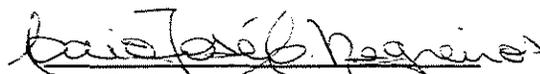


Aplicações Harmônicas e Estabilidade em Variedades Bandeira

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Luiz Leduíno de Salles Neto e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 7 de abril de 2000


Prof. Dr. Caio José Coleti Negreiros
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Prof. Dr. Caio José Coleti Negreiros
- 2 Prof. Dr. Luiz Antonio Barreira San Martin
- 3 Claudio Aguinaldo Buzzi

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIDADE	D. U.
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	Sa 34a
V.	Ex.
TOMBO BC	42743
PROC.	16/278/00
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	18/10/00
N.º CPD	

CM-00146989-2

BIB ID 276911

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Salles Neto, Luiz Leduino

Sa34a Aplicações harmônicas e estabilidade em variedades bandeira /
Luiz Leduino Salles Neto -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientador : Caio José Coleti Negreiros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Aplicações holomorfas. 2. Variedades complexas. I. Negreiros,
Caio José Coleti. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.



Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

**Aplicações Harmônicas e Estabilidade em Variedades
Bandeira**

Luiz Leduino de Salles Neto

Orientador: Caio José Coleti Negreiros

7 de abril de 2000

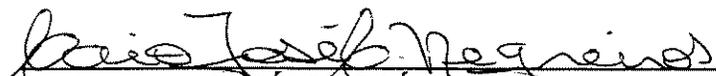
00015757



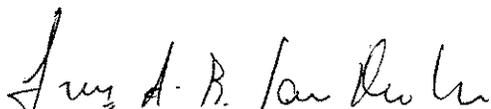
UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Dissertação de Mestrado defendida em 07 de abril de 2000 e aprovada

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS



Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



Prof (a). Dr (a). CLÁUDIO AGUINALDO BUZZI

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Aos meus pais

Agradecimentos:

- À minha mãe, Carmem, e meu pai, Mickaya, por terem sido sempre, com extremo carinho, meus maiores incentivadores e apoiadores;
- Ao professor Caio pela paciência e dedicação;
- Aos professores da banca pelas sugestões;
- Ao professor Kill pelos 3 anos e meio que me orientou na iniciação científica, quando me ensinou a gostar e a entender a matemática;
- Aos professores Claudina, Bordin, Márcio Rosa, Plínio, entre outros, que mostraram-me durante o curso a beleza da matemática;
- Ao amigo Dantas por toda sua ajuda e companheirismo desde o primeiro ano de graduação;
- Aos amigos e amigas da comunidade da G-5 na Moradia, onde vivi por 5 inesquecíveis anos: Lupi, Baiano, Bandeirão, Jack, Max, Vilma, Caubim, Wally, Morceirão, Celsão, Cristiano, Vitor, Carioca, Serjão, Santista, Flávia, Renatão, Neale, Batata, Krishna, Soninha, Aparício, Renata, Fernanda;
- Aos amigos e amigas, companheiros e companheiras que lutaram e continuam lutando pela universidade pública gratuita e de qualidade para todos: Gediel, Humberto, Rosângela, Domingos, Evandro, Simone, Renata, Paulão, Carlão, Ivan, Elba, Braga, Celso, Jeferson, Adriana, Vivien, Rosa, Toninho;

- Às minhas amigas Marília e Juliana, que me ajudaram a sentir melhor o mundo;
- À Lygia por todo seu carinho durante estes anos;
- À minha irmã Camila, ao Marco, à minha avó Néia, pelo apoio dado durante todo o tempo;
- Ao Augusto pelas relevantes correções e sugestões;
- Aos amigos e amigas do predinho pelo companheirismo. Em especial ao José, Marlio, Jones, Roberto Carlos, Yuri, Alexandre, Everaldo, Leonardo, Roseli, Newton, Marcela, Adriano.
- Aos servidores da Unicamp por todo seu trabalho nem sempre valorizado, porém imprescindível para universidade;
- À APG, DCE, STU e ADUNICAMP por continuarem lutando contra o sucateamento e privatização da universidade pública;
- À FAPESP pelo financiamento, que deve ser modelo para todo país.

Resumo

Neste trabalho estudamos condições de estabilidade para os Referenciais de Frenet de aplicações $\phi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_{\lambda=(\lambda_{i,j})}^2)$. Mostramos que os Referenciais de Frenet apesar de holomorfos, não são estáveis relativamente a um conjunto de métricas de tipo Borel, inclusive a métrica de Killing. Veremos antes alguns resultados de aplicações harmônicas; geometria complexa de $F(n)$; correspondência entre torneios e estrutura quase complexa numa variedade bandeira.

Abstract

In this work we study the stability conditions for Eells-Wood maps $\phi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_{\lambda=(\lambda_{i,j})}^2)$. We show that Eells-Wood maps are holomorphic, but are not stable relatively to a field of Borel type metric, include the killing metric. We will see at the beging some results of harmonic maps, complex geometry, correspondence between tournaments and quasi-complex structure in a flag manifold.

Índice

1	Aplicações Harmônicas	8
1.1	Aplicações Harmônicas	8
1.2	Variedades quase Kahler	12
1.3	Teorema de Lichnerowcz	14
2	Geometria Complexa de $F(n)$	19
2.1	Variedades Bandeiras Maximais	19
2.2	Métricas de Borel	21
2.3	Variedades Bandeiras Generalizadas	26
2.4	Estruturas- f em Variedades Bandeira	28
2.5	Estrutura- f Horizontal em Variedade Bandeira	29
3	Torneios e Referencial de Frenet	35
3.1	Torneios e Aplicações Harmônicas	35
3.2	Referenciais de Frenet	44
4	Estabilidade em Variedade Bandeira	52
4.1	Equações de Aplicações Harmônicas	52
4.2	Segunda Variação da Energia para aplicações em $F(n)$	56

4.3	Estabilidade em $F(n)$	59
-----	----------------------------------	----

Introdução

Seja $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ uma aplicação suave entre duas Variedades Riemannianas. A energia de ϕ é dada por $E(\phi) = \int_M (1/2) |d\phi|^2 v_g$. Temos que ϕ é harmônica se e somente se ϕ é um ponto crítico da energia.

Neste trabalho estudamos alguns aspectos das aplicações harmônicas entre variedades bandeira $F(n) = \{(L_1, \dots, L_n), L_i \perp L_j \forall i \neq j, \text{ e } \oplus L_i = \mathbb{C}^n\}$.

Eells e Wood mostraram em [[5]] que podemos escrever $\phi : (h_0(z), \dots, h_n(z)) : M \rightarrow F(n)$, onde $h : M \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$. Estas aplicações são chamadas de Referenciais de Frenet.

Dada uma aplicação $\phi : (\pi_1, \dots, \pi_n) : (M, q) \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda=(\lambda_{ij})}^2)$, escrevemos a energia de ϕ como $E(\phi) := \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} |A_z^{ij}|^2 v_g$. Demonstramos então a:

(Segunda Variação da Energia) Seja $\phi = (\pi_1, \dots, \pi_n) : (M^2, q) \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda=(\lambda_{ij})})$ uma aplicação harmônica. Então:

$$\frac{d^2}{dt^2} E(\phi_t)|_{t=0} := I_{\Lambda}^{\phi}(q) = 4Re \int_M \langle q A_z^{\Lambda}, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g + 2Re \sum_{i,j} \lambda_{ij} \int_M \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g$$

Esta expressão nos permitiu mostrar os resultados que seguem sobre estabilidade de maneira simples.

Chamamos ϕ estável se $I_{\Lambda}^{\phi}(q) \geq 0$ para qualquer variação $q : M \rightarrow u(n)$.

Mostramos que os Referenciais de Frenet não são estáveis em relação a algumas métricas de tipo Borel, incluindo a métrica de Killing:

Teorema: Seja $\psi : (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow (F(n), J, ds_{\Lambda'=(\lambda'_{ij})}^2)$ uma aplicação de Eells Wood. Consideremos $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$ a seguinte perturbação da métrica de Kahler ($\Lambda = (\lambda_{ij})$):

$$\lambda'_{ij}(i < j) = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{se } j = i + 1 \\ \lambda_{ij} - \epsilon_k, \epsilon_k \geq 0 & \text{para } j \neq i + 1, 1 \leq k \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{cases}$$

onde $\Lambda = (\lambda_{ij})$ é métrica de Kahler. Então ψ não é estável.

Corolário: Seja $\psi : (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow (F(n), J, \text{métrica de Killing})$ uma aplicação de Eells-Wood. Então ψ não é estável.

No capítulo 1 vemos alguns resultados preliminares sobre aplicações harmônicas tendo como base a monografia feita por Eells e Lemaire [4]. No capítulo 2 estudamos a geometria complexa de uma variedade bandeira. No capítulo 3 demonstramos uma importante correspondência 1:1 entre torneios e estruturas quase complexas em variedades bandeiras, feita pela primeira vez por Burstall e Salamon em [3]. Ainda no capítulo 3 estudamos os Referenciais de Frenet com base no trabalho de Eells-Wood [5]. Terminamos nosso trabalho com o estudo da estabilidade de aplicações harmônicas entre variedades bandeira, com base no trabalho do orientador Negreiros [15].

Capítulo 1

Aplicações Harmônicas

1.1 Aplicações Harmônicas

Sejam (M, g) e (N, h) duas variedades Riemannianas compactas, conexas, orientáveis e sem bordo, m e n suas respectivas dimensões. Seja $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ uma aplicação suave. Denotaremos por $|d\phi|$ sua norma em um ponto x de M , induzida pelas métricas g e h , isto é, a norma Hilbert Schimdt da aplicação linear $d\phi(x)$.

Se (x^i) e (u^α) são coordenadas locais numa vizinhança de x e $\phi(x)$ respectivamente temos:

$$|d\phi|^2 = g^{ij} h_{\alpha\beta}(\phi) \phi_i^\alpha \phi_j^\beta$$

onde $(\phi_i^\alpha) = (\partial\phi^\alpha/\partial x^i)$.

Observemos que $|d\phi|^2$ pode ser visto como o traço de ϕ^*h calculado com respeito a g :

$$|d\phi| = \langle g, \phi^*h \rangle = \langle g, \phi^*h \rangle.$$

Definição . A densidade de energia de ϕ é a função $e(\phi) = 1/2|d\phi|^2$. A energia de ϕ é o número real $E(\phi) = \int_M e(\phi)v_g$.

Podemos notar que para qualquer aplicação temos $E(\phi) \geq 0$ e que $E(\phi) = 0 \iff \phi$ é constante.

Definição . : A aplicação $\phi : M \rightarrow N$ é dita harmônica \iff é um ponto crítico da energia, isto é, para todo $v \in C(\phi^{-1}TN)$ temos $D_v E(\phi) = 0$, onde $D_v E(\phi)$ é definido como segue: para um dado v , considere a família de aplicações ϕ_t tal que $\phi_0 = \phi$ e $\partial\phi_t/\partial t|_{t=0} = v$. Tomando $\phi_t(x) = \exp_{\phi(x)}tv$, teremos $D_v E(\phi) = dE(\phi_t)/dt|_{t=0}$.

Teorema 1.1.1. Uma aplicação $\phi : M \rightarrow N$ é harmônica \iff satisfaz a equação de Euler-Lagrange $\nabla d\phi = \tau(\phi) = 0$, onde $\nabla d\phi$ é chamada campo tensorial de ϕ .

Demonstração: Para qualquer família ϕ_t com $\phi_0 = \phi$ e $\partial\phi_t/\partial t|_{t=0}$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\phi_t)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \int_M e(\phi_t)v_g|_{t=0} \\ &= 1/2 \int_M \frac{\partial}{\partial t} \langle d\phi_t, d\phi_t \rangle v_g|_{t=0} \\ &= \int_M \langle \nabla_{\partial/\partial t} d\phi_t, d\phi_t \rangle v_g|_{t=0} \end{aligned}$$

onde $d\phi_t$ é a diferencial de $\Phi = \phi_t$ ao longo de M , t é fixo e $\nabla_{\partial/\partial t}$ é a derivada covariante em $T^*(M \times R) \otimes \Phi^{-1}TN$.

Para $X \in TM$, temos:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\partial/\partial t} d\phi_t)X &= \nabla_{\partial/\partial t}^{\Phi^{-1}TN} (d\phi_t \cdot X) - d\phi_t \cdot \nabla_{\partial/\partial t}^{T(M \times R)} X \\
&= \nabla_{\partial/\partial t}^{\Phi^{-1}TN} (d\Phi \cdot X) - 0 \\
&= \nabla_X^{\Phi^{-1}TN} (d\Phi \cdot \frac{\partial}{\partial t}) + d\Phi[\frac{\partial}{\partial t}, X] \\
&= \nabla_X^{\Phi^{-1}TN} (\frac{\partial \Phi}{\partial t} + 0).
\end{aligned}$$

Temos assim:

$$\begin{aligned}
\frac{dE(\phi_t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \int_M \langle \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}, d\phi_t \rangle v_g \Big|_{t=0} \\
&= \int_M \langle dv, d\phi_t \rangle v_g \\
&= \int_M \langle v, d^* d\phi \rangle v_g \\
&= - \int_M \langle v, \tau_\phi \rangle v_g
\end{aligned}$$

Se ϕ é harmônica então $\phi = 0$ para qualquer X e $\tau_\phi = 0$.

