

ENVOLTÓRIAS DE S-HOLOMORFIA

Maria Carmelina Fernandes Zaine

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos

Junho de 1978

Aos meus filhos Luciana
 Leonardo

INTRODUÇÃO

O prolongamento holomorfo em dimensão infinita tem sido objeto de estudos através de dois métodos: utilizando germes de funções holomorfas e utilizando o método do espectro.

Os primeiros resultados parciais foram obtidos por Alexander [1], que tentou, via espectro, a construção da envoltória de holomorfia de um domínio U de um espaço de Banach E , considerando no espaço $\mathcal{H}(U)$ das funções holomorfas definidas sobre U as topologias $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}_\infty$. Posteriormente, ainda via espectro, Coeuré [1], munindo o espaço das funções holomorfas em domínios modelados sobre um espaço de Banach com a topologia $\mathcal{C}_0$, e Matos [1], considerando o espaço das funções holomorfas sobre domínios modelados sobre espaços localmente convexos (e.l.c.) e sobre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, munido da topologia $\mathcal{C}_\omega$, obtiveram as envoltórias normais. Hirschowitz [1], utilizando o método dos germes das funções holomorfas, construiu a envoltória de holomorfia para domínios modelados sobre espaços de Banach e a generalização para o caso dos e.l.c. foi feita por Noverraz [1], enquanto que a construção da envoltória de holomorfia de domínios modelados sobre e.l.c. separados, via espectro, é devida a Schottenloher [2].

O objetivo principal deste trabalho é o estudo do prolongamento das funções Silva-holomorfas (S-holomorfas) através dos dois métodos anteriormente mencionados.

No capítulo 1, são apresentados os conceitos básicos e as notações gerais utilizados nos capítulos posteriores.

No capítulo 2, utilizando germes de funções S-holomorfas, construímos a envoltória de S-holomorfia de um domínio modelado sobre um e.l.c. separado. Mostramos que esta envoltória possui uma propriedade de convexidade S-holomorfa e que as funções S-holomorfas separam seus pontos.

No capítulo 3, ao estudarmos o espectro $\mathcal{J}$ do espaço $\mathcal{H}_S(U)$ das funções S-holomorfas sobre um domínio U de um e.l.c.s. E , E possuindo um sistema fundamental $\mathcal{B}$ de limitados completos e sendo $\mathcal{H}_S(U)$ munido da topologia $\mathcal{C}_{oe}$, temos por objetivo tornar $\mathcal{J}$ uma variedade modelada sobre E tal que as funções S-holomorfas sobre U se estendam a $\mathcal{J}$. Deste modo, a envoltória normal de S-holomorfia de U é obtida.

No capítulo 4, o conceito de classes regulares $\mathcal{A}_\gamma$ que são definidas por coberturas admissíveis γ de domínios modelados sobre e.l.c.s. é de fundamental importância. Primeiro construímos uma continuação S-holomorfa simultânea maximal de uma classe re

gular $\mathcal{A}_\nu$ tal que sua restrição $\mathcal{A}_{\nu,B}$ é tonelada para cada $B \in \mathcal{B}_E$, via o espectro $\mathcal{I}(\mathcal{A}_\nu)$ de $\mathcal{A}_\nu$. Então usamos este resultado para construir a envoltória de S-holomorfia de certos domínios X com a ajuda do espectro $\mathcal{I}(\mathcal{H}_S(X))$ de $\mathcal{H}_S(X)$.

No capítulo 5, introduzimos uma propriedade de aproximação para estudar a convexidade polinomial. Provamos alguns resultados de aproximação e finalmente mostramos que todo aberto conexo S-Runge de um e.l.c.s. com a propriedade da S-aproximação forte tem envoltória normal de S-holomorfia que é $\mathcal{V}_D$ -convexa.

Quero externar aqui meus agradecimentos ao Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos por sua orientação e estímulo, aos colegas do IMECC, particularmente ao grupo de Holomorfia, pelo constante incentivo e ao meu marido, por sua compreensão, carinho e apoio.

R E S U M O

Sejam E espaço localmente convexo complexo, separado, U um subconjunto aberto não vazio de E , X um domínio modelado sobre E , $\mathcal{H}_S(U)$ e $\mathcal{H}_S(X)$ os espaços das funções Silva-holomorfas sobre U e X respectivamente. Utilizando germes de funções Silva-ho-lomorfas construímos a envoltória de S -holomorfia de X . Considerando os espaços $\mathcal{H}_S(U)$ e $\mathcal{H}_S(X)$ munidos da topologia τ_{oe} , obti-vemos, via espectro, a envoltória normal de S -holomorfia de U e a envoltória de S -holomorfia de certos domínios X . Finalmente, introduzimos uma propriedade de aproximação para estudar a convexidade polinomial.

ÍNDICE

1 - NOTAÇÕES E CONCEITOS BÁSICOS:.....	1
2 - CONSTRUÇÃO DA ENVOLTÓRIA DE S-HOLOMORFIA VIA GERMES DE FUNÇÕES S-HOLOMORFAS:.....	12
3- ENVOLTÓRIA NORMAL DE S-HOLOMORFIA:.....	22
4 - CONSTRUÇÃO DA ENVOLTÓRIA DE S-HOLOMORFIA VIA ESPECTRO DE CLASSES REGULARES:.....	40
5 - CONVEXIDADE POLINOMIAL:.....	61
6 - BIBLIOGRAFIA:.....	85

CAPÍTULO 1

NOTAÇÕES E CONCEITOS BÁSICOS

Neste trabalho E será sempre um espaço localmente convexo complexo separado (e.l.c.s) e U um subconjunto aberto não vazio de E . A família de todos os subconjuntos fechados, limitados e absolutamente convexos de E será denotada por $\mathcal{B}_E$. Denotaremos por E_B o subespaço vetorial de E gerado por $B \in \mathcal{B}_E$ e normado pelo funcional de Minkowski, p_B , associado a B . $SNC(E)$ indicará o conjunto das seminormas contínuas sobre E e para $\alpha \in SNC(E)$, $x \in E$ e $r > 0$ a α -bola de centro x e raio r é dada por $B^\alpha(x, r) = \{y \in E; \alpha(x-y) < r\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, representaremos por $\mathcal{P}_b(^nE)$ o espaço vetorial dos polinômios n -homogêneos de E em $\mathbb{C}$ que são limitados sobre os subconjuntos limitados de E e $\mathcal{P}(^nE)$ indicará o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_b(^nE)$ dos polinômios n -homogêneos de E em $\mathbb{C}$ que são contínuos. $\mathcal{P}_b(^0E) = \mathcal{P}(^0E) = \mathbb{C}$.

1.1 Definição. Uma função P de E em $\mathbb{C}$ é um polinômio limitado se existem $n = 0, 1, 2, \dots$, $P_k \in \mathcal{P}_b(^kE)$ com $k = 0, 1, \dots, n$, tais que $P = P_0 + P_1 + \dots + P_n$. $\mathcal{P}_b(E)$ denotará o espaço vetorial de todos os polinômios limitados de E em $\mathbb{C}$.

1.2 Definição. Uma função $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ é Silva-holomorfa (S-holomorfa) em U se para todo $\zeta \in U$ existem $P_n \in \mathcal{P}_b^{(n)E}$ ($n = 0, 1, \dots$) tais que para todo $B \in \mathcal{B}_E$, existe $\rho_B > 0$ com $\zeta + \rho_B B \subset U$, tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - \zeta)$$

uniformemente em $\zeta + \rho_B B$. Denotaremos por $\mathcal{H}_S(U)$ o espaço vetorial de todas as funções S-holomorfas de U em $\mathbb{C}$.

Se $\mathcal{H}(U)$ indica o espaço vetorial de todas as funções holomorfas de U em $\mathbb{C}$, tem-se que $\mathcal{H}_S(U) = \mathcal{H}(U)$ para todo subconjunto aberto não vazio U de um espaço metrizável ou Silva.

Para resultados básicos de aplicações holomorfas em dimensão infinita ver Nachbin [1], [2] e Barroso [1].

1.3 Proposição. Uma função $f \in \mathcal{H}_S(U)$ se, e somente se, $f|_{U \cap E_B} \in \mathcal{H}(U \cap E_B)$, para todo $B \in \mathcal{B}_E$.

1.4 Corolário. $\mathcal{P}_b^{(n)E}|_U \subset \mathcal{H}_S(U)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.5 Definição. Diz-se que um subconjunto K de E é compacto estrito se existe algum $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset E_B$ e é com-

pacto aí. Para espaços normados, Fréchet ou $\mathcal{L}_\infty$, compacidade e compacidade estrita são conceitos equivalentes.

Denotaremos por $\mathcal{C}_{oe}$ a topologia localmente convexa em $\mathcal{H}_S(U)$ da convergência uniforme sobre os subconjuntos compactos estritos de U , isto é, a topologia gerada pela família de seminormas p_K definidas por

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| ,$$

para toda $f \in \mathcal{H}_S(U)$ e $K \subset U$ compacto estrito.

Para informações mais detalhadas sobre polinômios limitados e funções Silva-holomorfas, consultar Paques [1] .

1.6 Definição. Dizemos que U é S -holomorficamente convexo em E ($\mathcal{H}_S(U)$ -convexo) se, para todo subconjunto compacto estrito K de U , a envoltória $\mathcal{H}_S(U)$ -convexa definida por

$$\hat{K}_{\mathcal{H}_S(U)} = \{x \in U ; |f(x)| \leq \|f\|_K \text{ para toda } f \in \mathcal{H}_S(U)\}$$

é precompacta em U , isto é, $\hat{K}_{\mathcal{H}_S(U)}$ é precompacto e existe V , vizinhança de 0 em E , tal que $\hat{K}_{\mathcal{H}_S(U)} + V \subset U$.

1.7 Definição. (1) Dizemos que um par (X, φ) é um domínio modelado sobre E se $X \neq \emptyset$ é um espaço topológico conexo

Hausdorff e $\varphi : X \rightarrow E$ é um homeomorfismo local.

