SOBRE CRESCIMENTO ECONÔMICO ÓTIMO

JOSÉ BENEDITO SCHNEIDER

ORIENTADOR

MIGUEL TAUBE NETTO

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Setembro - 1982

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A Eros (o instinto da Vida)

AGRADECIMENTOS

Ao Miguel, por não impor limites supérfluos.

Ao Joanílio, pela sugestão do tema e pela alegre troca de idéias.

À Cláudia, pelos desenhos.

Ao Roger e ao Bartmann, pela força geral.

À Lourdes, por entender a produção e datilografia por impulsos.

Ao Departamento de Matemática Aplicada, pela longa espera.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

SUMÁRIO

No Capítulo I, após apresentação do debate sobre implicações ideológicas no uso da Matemática em Economia, é feita uma análise das principais linhas teóricas dos modelos de crescimento econômico. Essa análise tem como referencial a instabilidade inerente ao crescimento da economia capitalista, demonstrada no modelo de Harrod-Domar. Termina definindo a teoria de crescimento econômico ótimo, mostrando porque o modelo de von Neumann é o mais significativo desta classe.

O Capítulo II apresenta, em todos os detalhes, este modelo incluindo um dispositivo didático desenvolvido por KOOPMANS,T.C..

O Capítulo III apresenta as versões Morishima e Radner da conjetura de "Turnpike", obtida ao se relaxar algumas das severas restrições do modelo inicial de von Neumann.

No Capítulo IV são feitos comentários sobre o desenvolvimento recente do assunto e feitas interligações com outros sistemas econômicos, os de Walras e Sraffa.

SUMMARY

In Chapter I, after presenting a debate on the ideological implications of using Mathematics in Economics, an analysis of the main theoretical lines of economic growth models is made. This analysis has as the basic framework the inherent instability of the growth of a capitalistic economy, shown in Harrod--Domar model. It ends with the definition of optimal economic growth, showing why von Neumann model is the most significant in its class.

Chapter II presents a detailed analysis of this model, including a didactic device improved by KOOPMANS, T.C..

Chapter III presents Morishima's and Radner's versions of the "Turnpike" conjecture, obtained by weakening some of the strong constraints in the original von Neumann model.

In Chapter IV, some comments on recent developments of the theme and some links to the Walras and Sraffa economic sistems are made.

CAPÍTULO I

SOBRE TEORIAS DE CRESCIMENTO ECONOMICO

Este capítulo visa introduzir o debate (ainda não generalizado entre economistas e matemáticos) sobre o uso de instrumental matemático na formulação e manejo dos fenômenos econômicos, e as implicações ideológicas inerentes a este uso.

Pretende apresentar o problema a um público ainda não familiarizado com o assunto e localizar corretamente o objetivo pelo qual foi escolhido o modelo de von Neumann (Cap. II) e seus desdobramentos recentes (principalmente os teoremas de "Turnpike" - Cap. III) como o exemplo mais significativo e relevante das assim chamadas Teorias de Crescimento Econômico Ótimo. O Cap. IV contém uma análise do modelo e seus desdobramentos, utilizando os conceitos aqui desenvolvidos.

A - IDEOLOGIA E MATEMÁTICA NA ECONOMIA

A importância da discussão se prende a uma visão predominante entre muitos economistas, especialmente ligados à assim chamada Escola Neo-Clássica(*), de que o desenvolvimento da teoria

---

(*) (e.g. ROBBINS, L.C.R. "An Essay on the Nature and Significance of Economic Science", MacMillan, London, 1933; VON MISES, L. - Epistemologic Problems of Economics (1933), Van Nostrand, New York, 1960).

econômica deve conduzir, necessariamente, a uma eliminação dos fatores ideológicos(*) na análise desta ciência (sic). Por causa disto, ela chegará cada vez mais perto das suas "leis naturais", as quais, à semelhança das da Física e da Matemática, independe - penderiam do tempo e da forma de organização social do homem.

(*) "... quando a palavra "ideologia" é usada, isto deve necessariamente se referir a um sistema completo de pensamento coordenado de crenças e idéias, que forma um referencial, ou um grupo especial de conceitos interrelacionados, para noções, análises, aplicações e conclusões mais específicas e particulares"

DOBB, M.H. - "Theories of Value and Distribution since Adam Smith (Ideology and Economic Theory), Cambridge, University Press, Cambridge, 1973, pp.1.

Neste sentido, qualquer formulação econômica que revele a existência de julgamentos de valor é, no mínimo, tautológica, para não dizer a-científica. Além disso, usando categorias de análise do positivismo lógico, com o qual procura sua afirmação filosófica, essa visão coloca que uma teoria, para ser dita científica, deve ser inerentemente verificável no mundo real (não confundir com o empiricismo); quaisquer sentenças ou teorias que não possuem a propriedade da *verificabilidade* não passam de "ruídos sem significado". Como este método deve ser aplicado indiferenciadamente, a qualquer teoria, segue-se que não faz qualquer distinção entre as ciências naturais e as ciências sociais, cujas teorias devem preencher os mesmos requisitos para serem consideradas científicas.

Outra forte marca do positivismo lógico é a insistência em que o primeiro passo da teoria deve ser sempre consequência da observação direta ou da percepção pelos sentidos; ou seja, um resultado do contato com o mundo empírico, seguindo depois um processo de racionalização e, finalmente, verificação (empírica, novamente). Isto implica que a Economia, para ser considerada uma ciência, deve partir da observação do mundo real, afirmar a sua teoria e as suas sentenças, e verificá-las em confrontação com a realidade. Usando outra linguagem, a Economia deve ser Positiva, ao fazer afirmações científicas sobre o que "é". Afirmações sobre o que "deve ser" não sobrevivem ao teste da verificabilidade e, portanto, não são científicas mas julgamentos de valor. Isto significa que a Economia não pode ser "Normativa" pois se assim fosse, não

seria uma ciencia(*).

A refutação dessa visão filosófica do neo-classicismo é feita, em todo seu alcance, em KATOUZIAN,H.[1] , não sendo escopo deste trabalho. Contentamo-nos em registrar que "estes dois critérios mais importantes do positivismo lógico - i.é., verificabilidade e verificação - eles mesmos vêm a ser julgamentos de valor. Mas, de acordo com estes mesmos critérios, julgamentos de valor são (na melhor das hipóteses) nada mais que tautologias"(**). Ao comentar a visão neo-clássica, DOBB mostra que ela tem embutida como interpretação para ideologia um conceito que "guarda estreita relação com a *falsa consciência* Hegeliana que serve para obstruir a visão do homem sobre si mesmo e sobre suas condições de existência"(**) . Ressalta que, ao contrário, a essência do conceito é, justamente, o de tornar claro o "caráter relativo das idéias, historicamente falando; se algo deve ser visto como não mais que um aspecto ou elemento delas, ou como caracterizando-as no seu todo. E tal relatividade histórica pode abarcar tanto a *visão da essência* como a parcialidade, talvez de tal modo interior à situação

---

(*) Karl Popper desenvolve em "Razão ou Revolução?, em "The Logic of the Social Sciences" e em "The Logic of Sientific Discovering" um teste para a ciência baseado na *falsificabilidade* e *falsificação*, ao invés da *verificabilidade* e *verificação*.

(**) KATOUZIAN , H., "Ideology and Method in Economics", New York University Press, London, 1980, pp. 52.

que desafie qualquer separação analítica completa(*). Por todos estes motivos, devemos olhar com bastante cautela o objetivo de se procurar as leis naturais e atemporais da Economia, procura esta na qual a Matemática tem sido, dadas suas características, um instrumento privilegiado e poderoso de persuasão no uso cotidiano dos que intentam tal objetivo.

Seguindo outra linha de raciocínio, Joseph Schumpeter assenta esta discussão em torno do seu conceito de "visão": o formato complexo da realidade e da natureza dos problemas que se confrontam com a humanidade, em qualquer situação historicamente dada, é inevitavelmente ideológico. A ideologia, portanto, "entra no nível mais básico, no ato cognitivo pré-analítico". A teoria econômica tem seu início "com material provido por nossa *visão* das coisas", "sendo esta *visão* ideológica quase que por definição" desde que "ela incorpora o quadro de coisas como nós as vemos"(**). Conclui seu pensamento ressaltando que "enquanto o pensamento Econômico" deve ser quase que inevitavelmente condicionado ideologicamente, a "Análise Econômica" pode ser tratada como independente e objetiva - uma grande provisão de técnicas formais e instrumentos governados por padrões supra-históricos e regras a serem discutidas e assentadas independentemente"(***)

(*) DOBB, M.H. op. cit. pp. 1.

(**) SCHUMPETER, J. - "History of Economic Analysis", New York and London, 1954, pp. 37, citado em DOBB, M.H. op.cit. pp. 3.

(***) DOBB, M.H., op. cit. pp. 4.

Este ponto de vista mostra uma abertura para a discussão de quais hipóteses que devem ser escolhidas para efeito de análise da realidade econômica e que essa escolha é, inevitavelmente, condicionada pela experiência e *visão* do sujeito acerca desta realidade. Todavia, uma vez feita a escolha, o desenrolar de resultados e conclusões decorrentes destas hipóteses é tarefa de "Análise Econômica", com as qualidades descritas acima. Essa posição ainda é insatisfatória. No dizer de DOBB, "este ponto de vista Schumpeteriano, qualificado e explanado com grandes reservas, é claramente relacionado com a visão mais crua e direta da análise econômica como uma "caixa de ferramentas", sendo (pelo menos na sua forma moderna) puramente instrumental, ligada com técnicas passíveis de aplicação a uma grande variedade de propósitos e situações. Como tal, ela não tem interesse em julgamentos normativos, e não é concebida com propósitos específicos de uso - se clarificar os problemas do monopólio fazedor de lucros (profit-making) ou aqueles do planejador de uma economia socialista . Esta concepção do papel do economista puro tem sido, naturalmente, reforçada pela onda de métodos matemáticos e formas axiomáticas em economia, ao ponto de purgar o sujeito de noções, elementos ou relações não passíveis de serem quantificadas e expressas num sistema de equações"(*).

A separação entre a escolha das hipóteses (ideológica por natureza) e o método de análise (independente do objeto e da ideologia na escolha) ainda é inconsistente. O estudo das propriedades

---

(*) DOBB, M.H. op. cit., pp. 4.

de uma estrutura formal de proposições e sentenças é um problema relevante enquanto tal. Entretanto, se esta estrutura almeja à descrição de um sistema econômico propriamente dito, não é possível separar o processo de resolução e conclusões das questões para as quais ela foi montada e, portanto, da dimensão social dos problemas econômicos que procura abordar. Neste sentido, esvanece se a independência do conteúdo econômico e a objetividade proposta por Schumpeter. Em resumo, "um modelo matemático pode ser (*inter alia*, deve ser) examinado em seus aspectos inteiramente formais, como uma estrutura consistente. Ao mesmo tempo, *qua* teoria econômica, sua própria estrutura é relevante para as afirmações que esteja fazendo sobre a realidade - para a qualidade de seu diagnóstico. Escolhendo uma estrutura em preferência a outra, o modelador não somente provê um marco ou referencial dentro do que pode operar o pensamento humano, mas está dando ênfase sobre certos fatores ou relações e excluindo outros, ou relegando-os à sombra; e assim fazendo, ele pode ser julgado por distorcer ou clarear a realidade e, portanto, conduzindo a uma base verossímel (ou inverossímel) para interpretação e predição"(*)

Feitas as ressalvas sobre o uso superficial, generalizado e, muitas vezes, indevido da Matemática na formulação e tradução de problemas econômicos, motivado muito mais por motivos profissionais (necessidade de afirmação, enquanto membro da "comunidade científica" e a grande função dos "papers" publicados para promoção

---

(*) DOBB, M.H., op. cit., pp. 7.

e aceitação profissional(*)) do que por contribuições relevantes ao conhecimento econômico, devemos nos preocupar com outra crítica, em outro extremo, que lança uma grande desconfiança sobre qualquer tentativa de fazer "modelos" econômicos, especialmente os matemáticos, já que estes estariam contribuindo fundamentalmente para obscurecer os aspectos essenciais da Economia, seu caráter social, histórico e político. Ainda mais longe, esses "modelos" estariam sendo usados deliberadamente por aqueles que são, por ideologia, favoráveis à manutenção do *status-quo*, servindo como justificativa para certas práticas econômicas, política e ideologicamente já definidas. Além disso, o ato da modelagem seria uma espécie de diversionismo anestesiante, já que, chamando atenção para os quebra-cabeças daí resultante e que não têm nenhuma importância real, os problemas atuais e reais da Economia não mereceriam a atenção necessária, possibilitando a implementação de políticas econômicas que apenas mantêm o quadro atual. Essa formulação tem sido frequentemente usada por autores usuários das categorias marxistas de análise econômica. Ela entretanto, envolve um erro de concepção sobre o que seja um modelo matemático e sobre o uso dos instrumentos quantitativos e formalizantes à disposição.

(*) Para uma interessante e original análise sobre o papel das pressões sociais e acadêmicas na avalanche de publicações científicas irrelevantes e não criativas, ver KATOUZIAN, op. cit., cap. 5.

Sobre o assunto, com uma abordagem psicanalítica, ver BARTHES, R., "Escritores, Intelectuais, Professores e outros ensaios", Editorial Presença, Lisboa, 1974.

Para responder a esta crítica, levantamos uma reflexão sobre o ato de fazer modelos, que está colocada para todos os estudiosos das ciências sociais, para não dizer das ciências naturais. Um historiador preocupado com o tema levanta que "a análise de modelo é desnecessária quando se deseja apenas descrever a atividade econômica de uma área num dado momento. Se a descrição da atividade econômica é vista como o objetivo primordial da história econômica, a utilidade do raciocínio por meio de modelo é com razão posta em dúvida. Para o estudo descritivo, os eventos e os fenômenos ganham importância pela frequência de sua recorrência" "Se, contudo, alguém acha que os historiadores, em geral, e os historiadores econômicos, em particular, devem tentar chegar a generalizações, esse alguém deve também, concordar em que ninguém pode se satisfazer com generalizações sobre aspectos particulares isolados da realidade social, e que devemos, em última análise, colimar nessa caso a criação de todo um conjunto de pronunciamentos gerais relativos aos problemas fundamentais do funcionamento e evolução dos sistemas econômicos, isto é, a criação de uma teoria geral. Se aceitarmos esse objetivo, será necessário o raciocínio com base em modelo; a prática mostrou que ele é, muitas vezes , aplicado também por estudiosos que o rejeitam". "A construção de um modelo é sempre tarefa muito delicada e controversa. Requer que alguns eventos sejam tirados de seu contexto social, e outros completamente desprezados. A maioria dos historiadores censura essas práticas, temendo, não sem razão, que sejam inteiramente arbitrárias. Podemos apenas dizer que esses métodos são inevitáveis

na pesquisa histórica e que eles próprios os aplicam também. Afinal, quando falamos da "polis" grega, do cesarismo, do feudalismo, da era das guerras religiosas estamos, metodologicamente falando, adotando um procedimento análogo ao usado na construção de um modelo. E, o que é melhor, a construção de um modelo econômico proprociona-nos mais possibilidades de verificar a correção dos métodos e procedimentos aplicados"(*).

O raciocínio apresentado não faz menção explícita sobre a caracterização desses modelos como matemáticos; assumimos, pois,que se aplica a qualquer dos tipos. Entendemos que ele responde pela necessidade (eventual ou permanente) de construção de modelos, no caso matemáticos,em Economia. Não se deve, pois, descartá-los, *a priori*, nem de supor que apenas através desta forma se poderia representar os mais encobertos segredos da "ciência" econômica, já que, como vimos, um modelo, mesmo na sua forma matemática, mais pura, não é uma representação (tão abstrata) de fatos econômicos que não é afetado por influências ideológicas. Exige-se do modelador (matemático, economista,...) uma sólida base do instrumento e do objeto; um conhecimento amplo das questões ideológicas e econômicas envolvidas neste mister, além da indispensável familiaridade com o raciocínio matemático, para uma correta adequação de meios e fins.

(*) KULA, W., "Da Tipologia dos Sistemas Econômicos", in Economia (vários autores), Editora FGV, Rio, 1981, pp. 122-124. Este artigo é um comentário sobre a obra "Objet et Méthode de L'anthropologie Économique"de MAURICE GODELIER em L'Homme,v. 5, nº 2.

Uma variante da crítica à modelagem matemática é de que este instrumento, por sua própria natureza, não pode contribuir para o entendimento dos fenômenos históricos, políticos e sociais que determinam o comportamento econômico da sociedade, fenômenos não passíveis de quantificação *per se*. Eles poderiam gerar, no máximo, leis qualitativas referentes a sistemas econômicos bem definidos historicamente, não generalizantes, e, portanto, o raciocínio matemático seria de pouquíssima utilidade. Respondemos a isto ressaltando que abstração e generalização é um processo de raciocínio lógico e, por causa desta lógica, não é anti-natural (como se procura fazer crer) que dispositivos matemáticos sejam usados, quando for o caso, na formulação e construção de um modelo teórico.

Vamos, pois, resumir nossa abordagem ao problema de modelagem matemática na Economia, através dos seguintes tópicos:

"i) O uso de qualquer técnica, incluindo matemática, em qualquer pesquisa científica, incluindo economia, é legítima, quando ajuda a análise, sua exposição e/ou sua precisão.

ii) A matemática é uma dessas técnicas, ou meio de exposição. Ela não é *inerentemente* superior a qualquer outra; ela não pode, por si mesma, adicionar algo à substância da teoria; e ela não concede qualquer honraria especial a seu usuário. Alguém acreditaria, hoje, que a habilidosa exposição de uma teoria em métrica poética conferiria, enquanto tal, um status superior ao seu autor?

iii) As formulações matemáticas de teorias econômicas são, às vezes, úteis para a clareza e economia de palavras, o que-especialmente

em vista da "avalanche de publicações" - é desejável.

iv) As formulações matemáticas de teorias econômicas são, às vezes, sem utilidade, obscurantistas ou mistificadoras quando tendem a esconder idéias simples e claras atrás de técnicas complicadas e tediosas.

v) A "revolução matemática" é uma aplicação *inteligível* das ferramentas da análise matemática ao corpo existente da teoria econômica e seus desenvolvimentos futuros. Não é simplesmente uma questão do uso isolado de técnicas matemáticas, onde for apropriado, na teoria econômica.

vi) Isto pode encorajar a exclusão da investigação teórica de importantes problemas, categorias ou variáveis que não são facilmente suscetíveis à manipulação matemática.

vii) Em contraste, pode levar a uma crescente concentração da análise teórica em problemas remotos e quebra-cabeças imaginários que podem ser facilmente manipulados pelas técnicas matemáticas.

viii) A adoção de uma atitude irracional pela profissão econômica em considerar formulações matemáticas como *inerentemente* superiores àquelas que usam outros métodos, poderia levar a uma situação onde idéias inteligíveis e inteiramente claras são artificialmente apresentadas na forma matemática, exclusivamente para mostrar que o autor é "altamente dotado" e, logo, facilitar a publicação de seus trabalhos e a promoção de sua carreira. Apropriadamente, Popper descreveu tal atitude como "o culto da

ininteligibilidade, o culto da linguagem altissonante"(*):

B - TEORIAS DE CRESCIMENTO ECONÔMICO: UMA INTRODUÇÃO

Devemos, inicialmente, fazer distinção entre o que se chama de Teoria de *Desenvolvimento Econômico* e Teoria de *Crescimento*. O mesmo será feito em relação às chamadas Teorias de Ciclo.

Aceita-se como definição para *Teoria de Crescimento Econômica* aquela que se volta, fundamentalmente, para o estudo do comportamento da economia capitalista desenvolvida, com um horizonte de tempo, para todos os efeitos, ilimitado. É pleonástico ressaltar que deve ter características inerentemente dinâmicas (no sentido de opostas às estáticas). Para montar um referencial de análise das teorias existentes, descreveremos algumas óticas, sob as quais podem ser estudadas as propriedades, a longo prazo, da economia capitalista desenvolvida:

i) EQUILÍBRIO MOMENTÂNEO

Como o nome diz, não pode ser confundido com o estado estacionário de uma economia estagnada.

ii) TRAJETÓRIAS DINÂMICAS

Dadas as hipóteses e condições de contorno da teoria, pode-se "prever" o comportamento futuro das variáveis ou comparar-se os resultados "previstos" com efetivamente acontecidos.

(*)KATOUZIAN, H. op. cit., pp. 166-167.

iii) EQUILÍBRIO DINÂMICO

Também conhecido como estado de crescimento estacionário, onde o crescimento das variáveis em estudo se dá às mesmas taxas. A atenção se concentra, principalmente, na demonstração de existência (ou não), unicidade e estabilidade de tal equilíbrio.

iv) PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS E CATENÁRIAS

As propriedades assintóticas têm como pressuposto um horizonte de tempo infinito, no qual o sistema poderá tingir (ou não) um equilíbrio dinâmico. As propriedades catenárias são semelhantes às assintóticas, mas têm o pressuposto de um horizonte de tempo não infinito mas grande o suficiente.

v) DINÂMICA COMPARATIVA

Estudo das propriedades dinâmicas através da variação de um parâmetro por vez (p. ex., o ponto inicial da trajetória).

vi) DESEQUILÍBRIO SISTEMÁTICO

Partindo do princípio de que não há motivos para a existência de equilíbrio dinâmico entre as variáveis, estuda-se a tendência e propriedades desse desequilíbrio.

Situados estes pontos, poderíamos caracterizar uma *Teoria de Desenvolvimento* como a que se volta para o estudo de economias não-

desenvolvidas(*) (principalmente as capitalistas) e as condições para superação dos desequilíbrios estruturais existentes. Uma *Teoria de Ciclo* se diferenciaria da de crescimento, fundamentalmente, pela colocação de um horizonte de tempo finito e não muito grande. É evidente que, frente ao critério de diferenciação utilizado, teremos casos de teorias que poderiam ser classificadas simultaneamente nas duas categorias (p. ex., Harrod-Domar).

Tivemos o domínio desde o final do século passado até os anos 20, da assim chamada "Microeconomia" que, embora voltada para os problemas de uma indústria isolada, utilizava os mesmos parâmetros para a análise da economia como um todo; o comportamento do todo é a somatória do comportamento das partes. Com o início da profunda recessão, em 1929, seu equivalente macro, a "Teoria do Equilíbrio Econômico Geral", com sua análise estática, não resistiu à força dos fatos. A necessidade de pensar as variáveis macroeconômicas de uma forma que não fosse a mera somatória do comportamento dos "agentes econômicos" e descobrir suas formas próprias obrigou os teóricos menos ortodoxos a um grande esforço analítico e um rompimento (maior ou menor) com os cânones estabelecidos. É grande o mérito de Keynes ao demonstrar que o sistema não tende, necessariamente, ao pleno emprego através dos mecanismos de

---

(*) Para uma visão panorâmica das questões do desenvolvimento, ver MYRDAL, G. [1]. Além disso, BLITZER, C.R., CLARK, P.B.&TAYLOR, L. [1] mostram algumas experiências interessantes de planejamento para o desenvolvimento, além de uma boa apresentação do instrumental disponível.

equilíbrio (no caso, abaixamento de salários). Sua defesa da intervenção do Estado para garantir a demanda agregada é um marco, ao romper, dentro da corrente dominante, com a "Lei de Say" (toda oferta gera sua própria demanda), que se aplica mais propriamente a uma sociedade de escambo mas não a uma economia capitalista industrial. Tal rompimento já era antigo na economia marxista(*), o que não tira os méritos de Keynes.

Entretanto, somente após o final da IIª Guerra Mundial é que a questão do crescimento econômico estaria na ordem do dia: as economias arruinadas pela guerra tentando se reerguer rapidamente; os países subdesenvolvidos querendo iniciar seu desenvolvimento econômico; os países capitalistas avançados, livres (por algum tempo) do fantasma da depressão, tentando maximizar seu crescimento a longo prazo e os países socialistas determinados a superar a economia capitalista através da rápida expansão do setor industrial pesado e de matérias primas. Estas condições tiveram pleno reflexo no desenvolvimento da teoria econômica. Embora publicado inicialmente em 1939, o famoso trabalho de HARROD, R.F. [1] (**)

(*) Além das famosas teorias de sub-consumo de Rosa Luxemburgo, Tugan-Baranovsky e outros, ver "Teorias da Mais-Valia", de Marx, conforme citação de KANDUZIAN, H. [ ].

(**) Embora com algumas diferenças, praticamente a mesma estrutura é delineada por DOMAR, E.D. [1], sendo o modelo conhecido como Harrod-Domar. Usamos apenas o nome do primeiro por uma questão de precedência histórica na apresentação do trabalho.

encontrou no pós-guerra o ambiente propício para a retomada de um dos objetos centrais das análises dos economistas clássicos, o crescimento da economia. Devido à sua importância, não só histórica mas por colocar os pontos centrais de análise e, por isso, dar um referencial de classificação dos trabalhos que se seguiram, é necessária (e feita abaixo) uma exposição mais detalhada do mesmo.

Com base em um modelo agregado de um único setor, com relação capital-produto (C) constante e relação poupança líquida - produto (s) também constante, a preocupação de Harrod é com a taxa de crescimento da renda (igual à do produto), se constante no tempo e tendências (em resumo, as condições de existência de um crescimento estacionário). A oferta de mão-de-obra é não restritiva ao processo de crescimento (em princípio), crescendo a uma taxa dada (n). O progresso técnico (no sentido de poupador de mão-de-obra) cresce a uma taxa dada (m). A estrutura de preço é suposta constante. Nestas condições, uma unidade de capital gera $\frac{1}{C}$ unidades de produto, o que gera $\frac{s}{C}$ unidades de poupança líquida. Essa será, portanto, a adição ao estoque existente de capital (na verdade, sua taxa de crescimento).

