leq \alpha \leq n - 2$. Se $\phi \in L^\infty(S)$ então T_K será uma função contínua em S .*

Demonstração: Podemos, inicialmente, supor que $\alpha > 0$, pois os kernels de ordem zero são de qualquer ordem maior que zero e menor que $n - 1$. Sejam $x_0 \in S$, $\epsilon > 0$ e $B_\delta = B_\delta(x_0) \cap S$ se $\delta > 0$. Logo, se $x \in B_\eta$ usando coordenadas polares temos que

$$\begin{aligned} |T_K\phi(x) - T_K\phi(x_0)| &\leq \int_S |K(x, y) - K(x_0, y)| |\phi(y)| d\sigma(y) \\ &\leq \int_{B_{2\eta}} (|K(x, y)| + |K(x_0, y)|) |\phi(y)| d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{S \setminus B_{2\eta}} |K(x, y) - K(x_0, y)| |\phi(y)| d\sigma(y) \\ &\leq C\eta^{n-1-\alpha} + \int_{S \setminus B_{2\eta}} |K(x, y) - K(x_0, y)| |\phi(y)| d\sigma(y) \end{aligned}$$

Por fim, vemos que como $x \in B_\eta$ o integrando da última integral é contínuo e converge uniformemente a zero quando $x \rightarrow x_0$. Poranto, existe $\delta > 0$ tal que $|T_K(x) - T_K(x_0)| < \epsilon$, se $|x - x_0| \leq \delta$. ■

A partir de agora, reservaremos a notação $K(x, y)$ para $\partial_\nu N(x, y)$ e estudaremos o caso particular em que S é a fronteira de um aberto limitado Ω de classe \mathcal{C}^2 .

Feitas as considerações acima podemos, sem nenhum remorso, estender (3.4.1) a todo \mathbb{R}^n , isto é, dada $\phi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, o potencial de camada dupla gerado por ϕ será a função $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} N(x, y) \phi(y) d\sigma(y). \quad (3.12.1)$$

A qual já sabemos que é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ e $v|_{\partial\Omega}$ é contínua. Porém, como veremos a seguir, v não é, em geral, contínua em \mathbb{R}^n , porém existem os limites $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$ quando restringimos v a Ω e a $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Para atingirmos esse objetivo serão necessários três lemas, dois envolvendo cálculos e estimativas de $\int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y)$ e um que estabelece a continuidade de v em x_0 se $\phi(x_0) = 0$.

Lema 3.13

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \\ 1/2 & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Demonstração: Como $y \rightarrow N(x, y)$ é harmônica em Ω se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ temos pela Segunda Identidade de Green que

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y) = \int_{\Omega} \Delta N(x, y) dy = 0.$$

Se $x \in \Omega$ podemos considerar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que $B_\epsilon(x) \subset \Omega$. Logo, aplicando o mesmo resultado citado acima à região $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{B_\epsilon(x)}$, cuja fronteira denotamos

por S_ϵ , obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\epsilon} \Delta N(x, y) dy = \int_{S_\epsilon} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y) - \int_{\partial B_\epsilon(x)} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y) - \frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\epsilon(x)} d\sigma(y) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y) - 1 \end{aligned}$$

Por fim, supohamos que $x \in \partial\Omega$. Consideremos os seguintes conjuntos $S_\epsilon = \partial\Omega \setminus (\partial\Omega \cap B_\epsilon(x))$, $\partial B'_\epsilon = \partial B_\epsilon(x) \cap \Omega$ e $\partial B''_\epsilon = \{y \in \partial B_\epsilon(x) : \nu(x) \cdot (y - x) < 0\}$. O conjunto $\partial B''_\epsilon$ encontra-se

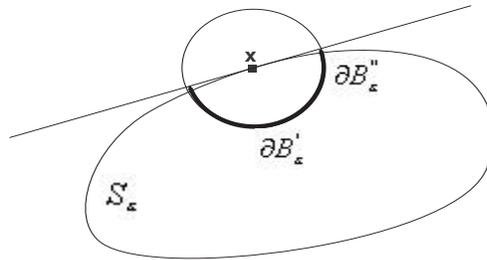


Figura 3.1.

em destaque na figura acima, geometricamente, $\partial B''_\epsilon$ são os vetores de ∂B_ϵ que encontram-se no semi-espaço delimitado pelo plano tangente em x contendo Ω numa vizinhança de x . É imediato que

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y).$$

Como $y \rightarrow N(x, y)$ é harmônica em $\Omega \setminus \overline{B_\epsilon(x)}$ e de classe \mathcal{C}^2 até a fronteira temos pela Segunda Identidade de Green que

$$0 = \int_{\Omega_\epsilon} \Delta N(x, y) dy = \int_{S_\epsilon} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y) - \int_{\partial B'_\epsilon} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B'_\epsilon} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B'_\epsilon} \frac{1}{\omega_n |x - y|^{n-1}} d\sigma(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} \int_{\partial B'_\epsilon} d\sigma(y). \end{aligned}$$

Agora, pelo lema (3.6) existe $c > 0$ tal que

$$\partial B'_\epsilon \Delta \partial B''_\epsilon \subset \{y \in \partial B_\epsilon(x); |(x-y)\nu(x)| \leq c\epsilon^2\},$$

cuja área é $O(\epsilon^n)$. De onde

$$\int_{\partial B'_\epsilon} d\sigma(y) = \int_{\partial B''_\epsilon} \sigma(y) + O(\epsilon^n) = \frac{1}{2}\epsilon^{n-1}\omega_n + O(\epsilon^n).$$

Assim, concluímos que $\int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} N(x, y) d\sigma(y) = 1/2$. ■

Em mãos deste lema vemos, claramente, que o potencial de camada dupla gerado pela função constante igual a 1 é descontínuo em \mathbb{R}^n .

Lema 3.14 *Existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ tem-se*

$$\int_{\partial\Omega} |\partial_{\nu_y} N(x, y)| d\sigma(y) \leq C.$$

Demonstração: Consideremos $0 < \delta < 1/2c$, onde c é dado pelo lema (3.6). Se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \delta/2$ temos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |\partial_{\nu_y} N(x, y)| d\sigma(y) &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\omega_n |x-y|^{n-1}} d\sigma(y) \leq \int_{\partial\Omega} \frac{2^{n-1}}{\omega_n \delta^{n-1}} d\sigma(y) \\ &= \frac{2^{n-1}}{\omega_n \delta^{n-1}} \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) = C_1. \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que $x \in \mathbb{R}^n$ dista menos de $\delta/2$ de $\partial\Omega$. Fixemos $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $|x - x_0| < \delta/2$. Notemos que

$$|x - y| \geq |x_0 - y| - |x_0 - x| \geq \delta - \delta/2 = \delta/2$$

se $y \in \partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)} |\partial_{\nu_y} N(x, y)| d\sigma(y) &= \int_{\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)} \frac{1}{\omega_n |x-y|^{n-1}} d\sigma(y) \\ &\leq \int_{\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)} \frac{2^{n-1}}{\omega_n \delta^{n-1}} d\sigma(y) = C_2. \end{aligned}$$

Por fim, para calcular a integral sobre $B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega$ vemos que desigualdades podemos obter se $y \in B_\delta(x_0)$. Inicialmente, observemos que pelo lema (3.6)

$$|\partial_{\nu_y} N(x, y)| = \frac{|(x-y)\nu(y)|}{\omega_n |x-y|^n} \leq \frac{|(x-x_0)\nu(y)| + |(x_0-y)\nu(y)|}{\omega_n |x-y|^n} \leq \frac{|x-x_0| + c|x_0-y|^2}{\omega_n |x-y|^n}.$$

Além disso, pelo mesmo resultado citado acima também segue que

$$2|(x - x_0) \cdot (x_0 - y)| \leq 2c|x - x_0||x_0 - y|^2 \leq |x - x_0||x_0 - y|,$$

pois $|x_0 - y| < \delta < 1/2c$. De onde

$$\begin{aligned} 2|x - y|^2 - |x - x_0|^2 - |x_0 - y|^2 &= |x - x_0|^2 + |x_0 - y|^2 + 4(x - x_0) \cdot (x_0 - y) \\ &\geq |x - x_0|^2 + |x_0 - y|^2 - 2|(x - x_0)| \cdot |(x_0 - y)| \\ &= (|x - x_0| - |x_0 - y|)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja, $|x - y|^2 \geq \frac{1}{2}(|x - x_0|^2 - |x_0 - y|^2)$. Portanto, escrevendo $a = |x - x_0|$ e usando coordenadas polares obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta} |\partial_{\nu_y} N(x, y)| d\sigma(y) &\leq \int_{B_\delta} \frac{|x - x_0| + c|x_0 - y|^2}{\frac{\omega_n}{2^{n/2}}(|x - x_0|^2 + |x_0 - y|^2)^{n/2}} d\sigma(y) \\ &\leq \int_{B_\delta} \frac{2^{n/2}|x - x_0|}{\omega_n(|x - x_0|^2 + |x_0 - y|^2)^{n/2}} d\sigma(y) + \int_{B_\delta} \frac{2^{n/2}c}{\omega_n|x_0 - y|^{n-2}} d\sigma(y) \\ &= \int_0^\delta \frac{2^{n-2}\omega_{n-1}a\rho^{n-2}}{\omega_n(a^2 + \rho^2)^{n/2}} d\rho + \int_0^\delta \frac{2^{n/2}c\omega_{n-1}}{\omega_n} d\rho \\ &\leq \frac{2^{n/2}\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_0^\infty \frac{s^{n-2}}{(1 + s^2)^{n/2}} ds + \frac{2^{n/2}c\omega_{n-1}}{\omega_n} \delta \\ &= C_3, \end{aligned}$$

onde $B_\eta = B_\eta(x_0) \cap \partial\Omega$ se $\eta > 0$. Assim, concluímos que existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} |\partial_{\nu_y} N(x, y)| d\sigma(y) \leq C,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$. ■

Por fim, provaremos o último lema necessário para conhecer o comportamento do potencial de camada dupla próximo de $\partial\Omega$.