(2) Sejam (X, φ) , (Y, φ') domínios modelados sobre E . Uma aplicação j de X em Y é chamada um morfismo (ou inclusão fraca) se j é contínua e satisfaz $\varphi = \varphi' \circ j$.

(3) Um subconjunto compacto K de um domínio modelado (X, φ) sobre E é um compacto estrito se $\varphi(K)$ é um compacto estrito de E .

(4) Se (X, φ) é um domínio modelado sobre E , $A \subset X$ e $U \subset E$, então $A+U = \bigcup_{x \in A} \{x + U\}$ onde $x + U = (\varphi|_V)^{-1} (\varphi(x) + U)$ com $V \subset X$ aberto, $\varphi|_V$ homeomorfismo, $x \in V$ e $\varphi(x) + U \subset (\varphi|_V)(V)$.

Escreveremos apenas X no lugar de (X, φ) quando não houver perigo de confusão.

1.8 Definição. Sejam (X, φ) um domínio modelado sobre E e f uma função de X em $\mathbb{C}$. f é S -holomorfa em X se para cada ponto x de X existem V , vizinhança de x em X , e f' , função S -holomorfa sobre $\varphi(V)$ com valores em $\mathbb{C}$, tais que $\varphi|_V$ é homeomorfismo e $f|_V = f' \circ \varphi|_V$.

Denotaremos por $\mathcal{H}_S(X)$ o espaço vetorial de todas as funções S -holomorfas de X em $\mathbb{C}$.

1.9 Definição. Seja (X, φ) um domínio modelado sobre E . Para cada $B \in \mathcal{B}_E$ denotemos

$$X_B = \{x \in X ; \varphi(x) \in E_B\}$$

e definimos a topologia $\mathcal{C}_B$ em X_B do seguinte modo: para cada $x \in X_B$, $U \subset X_B$ é vizinhança de x em X_B se $x \in U$, $\varphi|_U$ é 1-1 e $\varphi(U)$ é vizinhança de $\varphi(x)$ em E_B . Se $\mathcal{B}(x)$ é a família de tais vizinhanças, então W é vizinhança de x se, e somente se, existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subset W$.

1.10 Observação. Com as definições acima temos os seguintes resultados:

(1) A restrição de φ a X_B é 1 homeomorfismo local de X_B em E_B .

(2) Cada componente conexa não vazia de X_B é um domínio modelado sobre E_B para cada $B \in \mathcal{B}_E$.

(3) A topologia $\mathcal{C}_B$ é mais fina que a topologia induzida.

Devemos mostrar que a intersecção de cada aberto de X com X_B é um aberto para $\mathcal{C}_B$. Seja $A \subset X$ um aberto e consideremos $A \cap X_B$. Para cada $x \in A \cap X_B$ existe por hipótese uma vizinhança W de x em X com $\varphi|_W$ homeomorfismo. Podemos tomar $W \subset A$ pois A

é aberto. $W \cap X_B \subset A \cap X_B$ e como $W \cap X_B$ é vizinhança de x em X_B segue o resultado.

(4) $i: X_B \hookrightarrow X$ é contínua.

(5) Se $f \in \mathcal{H}_S(X)$ então $f|_{X_B} \in \mathcal{H}(X_B)$ para cada $B \in \mathcal{B}_E$.

(6) $f \in \mathcal{H}_S(X)$ se, e somente se, para todo $x \in X$, existe W vizinhança de x em X tal que $\varphi|_W$ é homeomorfismo e $f|_{W \cap X_B} \in \mathcal{H}(W \cap X_B)$ para todo $B \in \mathcal{B}_E$.

(7) Se $K \subset X$ é compacto estrito e $f \in \mathcal{H}_S(X)$, então

$$\sup_{t \in K} |f(t)| < +\infty.$$

Para cada $x \in K$ existe V_x vizinhança de 0 em E tal que $\varphi|_{x+V_x}$ é homeomorfismo. Seja W_x vizinhança aberta de 0 em E tal que $\bar{W}_x \subset V_x$ e $K \subset \bigcup_{i=1}^n \{x_i + W_i\}$, onde $W_i = W_{x_i}$ para todo i . Por hipótese, $\varphi(K)$ é compacto estrito de E , logo existe $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $\varphi(K) \subset E_B$ e é compacto aí, $\varphi(K) \cap \{\varphi(x_i) + \bar{W}_i\}$ é compacto estrito e está contido em $\varphi(x_i) + V_i$, $V_i = V_{x_i}$ para todo i .

Para cada i , $1 \leq i \leq n$, seja $f'_i = f \circ (\varphi|_{x_i+V_i})^{-1}$, então $\|f'_i\|_{\varphi(K) \cap \{\varphi(x_i) + \bar{W}_i\}} < +\infty$, para $i = 1, \dots, n$, de onde segue que $\|f\|_K = \sup_{1 \leq i \leq n} \|f\|_{K \cap \{x_i + \bar{W}_i\}} < +\infty$.

O que demonstra a afirmação.

Em $\mathcal{H}_S(X)$ consideraremos a topologia localmente convexa $\mathcal{C}_{oe}$ da convergência uniforme sobre os subconjuntos compactos estritos de X .

Sejam (X, Ψ) um domínio modelado sobre E e f uma função S -holomorfa de X em $\mathbb{C}$. Se $U \subset X$ é um subconjunto aberto tal que $\Psi|_U$ é homeomorfismo e $x \in U$, existe uma sequência $(P_n)_{n=0}^\infty$ de elementos $P_n \in \mathcal{P}_b({}^n E)$, $n = 0, 1, \dots$, e uma vizinhança aberta convexa equilibrada V de zero em E tal que

$$f \circ (\Psi|_U)^{-1}(\Psi(x) + y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(y),$$

a série convergindo uniformemente para $y \in V$. A sequência $(P_n)_{n=0}^\infty$ é única e cada P_n é denotado por $\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x)$.

Da definição 1.7, item 4, segue que a igualdade acima pode ser escrita

$$f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x) y.$$

1.11 Proposição. Se $f \in \mathcal{H}_S(X)$, X domínio modelado sobre E e $y \in E$, então a aplicação $\hat{\delta}^n f(\cdot)(y): x \in X \longmapsto \hat{\delta}^n f(x)(y) \in \mathbb{C}$ é S -holomorfa em X , $n = 0, 1, \dots$

1.12 Proposição. (Integral de Cauchy) Sejam (X, Ψ) domínio modelado sobre E , $f \in \mathcal{H}_S(X)$, $x \in X$, V vizinhança aberta

de x tal que $\varphi|_V$ é homeomorfismo e existe $f' \in \mathcal{H}_S(\varphi(V))$ com $f|_V = f' \circ \varphi|_V$. Para $\xi \in V$ e $\rho > 1$ tal que $(1-\lambda)\varphi(\xi) + \lambda\varphi(x) \in \varphi(V)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq \rho$, tem-se que

$$f \circ (\varphi|_V)^{-1}(\varphi(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f \circ (\varphi|_V)^{-1}((1-\lambda)\varphi(\xi) + \lambda\varphi(x))}{\lambda-1} d\lambda.$$

1.13 Proposição. (Integral de Cauchy). Sejam (X, φ) domínio modelado sobre E , $f \in \mathcal{H}_S(X)$, $\xi \in X$, V vizinhança aberta de ξ tal que $\varphi|_V$ é homeomorfismo e existe $f' \in \mathcal{H}_S(\varphi(V))$ com $f|_V = f' \circ \varphi|_V$. Para $x \in E$ e $\rho > 0$ tal que $\varphi(\xi) + \lambda x \in \varphi(V)$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq \rho$,

$$\frac{1}{n!} \delta^n f(\xi)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi + \lambda x)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

para $n = 0, 1, \dots$.

1.14 Proposição. (Desigualdade de Cauchy). Sejam (X, φ) domínio modelado sobre E , $f \in \mathcal{H}_S(X)$, $\xi \in X$, V vizinhança aberta de ξ tal que $\varphi|_V$ é homeomorfismo e existe $f' \in \mathcal{H}_S(\varphi(V))$ com $f|_V = f' \circ \varphi|_V$. Para $B \in \mathcal{B}_E$ e $\rho_B > 0$ tal que $\varphi(\xi) + \rho_B B \subset \varphi(V)$,

$$\left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(\xi) \right\|_B = \sup_{x \in B} \left| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(\xi)(x) \right| < \frac{1}{\rho_B^n} \sup_{x \in \xi + \rho_B B} |f(x)|$$

para $n = 0, 1, \dots$

1.15 Definição. Seja A uma família de funções S -holomorfas definidas sobre um domínio modelado $(X, \mathcal{V})$ sobre E .

(1) Um morfismo $j: X \longrightarrow Y$ de domínios sobre E é dito ser uma continuação S -holomorfa simultânea (c. S -h.s.) de A se cada $f \in A$ se fatora S -holomorficamente através de j , isto é, existe $f' \in \mathcal{H}_S(Y)$ tal que $f = f' \circ j$.

(2) Uma c. S -h.s. $j: X \longrightarrow Y$ de A é dita ser maximal se ela se fatora através de qualquer c. S -h.s. de A como um morfismo. Se $j: X \longrightarrow \mathcal{E}(X)$ é uma c. S -h.s. maximal de $\mathcal{H}_S(X)$, então $\mathcal{E}(X)$ é chamado uma envoltória de S -holomorfia de X .

(3) X é dito ser um A -domínio de S -holomorfia se qualquer c. S -h.s. de A é um isomorfismo de domínios. X é um domínio de S -holomorfia se X é um $\mathcal{H}_S(X)$ - domínio de S -holomorfia.

A envoltória de S -holomorfia é o domínio maximal de prolongamento simultâneo de todas as funções S -holomorfas sobre X . Toda envoltória de S -holomorfia é um domínio de S -holomorfia.

Para concluir este capítulo apresentaremos os conceitos de função plurisubharmônica e de pseudo convexidade.