Ao assumir que o nível de investimento é função da variação esperada da demanda efetiva e que este investimento, por sua vez, gera um certo nível de demanda efetiva, acopla pela primeira vez na literatura econômica os chamados "princípio de aceleração" e teoria do "multiplicador". Usando a formulação de HAHN, F. H. & MATTHEWS, R.C.O. [1] , temos:

$$I_t = (X_t - Y_{t-1})\, C \qquad \text{"aceleração"}$$

$$Y_t = \frac{1}{s} I_t \qquad \text{"multiplicador"}$$

onde C - relação capital-produto

s - taxa de poupança

I_t - investimento realizado no período t

X_t - produção esperada para o tempo t

Y_t - produção realizada no período t

A proporção entre demanda real (produção realizada) e a demanda esperada (produção esperada) será

$$\frac{Y_t}{X_t} = \frac{C}{s}\left(\frac{X_t - Y_{t-1}}{X_t}\right) = \frac{C}{s}\,\hat{g}_t \quad ,$$

onde $\hat{g}_t$ é a chamada taxa "garantida" de crescimento e é função da expectativa de demanda no tempo t. É relevante perceber que a expectativa de demanda só se tornará real se $\hat{g}_t = \frac{s}{C}$, ou seja, é chamada de "garantida" porque só se realiza quando é a esperada. E se não é a esperada?

Essa é a origem da imagem do modelo de Harrod, o "fio da navalha", pois se os investidores investem a uma taxa (real) maior do que a "garantida", o crescimento (real) será maior que o esperado e eles terão a sensação de ter investido menos do que deviam, aumentando suas espectativas para o período seguinte. Entretanto,

se investem a uma taxa menor que a "garantida", terão a sensação de que investiram demais, alterando para menos suas espectativas.

Esta conclusão, enraizada na análise Keynesiana, foi um grande choque para os defensores da tese de que o sistema econômico tende naturalmente para o equilíbrio, bastando deixar livres as forças de mercado. A possibilidade de ajustamento simplesmente pela variação de preços levaria a um outro "fio de navalha", entre o crescimento com inflação e o decrescimento sem inflação, já que os ajustamentos de expectativas se dariam em cima do movimento dos preços e não mais da produção. De qualquer maneira, entra na discussão econômica uma instabilidade inerente ao sistema capitalista, desafiando a antiga teoria.

Para estudar os mecanismos pelos quais pode ser atenuada ou (segundo alguns autores) suprimida esta instabilidade, é preciso que se defina a taxa "natural" de crescimento: para que o crescimento da economia não demande mais força de trabalho do que a disponível, a taxa de crescimento real, a longo prazo, não pode ser maior que a de crescimento da força de trabalho (n) mais a taxa de progresso técnico (m), no sentido definido anteriormente. Ou seja,

$$\text{taxa "garantida"} = \text{taxa "natural"} : \frac{s}{C} = n + m.$$

Pode-se pensar no controle de qualquer uma (ou mais) dessas variáveis para os ajustamentos julgados necessários; a escolha da variável de controle oferece um razoável referencial para análise

dos modelos de crescimento econômico existentes(*).

Os modelos da Escola de Cambridge (U.K.)(**) introduzem nesta economia de um setor a separação em duas classes (trabalhadores e capitalistas), com diferentes propensões a consumir (s_w e s_c, respectivamente) e chamam de P a particção proporcional da renda da classe capitalista na renda total. Portanto,

$$s = P.s_c + (1 - P)s_w \quad ,$$

de onde se poderia deduzir uma especial proporção P que teria um papel equilibrador no modelo de Harrod:

$$P = \frac{(n + m)\ C - s_w}{s_c - s_w} \quad .$$

Embora essa abordagem exija hipóteses bastante severas (p. ex., pleno emprego e coeficientes de poupança rígidos), há um grande avanço no entendimento dos mecanismos de crescimento econômico com a introdução explícita de uma teoria de distribuição.

(*) Conforme SEN, A.K. [2]; Para uma análise mais didática, do ponto de vista matemático, embora um tanto quanto parcial na análise econômica, ver WAN, H.Y. [1].

(**) ROBINSON, J. [2] e [4], KAHN, R.F. [1], PASINETTI, L.L.[1] KALDOR, N. [1], KALDOR, N. & MIRRLEES, J.A. [1].

Evidentemente, a poupança não é o único aspecto pelo qual é feita a análise. Foram seis os grupos de condições, assinalados por ROBINSON, J.[2] e [4], para o estudo do crescimento, equilibrado ou não.

a) Condições Técnicas

b) Política de Investimento

c) Hipóteses sobre Poupança

d) Condições de Competitividade

e) Barganha de Salários

f) Condições de Financiamento.

No que se refere às condições técnicas, abriu-se um debate sobre o progresso técnico incorporado (ou não) às máquinas, antes e/ou depois de sua operação, tendo por pano de fundo a hipótese de perfeita substitutabilidade de capital por mão-de-obra, nas famosas "funções de produção". Segundo a tradição neoclássica, essa substitutabilidade se dá *ex-ante*, na escolha do equipamento ou *ex-post*, na alocação de mais (ou menos) força de trabalho na operação das máquinas (modelos "putty-putty"(*)). Em outros termos, significa que a relação capital-trabalho é perfeitamente variável.

(*) A tradução ao pé da letra (massa de vidraceiro) não tem qualquer semelhança com a idéia da palavra em inglês. Esta quer dar uma idéia de total moldabilidade.

A novidade foi introduzida por ROBINSON, J. [2] e [4], e, subsequentemente, por BLISS, C. [1], DOBB, M.H. [1], KALDOR, N. & MIRRLEES, J.A. [1], PHELPS, E.S. [1], SEN, A.K. [1] (modelos "putty-clay"(*)). Nestes modelos também é, assumido que o número de técnicas alternativas é finito, novamente indo contra a corrente neo-clássica(**).

Usando, principalmente os elementos listados acima para caracterizar os vários tipos de crescimento, equilibrado ou não, introduziu a seguinte classificação dos mesmos:

> IDADE DE OURO: "Com uma taxa de acumulação desejada igual à taxa possível, formada pela taxa de crescimento da população e pela produção *per capita*, começando com quase pleno emprego e uma composição do estoque de equipamento apropriada à taxa desejada de acumulação, mantém-se um nível que se aproxima muito do pleno emprego. A idade de ouro é isso"(***)

(*) Clay = barro e dá idéia de rigidez após uma fase maleável.

(**) Essa discussão não se completa sem o acompanhamento da famosa "Controvésia de Cambridge", acerca da mensurabilidade e homogeneidade do Capital. Como a introdução ao assunto deve, necessariamente, ser extensa, não o fazemos neste trabalho. Ver HARCOURT, G.C. & LAING, N.F. [1].

(***) ROBINSON, J. [4].

IDADE DE OURO CAPENGA: "Uma taxa de acumulação de capital constante pode ocorrer abaixo do pleno emprego. O estoque de equipamento apresenta a composição adequada à taxa de acumulação desejada mas não é suficiente para empregar toda a força de trabalho"(*).

IDADE DE CHUMBO: O emprego cresce a uma taxa menor do que a da força de trabalho. Desemprego crescente.

IDADE DE OURO LIMITADA: Taxa de acumulação de capital desejada constante e maior que a soma da taxa de crescimento da força de trabalho com a taxa de progresso técnico , (instabilidade a curto prazo, provocando rearranjos estruturais).

IDADE DE PLATINA GALOPANTE: Crescimento acelerado do setor de bens de capital, mais investimento no setor e aproveitamento da mão-de-obra disponível. Taxa de lucro se eleva e salário real cai. Com escolha de métodos de produção menos mecanizados, só pára o "galope" com o pleno emprego ou patamar mínimo aceitável de salário.

IDADE DE PLATINA RASTEJANTE: Taxa de acumulação decrescente devido a escassez de mão-de-obra e alta da taxa de juros; produção aumentando em intensidade de capital mas

---

(*) ROBINSON, J. [4].

mantendo pleno emprego.

IDADE DE OURO BASTARDA: A rigidez (patamar mínimo) da taxa de salários reais, a despeito do desemprego, impede uma elevação da taxa de acumulação, na ausência de progresso técnico ("nível baixo"). Pode surgir, também,"...com um nível de salários reais bastante elevado, quando os trabalhadores organizados dispõem de poder para se opor à queda da taxa de salários reais. Qualquer tentativa de elevar a taxa de acumulação, a menos que seja acompanhada por uma redução suficiente do consumo derivado dos lucros, vê-se então frustrada por uma elevação inflacionária das taxas de salários nominais. Numa situação como essa, a taxa de acumulação se acha limitada pela "barreira inflacionária""(*).

IDADE DE PLATINA BASTARDA: mesma situação anterior, com progresso técnico. "Então um nível constante de salários reais é compatível com uma elevação da relação entre o investimento bruto e o consumo. Assim, a aceleração da acumulação pode ocorrer sem provocar inflação"(*).

Os modelos neoclássicos básicos como SOLOW, R.M. [1] e [4], SWAN, T.W. [1] e [2], TOBIN, J. [1], entre outros, assentam sobre a relação capital-produto a maneira de fazer os ajustamentos

---

(*) ROBINSON, J. [4].

necessários. Se a taxa *natural* (m+n) é menor que a *garantida* ($\frac{s}{C}$), há uma aproximação da barreira do pleno emprego e o decorrente aumento da taxa de salários, provocando investimento em técnicas mais intensivas em capital, aumentando C e, consequentemente, diminuindo $\frac{s}{C}$. O raciocínio inverso se aplica, com a diminuição de C, e aumento de $\frac{s}{C}$. Isto acontece, sem tirar nem por, no modelo de "Idade de Platina Rastejante", já descrito; entretanto, o que é uma das possibilidades lá, para a teoria neo-clássica é a única possibilidade. Em outras palavras, não existe instabilidade no sistema econômico. O mesmo comportamento de ajustamento do mercado é estendido às espectativas dos empresários, no que se refere às diferencças entre a taxa *garantida* e a taxa real de crescimento. Não há um comportamento previsível *a priori* do investimento , bastando garantir as condições de concorrência perfeita para o estabelecimento do equilíbrio. Para uma crítica a esta falta de uma função de investimento, ver HAHN, F.H.[2] e SEN, A.K. [1].

Finalmente, como em todos os modelos a taxa de crescimento da população é assumida como exógena, resta apenas a análise das causas do progresso técnico. KALDOR, N. [1] e [2] procura estabelecer uma relação entre o progresso tecnológico e a acumulação de capital. Em KALDOR, N. & MIRRLEES, J.A. [1], é assumida uma "função progresso técnico que institui: a taxa anual de crescimento da produtividade por trabalhador *operando novos equipamentos* como uma função de taxa do investimento por trabalhador". ARROW, K.J. [1] assume o aprendizado como função da soma do investimento bruto passado. Usando a hipótese de igualdade entre a

produtividade marginal e o preço dos fatores, SOLOW, R.M. [2] chega à conclusão de que 87.5% do crescimento da produção *per cápita*, nos Estados Unidos, de 1909 a 1949, se deve às mudanças técnicas e os 12.5% restantes ao uso de capital (sic!).

Para finalizar o tema, deve-se registrar o aparecimento de modelos neoclássicos com 2 setores: setor de bens de capital e setor de bens de consumo. Inicialmente por MEADE, J.E. [1], UZAWA, H. [1] e SOLOW, R.M. [3], os problemas de existência, estabilidade e unicidade da trajetória de crescimento balanceado, além de equilíbrios momentâneos foram apresentados, também, por HAHN, F. H. [2] e HAHN, F.H. & MATTHEWS, R.C.O. [1], entre outros. Esse ramo de análise tem produzido um sem-número de trabalhos nos últimos 20 anos, com alta formalização matemática e baixa contribuição à análise econômica, não merecendo aqui um aprofundamento.

C - CRESCIMENTO ECONÔMICO ÓTIMO

Podemos definir como uma *Teoria de Crescimento Econômico Ótimo* aquela que, dentro do referencial de análise apresentado, procura estudar as condições de existência, unicidade e estabilidade do crescimento à máxima taxa possível (no caso, de acumulação). Usando a linguagem de Joan Robinson, o estudo da Idade de Ouro. Um trabalho importante e pioneiro no assunto é RAMSEY, F.P. [1]. Outros secundários, como LAING, N.F. [1] e PHELPS, E.S. [2] não serão considerados. Procuraremos mostrar aqui a importância do modelo apresentado por von Neumann, J. [1], com seus desdobramentos

posteriores, principalmente os assim chamados teoremas de "Turn – pike"(*), no contexto apresentado e na análise econômica. Ao estudo do modelo propriamente dito, dedicaremos os próximos capítulos deste trabalho.

A preocupação de von Neumann no seu trabalho foi determinar qual a taxa máxima de crescimento balanceado e constante de uma economia multisetorial, dadas as técnicas de produção disponíveis, sem problemas de consumo ou restrição de mão-de-obra. A própria estrutura de preços e a taxa de lucro (no trabalho, taxa de rendimento) são derivadas da determinação das técnicas a serem usadas e que fornecem a maior taxa de crescimento procurada. Ao final, demonstra que, para as hipóteses dadas, as taxas referidas são iguais, sem desemprego (ver Idade de Ouro). O método de análise empregado, completamente original para a época abriu caminho para, pelo menos, quatro ramos relacionados da economia matemática: Teoria de Jogos, Programação Linear, Análise Insumo-Produto Dinâmica e Análise de Atividades. Além disso, segundo KOOPMANS, T. C. [1]: "... o trabalho contém o primeiro modelo rigoroso, formal e inteiramente explícito de teoria do capital não agregado conhecido deste autor". Embora tenha partido de pressupostos neoclássicos,

---

(*) Para os teoremas, ver, fundamentalmente, MORISHIMA, M. [1] e RADNER, R. [1]. Para análises com variações sobre o modelo de von Neumann, ver MORISHIMA, M. [1] e [2], MATHUR, G. [1], LOŚ, J. & WIECZOREK, A. [1], LOŚ, J. & LOŚ, M.W. [1], além do capítulo IV deste trabalho.

ao relacionar o capital fixo como um produto, ao final do período de produção, torna impossível a aplicação da "Teoria da Produção" neoclássica, com suas curvas de iso-produto. Estabelece um patamar mínimo de salário real, no nível de sobrevivência da mão-de-obra. O sistema de preços é determinado pelas técnicas utilizadas e, portanto, prescinde de uma unidade de medida, do capital. O nível de preços independe completamente da base monetária. Como se vê, não se ajusta ao esquadro neoclássico. Alguns autores, como MATTHUR, G. [1] e DOBB, M.H. [4] , usando como ponto em comum o fato de que a estrutura de preços independe da estrutura de consumo ou de demanda, estabelecem laços muito fortes entre o modelo de von Neumann e o apresentado por SRAFFA, P. [1] , chegando Mathur falar num sistema Sraffa-von Neumann. Além deles, autores como MORISHIMA, M. [1] e BOSE, A. [1] , intentam fazer uma aproximação entre o apresentado por von Neumann e um pretenso "Modelo de Equilíbrio Econômico Geral" que Marx teria esboçado, sem chegar a desenvolvê-lo, tarefa a que esses autores se propõem. Sem entrar no mérito da questão, acreditamos ter mostrado a importância do estudo deste modelo que, a partir de hipóteses econômicas bastante irrealistas e introduzindo (para a época e por um tempo bastante longo) um instrumento de análise hermético e sofisticado, conseguiu levantar questões em áreas de análise e escolas econômicas bem diferentes, além de criar novos métodos.

A partir de sua "irrealidade" econômica, outros pensadores fizeram tentativas de trazê-lo para mais perto da terra. Poderíamos traduzir essa irrealidade em quatro pontos principais:

a) Técnicas de produção constantes no tempo.

b) O crescimento é um fim em si mesmo, mantendo o padrão de consumo constante, ao nível de subsistência, para produção de mão-de-obra (economia escravagista).

c) Crescimento balanceado, ou seja, a taxa de crescimento de todos os setores (como insumos ou como produtos) é igual e constante no tempo.

d) Estoque inicial de capital já está em proporção ótima, ou seja, aquela composição que, face às técnicas disponíveis, proporcionam crescimento máximo.

DORFMAN, R., SAMUELSON, P.A. & SOLOW, R.M. [1], pioneiramente, apresentam a conjetura de que, ao se remover as objeções c) e d), descartando o crescimento balanceado e assumindo um estoque de capital historicamente dado, e trocando o objetivo de crescimento balanceado máximo pela consecução de um estoque máximo de capital, de dada composição, ao final de um tempo dado (T), a trajetória de crescimento máximo se aproxima da trajetória de von Neumann, andando muito próxima da mesma até um determinado ponto em que se afastará para atingir a proporção dada. A Figura 1 expõe, graficamente, a conjetura de "Turnpike" para uma economia de dois setores. (Esse nome é tomado de empréstimo à língua inglesa, sendo que sua tradução por "auto-estrada" não conseguiria expressar todo seu significado).

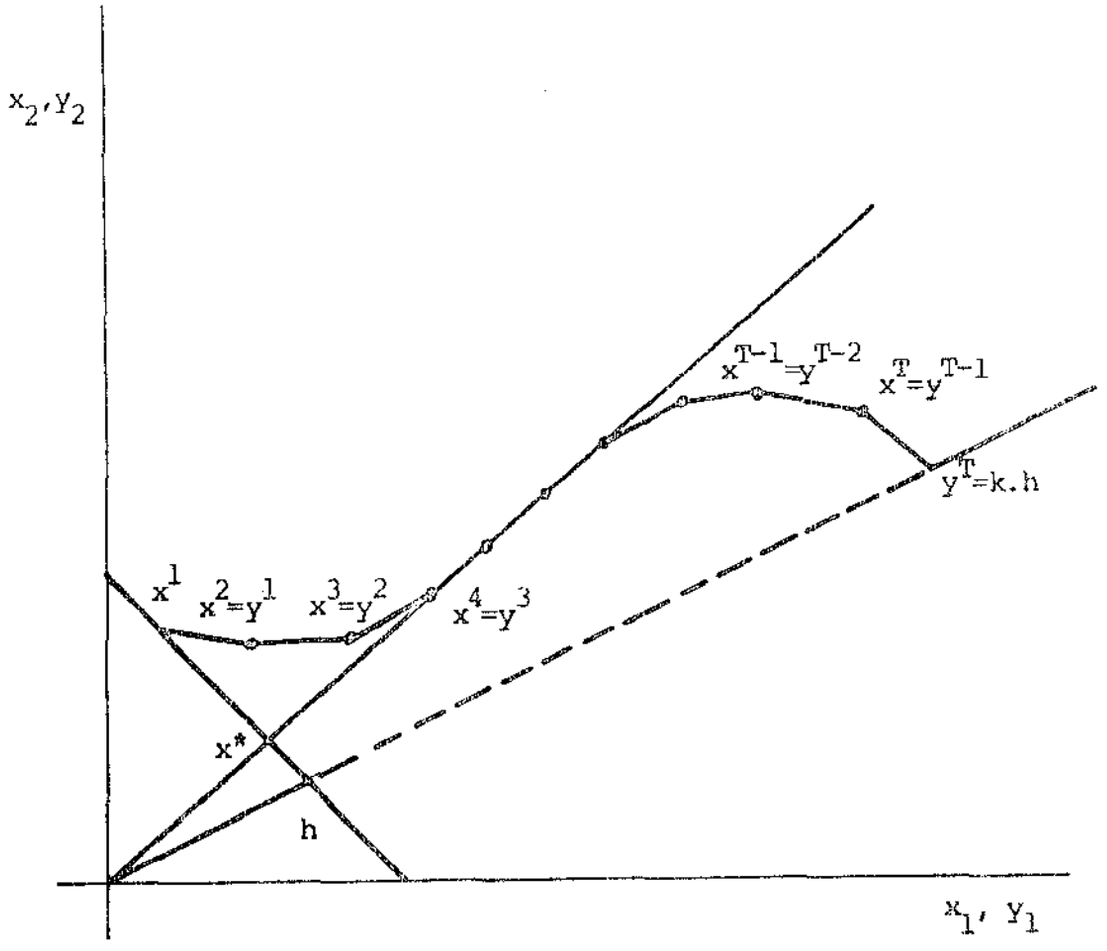

Figura 1 - A conjetura de "Turnpike".

As primeiras e mais importantes provas desta conjetura foram as de RADNER, R. [1] e MORISHIMA, M. [1]. (ver capítulo III). Além dessas, devemos citar as de MCKENZIE, L.W.[1] e [2], FURUYA , A. & INADA, K. [1] e NIKAIDO, H. [1], entre outras. As consequências sobre o modelo de von Neumann e sua aplicabilidade ainda não estão suficientemente desenvolvidas, sendo os mais recentes MORISHIMA, M. [3], MCKENZIE, L.W. e ZAUBERMAN, A. in LOŚ, J. & LOŚ, M. W. [1] e MURAKAMI, Y., TOKOYAMA, K. & TSUKUI, J. [1]. Este último, usando uma generalização do modelo dinâmico de Leontief, tenta mostrar uma possível trajetória tipo "Turnpike" na economia japonesa entre 1963 e 1966. Em LANÇASTER. K. [1], encontramos um

exemplo explícito da conjetura, inclusive com definição das funções apropriadas, usando cálculo variacional como instrumento de demonstração.

É campo aberto à especulação intelectual e/ou pragmática a extensão dessa linha de pensamento econômico, devendo ser ressaltado que pouco tem sido feito nesta direção, nos últimos anos.

CAPÍTULO II

O MODELO DE EQUILÍBRIO ECONÔMICO GERAL DE JOHN VON NEUMANN (*)

A - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos o Modelo de Equilíbrio Econômico Geral, de von Neumann, com sua simplicidade matemática, e todas as hipóteses econômicas que nos pareceram mais relevantes. A maior parte delas já é explicitada no artigo original; entretanto, como ficará claro no ítem B, e no capítulo IV, muitas hipóteses implícitas devem ser tornadas claras, para que as conclusões possam ter uma abrangência maior do que a proposta originariamente. De uma maneira geral, foram adotados os pressupostos da assim chamada Escola Neoclássica de Lausanne, sendo ainda consideradas hipóteses adicionais para que pudesse expressar, matematicamente,

---

(*) Publicado, primeiramente, no volume Ergebnisse eines Mathematischen Seminars, editado por Karl Menger (Viena, 1938), sob o título "Uber ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes". Traduzido para o Inglês por G. Morgenstern, publicado na Review of Economic Studies, 13, 1945-46, 1-9, com o título "A Model of General Economic Equilibrium". Entretanto, já tinha sido apresentado num Seminário de Matemática na Universidade de Princeton, U.S.A., em 1932.

o sistema chamado, por ele, de Economia. A apresentação será feita numa ordem ligeiramente diferente da do autor, de maneira a torná-la, segundo nossa opinião, mais didática.

B - O MODELO

Consideremos o seguinte problema: existem n bens (*) $G_1, G_2, \ldots, G_n$ que podem ser produzidos por m processos $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Que processos serão usados (no sentido de "lucrativos") e que preços serão obtidos para os bens? É evidente que uma resposta depende da outra, o que, em termos matemáticos, significa que a solução, se existir, será implícita.

Em cada processo P_i $(i=1,2,\ldots,m)$ são consumidas quantidades a_{ij} (expressas em unidades peculiares a cada bem G_j) e produzidas quantidades b_{ij} (mesmas unidades de a_{ij}) do bem G_j $(j=1,2,\ldots,n)$. Pode-se representar um processo da maneira abaixo:

$$P_i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} G_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} b_{ij} G_j \qquad (1)$$

Considerando que os processos P_i serão acionados com uma certa intensidade x_i $(i=1,2,\ldots,m)$ e chamando a produção total de bens por Economia (E), teremos:

$$E = \sum_{i=1}^{m} x_i P_i \qquad (2)$$

(*) A definição de bem, neste artigo, é bastante ampla, abrangendo, entre outros, a mão de obra.

Na resolução, o autor se interessa apenas pelos estados em que a Economia se expande sem mudança de estrutura, i.é., a proporção entre as intensidades $x_1, x_2, \ldots, x_m$ permanece constante, embora possam mudar seus valores os x_i. Nesse caso, as intensidades serão multiplicadas por um mesmo fator α, chamado coeficiente de expansão da Economia.

Neste ponto, devemos colocar as hipótese implícitas até agora:

(i) Como não há imposição sobre n (número de bens) e m (número de processos tecnicamente possíveis), a possibilidade de $m > n$ significa que não é possível solucionar o problema através de métodos triviais de resolução de equações.

(ii) Como cada bem G_j é produzido a partir dos outros, inclusive ele próprio, caracterizando os chamados processos circulares de produção, estão incluidos nos G_j os "fatores naturais de produção (*); no entanto, seus coeficientes b_{ij} devem ser, necessariamente, nulos.

(iii) Ao se assumir os a_{ij} e b_{ij} constantes, independentemente da intensidade de acionamento do processo P_i, é caracterizada a situação de retorno constante de escala.

(iv) Estão implícitas, na formulação do problema, as condições de concorrência pura, a longo prazo.

(*) Por "fatores naturais de produção" subentende-se os insumos para os quais não existe processo de produção disponível.

(v) Como não foi imposto nenhum limitante aos valores x_i, subentende-se que os "fatores de produção" podem ser expandidos ilimitadamente.

(vi) A existência e crescimento da força de trabalho são considerados apenas como produtos de um processo de produção cujos insumos são as necessidades mínimas vitais do trabalhador, constituindo o seu salário. Conclui-se que o trabalhador não poupa, enquanto que a classe proprietária não consome, poupando e reinvestindo a totalidade da sua renda.

Em relação específica aos processos de produção, temos:

(vii) Cada processo tem a duração de uma unidade de tempo. Os que tiverem duração maior são fracionados em processos de duração unitária, com a introdução dos produtos intermediários como bens adicionais, se necessário.

(viii) A utilização e depreciação dos bens de capital é levada em consideração ao se colocar cada estágio de desgaste como um bem adicional, com um processo P_i específico.

(xi) É perfeitamente caracterizável, pela definição dada, um processo de produção conjunta.

(x) Se pensarmos em duas proporções diferentes de insumos e um mesmo processo, tecnicamente falando, temos, para efeito do modelo, dois processos distintos.