Exemplo 1.1.1. A aplicação identidade $I : (M, g) \rightarrow (M, g)$ é trivialmente harmônica.

Exemplo 1.1.2. Se $N=R$, a aplicação harmônica $f : (M, g) \rightarrow R$ é uma função harmônica.

Exemplo 1.1.3. Se M é o círculo S^1 , a aplicação $\phi : S^1 \rightarrow (N, h)$ é harmônica $\iff \phi$ é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco. De fato, a equação $\tau(\phi) = 0$ reduz-se a $\nabla_{\phi'} \phi' = 0$.

Definição . : Para uma aplicação $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ a forma quadrática $\nabla d\phi$ é chamada segunda forma fundamental da aplicação ϕ .

Proposição 1.1.2. Para $X, Y \in C(TM)$ temos:

$$\nabla d\phi(X, Y) = \nabla_X^{\phi^{-1}TN} d\phi \cdot Y - d\phi(\nabla_X^M Y)$$

Basta observar que $\nabla d\phi(X, Y) = (\nabla_X d\phi)Y$.

Corolário 1.1.2.1. $\nabla_X(d\phi)$ é simétrico, i.e., para todo $X, Y \in C(TM)$ temos $\nabla d\phi(X, Y) = \nabla d\phi(Y, X)$.

Demonstração: Como ∇^M e ∇^N tem torsão nulas, temos:

$$\begin{aligned} \nabla d\phi(X, Y) - \nabla d\phi(Y, X) &= \nabla_X^{\phi^{-1}TN}(d\phi \cdot Y) - \nabla_Y^{\phi^{-1}TN}(d\phi \cdot X) - d\phi(\nabla_X^M Y - \nabla_Y^M X) \\ &= d\phi \cdot [X, Y] - d\phi \cdot [X, Y] = 0 \end{aligned}$$

Isto mostra em particular que $\nabla d\phi$ é de fato uma forma quadrática em cada ponto $x \in M$, visto que para $X, Y \in C(TM)$ e $f \in C(M)$, temos $\nabla d\phi(fX, Y) = (\nabla_{fX} d\phi)Y = f\nabla d\phi(X, Y)$ e $\nabla d\phi(X, fY) = (\nabla_{fY} d\phi)X = f\nabla d\phi(X, Y)$.

Corolário 1.1.2.2. Para qualquer $\phi \in C(M, N)$, a 1-forma $d\phi \in A^1(\phi^{-1}TN)$ é fechada.

Corolário 1.1.2.3. Uma aplicação $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ é harmônica se e somente se é 1 forma harmônica com valores em $\phi^{-1}TN$.

Definição . A curvatura média da imersão é o traço da segunda forma fundamental dividida por $m = \dim M$.

Temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.3. Uma imersão Riemanniana é harmônica se e somente se é minimal.

Considere a curvatura média de ϕ , ou seja, $(1/m)\text{trace}\nabla d\phi = (1/m)\tau(\phi)$. Esta é uma seção de $\phi^{-1}TR^n$ que é normal a imagem de N , logo é vista como uma seção do fibrado normal $V(N, M)$. Sua derivada covariante é definida como a projeção em $V(N, M)$ de sua derivada em $\phi^{-1}TR^n$, e a denotaremos por $\nabla^\perp((1/m)\text{tr}\nabla d\phi)$.

Definição . ϕ tem curvatura média constante se $\nabla^\perp((1/m)\text{tr}\nabla d\phi) = 0$.

Esta condição é equivalente a $|((1/m)\text{tr}\nabla d\phi)|$ ser constante.

1.2 Variedades quase Kahler

Definição . M é chamada variedade quase complexa se é uma variedade real com um campo de endomorfismos J de TM tal que $J^2 = -I$.

Seja M uma variedade quase complexa. M tem dimensão par e suas duas seções tem dimensão $m = \dim_{\mathbb{R}}M/2 = \dim_{\mathbb{C}}M$. Denotaremos por $T^{\mathbb{C}}M$ o fibrado tangente complexificado cuja fibra em x é $T_xM \otimes \mathbb{C}$, e por $J^{\mathbb{C}}$ o respectivo operador complexificado definido por:

$$\begin{aligned} J_x^{\mathbb{C}}: T_x^{\mathbb{C}}M &\longrightarrow T_x^{\mathbb{C}}M \\ u + \sqrt{-1}v &\longrightarrow J_x u + \sqrt{-1}J_x v \end{aligned}$$

Como $J^2 = -I$ seus autovalores são $\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$. Denotaremos seus autoespaços associados por $T'M$ (fibrado tangente holomorfo) e $T''M$ (fibrado tangente anti-holomorfo). Logo $T^{\mathbb{C}}M = T'M \oplus T''M$. Observemos que $T''M = \overline{T'M}$ (complexo conjugado). Esta decomposição induz um dual $T^{*\mathbb{C}}M = T^{*'}M \oplus T^{*''}M$, com $T_x^{*'}M = (T_x'M)^*$ e $T_x^{*''}M = (T_x''M)^*$.

Suponhamos M com uma métrica quase Hermitiana, isto é, uma métrica Riemanniana tal que $g(JX, JY) = g(X, Y)$. Desta forma g induz uma forma Hermitiana em T^*M , associando a $X, Y \in T'_x$ o número $g(X, \bar{Y})$. Se $(\theta^j)_{j=1, \dots, m}$ é um referencial local em T^*M , escrevemos $g = g_{j\bar{k}} \theta^j \bar{\theta}^k$.

Definição . : A forma de Kahler ω em TM é $\omega(X, Y) = g(X, JY)$. A forma de Kahler é uma 2-forma com componentes $\omega_{j\bar{k}} = -ig_{j\bar{k}}$.

Definição . : Uma variedade quase Hermitiana (M, J, g) é chamada quase Kahler se $d\omega = 0$.

Seja $\phi : (M, J, g) \rightarrow (N, J, h)$ uma aplicação suave entre variedades quase Hermitianas. Sua diferencial complexificada $d^C \phi : T^C M \rightarrow T^C N$ determina varias diferenciais parciais por composição com as inclusões em T^*M e $T^{**}M$ em $T^C M$ e as projeções de $T^C N$ sobre T^*N e $T^{**}N$. Definimos assim:

$$\begin{aligned} \partial\phi & : T^*M \rightarrow T^*N \\ \bar{\partial}\phi & : T^{**}M \rightarrow T^*N \\ \partial\bar{\phi} & : T^*M \rightarrow T^{**}N \\ \bar{\partial}\bar{\phi} & : T^{**}M \rightarrow T^{**}N \end{aligned}$$

Podemos notar que $\bar{\partial}\bar{\phi} = \overline{\partial\phi}$ e $\partial\bar{\phi} = \overline{\bar{\partial}\phi}$. Temos por construção

$$d^C \phi|_{T^*M} = \partial\phi + \partial\bar{\phi} \text{ e } d^C \phi|_{T^{**}M} = \bar{\partial}\phi + \bar{\partial}\bar{\phi}$$

Definição . : Uma aplicação ϕ é chamada holomorfa (anti-holomorfa) $\iff J \circ d\phi = d\phi \circ J$ ($J \circ d\phi = -d\phi \circ J$). ϕ é \pm holomorfa se ϕ é holomorfa ou anti-holomorfa.

Nota-se que ϕ é holomorfa se e somente se $\bar{\partial}\phi = 0$ e ϕ é anti-holomorfa se e somente se $\partial\phi = 0$.

Usando as estruturas quase Hermitianas de M e N definiremos agora as densidades parciais de energia de ϕ como:

$$\begin{aligned} e'(\phi) &= |\partial\phi|^2 = g^{\bar{i}j} h_{\alpha\bar{\beta}} \phi_i^\alpha \bar{\phi}_j^\beta \\ e''(\phi) &= |\bar{\partial}\phi|^2 = g^{\bar{i}j} h_{\alpha\bar{\beta}} \phi_i^\alpha \bar{\phi}_j^\beta \end{aligned}$$

onde ϕ_i^α ($\bar{\phi}_j^\beta$) é a matriz de representação de $\partial\phi$ ($\bar{\partial}$) no referencial local escolhido.

Temos $e(\phi) = e'(\phi) + e''(\phi)$.

Seja M compacta e definamos:

$$\begin{aligned} E'(\phi) &= \int_M e'(\phi) \nu_g \\ E''(\phi) &= \int_M e''(\phi) \nu_g \\ E(\phi) &= E'(\phi) + E''(\phi) \end{aligned}$$

Observe que ϕ é holomorfa se e somente se $E'(\phi) = 0$ e anti-holomorfa se e somente se $E''(\phi) = 0$.

1.3 Teorema de Lichnerowicz

Demonstraremos nesta seção o Teorema de Lichnerowicz que nos será muito útil nos próximos capítulos.

Lema 1.3.1. *Se ω^M e ω^N representam as formas de Kahler em M e N , então:*

$$k(\phi) = e'(\phi) - e''(\phi) = \langle \omega^M, \phi^* \omega^N \rangle .$$

Demonstração: Com o referencial acima temos

$$\langle \omega^M, \phi^* \omega^N \rangle = (\omega^M)^{j\bar{k}} \phi_j^\alpha \phi_{\bar{k}}^{\bar{\beta}} \omega_{\alpha\bar{\beta}}^N - (\omega^M)^{j\bar{k}} \phi_{\bar{k}}^\alpha \phi_j^{\bar{\beta}} \omega_{\alpha\bar{\beta}}^N$$

Como $(\omega^M)^{j\bar{k}} = ig^{j\bar{k}}$ e $\omega^N = -ih_{\alpha\bar{\beta}}$ temos:

$$\langle \omega^M, \phi^* \omega^N \rangle = g^{j\bar{k}} \phi_j^\alpha \phi_{\bar{k}}^{\bar{\beta}} h_{\alpha\bar{\beta}} - g^{j\bar{k}} \phi_{\bar{k}}^\alpha \phi_j^{\bar{\beta}} h_{\alpha\bar{\beta}} = e'(\phi) - e''(\phi).$$

Lema 1.3.2. (*Lema da Homotopia*) Seja $\phi_t : M \rightarrow N$ uma família de aplicações suaves entre variedades diferenciáveis M e N , parametrizada por t , e seja ω uma 2-forma fechada em N . Então:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^* \omega) = d(\phi_t^* i(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}) \omega)$$

onde $i(X)\omega$ denota o produto interior do vetor X com a 2-forma ω .

Demonstração: Como $d\omega=0$, em M temos $d(\phi_t^* \omega) = 0$ para todo t . Considere a aplicação suave $\Phi : R \otimes M \rightarrow N$, definida por $\Phi(t, x) = \phi_t(x)$. Seja D a diferencial exterior em $R \otimes N$. Temos $D(\Phi^* \omega) = 0$.

Afirmamos que $\Phi^* \omega = \phi_t^* \omega + Dt \wedge \phi_t^* (i(\partial \phi_t / \partial t) \omega)$.

De fato, para quaisquer $X, Y \in C(TM)$ temos:

$$\Phi^* \omega(X, Y) = \omega(d\Phi \cdot X, d\Phi \cdot Y) = \omega(d\phi_t \cdot X, d\phi_t \cdot Y) = \phi_t^* \omega(X, Y)$$

e $Dt(X) = 0$.

Para $X \in C(TM)$ temos:

$$\begin{aligned}
\Phi^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, X\right) &= \omega\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}, d\Phi \cdot X\right) \\
&= \left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega\right)(d\phi_t \cdot X) \\
&= \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega\right)X \\
&= Dt \wedge \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}, X\right)
\end{aligned}$$

e $\phi_t^*\omega(\partial/\partial t, X) = 0$.