1.16 Definição. Seja U um subconjunto aberto de um espaço vetorial topológico E . Uma função $v: U \subset E \rightarrow [-\infty, +\infty)$, $v \not\equiv -\infty$, é dita plurisubharmônica em U se

- a) v é semicontínua superiormente (s.c.s.), isto é, $\{z \in U; v(z) < c\}$ é aberto para todo c real.
- b) para todo par (a,b) de $U \times (E-\{0\})$, a função de uma variável complexa $\xi \mapsto v(a + \xi b)$ é subharmônica ou $-\infty$ em cada componente conexa de $\{\xi \in \mathbb{C}; a + \xi b \in U\}$.

$P(U)$ e $P_c(U)$ denotarão, respectivamente, as famílias das funções plurisubharmônicas e plurisubharmônicas contínuas sobre U .

1.17 Definição. Sejam U um subconjunto aberto de um e.l.c. E , d_U a função com valores em $(0, +\infty]$ definida sobre $U \times (E-\{0\})$ por

$$d_U(z, z') = \inf\{|\lambda|; z + \lambda z' \notin U\}.$$

Diz-se que U é pseudo-convexo se a função $-\log d_U$ é plurisubharmônica sobre $U \times (E-\{0\})$.

Fixado $z' \in (E - \{0\})$, a função d_U é a distância de z ao complementar de U na direção z' .

CAPÍTULO 2

CONSTRUÇÃO DA ENVOLTÓRIA DE S-HOLOMORFIA VIA GERMES DE FUNÇÕES S-HOLOMORFAS.

Neste capítulo, utilizando germes de funções S-holomorfas, construímos a envoltória de S-holomorfia de um espaço conexo modelado sobre um espaço localmente convexo separado. Mostramos que esta envoltória possui uma propriedade de convexidade S-holomorfa e que as funções S-holomorfas separam seus pontos.

2.1 Proposição. Sejam E um espaço localmente conexo separado e $U \subset E$ um subconjunto aberto conexo não vazio. Se $f, g \in \mathcal{H}_S(U)$ e coincidem sobre um aberto não vazio de U , então coincidem sobre todo U .

Demonstração. Seja $A \subset U$ um aberto não vazio onde f e g coincidem. Sejam $a \in A$, $x \in U$ arbitrário, γ um caminho em U que liga a e x . Tem-se que $\text{Im } \gamma \subset U$ e é compacto. Seja $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $\text{Im } \gamma \subset B$, então $\text{Im } \gamma \subset U \cap E_B$ e $A \cap E_B \subset U \cap E_B$. A componente conexa U' de $U \cap E_B$ que contém a contém $\text{Im } \gamma$. Por hipótese $f = g$ em uma vizinhança de a , portanto coincidem, como funções holomorfas, em uma vizinhança de a em U' , logo coincidem sobre todo U' pelo prolongamento analítico. Segue daí que $f(x) = g(x)$ pois $x \in U'$.

Notemos que se $F = \prod_{i \in I} F_i$ é um produto de espaços localmente convexos, f uma aplicação de um espaço localmente convexo E em F e se $f = (f_i)_{i \in I}$, onde as f_i são aplicações coordenadas de E em F_i , então a aplicação f é S-holomorfa se, e só se, cada f_i o é.

Sejam E um espaço localmente convexo, $a \in E$ um ponto de E , V_1, V_2 subconjuntos abertos de E contendo a . Se

$$f = (f_i)_{i \in I} : V_1 \longrightarrow \mathbb{C}^I$$

$$g = (g_i)_{i \in I} : V_2 \longrightarrow \mathbb{C}^I$$

são aplicações S-holomorfas, dizemos que $f \sim g$ se, e somente se, existe $W \subset E$ aberto, $a \in W \subset V_1 \cap V_2$, com $f_i|_W = g_i|_W$, para todo $i \in I$. Esta é uma relação de equivalência em

$$H_E(a) = \bigcup_{\substack{U \subset E \text{ aberto} \\ U \ni \{a\}}} \mathcal{H}_S(U; \mathbb{C}^I) \quad \text{e denotamos por } ((f_i)_a)_{i \in I} \text{ a classe de equivalência a que } f = (f_i)_{i \in I} \text{ pertence. } ((f_i)_a)_{i \in I} \text{ será denominado um germe da família } (f_i)_{i \in I} \text{ para } a.$$

2.2 Teorema Todo domínio modelado sobre um espaço localmente convexo separado admite uma envoltória de S-holomorfia que é única a menos de isomorfismo.

Demonstração. Seja (X, φ) um domínio modelado sobre um espaço localmente convexo separado E e $I = \mathcal{H}_S(X)$. Para todo subconjunto aberto $V \subset E$ tal que existe subconjunto aberto $U \subset X$ com $\varphi|_U$ homeomorfismo sobre V definimos

$$\mathcal{O}_E(V) = \{f \in \mathcal{H}_S(V) ; \exists g \in \mathcal{H}_S(U) \text{ com } f = g \circ (\varphi|_U)^{-1}\}$$

Consideremos o conjunto X' definido por

$$X' = \{(a, ((f_i)_a)_{i \in I}) ; a \in E \text{ e } f = (f_i)_{i \in I} \text{ é tal que}$$

$$\exists V \subset E \text{ aberto com } a \in V \text{ e } f_i \in \mathcal{O}_E(V), \forall i \in I\}.$$

Para todo subconjunto aberto $V \subset E$, para todo $(g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{O}_E(V)$ definimos $N(V, (g_i)_{i \in I}) = \{(a, ((g_i)_a)_{i \in I}), a \in V\}$; estes conjuntos geram sobre X' uma topologia mais fina que a topologia produto e portanto é separada. Então (X', φ') é um espaço modelado sobre E definindo $\varphi'(a, (((f_i)_a)_{i \in I})) = a$.

Definimos uma aplicação $u': X \rightarrow X'$ do seguinte modo: se $x \in X$, existe uma vizinhança U de x tal que $\varphi|_U$ é um homeomorfismo de U sobre $\varphi(U)$, definimos:

$$u'(x) = (\varphi(x), (((\varphi|_U)^{-1})_{\varphi(x)})_{i \in I}) \in X'.$$

Das definições de u' e da topologia de X' temos que u' é contínua e é um morfismo de espaços modelados. Como X é conexo, temos que $u'(X)$ é conexo em X' . Notemos por $\tilde{X}$ a componente conexa de X' que contem $u'(X)$, por u a restrição $u': X \rightarrow \tilde{X}$ e por $\tilde{\Psi}$ a restrição $\Psi'|_{\tilde{X}}$ ($\tilde{\Psi}(a, ((f_i)_a)_{i \in I}) = a$). Temos deste modo que $(\tilde{X}, \tilde{\Psi})$ é um domínio modelado sobre E e que u é um morfismo de (X, Ψ) em $(\tilde{X}, \tilde{\Psi})$.

Mostremos que $(\tilde{X}, \tilde{\Psi})$ é uma envoltória de S -holomorfia de (X, Ψ) . Para cada função j S -holomorfa sobre X definimos uma função f_j' sobre X' como segue: se $(a, ((g_i)_a)_{i \in I}) \in X'$ colocamos $f_j'(a, ((g_i)_a)_{i \in I}) = g_j(a)$. Denotamos a restrição de f_j' a $\tilde{X}$ por $\tilde{f}_j$. A função $\tilde{f}_j$ é o prolongamento procurado de j pois é S -holomorfa sobre $\tilde{X}$, e pela construção de u , $j = \tilde{f}_j \circ u$. Esta função é única pois toda outra função $\tilde{g}_j$ sobre $\tilde{X}$ satisfazendo a $j = \tilde{g}_j \circ u$ coincide com $\tilde{f}_j$ sobre $u(X)$, que é um aberto de $\tilde{X}$, e portanto sobre todo $\tilde{X}$ pelo prolongamento S -holomorfo.

Seja agora, uma extensão S -holomorfa $v: (X, \Psi) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{\Psi})$. O conjunto $\mathcal{H}_S(\tilde{X})$ é canonicamente isomorfo a $\mathcal{H}_S(X)$. Seja $\tilde{j} \in \mathcal{H}_S(\tilde{X})$ o elemento correspondente a $j \in \mathcal{H}_S(X)$ por este isomorfismo. Definimos uma aplicação $\tilde{u}'$ de $\tilde{X}$ em X' como anteriormente: seja $x \in \tilde{X}$, $\tilde{j} \in \mathcal{H}_S(\tilde{X})$ e U uma vizinhança de x tal

que $\tilde{\varphi}|_U$ é homeomorfismo sobre $\tilde{\varphi}(U)$, e colocamos

$$\bar{u}'(x) = (\tilde{\varphi}(x), ((\text{Id} \circ (\tilde{\varphi}|_U)^{-1})_{\tilde{\varphi}(x)})_{i \in I}) .$$

Como anteriormente, pode-se verificar que $\bar{u}'$ é contínua, que é um morfismo de espaços modelados e que $u' = \bar{u}' \circ v$. Como $\tilde{X}$ é conexo, assim é $\bar{u}'(\tilde{X})$, segue daí que $\bar{u}'(\tilde{X}) \subset \tilde{X}$. Denotamos por $\bar{u}$ o morfismo restrição de $\bar{u}'$ a $\tilde{X}$,

$$\bar{u} : (\tilde{X}, \tilde{\varphi}) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{\varphi}) ,$$

com $u = \bar{u} \circ v$, o que prova que $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$ é uma envoltória de S-holomorfia.

A envoltória de S-holomorfia é única. De fato, sejam $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$ e $(\tilde{X}', \tilde{\varphi}')$ duas envoltórias de S-holomorfia, aplicando a condição de maximalidade a cada uma delas obtem-se dois morfismos $\varphi : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}'$ e $\varphi' : \tilde{X}' \longrightarrow \tilde{X}$, que satisfazem $\varphi' \circ \varphi = \text{id}_{\tilde{u}(X)}$ e $\varphi \circ \varphi' = \text{id}_{\tilde{u}'(X)}$; estas identidades se prolongam a $\tilde{X}$ e a $\tilde{X}'$, o que prova que $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$ e $(\tilde{X}', \tilde{\varphi}')$ são isomorfas.