O objetivo perseguido é um estado de equilíbrio não-estacionário do *sistema econômico*, com os *preços dos bens* e o coeficiente de *expansão* constantes, tais que não alterem a estrutura econômica, a partir do momento em que esse estado seja atingido. Tal situação é denominada estado quase-estacionário, por Champernowne, em seu artigo comentário a respeito do modelo de Von Neumann, comparando-o com o crescimento de um cristal mergulhado numa solução de seu próprio sal (*).

As variáveis numéricas do problema serão:

(i) as intensidades $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dos processos $P_1, P_2, \ldots, P_m$, respectivamente.

(ii) o coeficiente de expansão da Economia, α.

Paralelamente, são consideradas as variáveis duais associadas

(iii) os preços $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dos bens $G_1, G_2, \ldots, G_n$, respectivamente.

(*) CHAMPERNOWNE, D.G., A Note on J. V. Neumann's Article on "A Model of Economic Equilibrium", Review of Economic Studies, 13, 1945-1946, 10-18.

(iv) o fator de rendimento, β ($\beta = 1 + \frac{Z}{100}$, Z é a taxa de rendimento, dada em % por unidade de tempo, (*) num total de $m+n+2$ variáveis.

Como restrições de "bom senso" às variáveis

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,2,\ldots,m) \tag{3}$$

$$y_j \geq 0 \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i > 0 \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j > 0 \tag{6}$$

Com as duas primeiras, descartamos uma eventual solução com intensidades (preços) negativas (os), sem sentido palpável, e, com as últimas, uma solução trivial do problema, com intensidades (preços) nulas (os).

Além dessas, temos as chamadas restrições econômicas.

(*) O termo Z seria a renumeração dada ao capitalista pela aplicação do capital no processo econômico.

$$\alpha \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_i \qquad (j=1,2,\ldots,m) \qquad (7)$$

(*) (**)

Se $\alpha \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i < \sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_i$, para algum $j = r$,

então $y_r = 0$ (7')

No que se refere às variedades duais,

$$\beta \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \geq \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j \qquad (i=1,2,\ldots,m) \qquad (8)$$

(*) (**)

Se $\beta \sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_j > \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j$, para algum $i = s$,

então $x_s = 0$ (8')

(*) Muito embora o artigo tivesse sido apresentado cercade 15 anos antes da primeira formulação teórica de Programação Linear (Dantzig,G.B. - 1947), essas condições são nada mais que as conhecidas condições de folgas complementares em P.L. Além disso, é apontada com pionerismo , uma simetria dual de variáveis, quando se fala dos x_i e o conceito de "processo não usado", por um lado, e dos y_i e o conceito de "bem livre", por outro.

(**) Usando notação matricial, teríamos $(B - \alpha A)x \geq 0$ (7)

$y'(B - \alpha A)x = 0$ (7')

$y'(B - \beta A) \leq 0$ (8)

$y'(B - \beta A)x = 0$ (8')

$x \geq 0$, $y' \geq 0$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$.

A tradução de (7), (7') é de que é impossível se consumir, no processo total, mais do que é produzido do bem G_j. Se, entretanto, menos é consumido (excesso de produção), G_r se torna um bem livre e seu preço $y_r = 0$.

De (8), (8') deduz-se que, no equilíbrio, nenhum lucro é auferido nos processos P_i (ou seja, ou os preços ou a taxa de rendimento aumentariam, descaracterizando o equilíbrio). No entanto, se houver perda no processo P_s, este não será acionado e terá intensidades $x_s = 0$.

As condições abaixo são colocadas para qualificar economicamente os coeficientes a_{ij} e b_{ij}, sendo que (ii) vai assegurar a unicidade dos valores de α e β.

$$\text{(i)}\quad a_{ij} \geq 0 \quad , \quad b_{ij} \geq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$$

$$\text{(ii)}\quad a_{ij} + b_{ij} > 0 \qquad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n) \qquad (9) \qquad (*)$$

(*) A condição (ii) dificilmente poderia tomar um ar de veracidade econômica; no entanto, ela é minimizada, em seu irrealismo, por Von Neumann, ao ressaltar que os coeficientes a_{ij} , b_{ij} podem ser arbitrariamente pequenos e substituir, sem muita perda, um coeficiente nulo. Esse problema foi totalmente superado na prova de existência de solução do modelo de von Neumann, feita por Kemeny et al., 1956, ao substituir essa condição por outra menos restritiva, que é apresentada abaixo:

$$\text{(ii)'}\quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} > 0 \quad (j=1,2,\ldots,n) \qquad \sum_{j=1}^{n} b_{ij} > 0 \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

Traduzida, diz que cada processo precisa de, pelo menos, um insumo para sua operação e que cada bem pode ser produzido por, pelo menos, um processo. (Ver Apêndice II).

Em (i), exclui-se coeficientes de produção negativos. Em (ii), é dito que todos os bens G_j entram em todos os processos P_i, como insumo e/ou como produto.

Ao se procurar $x_1, x_2, \ldots, x_m, \alpha, y_1, y_2, \ldots, y_n, \beta$ solução do problema, não interessa tanto os valores dos x_i ou dos y_j mas suas proporções $x_1 : x_2 : \ldots : x_m$ e $y_1 : y_2 : \ldots : y_n$, o que reduz o número de variáveis de $m+n+2$ para $m+n$. Embora de (7), (7'), (8), (8') tiremos $m+n$ restrições, não se pode garantir a existência de solução, já que tais condições são de desigualdade.

C - SOLUÇÃO

Na busca da solução do problema, devem ser descartadas, inicialmente, as soluções triviais com vários P_i idênticos ou se combinando linearmente para formar outros processos. Outra possibilidade desconsiderada é a de alguns bens entrarem em cada processo P_i na mesma proporção fixa. Devemos partir, pois, para a prova da existência de, pelo menos uma solução $x_1 : x_2 : \ldots : x_m$, $y_1 : y_2 : \ldots : y_n$ e que, se houver mais de uma solução, α e β devem ter o mesmo valor para todas elas (por solução, entende-se uma m-upla x_i ($i = 1, ,2, \ldots, m$) e uma n-upla y_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) que satisfaçam, simultaneamente, às condições de (3) a (8').

Consideremos uma solução hipotética x_i, α, y_j, β de (3)-(8'). Pela condição (6), sabemos que existe pelo menos uma igualdade em (7). Equivalentemente, pela condição (5), existe pelo menos uma igualdade em (8). Por isso:

$$\alpha = \min_{j=1,2,\ldots,n} \left[\frac{\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i} \right] \tag{10}$$

$$\beta = \max_{i=1,2,\ldots,m} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} b_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j} \right] \tag{11}$$

Concluímos, então, que α e β são determinadas univocamente, dados os x_i e y_j. As condições (7), (7') e (8), (8') podem, agora, ser reescritas como:

$y_j = 0$ para todo $j=1,2,\ldots,n$ para o qual

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i} \quad \text{não assume seu valor mínimo} \tag{7*}$$

$x_i = 0$ para todo $i=1,2,\ldots,m$ para o qual

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} b_{ij} y_j}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_j} \quad \text{não assume seu valor máximo} \tag{8*}$$

Considerando $x_1, x_2, \ldots, x_m$ em (7*) e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ em (8*) como dados, passamos a verificar em que situação preencheriam, também, as condições (3)-(6), (7) e (8).

Sejam X' um conjunto de variáveis $(x'_1,x'_2,\ldots,x'_m)$ satisfazendo condições análogas a (3), (5):

$$x'_i \geq 0 \quad (i=1,2,\ldots,m) \qquad (3')$$

$$\sum_{i=1}^{m} x'_i > 0 \qquad (5')$$

e Y' um conjunto de variáveis $(y'_1,y'_2,\ldots,y'_n)$, as análogas a (4), (6):

$$y'_j \geq 0 \quad (j=1,2,\ldots,n) \qquad (4')$$

$$\sum_{j=1}^{n} y'_j > 0 \qquad (6')$$

Seja, ainda, a função

$$\phi(X'_i,Y'_j) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x'_iy'_j}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_iy'_j} \qquad (12)$$

Chamemos $X = (x_1,x_2,\ldots,x_m)$, $Y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ a solução hipotética dada. Fazendo X,Y e X',Y' livremente variáveis, mas de maneira a sempre satisfazer (3)-(6) e (3')-(6'), respectivamente, podemos reescrever (7*) e (8*) da maneira que se segue:

$\phi(X,Y')$ assume seu valor mínimo para Y' se $Y' = Y$ (7**)

$\phi(X',Y)$ assume seu valor máximo para X' se $X' = X$ (8**)

O nosso problema, que era achar uma solução que satisfizesse (3)-(8'), se transforma em achar uma solução de (7**),(8**) e pode ser formulado da maneira que se segue:

"Considerando (X',Y') no domínio definido por (3')-(6'), descubra um ponto de sela $X' = X$, $Y' = Y$, i.é., onde $\phi(X,Y')$ assume seu valor mínimo para $Y' = Y$ e $\phi(X',Y)$ seu valor máximo para $X' = X$".

Uma consequência das condições (7), (7*), (10) e (8), (8*), (11) é que, respectivamente,

$$\alpha = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \right] y_j}{\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \right] y_j} = \phi(X,Y)$$

e

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \right] x_i}{\sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right] x_i} = \phi(X,Y)$$

ou seja, se $\phi(X',Y')$ tem um ponto de sela para $X' = X$ e $Y' = Y$, então,

$$\alpha = \beta = \phi(X,Y) = \text{valor da função no ponto de sela} \quad (13)$$

Com isso, o objetivo, agora, se resume a provar que a função tem, pelo menos, um ponto de sela.

Por causa da homogeneidade da função $\phi(X',Y')$, pode ser feita uma normalização de variáveis, substitutivamente às condições (5') e (6'). Definamos, então, o conjunto S por

$$x'_i \geq 0 \qquad (3')$$

$$\sum_{i=1}^{m} x'_i = 1 \qquad (5^*)$$

e o conjunto T por

$$y'_j \geq 0 \qquad (4')$$

$$\sum_{j=1}^{n} y'_j = 1 \qquad (6^*)$$

(S,T são simplex(*) de, respectivamente, m-1 e n-1 dimensões)

(*) SIMPLEX: Chamamos de simplex de k dimensões ao conjunto de todos os pontos que podem ser expressos na forma

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i x^i \quad , \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \quad , \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,k) \ ,$$

onde x^i $(i=0,1,\ldots,k)$ são pontos tais que seus vetores correspondentes são linearmente independentes.

Alternativamente à formulação anterior (ponto de sela), podemos encarar o problema como a procura de uma solução $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ em S e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ em T satisfazendo (7*) e (8*).

Para garantir existência de uma solução para o problema, nesta formulação, von Neumann prova o lema enunciado abaixo e cuja demonstração está no Apêndice I.

LEMA: Seja R^m o espaço m-dimensional de todos os pontos $X=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, R^n o espaço n-dimensional de todos os pontos $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, R^{m+n} o espaço m+n dimensional de todos os pontos $(X,Y) = (x_1, x_2, \ldots, x_m ; y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Um conjunto, no R^m, R^n ou R^{m+n}, que seja não vazio, convexo, limitado e fechado, chamaremos um conjunto C. Sejam S^o, T^o conjuntos C no R^m e R^n, respectivamente, e seja $S^o \times T^o$ o conjunto de todos (X,Y) no R^{m+n} onde o domínio de X é S^o e o de Y, T^o. Sejam V, W dois subconjuntos fechados de $S^o \times T^o$. Para cada X em S^o, seja o conjunto Q(X) de todos Y com (X,Y) em V um conjunto C; para cada Y em T^o, seja o conjunto P(Y) de todos X com (X,Y) em W um conjunto C. Então V e W têm, pelo menos, um ponto em comum.

A solução decorre, quando fazemos $S^o = S$, $T^o = T$, V = conjunto de todos (X,Y')satisfazendo (7*) e W = conjunto de todos (X',Y) satisfazendo (8*). É visível que V,W são fechados e que os conjuntos $S^o = S$, $T^o = T$, Q(X), P(Y) são todos simplex, i.é., conjuntos C. Os pontos comuns destes V,W são nossa solução $(X,Y) = (x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, que satisfazem, evidentemente, aos dois enunciados apresentados.

Muito embora possam existir vários (X,Y) como solução, provaremos que todos eles devem implicar em α e β idênticos. Tomemos X_1,Y_1,α_1,β_1 e X_2,Y_2,α_2,β_2 como duas soluções. De (7**),(8**) e (13) segue-se que

$$\alpha_1 = \beta_1 = \phi(X_1,Y_1) \leq \phi(X_1,Y_2) \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \beta_2 = \phi(X_2,Y_2) \geq \phi(X_1,Y_2)$$

portanto, $\alpha_1 = \beta_1 \leq \alpha_2 = \beta_2$.

Por simetria,

$$\alpha_2 = \beta_2 \leq \alpha_1 = \beta_1 \quad , \quad \text{por isso,} \quad \alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 \qquad \text{c.q.d.}$$

É de se ressaltar que $\alpha = \beta > 0$, podendo ser maior, menor ou igual a 1, o que implicaria em expansão, retração ou estabilização da economia, respectivamente.

Então, até agora mostramos que:

- Pelo menos uma solução X,Y,α,β existe. Para todas as soluções:

$$\alpha = \beta = \phi(X,Y) \qquad (13)$$

Em outras palavras, o fator de rendimento e o coeficiente de expansão da economia são iguais e determinados univocamente pelos processos tecnicamente possíveis $P_1,\ldots,P_m$.

As duas formulações abaixo servirão apenas para melhor caracterizar α e β .

Primeiramente, analisemos um possível estado da economia com considerações puramente técnicas, tendo um fator de expansão α' por unidade de tempo. Isto é, para as intensidades $x_1, x_2, \ldots, x_m$ se aplica:

$$x_i \geq 0 \qquad (3')$$

$$\sum_{i=1}^{m} x'_i > 0 \qquad (5')$$

e

$$\alpha' \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x'_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x'_i \qquad (7'')$$

Note-se que preços não são levados em consideração. Seja x_i, y_j, α, β uma solução do nosso problema original (3)-(8'). Multiplicando (7") por y_j e fazendo $\sum_{i=1}^{n}$, temos:

$$\alpha' \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_i y_j \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x'_i y_j$$

e portanto, $\alpha \leq \phi(X,Y)$. Por causa de (8**) e (13), temos

$$\alpha' \leq \phi(X',Y) \leq \phi(X,Y) = \alpha = \beta \qquad (15)$$

Em seguida, consideremos um sistema de preços onde o fator de rendimento β' se aplica, sem outro tipo de lucro. Isto é, para

os preços $y'_1,\ldots,y'_n$ se aplica

$$y_j \geq 0 \qquad (4')$$

$$\sum_{j=1}^{n} y'_j > 0 \qquad (6')$$

e

$$\beta' \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y'_j \geq \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y'_j \qquad (8")$$

Semelhantemente, não estamos levando em consideração as intensidades de produção. Seja x_i, y_j, α, β como acima. Multiplicando (8") por x_i e fazendo $\sum_{i=1}^{n}$, temos:

$$\beta' \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy'_j \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_iy'_j$$

e portanto, $\beta' \geq \phi(X,Y')$. Por causa de (7**) e (13), temos:

$$\beta' \geq \phi(X,Y') \geq \phi(X,Y) = \alpha = \beta \qquad (16)$$

Formalizando estes dois resultados:

i) O maior (tecnicamente falando) fator de espansão α' da economia como um todo é $\alpha' = \alpha = \beta$, independentemente dos preços.

ii) o menor fator de rendimento α' no qual é possível um sistema de preços sem lucro é $\beta' = \alpha = \beta$, independentemente das intensidades de produção.

D - UM DISPOSITIVO DIDÁTICO (*)

Esta secção apresenta, em forma didática, uma economia de dois setores, explicitando as conjeturas de von Neumann sobre crescimento balanceado ótimo.

Uma *atividade* é definida como o processo pelo qual um par $x = (x_1, x_2)$ de insumos, disponível no início do período, é convertido no par $y = (y_1, y_2)$ de produtos, disponível ao final do período. Chamamos de *tecnologia* a um conjunto de atividades disponíveis (permanece constante para todos os períodos futuros). As quantidades de insumo ou produto da atividade (x,y) são não-negativas. As hipóteses sobre a tecnologia são:

i) *Proporcionalidade* (Retorno Constante de Escala).

Se uma atividade $(x,y) = \{(x_1,x_2), (y_1,y_2)\}$ é factível (no sentido técnico) então todas as atividades $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) = \{(\lambda x_1, \lambda x_2), (\lambda y_1, \lambda y_2)\}$, obtidas pela multiplicação por um escalar não-negativo são factíveis. O conjunto de todas as atividades proporcionais a alguma atividade não-nula determinada será chamado de *processo*. Uma atividade não-nula usada para especificar um processo será chamada "atividade definidora".

(*) Apresentado em Koopmans [1].

ii) *Aditividade* (Ausência de (Des)Economias Externas)

Se duas atividades (x,y) e (x',y') são ambas factíveis, então, sua soma $(x+x') = \{(x_1+x_1', x_2+x_2'), (y_1+y_1', y_2+y_2')\}$ também é factível.

iii) *Realismo*

Para um par de limitantes positivos ξ_1, ξ_2 dos insumos sempre corresponde um par de limitantes positivos η_1, η_2 dos produtos, tal que para todas as atividades factíveis nas quais $x_1 \leq \xi_1$, $x_2 \leq \xi_2$, deve-se ter $y_1 \leq \eta_1$, $y_2 \leq \eta_2$. Em outras palavras, não se pode obter uma quantidade ilimitada de produtos a partir de uma quantidade limitada de insumos(*)

iv) *Fechamento*

Por conveniência matemática é assumido que o conjunto de atividades factíveis (x,y) no espaço de quatro coordenadas x_1, x_2, y_1, y_2 é fechado, i.é., contém todos os pontos de sua fronteira.

v) *Livre Disponibilidade*

Se uma atividade (x,y) é factível e se (x',y') é uma atividade com quantidades não-menores de insumos ($x_1' \geq x_1$ e $x_2' \geq x_2$) e não-maiores quantidades de produtos ($0 \leq y_1' \leq y_1$ e $0 \leq y_2' \leq y_2$),

---

(*) Isto é uma hipótese correspodente à de Gale [1] de que não se pode produzir algo a partir do nada, i.é., se (x,y) é factível e $x_1=x_2=0$, então, $y_1=y_2=0$. Senão, pela hipótese i) poder-se-ia escolher um λ tal que $\lambda x_1 = \lambda x_2 = 0 \leq \xi_1, \xi_2$ mas $\lambda y_1 > \eta_1$.

então (x',y') é também factível. Isto é, se num período em que a atividade (x,y) acontece, sendo que (x',y') é a desejada, o excesso de insumos $(x_1'-x_1,\ x_2'-x_2)$ ou o excesso de produto $(y_1-y_1',\ y_2 - y_2')$ é disponível sem qualquer custo.

vi) *Produção Positiva*

Como o produto ao final de um período é o insumo do período seguinte, e estamos tratando de um modelo sem trocas com o exterior, é necessário que $y_1 > 0$ e $y_2 > 0$; caso contrário, uma mercadoria inicialmente presente desapareceria do sistema após um período de produção.

Qualquer sequência de atividades factíveis $(x^t,y^t) = \{(x_1^t, x_2^t), (y_1^t,y_2^t)\}$ (t=1,2,...,T) será chamada de *trajetória de crescimento* se o par de produtos das atividades de cada período é igual ao par de insumos para aquelas do período seguinte,

$$y^t = (y_1^t,y_2^t) = (x_1^{t+1},x_2^{t+1}) = x^{t+1}$$

No sistema de eixos (x_1,x_2), também chamado de espaço-mercadoria, uma trajetória pode ser representada, como na Figura 1 , (pag.52) pela sequência de pontos ou "estados" $x^1,y^1 = x^2,y^2 = x^3$, $,\ldots,y^{T-1} = x^T,y^T$. É conhecida como trajetória embora, na verdade seja uma sequência discreta (não-contínua) de "estados". Cada dois estados sucessivos contituem uma "etapa" desta trajetória.

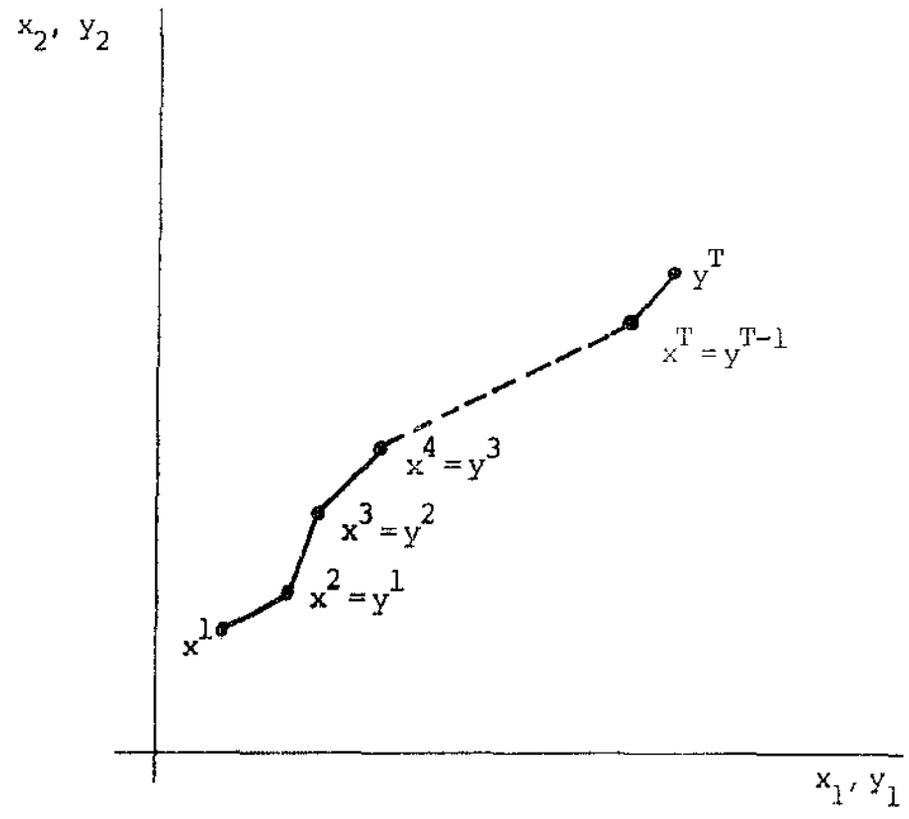

Figura 1 - Uma Trajetória de Crescimento

A discussão de von Neumann limitou-se às "trajetórias de crescimento proporcional", onde cada etapa é uma "atividade de crescimento proporcional". Esta pode ser definida como a atividade não-nula $(x,y) = \{(x_1,x_2), (y_1,y_2)\}$ na qual os produtos são multiplos contantes dos insumos

$$y_1 = \mu x_1 \qquad y_2 = \mu x_2 \qquad \mu > 0 \ ,$$

onde o fator positivo constante (μ) é chamado de *fator de crescimento*, o termo (μ-1) será chamado de *taxa de crescimento*. O

mesmo fator μ se aplica a todas as "etapas". Há crescimento real se $\mu > 1$, estacionariedade se $\mu = 1$ e contração se $\mu < 1$. Os produtos ao término do tempo dado (T), numa "trajetória de crescimento proporcional", com insumos iniciais x_1^1, x_2^1 e um fator de crescimento μ, são

$$y_1^T = (\mu)^{T+1} x_1^1 \qquad y_2^T = (\mu)^{T+1} x_2^1$$

Na figura 2, temos tal tipo de trajetória.

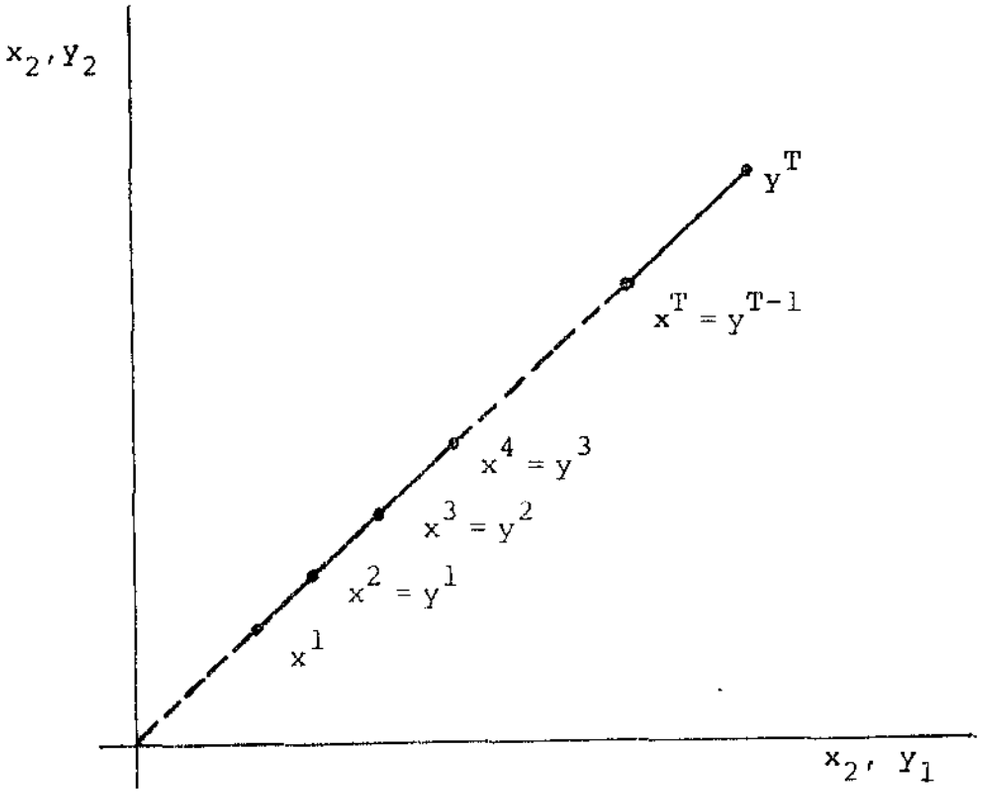

Figura 2 - Uma Trajetória de Crescimento Proporcional.