Lema 3.15 *Suponha que $\phi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ e $\phi(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \partial\Omega$. Se v é o potencial de camada dupla gerado por ϕ então v é contínua em x_0 .*

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Consideremos C dado pelo último lema e C' tal que

$$C' = \int_{\partial\Omega} |\partial_{\nu_y} N(x_0, y)| d\sigma(y),$$

o qual é finito, pois com uma demonstração análoga a proposição (3.9) prova-se que T_k também é um operador limitado em $L^1(\partial\Omega)$. Como ϕ é contínua em $x_0 \in \partial\Omega$ existe $\eta > 0$ tal que se $y \in \partial\Omega$ e $|y - x_0| < \eta$ então $|\phi(y)| < \epsilon/3(C + C')$. Logo,

$$\begin{aligned} |v(x) - v(x_0)| &= \left| \int_{\partial\Omega} (\partial\nu_y N(x, y) - \partial\nu_y N(x_0, y))\phi(y)d\sigma(y) \right| \\ &\leq \int_{B_\eta} (|\partial\nu_y N(x, y)| + |\partial\nu_y N(x_0, y)|)|\phi(y)|d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega \setminus B_\eta} |\partial\nu_y N(x, y) - \partial\nu_y N(x_0, y)| |\phi(y)|d\sigma(y) \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + \int_{\partial\Omega \setminus B_\eta} |\partial\nu_y N(x, y) - \partial\nu_y N(x_0, y)| |\phi(y)|d\sigma(y), \end{aligned}$$

onde $B_\eta = B_\eta(x_0) \cap \partial\Omega$. Por fim, notando que o último integrando em $\partial\Omega \setminus B_\eta$ converge uniformemente a zero, logo, existe $0 < \delta < \frac{1}{2}\eta$ tal que se $|x - x_0| < \delta$ então

$$\int_{\partial\Omega \setminus B_\eta} |\partial\nu_y N(x, y) - \partial\nu_y N(x_0, y)| |\phi(y)|d\sigma(y) < \frac{\epsilon}{3}.$$

E, assim, $|u(x) - u(x_0)| < \epsilon$. Note que δ independe do x_0 . ■

Finalmente, estamos aptos a demonstrar o teorema central da seção

Teorema 3.16 *Sejam $\phi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ e v o potencial de camada dupla gerado por ϕ , então se $x_0 \in \partial\Omega$ temos que*

$$\begin{aligned} v_-(x_0) &= \frac{\phi(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial\nu_y N(x_0, y)\phi(y)d\sigma(y) \\ e \quad v_+(x_0) &= -\frac{\phi(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial\nu_y N(x_0, y)\phi(y)d\sigma(y), \end{aligned}$$

onde $v_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} v|_{\Omega}(x)$ e $v_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} v|_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}}(x)$. Além disso, a convergência é uniforme.

Demonstração Dado $x_0 \in \partial\Omega$, notemos que

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{\partial\Omega} \partial\nu_y N(x, y)\phi(y)d\sigma(y) \\ &= \phi(x_0) \int_{\partial\Omega} \partial\nu_y N(x, y)d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega} \partial\nu_y N(x, y)(\phi(y) - \phi(x_0))d\sigma(y), \end{aligned}$$

Utilizando o último lema e o lema (3.13) obtemos que

$$\begin{aligned} v_-(x_0) &= \frac{\phi(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial\nu_y N(x_0, y)\phi(y)d\sigma(y) \\ e \quad v_+(x_0) &= -\frac{\phi(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial\nu_y N(x_0, y)\phi(y)d\sigma(y). \end{aligned}$$

Por fim, a uniformidade da convergência segue do fato de que no lema anterior δ independe de x_0 e de que sendo $\partial\Omega$ compacto, ϕ é uniformemente contínua, pois dado $\epsilon > 0$ podemos escolher $\eta > 0$ tal que se $|x - y| < \eta$ então $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon/3(C + C')$. ■

Corolário 3.17 *Sejam ϕ e v como acima, então*

$$v_- - v_+ = \phi.$$

Em suma, a função $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} N(x, y) \phi(y) d\sigma(y),$$

com $\phi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, pode ser estendida continuamente a $\bar{\Omega}$ e se $x_0 \in \partial\Omega$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \frac{\phi(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} K(x_0, y) \phi(y) d\sigma(y) = \frac{\phi(x_0)}{2} + T_k \phi(x_0).$$

3.3 Potencial de Camada Simples

O potencial de camada simples gerado por ϕ será o potencial induzido por uma distribuição de carga em $\partial\Omega$ de densidade ϕ , ou mais precisamente,

Definição 3.18 *Dada uma função $\phi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, definimos o potencial de camada simples gerado por ϕ como*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} N(x, y) \phi(y) d\sigma(y) \tag{3.18.1}$$

Observemos que u é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ e sendo N restrito a $(\partial\Omega \times \partial\Omega) \setminus D$ um kernel contínuo de ordem $n - 2$, pela proposição (3.12) $u|_{\partial\Omega}$ está bem definido e é contínuo. Além disso, provaremos a seguir que v é contínuo em todo \mathbb{R}^n , fato que usará as seguintes estimativas de integrais.

Lema 3.19 *Sejam $x_0 \in S$, $\delta > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\phi \in L^\infty(\partial\Omega)$ tais que $x \in B_\delta(x_0)$ então existe C , independente de x , que satisfaz*

$$\int_{B_\delta} |N(x, y) \phi(y)| d\sigma(y) \leq C\delta \quad (n \geq 3)$$

e

$$\int_{B_\delta} |N(x, y) \phi(y)| d\sigma(y) \leq C\delta |\log \delta|, \quad (n = 2)$$

onde $B_\delta = B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega$.

Demonstração: Se $n \geq 3$ calculando explicitamente temos

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta} |N(x, y)\phi(y)|d\sigma(y) &\leq \|\phi\|_\infty \int_{B_\delta} |N(x, y)|d\sigma(y) = \frac{\|\phi\|_\infty}{(n-2)\omega_n} \int_{B_\delta} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}d\sigma(y) \\ &\leq \frac{\|\phi\|_\infty}{(n-2)\omega_n} \int_{B'_{2\delta}} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}d\sigma(y) = \frac{\|\phi\|_\infty\omega_{n-1}}{(n-2)\omega_n} \int_0^{2\delta} d\sigma(y) = C\delta, \end{aligned}$$

onde fazemos uso das seguintes notações: $B'_\eta = B_\eta(x) \cap S$ e $B_\eta = B_\eta(x_0) \cap \partial\Omega$, se $\eta > 0$.

Agora, no caso de $n = 2$ usando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta} |N(x, y)\phi(y)|d\sigma(y) &\leq \|\phi\|_\infty \int_{B_\delta} |N(x, y)|d\sigma(y) \leq \frac{\|\phi\|_\infty}{\omega_2} \int_{B'_{2\delta}} |\log|x-y||d\sigma(y) \\ &= -\frac{\|\phi\|_\infty\omega_1}{\omega_2} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\eta^{2\delta} \log \rho d\rho \leq -\frac{2\|\phi\|_\infty\omega_1}{\omega_2} \delta \log \delta \leq C\delta |\log \delta|, \end{aligned}$$

desde que $\delta \leq 1/2$. No caso de $\delta > 1/2$ as contas são análogas, o único detalhe é que devemos separar a integral em duas partes, onde $\log \rho$ é positiva e onde é negativa. ■

Proposição 3.20 *O potencial de camada simples dado gerado por uma função $\phi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ é contínuo em \mathbb{R}^n .*

Demonstração: Como u é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ segue que é $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega)$. Agora, sejam $x_0 \in \partial\Omega$ e $\epsilon > 0$. Usando o último lema temos que podemos escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que

$$\int_{B_\delta} |N(x, y)\phi(y)|d\sigma(y) < \frac{\epsilon}{3},$$

sempre que $x \in B_\delta(x_0)$. Logo, se $x \in B_\delta(x_0)$ temos que

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_0)| &\leq \int_{\partial\Omega} |N(x, y) - N(x_0, y)| |\phi(y)|d\sigma(y) \\ &\leq \int_{B_\delta} (|N(x, y)| + |N(x_0, y)|) |\phi(y)|d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega \setminus B_\delta} |N(x, y) - N(x_0, y)| |\phi(y)|d\sigma(y) \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + \int_{\partial\Omega \setminus B_\delta} |N(x, y) - N(x_0, y)| |\phi(y)|d\sigma(y), \end{aligned}$$

onde $B_\delta = B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega$. Por fim, se $x \in B_{\delta/2}(x_0)$ temos que $y \rightarrow N(x, y) - N(x_0, y)$ é contínua e limitado em $\partial\Omega \setminus B_\delta$. Daí, pelo Teorema da Convergência Limitada segue que

existe $0 < \eta < \delta/2$ tal que se $x \in B_\eta(x_0)$ então

$$\int_{\partial\Omega \setminus B_\delta} |N(x, y) - N(x_0, y)| |\phi(y)| d\sigma(y) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Portanto, $|u(x) - u(x_0)| < \epsilon$ quando $|x - x_0| \leq \eta$. ■

Para a compreensão do próximo, e central, teorema da seção introduziremos os conceitos de derivada normal interior e exterior de uma superfície $\partial\Omega$, para o qual faremos uso da existência de vizinhanças tubulares para hiperfícies de classe \mathcal{C}^k , com $k \geq 2$, resultado típico de variedades cuja demonstração pode ser encontrada em qualquer livro clássico sobre Variedades Diferenciáveis.