Temos assim:

$$\begin{aligned}
0 &= D(\Phi^*\omega) \\
&= D(\phi_t^*) + D(Dt \wedge \phi_t^*(i(\frac{\partial\phi_t}{\partial t})\omega)) \\
&= Dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\omega) + d(\phi_t^*\omega) - Dt \wedge D(\phi_t^*(i(\frac{\partial\phi_t}{\partial t})\omega)) \\
&= Dt \wedge \left(\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\omega) - d(\phi_t^*(i(\frac{\partial\phi_t}{\partial t})\omega))\right)
\end{aligned}$$

Teorema 1.3.1. *(Teorema de Lichnerowicz) Se M e N são variedades quase Kahler, então $K(\phi) = E'(\phi) - E''(\phi)$ é um invariante homotópico, i.e., é constante em componentes conexas de $C(M, N)$.*

Demonstração: Seja $*$ o operador Hodge. Temos:

$$k(\phi)v_g = \langle \omega^M, \phi^* \omega^N \rangle v_g = \omega^M \wedge * \phi^* \omega^N = \phi^* \omega^N \wedge * \omega^M.$$

Seja ϕ_0 e ϕ_1 duas aplicações de M em N homotópicas através da família $\phi_t, t \in [0, 1]$. Como ω é fechado temos pelo Lema da Homotopia:

$$\phi_1^* \omega^N - \phi_0^* \omega^N = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^* \omega^N) dt = d \int_0^1 \phi_t^* i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega \cdot dt \equiv d\alpha.$$

onde α é uma forma em M . Assim

$$(k(\phi_1) - k(\phi_0))v_g = (\phi_1^* \omega^N - \phi_0^* \omega^N) \wedge * \omega^M = d\alpha \wedge * \omega^M = d(\alpha \wedge * \omega^M)$$

uma vez que $d(*\omega^M) = d(\omega^{m-1}/(m-1)!) = 0$, sendo m a dimensão complexa de M .

Portanto:

$$K(\phi_1) - K(\phi_0) = \int_M d(\alpha \wedge * \omega^M) = 0.$$

Para uma variação ϕ_t temos $E'(\phi_t) - E''(\phi_t) = K(\phi_t)$ uma constante donde:

$$\frac{\partial E'(\phi_t)}{\partial t} = \frac{\partial E''(\phi_t)}{\partial t} = 1/2 \frac{\partial E(\phi_t)}{\partial t}$$

Corolário 1.3.1.1. *Os pontos críticos de E' , E'' e E coincidem. Portanto, numa dada classe de homotopia os mínimos de E' , E'' e E coincidem.*

Demonstração: Temos ϕ_0 e ϕ na mesma classe. Assim

$$E'(\phi) - E'(\phi_0) = E''(\phi) - E''(\phi_0)$$

portanto se $E'(\phi_0) \leq E'(\phi)$ para todo ϕ , $E''(\phi_0) \leq E''(\phi)$.

Similarmente, como $E(\phi) = K(\phi) + 2E''(\phi)$, temos $E(\phi) - 2E''(\phi) = E(\phi_0) - 2E''(\phi_0)$, ou $E(\phi) - E(\phi_0) = 2E''(\phi) - 2E''(\phi_0)$, portanto o mínimo coincide.

Corolário 1.3.1.2. *Se ϕ é uma aplicação \pm holomorfa entre variedades Kahler, então ϕ é harmônica e um mínimo absoluto de E em sua classe.*

De fato, uma aplicação holomorfa satisfaz $E''(\phi) = 0$ e portanto é um mínimo absoluto de E'' em sua classe.

Capítulo 2

Geometria Complexa de $F(n)$

2.1 Variedades Bandeiras Maximais

Definição . (Geométrica) Uma variedade bandeira maximal $F(n)$ consiste no espaço formado por n-uplas (L_1, \dots, L_n) tais que L_i é um subspaço de \mathbb{C}^n , $L_i \perp L_j, \forall i \neq j$ e $\bigoplus_{i=1}^n L_i = \mathbb{C}^n$.

Via a ação natural de $U(n)$ em $F(n)$ obtemos:

Definição . (Algébrica) $F(n) = \frac{U(n)}{T}$ onde $U(n) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}); A\bar{A}^t = AA^* = I\}$, T é o toro maximal de $U(n)$, i.e., $T = U(1) \times \dots \times U(1)$.

Seja $p = T(F(n))_{(T)}$ o espaço tangente de $F(n)$ em (T) e

$$u(n) = \{X \in M(n \times n, \mathbb{C}); X + X^* = 0\} = p \oplus u(1) \oplus \dots \oplus u(1)$$

Exemplo 2.1.1. Seja $n=3$. Seja $X \in u(3)$

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ -x_{12} & \sqrt{-1}x_{22} & x_{23} \\ -x_{13} & -x_{23} & \sqrt{-1}x_{33} \end{pmatrix}$$

onde $x_{11}, x_{22}, x_{33} \in \mathbb{R}$. Temos

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{-1}x_{11} & 0 & 0 \\ -\bar{0} & \sqrt{-1}x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-1}x_{33} \end{pmatrix} = p \oplus (u(1) \oplus u(1) \oplus u(1))$$

Logo

$$p = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -\bar{a}_{12} & 0 & a_{23} \\ -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{C}, 1 \leq i \neq j \leq 3 \right\}$$

Usando a ação natural de $U(n)$ em $F(n)$ Borel-Hirzebruch mostraram que existem $2^{\binom{n}{2}}$ estruturas quase complexas invariantes.

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base canônica de \mathbb{C}^n e $E_i =$ subspaço de \mathbb{C}^n gerado por e_i . Temos:

Lema 2.1.1. $u(n)^{\mathbb{C}} \cong gl(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}_n$.

Demonstração: Obviamente $u(n)^{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}_n$. Reciprocamente, dado $X \in \mathbb{C}_n$ existem $A, B \in u(n)$ tal que $X = A + \sqrt{-1}B$. De fato, basta tomar

$$A = \frac{X - X^*}{2} \text{ e } B = \frac{X + X^*}{2\sqrt{-1}}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
u(n)^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}_n &= \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) \cong \bar{\mathbb{C}}^n \otimes \mathbb{C}^n \\
&\cong (\bar{E}_1 \oplus \dots \oplus \bar{E}_n) \otimes (E_1 \oplus \dots \oplus E_n) \\
&\cong (\bar{E}_1 \otimes E_1 \oplus \dots \oplus \bar{E}_n \otimes E_n) \oplus \left(\bigoplus_{i,j} \bar{E}_i E_j \oplus \bar{E}_j E_i \right)
\end{aligned}$$

onde $\bar{E}_i E_j$ significa $\bar{E}_i \otimes E_j$.

Portanto se $E_j = ae_j, a \in \mathbb{C}$ teremos $\bar{E}_j = \bar{a}e_j, a \in \mathbb{C}$.

Seja $D_{ij}^{\mathbb{C}} = \bar{E}_i E_j \oplus \bar{E}_j E_i$. Consideremos $D_{ij} = D_{ij}^{\mathbb{C}} \cap u(n)$. Temos:

$$p^{1,0} \cong \bigoplus_{i < j} \bar{E}_i E_j \text{ e } p^{0,1} \cong \bigoplus_{i < j} \bar{E}_j E_i.$$

Dado $q : M^2 \rightarrow u(n)$ definimos naturalmente $\frac{\partial q}{\partial z} \in T(M)^* \otimes p^{1,0}$ e $\frac{\partial q}{\partial \bar{z}} \in T(M)^* \otimes p^{0,1}$.

2.2 Métricas de Borel

Estudemos agora as métricas $U(n)$ invariantes em $F(n)$, chamadas métricas de Borel, muito importante para a teoria de aplicações harmônicas em variedades bandeira.

Introduzamos o método do referencial móvel.

Um referencial consiste de um conjunto ordenado de n vetores linearmente independentes (Z_1, \dots, Z_n) tais que

$$Z_1 \wedge \dots \wedge Z_n \neq 0$$

Um referencial é chamado unitário se temos também:

$$\langle Z_i, Z_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.2.2.1)$$

Temos

$$dZ_i = \sum_j \omega_{i\bar{j}} Z_j$$

onde as $\omega_{i\bar{j}}$ são 1-formas, chamadas, formas de Maurer-Cartan.

Proposição 2.2.1. *As formas de Maurer-Cartan são anti-Hermitianas, isto é, satisfazem*

$$\omega_{i\bar{j}} + \omega_{\bar{j}i} = 0$$

Demonstração:

Derivando (2.2.2.1):

$$\langle dZ_i, Z_j \rangle + \langle Z_i, dZ_j \rangle = 0$$

Assim temos:

$$\langle \sum \omega_{i\bar{k}} Z_k, Z_j \rangle + \langle Z_i, \sum \omega_{j\bar{k}} Z_k \rangle = 0$$

Usando a linearidade do produto interno e (2.2.2.1):

$$\begin{aligned} \sum \omega_{i\bar{k}} \langle Z_k, Z_j \rangle + \sum \omega_{j\bar{k}} \langle Z_i, Z_k \rangle &= 0 \\ \omega_{i\bar{j}} + \omega_{\bar{j}i} &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente obtemos:

$$\omega_{i\bar{j}} + \omega_{\bar{j}i} = 0$$

Proposição 2.2.2. *As formas de Maurer-Cartan satisfazem a equação:*

$$d\omega_{i\bar{j}} = \sum_k \omega_{i\bar{k}} \wedge \omega_{k\bar{j}}$$

Demonstração:

Temos

$$dZ_i = \sum_j \omega_{i\bar{j}} Z_j$$

Tomando a derivada exterior obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_j d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \omega_{i\bar{j}} dZ_j &= 0 \\ \sum_j d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \sum_k \omega_{i\bar{k}} dZ_k &= 0 \\ \sum_j d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \sum_k \omega_{i\bar{k}} \left(\sum_j \omega_{k\bar{j}} Z_j \right) &= 0 \\ \sum_j d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \sum_j \left(\sum_k \omega_{i\bar{k}} \wedge \omega_{k\bar{j}} \right) Z_j &= 0 \\ \sum_j \left(d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \sum_k \omega_{i\bar{k}} \wedge \omega_{k\bar{j}} \right) Z_j &= 0 \end{aligned}$$

Todas as métricas invariantes á esquerda sobre $F(n)$ tem a forma

$$ds_{\Lambda=\lambda_{ij}} = \sum \lambda_{ij} \omega_{i\bar{j}} \otimes \omega_{\bar{i}j}$$

onde $\Lambda = (\lambda_{ij})$ é uma matriz real simétrica satisfazendo:

$$\begin{aligned}\lambda_{ij} &> 0 \text{ se } i \neq j \\ \lambda_{ij} &= 0 \text{ se } i = j\end{aligned}$$

Estas métricas são chamadas métricas tipo Borel.

Seja $A, B \in F(n)_T$. Temos $ds_{\Lambda=(\lambda_{ij})}^2(A, B) := \sum_{(i,j)} \lambda_{ij} tr(E_i A E_j B^*)$, onde $\lambda_{ij} - \lambda_{ji} > 0, \lambda_{ii} = 0, \forall i, j$. Se $\lambda_{ij} = 1, \forall i \neq j$ temos a métrica induzida em $F(n)$ pela forma de Killing de $U(n)$. A métrica de Killing em $U(n)$ é dada por:

$$\langle A, B \rangle = tr(AB^*), A, B \in u(n) = U(n)_I.$$

Borel em [2] descreveu o conjunto de métricas de Kahler invariantes a menos de permutação dada pela seguinte matriz simétrica:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_2 & \cdots & \cdots & \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \\ & 0 & \lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_3 & \cdots & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \lambda_{n-1} \\ & & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos $(F(n), J, ds_{\Lambda})$. Vale lembrar que a forma de Kahler em $F(n)$ é dada por:

$$\Omega(A, B) = \langle a, JB \rangle_{ds_{\Lambda}^2}$$

onde $A, B \in p = T(F(n))_T - F(n)_{(T)}$.

Definição . Uma estrutura quase complexa invariante J é dita integravel se $(F(n), J)$ é uma variedade complexa, ou seja, admite sistemas de coordenadas locais complexas com mudanças de coordenadas holomorfas.

Teorema 2.2.3. *Newlander-Niremberg:* Uma estrutura quase complexa J é integravel se e somente J satisfaz as equações de integrabilidade de Newlander-Niremberg:

$$[JA, JB] - [A, B] + J[A, B] + J[JA, B] = 0 \forall A, B \in p.$$

Demonstração: Ver [7]

Exemplo 2.2.1. : Notemos que as duas estruturas quase complexas invariantes de $G_k(\mathbb{C}^n)$ são integráveis.

$$J_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 & A \\ -\bar{A}^t & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1}A \\ \sqrt{-1}\bar{A}^t & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$J_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 & A \\ -\bar{A}^t & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{-1}A \\ -\sqrt{-1}\bar{A}^t & 0 \end{bmatrix}$$

Observação 1. Temos que a Variedade de Grassman

$$G_k(\mathbb{C}^n) \cong \left(\frac{U(n) \times U(n-k)}{U(k)}, J_1, \text{métrica de Killing} \right)$$

é também chamada variedade de Killing e foi descoberta por Fubini-Study.

Temos que uma variedade $(F(n), J, ds_\Lambda)$ é quase Kahler se $D\Omega = 0$.

Definição . Se J for integrável então $(F(n), J, ds_\Lambda)$ é dita uma variedade de Kahler. Se $d\Omega^{1,2} = 0$ $(F(n), J, ds_\Lambda)$ é dita (1,2)-simplética.