É necessário, agora, desenvolver um diagrama que consiga representar as restrições de factibilidade, que não podem ser

divisadas nas figuras anteriores. Para tal, dever-se-ia trabalhar num espaço quadri-dimensional das variáveis $x_1, x_2 ; y_1, y_2$. Entretanto, a hipótese i), da proporcionalidade, através de um artifício de "normalização" dos insumos, permite que se realize o trabalho no espaço tri-dimensional. É o que se segue.

Se (x', y') é uma atividade não-nula, pelo menos um dos seus insumos x'_1, x'_2 deve ser positivo (ver nota sobre hipótese iii)). Portanto, sua soma $x'_1 + x'_2$ é positiva. Aplicando-se um fator de normalização $\lambda = 1/x'_1 + x'_2$ à atividade dada (x', y'), obtemos uma nova atividade

$$(x,y) = (\lambda x', \lambda y') = \left(\frac{x'}{x'_1+x'_2}, \frac{y'}{x'_1+x'_2}\right) = \left\{\left(\frac{x'_1}{x'_1+x'_2}, \frac{x'_2}{x'_1+x'_2}\right), \left(\frac{y'_1}{x'_1+x'_2}, \frac{y'_2}{x'_1+x'_2}\right)\right\},$$

com a propriedade de que a soma de seus insumos é igual a unidade.

$$x_1 + x_2 = \frac{x'_1}{x'_1 + x'_2} + \frac{x'_2}{x'_1 + x'_2} = 1$$

Como este artifício é arbitrário e tem um objetivo de reduzir uma dimensão do "espaço-mercadoria", não se deve especular sobre a heterogeneidade das quantidades somadas para se efetuar a normalização.

Cada processo não-nulo é, agora, representado por apenas uma atividade normalizada. Portanto, uma tecnologia pode ser representada por um conjunto de atividades normalizadas. Corresponde a cada par de insumos um ponto no segmento de reta de comprimento

unitário, conforme demonstra a Figura 3.

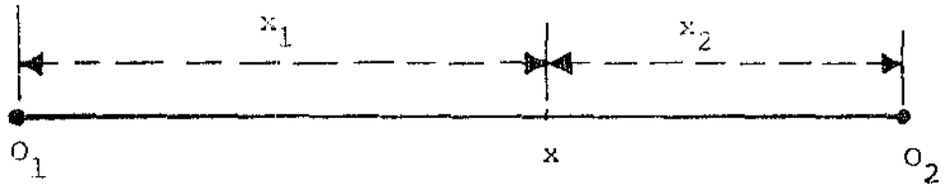

Figura 3 - Representação dos Insumos Normalizados

Esse segmento é chamado de segmento - x. A reta que o contém serve, simultaneamente como eixo - x_1 (de origem O_1, para a direita) e eixo O_2 (de origem O_2, para a esquerda). Adicionando, perpendicularmente ao segmento, os eixos y_1 e y_2 (perpendiculares entre si) construímos o espaço-mercadoria normalizado . A tecnologia é, agora, representada por um conjunto Z de pontos $(x_1, y_1 y_2)$, onde cada ponto z representa uma atividade factível normalizada $\{(x_1, 1-x_1), (y_1, y_2)\}$. Pode-se, portanto, usar a expressão atividade z embora cada ponto z tenha apenas três coordenadas. Os pontos de Z estão acima ou no plano (horizontal) $x_1 - y_1$; em frente ou no plano (vertical) $x_1 - y_2$, entre ou em um dos planos (verticais) $y_1 - y_2$ que contêm a origem $O_1 = (0,0,0)$ ou a origem $O_2 = (1,0,0)$, conforme a Figura 4.

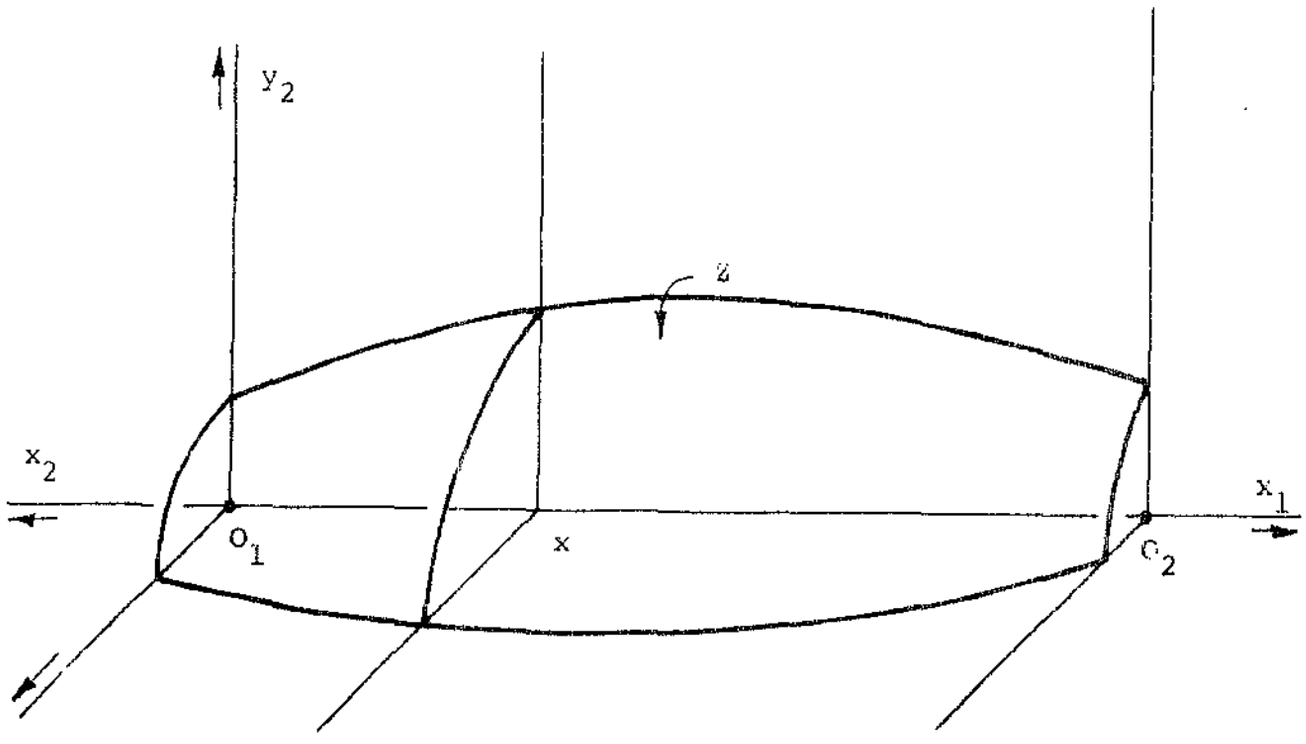

Figura 4 - Um Conjunto Factível no Espaço-Mercadoria Normalizado

Um ponto $z = (x_1, y_1, y_2)$, pertencente a Z, com a propriedade de que Z não contenha pontos da forma $z' = (x_1, \lambda y_1, \lambda y_2)$ com $\lambda > 1$, será chamado de *maximal*. Ele representa uma atividade que não comporta um aumento proporcional dos produtos a partir da mesma quantidade de insumos. Evidentemente, eles só podem ser encontrados na fronteira de Z (que é fechado - ver hipótese iv)).

A Figura 4 mostra um possível formato de Z, onde para cada valor particular de insumo normalizado, o conjunto de produtos factíveis é dado pela intersecção de Z com plano vertical paralelo ao plano $y_1 - y_2$ e que contém $x = (x_1, 0, 0)$.

Dada a tecnologia, a maior taxa de crescimento proporcional que pode ser obtido de insumos dados dependerá da proporção entre esses insumos. O problema de von Neumann passa a ser procurar pela maior taxa obtenível a partir de qualquer proporção de insumos, e qual é essa proporção que leva à taxa máxima.

Para facilitar a busca, vamos considerar, no diagrama, a representação do crescimento proporcional. O par de insumos $x^{(1)} = (0,1)$, que corresponde ao ponto O_1, origina a atividade $z^{(1)} = (0,0,\mu)$, no eixo y_2, à distância μ de O_1. Similarmente, $x^{(2)} = (1,0)$, representado por O_2, origina $z^{(2)} = (1,\mu,0)$, no eixo y_1, à distância μ de O_2. Todos os outros pontos serão representados no segmento $\overline{z^{(1)}z^{(2)}}$, com suas respectivas coordenadas em $\overline{z^{(1)}O_2}$ e $\overline{O_1z^{(2)}}$.

Um fator de crescimento maior μ' originaria um segmento semelhante, apenas aumentando a distância entre O_1 e $z^{(1)}$ e O_2 e $z^{(2)}$. Indicaremos, pois, o segmento $\overline{z^{(1)}z^{(2)}}$ por $S(\mu)$, visto na Figura 5, na página seguinte.

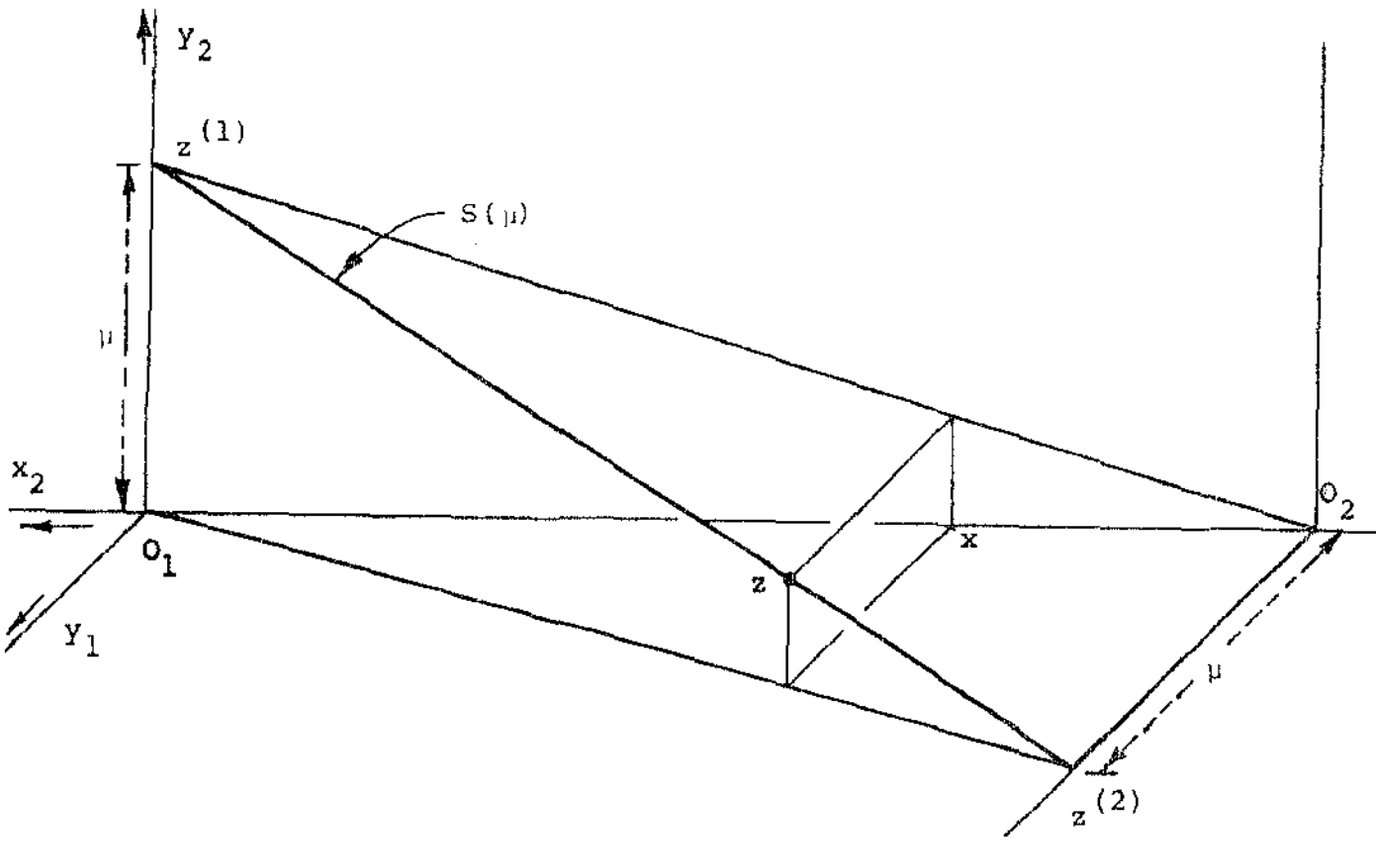

Figura 5 - Representação do Crescimento Proporcional

Colocando num mesmo diagrama as Figuras 4 e 5, conseguimos visualizar a solução gráfica do modelo de von Neumann. Algebricamente, o crescimento proporcional factível, para um determinado fator μ, é representado por um ponto de Z que também pertença a $S(\mu)$. Procura-se, pois, o maior valor (μ^*) de μ para o qual Z e $S(\mu)$ tenham pelo menos, um ponto em comum.

Como se vê na Figura 6, há um único maior valor μ^* para o qual Z e $S(\mu)$ têm um ponto em comum. Qualquer valor acima desse μ^* implica na não-existência de ponto em comum e qualquer valor abaixo diz que sempre é possível encontrar um maior. Qualquer

ponto Z*, comum entre Z e S(μ*) será chamado de "atividade de von Neumann" e esta conduz ao crescimento proporcional máximo, à taxa μ*. O conjunto de todas as atividades proporcionais a esta será chamado de "processo de von Neumann".

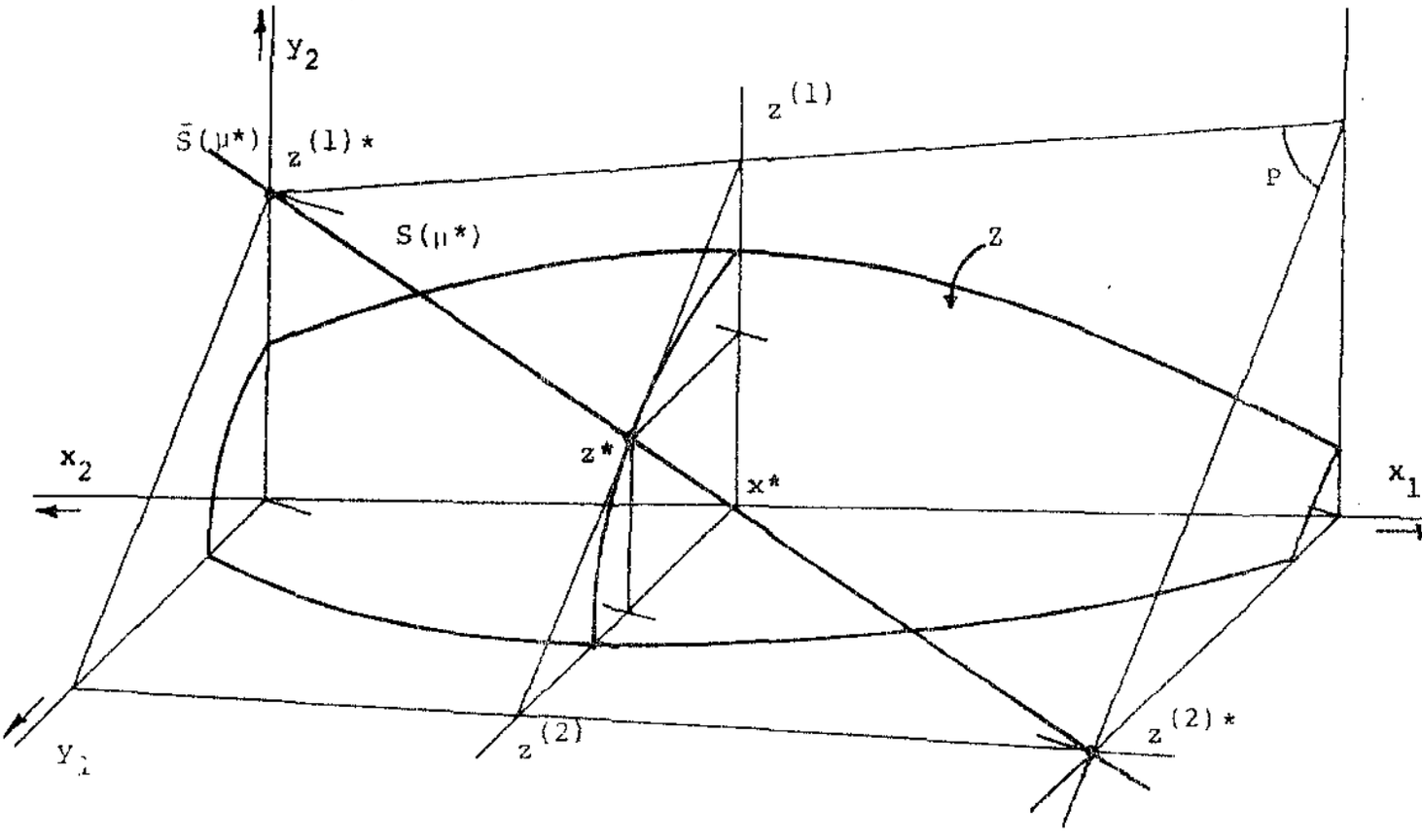

Figura 6 - Construção de uma Atividade de Crescimento Proporcional Máximo (de von Neumann).

O formato arredondado da fronteira de Z garante que apenas uma atividade normalizada será a de von Neumann. Em termos matemáticos, a convexidade estrita da tecnologia garante a unicidade do processo de von Neumann. Além disso, o exemplo apresenta insumos e produtos positivos porque z* não é nenhum dos pontos extremos $z^{(1)*}$ ou $z^{(2)*}$ de S(μ*). Exemplos mais completos são dados nas

Figuras 8, 9 e 10.

Se tivéssemos imposto a hipótese v) (Livre Disponibilidade) ao conjunto Z, o seu formato (supondo apenas uma tecnologia disponível) seria o mostrado na Figura 7.

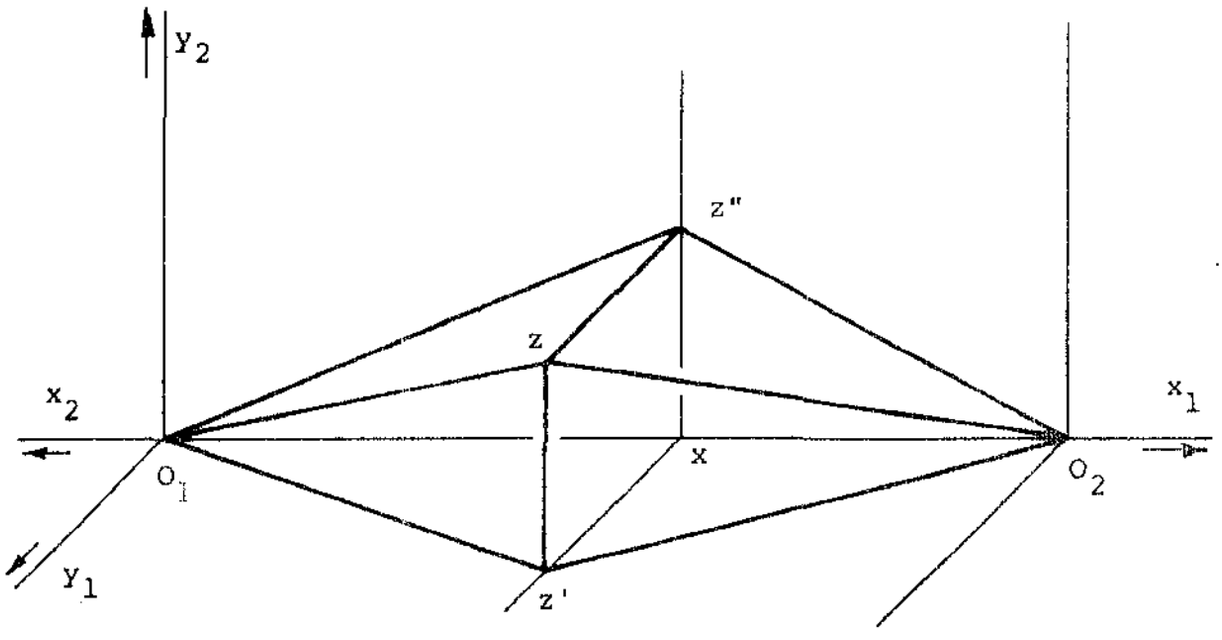

Figura 7 - Implicações da Livre Disponibilidade

Se o ponto $z = (x_1, y_1, y_2)$ pertence a Z, pela disponibilidade de parte ou tudo de um ou ambos produtos, os pontos do retângulo xz'zz" também pertencem a Z. Como as origens O_1 e O_2 pertencem a qualquer conjunto de produção normalizado, pertencem, portanto, a Z. Como este é convexo, o poliedro $O_1z'zz"O_2$ deve estar inteiramente contido em Z. Isto implica que, Z sempre é tri-dimensional, não podendo ser reduzido a um plano ou uma linha.

Uma trajetória de crescimento proporcional que consista de atividades concorrentes ao mesmo processo de von Neumann será chamada de "trajetória de von Neumann". Não há nenhuma outra trajetória de crescimento proporcional alternativa, qualquer que seja o insumo inicial x^1 dessa alternativa.

A seguir, será estabelecida a relação entre uma "trajetória de von Neumann" e o sistema de preços que a sustenta. Ela se dá através do "Teorema da Separação para Conjuntos Convexos", abaixo enunciado: (*)

TEOREMA. *Se* A *e* B *são conjuntos convexos no espaço tri-dimensional que não têm pontos em comum, então existe um plano* P *que separa* A *e* B, *no sentido de que cada ponto de* A *está em* P *ou em um semi-plano determinado por* P, *enquanto que cada ponto de* B *está em* P *ou no outro semi-plano determinado por* P.

Este teorema pode ser aplicado aos conjuntos $\overline{S}(\mu^*)$, que representa a reta que contém $S(\mu^*)$, e $\overset{o}{Z}$, que representa o conjunto de pontos interiores de Z. Mostra-se que as coordenadas do plano P que separa $\overline{S}(\mu^*)$ e $\overset{o}{Z}$ nos dão o sistema de preços procurados; se não, vejamos (consultar Figura 6):

(*) Uma demonstração desse teorema, para n dimensões, existe em DEBREU, G.- "Separation Theorem for Convex Sets", in KOOPMANS, T. C. & BAUSCH, A.F. - "Selected Topics in Economics Involving Mathematical Reasoning", SIAM Rev., Vol. 1, pp. 79-148.

A equação geral de P será do tipo

$$qx_1 + p_1y_1 + p_2y_2 = q_2$$

Como $z^{(1)*} = (0,0,\mu^*)$ e $z^{(2)*} = (1,\mu^*,0)$ estão em P, obtemos pela substituição dessas coordenadas na equação geral

$$\mu^*p_2 = q_2 \qquad \mu^*p_1 = q_2 - q = q_1 \ .$$

Reintroduzindo $x_2 = 1 - x_1$, a equação do plano se torna

$$\pi(x,y) = p_1y_1 + p_2y_2 - \mu^* \ (p_1x_1 + p_2x_2) = 0.$$

A função $\pi(x,y)$ é positiva em um lado de P e negativa em outro. Tomando a inequação

$$\pi(x,y) = p_1y_1 + p_2y_2 - \mu^*(p_1x_1 + p_2x_2) \leq 0,$$

esta inclui todos os pontos de Z. O sinal < se aplica a todos os pontos de Z que não z*, já que este é o único em comum entre Z e P. Como Z contém as duas origens (0,0,0) e (1,0,0), vemos, substituindo na inequação, que $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ mas nunca $p_1 = p_2 = 0$. Como as origens não pertencem a P, não se aplica a igualdade e, portanto, $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$.

Podemos, agora, interpretar p_1 e p_2 como os "preços" das mercadorias "1" e "2", respectivamente, devendo ser ressaltada sua

constância no tempo. Do mesmo modo, $\mu^* - 1 = r$ pode ser interpretado como "taxa de rendimento" para o período e $\mu^* = 1 + r$ como o "fator de rendimento". O termo à esquerda representa o valor dos produtos y_1, y_2, ao final do período, menos o valor dos insumos x_1, x_2, no início, multiplicado por um fator de rendimento. Isto é, o "lucro" em usar a atividade (x,y) durante um período, com o sistema de preços p_1, p_2, r. Como z^* está em P, o lucro $\pi(x^*,y^*)$ da atividade de crescimento proporcional máximo é exatamente zero.

Além disso, o lucro $\pi(x,y)$ de qualquer atividade factível (x,y) é não positivo. Com esse sentido, pode-se dizer que o sistema de preços p_1, p_2, r, se permanecer constante através do tempo, "sustenta" a (s) trajetória (s) de crescimento de von Neumann. O conceito de preço aqui usado se aplica indiferentemente à situação de mercados competitivos ou à de uma economia com planejamento centralizado, sendo, na verdade, um indicador de eficiência na alocação de recursos.

O preço relativo das mercadorias p_1/p_2 pode ser deduzido como se segue (acompanhar na Figura 6): A intersecção do plano $\pi(x^*,y)$ com o plano perpendicular ao eixo x_1, no ponto x_1^*, nos dá a reta $\overline{z^{(1)}z^{(2)}}$ e sua equação será

$$p_1y_1 + p_2y_2 - \mu^*(p_1x_1^* + p_2x_2^*) = 0$$

ou

$$p_1y_1 + p_2y_2 = \mu^*(p_1x_1^* + p_2x_2^*) = C^*$$

Seus interceptos nos planos $x_1 - y_2$ e $x_1 - y_1$, serão respectivamente,

$$\bar{y}_1 = \frac{C^*}{p_1} \quad \text{e} \quad \bar{y}_2 = \frac{C^*}{p_2}$$

Portanto, $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}$. Em outras palavras, o preço relativo das mercadorias é a inclinação da reta paralela ao plano $y_1 - y_2$ e tangente ao conjunto Z, podendo ser lida diretamente no gráfico, através dos interceptos com os planos $x_1 - y_2$ e $x_1 - y_1$.