Teorema 3.21 *Seja S uma hiperfície orientável compacta de classe \mathcal{C}^k , com $k \geq 2$. Então existe uma vizinhança V de S e $\epsilon > 0$ tal que a aplicação $F : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$, dada por $F(x, t) = x + t\nu(x)$ é um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^{k-1} .*

A vizinhança V é chamada uma vizinhança tubular de S .

Definição 3.22 *Sejam S uma hiperfície orientável compacta e de classe \mathcal{C}^2 e F dada pelo teorema acima. Se u é diferenciável em $F(S, (-\eta, 0))$, para algum $0 < \eta < \epsilon$,*

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \nu(x_0) \cdot \nabla u(x_0 + t\nu(x_0))$$

existe para todo $x_0 \in S$ e, além disso, o limite é uniforme em t então dizemos que u tem derivada normal interior em x_0 e denotamos por $\partial_{\nu^-} u(x_0)$ o limite acima. Analogamente, definimos a derivada normal exterior

$$\partial_{\nu^-} u(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \nu(x_0) \cdot \nabla u(x_0 + t\nu(x_0)).$$

Ainda antes do teorema, demonstraremos um lema que estabelecerá condições para a continuidade de funções contínuas em subconjuntos do domínio, cuja reunião forma o todo.

Lema 3.23 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $S \subset U$ uma superfície orientável compacta de classe \mathcal{C}^2 e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que as suas restrições a $U \setminus S$ e S são contínuas. Se*

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x + t\nu(x)) = f(x),$$

para todo $x \in S$, e o limite é uniforme em t então f será contínua em \mathbb{R}^n .

Demonstração: Suponhamos que $U \subset V$ para alguma vizinhança tubular de S . Seja $F : S \times (-\alpha, \alpha) \rightarrow U$ dado pelo teorema (3.21). Notemos que sendo $U \setminus S$ um aberto, basta mostrar que f é contínua em S . Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese existe $\eta_1 < \alpha$ tal que se $|t| < \eta_1$ então

$$|f(x + t\nu(x)) - f(x)| < \epsilon/2, \quad (3.23.1)$$

para todo $x \in S$. Agora, pela continuidade de $f|_S$ podemos tomar $B_{\delta_1}(x_0) \subset F(S, (-\eta_1, \eta_1))$ em que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/2, \quad (3.23.2)$$

sempre que $x \in B_{\delta_1}(x_0) \cap S$. Como $\pi \circ F(x_0, 0) = x_0 \in B_{\delta_1}(x_0) \cap S$ e $\pi \circ F$ é contínua segue que existem $B_{\delta_2}(x_0)$ e $0 < \eta_2 < \eta_1$ tais que $\pi \circ F(B_{\delta_2}(x_0) \cap S, (-\eta_2, \eta_2)) \subset B_{\delta_1}(x_0) \cap S$. Por fim, se $B_\delta(x_0) \subset F(B_{\delta_2}(x_0) \cap S, (-\eta_2, \eta_2))$ e $y = x + t\nu(x) \in B_\delta(x_0)$ então $x \in B_{\delta_1}(x_0) \cap S$. De onde pelas equações (3.23.1) e (3.23.2) teremos que

$$|f(y) - f(x_0)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \quad \blacksquare$$

Finalmente estamos em condições de provar o teorema que exhibe a descontinuidade de ∂_ν em $\partial\Omega$, este fato será crucial na resolução do Problema de Dirichlet com fronteira de classe \mathcal{C}^2 .

Teorema 3.24 *Sejam $\phi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ e u o potencial de camada simples gerado por ϕ . Então u tem derivada normal exterior e interior dadas por*

$$\begin{aligned} \partial_{\nu^+} u(x) &= \frac{1}{2}\phi(x) + \int_S K(y, x)\phi(y)d\sigma(y) \\ e \quad \partial_{\nu^-} u(x) &= -\frac{1}{2}\phi(x) + \int_S K(y, x)\phi(y)d\sigma(y), \end{aligned}$$

isto é, $\partial_{\nu^+} u(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + T_K^* \phi(x)$ e $\partial_{\nu^-} u(x) = -\frac{1}{2}\phi(x) + T_K^* \phi(x)$.

Demonstração: Seja V uma vizinhança tubular de $\partial\Omega$ dada pelo teorema (3.21). Consideremos a função $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} v(x) + \partial_{\nu} u(x) & \text{se } x \in V \setminus \partial\Omega \\ T_K \phi(x) + T_K^* \phi(x) & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases},$$

onde v é o potencial de camada dupla gerado por ϕ . Mostremos que f é contínua em V . Como as restrições de f em $V \setminus \partial\Omega$ e $\partial\Omega$ são contínuas, pelo último lema basta mostrar

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x + t\nu(x)) = f(x),$$

para todo $x \in \partial\Omega$ e o limite é uniforme em t . Sejam $x_0 \in \partial\Omega$, $x = x_0 + t\nu(x_0)$ e $\epsilon > 0$. Note que

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(x_0)| \\ &= \int_{\partial\Omega} |\partial_{\nu_x} N(x, y) + \partial_{\nu_y} N(x, y) - \partial_{\nu_y} N(x_0, y) - \partial_{\nu_x} N(x_0, y)| |\phi(y)| d\sigma(y) \\ &\leq \|\phi\|_\infty \int_{\partial\Omega \setminus B_\delta} |\partial_{\nu_x} N(x, y) - \partial_{\nu_x} N(x_0, y)| d\sigma(y) + \|\phi\|_\infty \int_{\partial\Omega \setminus B_\delta} |\partial_{\nu_y} N(x, y) - \partial_{\nu_y} N(x_0, y)| d\sigma(y) \\ &\quad + \|\phi\|_\infty \int_{B_\delta} |\partial_{\nu_x} N(x, y) + \partial_{\nu_y} N(x, y)| d\sigma(y) + \|\phi\|_\infty \int_{B_\delta} |\partial_{\nu_y} N(x_0, y) + \partial_{\nu_x} N(x_0, y)| d\sigma(y), \end{aligned}$$

onde $B_\delta = B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega$. Com um cálculo direto, obtemos que

$$\partial_{\nu_x} N(x, y) = \frac{(x - y)\nu(x_0)}{\omega_n |x - y|^n} \quad \text{e} \quad \partial_{\nu_y} N(x, y) = \frac{-(x - y)\nu(y)}{\omega_n |x - y|^n}$$

de onde $\partial_{\nu_x} N(x, y) + \partial_{\nu_y} N(x, y) = \frac{(x - y)(\nu(x_0) - \nu(y))}{\omega_n |x - y|^n}$. Como x está na normal que passa por x_0 existe $C > 0$, independente de x_0 , tal que $|x - y| \geq C|x_0 - y|$. Sendo ν classe \mathcal{C}^1 e $\partial\Omega$ compacto existe $\eta > 0$ tal que $|\nu(z) - \nu(y)| \leq C|z - y|$ se $|z - y| \leq \eta$. Portanto, se $\delta \leq \min \{\omega_n \epsilon C^{n-1} / 4 \|\phi\|_\infty \omega_{n-2}, \eta/2\}$ segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta} |\partial_{\nu_x} N(x, y) + \partial_{\nu_y} N(x, y)| d\sigma(y) &\leq C^{1-n} \int_{B_\delta} \frac{1}{\omega_n |x_0 - y|^{n-2}} d\sigma(y) \\ &= \frac{C^{1-n}}{\omega_n} \int_0^\delta \rho^{2-n} \rho^{n-2} d\rho = \frac{C^{1-n} \omega_{n-2}}{\omega_n} \delta \\ &\leq \frac{\epsilon}{4 \|\phi\|_\infty}. \end{aligned}$$

E com um cálculo direto $\int_{B_\delta} |\partial_{\nu_x} N(x_0, y) + \partial_{\nu_y} N(x_0, y)| d\sigma(y) \leq \frac{\epsilon}{4 \|\phi\|_\infty}$. Por fim, as integrais sobre $\partial\Omega \setminus B_\delta$ convergem uniformemente a zero quando $x \rightarrow x_0$, independentemente de x_0 , logo, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para $x = x_0 + t\nu(x_0)$ e $x_0 \in \partial\Omega$ com t suficientemente pequeno. Portanto, pelo teorema (3.16) segue que

$$T_K \phi(x) + T_K^* \phi(x) = v_-(x) + \partial_{\nu^-} u(x) = \frac{1}{2} \phi(x) + T_K \phi(x) + \partial_{\nu^-} u(x),$$

ou seja, $\partial_{\nu^-} u(x) = -\frac{1}{2} \phi(x) + T_K^* \phi(x)$, e

$$T_K \phi(x) + T_K^* \phi(x) = v_+(x) + \partial_{\nu^+} u(x) = -\frac{1}{2} \phi(x) + T_K \phi(x) + \partial_{\nu^+} u(x),$$

de onde, $\partial_{\nu^+}u(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + T_K^*\phi(x)$. A convergência uniforme de $\partial_{\nu^+}u$ e $\partial_{\nu^-}u$ segue diretamente das convergências uniforme de v e $f = v + \partial_{\nu}u$ (em $V \setminus \partial\Omega$).