2.3 Proposição. Se (X, φ) é um domínio de S-holomorfia, as funções S-holomorfas em X separam os pontos de X .

Esta proposição segue do resultado análogo para

funções holomorfas, se $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$ é a envoltória de holomorfia de (X, φ) , então $\mathcal{H}(\tilde{X})$ separa pontos de $\tilde{X}$, mas $\mathcal{H}(\tilde{X})$ é canonicamente isomorfo a $\mathcal{H}(X)$, $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{H}_S(X)$ e X é isomorfo a um subconjunto de $\tilde{X}$ uma vez que X é isomorfo à sua envoltória de S-holomorfia.

2.4 Definição. Seja (X, φ) um domínio modelado sobre um espaço localmente convexo E . Para todo $x \in X$, $A \subset X$ e $p \in \text{SNC}(E)$ definimos:

$$d_p(x) = \sup\{r > 0; \exists X'_r \subset X \text{ aberto com } x \in X'_r \text{ e com } X'_r \text{ homeomorfo a } B_p(\varphi(x), r)\}$$

$$d_p(A) = \inf_{x \in A} d_p(x) .$$

2.5 Teorema. Seja (X, φ) um domínio de S-holomorfia modelado sobre um espaço localmente conexo E . Para todo compacto estrito K de X , existe uma seminorma contínua p sobre E tal que $d_p(\tilde{K} \mathcal{H}_S(X)) = d_p(K)$ onde $\tilde{K} \mathcal{H}_S(X)$ é a envoltória S-holomorficamente convexa de K .

Demonstração. Seja p uma seminorma contínua em E tal que $d_p(K) = \delta > 0$. Para todo ponto fixo $y \in E$ tal que $p(y) < \delta$, escolhemos $\delta_1 > 1$ de modo que, se $K_y = \varphi(K) + \{\lambda y; |\lambda| \leq \delta_1\}$ então $d_p(K + \{\lambda y; |\lambda| \leq \delta_1\}) > 0$. Como $K \subset X$ é compacto estrito, existe

$B \in \mathcal{B}_E$ tal que $\varphi(K) \subset E_B$, é compacto aí e $\varphi(\hat{K}_{\mathcal{H}_S(X)}) \subset E_B$ pois $\varphi(\hat{K}_{\mathcal{H}_S(X)}) \subset \widehat{\varphi(K)}_{\mathcal{H}_S(E)}$. Seja $B_1 = [B \cup \{\lambda y; |\lambda| \leq \delta_1\}]$ a envoltória equilibrada convexa de $B \cup \{\lambda y; |\lambda| \leq \delta_1\}$. $E_B \hookrightarrow E_{B_1}$ continuamente, assim $\varphi(K) \subset E_{B_1}$, é compacto aí e $\varphi(\hat{K}_{\mathcal{H}_S(X)}) \subset E_{B_1}$. Como $\{\lambda y; |\lambda| \leq \delta_1\} \subset E_{B_1}$ e é compacto aí, tem-se que K_y é compacto em E_{B_1} .

Da compacidade de K_y e da definição de função S-holomorfa sobre um domínio modelado segue que para cada $f \in \mathcal{H}_S(X)$ existe $\tilde{f}$ S-holomorfa na vizinhança de K_y através da qual f se fatora, isto é, $f = \tilde{f} \circ \varphi$ na vizinhança de $K + \{\lambda y; |\lambda| \leq \delta_1\}$. Escolhemos uma vizinhança W convexa e equilibrada da origem em E tal que $W_{B_1} = W \cap E_{B_1}$ e $\|\tilde{f}\|_{K_y + \delta_1 W_{B_1}} = M < +\infty$.

Se $x \in \hat{K}_{\mathcal{H}_S(X)}$ e V_x é vizinhança de x onde φ é homeomorfismo, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$ e $w \in W_{B_1}$ tem-se que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n (f \circ (\varphi|_{V_x})^{-1}) (\varphi(x)) (\lambda y + w) \right| \leq \\ & \leq \sup_{t \in K} \left| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n (f \circ (\varphi|_{V_t})^{-1}) (\varphi(t)) (\lambda y + w) \right| \\ & = \sup_{t \in K} \left| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n \tilde{f}(\varphi(t)) (\lambda y + w) \right| \end{aligned}$$

$$= \sup_{t \in K} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda_1| = \delta_1} \frac{\tilde{f}(\varphi(t) + \lambda_1(\lambda y + w))}{\lambda_1^{n+1}} d\lambda_1 \right| ,$$

com V_t vizinhança de t onde φ é homeomorfismo. Mas $\varphi(t) + \lambda_1 \lambda y + \lambda_1 w \in K_y + \delta_1 W_{B_1}$, logo

$$\left| \frac{1}{n!} \delta^n (f \circ (\varphi|_{V_x})^{-1})(\varphi(x))(\lambda y + w) \right| \leq \frac{1}{\delta_1^n} \|\tilde{f}\|_{K_y + \delta_1 W_{B_1}}$$

$$\leq M \delta_1^{-n}$$

para todo $x \in \hat{K} \mathcal{H}_S(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \leq 1$, $w \in W_{B_1}$. Segue daí que

$$\sum_{n \geq 0} \sup_{\substack{|\lambda| \leq 1 \\ w \in W_{B_1}}} \left| \frac{1}{n!} \delta^n (f \circ (\varphi|_{V_x})^{-1})(\varphi(x))(\lambda y + w) \right| < +\infty ,$$

o que prova que para todo $x \in \hat{K} \mathcal{H}_S(X)$,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \delta^n (f \circ (\varphi|_{V_x})^{-1})(\varphi(x))(z)$$

converge uniformemente para z em uma vizinhança em E_{B_1} de cada

$y \in B_p(0, \delta)$. Como isto é válido para todo $B \in \mathcal{B}_E$, tem-se que a

série acima define uma função g_f S -holomorfa em $\hat{K} \mathcal{H}_S(X) + B_p(0, \delta)$

tal que $g_f \circ \varphi|_{V_x}$ possui para todo $x \in \hat{K} \mathcal{H}_S(X)$ o mesmo desenvolvimento de Taylor

que f . A bola $B_p(o, \delta)$ independe da função f considerada.

Temos que $d_p(K) \geq d_p(\hat{K} \mathcal{H}_S(X))$. Supomos que $d_p(X) > d_p(\hat{K} \mathcal{H}_S(X))$, então existe $x_0 \in \hat{K} \mathcal{H}_S(X)$ tal que $d_p(x_0) = r_0 < d_p(K) = \delta$. Sejam $a = \psi(x_0)$, $P_0 = B_p(a, \delta)$ e X_0 a componente conexa de $\psi^{-1}(P_0)$ que contem x_0 .

Mostremos que $\psi|_{X_0}$ é injetiva. Da parte anterior, para toda $f \in \mathcal{H}_S(X)$ existe $g_f \in \mathcal{H}_S(P_0)$ tal que $f|_{X_0} = g_f \circ \psi|_{X_0}$. Por outro lado, como (X, ψ) é um domínio de S -holomorfia, segue do teorema 2.4 que $\mathcal{H}_S(X)$ separa os pontos de X . Sejam $x, y \in X_0$. Se $\psi(x) = \psi(y)$, então $g_f(\psi(x)) = g_f(\psi(y))$ e assim $f(x) = f(y)$ para toda $f \in \mathcal{H}_S(X)$, de onde segue que $x = y$ e que ψ é injetiva.

Consideremos agora $r_0 < r < \delta$ e $X_1 = \{x \in X_0 ; p(\psi(x) - a) < r\}$. Seja Y a união disjunta de X e $P = \{z \in E ; p(z-a) < r\}$. Define-se a seguinte relação de equivalência sobre Y :

- (1) Se $z \in P$ e não existe $x \in X_1$ tal que $\psi(x) = z$, então z é equivalente apenas a si próprio.
- (2) Se $z \in P$ e existe $x \in X_1$ tal que $\psi(x) = z$, então z é equivalente a x .
- (3) Se $x \in X$ e $x \notin X_1$, então x é equivalente apenas a si próprio.

Seja Z o quociente de Y por esta relação de equivalência. Então Z é Hausdorff, e a aplicação de Y em E que é ψ sobre X e é a inclusão de P em E induz um homeomorfismo local $\psi': Z \rightarrow E$. Ainda mais, a inclusão de X em Y induz uma aplicação $\theta: X \rightarrow Z$ tal que $\psi = \psi' \circ \theta$. Afirmamos que para toda $f \in \mathcal{H}_S(X)$ existe $F_f \in \mathcal{H}_S(Z)$ tal que $F_f \circ \theta = f$. De fato, desde que existe $g_f \in \mathcal{H}_S(P_0)$ tal que $f|_{X_0} = g_f \circ \psi|_{X_0}$, definimos uma função G_f sobre Y por $G_f|_X = f$, $G_f|_P = g_f|_P$. Isto induz $F_f \in \mathcal{H}_S(Z)$ com $F_f \circ \theta = f$. Portanto (Z, ψ') é uma extensão S -holomorfa de (X, ψ) . Como (X, ψ) é, por hipótese, um domínio de S -holomorfia, segue que θ é um isomorfismo. Em particular, como Z contém uma p -bola de raio r com centro $\theta(x_0)$, X contém um subconjunto aberto X'_r homeomorfo a esta p -bola, com $x_0 \in X'_r$, o que contradiz a hipótese de que $d_p(x_0) = r_0 < r$, logo $d_p(\hat{K}_{\mathcal{H}_S(X)}) = d_p(K)$.

CAPÍTULO 3

ENVOLTÓRIA NORMAL DE S-HOLOMORFIA

Seja E um espaço localmente convexo separado possuindo um sistema fundamental de limitados B_i completos. Desta forma tem-se que E_B é Banach para qualquer $B \in \mathcal{B}_E$. Seja U um domínio em E e consideremos o espaço $\mathcal{H}_S(U)$ equipado com a topologia τ_{oe} . Seja $\mathcal{J}$ o espectro de $\mathcal{H}_S(U)$, isto é, $\mathcal{J}$ é o conjunto dos homomorfismos contínuos não nulos de $\mathcal{H}_S(U)$ em $\mathbb{C}$.