No caso apresentado, a solução é unica devido à hipótese de convexidade estrita. Se não for assumida tal hipótese (ou seja, o conjunto Z pode ser apenas convexo), é possível que haja mais de uma atividade básica que tenha $\pi(x,y) = 0$. Neste caso, a atividade de crescimento máximo será uma média ponderada dessas atividades, com pesos positivos perfeitamente determináveis, ou seja,

$$(x^*,y^*) = \lambda_1(x^1,y^1) + \lambda_2(x^2,y^2) + \ldots + \lambda_k(x^k,y^k)$$

$$\lambda_h > 0 \qquad (h = 1,2,\ldots,k)$$

No exemplo que segue, representado na Figura 8, esse caso é colocado. A tabela representa atividades disponíveis para produção de alimentos e ferramentas, a partir de alimentos e ferramentas. Determinaremos algébrica e graficamente a atividade (ou combinação de atividades) que possibilita um crescimento balanceado

máximo (as quantidades já estão normalizadas).

	Produz Alimentos				Produz Ferramentas	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Insumos						
1 - Ferramentas		0,2	0,5	0,8		0,1
2 - Alimentos	1	0,8	0,5	0,2	1	0,9
Produtos						
1 - Ferramentas		0,1	0,3	0,5	0,5	0,6
2 - Alimentos	1	1,3	1,5	1,55		

Tabela 1 - Um Exemplo Numérico

Evidentemente, o conjunto Z (tecnologia) normalizado é um poliedro, como se vê na Figura 8, configurando um caso de convexidade não-estrita.

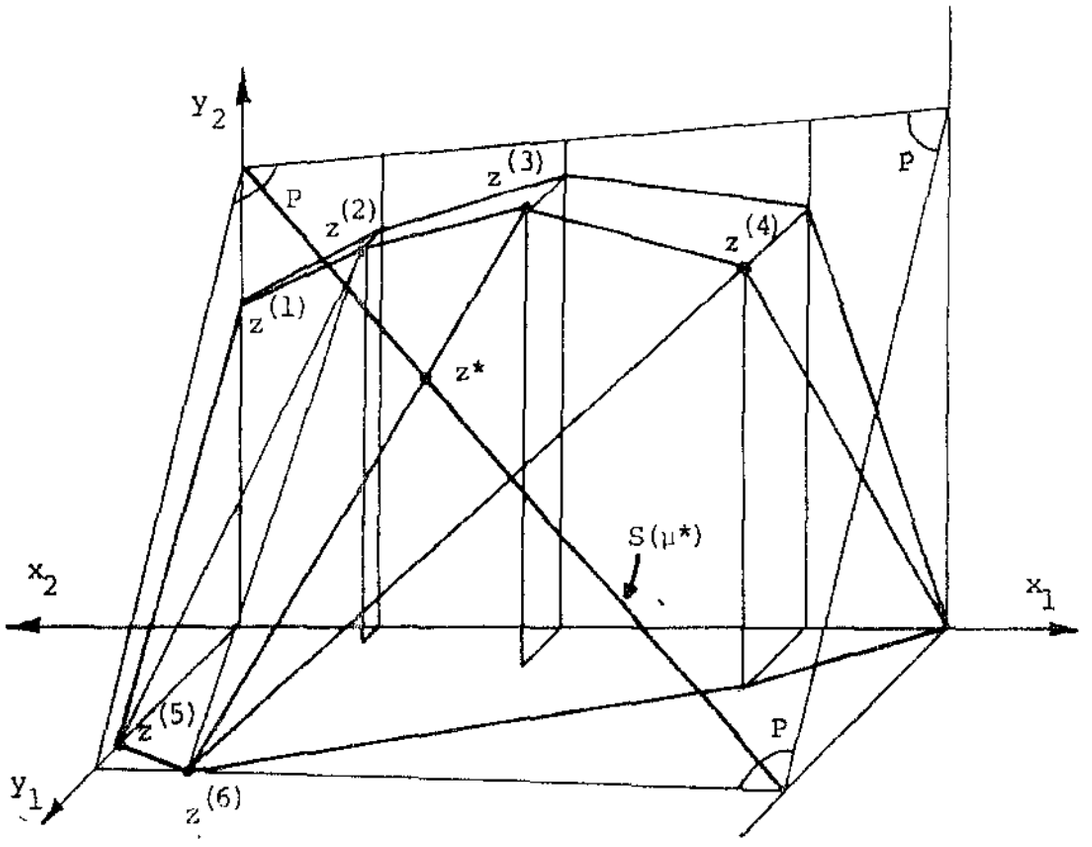

Figura 8 - Atividade de von Neumann e Plano Separador para a Tecnologia da Tabela 1.

Examinando o poliedro, percebemos que a linha de crescimento proporcional $S(\mu^*)$ cortará uma (ou talvez duas) das linhas que unem a atividade $Z^{(6)}$ às atividades $Z^{(2)}$, $Z^{(3)}$ ou $Z^{(4)}$. Sem atentarmos para um método sistemático para determinação de $S(\mu^*)$ e sua intersecção com o poliedro Z, façamos a hipótese de que $S(\mu^*)$ intercepta apenas a aresta $\overline{Z^{(3)}Z^{(6)}}$. Então, determinamos μ^* a partir da condição de que o ponto $(x_1, y_1, y_2) = Z^* = \lambda Z^3 + (1-\lambda)Z^6$ tem produtos proporcionais aos insumos, com fator μ^* de proporcionalidade.

Usando as coordenadas de $Z^{(3)}$ e $Z^{(6)}$, da Tabela 1, obtemos

$$0,3\lambda + 0,6(1 - \lambda) = \mu^*\{0,5\lambda + 0,1(1 - \lambda)\} \qquad \text{(ferramentas)}$$

$$= \mu^*\{0,5\lambda + 0,9(1 - \lambda)\} \qquad \text{(alimentos)} \quad ,$$

que nos leva a

$$\lambda = \frac{9 - \mu^*}{4\mu^* + 15} = \frac{6 - \mu^*}{4\mu^* + 3}$$

Resolvendo a equação do 2º grau resultante, obtemos $\mu^* = 1,292$ como a única raíz positiva. O valor correspondente de λ é $0,576$. A atividade de von Neumann será

$$(x^*,y^*) = 0,576\{(0,5;0,5),(0,3;1,5)\} + 0,424\{(0,1;0,9),(0,6;0)\}$$

$$(x^*,y^*) = \{(0,331;0,669),\ (0,427;0,865)\}$$

Substituindo as coordenadas de $Z^{(6)}$ e $Z^{(3)}$ na equação $\pi(x,y) = 0$, obtemos $\frac{p_1}{p_2} = 2,48$. Tomando alimentos como numerário, obtemos $p_1 = 2,48$ e $p_2 = 1$. O semi-plano correspondente terá a condição

$$2,48y_1 + y_2 - 1,292(2,48x_1 + x_2) \leq 0 \quad ,$$

onde a desigualdade estrita se aplica a todas as atividades que não $Z^{(3)}$ ou $Z^{(6)}$ ou combinação convexa das mesmas. Confirma-se,

então, que z* é a única atividade (normalizada) de von Neumann , com taxa de crescimento máxima de 0,292.

Para completar a secção vamos mostrar que somente uma atividade de von Neumann leva a um sistema de preços positivos que sustentam o crescimento proporcional. Suponhamos uma atividade proporcional qualquer $(x',y') = (x',\mu'x')$, com $\mu' > 0$ e com um sistema de preços $p_1' \geq 0$, $p_2' \geq 0$ (não são nulos ao mesmo tempo). Para sustentar o crescimento balanceado, $\pi'(x,y) = p_1'y_1 + p_2'y_2 - \mu'(p_1'x_1 + p_2'x_2) \leq 0$ para todas as atividades factíveis. A equação para uma atividade de von Neumann (x^*,y^*) será

$$\pi'(x^*,y^*) = p_1'y_1^* + p_2'y_2^* - \mu'(p_1'x_1^* + p_2'x_2^*) \leq 0 .$$

Como $y^* = \mu^*x^*$,

$$p_1'y_1^* + p_2'y_2^* - \mu^*(p_1'x_1^* + p_2'x_2^*) = 0$$

Subtraindo e cancelando onde é devido,

$$(\mu^* - \mu')(p_1'x_1^* + p_2'x_2^*) \leq 0$$

Sabe-se que x_1^* e x_2^* são não negativos (e não nulos ao mesmo tempo), e p_1' e p_2' são positivos por hipótese. Portanto, $(\mu^* - \mu') \leq 0$; por outro lado, como μ^* é a máxima taxa de crescimento proporcional, $\mu^* - \mu' \geq 0$, o que implica $\mu^* = \mu'$ e que a atividade considerada (x',y') é de von Neumann. Portanto, qualquer atividade

"sustentada" por um par de preços positivos é uma atividade de von Neumann. A Figura 9 apresenta um caso de muitas atividades de von Neumann.

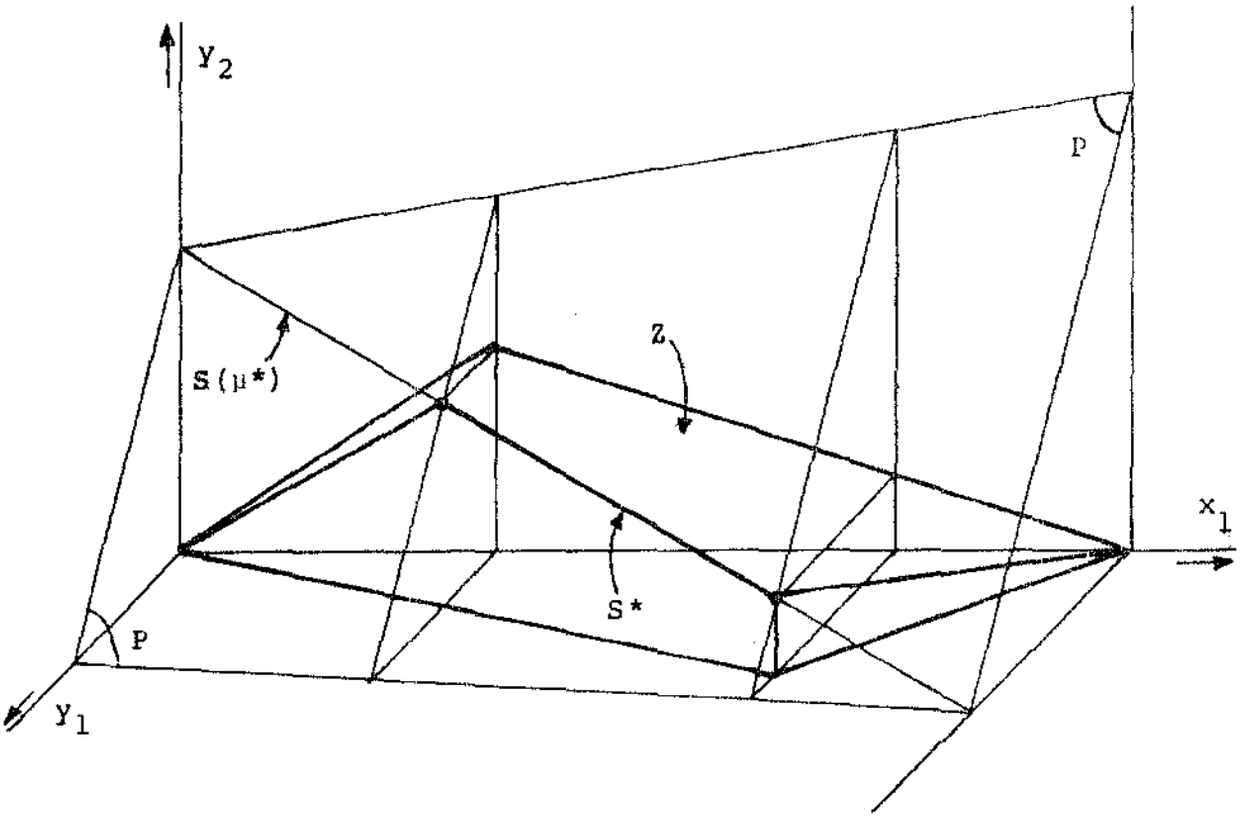

Figura 9 - Caso de várias atividades de von Neumann.

A Figura 10 representa um caso de atividade única de von Neumann numa tecnologia com base finita.

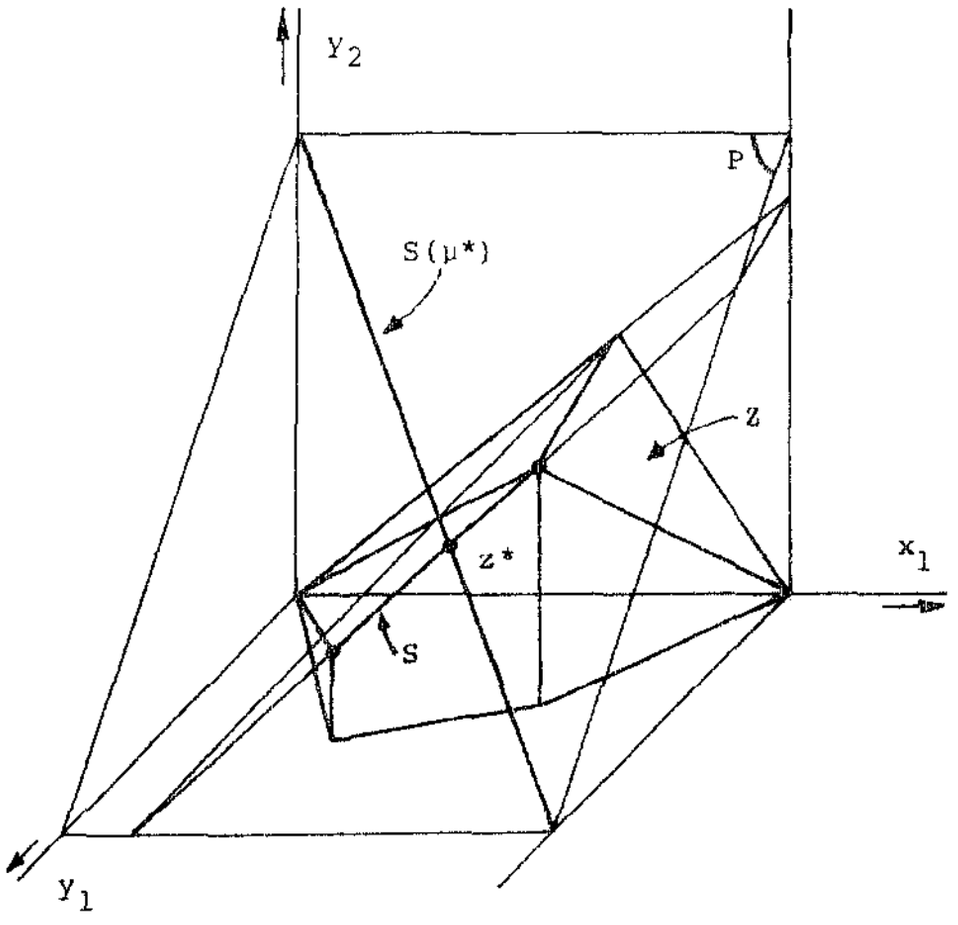

Figura 10 - Atividade Única de von Neumann numa Tecnologia com Base Finita.

APÊNDICE I

Chamaremos a um conjunto não-vazio, convexo, fechado e limitado um conjunto C.

Sejam S^o, T^o conjuntos no R^m e R^n, respectivamente, e $S^o \times T^o$ o conjunto de todos os pontos (X,Y), no R^{m+n}, onde o domínio X é S^o e o domínio de Y é T^o. Sejam V,W dois subconjuntos fechados de $S^o \times T^o$. Para cada X em S^o, seja o conjunto Q(X) de todos Y com (X,Y) em V um conjunto C; para cada Y em T^o, seja o conjunto P(Y) de todos X com (X,Y) em W um conjunto C. Então, V e W têm, pelo menos, um ponto em comum.

PROVA:

Primeiramente, consideremos V. Para cada X em S^o, escolhemos um ponto $Y^o(X)$ de Q(X) (por exemplo o c.g. deste conjunto, em geral, não será possível escolher $Y^o(X)$ como função contínua de X. Definimos então, para $\varepsilon > 0$,

$$w^\varepsilon(X,X') = \text{Max}(0, 1 - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \text{distância } (X,X'))$$

Agora, seja Y (X) o centro de gravidade dos $Y^o(X')$ com função densidade (relativa) $w^\varepsilon(X,X')$, onde o domínio de X' é S^o. Isto é, se

$$Y^o(X) = (y_1^o(x),\ldots,y_n^o(x)),\ Y^\varepsilon(X) = (y_1^\varepsilon(x),\ldots,y_n^\varepsilon(x)),$$

então

$$y_j^{\varepsilon}(X) = \int_{S^O} w^{\varepsilon}(X,X')y_j^O(X')dX' \int_{S^O} w^{\varepsilon}(X,X')dX'$$

Podemos tirar algumas propriedades de $Y^{\varepsilon}(X)$ (para qualquer $\varepsilon > 0$)

i) $Y^{\varepsilon}(X)$ está em T^O.

PROVA:

$Y^O(X')$ está em $Q(X')$ e, portanto, em T^O. Como $Y^{\varepsilon}(X)$ é o centro de gravidade dos pontos $Y^O(X')$ e T^O é convexo, $Y^{\varepsilon}(X)$ também está em T^O.

ii) $Y^{\varepsilon}(X)$ é uma função contínua de X (para todo domínio de S^O)

PROVA:

É suficiente provar para cada $y_j^{\varepsilon}(X)$. Agora, $W^{\varepsilon}(X,X')$ é uma função contínua de X, através dos X'; $\int_{S^O} w^{\varepsilon}(X,X')dX'$ é sempre positiva e todos os $y_j^O(X)$ são limitados (são coordenadas do conjunto limitado S^O). A continuidade dos $y_j^{\varepsilon}(X)$ segue, portanto, de sua própria definição.

iii) Para cada $\delta > 0$, existe $\varepsilon = \varepsilon_o(\delta) > 0$ tal que a distância de cada ponto $(X, Y^{\varepsilon_o}(X))$ em V é menor que δ.

PROVA:

Assuma o contrário. Então deve existir $\delta > 0$ e uma sequência de $\varepsilon_\nu > 0$ com $\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0$ tal que para cada $\nu = 1,2,\ldots$ existe em X_ν em S^o para o qual a distância $(X_\nu, Y^{\varepsilon_\nu}(X_\nu))$ seria $> \delta$. A fortiori, $Y^{\varepsilon_\nu}(X_\nu)$ está a uma distância $\geq \frac{\delta}{2}$ de todo $Q(X')$, com uma distância $(X_\nu,X') \leq \frac{\delta}{2}$. Todos X_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, estão em S^o e têm portanto, um ponto de acumulação X^* em S^o; segue-se que existe uma subsequência de X_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, convergindo para X^*, para cuja distância $(X_\nu,X^*) \leq \frac{\delta}{2}$ sempre é válida. Substituindo esta subsequência para os ε_ν, X_ν, vemos que está justificado assumir que $\lim X_\nu = X^*$, distância $(X_\nu,X^*) \leq \frac{\delta}{2}$. Logo, podemos usar $X' = X^*$ para qualquer $\nu = 1,2,\ldots$, e, em consequência, sempre temos $Y^{\varepsilon_\nu}(X_\nu)$ a uma distância $\geq \frac{\delta}{2}$ de $Q(X^*)$.

Sendo $Q(X^*)$ convexo, o conjunto de todos os pontos com uma distância menor que $\frac{\delta}{2}$ de $Q(X^*)$ também é convexo. Como $Y^{\varepsilon_\nu}(X_\nu)$ não pertence a este conjunto e como é o centro de gravidade dos pontos $Y^o(X')$ com distância $(X_\nu,X') \leq \varepsilon$ (porque para distâncias $(X_\nu,X') > E_\nu$, $w^{\varepsilon_\nu}(X_\nu,X') = 0$, de acordo com sua definição), nem todos estes pontos pertencem ao conjunto em discussão. Portanto, existe um $X' = X_\nu$ para o qual a distância $(X_\nu,X'_\nu) \leq \varepsilon$, e onde a distância entre $Y^o(X'_\nu)$ e $Q(X^*)$ é $\geq \frac{\delta}{2}$.

Como $\lim X_\nu = X^*$ e $\lim$ distância $(X_\nu,X'_\nu) = 0$, $\lim X'_\nu = X^*$. Todos $Y^o(X_\nu)$ pertencem a T^o e têm, portanto, um ponto de acumulação Y^*. Em consequência, (X^*,Y^*) é um ponto de acumulação dos $(X_\nu, Y^o(X_\nu))$ e como todos eles pertencem a V, (X^*,Y^*) pertence a

V, (X*,Y*) pertence a V, também Y* está, portanto, em Q(X*). Agora, a distância de cada $Y^{o}(X^{\ })$ é $\geq \frac{\delta}{2}$. Isto é uma contradição e a prova está completa.

As condições (i) - (iii), conjuntamente, asseguram: para cada $\delta > 0$, existe uma aplicação contínua $Y_{\delta}(X)$ de S^{o} num subconjunto de T^{o} onde a distância de cada ponto $(X,Y_{\delta}(X))$ em V é menor que δ. (É só por $Y_{\delta}(X) = Y^{\varepsilon}(X)$, com $\varepsilon = \varepsilon_{o} = \varepsilon_{o}(\delta)$).

Intercambiando S^{o} e T^{o}, V e W, obtemos agora: para cada $\delta > 0$ existe uma aplicação contínua $X_{\delta}(Y)$ de T^{o} num subconjunto de S^{o}, onde a distância de cada ponto $(X_{\delta}(Y),Y)$ em W é menor que δ.

Fazendo $f_{\delta}(X) = X_{\delta}(Y_{\delta}(X))$ $f_{\delta}(X)$ é uma aplicação contínua de S^{o} num subconjunto de S^{o}. Como S^{o} é um conjunto C, e, portanto, topologicamente um simplex, podemos usar o Teorema do Ponto Fixo, de L.E.J. Brouwer (*); $f_{\delta}(X)$ tem um ponto fixo. Isto é, existe um X^{δ} em S^{o} para o qual $X^{\delta} = f_{\delta}(X^{\delta}) = X_{\delta}(Y_{\delta}(X^{\delta}))$. Sendo $Y^{\delta} = Y_{\delta}(X^{\delta})$, temos $X^{\delta} = X_{\delta}(Y^{\delta})$. Consequentemente, as distâncias do ponto (X^{δ},Y^{δ}) no R_{m+n} a V e a W são menores que δ. A distância de V a W é menor que 2δ. Como é válido para qualquer $\delta > 0$, a distância entre V, W é igual a 0. Como V, W são fechados e limitados, eles têm,pelo menos,um ponto em comum, o que prova completando o lema.

(*) Uma prova do Teorema do Ponto Fixo, de L.E.J. Brouwer (1909--1910) pode ser encontrada no Capítulo I do livro: NIKAIDO, H. - Convex Structures and Economic Theory, Academic Press, 1968. Uma importante extensão desse teorema, desenvolvida por S.Kakutani,em 1941, também é apresentada neste livro.

APÊNDICE II

Aqui, apresentamos a solução do modelo de Von Neumann (i.é., a prova da existência de pelo menos uma solução) sob condições menos restritivas que as originais. Esta solução é devida a Kemeny, J.G., Morgenstern, O. e Thompson, G.L., no artigo "A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy", Econometrica, Vol. 24 (Abril 1956), pp. 115-135. Ela faz uso do Teorema de Tucker (1956), que é apresentado sem a demonstração correspondente, mas acompanhado de três corolários e suas respectivas demonstrações. Para a do Teorema de Tucker, pode se recomendar, entre outras, a apresentada em NIKAIDO, H. - "Convex Structures and Economic Theory", Academic Press, 1968.

TEOREMA DE TUCKER (1956). *Seja* A *uma matriz real* $m \times n$ *e* $p \in R^m$, $x \in R^n$. *Então, o sistema de desigualdades lineares* $A'p \geq 0$ *e o sistema de equações lineares* $Ax = 0$, *com restrições de não-negatividade* $x \geq 0$, *sempre têm um par de soluções* p *e* x *tal que* $A'p+x>0$.

COROLÁRIO 1 (Lema de Farkas-Minkowski). Seja A uma matriz real $m \times n$, $b,p \in R^m$, $x \in R^n$. Então, uma condição necessária e suficiente para a equação $Ax = b$ tenha uma solução não negativa $x \geq 0$ é que $p'A \geq 0$ implique em $p'b \geq 0$.

PROVA: (Necessário). Se $Ax = b$ para algum $x \geq 0$ e se $p'A \geq 0$, $p'b = p'(Ax) = (p'A)x \geq 0$.

(Suficiente). Aplicando o teorema de Tucker à matriz $(A,-b)$, $m \times (n+1)$, obtém-se um par de soluções $p \in R^m$ e $y \in R^{n+1}$ de

$$\begin{vmatrix} A' \\ -b' \end{vmatrix} \quad p \geq 0 \quad (A,-b)y = 0 \quad , \quad y \geq 0$$

tal que

$$\begin{vmatrix} A' \\ -b' \end{vmatrix} \quad p + y > 0$$

A primeira desigualdade pode ser rearranjada para $p'A \geq 0$, $p'b \leq 0$. Entretanto, temos $p'b \geq 0$ por hipótese, pois $p'A \geq 0$. Com isso $p'b = 0$, que combinado com a última desigualdade leva a $y_{n+1} > 0$. As desigualdades remanescentes reduzem-se a $Ax = b$, $x \geq 0$ se definirmos

$$x = (x_j) \text{ por } x_j = \frac{y_j}{y_{n+1}} \text{ para } j = 1,2,\ldots,n \quad \text{c.q.d.}$$

COROLÁRIO 2 (Tucker, 1956). Seja T uma matriz real anti-simétrica. Então o sistema de desigualdades $Tw \geq 0$, $w \geq 0$ tem solução tal que $Tw + w > 0$.