Corolário 3.25 *Seja v como acima, então*

$$\partial_{\nu^+} - \partial_{\nu^-} = \phi$$

3.4 O Problema de Dirichlet para Domínios \mathcal{C}^2

Nessa seção, finalmente, demonstraremos que os domínios com fronteira de classe \mathcal{C}^2 são Domínios de Dirichlet. Para tanto, alguns resultados preliminares serão necessários.

Proposição 3.26 *Sejam $\phi \in L^2(\partial\Omega)$ tal que $(\frac{1}{2} + T_K)\phi = g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Então $\phi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, seja $\varphi_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua tal que $\varphi_\epsilon(t) = 1$ se $|t| < \epsilon/2$ e $\varphi_\epsilon(t) = 0$ se $|t| > \epsilon$. Por exemplo,

$$\varphi_\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq \epsilon/2 \\ \frac{\exp(\frac{1}{t^2 - \epsilon^2})}{\exp(\frac{1}{\epsilon^2/4 - \epsilon^2})} & \text{se } \epsilon/2 < |t| \leq \epsilon \\ 0 & \text{se } |t| > \epsilon \end{cases}$$

Dai, existe uma função $\psi_\epsilon \in \mathcal{C}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(x, y) = 1$ quando $|x - y| < \epsilon/2$ e $\psi(x, y) = 0$ se $|x - y| > \epsilon$. De fato, basta tomar

$$\psi_\epsilon(x, y) = \varphi_\epsilon(|x - y|).$$

Definimos $K_0^\epsilon = K\psi_\epsilon$ e $K_1^\epsilon = (1 - \psi)K$. Dado $x \in \partial\Omega$, usando a desigualdade de Hölder obtemos que

$$\begin{aligned} \|T_{K_1^\epsilon}\phi(y) - T_{K_1^\epsilon}\phi(x)\| &\leq \int_{\partial\Omega} |K_1^\epsilon(y, z) - K_1^\epsilon(x, z)| |\phi(z)| d\sigma(z) \\ &\leq \|\phi\|_2 \left(\int_{\partial\Omega} |K_1^\epsilon(y, z) - K_1^\epsilon(x, z)|^2 d\sigma(z) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como K_1^ϵ é contínua temos que K_1^ϵ é uniformemente contínua. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada existe $\delta > 0$ tal que se $y \in B_\delta(x) \cap \partial\Omega$ então $|T_{K_1^\epsilon}\phi(y) - T_{K_1^\epsilon}\phi(x)| < \epsilon$,

ou seja, $T_{K_1^\epsilon}\phi$ é contínua. Portanto, $h = \left(\frac{\phi}{2} + T_K\phi\right) - T_{K_1^\epsilon}\phi = \left(\frac{\phi}{2} + T_{K_0^\epsilon}\phi\right) \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Pela proposição (3.9) podemos tomar ϵ suficientemente pequeno que satisfaz $\|T_{K_0^\epsilon}\|_\infty, \|T_{K_0^\epsilon}\|_2 < 1/2$. Logo, $1/2 + T_{K_0^\epsilon}$ é invertível com inversa $\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-2T_{K_0^\epsilon})^j$. Assim,

$$\phi = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-2T_{K_0^\epsilon})^j h.$$

Pela proposição (3.12) cada termo da série é uma função contínua e como $2\|T_{K_0^\epsilon}\|_\infty = r < 1$ temos que $\|(-2T_{K_0^\epsilon})^j h(x)\| \leq r^j \|h\|_\infty$ pelo teste M de Weirstress segue que ϕ é uniformemente contínua em $\partial\Omega$. ■

Notemos que $K^*(x, y) = K(y, x)$ sendo um kernel de mesma ordem de K , a proposição acima também será válida para T_K^* no lugar de T_K . Agora, mostremos que o operador $1/2 + T_K$ em $L^2(\partial\Omega)$ é sobrejetivo.

Teorema 3.27 *Dada $g \in L^2(\partial\Omega)$ existe $\phi \in L^2(\partial\Omega)$ tal que*

$$\frac{\phi}{2} + T_K\phi = g$$

Mostremos que $1/2$ não é autovalor de $T_{K^*} = T_K^*$. Suponhamos que exista $\phi \in L^2(\partial\Omega)$ tal que

$$\left(\frac{1}{2} + T_K^*\right)\phi = 0.$$

Logo, pelo proposição acima temos que $\phi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Assim, definindo o potencial de camada simples gerado por ϕ

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} N(x, y)\phi(y)d\sigma(y)$$

teremos pelo teorema (3.24) que

$$\begin{aligned} \partial_{\nu^+} u(x) &= \frac{\phi(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} K(y, x)\phi(y)d\sigma(y) \\ &= \frac{\phi(x)}{2} + T_K^*\phi(x) = \left(\frac{1}{2} + T_K^*\right)\phi(x) = 0. \end{aligned}$$

Considerando $\Omega_t = \{x + t\nu(x), x \in \partial\Omega\}$ e $R > 0$ tal que $\Omega_t \subset B_R(0)$ temos pela Primeira Identidade de Green que

$$\int_{B_R(0) \setminus \Omega_t} |\nabla u|^2 dy = \int_{\partial\Omega_t} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma(y) + \int_{\partial B_R(0)} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma(y).$$

Fazendo $t \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla u|^2 dy = 0,$$

ou seja, u é constante em $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Mas como u é contínua em \mathbb{R}^n e $u(x) \rightarrow 0$ se $|x| \rightarrow \infty$ temos que $u = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Por outro lado, temos que u é harmônica em Ω e contínua em $\bar{\Omega}$. Sendo $u = 0$ em $\partial\Omega$ temos pela unicidade do Problema de Dirichlet que $u = 0$ em Ω . Portanto, $u = 0$ em \mathbb{R}^n . Em particular, $\partial_{\nu^-} u = 0$. Mas, ainda pelo corolário (3.25)

$$\phi = \partial_{\nu^+} u - \partial_{\nu^-} u = 0.$$

Logo, $\dim \mathcal{N}(1/2 + T_K^*) = 0$, de onde pela Alternativa de Fredholm $\dim \mathcal{N}(1/2 + T_K) = 0$ e, por conseguinte, usando o corolário (3.3) concluímos que $1/2 + T_K$ é um operador sobrejetivo em $L^2(\partial\Omega)$. ■

Finalmente,

Teorema 3.28 *Seja Ω um aberto limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^2 . Então existe uma única solução do Problema de Dirichlet com condição de contorno contínua.*

Demonstração: Seja g a condição de contorno. Pelo último teorema e proposição (3.26) existe uma única solução $\phi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ de $1/2\phi + T_K\phi = g$. Então o potencial de camada dupla restrito a $\bar{\Omega}$ é a solução do Problema de Dirichlet com condição de contorno g . De fato, já vimos que u é harmônica em Ω e pelo teorema (3.16) temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) &= \frac{\phi(x_0)}{2} + \int_S \partial_{\nu_y} N(x_0, y) \phi(y) d\sigma(y) \\ &= \left(\frac{1}{2} + T_K \right) \phi(x_0) = g(x_0). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Capítulo 4

Critério de Wiener

Neste último capítulo da dissertação apresentaremos o Critério de Wiener, que estipula a regularidade de um ponto da fronteira em termos da convergência de uma série envolvendo a capacidade de conjuntos, termo que será definido adiante. O critério foi estabelecido em 1924 no artigo "The Dirichlet Problem" de Wiener, durante o apogeu da análise da fronteira no Problema de Dirichlet. Durante este capítulo usaremos a notação Ω^c para $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

4.1 Potencial Condutor

Dado um domínio ilimitado T , como no Método da Varredura de Poincaré podemos construir, a partir de uma função superharmônica, uma seqüência de funções superharmônicas que convirja para uma função harmônica nesta região. Porém, procuramos entre as possíveis funções harmônicas em T uma especial, aquela que se anulará no infinito e que nos pontos regulares de $\partial\Omega$ seu limite seja 1. Assim, lançamos mão da seguinte definição:

Definição 4.1 *Sejam A um subconjunto limitado de \mathbb{R}^n , com $n \geq 3$, e T a componente conexa ilimitada de $\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$. O potencial condutor de A será a função $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que em T é dada pelo Método da Varredura de Poincaré obtida por uma função superharmônica que valha 1 na fronteira de T e se anula no infinito e em $\mathbb{R}^n \setminus T$ é identicamente igual a 1.*

Na definição de potencial condutor surgem, naturalmente, alguns problemas como a existência do potencial condutor e as dependências da função superharmônica e da cobertura de bolas da componente conexa ilimitada de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$, consideradas. Para existência, vemos que tomando $R > 0$ suficientemente grande de forma que $A \subset B_R(0)$ a função

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq R \\ \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}} & \text{se } |x| > R \end{cases}$$

é superharmônica, se anula no infinito e vale 1 na fronteira da componente conexa ilimitada de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$. Logo, existe o potencial condutor. Enquanto que a demonstração da independência é, essencialmente, a mesma da unicidade do Método da Varredura de Poincaré demonstrada na proposição (2.21). Contudo, devido às nuances detalharemos-a.