Podemos enunciar assim o Teorema de Lichnerowicz:

Teorema 2.2.4. [10] *Seja $\phi : (M^2, g) \rightarrow (F(n), J, ds_\Lambda)$ uma aplicação holomorfa e ds_Λ^2 (1,2)-simplética. Então ϕ é harmonica.*

Teorema 2.2.5. [2]: *Existem infinitos Λ tal que $(F(n), J, ds_\Lambda)$ é uma variedade de Kahler.*

No capítulo 3 veremos que $(F(n), J, ds_\Lambda)$ é uma variedade quase-kahler se e somente se é uma variedade kahler.

2.3 Variedades Bandeiras Generalizadas

Definição . : Chamamos variedade bandeira complexa a

$$F(r_1, \dots, r_n; N) = \frac{U(N)}{U(r_1) \times \dots \times U(r_n)}$$

onde $r_1 + \dots + r_n = N$.

$F(r_1, \dots, r_n; N)$ é um espaço homogêneo completamente redutível:

$$u(N) = [u(r_1) + \dots + u(r_n)] \oplus [\oplus_{i < j} m_{ij}]$$

onde

$$m_{ij} = \{A = (A_{kl} \in u(N); t.q. A_{kl} = 0 \text{ se } (k, l) \neq (i, j)e(j, i))\}$$

sendo $A_{kl} \in gl(r_k \times r_l; \mathbb{C})$ sua representação istrópica.

..... Consideremos sua versão complexificada:

$$M_{ij}^{\mathbb{C}} = \{A = (A_{kl} \in gl(N; \mathbb{C}) t.q. A_{kl} = 0 \text{ se } (k, l) \neq (i, j)e(j, i))\} = E_{ij} \oplus E_{ji}$$

sendo $E_{ij} := A = (A_{kl} \in u(N)/A_{kl} = 0 \text{ se } (k, l) \neq (i, j)U(r_1) \times \dots \times U(r_n)$
invariante e irredutível. Para $A = (A_{kl}) \in E_{ij}$ qualquer temos:

$$A = (A_{kl}^1) + \sqrt{-1}(A_{kl}^2) \text{ onde}$$

$$A_{kl}^1 = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{2} & (k, l) = (i, j) \\ -\frac{A_{ij}^t}{2} & (k, l) = (j, i) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e

$$A_{kl}^2 = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{2\sqrt{-1}} & (k, l) = (i, j) \\ -\frac{A_{ij}^t}{2\sqrt{-1}} & (k, l) = (j, i) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim é fácil notar que:

$$\bar{A} = (A_{kl}^1) - \sqrt{-1}(A_{kl}^2) \in E_{ji}$$

Similarmente temos:

$$\bar{E}_{ij} = E_{ji}[\oplus_{i,j} m_{ij}]^{\mathbb{C}} = \oplus_{i \neq j} E_{ij}$$

2.4 Estruturas- f em Variedades Bandeira

Definição . : Uma estrutura- f em $F = F(r_1, \dots, r_n; N)$ é uma seção \mathcal{F} de $End(TF((r_1, \dots, r_n; N)))$ tal que $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$.

Uma estrutura- f $U(N)$ invariante em $F(r_1, \dots, r_n; N)$ pode ser identificada com um H endomorfismo equivariante \mathcal{F} de $\bigoplus_{i < j} E_{ij}$ tal que $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$, onde $H = U(r_1) \times \dots \times U(r_n)$. Usando o que [[6]] chama de Lema de Schur's, todas $U(N)$ estruturas- f invariantes podem ser construídas como segue:

Seja $\epsilon = (\epsilon_{ij})$ uma matriz anti-simétrica $n \times n$ tomando valores no conjunto $\{1, 0, -1\}$. Defina:

$$\begin{aligned} \sqrt{-1} & \text{ autoespaço de } F = \bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} E_{ij} \\ -\sqrt{-1} & \text{ autoespaço de } F = \bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} \bar{E}_{ij} = \bigoplus_{\epsilon_{ij}=-1} E_{ij} \\ 0 & \text{ autoespaço de } F = \bigoplus_{\epsilon_{ij}=0} E_{ij} \end{aligned}$$

Podemos definir assim um H endomorfismo equivariante \mathcal{F} de $\bigoplus_{i \neq j} E_{ij}$ que pode ser visto como uma extensão \mathbb{C} -linear de um endomorfismo equivariante H de $\bigoplus_{i < j} m_{ij}$ pois $\bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} \bar{E}_{ij}$ e $\bigoplus_{\epsilon_{ij}=-1} \bar{E}_{ij}$ são conjugados e

$$[\bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} \bar{E}_{ij}] \cap \bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} \bar{E}_{ij} = \{0\}$$

Definição . A dimensão complexa do autoespaço $\sqrt{-1}$ de \mathcal{F} é o posto de F .

Suponha que a estrutura- F \mathcal{F} é definida por $\epsilon(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}_{ij})$ Então:

$$rank \mathcal{F} = dim_{\mathbb{C}}[\sqrt{-1} \text{ autoespaço de } \mathcal{F}] = dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{\mathcal{F}_{ij}=1} E_{ij} = \sum_{\mathcal{F}_{ij}=1} dim_{\mathbb{C}} E_{ij} = \sum_{\mathcal{F}_{ij}=1} r_i r_j.$$

Definição . Uma estrutura- f \mathcal{F} numa variedade bandeira com a propriedade $[\mathcal{F}_+, \mathcal{F}_-] \subset h$ é chamada uma estrutura- f horizontal, onde:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_+ &= \sqrt{-1} \text{ auto-espaço} \\ \mathcal{F}_- &= -\sqrt{-1} \text{ auto-espaço} \\ h &= u(r_1) + \dots + u(r_n)\end{aligned}$$

Dado $A \in E_{ij}$ podemos escrever:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = (0, \dots, 0, A^i, 0, \dots, 0)$$

onde $A_j = (0, \dots, 0, A_{ij}, 0, \dots, 0)$ e

$$A^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{ij} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Similarmente para $B \in E_{kl}$.

Logo

$$[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = (0, \dots, 0, B^k, 0, \dots, 0)$$

$$- \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = (0, \dots, 0, A^i, 0, \dots, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} A_j B^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_l A^i \end{pmatrix}$$

Assim temos:

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \begin{cases} 0 & \text{se } i, j, k, l \text{ são distintos ou } j \neq l \\ E_{il} & \text{se } j=k, i \neq l \\ E_{ii} - E_{jj} & \text{se } j=k, i=l \end{cases}$$

O Teorema a seguir caracteriza as estruturas- f horizontais numa variedade bandeira complexa em termos das ϵ -matrizes.

Teorema 2.5.1. *Seja \mathcal{F} uma estrutura- f invariante em F . Então \mathcal{F} é horizontal se e somente se existe uma n permutação σ tal que: i) σ e σ^2 não tem pontos fixos; ii) $(i, j) | \mathcal{F}_{ij} = 1 \subset (k, \sigma(k)) / k = 1, 2, \dots, n$*

Demonstração: Uma condição equivalente de horizontabilidade é $[\mathcal{F}_+, \bar{\mathcal{F}}_+] \subset h^{\mathbb{C}}$ [[16]]. Note que $F_+ = \sqrt{-1}$ autoespaço de $\mathcal{F} = \bigoplus_{\mathcal{F}_{ij}=1} E_{ij}$. Portanto

$[\mathcal{F}_+, \bar{\mathcal{F}}_+] \subset h^{\mathbb{C}}$ se e somente se $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{kl} = 1, (i, j) \neq (k, l)$ implica que $i \neq k$ e $j \neq l$. Da anti-simetria de $\epsilon(\mathcal{F})$ segue que \mathcal{F} é horizontal se e somente se existe uma permutação de ordem n σ tal que i) e ii) são válidas.

Temos então:

Proposição 2.5.2. *Seja \mathcal{F} em $F(r_1, \dots, r_n; N)$ uma variedade bandeira complexa com altura ≤ 1 e J uma estrutura quase complexa em \mathcal{F} . Então J é horizontal se e somente se $n=3$ e J é não integrável.*

Seja M uma superfície riemanniana com coordenada complexa local z e:

$$\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_n; N)$$

uma aplicação numa variedade bandeira.

Definição . Seja π_i a projeção ortogonal sobre E_i . Chamamos de segunda forma fundamental de ϕ a:

$$A'_{ij} = \pi_j \circ \frac{\partial}{\partial z} \circ \pi_i \quad i \neq j$$

Definição . Uma aplicação $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_n; N)$ é dita subordinada a uma matriz- ϵ se $A'_{ij} = 0$ quando $\epsilon_{ij} \neq 1, i \neq j$. Temos $\epsilon_{ij} \in [-1, 0, 1] \forall i, j$.

Proposição 2.5.3. *Uma aplicação $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_n; N)$ é f -holomorfa relativa a uma estrutura- f \mathcal{F} invariante sobre F se e somente se é subordinada a $\epsilon(\mathcal{F})$*

Prova: Uma aplicação $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_n; N)$ é f -holomorfa se e somente se

$$d\phi \circ F = F \circ d\phi \quad (2.5.2.1)$$

onde J é a estrutura complexa da superfície de Riemann. De [[16]] temos que (2.5) vale se e somente se $d\phi \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \in \sqrt{-1} - \text{auto-espaço de } \mathcal{F}$. Note que a forma de Maurer-Cartan dá um isomorfismo familiar

$$\phi^{-1}TF(r_1, \dots, r_n; N)^C = \oplus_{i \neq j} \bar{E}_i E_j \quad (2.5.2.2)$$

$$= \oplus_{i \neq j} \text{Hom}(E_i, E_j) \quad (2.5.2.3)$$

Portanto sob este isomorfismo a componente de $d\phi$ em $\text{Hom}(E_i, E_j)$ é A'_{ij} (ver [[10]]). Por conjugação temos que o subespaço E_{ij} corresponde a $\bar{E}_i E_j = \text{Hom}(E_i, E_j)$. Assim,

$$\sqrt{-1} \text{ autoespaço de } \mathcal{F} = \oplus_{\mathcal{F}_{ij}=1} \text{Hom}(E_i, E_j)$$

Segue que ϕ é f -holomorfa relativa a \mathcal{F} se e somente se $\mathcal{F}_{ij} \neq 1$, $i \neq j$ implica que $A'_{ij} = 0$.

Definição . Uma aplicação $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_n; N)$ é chamada equiharmônica se é harmonica em relação a qualquer métrica de Borel.

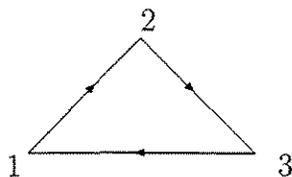
Corolário 2.5.3.1. *Suponha que $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_n; N)$ é subordinada a uma ϵ -matriz, i.e., associada a uma estrutura- f horizontal. Então $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ é uma aplicação equiharmônica e cada $\phi_j : M^2 \rightarrow G_{r_j, N}$ é harmônica para $j = 1, 2, \dots, n$.*

Capítulo 3

Torneios e Referencial de Frenet

3.1 Torneios e Aplicações Harmônicas

Definição . Um *torneio*, \mathcal{T} , é um conjunto T de jogadores com uma relação \rightarrow que associa a todo par um vencedor. Assim se $s, t \in T, s \neq t$ então ou $s \rightarrow t$ ou $t \rightarrow s$.



Se T tem n elementos escrevemos $|\mathcal{T}| = n$ e chamamos \mathcal{T} um n -torneio. \mathcal{T} pode ser representado por uma grafo em que T é o conjunto de vértices e quaisquer dois vértices $s, t \in T$ são ligados por uma aresta orientada $s \rightarrow t$.

Definição . Um homomorfismo $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ entre dois torneios é uma aplicação $\phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ que preserva as relações de dominação i.e.:

$$s \rightarrow t \Rightarrow \phi(s) = \phi(t) \text{ ou } \phi(s) \rightarrow \phi(t).$$

Se ϕ é bijetiva \mathcal{T} e \mathcal{T}' são ditos isomorfos.

Um n-torneio determina um vetor de resultado:

$$(v_1, \dots, v_n) : 0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq n - 1,$$

$$\sum_1^n v_i = \binom{n}{2}$$

cujas componentes são os números de jogos vencidos por cada jogador. Temos assim que torneios isomorfos têm identicos vetores de resultados.

Definição . Chamamos \mathcal{T}_n o n-torneio canônico se $i \rightarrow j$ se e somente se $i < j$.

Teorema 3.1.1 ([3]). *A menos de isomorfismo, \mathcal{T}_n é o único torneio canônico satisfazendo as seguintes condições*

1. a relação de domínio é transitiva, i.e., $i \rightarrow j$ e $j \rightarrow k \Rightarrow i \rightarrow k$,
2. não existem circuitos, i.e., caminhos fechados $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1$,
3. o vetor de resultado é $(0, 1, 2, \dots, n - 1)$.