PROVA: Aplicando o Teorema de Tucker à matriz (T',I), onde I é a matriz identidade de mesma ordem de T, tem-se a solução p e x de

$$\begin{vmatrix} T \\ I \end{vmatrix} p \geq 0 \qquad (T',I)x = 0, \quad x \geq 0 \qquad \begin{vmatrix} T \\ I \end{vmatrix} p + x > 0$$

Seja $u = (x_1,\ldots,x_n)'$, $v = (x_{n+1},\ldots,x_{2n})'$, $x = (x_1,\ldots,x_{2n})'$. As relações acima, se tornam

$$Tp \geq 0 \ , \ p \geq 0 \qquad T'u + v = 0 \ , \ u \geq 0, \quad v \geq 0$$

$$Tp + u > 0 \ , \quad p + v > 0 \ .$$

Como T é anti-simétrica, $T' = -T$, e a terceira relação origina $Tu = v$. Portanto, fazendo $w = p + u$, $Tw = Tp + Tu = Tp + v > 0$

$$Tw + w = (Tp+v) + (p+u) =$$

$$= (Tp+u) + (p+v) > 0$$

c.q.d.

COROLÁRIO 3 (Tucker, 1956). Seja A uma matriz real $m \times n$. Existem soluções p de $A'p \geq 0$, $p \geq 0$ e x de $-Ax \geq 0$, $x \geq 0$, tal que $x + A'p > 0$, $p - Ax > 0$.

PROVA: Aplicamos o Corolário 2 à matriz anti-simétrica T, de ordem $m \times n$, definida por

$$T = \begin{vmatrix} 0 & A' \\ -A & 0 \end{vmatrix}$$

onde o 0 superior esquerdo é a matriz nula de ordem n e o 0 inferior direito é a matriz nula de ordem m .

Existe w satisfazendo $Tw \geq 0$, $w \geq 0$, $Tw + w > 0$. Se fizermos

$$x = (w_1,\ldots,w_n)' \ , \ p = (w_{n+1},\ldots,w_{m+n})' \ , \ w = (w_1,\ldots,w_{m+n})' \ ,$$

as relações acima levam ao resultado desejado.

TEOREMA DE KEMMENY, J.G., MORGENSTERN, O. & THOMPSON, G.L. (1956)

Sejam as matrizes reais $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ tais que

$$a_{ij} \geq 0 \ , \ b_{ij} \geq 0 \quad (i=1,\ldots,m \ ; \ j=1,\ldots,n) \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} > 0 \quad (j=1,\ldots,n) \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} > 0 \quad (j=1,\ldots,m) \tag{3}$$

Então

(i) Há uma solução (p,x,α,β) de

$$(B - \alpha A)x \geq 0 \tag{4}$$

$$p'(B - \beta A) \leq 0 \tag{5}$$

$$p'(B - \alpha A)x = 0 \tag{6}$$

$$p'(B - \beta A)x = 0 \tag{7}$$

$$p \geq 0, \quad x \geq 0 \qquad (8)$$

que satisfaz a

$$p'Bx > 0 \qquad (9)$$

$$P_i = 0 \quad \text{se, e só se,} \quad \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j \qquad (10)$$

$$x_j = 0 \text{ se, e só se,} \quad \beta \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i > \sum_{j=1}^{n} b_{ij}p_i \qquad (11)$$

(ii) $\alpha = \beta$ para qualquer (p,x,α,β) que satisfaça (6), (7) e (9).

PROVA:

(i) Considera-se, primeiramente, o conjunto de nûmeros reais $\Gamma = \{w / (B-wA)x \geq 0$, para algum $x \geq 0\}$. $\Gamma \neq \phi$ já que contêm ao menos $w = 0$. Mostra-se,a seguir, que Γ é limitado superiomente. Para isso, seja

$$L = \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \qquad \text{e} \qquad M = \max_j \sum_{i=1}^{m} b_{ij} .$$

Então, $L > 0$, pela condição (2) e $M/L \geq w$ para qualquer $w \in \Gamma$, configurando a limitação superior.Logo, $\theta = \sup w$ sobre todos $w \in \Gamma$ é finito. Seja $\{w_\nu\}$ uma sequência convergindo para θ em Γ. Para cada w_ν há, por definição um $x^\nu \geq 0$ satisfazendo $(B - w_\nu A)x^\nu \geq 0$, cuja homogeneidade possibilita-nos assumir que os componentes de

x^{ν} somados perfazem a unidade. Podemos, pois, sem perda de generalidade, assumir que $\{x^{\nu}\}$ também converge para algum $x \geq 0$. Em consequência, temos, no limite, $(B - \theta A)\hat{x} \geq 0$, $\hat{x} \geq 0$, implicando $\theta \in \Gamma$ e $\theta = \max w$ sobre todos $w \in \Gamma$.

Agora, demonstra-se que (3) implica $\theta > 0$. De fato, $B\bar{x} > 0$ para $\bar{x} = (1,1,\ldots,1)'$ por (3), enquanto que $(B - wA)\bar{x} > 0$ para w pequeno e positivo. Logo, Γ contém números positivos e θ deve ser positivo.

Pelo Corolário 3 do Teorema de Tucker, já apresentado, aplicando-se à matriz $\theta A - B$, $m \times n$, obtemos um vetor m-dimensional p e um n-dimensional x tal que

$$(\theta A' - B')p \geq 0 \quad , \quad p \geq 0 \tag{12}$$

$$(B - \theta A)x \geq 0 \quad , \quad x \geq 0 \tag{13}$$

$$x + (\theta A' - B')p > 0 \tag{14}$$

$$p + (B - \theta A)x > 0 \tag{15}$$

Então, (p,x,α,β) para $\alpha = \beta = 0$ é uma solução desejada, como será visto em seguida. De fato, como $\theta \in \Gamma$, há, por definição, um $\hat{x} \geq 0$ com $(B - \theta A)\hat{x} \geq 0$. Em vista de (12), este $\hat{x}$ satisfaz a $\hat{x}'(\theta A' - B')p = p'(\theta A - B)x = 0$. Pré-multiplicando (14) por $\hat{x}$, segue-se que $\hat{x}'x > 0$, o que descarta $x = 0$ e implica $x \geq 0$.

Em seguida, prova-se (9), onde se descarta $p = 0$. Para isto, suponhamos que (9) não fosse válido e, logo, $p'Bx = 0$. Seja $J = \{i/p_i > 0\}$. Seja também, $[Ax]_i$, $[Bx]_i$ representando os i-ésimos

componentes de Ax e Bx, respectivamente. Então, (15) implica que $[Bx]_i - \theta[Ax]_i > 0$ para $i \notin J$. Por outro lado, como $p \geq 0$, $Bx \geq 0$, a hipótese $p'Bx = 0$ implica $[Bx]_i = 0$ para $i \in J$. Em vista de $\theta > 0$ e (13), implica que $[Ax]_i = 0$ para $i \in J$. Logo, $(B - wA)x \geq 0$ é ainda válido para o mesmo $x \geq 0$, se θ é trocado por um w maior que θ, embora suficientemente próximo. Isto é contraditório com a propriedade de θ ser o máximo em Γ. Com isso, mostramos que $p \geq 0$, $x \geq 0$ e (9). Além do mais, (12) e (13) significam o mesmo que (4) e (5) para $\alpha = \beta = 0$. Então (6) e (7) são consequências imediatas de (4) e (5) numa situação em que $\alpha = \beta$. Falta, ainda, checar (10) e (11). Sua parte "se" segue de (4) - (8) enquanto que a parte "só se" é assegurada por (14) e (15).

(ii) $\alpha p'Ax = p'Bx = \beta p'Ax$ por (6) e (7). Como $p'Bx > 0$, $p'Ax$ não tem determinante nulo, de modo que $\alpha = \beta = \dfrac{p'Bx}{p'Ax}$ C.Q.D.

CAPÍTULO III

TEOREMA DE TURNPIKE

A - VERSÃO MORISHIMA : CASO SEM PRODUÇÃO CONJUNTA

O sistema econômico, aqui, é constituído de n indústrias, cada uma delas produzindo apenas um bem, caracterizando o caso sem produção conjunta. Cada bem i pode ser confeccionado por m_i processos (atividades) diferentes, mutuamente excludentes, os quais utilizam como insumos os mesmos bens produzidos no sistema.

A matriz de coeficientes de insumo (matriz de insumo) será não-negativa, de ordem $n \times m$ ($m = \sum_{i=1}^{n} m_i$) e representada por A

$$A = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} a^1_{1_1} \\ \vdots \\ a^n_{1_1} \end{matrix} \cdots \begin{matrix} a^1_{m_1} \\ \vdots \\ a^n_{m_1} \end{matrix}}_{m_1} & \underbrace{\begin{matrix} a^1_{1_2} \\ \vdots \\ a^n_{1_2} \end{matrix} \cdots \begin{matrix} a^1_{m_2} \\ \vdots \\ a^n_{m_2} \end{matrix}}_{m_2} & \cdots & \underbrace{\begin{matrix} a^1_{1_n} \\ \vdots \\ a^n_{1_n} \end{matrix} \cdots \begin{matrix} a^1_{m_n} \\ \vdots \\ a^n_{m_n} \end{matrix}}_{m_n} \end{bmatrix}$$

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad .$$

O coeficiente de insumo, $a^j_{s_i}$, consiste do insumo tecnológico e do "insumo salário".

A s_i-ésima atividade (processo) da indústria i é definida por um vetor coluna n-dimensional, $a_{s_i} = \{a^1_{s_i}, a^2_{s_i}, \ldots, a^n_{s_i}\}$ que representa os insumos dos n bens por unidade do produto i. A matriz A é o conjunto do total de atividades.

Pela suposição de nenhuma produção conjunta, a matriz de coeficientes de produtos (matriz de produto), representada por B, será da mesma ordem de A, da forma

$$\begin{bmatrix} \underbrace{1 \ldots 1}_{m_1} & \underbrace{0 \ldots 0}_{m_2} & \ldots & \underbrace{0 \ldots 0}_{m_n} \\ 0 \ldots 0 & 1 \ldots 1 & \ldots & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & \ldots & 1 \ldots 1 \end{bmatrix}$$

Denominando y_{s_i} a produção do bem i através da s_i-ésima atividade da indústria i, e p_i, seu preço, seja

$$Y = \{y_{1_1}, y_{2_1}, \ldots, y_{m_1}, y_{1_2}, y_{2_2}, \ldots, y_{m_2}, \ldots, y_{1_n}, y_{2_n}, \ldots, y_{m_n}\},$$

vetor coluna m-dimensional, e $P = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$, vetor linha n-dimensional. É assumido que o período de produção de cada produto e a vida de cada insumo é de uma unidade de tempo. Pela notação dada, o modelo de Von Neumann pode ser formulado através das seguintes desigualdades:

$$PB \leq f \cdot PA \qquad (1)$$

$$PBY = f \cdot PAY \qquad (2)$$

$$BY \geq g \cdot AY \qquad (3)$$

$$PBY = g \cdot PAY \qquad (4)$$

$$PBY > 0 \qquad (5) \quad (*)$$

onde f = (1 + taxa de rendimento) e g = (1 + taxa de crescimento) (ver Capítulo II).

Achemos soluções para (1)-(5). Se cada indústria seleciona um um único processo entre aqueles ao seu dispor, há $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$ conjuntos possíveis de processos que podem ser adotados pela economia. Eles podem ser arranjados em determinada ordem e representados por $\alpha, \beta, \ldots, \mu$. Seja σ o conjunto de processos $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ no qual a indústria i seleciona seu s_i-ésimo processo ($i=1,2,\ldots,n$) e definamos

$$A_\sigma = [a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_n}] \qquad (\sigma = \alpha, \beta, \ldots, \mu)$$

Evidentemente, A_σ é uma matriz de ordem $n \times n$. Como ela é não-negativa, tem um autovalor h_σ que é não-negativo e de valor absoluto não menor que qualquer outro.

(*) Embora esta condição não seja a da formulação original, sua introdução facilita a resolução sem descaracterizar o problema, conforme Kemeny, Morgenstern & Thompson (Ver Apêndice II).

Seja $A_\varepsilon = [a_{e_1}, a_{e_2}, \ldots, a_{e_n}]$ um conjunto de processos tal que $h_\varepsilon \geq h_\sigma$ $(\sigma = \alpha, \beta, \ldots, \mu)$ (h_ε é maior dos autovalores de A_ε) e sejam x e P os autovetores (coluna e linha, respectivamente) associados a h_ε, i.é., $h_\varepsilon x_\varepsilon = A_\varepsilon x_\varepsilon$ e $h_\varepsilon P_\varepsilon = P_\varepsilon A_\varepsilon$. Seja $x_{\varepsilon i}$ o i-ésimo componente de x_ε e seja Y_ε um vetor coluna m-dimensional tal que seu s_i-ésimo componente é $x_{\varepsilon i}$, quando $s_i = e_i$, e zero quando $s_i \neq e_i$. É assumido, também, que :

HIPÓTESE 1 - A_ε é indecomponível.

HIPÓTESE 2 - A_ε é única, i.é., não existe A_θ tal que $h_\theta = h_\varepsilon$.

Como será mostrado no Lema 1, A_ε é o conjunto de processos que corresponde à configuração de Von Neumann e gera o crescimento máximo. A hipótese 1 - implica que quando a indústria i seleciona seu e_i-ésimo processo $(i = 1,2,\ldots,n)$, o sistema não se parte em subsistemas auto-suficientes (onde os bens a eles pertencentes são produzidos a partir deles mesmos). Isto significa que uma vez que o conjunto de processos ε seja adotado, nenhum subconjunto de indústrias pode crescer, indefinidamente, a uma taxa diferente do resto do sistema econômico. Por outro lado, a hipótese 2 - significa que só existe um processo em cada indústria que é consistente com o crescimento máximo. Apesar de severamente restritivas, elas são introduzidas para garantir a unicidade do raio de Von Neumann.

LEMA 1. Sejam r_1 e r_2 dois números positivos. O sistema (1) - (5) tem soluções tais que $Y = r_1 \cdot Y_\varepsilon$, $P = r_2 \cdot P_\varepsilon$ e $f = g = h_\varepsilon^{-1}$. Conversamente, se Y, P, f, g são soluções para (1) - (5), então, $Y = r_1 \cdot Y_\varepsilon$, $P = r_2 \cdot P_\varepsilon$ e $f = g = h_\varepsilon^{-1}$; em outras palavras, os raios de preço e produção, no equilíbrio, e as taxas de rendimento e crescimento, no equilíbrio, são univocamente determinadas.

PROVA. Seja A_ξ um conjunto de atividades que não contém qualquer das atividades de A_ε. Mostraremos, primeiro, que

$$h_\varepsilon P_\varepsilon < P_\varepsilon A_\xi \tag{6}$$

Suponha-se o contrário, ou seja, que alguns componentes, por exemplo, os primeiros j componentes de $h_\varepsilon P_\varepsilon$ sejam maiores ou iguais aos seus correspondentes de $P_\varepsilon A_\xi$. Ao substituir as primeiras j colunas de A_ε por estas de A_ξ, temos A_θ tal que

$$h_\varepsilon P_\varepsilon \geq P_\varepsilon A_\theta \tag{7}$$

Seja h_θ a maior raíz característica de A_θ e x_θ seu auto-vetor (coluna) associado com h_θ. Como A_θ é não nula e não-negativa, a hipótese 1 implica que P_ε é estritamente positivo (ver Teorema 3, Apêndice de Morishima [2]). Segue-se, pois, que, $h_\varepsilon P_\varepsilon x_\theta \geq P_\varepsilon A_\theta x_\theta = h_\theta P_\varepsilon x_\theta > 0$. Deduz-se que $h_\varepsilon \geq h_\theta$, entrando em contradição com a definição de A_ε e a hipótese 2. Portanto, $h_\varepsilon P_\varepsilon < P_\varepsilon A_\xi$.

Juntando-se esta relação com $h_\varepsilon P_\varepsilon = P_\varepsilon A_\varepsilon$, temos $(r_2 P_\varepsilon)B \leq$ $\leq h_\varepsilon^{-1}(r_2 P_\varepsilon)A$, onde $r_2 > 0$. Além disso, sabendo-se a definição de Y_ε, tem-se $B(r_1 Y_\varepsilon) = h_\varepsilon^{-1} A(r_1 Y_\varepsilon)$ e $(r_2 P_\varepsilon)B(r_1 Y_\varepsilon) = h_\varepsilon^{-1}(r_2 P_\varepsilon)A(r_1 Y_\varepsilon)$, onde $r_1 > 0$. Como $r_2 P_\varepsilon > 0$ e $r_1 x_\varepsilon > 0$, é claro que $(r_2 P_\varepsilon)B(r_1 Y_\varepsilon) >$ > 0. Portanto, $Y = r_1 Y_\varepsilon$, $P = r_2 P_\varepsilon$ e $f = g = h_\varepsilon^{-1}$ são soluções (1)-(5).

Para a demonstração conversa, sejam Y, P, f, g soluções de (1)-(5). De (2), (4) e (5) vem que $f = g$. A partir de (3), $f^{-1} P_\varepsilon BY \geq P_\varepsilon AY$. Como $h_\varepsilon P_\varepsilon < P_\varepsilon A_\xi$, temos $h_\varepsilon P_\varepsilon B \leq P_\varepsilon A$, de maneira que $h_\varepsilon P_\varepsilon BY \leq P_\varepsilon AY$. Portanto,

$$f^{-1} P_\varepsilon BY \geq P_\varepsilon AY \geq h_\varepsilon P_\varepsilon BY \tag{8}$$

Como P_ε é positivo e Y , não negativo e não nulo, $P_\varepsilon BY$ deve ser positivo. Logo, $f^{-1} \geq h_\varepsilon$. Por outro lado, $h_\varepsilon BY_\varepsilon = AY_\varepsilon$. Como $BY_\varepsilon > 0$, $0 < h_\varepsilon PBY_\varepsilon = PAY_\varepsilon$. De (1) temos $f^{-1} PBY_\varepsilon \leq PAY_\varepsilon$. Portanto,

$$f^{-1} PBY_\varepsilon \leq PAY_\varepsilon = h_\varepsilon PBY_\varepsilon \tag{9}$$

de onde segue-se que $h_\varepsilon \geq f^{-1}$. Por isso, $h_\varepsilon = f^{-1}$.

Com esta última relação, (9) se torna uma igualdade, que, juntamente com a definição de Y_ε e (1), leva a $h_\varepsilon P = PA_\varepsilon$. Como A_ε é indecomponível, P deve ser proporcional a P_ε ($P = r_1 P_\varepsilon$). Analogamente, (8) torna-se uma igualdade. Com (6), vê-se que o s_i-ésimo componente de Y é zero para todo $s_i \neq e_i$. Seque-se que

$h_\varepsilon X \geq A_\varepsilon X$, onde X é um vetor n-dimensional tal que seu i-ésimo componente é igual ao s_i-ésimo componente de Y. Como $P_\varepsilon > 0$, $h_\varepsilon X = A_\varepsilon X$; caso contrário, haveria contradição com (4). A indecomponibilidade de A_ε implica que X é proporcional a x_ε. Segue-se que $Y = r_2 Y_\varepsilon$. C.Q.D.

Por causa deste Lema 1, é justificável chamar x_ε e P_ε de configurações de preço e de produção, de Von Neumann, respectivamente; h_ε é chamado de fator de desconto e h_ε^{-1}, fator de crescimento de Von Neumann. Quando um conjunto de atividades A_σ (ao invés de A_ε) é adotado, o fator de crescimento será h_σ^{-1}. Como $h_\varepsilon < h_\sigma$, temos que o conjunto de atividades de Von Neumann gera crescimento máximo.

Seja Y(t) um vetor coluna m-dimensional representando a intensidade de produção e X(0) um vetor coluna n-dimensional representando o estoque inicial. Uma sequência $\{Y(1),\ldots,Y(T)\}$ de vetores intensidade é chamada *factível*, dado X(0), se

$$Y(t) \geq 0 \qquad (t=1,2,\ldots,T)$$

$$AY(1) \leq X(0)$$

$$AY(t+1) \leq BY(t) \qquad (t=1,2,\ldots,T-1)$$

Seja x^* uma dada estrutura de estoque (vetor coluna n-dimensional, com soma dos componentes igual à unidade), num ponto prescrito de tempo T. Seja q um número definido como $q = \min_i \left(\frac{x_i(T)}{x_i^*}\right)$,

onde $x_i(T)$ é o i-ésimo componente de BY(T) e x_i^*, o de x*. Como x* é não-negativo e não-nulo, q é não negativo; temos, então, $qx^* \leq BY(T)$. Uma trajetória factível é dita eficiente, se não há trajetória factível {Y'(1),...,Y'(T)} tal que q' > q. Portanto, uma trajetória eficiente de produção começando de X(0) e chegando a x* é encontrada ao se resolver o seguinte problema de programação linear (identificado como PL 1):

$$\text{Max } h_\varepsilon^T q \qquad \text{s.a}$$

$$AY(1) \leq X(0)$$

$$AY(t+1) \leq BY(t) \qquad (t=1,2,\ldots,T-1)$$

$$qx^* \leq BY(t)$$

$$Y(t) \geq 0 \qquad (t=1,2,\ldots,T)$$

$$q \geq 0$$

O problema dual correspondente (identificado como PL 2), é:

$$\text{Min } P(0)X(0) \qquad \text{s.a.}$$

$$P(t)A \geq P(t+1)B \qquad (t=0,1,2,\ldots,T-1)$$

$$P(T)x^* \geq h_\varepsilon^T$$

$$P(t) \geq 0 \qquad (t=0,1,2,\ldots,T)$$

Pelo teorema fundamental da dualidade, Min P(0)X(0)=Max $h_\varepsilon^T q$, desde que existam.

Para os lemas seguintes, serão feitas as hipóteses:

HIPÓTESE 3 - A_ε é primitiva.

HIPÓTESE 4 - Para cada bem i, há pelo menos uma indústria j que o usa indispensavelmente.

A matriz $(n \times n)$ A_ε é dita primitiva se não pode ser transformada, por permutações das mesmas linhas e colunas, na forma

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & & A_{k-1,k} & \\ A_{k1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{vmatrix}$$

com submatrizes quadradas na diagonal principal. Logo, se A_ε fosse imprimitiva, haveria permutações simultâneas de linhas e colunas pelas quais A_ε^k poderia ser transformada em

$$\begin{bmatrix} A_{12}\,A_{23}\cdots A_{k1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{23}\,A_{34}\cdots A_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{k1}A_{12}\cdots A_{k-1,k} \end{bmatrix}$$

Podemos traduzir a HIPÓTESE 3 - da seguinte maneira: Se A_ε for imprimitiva, as mercadorias no sistema poderiam ser divididas em k grupos mutuamente disjuntos, tais que as mercadorias do

primeiro grupo somente produziriam as do segundo, as do segundo , somente as do terceiro, até que as do k-ésimo grupo produziriam as as do primeiro grupo, de modo que, após k períodos, os insumos de mercadorias de qualquer grupo seriam convertidos, independentemente dos outros grupos, em produtos das mercadorias desse mesmo grupo. De acordo com isto, embora o sistema seja indecomponível por hipótese, poderemos montar uma nova unidade de tempo, igual a k períodos anteriores, olhando apenas para os insumos iniciais e produtos finais nesta nova unidade, e tornar o sistema decomponível.

Podemos dizer que a HIPÓTESE 1 descarta a independência simples e a HIPÓTESE 3, a independência composta.

Seja $(\bar{P}(0), \bar{P}(1),\ldots,\bar{P}(T))$ a solução que minimiza PL 2. Seja a_{j_i} uma atividade da indústria é tal que $\bar{P}(t)\, a_{j_i} = \min[\bar{P}(t)\, a_{1_i}, \bar{P}(t)a_{2_i},\ldots,\bar{P}(t)a_{m_i}]$; evidentemente, j_i depende de $\bar{P}(t)$, denotamos por isso, $[a_{j_i}, a_{j_2},\ldots,a_{j_n}]$ por $\bar{A}_t$. Temos, então:

LEMA 2. Sejam o vetor estoque inicial $X(0)$ e a configuração terminal da produção x^*, do problema oroginal PL 1, estritamente positivos. Então, a solução $\bar{P}(0), \bar{P}(1),\ldots,\bar{P}(T)$, do dual PL 2, satisfaz a

$$\bar{P}(t)\bar{A}(t) = \bar{P}(t+1) \qquad (t=0,1,2,\ldots,T-1)$$

PROVA. Primeiramente, prova-se que se não há produção nula de qualquer mercadoria, no período final, não há em qualquer período.

Seja $(\bar{Y}(1),\bar{Y}(2),\ldots,\bar{Y}(T),\bar{q})$ a solução de PL 1. Como $X(0) > 0$, $\bar{q} > 0$. Como $x^* > 0$, $B\bar{Y}(T) > 0$, de modo que para cada j, pelo menos um y_{s_j} é estritamente positivo. Por outro lado, a HIPÓTESE 4 implica que para cada i há pelo menos um j tal que $a^i_{s_j} > 0$ para todo $s_j = 1_j, 2_j, \ldots, n_j$. Daí, $A\bar{Y}(T) > 0$, o que implica $B\bar{Y}(T-1) > 0$. Pelo mesmo argumento, mostra-se que $B\bar{Y}(t) > 0$, para todo t=1, 2, ,...,T.

Do teorema fundamental da dualidade, resulta preço igual a custo, a menos que a produção correspondente seja zero. Portanto, o fato estabelecido acima implica igualdade de custos e preços, onde se aplica. Isto é, para cada i (i=1,2,...,n) e para cada t (t=0,1,2,...,^{m}-1), existe pelo menos um a_{j_i} tal que $\bar{P}(t)a_{j_i} = \bar{p}i(t+1)$, onde $\bar{p}i(t+1)$ é o i-ésimo componente de $\bar{P}(t+1)$.