Proposição 4.2 *Sejam A um subconjunto limitado de \mathbb{R}^n , T a componente conexa ilimitada de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$ e ψ_1 e ψ_2 duas funções superharmônicas definidas em T que vale um na fronteira de T e se anula no infinito. Se u_1, u_2 são os potenciais condutores de A obtidos em T pelo Método da Varredura de Poincaré por ψ_1 e ψ_2 , respectivamente então $u_1 = u_2$.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, tomemos $R > 0$ tal que $A \subset\subset B_R(0)$, $|\psi_1(x)| < \epsilon$ e $|\psi_2(x)| < \epsilon$ se $x \in \partial B_R(0)$. Sejam $\{\psi_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\psi_2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ as seqüências de funções superharmônicas obtidas pelo Método da Varredura de Poincaré tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_1^n(x) = u_1(x) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_2^n(x) = u_2(x),$$

para todo $x \in T$. Como $\psi_2^0 := \psi_2$ é contínua e $u_2 \leq \psi_2$ temos que

$$\limsup_{x \rightarrow y} u_2(x) \leq \lim_{x \rightarrow y} \psi_2(x) = \psi_2(y) < \psi_1(y) + \epsilon,$$

para cada $y \in \partial A_R$, onde $A_R = B_R(0) \cap T$. Além disso, $0 \leq \dots \leq \psi_1^n \leq \dots \leq \psi_1^1 \leq \psi_1$ em A_R e $\lim_{x \rightarrow y} \psi_1^k(x) = \psi_1(y)$ se $y \in \partial T$, portanto,

$$\liminf_{x \rightarrow y} (\psi_1^k(x) - u_2(x)) = \lim_{x \rightarrow y} \psi_1^k(x) - \limsup_{x \rightarrow y} u_2(x) > -\epsilon,$$

para $y \in \partial A_R$. De onde segue pelo corolário (2.20) que $\psi_1^k(x) \geq u_2(x) - \epsilon$ para todo $x \in A_R$. Como ϵ é arbitrário concluímos que $u_1(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_1^k(x) \geq u_2(x)$, para todo $x \in T$. De modo análogo, provamos que $u_1 \leq u_2$. ■

Notemos também que potenciais condutores satisfazem o Princípio do Máximo. De fato, todas as funções φ_n da seqüência obtida pelo Método da Varredura de Poincaré satisfazem $0 \leq \varphi_n(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, logo, $0 \leq v \leq 1$.

Conforme veremos abaixo, a função que associa subconjuntos de \mathbb{R}^n a potenciais condutores é uma função não-decrescente, isto é, se $A \subset B$ então $v_A \leq v_B$.

Proposição 4.3 *Sejam $A \subset B$ e u e v os potenciais condutores de A e de B , respectivamente. Então $u \leq v$.*

Demonstração: Sejam T_1 e T_2 as componentes conexas ilimitadas de $\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ e $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$, respectivamente. Como $A \subset B$ é imediato que $T_2 \subset T_1$. Nos pontos de $\mathbb{R}^n \setminus T_2$ temos que $v = 1$ e $u \leq 1$, logo, $u \leq v$. Agora, como o potencial condutor independe da seqüência de bolas utilizadas na demonstração do Método da Varredura de Poincaré, dadas duas seqüências $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{B'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ usadas na construção de v e u respectivamente, e u_0 uma função superharmônica que se anula no infinito e que é igual a 1 numa vizinhança de B , podemos considerar a nova seqüência

$$B_1, B'_1, B_2, B'_2, \dots,$$

denotada por $\{B_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, e $u_k = u_{k-1}^{B_{j_k}}$ para $k \geq 1$, ou seja, u_k é o rebaixamento harmônico de u_{k-1} em B_{j_k} e ainda teremos que

$$v(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x).$$

Por fim, como $u_{2k-1}(x) \leq v_k(x)$ se $x \in T_2$ para todo $k \in \mathbb{N}$, onde $v_k = v_{k-1}^{B_k}$ para $k \geq 1$ e $v_0 = u_0$, também temos que $u \leq v$ em T_2 . ■

Na demonstração do Critério de Wiener a seguinte relação entre pontos regulares e uma propriedade de potenciais condutores será fundamental

Proposição 4.4 *Um ponto $y \in \partial\Omega$ é regular se, e somente se, para qualquer esfera centrada em y e de raio $r > 0$ o potencial condutor v_r de $\Omega^c \cap B_r(y)$ satisfaz*

$$\lim_{x \rightarrow y} v_r(x) = 1.$$

Demonstração Suponhamos, inicialmente, que y é um ponto regular de $\partial\Omega$. Como a condição de ser ponto regular é local, é imediato que y é um ponto regular de $\Omega^c \cap B_r(y)$. Portanto, o potencial condutor v_r de $\Omega \cap B_r(y)$ aproxima de 1 quando x tende à y . Reciprocamente, suponhamos que para toda esfera $B_r(y)$

$$\lim_{x \rightarrow y} v_r(x) = 1,$$

onde v_r é o potencial condutor de $\Omega^c \cap B_r(y)$. Seja $\{r_n\}$ uma seqüência que converge a 0 e v_{r_n} o potencial condutor de $\Omega^c \cap B_{r_n}(y)$. Consideremos a função

$$v = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \dots + \frac{1}{2^n}v_n + \dots$$

Mostremos que $1 - v$ é uma barreira para y . Como $|v_{r_n}| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$|v| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

de onde $1 - v \geq 0$ e pelo Teste de Weirstrass v converge uniformemente em $\bar{\Omega}$. Além disso, v_{r_n} é harmônica em Ω para todo $n \in \mathbb{N}$, logo v é harmônica em Ω , em particular, $1 - v$ será superharmônica em Ω . Como v é uniformemente contínua em $\bar{\Omega}$ temos que

$$\lim_{x \rightarrow y} v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \lim_{x \rightarrow y} v_{r_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Por fim, resta provar que $v(x) < 1$ para todo $x \in \Omega \setminus \{y\}$. Seja $x \in \Omega \setminus \{y\}$, logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin B_{r_n}(y)$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, pelo Princípio do Máximo $v_{r_n}(x) < 1$ se $n > n_0$, pois $v_{r_n} \leq 1$ em $\partial B_{r_n}(x)$, de onde $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} v_{r_n}(x) < \frac{1}{2^{n_0+1}}$. Assim,

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} v_{r_n}(x) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} v_{r_n}(x) + \sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} v_{r_n}(x) \\ &< \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} + \sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, $1 - v > 0$ em $\bar{\Omega} \setminus \{y\}$ e, então, concluímos que $1 - v$ é uma barreira para y , ou seja, y é um ponto regular de $\partial\Omega$. ■

4.2 Capacidade

Um conceito fundamental é o de capacidade. Fisicamente, capacidade é a carga total da qual v é o potencial condutor, ou mais precisamente,

Definição 4.5 *Sejam A um subconjunto limitado de \mathbb{R}^n , com $n \geq 3$, e v o seu potencial condutor então a capacidade de A é dada por*

$$c(A) = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{\partial v}{\partial \nu} dS,$$

onde S é uma hipersfície fechada que contém \bar{A} no seu interior.

Observemos que se Ω é um domínio limitado com fronteira de classe \mathcal{C}^1 e $\mathbb{R} \setminus \bar{\Omega}$ conexo e se o seu potencial condutor $v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, teremos pela Primeira Identidade de Green

$$c(\Omega) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}} |Dv|^2 dx,$$

pois $|\partial_r v(x)| = O(|x|^{1-n})$.

Exemplo 4.6 *Como exemplo podemos calcular a capacidade de bolas. Dada $B_R(0)$ o seu potencial condutor é $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$v(x) = \begin{cases} \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}} & \text{se } |x| > R \\ 1 & \text{se } |x| \leq R \end{cases}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c(B_R(0)) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}} \left| (2-n) \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-1}} \right|^2 = \frac{(n-2)^2}{\omega_n} \int_R^\infty \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{R^{2(n-2)}}{\rho^{2(n-1)}} d\sigma(y) d\rho \\ &= (n-2)^2 \int_R^\infty \frac{R^{2(n-2)}}{\rho^{n-1}} d\rho = (n-2)R^{n-2}. \end{aligned}$$

Assim, em \mathbb{R}^3 temos que $c(B_R(0)) = R$.

Outras definições equivalentes para capacidade são possíveis, uma se destaca pelo fato de usar construções de potenciais condutores. Se Ω é um domínio em \mathbb{R}^n

$$c(\Omega) = \inf_{v \in K} \int_{\mathbb{R}^n} |Dv|^2 dx,$$

onde $K = \{v \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n); v = 1 \text{ em } \Omega\}$. Para a equivalência referimos [18].

Agora observamos que se A é um conjunto limitado de \mathbb{R}^n e $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência decrescente tal que $A = \bigcap_n^\infty B_n$ e T_n é um Domínio de Dirichlet, onde T_n é a componente ilimitada de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_n$, pelo teorema (A.11) teremos que $\lim c(B_n) = c(A)$. De onde vemos que se, além das hipóteses acima, a fronteira de todos T_n 's forem de classe \mathcal{C}^1 então capacidade de A será não-negativa.