Nosso objetivo ao estudarmos o espectro $\mathcal{J}$ é torná-lo uma variedade modelada sobre E tal que as funções S-holomorfas sobre U se estendam a $\mathcal{J}$.

Necessitaremos da derivada direcional complexa. Para $u \in E$ e $f \in \mathcal{H}_S(U)$ define-se uma função $D_u f$ sobre U por

$$(D_u f)(x) = \frac{d}{d\lambda} f(x + \lambda u) \Big|_{\lambda=0}$$

3.1 Teorema. Se $f, g \in \mathcal{H}_S(U)$, $u, v, u_1, u_2, \dots, u_n \in E$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

- (a) $f \longmapsto D_u f$ é uma aplicação linear contínua de $\mathcal{H}_S(U)$ em $\mathcal{H}_S(U)$.
- (b) $D_u D_v f = D_v D_u f$.

$$(c) \quad D_{\alpha u}^n f = \alpha^n D_u^n f, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

$$(d) \quad D_{u+v}^n f = \sum_{s+t=n} \frac{n!}{s!t!} D_u^s (D_v^t f)$$

$$(e) \quad D_u^n (fg) = \sum_{s+t=n} \frac{n!}{s!t!} D_u^s f D_u^t g$$

$$(f) \quad (D_{u_1} D_{u_2} \dots D_{u_n} f)(x) = f^{(n)}(x)(u_1, \dots, u_n) \text{ onde } f^{(n)}(x)$$

é a n-ésima derivada de Fréchet de f em x .

Demonstração de (a): Que $f \mapsto D_u f$ é uma aplicação linear é trivial. Mostremos que é contínua. Seja $K \subseteq U$ compacto estrito. Devemos mostrar que existe um compacto estrito $L \subseteq U$ e $A > 0$ tal que $\|D_u f\|_K \leq A \|f\|_L$. Tomemos $A > 0$ tal que $L = K + \{\lambda u; |\lambda| \leq A^{-1}, \lambda \in \mathbb{C}\}$ está contido em U . L é compacto estrito. Fixemos $k \in K$ e tomemos $g(\lambda) = f(k + \lambda u)$ para $|\lambda| \leq A^{-1}$. Então por Cauchy,

$$|g'(0)| \leq (A^{-1})^{-1} \|g\|_{\{\lambda; |\lambda| \leq A^{-1}\}}.$$

$$\text{Logo, } |D_u f(k)| \leq A \|f\|_L, \text{ e assim } \|D_u f\|_K \leq A \|f\|_L.$$

As demonstrações de (b), (c), (d), (e) e (f) não apresentam maiores dificuldades.

Se $h \in \mathcal{Y}$, pela definição da topologia τ_{oe} , existe um conjunto compacto estrito $K \subseteq U$ e $M > 0$ tal que $|h(f)| \leq M \|f\|_K$, para toda $f \in \mathcal{H}_S(U)$. Aplicando este resultado para f^n , tomando a n -ésima raiz e fazendo $n \rightarrow +\infty$ obtem-se $|h(f)| \leq \|f\|_K$ para toda $f \in \mathcal{H}_S(U)$. Quando isto vale para $h \in \mathcal{J}$ e $K \subseteq U$ compacto estrito, denotamos $K \succcurlyeq h$. Queremos encontrar uma projeção $\pi: \mathcal{J} \rightarrow E$. Seja $h \in \mathcal{J}$ fixo. Identificamos o espaço vetorial das funções lineares de E em $\mathbb{C}$ que são limitadas sobre os subconjuntos limitados de E , denotado por E^* , com um subespaço de $\mathcal{H}_S(U)$ e encontraremos para h um $a \in E$ tal que

$$(1) \quad F(a) = h(F) \quad \text{para toda } F \in E^*.$$

Se a existe, então ele é único desde que E^* separa os pontos de E . Tomemos $K \subseteq U$ compacto estrito tal que $K \succcurlyeq h$ e seja L a envoltória convexa fechada de K em E . Então L é compacto estrito. De fato, por hipótese existe $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subseteq U \cap E_B$ e é compacto aí. A envoltória convexa fechada L de K em E está contida em E_B que é Banach e portanto L é compacto em E_B .

Queremos encontrar $a \in L$ satisfazendo (1).

Seja $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ um subconjunto finito de E^* . Define-se $\alpha_{\mathcal{F}} = \{x \in L; F_i(x) = h(F_i), 1 \leq i \leq n\}$. Afirmamos que $\alpha_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$. Su

ponemos $\alpha_{\mathcal{F}} = \emptyset$. Se $T: E \rightarrow \mathbb{C}^n$ é definida por $T(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$, então $(h(F_1), \dots, h(F_n)) = p \notin T(L)$. Mas T é linear e S-contínua e L é um conjunto convexo compacto estrito e assim é $T(L)$. Pelo teorema da separação, existe um funcional linear G sobre $\mathbb{C}^n$ tal que

$$(2) \quad \operatorname{Re} G(p) > \operatorname{Re} G(T(L)).$$

Tomando $f = e^{G(F_1, \dots, F_n)}$, temos que $f \in \mathcal{H}_S(U)$ e de (2) segue que $|h(f)| > \|f\|_L \geq \|f\|_K$ o que é um absurdo pois $K \ni h$. Assim $\alpha_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ e tem-se ainda que $\alpha_{\mathcal{F}}$ é fechado em L desde que L é compacto estrito e as F_i são S-contínuas. A família $\{\alpha_{\mathcal{F}}; \mathcal{F} \text{ é um subconjunto finito de } E^*\}$ tem a propriedade da intersecção finita desde que

$$\alpha_{\mathcal{F}_1} \cap \dots \cap \alpha_{\mathcal{F}_q} \supseteq \alpha_{\mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_q} \neq \emptyset.$$

Assim pela compacidade de L vemos que $\bigcap \alpha_{\mathcal{F}}$ é não vazia, logo se $a \in \bigcap \alpha_{\mathcal{F}}$ então quando $\mathcal{F} = \{F\}$ temos que $F(a) = h(F)$, isto é, a satisfaz (1) (e portanto a é o único elemento de $\bigcap \alpha_{\mathcal{F}}$) e pondo $\pi(h) = a$ define-se uma aplicação $\pi: \mathcal{J} \rightarrow E$.

Topologia para $\mathcal{J}$.

Sejam $h \in \mathcal{J}$, $K \subseteq U$ compacto estrito com $K \ni h$, e V uma vizinhança equilibrada convexa de $\emptyset$ em E tal que $K + V \subseteq U$. Define-se formalmente um funcional linear h_u para $u \in V$ sobre

$\mathcal{H}_S(U)$ por

$$h_u(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} h(D_u^n f), \quad f \in \mathcal{H}_S(U).$$

Mostremos que h_u é um homomorfismo contínuo de $\mathcal{H}_S(U)$. Mostremos primeiro que a série converge absolutamente. Como $u \in V$, existe $\alpha > 1$ tal que $\{\lambda u ; |\lambda| \leq \alpha\} \subseteq V$. Desde que $K \ni h$

$$(3) \quad |h(D_u^n f)| \leq |D_u^n f|_K.$$

Sejam $k \in K$ e $g(\lambda) = f(k + \lambda u)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq \alpha$. Por Cauchy

$$(4) \quad |g^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\alpha^n} \|g\|_{\{\lambda ; |\lambda| \leq \alpha\}}.$$

Seja $K_u = K + \{\lambda u ; |\lambda| \leq \alpha\}$, então K_u é um subconjunto compacto estrito de U e (4) implica que

$$|(D_u^n f)(k)| \leq \frac{n!}{\alpha^n} \|f\|_{K_u},$$

portanto

$$\|D_u^n f\|_K \leq n! \alpha^{-n} \|f\|_{K_u}.$$

Isto com (3) implica que $|h(D_u^n f)| \leq \frac{n!}{\alpha^n} \|f\|_{K_u}$, assim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |h(D_u^n f)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} \|f\|_{K_u} = \frac{1}{1-\alpha^{-1}} \|f\|_{K_u},$$

A convergência é absoluta e $|h_u(f)| \leq \frac{1}{1-\alpha} \|f\|_{K_u}$. Agora vamos provar que h_u é um homomorfismo. h_u é obviamente uma aplicação linear, logo basta mostrar que $h_u(fg) = h_u(f) h_u(g)$. Desde que a estimativa acima implica

$$\sum_{n,m} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} |h(D_u^n f)| |h(D_u^m g)| < +\infty,$$

pode-se trocar a ordem das somatórias abaixo e obter

$$\begin{aligned} h_u(fg) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} h(D_u^n (fg)) \\ &= \sum_{\substack{n \geq 0 \\ s+t=n}} \frac{1}{n!} \frac{n!}{s!t!} h(D_u^s f) h(D_u^t g) \\ &= \sum_{s \geq 0} \frac{1}{s!} h(D_u^s f) \sum_{t \geq 0} \frac{1}{t!} h(D_u^t g) \\ &= h_u(f) h_u(g). \end{aligned}$$

h_u não é identicamente zero desde que $1 \in \mathcal{H}_S(U)$ e $D_u^n 1 = 0$, para $n \geq 1$, implica $h_u(1) = h(1) = 1$. Portanto h_u é um homomorfismo contínuo, e como $|h_u(f)| \leq \frac{1}{1-\alpha} \|f\|_{K_u}$ segue como anteriormente que

$$(5) \quad |h_u(f)| \leq \|f\|_{K_u}.$$

Podemos agora calcular $\pi(h_u)$. Se $F \in E^*$, então

$D_u F = F(u)$ e $D_u^n F \equiv 0$ para $n > 1$, assim

$$h_u(F) = h(F) + h(F(u))$$

$$= F(\pi(h)) + F(u)$$

$$= F(\pi(h) + u) .$$

Disto e da definição de π segue que

$$(6) \quad \pi(h_u) = \pi(h) + u .$$

Se $h \in \mathcal{J}$, $K \ni h$, e V vizinhança equilibrada convexa de 0 em E tal que $K + V \subseteq U$, consideremos o conjunto $N_{h,V} = \{h_u ; u \in V\}$. Diz-se que $W \subseteq \mathcal{J}$ é um aberto se $h \in W$ implica que existe algum $N_{h,V}$ contido em W . Isto dá uma topologia para $\mathcal{J}$.