Das restrições de PL 2, temos que $\bar{P}(t)a_{s_i} \geq \bar{p}i(t+1)$ $(s_i = 1_i, 2_i, \ldots, m_i;\ i=1,2,\ldots,n)$. Daí, para cada i, aquele $\bar{P}(t)a_{j_i}$ que iguala $\bar{p}i(t+1)$ será o menor entre $\bar{P}(t)a_{1_i}, \bar{P}(t)a_{2_i}, \ldots, \bar{P}(t)a_{m_i}$.

LEMA 3. Seja a_{ℓ_i} uma atividade da indústria i tal que $P(t)a_{\ell_i} = \min[P(t)a_{1_i}, \ldots, P(t)a_{m_i}]$ e denotemos $[a_{\ell_1}, a_{\ell_2}, \ldots, a_{\ell_n}]$, no tempo t, por A_t. Consideremos a equação dinâmica

$$P(t+1) = P(t)A_t \leq P(t)A_\sigma \quad (\sigma = \alpha, \ldots, \varepsilon, \ldots, \mu) \qquad (10)$$

Qualquer trajetória (10) que comece de uma posição não - negativa arbitrária $P(0) \neq 0$, eventualmente se aproxima do raio de preço de Von Neumann, i.ẽ.,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{P_i(t)}{h_\varepsilon^t P_{\varepsilon i}} = c = c\,t\,e > 0 \quad (i=1,\ldots,n) \tag{11}$$

onde $P_i(t)$ e $P_{\varepsilon i}$ são os i-ésimos componentes de $P(t)$ e P_ε, respectivamente.

PROVA. Seja $\hat{P}_\varepsilon$ uma matriz $(n \times n)$ diagonal cujos elementos não-nulos são $p_{\varepsilon_1},\ldots,p_{\varepsilon_n}$ e seja $Z(t) \equiv [z_1(t),\ldots,z_n(t)] \equiv$ $\equiv P(t)h_\varepsilon^{-t}\hat{P}_\varepsilon^{-1}$. Como $P(t+1) \leq P(t)A_\varepsilon$, de (10), obtemos

$$Z(t+1) \leq Z(t)\hat{P}_\varepsilon A_\varepsilon \hat{P}_\varepsilon^{-1} h_\varepsilon^{-1} \quad , \tag{12}$$

já que $h_\varepsilon^{-t}\hat{P}_\varepsilon^{-1} \geq 0$. Por outro lado, voltando a (6), verificamos que para $L = [1,1,\ldots,1]$ um vetor linha n-dimensional,

$$L = L\hat{P}_\varepsilon A_\varepsilon \hat{P}_\varepsilon^{-1} h_\varepsilon^{-1} \leq L\hat{P}_\varepsilon A_t \hat{P}_\varepsilon^{-1} h_\varepsilon^{-1} \quad , \tag{13}$$

Em seguida, definimos as duas sequências $\{c(t)\} = \{\min[z_1(t),\ldots,z_n(t)]\}$ e $\{C(t)\} = \{\max[z_1(t),\ldots,z_n(t)]\}$. Como $Z(t)\hat{P}_\varepsilon A_\varepsilon \hat{P}_\varepsilon^{-1} h_\varepsilon^{-1} \leq C(t)L\hat{P}_\varepsilon A_\varepsilon \hat{P}_\varepsilon^{-1} h_\varepsilon^{-1}$, de (12) e (13) temos, $z(t+1) \leq C(t)L\hat{P}_\varepsilon A_\varepsilon \hat{P}_\varepsilon^{-1} h_\varepsilon^{-1} = C(t)L$. Portanto, $C(t) \geq C(t+1)$.

Similarmente , de (10) e (13), $c(t)L \leq c(t)L\hat{P}_\varepsilon A_t \hat{P}_\varepsilon^{-1} h_\varepsilon^{-1} \leq$ $Z(t)\hat{P}_\varepsilon A_t \hat{P}_\varepsilon^{-1} h_\varepsilon^{-1} = Z(t+1)$, o que implica $c(t) \leq c(t+1)$. Portanto , $C(t)$ nunca cresce, $c(t)$ nunca decresce e $C(t) \geq c(t)$, de modo que os dois limites existam:

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = C \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} c(t) = c \ .$$

Suponhamos, então que, $C > c$. Dado qualquer número positivo δ, consideremos os seguintes n vetores-linha:

$$c_1 = [c, C+\delta, \ldots, C+\delta] \ , \ c_2 = [C+\delta, c, C+\delta, \ldots, C+\delta] \ , \ldots ,$$

$$, \ c_n = [C+\delta, \ldots, C+\delta, c] \ .$$

Correspondentemente a δ, podemos descobrir um t tão grande que $Z(t) \leq c_i$ para pelo menos um i. Logo, de (12) ,

$$Z(t+v) \leq Z(t)[\hat{P}_\varepsilon A_\varepsilon \hat{P}_\varepsilon^{-1} h_\varepsilon^{-1}]^v \leq c_i [\hat{P}_\varepsilon A_\varepsilon \hat{P}_\varepsilon^{-1} h_\varepsilon^{-1}]^v \qquad (14)$$

É evidente que $[\hat{P}_\varepsilon A_\varepsilon \hat{P}_\varepsilon^{-1} h_\varepsilon^{-1}]^v > 0$, já que, por ser A_ε indecomponível e primitiva, existe um inteiro positivo v tal que $A_\varepsilon^v > 0$; além disso, $\hat{P}_\varepsilon$ é matriz diagonal com todos os elementos da diagonal positivos e $h_\varepsilon > 0$.

Por causa disso, se δ é tomado muito pequeno, cada componente do lado direito de (14) é menor que C, pois $C > c$. Então, finalmente, temos $C(t+v) = \max[z_1(t+v), \ldots, z_n(t+v)] < C$, o que é contraditório com o já demonstrado, que $C(t+v) \geq C$. Portanto,

$C = c$ e $\lim_{t\to\infty} z_i(t) = c$.

Para provar a positividade de c, temos, de (10), que: $Z(t+1)\hat{P}_\varepsilon h_\varepsilon = Z(t)\hat{P}_\varepsilon A_t$. Por um argumento semelhante ao da prova do lema 1, chegamos a $h_\varepsilon x_\varepsilon \leq A_t x_\varepsilon$. Logo,

$Z(t+1)\hat{P}_\varepsilon h_\varepsilon x_\varepsilon = Z(t)\hat{P}_\varepsilon A_t x_\varepsilon \geq Z(t)\hat{P}_\varepsilon h_\varepsilon x_\varepsilon$. Como $\hat{P}_\varepsilon h_\varepsilon x_\varepsilon > 0$ e $Z(0) > 0$, $Z(t)$ não pode convergir para zero. Portanto, $\lim_{t\to\infty} z_i(t) = c > 0$ c.q.d.

O Lema 3, acima provado, pode ser traduzido como: Seja N um dado cone de vizinhança do raio de preço de Von Neumann e seja $P(t,P(0))$ a trajetória, que satisfaz (10) e começa em $P(0)$; para $P(0) \geq 0$, existe um inteiro finito $t(P(0))$, que depende de N, tal que, para todos os inteiros t não menores que $t(P(0))$, a trajetória $P(t,P(0))$ permanece dentro de N.

Seja $\bar{t}(P(0))$ o menor desses inteiros: ele indica o tempo necessário para $P(t,P(0))$ entrar em N; quanto menor, maior será a velocidade de convergência de $P(t,P(0))$ para o raio de preço de von Neumann.

O Lema 4, provado em seguida, aperfeiçoa o Lema 3, estabelecendo a uniformidade de convergência.

LEMA 4. Para qualquer N especificado e qualquer ponto $P^* \neq 0$, existe uma vizinhança de P^* tal que, para todo t não menor que t^* (inteiro dependente de N e P^*), a trajetória $P(t,P(0))$ que começa

em qualquer $P(0) \neq 0$, na vizinhança de P^*, permanece dentro de N; isto é, $\bar{t}(P(0)) \leq t^*$ para todo $P(0)$ nesta vizinhança de P^*.

PROVA: Seja A_ξ um conjunto de atividades que não contêm nenhuma das atividades de A_ε. Como $h_\varepsilon P_\varepsilon = P_\varepsilon A_\varepsilon$ e $P_\varepsilon A_\varepsilon < P_\varepsilon A_\xi$ (ver (6)), $P_\varepsilon A_\varepsilon^s < P_\varepsilon A_\varepsilon^{s-1} A_\xi$ para todo s inteiro positivo; portanto, existe um cone de vizinhança H do raio de preço de Von Neumann P_ε tal que para qualquer ponto P pertencente a H, $PA_\varepsilon^s < PA_\varepsilon^{s-1}A_\xi$ $(s=1,2,\ldots,r)$, onde r é um inteiro abaixo definido. Seja $P(t,P^*)$ a trajetória que satisfaz (10) e começa em P^*. Pelo Lema 3, pode-se determinar o menor inteiro t_1 tal que quando $t \geq t_1$, $P(t,P^*)$ sempre pertence ao interior de H.

Sejam $A_o^*, A_1^*, \ldots, A_{t_1-1}^*$ conjuntos de atividades escolhidos entre os possíveis A_σ $(\sigma = \alpha,\beta,\ldots,\mu)$ tais que:

$$P(t+1,P^*) = P(t,P^*)\cdot A_t^* \leq P(t,P^*)A_\sigma \qquad (\sigma = \alpha,\beta,\ldots,\mu;\ t=0,1,\ldots,t_1-1) \tag{16}$$

onde $P(0,P^*) \equiv P^*$. Em seguida, sejam $\delta = [\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n]$ e $P(0) = P^* + \delta$; então, uma sequência finita $(A_o^o, A_1^o, \ldots, A_{t_1-1}^o)$ é determinada, satisfazendo as desigualdades

$$P(t+1,P(0)) = P(t,P(0))A_t^o \leq P(t,P(0))A_\sigma \qquad (\sigma = \alpha,\beta,\ldots,\mu\ ;\ t=0,1,\ldots,t_1-1) \tag{17}$$

onde $P(0,P(0)) = P(0)$. De (16), obtém-se que

$$P(t_1,P^*) = P^*A_o^*A_1^*\ldots A_{t_1-1}^* \tag{18}$$

e de (17),

$$P(t_1,P(0)) = P(0)A_o^oA_1^o\ldots A_{t_1-1}^o = P^*A_o^oA_1^o\ldots A_{t_1-1}^o + \delta A_o^oA_1^o\ldots A_{t_1-1}^o \tag{19}$$

Podemos, agora, classificar todos os possíveis conjuntos de atividades A_σ ($\sigma = \alpha,\beta,\ldots,\mu$) em dois grupos, G_t^* e G_t : os conjuntos A_σ tais que $P(t,P^*)A_\sigma = P(t,P^*)A_t^*$, são membros de G_t^* e os demais de G_t. Suponhamos que A_t^o pertença a G_t. Como $P(t,P^*)A_t^* \neq P(t,P^*)A_t^o$ e $P(t,P^*)A_t^* \leq P(t,P^*)A_t^o$, podemos mostrar que se $P(t,P(0))$ está suficientemente perto de $P(t,P^*)$, então $P(t,P(0))A_t^* \not\geq P(t,P(0))A_t^o$, onde $Q \not\geq R$ significa que pelo menos um componente do vetor R é maior que seu correspondente em Q. Tal relação contradiz (17). Logo, se

$$P(t,P(0)) \cong P(t,P^*), \quad A_t^o \in G_t^* \quad \text{i.e. } P(t,P^*)A^* = P(t,P^*)A_t^o$$

$$(t=1,2,\ldots,t_1-1) \tag{20}$$

Para o que se segue, $P(0)$ é tomado perto o suficiente de P^* que (20) é válida para $t = 0,1,\ldots,t_1-1$.

Como $P(t+1,P^*) = P(t,P^*)A_t^*$ e $P(0,P^*) = P^*$, segue-se de (20) que $P(t_1,P^*) = P^*A_o^*A_1^*\ldots A_{t_1-1}^* = P^*A_o^o\ldots A_{t_1-1}^o$. Como $P(t_1,P^*)$

pertence ao interior de H, vê-se, de (18) e (19), que se a norma do vetor δ é suficientemente pequena, $P(t_1,P(0))$ também pertence a H. Se isto é verdade, temos, de (15),

$$P(t_1,P(0))A_\varepsilon^s \leq P(t_1,P(0))A_\varepsilon^{s-1}A_\sigma \quad (\sigma = \alpha,\beta,\ldots,\mu \; ; \; s = 1,\ldots,r) \; .$$

Vemos, então, que A_ε é o conjunto de atividades menos custoso em $P(t_1,P(0))$, $P(t_1+1,P(0)),\ldots,P(t_1+r-1,P(0))$, tal que $P(t_1 + s,P(0)) = P(t_1+s-1, P(0))A_\varepsilon$ $(s = 1,\ldots,r)$. É claro que a sequência finita $\{P(t,P(0))\}$ $(t=t_1,\ldots,t_1+r)$ assim obtida satisfaz (10).

Consideremos, agora, a equação a diferenças, linear

$$P(t+1) = P(t)\,A_\varepsilon \qquad (21).$$

Vamos deduzir que para qualquer cone de vizinhança K do raio de preço de Von Neumann, existe um inteiro $t_\varepsilon(K) > 0$, tal que para $t \geq t_\varepsilon(K)$, qualquer trajetória (21) começando de uma posição inicial arbitrária permanece dentro de K. Seja $\bar{t}_\varepsilon(P)$ o menor valor dos $t_\varepsilon(P)$ tais que, para $t \geq t_\varepsilon(P)$, a trajetória (21), começando do ponto inicial P, permanece dentro de K. Seja $P' = \lambda P$, λ é um escalar positivo; então, descobrimos que $\bar{t}_\varepsilon(P) = \bar{t}_\varepsilon(P')$.

Sejam os vetores linha n-dimensionais $P^1 = [1,0,\ldots,0]$, $P^2 = [0,1,0,\ldots,0]$, $\ldots,P^n = [0,\ldots,0,1]$ e seja $t_\varepsilon(K)$ o máximo entre $\bar{t}_\varepsilon(P^1),\bar{t}_\varepsilon(P^2),\ldots,\bar{t}_\varepsilon(P^n)$. Para $P(0) = [p_1(0),\ldots,p_n(0)]$

tal que $\sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1$, nós temos $P(t) = P(0)A_\varepsilon^t = p_1(0)P^1A_\varepsilon^t + \ldots +$ $+ P_n(0)P^nA_\varepsilon^t$. Se $t \geq t_\varepsilon(K)$, $P^iA_\varepsilon^t \in K$ para todo i. Como K é convexo, $\sum_{i=1}^{n} p_i(0)P^iA_\varepsilon \in K$ para todo $t \geq t_\varepsilon(K)$.

Seja K contido em N e tão pequeno que $PA_\varepsilon < PA_\xi$ é válido para qualquer P em K e para qualquer A_ξ que não contenha qualquer das atividades de A_ε. Seja $r = t_\varepsilon(K)$. Vemos, pois, que $P(t_1 + r, ,P(0))A_\varepsilon < P(t_1+r,P(0))A_\xi$ de modo que, a partir de (10), $P(t_1+r + +1,P(0)) = P(t_1+r,P(0))A_\varepsilon$. Logo, $P(t_1+r+1,P(0))$ pertence a K . Com o mesmo argumento, vê-se que $P(t_1+r',P(0))$ pertence a K para todo $r' > r$. Portanto, se P(0) pertence a uma vizinhança de P* suficientemente pequena, P(t,P(0)) permanece em K (logo, em N) , quando $t \geq t^* \equiv t_1 + r$. Portanto, $\bar{t}(P(0)) \leq t^*$.

LEMA 5. Seja a função objetivo P(0)X(0) do problema PL 2 com um mínimo em $P(0) = P_T(0)$. Então, cada componente de $P_T(0)$ não tende a infinito mesmo se T tende a infinito.

PROVA. Seja P_ε um auto-vetor de A_ε tal que $h_\varepsilon P_\varepsilon = P_\varepsilon A_\varepsilon$ e $P_\varepsilon x_\varepsilon^* = 1$. Seja

$$P(t) = h_\varepsilon^t P_\varepsilon \qquad (t=0,1,\ldots,T) \tag{22}$$

De (6), vemos que (22) é uma solução factível de PL 2. Com toda certeza, $P_T(0)X(0) \leq P_\varepsilon X(0)$.

Finalmente, podemos anunciar o

TEOREMA 1 ("Turnpike") - *Se o tempo T de programação é suficientemente grande em PL1, a trajetória eficiente do ponto inicial X(0) (maior que zero) até o raio terminal x* (maior que zero) permanecerá a maior parte do tempo T dentro de uma dada (arbitrariamente pequena) vizinhança do raio de produto de Von Neumann.*

PROVA. Foi visto no Lema 2 que para todo $t \leq T$ a solução $P(t)$ para PL 2 coincide com a solução de (10) para o conjunto inicial de preços $P_T(0)$. É facilmente demonstrável que $P_T(0) \neq 0$ para todo T. Pelo Lema 5, podemos tomar, dentro do ortante não-negativo, um cubo Γ que contenha todos os $P_T(0)$ (T=1,2,...). Vamos associar a cada ponto de P* de Γ uma vizinhança U(P*) para a qual a asserção do Lema 4 é válida. Então, Γ é completamente coberto pela totalidade dessas U(P*). Como Γ é fechado e limitado, pode ser coberto por um número finito desses U(P*), digamos $U(P_i^*)$ (i=1,2 , ,...,k).

Sejam os t_* associados com P*, no Lema 4, denotados por $t_*(P^*)$, e seja $T_* = \max(t_*(P_1^*), t_*(P_2^*), \ldots, t_*(P_k^*))$. É claro que para $t \geq T_*$ a trajetória (10) que começa em qualquer ponto inicial P(0) de Γ permanece dentro do cone de vizinhança K do raio de Von Neumann. Logo, para um T suficientemente grande, $P(t, P_T(0))$ permanece dentro de K, para t no intervalo $[T_*; T]$ (Portanto, a convergência uniforme estabelecida no Lema 4, junto com a limitação no Lema 5, permite-nos determinar um tempo finito, independentemente do tempo de programação, tal que, após aquele tempo, a sequência de preços estará dentro do cone de vizinhança do raio de

UNICAMP
BIBLIOTECA

preço de Von Neumann).

Como $PA_\varepsilon < PA_\xi$ em K, segue-se, do teorema fundamental da dualidade em programação linear, que, na solução de PL 1, os $y_{s_i}(t)$ correspondentes a qualquer atividade que não as de A_ε são zero para todo $t \in [T_*+1, T]$, isto é, as atividades que estão no raio de Von Neumann sempre serão escolhidas após um tempo finito T_*. Portanto,

$$A_\varepsilon X(t+1) \leq X(t) \quad (t=T_*+1,\ldots,T) \quad ,$$

onde $X(t) = \{y_{e1}(t),\ldots,y_{en}(t)\}$ é um vetor n-dimensional. Como o vetor P_ε (raio de preço de Von Neumann) é positivo, é sempre possível tomar K tão pequeno que qualquer ponto P em K seja estritamente positivo. Então, $P(t,P(0) > 0$ para todo t em $[T_*,T]$. Segue-se, pois, do teorema fundamental da dualidade, que $A_\varepsilon X(t+1)=X(t)$ $(t = T_*+1,\ldots, T-1)$

e
$$X(T) = q_T x^* > 0 \tag{23}$$

Se escrevermos

$$X(t) = q_T W(T - t) \qquad (t = T_*+1,\ldots,T) \quad , \tag{24}$$

a equação (23) se torna

$$A_\varepsilon W(s-1) = W(s) \qquad (s = 1,2,\ldots,T - T_*-1) \tag{25}$$

onde $W(0) = x^*$. Como A_t é indecomponível e primitiva, o mesmo argumento do Lema 3 pode ser aplicado. A solução para (25), se o valor de s é extendido sem limite, converge para o raio de produto de Von Neumann, i.é., existe um inteiro finito tal que para todo s não-menor que esse inteiro, W(s) permanece dentro de uma dada vizinhança do raio de Von Neumann. Logo, quando T é suficientemente grande, a solução de (25) permanece dentro da vizinhança para todo s em $[\sqrt{T},\ T - T_* - 1]$. Isto, junto com (24), implica que a trajetória eficiente de X(t) permanecerá, para todo t em $[T_* + 1,\ T - \sqrt{T}]$, na prescrita vizinhança do raio de Von Neumann. Além disso, é de se notar que $\lim_{T \to \infty} \frac{[(T - \sqrt{T}) - (T_* + 1)]}{T} = 1$, o que completa a prova.

B - VERSÃO RADNER

A prova do teorema está relacionada com sequências factíveis que, dados o número de períodos de programação (N) e o ponto inicial ($\underline{x}_o$) maximizam uma função $u(x_N)$, que expressa uma determinada preferência, ao final do período de programação. Essa sequência maximizante deve pertencer ao conjunto de todas as $\{\underline{x}_n\}_{n=0}^{N}$ tecnologicamente factíveis; a função $\underline{u}$ é definida no espaço-mercadoria (ortante não negativo do espaço Euclidiano m-dimensional). Tal sequência será chamada de u-*ótima*.

O vetor $\underline{x}$, m-dimensional, representa as mercadorias usadas como insumo no processo produtivo, no início do período usado como unidade de tempo. O vetor $\underline{y}$ representa o produto, ao final do mesmo, sendo o insumo para o período seguinte. O conjunto de todos os pares $(\underline{x},\underline{y})$ tecnologicamente possíveis é considerado o mesmo para todos os períodos e representado por T.

A - HIPÓTESES FUNDAMENTAIS

A1) T é um cone fechado no ortante não-negativo do espaço Euclidiano 2^m-dimensional.

A2) Se $(0,\underline{y})$ está em T, então $y = 0$.

A3) A função $\underline{u}$ é não-negativa e contínua no espaço mercadoria e existe $\underline{x}$ tal que $u(\underline{x}) > 0$.

A4) A função $\underline{u}$ é "quase-homogênea", i.é., para quaisquer vetores $\underline{x}'$ e $\underline{x}''$, m-dimensionais, e qualquer $k > 0$, $u(\underline{x}') \geq u(\underline{x}'')$ se, e somente se $u(k\underline{x}') \geq u(k\underline{x}'')$. Sem perda de generalidade, pode-se assumir homogeneidade de grau 1.

As seguintes definições serão úteis:

O vetor $\underline{x}$ é dito balanceado se existe $\rho > 0$, real, tal que $(\underline{x}, \rho\underline{x})$ está em T. O número ρ é chamado de "fator de crescimento" associado (A "taxa de crescimento" associada é $(\rho-1)$).

O "coeficiente de expansão" de qualquer par $(\underline{x},\underline{y})$ é

$$\lambda(\underline{x},\underline{y}) = \max\{c \,/\, \underline{y} \geq c\underline{x}\} \quad . \tag{1}$$

Uma sequência $\{\underline{x}_n\}_{n=0}^{N}$ é chamada *factível*, dado $\underline{x}_o$, se $(\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1})$, para $n = 0,1,\ldots,N-1$, está em T.

A "distância" entre dois vetores $\underline{x},\underline{z}$ será dada por

$$d(\underline{x},\underline{z}) \equiv \left| \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} - \frac{\underline{z}}{\|\underline{z}\|} \right| \quad , \text{ onde } \|\underline{x}\| = (\underline{x},\underline{x})^{\frac{1}{2}}$$

Dado um vetor $\underline{p}$, m-dimensional, e um real positivo μ, o par $(\underline{p},\mu)$ será chamado de um par de "equilíbrio preço-rendimento" se

$$\underline{p} \cdot (\underline{y} - \mu\underline{x}) \leq 0 \quad \text{para todo} \quad (\underline{x},\underline{y}) \text{ em } T; \tag{2}$$

$$\underline{p} \geq 0 \quad , \quad \mu > 0 \tag{3}$$

onde $\underline{p}\cdot\underline{y}$ é o produto escalar $\sum_{i=1}^{m} p_i y_i$.

B - SOLUÇÃO

Foi provado por von Neumann que, para certas condições sobre T, existe $\underline{\hat{x}},\underline{p}$ e ρ tal que

1) $\underline{\hat{x}}$ é balanceado, com fator de crescimento ρ

2) $(\underline{p},\rho)$ é um par de equilíbrio preço-rendimento.

O termo $(\underline{\hat{x}},\underline{p},\rho)$ satisfazendo 1) e 2) será chamado de "equilíbrio de crescimento balanceado de von Neumann". O raio que contém $\underline{\hat{x}}$ será chamado de "raio de von Neumann".

TEOREMA DE "TURNPIKE" - *Sob as hipóteses* A1 *a* A4, *se*

i) $(\underline{\hat{x}},\underline{p},\rho)$ *é um equilíbrio de von Neumann*

ii) $\underline{p}\cdot(\underline{y}-\rho\underline{x}) < 0$ *para todo* $(\underline{x},\underline{y})$ *em* T *que não seja proporcional a* $(\underline{\hat{x}},\rho\underline{\hat{x}})$

iii) *existe um número* $K > 0$ *tal que para todos os vetores* $\underline{x}$, $u(\underline{x}) \leq K\ \underline{p}\cdot\underline{x}$

iv) *um vetor inicial* $\underline{x}_o$ *é dado tal que para algum real* $L > 0$, $(\underline{x}_o, L\underline{\hat{x}})$ *está em* T.

v) $u(\underline{\hat{x}}) > 0$

então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um real S tal que, para qualquer N e qualquer sequência $\{\underline{x}_n\}_{n=0}^{N}$ u-ótima, o número de períodos nos quais $d(\underline{x}_n, \hat{\underline{x}}) \geq \varepsilon$ não pode ser maior que S.