Proposição 4.7 *Sejam A e B dois subconjuntos limitados de \mathbb{R}^n tais que $A \subset B$. Então $c(A) \leq c(B)$.*

Demonstração: Sejam T_1 e T_2 as componentes conexas ilimitadas de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$ e $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$ e v e u os potenciais condutores de A e B , respectivamente. Se em algum ponto $p \in T_2$ $v(p) = u(p)$ temos que $v = u$ em todo T_2 , logo, $c(A) = c(B)$. Agora, supondo que em todo ponto de T_2 $u > v$, consideremos a hiperfície $S = (u - v)^{-1}(c)$, com c suficientemente pequeno tal que esta hiperfície seja fechada, suave e limita D que contém \overline{B} . Provemos que $\frac{\partial}{\partial \nu}(v - u) \geq 0$. De fato, se existisse $p \in S$ tal que $\frac{\partial}{\partial \nu}(v - u)(p) < 0$ então existiria q no exterior de D tal que $(u - v)(q) > c$, o que é uma contradição, pois $u - v$ satisfaz o Princípio do Máximo em $\mathbb{R}^n \setminus D$. ■

Corolário 4.8 *Se A é um conjunto enumerável então $c(A) = 0$*

Demonstração Observemos inicialmente que a capacidade de um ponto unitário é 0. De fato, seja x um ponto de \mathbb{R}^n , então podemos tomar $R > 0$ tal que $(n - 2)R^{n-2} < \epsilon$. Logo, pela última proposição e pelo exemplo (4.6) temos que

$$c(\{x\}) \leq c(B_R(x)) = (n - 2)R^{n-2} < \epsilon.$$

Portanto, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ $c(\{x\}) = 0$. Por fim, seja $A = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Dado $\epsilon > 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $B_{R_k}(x_k)$ tal que $c(B_{R_k}(x_k)) \leq \epsilon/2^k$. Portanto,

$$c(A) \leq \sum_{i=1}^n c(x_i) \leq \sum_{i=1}^n c(B_{R_k})(x_k) \leq \sum_{i=1}^n \epsilon/2^k = \epsilon,$$

e fazendo novamente ϵ tender a 0 concluímos a demonstração. ■

Portanto, podemos, agora, concluir que a capacidade de qualquer conjunto é não-negativa. De fato, o potencial condutor do conjunto \emptyset é a função nula, logo, a sua capacidade é nula. Se A é não-vazio temos que existe $x \in A$, portanto, usando as duas últimas proposição obtemos que $c(A) \geq c(\{x\}) = 0$.

Proposição 4.9 *Se A é um subconjunto de capacidade positiva e v é o seu potencial condutor então*

$$\frac{c(A)}{|p - p'|^{n-2}} \leq v(p) \leq \frac{c(A)}{|p - p''|^{n-2}},$$

para todo $p \in T$, onde p' e p'' são os pontos de A mais afastado e mais próximo de p , respectivamente.

Demonstração: A demonstração faz uso de fatos de Geometria Diferencial, por isso, só a rascuharemos. Aproximamos A por domínios de curvatura principais contínuas. Daí, seguirá que v é uma distribuição contínua de carga c , em A , e v será decrescente ou crescente se concentrarmos a carga em p' e p'' , respectivamente. De onde, obtemos as desigualdades.

■

Os resultados sobre capacidade que utilizaremos serão apenas as duas proposições acima. Contudo, tem-se ampliado o alcance de aplicabilidade deste conceito. Por exemplo, generaliza-se o Princípio da Singularidade Removível para conjuntos de capacidade zero, ou seja, se u é harmônica e limitada em T , onde T é um domínio limitado, B é um conjunto da fronteira de capacidade zero e $T \cup B$ é ainda aberto; então u pode ser estendida de forma harmônica em $T \cup B$. Para a demonstração deste teorema sugerimos [14].

4.3 Critério de Wiener

Com todas as ferramentas necessárias em mãos estamos aptos a provar o Critério de Wiener. Optamos por apresentar uma demonstração mais simples do que a inicial de Wiener, exposta por Kellog em [12].

Teorema 4.10 *Sejam Ω um domínio e λ um número real fixo, com $0 < \lambda < 1$. Dado $q \in \partial\Omega$ denotemos por γ_k a capacidade do conjunto $(B_q(\lambda^k) \setminus B_q(\lambda^{k+1})) \cap \Omega^c$. Então q é um ponto*

regular de Ω se, e somente se, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda^n} \quad (4.10.1)$$

diverge.

Demonstração: Suponhamos que a série (4.10.1) diverge. Pela proposição (4.4) basta mostrar que para todo $\alpha > 0$ o potencial condutor v_α de $\Omega^c \cap B_\alpha(q)$ aproxima de 1 em q . Dado $0 < \epsilon < 1/3$, tomemos $\lambda = 1 - \epsilon/3$. Como a série (4.10.1) é de termos positivos temos que alguma das séries

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_{ki}}{\lambda^{ki}}, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_{ki+1}}{\lambda^{ki+1}}, \dots, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_{ki+(k-1)}}{\lambda^{ki+(k-1)}}$$

diverge, onde $k \geq 2$ é tal que $\lambda^{k-1} < \epsilon/3$. Suponhamos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_{ki+j}}{\lambda^{ki+j}} \quad (4.10.2)$$

diverge. Denotemos por E_i a região de Ω^c que está a uma distância de q menor que λ^{ki+j} e maior que λ^{ki+j+1} e v_i o seu potencial condutor. Agora, consideremos m que satisfaça $\lambda^{km+j} < \alpha$ e a função

$$v_{m,m'} = \sum_{i=m}^{m'} v_i,$$

onde escolheremos m' adiante. Observemos que essa função é harmônica em \mathbb{R}^n , exceto em $\bar{E}_{m,m'} = \cup_{i=m}^{m'} \bar{E}_i$. Logo, nunca é maior que qualquer limitante que tenha em $\bar{E}_{m,m'}$. Estimemos um limitante para $v_{m,m'}$ em $\bar{E}_{m,m'}$. Fixemos $m \leq n \leq m'$. É claro que $v_n \leq 1$ em \bar{E}_n . Já se $i \neq n$ temos pela proposição (4.9) que

$$v_i(x) \leq \frac{\gamma_{ki+j}}{\text{dist}(x, \bar{E}_i)} \leq \frac{\gamma_{ki+j}}{\lambda^{ki+j+1} - \lambda^{k(i+1)+j}} = \frac{\gamma_{ki+j}}{\lambda(1 - \lambda^{k-1})\lambda^{ki+j}},$$

desde que $x \in \bar{E}_n$. Portanto,

$$v_{m,m'} \leq 1 + \frac{1}{\lambda(1 - \lambda^{k-1})} \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma_{ki+j}}{\lambda^{ki+j}} < \frac{1 + \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma_{ki+j}}{\lambda^{ki+j}}}{\lambda(1 - \lambda^{k-1})},$$

pois $\lambda(1 - \lambda^{k-1}) < 1$. Assim, definindo a função

$$v'_{m,m'} = \frac{\lambda(1 - \lambda^{k-1})v_{m,m'}}{1 + \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma_{ki+j}}{\lambda^{ki+j}}}$$

segue que $v'_{m,m'} < 1$ em \mathbb{R}^n . Como $v'_{m,m'}$ é harmônica num domínio que contém aquele em que v_α é, e $v'_{m,m'} < 1$ em tal conjunto, segue que $v'_{m,m'}$ é menor que qualquer função superharmônica da seqüência obtida pelo Método da Varredura de Poincaré que converge a v_α , de onde $v'_{m,m'} \leq v_\alpha$. Notemos que se p está a uma distância r de q , novamente pela proposição (4.9) teremos a seguinte desigualdade

$$v_{m,m'}(p) \geq \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma_{ki+j}}{r + \lambda^{ki+j}}.$$

Logo,

$$v_\alpha \geq v'_{m,m'} = \frac{\lambda(1 - \lambda^{k-1})v_{m,m'}}{1 + \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma_{ki+j}}{\lambda^{ki+j}}} \geq \frac{\lambda(1 - \lambda^{k-1}) \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma_{ki+j}}{r + \lambda^{ki+j}}}{1 + \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma_{ki+j}}{\lambda^{ki+j}}}$$

em $S_r(q)$. Sendo a série (4.10.1) divergente, podemos tomar m' tal que o denominador acima, que denotaremos por D seja maior $6/\epsilon$. Como o numerador aproxima de $D - 1$ quando r vai a zero, existe $\eta > 0$ tal que para $r < \eta$ o numerador excede $D - 2$. Logo, se $|p - q| < \eta$ temos que

$$\begin{aligned} v_\alpha(p) &\geq \lambda(1 - \lambda^{k-1}) \frac{D - 2}{D} = \lambda(1 - \lambda^{k-1}) - \frac{2}{D} \lambda(1 - \lambda^{k-1}) \\ &\geq \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) - \frac{\epsilon}{3} \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) \\ &= 1 - \epsilon + \left(\frac{\epsilon^2}{3} - \frac{\epsilon^3}{27}\right) \geq 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, v_α converge a 1 em q . Reciprocamente, suponhamos que a série (4.10.1) converge. Usando a proposição (4.4) vemos que para provar que q é um ponto regular basta determinar $\alpha > 0$ tal que o potencial condutor v_α de $\Omega^c \cap B_\alpha(q)$ não convirja a 1 em q . Sejam m tal que

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{\gamma_i}{\lambda^i} < \frac{\lambda}{4}$$

e \bar{v}_m o potencial condutor de $\Omega^c \cap B_{\lambda^m}(q)$. Mostremos que \bar{v}_m não convirja a 1 em q . De fato, caso contrário existira $\eta > 0$ satisfazendo $\bar{v}_m > \frac{3}{4}$ em $\overline{B_\eta(q)}$. Pela proposição (4.9) existe m' tal que $\bar{v}_{m'} < 1/4$ em $S_\eta(q)$. Agora, denotando por $v_{m,m'}$ o potencial condutor de $\Omega^c \cap (B_{\lambda^m}(q) \setminus B_{\lambda^{m'}}(q))$ temos que $\bar{v}_m \leq \bar{v}_{m'} + v_{m,m'}$. Logo, $v_{m,m'} > 1/2$ em $S_\eta(q)$. Como a seqüência do Método da Varredura de Poincaré que define $v_{m,m'}$ é decrescente temos que todas as funções dessa seqüência são maiores que $1/2$ em $S_\eta(q)$. Mas, sendo tais funções superharmônicas, temos pelo Princípio do Mínimo que são maiores que $1/2$ em $\overline{B_\eta(q)}$. Por

outro lado, mais uma vez pela proposição (4.9)

$$v_{m,m'}(q) \leq \sum_{i=m}^{m'} v_i \leq \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma_i}{\lambda^{i+1}} \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\gamma_i}{\lambda_i} < \frac{1}{4},$$

o que é uma contradição. Assim, q não é um ponto regular. ■

Usando o critério Wiener, obtive em [28] os exemplos abaixo, já estudados e estabelecidos anteriormente por Lebesgue. Sendo o primeiro, exposto em [20], um surpreendente exemplo de um domínio homeomorfo a bola unitária que não era um Domínio de Dirichlet.