Demonstremos agora que $\pi: \mathcal{J} \rightarrow E$ é um homeomorfismo local. De (6), π sobre $N_{h,V}$ é dada por $\pi(h_u) = \pi(h) + u$, assim se provarmos que $N_{h,V}$ é aberto, segue que π é um homeomorfismo local e que $\pi|_{N_{h,V}}$ é um homeomorfismo de $N_{h,V}$ sobre $\pi(h) + V$.

Seja $h_u \in N_{h,V}$. Existe um $K \ni h$ com $K + V \subseteq U$ e um compacto estrito $L \ni h_u$. Seja W uma vizinhança convexa equilibrada de 0 em E tal que $L + W \subseteq U$ e $u + W \subseteq V$. Se demonstrarmos que $N_{h_u,W} \subseteq N_{h,V}$, segue daí que $N_{h,V}$ é um aberto. Se $w \in W$, então $u + w \in V$ e usando as

propriedades da derivada direcional tem-se que

$$\begin{aligned}
 (h_u)_w(f) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} h_u(D_w^n f) \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} h(D_u^m (D_w^n f)) \right) \\
 &= \sum_{s \geq 0} \frac{1}{s!} h \left(\sum_{n+m=s} \frac{s!}{n!m!} D_u^m (D_w^n f) \right) \\
 &= \sum_{s \geq 0} \frac{1}{s!} h(D_{u+w}^s f) = h_{u+w}(f).
 \end{aligned}$$

Assim $(h_u)_w = h_{u+w} \in N_{h,V}$ e $N_{h_u,W} \subseteq N_{h,V}$.

Desde que π é um homeomorfismo local, $\mathcal{J}$ é uma variedade modelada sobre E . Uma função F sobre $\mathcal{J}$ é S -holomorfa quando $F \circ (\pi|_{N_{h,V}})^{-1}$ é S -holomorfa sobre $\pi(h) + V$ para cada $N_{h,V}$.

Para cada $f \in \mathcal{H}_S(U)$, define-se $\hat{f}$ sobre $\mathcal{J}$ por $\hat{f}(h) = h(f)$. $\hat{f}$ é S -holomorfa sobre $\mathcal{J}$. Seja $h \in \mathcal{J}$ e $K \subset U$ compacto estrito tal que $K \ni h$. Seja V uma vizinhança equilibrada de 0 em E tal que $K + V \subseteq U$. Vamos mostrar que $\hat{f} \circ (\pi|_{N_{h,V}})^{-1}$ é S -holomorfa em $\pi(h) + V$. Seja $\pi(h) + u_0 \in \pi(h) + V$. $K_{u_0} \subseteq U$ é compacto estrito. Se $B \in \mathcal{B}_E$ e $K_{u_0} \subset U \cap E_B$ e é compacto aí, existe $\rho_B > 0$ e $M_B > 0$ tais que

$$\|\hat{f}\|_{K_{u_0} + \rho_B B} \leq M_B.$$

Consideremos a seguinte vizinhança de $\pi(h) + u_0$ em

$E_B: \pi(h) + u_0 + \frac{1}{2} \varrho_B B$, de modo que $\{u_0\} + \varrho_B B \subset V$.

Então

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \frac{1}{2} \varrho_B B} |\hat{f}(\pi|_{N_{h,V}})^{-1}(\pi(h) + u_0 + t)| &= \sup_{t \in \frac{1}{2} \varrho_B B} |\hat{f}(h_{u_0+t})| \\ &= \sup_{t \in \frac{1}{2} \varrho_B B} |h_{u_0+t}(f)| \\ &\leq \sup_{t \in \frac{1}{2} \varrho_B B} |(h_{u_0})_t(f)| \\ &\leq \sup_{t \in \frac{1}{2} \varrho_B B} \|f\|_{(K_{u_0})_t} < M_B \end{aligned}$$

pois $(K_{u_0})_t \subset K_{u_0} + \varrho_B B$ e onde $K_{u_0} \ni h_{u_0}$, $(K_{u_0})_t \ni (h_{u_0})_t$.

Mostremos agora que a aplicação $\hat{f}(\pi|_{N_{h,V}})^{-1}$ é G-holomorfa em $\pi(h) + V$. Como

$$\hat{f}(\pi|_{N_{h,V}})^{-1}(\pi(h) + u) = \hat{f}(h_u) = h_u(f),$$

é suficiente mostrar que a aplicação $u \mapsto h_u(f)$ é G-holomorfa sobre V . Sejam $u \in V$, $w \in E$, e tomemos para $\lambda \in \mathbb{C}$ $g(\lambda) = h_{u+\lambda w}(f)$. Supomos $u + \lambda_0 w \in V$, mostremos que g é holomorfa para λ_0 . Escolhe

mos $\varepsilon > 0$ tal que $u + \lambda_0 w + \varepsilon w \in V$ para $|\varepsilon| \leq \varepsilon$.

Assim se

$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ temos

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= h_{u+\lambda_0 w + (\lambda - \lambda_0)w}(f) \\ &= (h_{u+\lambda_0 w})(\lambda - \lambda_0)w(f) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} h_{u+\lambda_0 w} \left(\frac{D^n_{(\lambda - \lambda_0)w}}{\varepsilon} (f) \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{(\lambda - \lambda_0)^n}{\varepsilon^n} h_{u+\lambda_0 w} (D^n_{\varepsilon w}(f)). \end{aligned}$$

Esta série converge uniformemente e absolutamente para $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$ pois $u + \lambda_0 w + \varepsilon w \in V$ implica

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} |h_{u+\lambda_0 w}(D^n_{\varepsilon w} f)| < +\infty$$

como vimos anteriormente. Assim se $f \in \mathcal{H}_S(U)$, então $\hat{f} \in \mathcal{H}_S(J)$.

Existe uma aplicação natural $i: U \longrightarrow J$ definida por $i(x) =$ homomorfismo avaliação para x ($i(x)(f) = f(x)$ para toda $f \in \mathcal{H}_S(U)$). Claramente $\pi \circ i = \text{id}_U$. Isto implica que i é 1-1 e como π é um homeomorfismo local definindo a estrutura S -holomorfa

de J , i é um homeomorfismo local holomorfo e consequentemente um biholomorfismo de U sobre um subconjunto aberto de J . Como U é aberto conexo, existe uma componente $\mathcal{E}$ de J contendo $i(U)$. Agora a aplicação inclusão $j: U \rightarrow \mathcal{E}$ induz $j^*: \mathcal{H}_S(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{H}_S(U)$ onde $j^*(F) = F \circ j$ para $F \in \mathcal{H}_S(\mathcal{E})$. j^* é 1-1 desde que se $F \in \mathcal{H}_S(\mathcal{E})$ e $j^*(F) = 0$, então F se anula identicamente sobre o conjunto aberto $j(U) \subset \mathcal{E}$ e como $\mathcal{E}$ é conexo, $F \equiv 0$. Também j^* é sobre desde que para qualquer função S -holomorfa $f \in \mathcal{H}_S(U)$, se $F = \hat{f}|_{\mathcal{E}}$ tem-se

$$j^*(F)(x) = F(j(x)) = \hat{f}(j(x)) = j(x)(f) = f(x)$$

para todo $x \in U$. j^* é um isomorfismo algébrico. j^* é contínua: seja $K \subseteq U$ compacto estrito,

$$\begin{aligned} p_K(j^*(F)) &= \sup_{t \in K} |j^*(F)(t)| \\ &= \sup_{t \in K} |(F \circ j)(t)| \\ &= \sup_{x \in j(K)} |F(x)| = q_{j(K)}(F), \end{aligned}$$

sendo que $q_{j(K)} \in \text{SNC}(\mathcal{H}_S(\mathcal{E}))$ pois $j(K)$ é compacto estrito de $\mathcal{E}$, desde que j é contínua e $\pi(j(K)) = K$ é compacto estrito de E . Mostraremos mais tarde que j^* é um isomorfismo topológico.

Temos também que as funções S-holomorfas sobre $\mathcal{E}$ separam os pontos de $\mathcal{E}$. Se $h_1, h_2 \in \mathcal{E}$ com $h_1 \neq h_2$, existe $f \in \mathcal{H}_S(U)$ tal que $h_1(f) \neq h_2(f)$. A esta função f corresponde uma função $F = \hat{f}|_{\mathcal{E}} \in \mathcal{H}_S(\mathcal{E})$ tal que

$$F(h_1) = (\hat{f}|_{\mathcal{E}})(h_1) = h_1(f)$$

$$F(h_2) = (\hat{f}|_{\mathcal{E}})(h_2) = h_2(f),$$

logo $F(h_1) \neq F(h_2)$ como tinha sido afirmado.

3.2 Teorema. Seja U um domínio em um espaço localmente convexo separado possuindo um sistema fundamental de limitadas B_i completos. Então existe uma variedade modelada conexa $\mathcal{E}$ sobre E e um biholomorfismo $j: U \rightarrow U_{\mathcal{E}}$ ($U_{\mathcal{E}}$ = subconjunto aberto de $\mathcal{E}$) tal que:

(a) $\mathcal{H}_S(\mathcal{E})$ separa os pontos de $\mathcal{E}$.