Um torneio \mathcal{T} é dito ser irredutível se não existe um homomorfismo de \mathcal{T} em $\mathcal{T}_2 = (0, 1)$. Mais especificamente \mathcal{T} é simples se não existe homomorfismo de \mathcal{T} sobre qualquer torneio \mathcal{L} com $1 < |\mathcal{L}| < |\mathcal{T}|$.

Um torneio é chamado forte se todo par $i, j \in \mathcal{T}$ pode ser ligado por um caminho

$$i = i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_r = j.$$

Teorema 3.1.2 ([3]). *Um torneio \mathcal{T} é forte $\iff \mathcal{T}$ é irredutível.*

Definição . Dado $n \geq 3$ e um subconjunto $\sigma \subset T = 1, \dots, n$, o torneio Grassmanniano $\mathcal{T}(n, \sigma)$ é dado por:

$$i \rightarrow j \iff \begin{cases} i > j & i, j \in \sigma \text{ ou } i, j \in \sigma^c = T \setminus \sigma \\ i < j & i \in \sigma, j \in \sigma^c \text{ ou } i \in \sigma^c, j \in \sigma \end{cases}$$

Já podemos enunciar e demonstrar o teorema que "relaciona" as estruturas quase complexa invariante J de uma variedade bandeira $F(n)$ e torneios. Este resultado têm importantes aplicações na teoria de aplicações harmônicas.

Teorema 3.1.3 ([3]). *Existe uma correspondência 1:1 entre as estruturas quase complexa invariante J em $F(n)$ e n -torneios $\mathcal{T}(J)$ tal que:*

1. $\mathcal{T}(J)$ é isomorfo ao torneio canônico se e somente se J é integrável.
2. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $\mathcal{T}(J)$ é forte
- (b) J é integrável

(c) Não existe uma projeção holomorfa homogênea de F sobre uma Grassmanniana complexa.

Demonstração:

Consideremos a aplicação $\Lambda^2 m \rightarrow u(N)$. Assim o colchete de Lie pode ser calculado com uma elementar teoria de representação. Como visto no capítulo 2:

$$[\bar{E}_i E_j, \bar{E}_k E_l] = \begin{cases} 0 & \text{se } i, j, k, l \text{ são todos distintos,} \\ \bar{E}_i E_k l & \text{se } j = k, i \neq l. \end{cases}$$

Portanto $m^{1,0}$ é fechada sob o colchete de Lie se e somente se $i \rightarrow j \rightarrow k \implies i \rightarrow k$. Segue do Teorema de Newlander-Nirenberg que J é integrável se e somente se $\mathcal{T}(J)$ é transitivo, i.e., isomorfo ao torneio canônico. Temos também que $\bar{E}_i E_j$ são gerados por colchetes de Lie de $m^{1,0}$ se e somente se é um caminho

$$i = i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_r = j$$

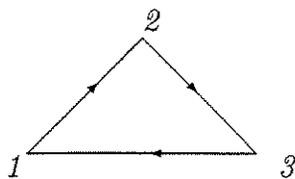
A Variedade Grassmanniana $G_r(\mathbb{C}^N)$ é um caso especial de uma variedade bandeira com $n = 2r = r_1$. Esta possui uma estrutura complexa canônica correspondente ao torneio canônico \mathcal{T}_2 . A projeção homogênea:

$$\pi : F = \frac{U(N)}{U(r_1) \times \dots \times U(r_n)} \rightarrow \frac{U(N)}{U(r) \times U(n-r)} = G_r(\mathbb{C}^N)$$

é determinada por um subconjunto $\sigma \subset 1, \dots, n$ com $r = \sum_{i \in \sigma} r_i$. Agora π aplica a bandeira (E_1, \dots, E_n) no r -dimensional subspaço $E = \bigoplus_{i \in \sigma} E_i$. A

diferencial π_* da identidade mergulha $\bar{E}_i E_j$ no $(1, 0)$ espaço $\bar{E} E^\perp \subset T_0^{\mathbb{C}} G_r(\mathbb{C}^N)$ se e somente se $i \in \sigma, j \in \sigma^c$. Temos que π é holomorfa se e somente se $\mathcal{T}(J)$ tem $i \rightarrow j$ quando $i \in \sigma, j \in \sigma^c$ no caso que existe um epimorfismo $\mathcal{T}(J) \rightarrow \mathcal{T}_2$.

Lema 3.1.1. *Um n -torneio é isomorfo ao torneio canônico se e somente se não tem 3-ciclo, i.e., seu grafo associado não contém figuras do tipo:*



Demonstração:

É suficiente mostrar que qualquer N -torneio \mathcal{T} com um circuito,

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_l \rightarrow i_1$$

tem um 3-ciclo. Para $l = 3$ é óbvio. Suponhamos então $l = r (> 3)$. Consideremos o seguinte $(r + 1)$ -ciclo

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_r \rightarrow i_{r+1} \rightarrow i_1$$

Assim ou

$$i_1 \rightarrow i_r \tag{3.1.3.1}$$

ou

$$i_r \rightarrow i_1 \tag{3.1.3.2}$$

Se vale (3.1.3.1) nós temos um 3-ciclo

$$i_1 \rightarrow i_r \rightarrow \dots \rightarrow i_{r+1} \rightarrow i_1$$

Se vale (3.1.3.2) nós temos o r-ciclo

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_r \rightarrow i_1$$

Por indução este inclui um 3-ciclo.

Seja M uma superfície de Riemann. Consideremos o fibrado vetorial trivial \mathbb{C}^N sobre M . Um subfibrado E de \mathbb{C}^N com fibra \mathbb{C}^r define uma aplicação $\phi_E : M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^N)$ numa variedade Grassmanniana da seguinte forma: $\phi_E(m)$ é igual a fibra E_m . Reciprocamente, uma aplicação em $G_r(\mathbb{C}^N)$ determina um subfibrado de \mathbb{C}^N de posto r . Seja $\pi, \pi^\perp = I - \pi$ a projeção ortogonal sobre E e seu complemento ortogonal E^\perp . Se z é uma coordenada complexa local em M , o operador

$$\partial''_E = \pi \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \pi$$

dá uma estrutura holomorfa E com seções holomorfas s caracterizadas pela equação $\partial''_E s = 0$. O pull-back de ϕ nos dá:

$$\phi_E^{-1}TG_r(\mathbb{C}^N)^{\mathbb{C}} \cong \bar{E}E^\perp \oplus EE^\perp$$

e sob este isomorfismo, a diferencial de ϕ_E é identificado com a segunda forma fundamental de E em \mathbb{C}^N , que é representado localmente pelo homomorfismo

$$A'_E = \pi^\perp \circ \frac{\partial}{\partial z} \circ \pi, \quad A''_E = \pi^\perp \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \pi$$

Definição . Um subfibrado E de \mathbb{C}^N é chamado harmônico se

$$A'_E \circ \partial''_E = \partial''_{E^\perp} \circ A'_E$$

para qualquer escolha da coordenada z .

Assim temos que E é harmônica se e somente se $A''_E \circ \partial'_E = \partial'_{E^\perp} \circ A'_E$ e como $A'_{E^\perp} = -(A''_E)^*$, se somente se E^\perp é harmônica. Portanto E é um fibrado harmônico se e somente se ϕ_E é uma aplicação harmônica entre variedade Grassmanniana com métrica Riemanniana simétrica.

Mais geralmente consideramos uma coleção $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ de subfibrados ortogonais de \mathbb{C}^N com fibras \mathbb{C}^{r_i} tal que $\sum_i^n r_i = N$. Portanto

$$\mathbb{C}^N = \bigoplus_{i=1}^n E_i$$

Definimos assim uma aplicação

$$\psi : M \rightarrow \frac{U(N)}{U(r_1) \times \dots \times U(r_n)}$$

numa variedade bandeira. Chamaremos a coleção de subfibrados E_i por bandeira móvel. Por analogia com o caso $n = 2$ temos

$$A'_{ij} = \pi_i \circ \frac{\partial}{\partial z} \circ \pi_j, \quad A''_{ij} = \pi_i \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \pi_j$$

onde π_i denota a projeção ortogonal sobre E_i . Para $i \neq j$ temos as segunda forma fundamental de E_i relacionadas por:

$$\langle A'_{ij}s, t \rangle + \langle s, A''_{ij}t \rangle = 0, \quad i \neq j$$

portanto $-A''_{ij} = (A'_{ij})^*$ é a adjunta de A'_{ij} . Assim A'_{ij} define um homomorfismo de E_j em E_i , $i \neq j$, ou, uma seção

$$dz \oplus A'_{ij} \in \Gamma(M, \kappa \otimes \text{Hom}(E_j, E_i)),$$

onde $\kappa = \Lambda^{1,0}M$ é seu fibrado canônico. Esta seção é holomorfa se e somente se

$$\partial''_i \circ A'_{ij} = A'_{ij} \circ \partial''_j,$$

onde $\partial''_i = A''_{ii}$.

Mo e Negreiros provaram em [11] o seguinte teorema:

Teorema 3.1.4. *Seja $\Omega(X, Y) = \sum \lambda_{ij} \omega_{i\bar{j}}(X) J \omega_{\bar{j}i}(Y)$. Temos*

$$\frac{1}{4} d\Omega = \sum_{i < j < k} C_{i,j,k} \Psi_{i,j,k}$$

onde

$$C_{i,j,k} = u_{ij} - u_{ik} + u_{jk}$$

$$\Psi_{i,j,k} = \text{Im}(\omega_{\bar{i}j} \wedge \omega_{\bar{i}k} \wedge \omega_{j\bar{k}})$$

Temos então o importante resultado:

Proposição 3.1.5. [12] *A métrica de Killing em $F(N)$ é (1,2)-simplética se e somente se $n \neq 3$.*

Idéia da Demonstração De 3.1.4 temos

$$(1/4)d\Omega = \sum_{i < j < k} C_{ijk} \Psi_{ijk}$$

Portanto, ds_{Λ}^2 é (1,2)-simplética se e somente se $d\Omega^{1,2} = 0$ se e somente se

$$C_{ijk} = 0 \text{ quando } \Psi_{ijk} \in \mathbf{C}^{1,2} \oplus \mathbf{C}^{2,1} \quad (3.1.3.3)$$

Mas $C_{ijk} = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ik} + \epsilon_{jk} \neq 0$. Portanto (3.1.3.3) é equivalente a $\Psi_{ijk} \in \mathbf{C}^{0,3} \oplus \mathbf{C}^{3,0}$ para qualquer $i < j < k$. Mas nós podemos provar que o número de 3 ciclos num torneio \mathcal{T}_j é igual a $\binom{n}{3}$. É impossível portanto, se $n > 3$, pois usando a desigualdade de Gaule [13] temos que o número de 3-ciclos em \mathcal{T}_j é menor ou igual a $(1/24)(n^2 - n)$ se n é ímpar e $(1/24)(n^3 - 4n)$ se n é par.

Teorema 3.1.6 ([9]). *A estrutura quase complexa J é integrável $\iff (F(N), J)$ é uma variedade complexa $\iff J$ satisfaz as equações de integrabilidade de*

Newlander-Niremberg \iff o torneio associado não contém 3-ciclos (ou circuito) $\iff \mathcal{T}_J$ é isomorfo a \mathcal{T}_n .

Teorema 3.1.7. *Considere $(F(n), J, ds_\lambda^2)$. Tal variedade é Kahler se e somente se é quase-kahler.*

Demonstração:

Se uma variedade é Kahler obviamente ela é quase-kahler. Mostremos a recíproca. Seja J uma estrutura quase integrável sobre $F(n)$. Temos que existe $\Psi_{i,j,k} = \text{Im}(\omega_{i\bar{j}} \wedge \omega_{\bar{i}k} \wedge \omega_{j\bar{k}}) \in \mathbb{C}^{(3,0)} \oplus \mathbb{C}^{(0,3)}$. Como J não é integrável, \mathcal{T}_J possui um 3-ciclo. Logo $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ik} = \epsilon_{jk}$. Assim

$$C_{i,j,k} = u_{i,j} - u_{i,k} + u_{j,k} = \lambda_{i,j} + \lambda_{i,k} + \lambda_{j,k} \neq 0$$

Logo $d\Omega \neq 0$ que contradiz a hipótese de $F(n)$ ser quase-kahler.

3.2 Referenciais de Frenet

Seja $F : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ uma aplicação de uma superfície de Riemann num n -espaço projetivo complexo. Dizemos que f é cheia se sua imagem não está em nenhum subespaço próprio de $\mathbb{C}P^n$. Chamamos de levantamento de f em um conjunto aberto U de M uma aplicação suave $f_U : U \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ tal que $\pi \circ f_U = f$ em U , onde $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ é a projeção canônica.

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ uma aplicação holomorfa.