Exemplo 4.11 *Seja a superfície obtida pela rotação do curva $y = \exp(-1/x)$, $x > 0$ em torno do eixo x . Consideremos a região entre $B_R(0)$ e a sua superfície S , de forma que a origem seja um ponto cuspidal reintrante. Então a origem não é um ponto regular.*

O seguinte também foi obtido antes por Lebesgue, em [19], que usou a função $U(x, y, z) = (x^\alpha + y^\alpha - z)^{1/2}$, $\alpha = 2/(2n + 1)$ para provar que a origem era um ponto regular.

Exemplo 4.12 *Considerando novamente a mesma região, só que agora a superfície de revolução obtida pela curva $y = x^m$, $x > 0$ temos que a origem será um ponto regular.*

As idéias originadas na Matemática nunca padecem ou hibernam, sempre crescem em muitas direções. Com as desenvolvidas acima não foram diferentes, foram estendidas, generalizadas e exploradas em outras situações por BreLOT, Choquet e outros. Por exemplo, no estudo do p -laplaciano $div \nabla(|x|^{p-2}u)$ via o conceito de p -capacidade. Ou seja, a Matemática é algo vivo, em constante transformação e crescimento. Mas, que diferentemente de nós, é imortal.

Apêndice A

Funções Harmônicas

Sendo as funções harmônicas o cerne da Teoria do Potencial, faremos uma breve exposição das principais definições e resultados envolvendo-as que serão de grande valia para o texto.

A.1 Resultados Principais

Definição A.1 *Uma função real contínua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita harmônica se*

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0,$$

para todo $x \in \Omega$.

Como funções harmônicas são invariantes por rotações, isto é, se u é uma função harmônica e O é uma matriz ortogonal então $v(x) = u(Ox)$ também é harmônica, é natural procurar por funções harmônicas radiais. Suponhamos que $u(x) = v(r)$, onde $r = |x|$, seja harmônica. Sendo

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x) &= v'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r} \\ u_{x_i x_i}(x) &= v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right), \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, n$, temos que

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0.$$

Portanto, se $v'(r) \neq 0$ para todo r , obtemos que

$$(\log(v'))' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r}.$$

De onde, $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ para alguma constante a . Assim, se $x \neq 0$ temos

$$u(x) = \begin{cases} b \log |x| + c & \text{se } n = 2 \\ \frac{b}{|x|^{n-2}} + c & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

como uma função harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Logo, fazemos a seguinte definição:

Definição A.2 Definimos a Solução Fundamental sendo a função

$$N(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x - y| & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

Vemos que a Solução Fundamental como função de x é harmônica em todo \mathbb{R}^n , exceto em y e vice-versa. Fizemos essa escolha de constante afim de obter a Terceira Identidade de Green.

Teorema A.3 (Fórmula do Valor Médio) *Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Se $B_r(x) \subset \subset \Omega$ então*

$$u(x) = \oint_{B_r(x)} u d\sigma.$$

Demonstração: Definindo a função $\phi(r) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y)$ em $[0, \infty)$, com $\phi(0) = 0$, temos por mudança de variável que

$$\phi(r) = \oint_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y) = \oint_{\partial B(0)} u(x + rz) d\sigma(z).$$

Logo,

$$\phi'(r) = \oint_{\partial B(0)} Du(x + rz) \cdot z d\sigma(z).$$

Portanto, usando a Segunda Identidade de Green obtemos que

$$\phi'(r) = \oint_{\partial B_r(x)} Du(y) \cdot \frac{y-x}{r} d\sigma(y) = \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma(y) = \frac{r}{n} \oint_{B_r(x)} \Delta u(y) \sigma(y) = 0.$$

De onde concluímos que ϕ é constante, assim,

$$\int_{B_r(x)} u(y) d\sigma = \phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \oint u(y) d\sigma(y) = u(x). \quad \blacksquare$$

Através do último teorema temos que as funções harmônicas são simultaneamente subharmônicas e superharmônica. Logo, os Princípios do Máximo e Mínimo são verificados.

Teorema A.4 (Princípio do Máximo Forte) *Sejam Ω conexo e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Se existir $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \sup_{\Omega} u(x)$ então u é constante em Ω .*

Corolário A.5 (Princípio do Máximo Fraco) *Seja $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e harmônica em Ω , então*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Do Princípio Máximo Fraco temos a unicidade de soluções do Problema de Dirichlet. De fato, suponhamos que u e v sejam soluções do Problema de Dirichlet em Ω com condição de fronteira f , então $u - v$ é uma função harmônica tal que $u - v \leq 0$ em $\partial\Omega$. Portanto, $u - v \leq 0$. Com o mesmo raciocínio usando $v - u$ ao invés de $u - v$ também obtemos que $u - v \geq 0$, conseqüentemente, $u = v$.

Teorema A.6 (Princípio do Mínimo Forte) *Sejam Ω conexo e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Se existir $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \inf_{\Omega} u(x)$ então u é constante em Ω .*

Corolário A.7 (Princípio do Mínimo Fraco) *Seja $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e harmônica em Ω , então*

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Por fim, também temos a recíproca da Fórmula do Valor Médio, ou seja,

Teorema A.8 (Recíproca da Fórmula do Valor Médio) *Se u é uma função de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ que satisfaz*

$$u(x) = \oint_{\partial B_r(x)} u d\sigma$$

para toda $B_r(x) \subset\subset \Omega$, então u é harmônica.

Demonstração: Basta observar que sob as hipóteses teremos que a função ϕ definida no teorema (A.3) será constante. Contudo,

$$\phi'(r) = \frac{r}{n} \oint_{\partial B_r(x)} \Delta u(y) dy.$$

Portanto, $\Delta u = 0$. ■

A.2 Convergência de Funções Harmônicas

Várias vezes no texto faremos uso de algumas propriedades de convergência de funções harmônicas, que por questão de completude exporemos-os. A base de todos os teoremas a seguir é o bem conhecido Teorema de Harnack

Teorema A.9 (Teorema de Harnack) *Dados um conjunto aberto $U \subset\subset \Omega$ existe uma constante que depende apenas de U tal que*

$$\sup_U u \leq C \inf_U u$$

para toda função não-negativa e harmônica em Ω .

Demonstração: Seja $r = \frac{1}{4} \text{dist}(U, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Escolhemos $x, y \in U$ tais que $|x - y| \leq r$, então

$$u(x) = \oint_{B_{2r}(x)} u dy \geq \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B_r(y)} u dy = \frac{1}{2^n} \oint_{B_r(y)} u dy = \frac{1}{2^n} u(y).$$

Sendo \bar{U} compacto, temos que podemos cobri-lo com uma quantidade finita de bolas $\{B_i\}_{i=1}^N$, em que cada uma delas tem raio r e $B_i \cap B_{i-1} = \emptyset$ para $1 = 2, \dots, N$. Então

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{2nN}} u(y),$$

para todos $x, y \in U$. ■

Proposição A.10 *Se $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções harmônicas que converge uniformemente para uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ então u é harmônica.*

Demonstração Pelo Princípio do Máximo temos que

$$u_k(x) = \int_{B_r(x)} u_k(y) dy,$$

para todos $x \in \Omega$ e $B_r(x) \subset\subset \Omega$. Logo, passando o limite em ambos lados da igualdade acima obtemos que

$$u(x) = \int_{B_r(x)} u(y) dy,$$

sempre que $x \in \Omega$ e $B_r(x) \subset\subset \Omega$. Portanto, pela recíproca do Princípio do Máximo segue que u é harmônica. ■

Teorema A.11 *Seja $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência não-decrescente de funções harmônicas em Ω . Se $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergir num ponto $x_0 \in \Omega$ então $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergirá uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$ para uma função harmônica.*

Demonstração: Pelo Teorema de Harnack existe $C > 0$ tal que

$$\sup_K (u_k - u_m) \leq C \inf_K (u_k - u_m), \quad (\text{A.11.1})$$

para todos k e m tais que $k \leq m$. Como $\{u_k(x_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge temos que dado $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k > m \geq k_0$ então $u_k(x_0) - u_m(x_0) < \epsilon$. Logo por (A.11.1)

$$|u_k(x) - u_m(x)| \leq C\epsilon,$$

para todo $x \in K$ e $k > m \geq k_0$. Portanto, concluímos que $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre K . ■

É fácil notar a partir da demonstração acima que o teorema acima e o próximo corolário continuarão válidos se a hipótese de seqüência não-decrescente for alterada para não-crescente.