(b) - qualquer função S-holomorfa sobre U (identificando U com $U_{\mathcal{E}}$) se estende para uma função S-holomorfa sobre $\mathcal{E}$ e a aplicação extensão é um isomorfismo topológico. Ainda mais, $\mathcal{E}$ é maximal com respeito a (a) e (b) no sentido que se M é uma variedade conexa modelada sobre E e

$j': U \longrightarrow U_M$ (U_M = subconjunto aberto de M) é um biholomorfismo e (a) e (b) valem com M no lugar de $\mathcal{C}$, então M pode ser identificado com um subconjunto aberto de $\mathcal{C}$ por um biholomorfismo que preserva os pontos de U .

Demonstração. Resta provar a maximalidade de $\mathcal{C}$ e o fato que j^* é um isomorfismo topológico. Provaremos aqui a maximalidade de $\mathcal{C}$. Seja M dado como no teorema. Define-se uma aplicação

$$\begin{aligned} T: M &\longrightarrow \mathcal{J} \\ x &\longmapsto T(x) \end{aligned}$$

por $T(x)(f) = \bar{f}(x)$ (onde $\bar{f}$ é a extensão de f a M e onde identifica-se U com um subconjunto de M e também com um subconjunto de $\mathcal{J}$). Como (b) vale, isto é, $\mathcal{H}_S(M)$ é topologicamente isomorfo a $\mathcal{H}_S(U)$, a aplicação avaliação para x é necessariamente um homomorfismo contínuo e T está bem definida. Como (a) vale para $\mathcal{H}_S(M)$, T é 1-1.

Se mostrarmos que T é um biholomorfismo local, então como T é 1-1, segue que T aplica M biholomorficamente sobre um subconjunto aberto de $\mathcal{C}$ (desde que M é conexo) enquanto preserva os pontos de U . Seja $x \in M$. Coloca-se $h = T(x) \in \mathcal{J}$. Então existe um conjunto compacto estrito $K \subseteq U$ tal que $K \ni h$, por (b) para

$\mathcal{H}_S(M)$. Escolhe-se uma vizinhança equilibrada convexa V de 0 em E tal que $K + V \subseteq U$ e $x + V \subseteq M$. Se mostrarmos que $T(x+u) = h_u$ para $u \in V$, segue daí que T é um biholomorfismo local. De fato, $(J, \pi) \in (M, \pi_1)$ são variedades modeladas sobre E e tem-se que: se $V \subseteq E$, $x \in M$ com $x + V \subseteq M$ então existe W vizinhança de x em M tal que $\pi_1|_W$ é um homeomorfismo de W sobre $\pi_1(W)$ e $\pi_1(x) + V \subseteq \pi_1(W)$, sendo que $x + V = (\pi_1|_W)^{-1}(\pi_1(x) + V)$, portanto

$$\left(\begin{array}{ccccc} \pi(h) + V & \xleftarrow{\pi} & N_{h,V} & \xleftarrow{\quad} & x + V \xrightarrow{\pi_1} \pi_1(x) + V \\ \pi(h) + u & \xleftarrow{\quad} & h_u & \xleftarrow{\quad} & x + u \xleftarrow{\pi_1^{-1}} \pi_1(x) + u \end{array} \right)$$

$\pi \circ T \circ \pi_1^{-1}$ e $\pi_1 \circ T^{-1} \circ \pi^{-1}$ são holomorfas (linear mais constante), de onde segue que T e T^{-1} são holomorfas.

Seja $f \in \mathcal{H}_S(U)$ e $\bar{f}$ sua extensão a M . Agora

$g(\lambda) = \bar{f}(x + \lambda u)$ é holomorfa em uma vizinhança de $|\lambda| \leq 1$. Como

$$g(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \lambda^n g^{(n)}(0), \text{ obtem-se, pondo } \lambda = 1, \bar{f}(x + u) =$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (D_u^n \bar{f})(x). \text{ Mas } D_u^n \bar{f} = \overline{(D_u^n f)}, \text{ desde que as duas coincidem sobre } U \subseteq M, \text{ assim}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}(x + u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \overline{(D_u^n f)(x)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} h(D_u^n f) = h_u(f), \end{aligned}$$

o que implica $T(x + u) = h_u$, como queríamos.

3.3 Definição. Seja (Q, U) um par de domínios modelados sobre um espaço localmente convexo separado, com $U \subseteq Q$; se qualquer função S -holomorfa a valores complexos sobre U se estende a Q , dizemos que (Q, U) é um par de S -extensão. Se o isomorfismo algébrico induzido $\mathcal{H}_S(U) \longrightarrow \mathcal{H}_S(Q)$ é um isomorfismo topológico para a topologia da convergência uniforme sobre subconjuntos compactos estritos dos respectivos espaços, diz-se que (Q, U) é um par de S -extensão normal.

3.4 Teorema. Seja (Q, U) um par de S -extensão. Denote a extensão de uma função $f \in \mathcal{H}_S(U)$ para Q por $\bar{f}$. Se a aplicação $f \longmapsto \bar{f}(x)$ é um funcional linear contínuo sobre $(\mathcal{H}_S(U), \mathcal{C}_{oe})$ para cada $x \in Q$, então (Q, U) é um par de S -extensão normal.

Demonstração. Seja L um subconjunto compacto estrito de Q . Basta provar que existe um subconjunto compacto estrito K de U tal que $\|\bar{f}\|_L \leq \|f\|_K$. Isto claramente implica o isomorfismo topológico de $(\mathcal{H}_S(Q), \mathcal{C}_{oe})$ com $(\mathcal{H}_S(U), \mathcal{C}_{oe})$:

Por hipótese, para todo $x \in L$, $f \longmapsto \bar{f}(x)$ é contínua sobre $(\mathcal{H}_S(U), \mathcal{C}_{oe})$, segue daí que existe um subconjunto com-

pacto estrito K_x de U tal que $|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_{K_x}$. Escolhe-se uma vizinhança equilibrada convexa fechada V_x de 0 em E tal que

$$(1a) \quad x + V_x \subseteq Q$$

$$(2b) \quad K_x + 2V_x \subseteq U.$$

Então como $x + V_x$ é uma vizinhança de x em Q e L é compacto estrito, existe $x_1 + V_1, x_2 + V_2, \dots, x_t + V_t$ cobrindo L (estamos identificando $V_i = V_{x_i}, K_i = K_{x_i}, \dots$ para todo i). Define-se para $1 \leq i \leq t$

$$L_i = K_i + \{\lambda [(\pi(L \cap (x_i + V_i)) - \pi(x_i)) \cap V_i] ; |\lambda| \leq 2\}.$$

Então $L_i \subseteq K_i + 2V_i \subseteq U$ e L_i é um compacto estrito pois como V_i é fechado e L é compacto tem-se que $\pi(L \cap (x_i + V_i)) - \pi(x_i)$ é compacto e sua intersecção com V_i está contida em $\pi(L)$ que é compacto estrito, de onde segue que L_i é compacto estrito. Assim $K = \bigcup_{i=1}^t L_i$ é um subconjunto compacto estrito de U .

Seja $x \in L$. Então $x \in x_i + V_i$ para algum i , portanto V_i contem $\pi(x) - \pi(x_i)$ e assim $x_i + \lambda(\pi(x) - \pi(x_i)) \in Q$ para $|\lambda| \leq 1$ por (1a). Seja $g(\lambda) = \tilde{f}(x_i + \lambda(\pi(x) - \pi(x_i)))$ em uma vizinhança de $|\lambda| \leq 1$. Então $g(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} g^{(n)}(0)$ implica

$g(1) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} g^{(n)}(0)$ e assim

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (D_{\pi(x)}^n - \pi(x_i)) \bar{f}(x_i)$$

Logo

$$\begin{aligned} (1) \quad |\bar{f}(x)| &\leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} |(D_{\pi(x)}^n - \pi(x_i)) \bar{f}(x_i)| \\ &\leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \|D_{\pi(x)}^n - \pi(x_i) f\|_{K_i} \end{aligned}$$

Agora se $k \in K_i$, então $k + \lambda(\pi(x) - \pi(x_i)) \in U$ para $|\lambda| \leq 2$ por (1b). Assim se $\mathcal{G}$ é definido por

$$\mathcal{G}(\lambda) = f(k + \lambda(\pi(x) - \pi(x_i)))$$

para $|\lambda| \leq 2$, por Cauchy tem-se que

$$|\mathcal{G}^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2^n} \|\mathcal{G}\|_{\{\lambda; |\lambda| \leq 2\}},$$

o que implica

$$(2) \quad |(D_{\pi(x)}^n - \pi(x_i)) f(k)| \leq \frac{n!}{2^n} \|f\|_{L_i}$$

desde que $k + \lambda(\pi(x) - \pi(x_i)) \in L_i$ para $|\lambda| \leq 2$.

De (1) e (2)

$$|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_{L_1} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \leq 2\|f\|_K .$$

Aplicando este resultado para potências de f e procedendo de modo usual obtem-se $|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_K$ que é válido para todo $x \in L$, para toda $f \in \mathcal{H}_S(U)$; portanto $\|\tilde{f}\|_L \leq \|f\|_K$ para toda $f \in \mathcal{H}_S(U)$.

3.5 Corolário. j^* é um isomorfismo topológico.

Demonstração. Sabemos que $(\mathcal{E}, U)$ é um par de S-extensão. Como $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{I}$, a aplicação avaliação para pontos de $\mathcal{E}$ é τ_{oe} -contínua sobre $\mathcal{H}_S(U)$. Logo $(\mathcal{E}, U)$ é um par de S-extensão normal, o que implica que j^* é um isomorfismo topológico.

3.6 Definição. $\mathcal{E}$ é chamado a envoltória normal de S-holomorfia de U .

CAPÍTULO 4

CONSTRUÇÃO DA ENVOLTORIA DE S-HOLOMORFIA

VIA ESPECTRO DE CLASSES REGULARES

Seja E espaço localmente convexo separado sobre $\mathbb{C}$. Para $B \in \mathcal{B}_E$, $z \in E$ e $r > 0$ a B -bola $B_E^B(z, r)$ com centro z e raio r é definida por $B_E^B(z, r) = z + rB$.