Definição . Para $0 \leq \alpha \leq \infty$ definimos o α -ésimo espaço osculador de f em $x \in M$ $\tilde{\theta}_\alpha(x) = \tilde{\theta}_\alpha(f)(x) =$ espaço gerado por $\partial^\gamma f_U(x) : 0 \leq \gamma \leq \alpha$, onde F_U é o levantamento de f sobre um conjunto aberto contendo x .

Lema 3.2.1. *Se f é cheia então para algum $x \in M$, $\dim \tilde{\theta}_n(x) = n + 1$.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que o lema não seja verdadeiro. Então para x em algum subconjunto aberto U , para algum $\gamma \in \{1, \dots, n\}$ $\partial^\gamma f_U(x)$ é linearmente dependente em $\{\partial^\alpha f_U(x) : 0 \leq \alpha \leq \gamma\}$. Por diferenciação todas as derivadas superiores serão linearmente dependentes destas derivadas. Assim, as imagens de f_U estarão contidas num subconjunto próprio de \mathbb{C}^{n+1} . Como f é analítica, f está no mesmo subspaço, o que contradiz a hipótese de que f é cheia.

Consideraremos agora o conjunto

$$A = \{x \in M : \dim \tilde{\theta}_n(x) \leq n + 1\}$$

E para qualquer inteiro α ($0 \leq \alpha \leq n$) definimos $f_\alpha : M \setminus A \rightarrow G_{\alpha+1}(\mathbb{C}^{n+1})$ como

$$f_\alpha(x) = \tilde{\theta}_\alpha(x).$$

Lema 3.2.2. *Existe uma única extensão de f_α de uma aplicação holomorfa $f_\alpha : M \rightarrow G_{\alpha+1}(\mathbb{C}^{n+1})$.*

Demonstração: Seja $x \in M$. Escolhemos uma carta U contendo x e um levantamento holomorfo f_U de f em U . Considere a aplicação $w : U \rightarrow \Lambda^{n+1} \mathbb{C}^{n+1}$ definido por

$$w(x) = f_U(x) \wedge \partial' f_U(x) \wedge \dots \wedge \partial'^\alpha f_U(x) \quad (3.2.3.1)$$

podemos ver que w é holomorfo e para $x \in A$, $f_\alpha(x) = (\alpha + 1)$ -plano definido por $w(x)$. Se $x \in A$ podemos escrever $w(x') = (z(x') - z(x))^\rho W(x)$ para todo x' em alguma vizinhança aberta U' de x , onde ρ é um inteiro positivo e $W : U' \rightarrow \Lambda^{n+1}\mathbb{C}^{n+1}$ é holomorfa e não nula. Como $W'(x)$ pode ser decomposta para todo $x' \neq x$, também pode ser decomposta para $x' = x$ e nós podemos definir $f_\alpha(x)$ como o $(\alpha + 1)$ -subespaço dimensional definido por $W(x)$. Da expressão (3.2.3.1) vemos que w não depende da carta U e do levantamento f_u . Como $M \setminus A$ é denso em M , segue a unicidade.

Definição . A aplicação f_U é chamada $\phi = \pi \circ \psi : M \rightarrow \alpha$ -ésima curva associada de f

Veremos agora como construir aplicações harmônicas em $\mathbb{C}P^n$.

Lema 3.2.3. *Seja M, Y, N variedades riemannianas, $\pi : Y \rightarrow N$ uma submersão riemanniana e $\psi : M \rightarrow Y$ uma aplicação harmônica. Suponha que ψ é horizontal com respeito a π , i.e., para cada $x \in M$ $d\psi(x)$ aplica $T_x M$ no espaço horizontal de π . Então $\phi = \pi \circ \psi : M \rightarrow N$ é harmônica.*

Demonstração:

Para cada $x \in M$ o campo tensorial de ϕ é dado por:

$$\tau(\phi) = \sum_i \nabla d\pi(d\psi(e_i), d\psi(e_i)).$$

onde $\nabla d\pi$ é a segunda forma fundamental da aplicação π e $\{e_i\}$ é uma base ortonormal do espaço tangente $T_x M$. Assim, por hipótese cada vetor $d\psi(e_i)$ é horizontal e $\nabla d\pi(e', e') = 0$ para qualquer vetor horizontal $e' \in TY$. Segue então que $\tau(\phi) = 0$.

Seja r, s inteiros não negativos ($0 \leq r + s \leq n$). Seja

$$\mathcal{H}_{r,s} = \{(V, W) \in G_r(\mathbb{C}^{n+1}) \times G_s(\mathbb{C}^{n+1}) : V \perp W\}$$

Colocando $t = (n + 1) - (r + s)$, temos a variedade bandeira definida no capítulo 2

$$\mathcal{H}_{r,s} = \frac{U(n+1)}{U(r) \times U(s) \times U(t)}.$$

Se $s = n - r$ temos a submersão Riemanniana $\pi : \mathcal{H}_{r,s} \rightarrow \mathbb{C}P^n = U(n+1)/U(r) \times U(s) \times U(t)$ dado pela inclusão de $U(r) \times U(s)$ em $U(n)$. Geometricamente $\pi(V, W) = (V + W)^\perp$.

Definição . Seja $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ uma aplicação holomorfa cheia de uma superfície de Riemann. Chamaremos $g = f_{n-1}^\perp : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ de polar de f .

Caracterizaremos a seguir a aplicação polar em termos de levantamentos locais.

Lema 3.2.4. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ uma aplicação holomorfa*

1. *Se f é cheia, sua polar g é anti-holomorfa e cheia. Para qualquer levantamento local*

$$\langle \partial'^\alpha f_U, \partial'^\beta g_U \rangle = 0 \quad \forall \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq n - 1 \quad (3.2.3.2)$$

$$\langle \partial'^\alpha f_U(x), \partial'^\alpha g_U(x) \rangle \neq 0 \quad x \in M \quad (3.2.3.3)$$

para todo $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = n$.

2. Reciprocamente, se $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ é uma aplicação suave satisfazendo (1) para algum $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = n$, então f e g são cheias e g é a polar de f .

Demonstração:

1. Para $\beta = 0$ a primeira equação de (1) é imediata. Como f é cheia, $\partial^n(x)$ não está em $f_{n-1}(x)$ para $x \in M \setminus A$. Logo a segunda equação de (1) também é válida para $\beta = 0$. O resultado segue para outros α, β . A anti-holomorficidade de g segue de sua definição. Resta provar que g é cheia. Suponha que $\lambda_0 g_U(x) + \dots + \lambda_n \partial^n g_U(x) = 0$ para algum ponto $x \in M$ onde a segunda equação de (1) valha. Tomando o produto interno sucessivamente com $f_U(x), \partial' f_U(x), \dots, \partial^n f_U(x)$ teremos $\lambda_n = \dots = \lambda_0 = 0$. Pela recíproca do lema (3.2.1), g é cheia.
2. Análoga a (1).

Observação 2. Se g é polar de f , o conjunto de pontos x , onde

\dim espaço gerado por $\{\partial'^\alpha f_U(x)\} < n + 1$ e \dim espaço gerado por $\{\partial'^\beta g_U(x)\} < n + 1$ coincidem.

Consideremos agora uma aplicação holomorfa cheia $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ e $r \in [0, n]$ inteiro. Seja g a polar de f e $s = n - r$. Podemos definir assim a aplicação $\psi : M \rightarrow \mathcal{H}_{r,s}$ tal que $\psi(x) = (f_{r-1}(x), g_{s-1}(x))$.

Lema 3.2.5. *A aplicação π é horizontal com respeito a $\pi : \mathcal{H}_{r,s} \rightarrow \mathbb{C}P^n$.*

Demonstração: É suficiente mostrar que $\Psi : M \rightarrow \mathcal{H}_{r,s} \rightarrow G_r(\mathbb{C}^{n+1}) \times G_s(\mathbb{C}^{n+1})$ é horizontal com respeito a $\Pi : U \rightarrow \mathbb{C}P^n$, onde $U = \{(V, W) \in$

$G_r(\mathbb{C}^{n+1} \times G_s(\mathbb{C}^{n+1} : \dim(V + W) = n$ e $\Pi(V, W) = (V + W)^\perp$. É suficiente mostrar que $\partial'\psi$ e $\partial''\psi \in T'U$ são horizontais. Mostraremos para $\partial'\psi$. Temos $(V, W) = \psi(x) = (f_{r-1}, g_x)$. Como g é antiholomorfa $\partial'\psi(x) = (\partial'f_{r-1}(x), 0)$. Podemos identificar o subspaço vertical de $T'_{V,W}U$ com $T'_v G_r(V \oplus W) \subset T'_v G_r(\mathbb{C}^{n+1}) \cong \mathcal{L}(V, V^\perp)$. Seja $f_U (g_U)$ um levantamento holomorfo (anti-holomorfo) de $f (g)$ respectivamente em alguma vizinhança de x . Defina $A \subset M$. Suponhamos que $x \notin A$. Então segundo a observação acima, $\{\partial'^\alpha f_U(x) : 0 \leq \alpha \leq r - 1\}$ e $\{\partial''^\beta g_U(x) : 0 \leq \beta \leq s - 1\}$ são linearmente independentes. O primeiro conjunto de vetores gera V . Como $\partial^i \partial'^{i-1} f_U(x) = \partial^i f_U(x) \in V$ para todo $i < r$, vemos que o isomorfismo $h : T'_v G_r(\mathbb{C}^{n+1}) \rightarrow \mathcal{L}(V, V^\perp)$ que $h(\partial'f_{r-1}(x)) \in \mathcal{L}(V, V^\perp)$ tem imagem na projeção de $\partial'^r f_U(x)$ sobre V^\perp . Mas $\partial'\psi(x)$ é horizontal se e somente se $h(\partial'f_{r-1}(x)) \in \mathcal{L}(V, V^\perp)$ é perpendicular a $\mathcal{L}(V, W)$, i.e., se e somente se a projeção de $\partial'f_U(x)$ sobre V^\perp é perpendicular a W . Isto segue da ortogonalidade de V e W e das relações de isotropia (3.2.3.3) e (3.2.3.3), pois $\{\partial''^\beta g_U(x) : 0 \leq \beta \leq s - 1\}$ gera W . A horizontabilidade dos pontos isolados de A segue por continuidade.

Proposição 3.2.1. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ uma aplicação holomorfa cheia entre uma superfície de Riemann e r um inteiro ($0 \leq r \leq n$). Defina $\phi : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ por*

$$\phi(x) = f_{r-1}(x)^\perp \cap f_r(x)$$

ou equivalentemente

$$\phi(x) = (f_{r-1}(x) \oplus g_{s-1})^\perp,$$

onde g é a polar de f e $s = n - r$. Então ϕ é harmônica.

Demonstração: A aplicação ϕ é a composição da aplicação ψ definida acima e a submersão Riemanniana $\pi : \mathcal{H}_{r,s} \rightarrow \mathbb{C}P^n$. Afirmamos que ϕ é harmônica. De fato, como uma aplicação em $G_r(\mathbb{C}^{n+1}) \times G_s(\mathbb{C}^{n+1})$, suas componentes são \pm holomorfas, e pelo Lema (3.2.1), é também horizontal com respeito a π . Portanto pelo Lema (3.2.1), ϕ é harmônica.

Observação 3. 1. Se $r = 0$ então $\phi = f$ é holomorfa; se $r = n$ então $\phi = g$ é anti-holomorfa.

2. Temos as seguintes expressões equivalentes para ϕ

$$\begin{aligned}\phi(x) &= g_{s-1}(x)^\perp \cap g_s(x), \\ \phi(x) &= f_r(x)^\perp \cap g_s(x).\end{aligned}$$

Podemos enunciar agora o Teorema de Eells-Wood:

Teorema 3.2.2. [5] *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ uma aplicação holomorfa e r um inteiro ($0 \leq r \leq n$). Defina $h_k : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ como na proposição 3.2.1 por*

$$h_k(x) = f_{r-1}(x)^\perp \cap f_r(x)$$

Então h_k é uma aplicação harmônica. Portanto, dado $\phi : (\mathbb{C}P^1, g) \rightarrow (\mathbb{C}P^{n-1})$ harmônica existe únicos k e h tal que $\phi = h_k$.

Este teorema nos fornece um conjunto natural de aplicações $\psi : M \rightarrow F(n) : \psi = (h_0(z), \dots, h_{n-1}(z))$ para uma aplicação $h : M \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ holomorfa e cheia. Chamaremos esta aplicação de Referencial de Frenet.