Corolário A.12 *Seja $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência não-decrescente de funções harmônicas em Ω . Se $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergir num ponto $x_0 \in \Omega$ então $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergirá para uma função harmônica.*

Demonstração: Pelo teorema anterior temos que $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a uma função u em cada subconjunto compacto K de Ω . Logo pela proposição (A.10) $u|_{\text{int}(K)}$ é harmônica. Mas, como podemos cobrir Ω por conjuntos compactos $K \subset \Omega$ temos que u é harmônica em Ω . ■

Teorema A.13 *Seja $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções tais que o enésimo termo da seqüência é solução do seguinte Problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{se } x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f_n. \end{cases}$$

Se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergir uniformemente a f teremos que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergirá uniformemente a uma função u e esta resolverá o Problema de Dirichlet com condição de contorno f .

Demonstração: Pelo Princípio do Máximo temos que $|u_m - u_n| \leq \sup_{\partial\Omega} |f_m - f_n|$. Logo, pelo Critério de Cauchy $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a uma função u . Além disso, dado $x \in \Omega$ e $B_r(x) \subset\subset \Omega$, temos que

$$u_n(x) = \int_{B_r(x)} u_n(x) dx,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De onde obtemos

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x)} u_n(x) dx = \int_{B_r(x)} u(x) dx,$$

Portanto, pela Recíproca da Fórmula do Valor Médio u é harmônica. ■

Apêndice B

Identidades de Green

Encerraremos o apêndice com as identidades entre integrais obtidas por Green em 1828 no seu livro “An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism” a partir do Teorema da Divergente.

Teorema B.1 (Teorema da Divergente) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira de classe C^1 . Se F também é de classe C^1 em $\bar{\Omega}$, então*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma,$$

onde ν é a normal exterior em $\partial\Omega$ e $\operatorname{div} F : U \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}$, a função $\operatorname{div} F$ é chamada de divergente de F .

Para $u \in C^1(\bar{\Omega})$ e $1 \leq i \leq n$, tomando $F = u(x) \cdot e_i$ obtemos o resultado conhecido como Teorema de Gauss-Green:

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \nu^i d\sigma,$$

onde ν^i é a i -ésima coordenada de ν .

B.1 Primeira Identidade de Green

Sejam $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Considerando $u = u_{x_i}v$ no Teorema de Gauss-Green e depois somando de 1 a n , obtemos a Primeira Identidade de Green

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma.$$

Notemos que se, além disso, u for harmônica teremos que

$$\int_{\Omega} |Du|^2 dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma.$$

B.2 Segunda Identidade de Green

Se $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ temos a Segunda Identidade de Green

$$\int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma$$

que resulta da anterior ao subtraí-la membro-a-membro da igualdade obtida trocando os papéis de u e v . Dessa igualdade, facilmente, vemos que

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma.$$

B.3 Terceira Identidade de Green

Por fim, introduziremos a Terceira Identidade de Green. Como vimos esta igualdade foi o germe do Método das Equações Integrais, que alavancou o desenvolvimento da Análise Funcional no início do século XX. Sejam Ω um domínio limitado de classe \mathcal{C}^1 e $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, então para todo $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) N(x, y) \right) d\sigma(y) + \int_{\Omega} N(x, y) \Delta u(y) dy.$$

De fato, dado $x \in \Omega$ tomemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que $\overline{B_\epsilon(x)} \subset \Omega$. Definimos $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus B_\epsilon(x)$. Portanto, usando a Segunda Identidade de Green obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N(x, y) \Delta u(y) dy &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} N(x, y) \Delta u(y) dy \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\epsilon} \left(N(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - u(y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x, y) \right) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial \Omega} \left(N(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - u(y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x, y) \right) d\sigma(y) \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(x)} \left(u(y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x, y) - N(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \right) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial \Omega} \left(N(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - u(y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x, y) \right) d\sigma(y) + u(x), \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x, y) d\sigma(y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(x)} \frac{(y-x) \cdot \nu(y)}{\omega_n |x-y|^n} d\sigma(y) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y) d\sigma(y) = u(x) \end{aligned}$$

E u sendo de classe \mathcal{C}^2 em $\overline{\Omega}$ temos que $\partial_{\nu_y} u$ é limitada em Ω , logo,

$$\int_{\partial B_\epsilon(x)} \left| N(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right| d\sigma(y) \leq \begin{cases} \frac{M}{\omega_2} |\log \epsilon| \int_{\partial B_\epsilon(x)} d\sigma(y) = M\epsilon |\log \epsilon| & \text{se } n = 2 \\ \frac{M}{\epsilon^{n-2} \omega_n} \int_{\partial B_\epsilon(x)} d\sigma(y) = M\epsilon & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Portanto, de forma geral temos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(x)} N(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) d\sigma(y) = 0.$$

Referências Bibliográficas

- [1] Bôcher, Maxime - *Singular Points of Functions which Satisfy Partial Equations of Elliptic Types*. Bulletin of the American Mathematical Society **9** (1903), 655-465.
- [2] Brezis, Haïm e Browder, Felix E. - *Partial Differential equations in the 20th century*. Advanced Mathematics, **135** (1998), 76-144.
- [3] Figueiredo, Djairo Guedes de - *Análise de Fourier e Equações Diferenciais e Parciais*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, Quarta Edição. Rio de Janeiro, 2007.
- [4] Figueiredo, Djairo Guedes de - *O Princípio de Dirichlet*. Matemática Universitária **1** (1985), 63-84.
- [5] Figueiredo, Djairo Guedes de - *Teoria Clássica do Potencial*. Editora Universidade de Brasília, 1ª edição. Brasília, 1963.
- [6] Epstein, Bernard - *Partial Differential Equations*. MacGraw-Hill, 1ª edição. New York, 1962.
- [7] Evans, Lawrence C. - *Partial Differential Equations*. The American Mathematical Society. Graduate Studies in Mathematics. Rhode Island, 1998.
- [8] Folland, Gerald B. - *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, 2ª edição. New Jersey, 1995.
- [9] Gilbarg, David e Trudinger, Neil S. - *Elliptic Partial Differential Equations Of Second Order*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 224. Springer Verlag, 2ª edição. Berlin, 1998.

- [10] Iório, Rafael Júnior e Iório, Valéria de Magalhães - *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*. Impa, Projeto Euclides. Rio de Janeiro, 1988.
- [11] John, Fritz - *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 4ª edição. New York, 1982.
- [12] Kellogg, Oliver Dimon - *Foundations of Potential Theory*. Springer-Verlag, 1967.
- [13] Kellogg, Oliver Dimon e Vasilesco, Florin - *A Contribution to the Theory of Capacity*. American Journal of Mathematics **51** (1929), 515-526
- [14] Kellogg, Oliver Dimon. - *On the Classical Dirichlet Problem for General Domains*. Proceedings of National Academy of USA **12** (1926), 397-406.
- [15] Kellogg, Oliver Dimon - *Recent Progress with the Dirichlet Problem*. Bulletin of the American Mathematical Society **32** (1926), 601-625.
- [16] Kellogg, Oliver Dimon - *Unicité des Fonctions Harmoniques*. Comptes Rendus **187** (1928) 526-527.
- [17] Kline, Morris - *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, volume 2. Oxford, 1972.
- [18] Landkof, N. S. - *Foundations of Modern Potential Theory*. Springer-Verlag. Berlin, 1972
- [19] Lebesgue, Henri Léon - *Conditions de Régularité, Condition d'irrégularité, Conditions d'impossibilité dans le Problème de Dirichlet*. Comptes Rendus, **178** (1924), 349-354.
- [20] Lebesgue, Henri Léon - *Sur des Cas d'impossibilité du Problème de Dirichlet*. Comptes Rendus de La Société de France **17** (1913) 48-50.
- [21] Lima, Elon Lages - *Curso de Análise Vol. 2*. Impa, Projeto Euclides, 9ª edição. Rio de Janeiro, 2006.
- [22] Perron, O. - *Eine neue Behandlung der Ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$* . Math. Ztschr., **18** (1923), 42-54.
- [23] Poincaré, Henri - *Sur le Problème de la Distribution Électrique*. C.R. Acad. Sc. Paris **104** (1887), 44-46.

- [24] Poincaré, Henri - *Sur les Équations aux Dérivées Partielles de la Physique Mathématique*. American Journal of Mathematics **12** (1890), 211-294.
- [25] Ponce, Augusto C. - *Métodos Clássicos em Teoria do Potencial*. IMPA, Publicações Matemáticas. Rio de Janeiro, 2006.
- [26] Rudin, Walter - *Principles of Mathematical Analysis*. MacGraw-Hill, International Series in Pure and Applied Mathematics, 3ª edição. New York, 1976.
- [27] Wiener, Norbert - *Certain Notions in Potential Theory*. Journal of Mathematics and Physics **1** (1924), 24-51.
- [28] Wiener, Norbert - *The Dirichlet Problem*. Journal of Mathematics and Physics **1** (1924), 24-51.
- [29] Wiener, Norbert - *Note on a Paper O. Perron*. Journal of Mathematics and Physics **1** (1924), 24-51.
- [30] Zaremba, Stanislaw - *Sur le Principe de Dirichlet*. Acta Mathematica, **24** (1911), 293-316..