Antes da demonstração do Teorema, deve-se provar o lema abaixo:

LEMA. Sob as hipóteses A1 e A2, e as condições (i) e (ii), para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, para qualquer $(\underline{x}, \underline{y})$ em T para o qual $d(\underline{x}, \hat{\underline{x}}) \geq \varepsilon$, segue-se que

$$\underline{p} \cdot \underline{y} \leq (\rho - \delta)\underline{p} \cdot \underline{x}$$

PROVA. De A1 e A2, decorre que o conjunto

$$T_1 \equiv \{\underline{y} \ / \ (\underline{x}, \underline{y}) \text{ está em } T \text{ e } \|\underline{x}\| = 1\}$$

é limitado. Senão, haveria uma sequência $(\underline{x}_k, \underline{y}_k)$ tal que $\|\underline{x}_k\| = 1$ e $\|\underline{y}_k\| \to \infty$; então, a sequência

$$\left(\frac{\underline{x}_k}{\|\underline{y}_k\|} , \frac{\underline{y}_k}{\|\underline{y}_k\|}\right) \qquad k = 1, 2, \ldots ,$$

sendo limitada e estando em T, teria um ponto limite $(0, \bar{\underline{y}})$ em T, com $\|\bar{\underline{y}}\| = 1$, o que contradiz A2.

Voltando ao Lema, suponhamos o contrário , ou seja, existe um $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(\underline{x}_k, \underline{y}_k)$ em T, tal que $\underline{p}\cdot\underline{x}_k > 0$, $d(\underline{x}_k, \hat{\underline{x}}) \geq \varepsilon$ e

$$\frac{\underline{p} \cdot \underline{y}_k}{\underline{p} \cdot \underline{x}_k} \longrightarrow \rho \tag{4}$$

Por normalização, pode-se tomar $\|\underline{x}_k\| = 1 \quad k = 1,2,\ldots$.

Logo, a sequência $(\underline{x}_k, \underline{y}_k)$ é limitada e tem, pois, um ponto limite $(\bar{\underline{x}}, \bar{\underline{y}})$. Como a sequência $\underline{p}\cdot\underline{x}_k$ é também limitada, segue-se de (4) que $\underline{p}\,(\bar{\underline{y}} - \rho\bar{\underline{x}}) = 0$; entretanto, este fato e o de que $(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}})$ não pode ser proporcional a $(\underline{x},\rho\underline{x})$ contradizem a condição (ii). Portanto, o lema está provado.

PROVA DO TEOREMA. Definamos uma sequência

$$(\tilde{\underline{x}}_n)_{n=0}^{N} \quad \text{por} \quad \begin{cases} \tilde{\underline{x}}_o = \underline{x}_o \\ \tilde{\underline{x}}_1 = L\hat{\underline{x}} \\ \tilde{\underline{x}}_n = L\rho^{n-1}\hat{\underline{x}} \qquad n = 1,\ldots,N \end{cases} \tag{5}$$

Consideremos um $\varepsilon > 0$ e uma sequência $\{\underline{x}_n\}_{n=0}^{N}$ que seja factível, dado $\underline{x}_o$. Para qualquer período n para o qual $d(\underline{x}_n,\hat{\underline{x}}) \geq \varepsilon$, segue-se do lema que

$$\underline{p} \cdot \underline{x}_{n+1} \leq (\rho - \delta)\underline{p} \cdot \underline{x}_n \tag{6}$$

onde $\delta > 0$ é como no lema.

Por outro lado, por definição de equilíbrio de von Neumann, tem-se, para todo n,

$$\underline{p} \cdot \underline{x}_{n+1} \leq \rho \underline{p} \cdot \underline{x}_n \tag{7}$$

Supondo que $d(\underline{x}_n, \hat{\underline{x}}) \geq \varepsilon$ por P períodos, temos de (6) e (7),

$$\underline{p} \cdot \underline{x}_N \leq (\rho - \delta)^P \rho^{N-P} \underline{p} \cdot \underline{x}_o \tag{8}$$

Pela condição (iii) do enunciado,

$$u(\underline{x}_N) \geq K(\rho - \delta)^P \rho^{N-P} \underline{p} \cdot \underline{x}_o \tag{9}$$

Por outro lado, de (5) e da homogeneidade de u,

$$u(\tilde{\underline{x}}_N) = L\rho^{N-1} u(\hat{\underline{x}}) > 0 \tag{10}$$

Combinando (9) e (10),

$$\frac{u(\underline{x}_N)}{u(\tilde{\underline{x}}_N)} \leq C\left(\frac{\rho-\delta}{\rho}\right)^P \quad , \text{ onde}$$

$$C = \frac{K\rho \, \underline{p} \cdot \underline{x}_o}{L u(\hat{\underline{x}})}$$

Logo, para $\{\underline{x}_n\}_{n=0}^N$ ser ótima, deve-se ter

$$C\left(\frac{\rho-\delta}{\rho}\right)^{P} \geq 1 \quad , \quad \text{ou seja,} \quad P \leq \frac{\log C}{\log\left(\frac{\rho}{\rho-\delta}\right)}$$

A prova é completada, tomando-se

$$S = \max\left[1, \frac{\log C}{\log\left(\frac{\rho}{\rho-\delta}\right)}\right] \tag{11}$$

OBSERVAÇÕES GERAIS

1. Um cone convexo C será chamado de "cone estritamente convexo" se para quaisquer pontos $\underline{a}$ e $\underline{b}$ em C, não-proporcionais, e qualquer $0 < \alpha < 1$, o ponto $\alpha\underline{a} + (1-\alpha)\underline{b}$ está no interior de C. Um cone deste tipo preencherá a condição (ii) do enunciado. Em geral, ela não é satisfeita quando T é poliédrico (o caso tratado por von Neumann). Ressalte-se que um "cone estritamente convexo" não é um conjunto estritamente convexo.

2. A condição (iii) é satisfeita se, por exemplo, $\underline{p} > 0$.

3. A condição (iv) é satisfeita se houver livre disponibilidade (ver pag.50) e $\underline{x}_o$ provê quantidades positivas de todas as mercadorias para as quais $\underline{x}$ é positivo. Por outro lado, a condição (iv) pode ser enfraquecida para: é dado um vetor inicial $\underline{x}_o$ tal que para algum número $L > 0$ e algum inteiro $N_o \geq 1$, há uma sequência factível de $\underline{x}_o$ a $L\underline{\hat{x}}$ em N_o períodos.

4. A condição (v) pode ser enfraquecida: para algum inteiro $N_1 \geq 0$ e algum vetor vetor $\underline{y}$ para o qual $u(\underline{y}) > 0$, há uma sequência factível de $\hat{\underline{x}}$ para $\underline{y}$ em N_1 períodos.

Com o enfraquecimento de (iv) e (v), indicado, a equação(11) deve se modificar por

$$S = \max \left| N_o + N_1 \frac{\log C}{\log\left(\frac{\rho}{\rho-\delta}\right)} \right|$$

5. Consideremos o caso especial no qual $u(x) = \underline{w} \cdot \underline{x}$, onde $\underline{w}$ é um vetor não negativo, pré-determinado. Uma condição necessária e suficiente para satisfazer (iii) será $w_i = 0$ para todo i para o qual $p_i = 0$. Nestas circunstâncias, o mesmo valor de K que pode ser usado em (iii) é

$$K = \max_{p_i>0} \frac{w_i}{p_i}$$ e, correspondentemente, isto dá o valor a C, no teorema, de $C = \frac{\rho\, \underline{p} \cdot \underline{x}_o}{L\underline{w} \cdot \hat{\underline{x}}} \max_{p_i>0} \frac{w_i}{p_i}$.

CAPÍTULO IV

SOBRE VON NEUMANN E "TURNPIKE"

A - SOBRE von NEUMANN

Nesta secção, sistematizamos as observações sobre o modelo de von Neumann para facilitar o entendimento das repercussões do mesmo na teoria de crescimento econômico.

i - DIFERENÇAS COM O EQUILÍBRIO WALRASIANO

Os modelos estáticos de equilíbrio econômico geral (walrasianos) contêm uma dificuldade (insolúvel no seu quadro teórico) referente à contabilização dos bens de capital: se são produtivos já no período em que são produzidos, o total de bens de capital utilizados na produção, neste período, é indeterminado e, consequentemente, é indeterminada a configuração de equilíbrio. Se são produtivos no período subsequente à sua produção, é impossível conseguir no mercado de bens de capital a igualdade entre as várias taxas de retorno, não sendo possível por isso, satisfazer a todas as equações de equilíbrio. A superação, feita por von Neumann, é feita pela suposição de que não há bens originais; os próprios meios de produção são produtos no processo em que entram.

No que se refere à distribuição, as formas de renda, em Walras, são renumerações pelo uso dos fatores de produção. Como tais

não existem no raciocínio Neumanniano, o excesso de valor de produção de um período em relação ao seu antecedente só pode ser do tipo de um extra retirado ao trabalho (lembrando mais-valia).

ii) PROXIMIDADES COM SISTEMA DE SRAFFA

Em Sraffa, a taxa máxima de lucro (quando a taxa de salários é nula) é igual a taxa de crescimento da economia, já que o consumo dos capitalistas é desprezado. Esta situação é exatamente a abordada por von Neumann. Nos dois sistemas, igualmente, o sistema de preços é completamente independente da estrutura de consumo. Há uma relação inversa, explícita em Sraffa, entre salários e lucros (ou entre salários e taxa de acumulação); embora em von Neumann a taxa de salário real seja dada e a taxa de acumulação deduzida, nada impede fazer o raciocínio causal inverso. Nos dois sistemas não existem considerações sobre base monetária.

iii) DIFERENÇAS COM O SISTEMA DE SRAFFA

Enquanto Sraffa trabalha com a hipótese de pleno emprego, (como todos os modelos de Cambridge), em von Neumann é assumida a existência de um "exército industrial de reserva", com a mão-de-obra sempre disponível, em quantidades ilimitadas, à taxa dada de salários. Além disso, o caso de produção conjunta é tratado apenas em von Neumann. O problema de medição de capital através da mercadoria-padrão, em Sraffa, é superado, no modelo neumanniano,

pela hipótese de crescimento balanceado, sendo que os bens, são quantidades dadas inicialmente constituiram a equivalente à mercadoria-padrão. A suposição de retorno constante de escala, fundamental em von Neumann (coeficientes constantes), é completamente supérflua em Sraffa.

iv) DEPRECIAÇÃO DE BENS DE CAPITAL

Ao colocar os bens de capital como insumos e como produtos, sem usar as fórmulas tradicionais de imputar uma dada taxa de depreciação, o modelo de von Neumann define como único critério para a determinação de sua vida útil o critério de lucratividade ; quando deixar de dar lucro, torna-se um bem livre.

v) von NEUMANN E HARROD

Segundo Harrod (ver capítulo I), a taxa de crescimento real da Economia, a longo prazo, não pode exceder a taxa "natural"; como essa restrição não aparece em nenhum momento no desenvolvimento neumanniano, é de se supor que esse problema fatalmente aparecerá a taxas grandes de crescimento.

vi) CRESCIMENTO NÃO-BALANCEADO

Uma hipótese de aplicação do sistema de von Neumann a um sistema econômico de crescimento não-balanceado é a possibilidade

deste conter subsistemas interiores que estejam com crescimento balanceado, mesmo que a taxas diferentes.

vii) TIPO DE ECONOMIA

A questão de aplicação do modelo a uma economia com mercado livre e competitivo ou centralmente planejada é indiferente frente à formulação posta por von Neumann.

viii) SETOR NÃO-PRODUTIVO

Embora de difícil inserção, há notícias de tentativas de introdução de setores não-convencionais na análise neumanniana, como serviços em geral, serviços públicos básicos, etc.

ix) MODELO ABERTO

Da mesma maneira, recentes trabalhos estão feitos na introdução de uma estrutura de consumo exogenamente determinada. Ver LOŚ, J. & LOŚ, M.W. [1] e MORISHIMA, M. [2].

B - SOBRE "TURNPIKE"

i) EXTENSÃO DOS RESULTADOS

Após RADNER, R. [1] e MORISHIMA, M. [1], o resultado mais importante na área foi desenvolvido por NIKAIDO, H. [1]. A prova

de Radner não garante que os períodos gastos na vizinhança da trajetória de "Turnpike" sejam consecutivos, veio a ser feito apenas no artigo citado.

ii) APLICAÇÕES

Dadas as severas restrições para se garantir a existência de tal trajetória, é uma tarefa ingrata procurar reproduzí-la, mesmo numa economia com uma centralização quase total. Num sistema de livre competição isso é praticamente impossível. Espera-se, por desenvolvimentos que possibilitem o relaxamento de algumas condições, o que, eventualmente, poderia tornar esta teoria factível.

BIBLIOGRAFIA

ARROW, K.J. [1] - "The Economic Implications of Learning by Doing" , 1966, in HAHN, F.H. [3] .

ARROW, K.J., CHENERY, H.B., MINHAS, B.S. & SOLOW, R.M. [1] - "Capital - Labour Substitution and Economic Efficiency" , 1961, in HARCOURT,G.C. & LAING, N.F. [1] .

BARTHES, R. [1] - "Escritores,Intelectuais e Profesores, e outros ensaios", Editorial Presença, Lisboa, 1974.

BAUMOL, W.J. [1] - "Economic Dynamics", MacMillan, London, 1959.

BHADURI, A. [1] - "On the Significance of Recent Controversies on Capital Theory: A Marxian View", 1969, in HARCOURT,G.C. & LAING, N.F. [1] .

BLISS, C.J. [1] - "On Putty-Clay", 1968, in HAHN, F.H. [3] .

BLITZER, C.R., CLARK, P.B. & TAYLOR, L. [1] - "Economic-Wide Models and Development Planning", World Bank by Oxford University Press, Oxford, 1977 (Reprinted).

BOSE, A. [1] - "Marxian and Post-Marxian Political Economy", Penguin Books, Harmondsworth, 1975.

CHAMPERNOWNE , D.G. [1] - "A Note on J.v. Neumann's Article on "A Model of Economic Equilibrium"", 1945-46 , in NEWMAN, P. [1] .

CHAMPERNOWE , D.G. [2] - "The Production Function and the Theory of Capital: A Comment", 1953-4 , in HARCOURT, G.C. & LAING, N.F. [1] .

DIAMOND, P.A. [1] - "Disembodied Technical Change in a Two-Sector Model", 1965, in HAHN, F.H. [3] .

DOBB, M.H. [1] - "El Calculo Economico en una Economia Socialista", Ed. Ariel, Barcelona, 2ª Ed., 1972.

DOBB, M.H. [2] - "Crescimento Econômico e Planejamento", Livraria Pioneira Editora, São Paulo, 1973.

DOBB, M.H. [3] - "Welfare Economics and the Economics of Socialism (Towards a Commonsense Critique)", Cambridge University Press, Cambridge, 1976 (Reprinted).

DOBB, M.H. [4] - "Theories of Value and Distribution since Adam Smith (Ideology and Economic Theory)", Cambridge University Press, Cambridge, 1977 (Reprinted).

DOBB, M.H. [5] - "Economia Política e Capitalismo", Ed. Graal,Rio, 1978.

DOMAR, E. [1] - "Capital Expansion, Rate of Growth and Employment", 1946, in SEN, A.K. [2].

DORFMAN, R., SAMUELSON, P.A. & SOLOW, R.M. [1] - "Linear Programming and Economic Analysis", McGraw Hill-Kogakusha, Tokyo, 1958.

FURUYA, H. & INADA, K. [1] - "Balanced Growth and Intertemporal Efficiency in Capital Accumutaion", *International Economic Review*, Vol. 3, 1962.

FOURASTIÉ, J. et al. [1] - "Economia", Ed. F.G.V. Rio, 3ª ed. 1981.

GALE, D. [1] - "The Theory of Linear Economic Models", McGraw Hill, New York, 1960.

GAREGNANI, P. [1] - "Il Capitale nelle Teorie della Distribuzione", Giuffrè, Milano, 1960.

GAREGNANI, P. [2] - "Heterogeneous Capital, the Production Function and the Theory of Distribution", *Review of Economic Studies*, vol 37, 1970.

HABAKKUK, H.J. [1] - "American and British Technology in the Nineteenth Century", Cambridge University Press, Cambridge, 1962.

HAHN, F.H. [1] - "Two-Sector Growth Models", 1965, in SEN,A.K.[2].

HAHN, F.H. [2] - "On Warranted Growth Paths", 1968, in HAHN, F.H. [3].

HAHN, F.H. [3] - "Readings in the Theory of Growth",MacMillan , London, 1971.

HAHN, F.H. & MATTHEWS, R.C.O. [1] - "The Theory of Economic Growth: A Survey", 1974, in SEN, A.K. [2].

HARCOURT, G.C & LAING, N.F. (Ed) [1] - "Capital and Growth",Penguin Books, Harmondsworth, 1973 (Reprinted).

HARROD, R.F. [1] - "An Essay in Dynamic Theory", 1939, in SEN, A. K. [2].

HARROD, R.F. [2] - "Towards a Dynamic Economics",MacMillan, London, 1948.

HICKS, J.R. [1] - "Value and Capital", Oxford University Press , Oxford, 2nd Ed., 1946.

INADA, K. [1] - "On the Stability of Growth Equilibrium in Two--Sector Models", 1964, in HAHN, F.H. [3].

JOHNSON, H.G. [1] - "Money in a Growth Model", 1967, in SEN, A.K. [2].

JORGENSON, D.W. & GRILICHES, Z. [1] - "Explanation of Productiv - ity Change", 1967, in SEN, A.K. [2].

KAHN, R.F. [1] - "Analysis of Growth", 1959, in SEN, A.K. [2].

KALDOR, N. [1] - "Model of Distribution", 1956, in SEN,A.K. [2].

KALDOR, N. [2] - "Marginal Productivity and Macroeconomic Theories of Distribution", 1966, in HARCOURT, G.C. & LAING, N.F. [1].

KALDOR, N. & MIRRLEES, J.A. [1] - "Growth Model with Induced Technical Progress", 1961-1962, in SEN, A.K. [2].

KALECKI, M. [1] - "Crescimento e Ciclo das Economias Capitalistas", Ed. Hucitec, São Paulo, 1977.

KALECKI, M. [2] - "Teoria da Dinâmica Econômica", in Série "Os Pensadores", Ed. Abril, São Paulo, 1978 (Reimpressão).

KATOUZIAN, H. [1] -"Ideology and Method in Economics", New York University Press, New York and London, 1980.

KEYNES, J.M. [1] - "The General Theory of Employment, Interest and Money", MacMillan, London, 1961.

KEMENY, J.G., MORGENSTERN, O. & THOMPSON, G.L. [1] - "A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy", *Econometrica*, vol. 24, nº 2, 1956.

KOOPMANST, T.C. [1] - "Economic Growth at a Maximal Rate", 1964, in NEWMAN, P. [1].

LAING, N.F. [1] - "Trade, Growth and Distribution: A Study in the Theory of the Long Run", 1965, in HARCOURT, G.C. & LAING, N.F. [1].

LANCASTER, K. [1] - "Mathematical Economics", MacMillan, London, 1971.

LEVHARI, D. [1] - "Extensions of Arrow's "Learning by Doing"", 1966, in HAHN, F.H. [3].

LEVHARI, D. [2] - "Further Implications of Learning by Doing", *Review of Economic Studies*, vol. 35, 1967.

LOŚ, J. & LOŚ, M.W. (Ed.) [1] - "Mathematical Models in Economics", Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1974.

LOŚ, M.W., LOŚ, J. & WIECZOREK, A. (Ed.) [1] - "Warsaw Fall Seminars in Mathematical Economics", Springer-Verlag, Berlin, 1975.

MAHALANOBIS, P.C. [1] - "The Approach of Operational Research to Planning in India", *Sankhya*, Vol. 16, 1955.

MALINVAUD, E. [1] - "Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources", *Econometrica*, vol. 21, 1953.

MATHUR, G. [1] - "Planning for Steady Growth", Basil Blackwell , Oxford, 1965.

MURAKAMI, Y. TOKOYAMA, K. & TSUKUI, J. [1] - "Efficient Paths of Accumulation and the Turnpike of the Japonese Economy", in TSUKUI, J. [1].

MCKENZIE, L.W. [1] - "The Dorfman-Samuelson- Solow Turnpike Theorem", *International Economic Review*, vol. 4, 1963.

MCKENZIE, L.W. [2] - "Turnpike Theorems for a Generalized Leontief Model", *Econometrica*, vol. 31, 1963.

MEADE, J.E. [1] - "A Neo-Classical Theory of Economic Growth", Allen & Unwin, London, 1961.

MEADE, J.E. [2] - "The Adjustment of Savings to Investiment in a Growing Economy", 1963, in HAHN, F.H. [3].

MEADE, J.E. [3] - "The Outcome of the Pasinetti-Process", 1966, in HARCOURT, G.G. & LAING, N.F. [1].

MORISHIMA, M. [1] - "Proof of a Turnpike Theorem: the "no Joint Production Case"", 1961, in MORISHMA [2].

MORISHIMA, M. [2] - "Equilibrium, Stability and Growth", Clarendon Press, Oxford, 1964.

MORISHIMA, M. [3] - "Theory of Economic Growth", Clarendon Press, Oxford, 1969.

MORISHIMA, M. & CATEPHORES, G. [1] - "Valor, Exploração e Crescimento", Ed. Zahar, Rio, 1980.

MYRDAL, G. [1] - "Teoria Econômica e Regiões Subdesenvolvidas", Ed. Saga, Rio, 2ª Ed., 1968.

NAPOLEONI, C. [1] - "O Pensamento Econômico do Século XX", Ed., Paz e Terra, Rio, 1979.

NELL, E.J. [1] - "Theories of Growth and Theories of Value", 1967, in HARCOURT, G.C. & LAING, N.F. [1].

NEWMAN, P. (Ed.) [1] - "Readings in Mathematical Economics", vol. II (Capital and Growth), The John Hopkins Press, Baltimore, 1968.

NIKAIDO, H. [1] - "Persistence of Continual Growth near the von Neumann Ray: a Strong Version of the Radner Turnpike Theorem", 1964, in NIKAIDO, H. [2].

NIKAIDO, H. [2] - "Convex Structures and Economic Theory", Academic Press, New York, 1968.

NUTI, D.M. [1] - "Capitalism, Socialism and Steady Growth", 1970, in HARCOURT, G.C. & LAING, N.F. [1].

PASINETTI, L.L. [1] - "Profit and Growth", 1961-2 , in SEN, A. K. [2].

PASINETTI, L.L. [2] - "Switches of Technique and the "Rate of Return" in Capital Theory", 1969, in HARCOURT, G.C. & LAING, N.F. [1].

PASINETTI, L.L. [3] - "Lectures on the Theory of Production", Columbia University Press, New York, 1977.

PHELPS, E.S. [1] - "Accumulation and the Golden Rule", 1961, in SEN, A.K. [2].

PHELPS, E.S. [2] - "Growth and Government Intervention", 1965, in SEN,A.K. [2].

RADNER, R. [1] - "Paths of Economic Growth that are Optimal with Regard only to Final States: a Turnpike Theorem", 1961, in NEWMAN, P. [1].

RAMSEY, F.P. [1] - "A Mathematical Theory of Saving", 1928, in SEN, A.K. [2].

ROBINSON,J. [1] - "The Production Function and the Theory of Capital", 1953-4 , in HARCOURT, G.C. & LAING, N.F. [1].

ROBINSON, J. [2] - "The Accumulation of Capital", MacMillan , London, 1956.

ROBINSON, J. [3] - "Solow on the Rate of Return", 1964, in HARCOURT, G.C. & LAING, N.F. [1].

ROBINSON, J. [4] - "Ensaios sobre a Teoria do Crescimento Econômico", in Série "Os Pensadores", Ed. Abril, 1980.

SAMUELSON, P.A. [1] - "Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function", 1962.

SAMUELSON, P.A. [2] - "A Summing up", 1966, ambos in HARCOURT, G. C. & LAING, N.F. [1].

SATO, K. [1] - "The Neoclassical Theorem and Distribution of Income and Wealth", 1966, in HAHN, F.H. [3].

SCHUMPETER, J.A. [1] - "Fundamentos do Pensamento Econômico", Ed. Zahar, Rio, 1968.

SEN, A.K. [1] - "Interest, Investiment and Growth", 1962, in SEN, A.K. [2].

SEN, A.K. (Ed.) [2] - "Growth Economics", Penguin Books, Harmondsworth, 1971 (Reprinted).

SOLOW, R.M. [1] - "A Contribution to the Theory of Economic Growth", 1956, in SEN, A.K. [2].

SOLOW, R.M. [2] - "Technical Change and the Aggregate Production Function", 1957, in SEN, A.K. [2].

SOLOW, R.M. [3] - "Note on Usawa's Two Sector Model of Economic Growth", 1961, in HAHN, F.H. [3].

SOLOW, R.M. [4] - "Capital and the Rate of Return", 1963, in HARCOURT, G.C. & LAING, N.F. [1].

SWAN, T.W. [1] - "Notes on Capital", 1956, in HARCOURT, G.C. & LAING, N.F. [1].

SWAN, T.W. [2] - "Growth Models: of Golden Ages and Production Functions", 1960, in SEN, A.K. [2].

SRAFFA, P. [1] - "Produção de Mercadorias por Meio de Mercadorias", in Série "Os Pensadores", Ed. Abril, 1980 (Reimpressão).

TOBIN, J. [1] - "A Dynamic Aggregative Model", 1955, in SEN, A.K. [2].

TSUKUI, J. (Ed.) [1] - "Contributions to Imput-Output Analysis", North-Holland, Amsterdam, 1974.

TURNOVSKY, S. [1] - "Turnpike Theorems and Efficient Economic Growth".

USAWA, H. [1] - "On a Two-Sector Model Economic Grouth", 1961, in HAHN, F.H. [3].

von NEUMANN, J. [1] - "A Model of General Economic Equilibium", 1945-6, in HAHN, F.H. [3].

von NEUMANN, J. & MORGENSTERN, O. [1] - "Theory of Games and Economic Behaviour", Princeton University Press, Princeton, 1980, (First Paperback Printing).

WAN, H.Y. [1] - "Economic Growth" Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971.