Teorema 3.2.3 ([9]). *Seja $\phi : M^2 \rightarrow f(r_1, \dots, r_n)$ uma aplicação subordinada a uma matriz ϵ horizontal. Então:*

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \text{ é equi-harmônica e cada } \phi_j \text{ é harmônica}$$

Teorema 3.2.4. *Os Referenciais de Frenet $\psi = (h_0, \dots, h_{n-1}) : M^2 \rightarrow F(n)$ são equi-harmônicas.*

Demonstração: Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ uma aplicação harmônica cheia e isotrópica ($\phi = h_k$). Seu diagrama é:

$$\phi_0 \rightarrow \phi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \phi_{n-1}$$

Considere $\psi = (h_0, \dots, h_{n-1}) : M^2 \rightarrow F(n)$ a Referenciais de Frenet subordinada a estrutura- f horizontal seguinte:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 \\ & 0 & & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Black ψ é harmônica.

A recíproca do Teorema de Black não é sempre verdadeira. Ver [[10]].

Capítulo 4

Estabilidade em Variedade Bandeira

4.1 Equações de Aplicações Harmônicas

Seja $\Phi : M \rightarrow U(n)$ o levantamento da aplicação $\phi : M \rightarrow F(n)$, i.e., $\phi = \pi \circ \Phi$ onde $\pi : U(n) \rightarrow \frac{U(n)}{T} = F(n)$ é a projeção natural. Seja e_1, \dots, e_n uma base canônica de \mathbb{C}^n e π_j a matriz da projeção ortogonal em E_j , onde E_j é o subspaço de \mathbb{C}^n gerado por e_j .

Temos que $\pi_j : M \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ satisfaz $A'_{ji}(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n)A_z^{ji}$, onde $A_z^{ji} = \pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial z}$. Para $\mathbf{V} \in \Gamma(\phi^*(T(F(n))))$, seja $q = \phi^*\beta(\mathbf{V})$, onde $\phi^*\beta : \phi^*(TF(n)) \rightarrow M \times u(n)$ é o pull-back da forma de Maurer Cartan.

Definimos agora a variação de ϕ por:

$$\phi_t(x) := (\exp(-tq)\Phi)$$

Lema 4.1.1. 1. $\delta\pi_j = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\pi_j(t) = [\pi_j, q]$.

2. $\frac{\partial}{\partial z}[\pi_j, q] = [\frac{\partial\pi_j}{\partial z}, q] + [\pi_j, \frac{\partial q}{\partial z}]$.

3. $\delta(A_z^{ij}) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}A_z^{ij}(t) = [A_z^{ij}, q] - \pi_j \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j$.

Demonstração:

1. Da definição temos $\pi_j = \Phi E_j \Phi^*$ onde E_j é a matriz $n \times n$ com 1 na (i, j) posição e zero no restante. Portanto:

$$\pi_j(t) = e^{-tq} \pi_j e^{tq}$$

Assim $\partial\pi_j = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\pi_j(t) = -q\pi_j + \pi_j q = [\pi_j, q]$.

2. Direto
 3. Usando (1) e (2) temos

$$\begin{aligned} \delta(A_z^{ij}) &= \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}A_z^{ij}(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(\pi_i(t) \frac{\partial\pi_j(t)}{\partial z}) \\ &= (\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\pi_i(t)) \frac{\partial\pi_j}{\partial z} + \pi_i \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\pi_j(t)) \\ &= [\pi_i, q] \frac{\partial\pi_j}{\partial z} + \pi_i \frac{\partial}{\partial z} [\pi_j, q] \\ &= [A_z^{ij}, q] - \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \end{aligned}$$

Observação 4. Claramente $\pi_i \pi_j = 0$ quando $i \neq j$.

Lema 4.1.2. 1. $\text{Re} \langle [A_z^{ij}, az], q \rangle = 0$

2. $\langle A_z^{ij}, \pi_i B \pi_j \rangle = \langle A_z^{ij}, B \rangle$

$$3. \langle A_z^{ij}, [q, [q, A_z^{ij}]] \rangle = -\langle [q, A_z^{ij}], [q, A_z^{ij}] \rangle$$

$$4. \langle A_z^{ij}, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q \rangle = -\langle A_z^{ij} q, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle$$

$$5. \langle A_z^{ij}, q \pi \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q \rangle = -\langle q A_z^{ij}, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle$$

$\forall B \in \mathbb{C}_n, q : M \rightarrow u(n)$ onde $A_z^{ij} := \pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial z}$.

Demonstração:

1. Temos $A_z^{ij*} = -A_z^{ij}$. Portanto $[A_z^{ij}, A_z^{ij}]^* = [A_z^{ji}, A_z^{ij}]$. Portanto

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \langle [A_z^{ji}, A_z^{ij}], q \rangle &= \langle [A_z^{ji}, A_z^{ij}], q \rangle + \langle q, [A_z^{ji}, A_z^{ij}] \rangle \\ &= \operatorname{tr}([A_z^{ji}, A_z^{ij}] q^*) + \operatorname{tr}(q [A_z^{ji}, A_z^{ij}]^*) \\ &= -\operatorname{tr}([A_z^{ji}, A_z^{ij}] q) + \operatorname{tr}(q [A_z^{ji}, A_z^{ij}]) = 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \langle A_z^{ij}, \pi_i B \pi_j \rangle &= \operatorname{tr}(A_z^{ij} \pi_j^* B^* \pi_i^*) \\ &= \operatorname{tr} \left(\pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial z} \pi_j B^* \pi_i \right) \\ &= \operatorname{tr} \left(\pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial z} \pi_j B^* \right) \\ &= -\operatorname{tr} \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial z} \pi_j^2 B^* \right) \\ &= \operatorname{tr} \left(\pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial z} B^* \right) \\ &= \langle A_z^{ij}, B \rangle \end{aligned}$$

$$3. \langle A_z^{ij}, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q \rangle = \operatorname{tr}(A_z^{ij} q^* \pi_j^* (\frac{\partial q}{\partial z})^* \pi_i^*) = -\operatorname{tr}(A_z^{ij} q \pi_j (\frac{\partial q}{\partial z})^* \pi_i) = -\langle A_z^{ij} q, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle$$

$$4. \langle A_z^{ij} q, \pi \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle = \operatorname{tr}(A_z^{ij} \pi_j^* (\frac{\partial q}{\partial z})^* \pi_i^* q^*) = -\operatorname{tr}(q A_z^{ij} \pi_j (\frac{\partial q}{\partial z})^* \pi_i) = -\langle q A_z^{ij}, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle$$

Definição . Seja $\phi = (\pi_i, \dots, \pi_n) : (M, q) \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda=(\lambda=(\lambda_{ij}))}^2)$. Definimos a energia de ϕ como:

$$E(\phi) := \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} |A_z^{ij}|^2 \nu_g$$

Calculamos agora as equações de Euler-Lagrange para o problema variacional:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0} E(\phi_t) &= \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} |A_z^{ij}(t)|^2 \nu_g \\ &= 2\operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}, \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} A_z^{ij}(t) \rangle \nu_g \\ &= 2\operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}, [A_z^{ij}, q] - \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle \nu_g \end{aligned}$$

Temos assim $\frac{1}{2} \frac{d}{dt}|_{t=0} E(\phi_t) = I + II$ onde

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}, [A_z^{ij}, q] \rangle \nu_g \\ II &= -\operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle \nu_g \end{aligned}$$

Pelo Lema (4.1.2) temos $I = 0$. Usando Teorema de Stoke's temos:

$$\begin{aligned} II &= -\operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle \nu_g \\ &= -\operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle \frac{\partial A_z^{ij}}{\partial z}, q \rangle \nu_g - \operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \langle A_z^{ij}, q \rangle \nu_g \\ &= -\operatorname{Re} \int_M \langle \frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial \bar{z}}, q \rangle \nu_g \end{aligned}$$

onde $A_z^\Lambda = \sum_{ij} \lambda_{ij} A_z^{ij}$.

Temos a seguinte proposição

Proposição 4.1.1. $\phi : (M^2, g) \rightarrow (F(n), ds_\Lambda^2)$ é harmônica se e somente se $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} A_z^\Lambda = 0$ se e somente se $\frac{\partial}{\partial z} A_x^\Lambda + \frac{\partial}{\partial y} A_y^\Lambda$, onde:

$$\begin{aligned} A_x^\Lambda &:= \sum \lambda_{ij} \pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial x} \\ A_y^\Lambda &:= \sum \lambda_{ij} \pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial y} \end{aligned}$$

4.2 Segunda Variação da Energia para aplicações em $F(n)$

Lema 4.2.1.

$$\frac{\partial^2 \pi_i(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = [[\pi_i, q], q].$$

Demonstração: Por definição temos: $\pi_i(t) = e^{-tq} \pi_i e^{tq}$. Então $\frac{\partial}{\partial t} \pi_i(t) = -qe^{tq} \pi_i e^{tq} + e^{-tq} \pi_i q e^{tq}$. Como $[q, e^{tq}] = 0$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} = e^{-tq} [\pi_i, q] e^{tq}$$

Portanto:

$$\frac{\partial^2 \pi_i(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = -q[\pi_i, q] + [\pi_i, q]q = [[\pi_i, q], q]$$

Teorema 4.2.1. (*Segunda Variação da Energia*) Seja $\phi = (\pi_1, \dots, \pi_n) : (M^2, q) \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda=\lambda_{ij}})$ uma aplicação harmônica. Então:

$$\frac{d^2}{dt^2} E(\phi_t) \Big|_{t=0} := I_{\Lambda}^{\phi}(q) = 4Re \int_M \langle q A_z^{\Lambda}, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle \nu_g + 2Re \sum_{i,j} \lambda_{ij} \int_M \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle \nu_g$$

Demonstração:

Pela definição de $E(\phi_t)$ temos:

$$E(\phi_t) = \sum_{ij} \int_M \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}(t), A_z^{ij}(t) \rangle \nu_g$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(\phi_t) &= 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}(t), \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} A_z^{ij}(t) \rangle v_g. \text{ Portanto} \\ \frac{d^2}{dt^2}E(\phi_t) &= 2 \int_M \sum \lambda_{ij} \langle \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(A_z^{ij}(t)), \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(A_z^{ij}(t)) \rangle + 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_z^{ij}(t) \rangle v_g\end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{d^2}{dt^2}E(\phi_t)|_{t=0} = 2 \sum \lambda_{ij} \int_M \langle \frac{d}{dt}|_{t=0} A_z^{ij}, \frac{d}{dt}|_{t=0} A_z^{ij}(t) \rangle + 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}|_{t=0} A_z^{ij}(t) \rangle v_g = I.$$

Analisaremos I e II separadamente. Começemos com II. Temos:

$$\begin{aligned}\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}|_{t=0} A_z^{ij} \rangle v_g &= \text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(\frac{\partial}{\partial t}(\pi_i(t) \frac{\partial \pi_j(t)}{\partial z})) \rangle v_g \\ &= \text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \left[\left(\frac{\partial \pi_i(t)}{\partial t} \frac{\partial \pi_j(t)}{\partial z} \right) + \pi_i(t) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \pi_j(t)}{\partial t} \right) \right] \rangle v_g \\ &= \text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}|_{t=0} \pi_i(t) \frac{\partial \pi_j}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \pi_i(t) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \pi_j \left(\pi_i \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}|_{t=0} \pi_j(t) \right) \right) \right) \rangle v_g \\ &= \text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, [[\pi_i, q], q] \frac{\partial \pi_j}{\partial z} + 2[\pi_i, q] \frac{\partial}{\partial z}([\pi_j, q]) + \pi_i \frac{\partial}{\partial z}([\pi_j, q], q) \rangle v_g \\ &= \text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, A + B + C \rangle v_g\end{aligned}$$

Onde:

$$A = [[\pi_i, q], q] \frac{\partial \pi_j}{\partial z} = [\pi_i q - q \pi_i, q] \frac{\partial \pi_j}{\partial z} = \pi_i q^2 \frac{\partial \pi_j}{\partial z} - 2q \pi_i q \frac{\partial \pi_j}{\partial z} + q^2 A_z^{ij}.$$

$$\begin{aligned}B &= 2[\pi_i, q] \frac{\partial}{\partial z}([\pi_j, q]) \\ &= 2(\pi_i q - q \pi_i) \left(\left[\frac{\partial \pi_j}{\partial z}, q \right] + [\pi_j, \frac{\partial q}{\partial z}] \right) \\ &= 2\pi_i q \frac{\partial \pi_j}{\partial z} q - 2\pi_i q^2 \frac{\partial \pi_j}{\partial z} + 2\pi_i q \pi_j \frac{\partial q}{\partial z} - \pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j - 2q A_z^{ij} q + 2q \pi_i q \frac{\partial \pi_j}{\partial z} + 2q \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C &= \pi_i \frac{\partial}{\partial z} ([[\pi_j, q], q]) \\ &= A_z^{ij} q^2 - 2\pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q - 2\pi_i q \frac{\partial \pi_j}{\partial z} q - 2\pi_i q \pi_j \frac{\partial q}{\partial z} + \pi_i \frac{\partial}{\partial z} (q^2) \pi_j + \pi_i q^2 \frac{\partial \pi_j}{\partial z} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} A + B + C &= q^2 A_z^{ij} - 2q A_z^{ij} q^2 + \pi_i \frac{\partial}{\partial z} (q^2) \pi_j - \\ &\quad - 2\pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q - 2\pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j + 2q \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j = \\ &= [q, [q, A_z^{ij}]] + \pi_i \frac{\partial q^2}{\partial z} \pi_j - 2\pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q - \\ &\quad - 2\pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j + 2q \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \end{aligned}$$

Temos assim:

$$\begin{aligned} II &= 2\operatorname{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, [q, [q, A_z^{ij}]] + \pi_i \frac{\partial q^2}{\partial z} \pi_j - \\ &\quad - 2\pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q - 2\pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j + 2q \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle \nu_g \end{aligned}$$

Aplicando o Lema (4.1.2) obtemos:

$$\begin{aligned} II &= -2\operatorname{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [q, A_z^{ij}], [q, A_z^{ij}] \rangle \nu_g \\ &\quad + 4\operatorname{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [A_z^{ij}, q \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j] \rangle + \\ &\quad + 2\operatorname{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial q^2}{\partial z} \rangle - \\ &\quad - 4\operatorname{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle \nu_g. \end{aligned}$$

Como ϕ é harmônica, podemos usar a Proposição (4.1.1) obtendo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial q^2}{\partial z} \rangle \nu_g &= \operatorname{Re} \int_M \langle A_z^\Lambda, \frac{\partial q^2}{\partial z} \rangle \nu_g \\ &= -\operatorname{Re} \int_M \langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (A_z^\Lambda), q^2 \rangle \nu_g = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
II &= -2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [q, A_z^{ij}], [q, A_z^{ij}] \rangle v_g \\
&\quad -4\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle v_g \\
&\quad +4\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [q, A_z^{ij} q], \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle v_g.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Lema (4.1.2) temos:

$$\begin{aligned}
I &= 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [A_z^{ij}, q] - \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, [A_z^{ij}, q] - \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle v_g \\
&= 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [A_z^{ij}, q], [A_z^{ij}, q] \rangle v_g \\
&\quad -4\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [A_z^{ij}, q], \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle v_g \\
&\quad +2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g
\end{aligned}$$

Finalmente temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} E(\phi_t)|_{t=0} &= I_\Lambda^\phi = I + II = \\
&= -4\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, q \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g + \\
&\quad +2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g \\
&= 4\text{Re} \int_M \langle q A_z^\Lambda, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g + 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g
\end{aligned}$$

4.3 Estabilidade em $F(n)$

Definição . $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$ é dita ser uma perturbação de $\Lambda = \lambda_{ij}$ associada a aplicação $\phi = (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow F(n)$ se:

1. $\lambda'_{ij} = \lambda_{ij}$ se $(i, j) \neq (i_1, j_1), (j_1, i_1), \dots, (i_r, j_r), (j_r, i_r)$;
2. $\lambda'_{i_k j_k} = \lambda_{i_k j_k} + \epsilon > 0$ para $1 \leq k \leq r$;
3. $A_z^{i_1 j_1} = A_z^{j_1 i_1} = \dots = A_z^{i_r j_r} = A_z^{j_r i_r} = 0$ onde $ds_{\Lambda=(\lambda_{ij})}$ e $ds_{\Lambda'=(\lambda'_{ij})}$ são métricas do tipo Borel.

Lema 4.3.1. *Seja $\phi = (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow F(n)$ uma aplicação equi-harmônica. Então:*

$$I_{\Lambda'}^{\phi}(q) = I_{\Lambda}^{\phi}(q) + \int_M 2\epsilon_1 (|\pi_{i_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_1}|^2 + |\pi_{j_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_1}|^2) + \dots + \\ + \dots + 2\epsilon_r (|\pi_{i_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_r}|^2 + |\pi_{j_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_r}|^2) \nu_g$$

Demonstração: $I_{\Lambda'}^{\phi}(q) = 4\text{Re} \int_M \langle q A_z^{\Lambda'}, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle \nu_g + 2\text{Re} \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle \nu_g$. Mas $A_z^{\Lambda'} = A_z^{\Lambda}$ pois $A_z^{i_1 j_1} = A_z^{j_1 i_1} = \dots = A_z^{i_r j_r} = A_z^{j_r i_r} = 0$. Portanto

$$I_{\Lambda'}^{\phi}(q) = 4\text{Re} \int_M \langle q A_z^{\Lambda}, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle \nu_g + 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle \nu_g + \\ + 2\text{Re} \sum_{k=1}^r \epsilon_k \int_M (|\pi_{i_k} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_k}|^2 + |\pi_{j_k} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_k}|^2) \nu_g \\ = I_{\Lambda}^{\phi} + 2\text{Re} \sum \epsilon_k \int_M (|\pi_{i_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_1}|^2 + |\pi_{j_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_1}|^2) \nu_g.$$

Definição . Uma aplicação harmônica $\phi : (M^2, q) \rightarrow (F(n), J, ds_{\Lambda}^2)$ é dita estável se $I_{\Lambda}^{\phi}(q) \geq 0$ para qualquer variação $q : M^2 \rightarrow u(n)$.

Teorema 4.3.1 ([7]). *Seja $\phi : (M^2, J_1, q) \rightarrow (F(n), J, ds_{\Lambda}^2)$ uma aplicação holomorfa entre variedades de Kahler. Então ϕ é harmônica estável.*

Estudaremos agora a estabilidade dos Referenciais de Frenet com respeito a métricas do tipo Borel.

Teorema 4.3.2. *Seja $\psi : (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow (F(n), J, ds_{\Lambda'=(\lambda'_{ij})}^2)$ um Referenciais de Frenet. Consideremos $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$ a seguinte perturbação da métrica de Kahler ($\Lambda = (\lambda_{ij})$):*

$$\lambda'_{ij}(i < j) = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{se } j = 2, \dots, n-1 \\ \lambda_{ij} + \epsilon_k, & \epsilon_k \geq 0 \text{ para } 1 \leq k \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{cases}$$

Então ψ é estável.

Demonstração:

Seja J uma estrutura quase complexa tal que $\psi : (M, J_1) \rightarrow (F(n), J)$ é holomorfa. De acordo com o lema (4.3.1) temos:

$$I_{\Lambda'}^{\phi}(q) = I_{\Lambda}^{\phi}(q) + \int_M [2\epsilon_1 (|\pi_1 \frac{\partial q}{\partial z} \pi_3|^2 + |\pi_3 \frac{\partial q}{\partial z} \pi_1|^2) + \dots + \dots + 2\epsilon_l (|\pi_1 \frac{\partial q}{\partial z} \pi_n|^2 + |\pi_n \frac{\partial q}{\partial z} \pi_1|^2)] v_g \geq 0$$

pois do Teorema de Lichnerowicz's $I_{\Lambda}^{\phi}(q) \geq 0$ e todo $\epsilon_k \geq 0$ para $1 \leq k \leq l = \binom{2}{n} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Teorema 4.3.3. *Seja $\psi = (\pi_1, \dots, \pi_n) : (M, q) \rightarrow (F(n), J, ds_{\Lambda}^2)$ uma aplicação de Eells-Wood. Consideremos a seguinte perturbação da métrica de Kahler $\Lambda = (\lambda_{ij})$:*

$$\lambda'_{ij} = \begin{cases} \lambda_{i_{k_0} j_{k_0}} - \epsilon_k, \epsilon_k > 0 & \text{para } i = i_{k_0} \text{ e } j = j_{k_0} \\ & k_0 \in \left[1, l = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right] \cap \mathbb{N} \\ \lambda_{ij} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então ψ é estável.

Demonstração:

Sabemos que existe $q : M \rightarrow u(n)$ tal que $I_{\Lambda}^{\phi}(q) = 0$. Aplicando o Lema (4.3.1) temos:

$$I_{\Lambda'}^{\phi} = I_{\Lambda}^{\phi} + \int_M [2\epsilon_1 (|\pi_{i_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_1}|^2 + |\pi_{j_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_1}|^2) + \dots + \dots + (-2\epsilon_{k_0}) (|\pi_{i_{k_0}} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_{k_0}}|^2 + |\pi_{j_{k_0}} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_{k_0}}|^2) + \dots + 2\epsilon_r (|\pi_{i_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_r}|^2 + |\pi_{j_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_r}|^2)$$

se escolhermos q tal que

$$\pi_{ik_0} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{jk_0} \neq 0 \text{ ou } \pi_{jk_0} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{ik_0} \neq 0.$$

Mais geralmente temos:

Teorema 4.3.4. *Seja $\psi : (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow (F(n), J, ds_{\Lambda'=(\lambda'_{ij})}^2)$ uma aplicação de Eells Wood. Consideremos $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$ a seguinte perturbação da métrica de Kahler ($\Lambda = (\lambda_{ij})$):*

$$\lambda'_{ij}(i < j) = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{se } j = i + 1 \\ \lambda_{ij} - \epsilon_k, \epsilon_k \geq 0 & \text{para } j \neq i + 1, 1 \leq k \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{cases}$$

onde $\Lambda = (\lambda_{ij})$ é métrica de Kahler. Então ψ não é estável.

Demonstração: Seja q tal que $I_{\Lambda}^{\phi}(q) = 0$, $\pi_{i_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_1} \neq 0$ ou $\pi_{j_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_1} \neq 0, \dots, \pi_{i_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_r} \neq 0$ ou $\pi_{j_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_r} \neq 0$.

Aplicando o Lema (4.1.2) obtemos:

$$\begin{aligned} I_{\Lambda'}^{\phi}(q) &= I_{\Lambda}^{\phi}(q) + \int_M [-2\epsilon_1 (|\pi_{i_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_1}|^2 + |\pi_{j_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_1}|^2) + \dots + \\ &\quad + \dots + (-2\epsilon_r) (|\pi_{i_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_r}|^2 + |\pi_{j_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_r}|^2)] \nu_g < 0 \end{aligned}$$

Corolário 4.3.4.1 ([14]). *Seja $\psi : (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow (F(n), J, \text{métrica de Killing})$ uma aplicação de Eells-Wood. Então ψ não é estável.*

Demonstração: Basta aplicar o Teorema para $\lambda_{12} = \lambda_{23} = \dots = \lambda_{n(n-1)} = 1$, $\epsilon_1 = 1, \dots, \epsilon_l = n - 2$, onde $l = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n - 2$.

Bibliografia

- [1] M. Black, "*Harmonic maps into homogeneous spaces*", *Pitman Res. Notes Math. Ser.* 255 (1991).
- [2] A. Borel, "*Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups*", *Proc. Nat. Acad. of Sci, USA* 40, 1147-1151 (1954).
- [3] F. Burstall e S. Salamon, "*Tournaments, flags and harmonic maps*", *Math. Ann.* 277, 249-265 (1987).
- [4] J. Eells e L. Lemaire, *Selected Topics in Harmonic Maps*, American Mathematical Society, 1983.
- [5] J. Eells e J. Wood, "*Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces*", *Adv. in Math* 49, 217-263 (1983).
- [6] S. Kobayashi e K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vols. I, II, Interscience, New York, 1963, 1969.
- [7] A. Lichnerowicz, "*Applications harmoniques et variétés kahlériennes*", *Symp. Math.*, Bologna Univ., 3 341-402 (1970).

- [8] X. Mo e C. Negreiros, "*Horizontal f -structures, ϵ -matrizes and equi-harmonic moving flags*", preprint IMECC-UNICAMP, Agosto/98.
- [9] X. Mo e C. Negreiros, "*Hermitian Structures and equi-harmonic tori on non-symmetric complex flag manifolds*", preprint IMECC-UNICAMP, Setembro/98.
- [10] X. Mo e C. Negreiros, "*Hermitian structure on flag manifolds*", Research Report 35 (1998).
- [11] X. Mo e C. Negreiros, "*(1,2)-Symplectic Structures on Flag Manifolds*", a aparecer no Tohoku Mathematical Journal (1999).
- [12] X. Mo e C. Negreiros, "*Tournaments and Geometry of Full Flag Manifolds*", Proceedings of the XI Brazilian Topology Meeting, Rio Claro, Brazil, World Scientific (1999)
- [13] J. Moon *Topics in tournaments*, New York: Holt, Reinhart, and Winston (1968).
- [14] C. Negreiros, "*Harmonic maps from compact Riemann surfaces into flag manifolds*", Indiana Univ. Math. Journ. 37, 617-636 (1988).
- [15] C. Negreiros, "*On the stability of flag manifold*", preprint IMECC-UNICAMP, Dezembro/98.

- [16] J. Rawnsley, *f-structures, f-twistor spaces and harmonic maps*, in Geometry Seminar "Luigi Bianchi" II, 1984, E. Vesentini, ed., Lecture Notes in Math., vol. 1164, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 85-159 (1985).