Seja (X, φ) um domínio modelado sobre E . Para cada $B \in \mathcal{B}_E$ a B -distância à fronteira $d_X^B(x)$ para um ponto $x \in X$ é definida por

$$d_X^B(x) = \sup\{r > 0 ; x + rB \subset X\}$$

lembrando que $x + rB = (\varphi|_W)^{-1}(\varphi(x) + rB)$ com $W \subset X$ aberto, $\varphi|_W$ homeomorfismo, $x \in W$ e $\varphi(x) + rB \subset (\varphi|_W)(W)$

Definimos

$$d_X^B(V) = \inf\{d_X^B(x) ; x \in V\}$$

para $V \subset X$, e $V_r^B = V + rB$ se $r \in (0, d_X^B(V))$.

Para $B \in \mathcal{B}_E$ e $P \in \mathcal{P}_b({}^n E; \mathbb{C})$ definimos

$$\|P\|_B = \sup_{x \in B} |P(x)|.$$

Seja (X, φ) um domínio modelado sobre E . Se $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função S -holomorfa, segue da definição de função S -holomorfa que para cada $x \in X$ existe uma e única sequência $(P_n)_{n \geq 0}$, $P_n \in \mathcal{P}_b({}^n E)$, tal que para cada $B \in \mathcal{B}_E$, com $\varphi(x) \in E_B$, existe $r > 0$ satisfazendo $d_X^B(x) > r$ e

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ |f(y) - \sum_{n=0}^N P_n(y-x)| ; y \in B_X^B(x, r) \right\} = 0,$$

onde P_n é denotado por $\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x)$ ou $\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n (f \circ (\varphi|_V)^{-1})(\varphi(x))$, V é vizinhança de x tal que $\varphi|_V$ é homeomorfismo e $f(x+h) = (f \circ (\varphi|_V)^{-1})(\varphi(x)+h) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n (f \circ (\varphi|_V)^{-1})(\varphi(x))(h) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x)(h)$.

Se $f \in \mathcal{H}_S(X)$, para $B \in \mathcal{B}_E$ o B -raio de convergência de f para um ponto $x \in X$, $\varphi(x) \in E_B$, é definido por:

$$0 \leq \varphi_f^B(x) = \sup\{r > 0 ; \sum_{n \geq 0} \|P_n\|_B r^n < +\infty\} \\ = (\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\|_B^{\frac{1}{n}})^{-1}.$$

4.1 Proposição. Dados $f \in \mathcal{H}_S(X)$ e $x \in X$, para cada $B \in \mathcal{B}_E$ com $\varphi(x) \in E_B$, sejam $r > 0$ e $(\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x))_{n \geq 0}$ como acima. Então para todo $s \in (0, r)$ e para todo $a \in B$

$$(a) \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x)(a) = \frac{1}{s^n} \int_0^1 f \circ (\varphi|_{x+rB})^{-1}(\varphi(x) + se^{+2\pi i t} a) e^{-2\pi i n t} dt$$

$$(b) \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x) \right\|_B \leq \frac{1}{s^n} \|f\|_{B_X^B(x, s)}$$

Demonstração. Para cada y tal que $\varphi(y) \in \varphi(x) + sB$ tem-se que $f(y) = f \circ (\varphi|_{B_X^B(x, r)})^{-1}(\varphi(y))$ e como $f \circ (\varphi|_{B_X^B(x, r)})^{-1}$ é

holomorfa em $\varphi(x) + sB$ segue o resultado.

4.2 Definição. Sejam X um domínio modelado sobre E e A um subconjunto de $\mathcal{H}_S(X)$. Um subconjunto $D \subset X$ será chamado A-limite se $\|f\|_D = \sup_{x \in D} |f(x)| < +\infty$ para todo $f \in A$.

4.3 Definição. Um conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_S(X)$ de funções S -holomorfas sobre X , X domínio modelado sobre E , será chamado uma classe regular em X se $\mathcal{A} \neq \emptyset$ e se:

- (1) $\lambda f^m \in \mathcal{A}$, para toda $f \in \mathcal{A}$, $m \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (2) $\frac{1}{n!} \delta^n f(\cdot)(a) \in \mathcal{A}$, para toda $f \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a \in E \setminus \{0\}$,
onde $\frac{1}{n!} \delta^n f(\cdot)(a)$ é a n -ésima derivada de f na direção de a , definida por $\frac{1}{n!} \delta^n f(\cdot)(a): X \ni x \mapsto \frac{1}{n!} \delta^n f(x)(a) \in \mathbb{C}$.
- (3) para todo $x \in X$ e para todo $B \in \mathcal{B}_E$ com $\varphi(x) \in E_B$ tem-se que $\rho_{\mathcal{A}}^B(x) > 0$, onde $\rho_{\mathcal{A}}^B(x) = \inf \{\rho_f^B(x) ; f \in \mathcal{A}\}$.

4.4 Definição. Uma cobertura aberta $\mathcal{V}$ de X , X domínio modelado sobre E , será chamada admissível se:

- (1) Para cada $U \in \mathcal{V}$ existe W vizinhança de 0 em E e $V \in \mathcal{V}$ tal que $U+W \subset V$.
- (2) $U \cup V \in \mathcal{V}$, para todo $U, V \in \mathcal{V}$.

Da definição 4.4 segue que para todo $B \in \mathcal{B}_E$ existe $s > 0$ tal que $d_X^B(U) > s$: para cada $x \in U$, $x+2W' = (\varphi|_V)^{-1}(\varphi(x) + 2W')$

com $V' \subset X$ aberto, $\varphi|_{V'}$ homeomorfismo, $x \in V'$, $\varphi(x) + 2W' \subset \varphi(V')$, W' vizinhança da origem em E tal que $U + 2W' \subset V'$. Por outro lado, para todo $B \in \mathcal{B}_E$ existe $s > 0$ tal que $sB \subset W' \cap E_B$, logo $\varphi(x) + 2sB \subset \varphi(x) + 2W' \subset \varphi(V')$ e portanto $d_X^B(x) \geq 2s$, de onde se conclui que $d_X^B(U) > s$.

Denotemos por $\mathcal{N}(X)$ o conjunto de todas as coberturas admissíveis de X e por $\omega(X)$ o conjunto de todas as coberturas enumeráveis admissíveis de X . Para $\mathcal{V} \in \mathcal{N}(X)$ define-se:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{V}} = \{f \in \mathcal{H}_S(X); \|f\|_{(\varphi|_U)^{-1}(\varphi(U) \cap E_B)} = \|f\|_{U_B} < +\infty \forall U \in \mathcal{V}, \forall B \in \mathcal{B}_E\}.$$

4.5 Lema (1) $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ é uma álgebra completa localmente convexa Hausdorff para a topologia da $\mathcal{V}_B$ convergência (isto é, para a topologia da convergência uniforme sobre todos os conjuntos U_B , $U \in \mathcal{V}$, $B \in \mathcal{B}_E$).

(2) $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ é uma classe regular.

Demonstração. (1) Está claro que $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ é uma álgebra localmente convexa Hausdorff. $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ é completa desde que uma rede de Cauchy em $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ converge pontualmente para uma aplicação $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, pois $\mathbb{C}$ é completo, e desde que a convergência é uniforme sobre qualquer U_B , com $U \in \mathcal{V}$ e $B \in \mathcal{B}_E$.

(2) Mostremos agora que $\mathcal{A}_\gamma$ é uma classe regular.

a) $\lambda f^m \in \mathcal{A}_\gamma$, para toda $f \in \mathcal{A}_\gamma$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ pois

$$\|\lambda f^m\|_{U_B} = |\lambda| \|f\|_{U_B}^m \leq |\lambda| M^m < +\infty$$

para todo U_B , $U \in \mathcal{V}$ e $B \in \mathcal{B}_E$.

b) Sejam U, W, V como na definição 4.4 e $U + 2W \subset V$. Para $a \in E \setminus \{0\}$ e $x \in U_B$, com $B \in \mathcal{B}_E$,

$$\frac{1}{n!} \delta^n f(x)(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\varphi|_{V'})^{-1}(\varphi(x) + \lambda a)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

onde $\rho > 0$ é tal que $\lambda a \in W$, para todo λ satisfazendo $|\lambda| \leq \rho$, e $V' \subset X$ aberto é tal que $\varphi|_{V'}$ é homeomorfismo, $x \in V'$ e $\varphi(x) + 2W \subset V$. Portanto

$$\left| \frac{1}{n!} \delta^n f(x)(a) \right| \leq \frac{1}{\rho^n} \|f\|_{V_{B_0}} < +\infty,$$

onde $B_0 = [B + \{\lambda a; |\lambda| \leq \rho\}]$ é a envoltória equilibrada convexa de $B + \{\lambda a; |\lambda| \leq \rho\}$. É fácil verificar que

$U_B + \{\lambda a; |\lambda| \leq \rho\} \subset V_{B_0}$. Assim $\left\| \frac{1}{n!} \delta^n f(\cdot)(a) \right\|_{U_B} < +\infty$ para toda $f \in \mathcal{A}_\gamma$, $a \in E \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, isto é, $\frac{1}{n!} \delta^n f(\cdot)(a) \in \mathcal{A}_\gamma$.

c) Para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{V}$ com $x \in U$ e pela definição

4.4 existe W vizinhança de 0 em E e $V \in \mathcal{V}$ tal que $U + 2W \subset V$.

Ainda, para cada $B \in \mathcal{B}_E$ existe $s > 0$ tal que $d_X^B(x) > s$.

De $x \in U \cap E_B$ e $f \in \mathcal{A}_V$ segue da desigualdade de Cauchy, para $a \in E_B$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} \delta^n f(x)(a) \right| &\leq \left\| \frac{1}{n!} \delta^n f(x) \right\|_B \|a\|_B^n \\ &\leq \left(\frac{\|a\|_B}{s} \right)^n \|f\|_{x+sB} \\ &\leq \left(\frac{\|a\|_B}{s} \right)^n \|f\|_{V \cap E_B} \end{aligned}$$

Assim se $a \in rB$ com $r \in (0, s)$, a série $\sum_{n \geq 0} \left\| \frac{1}{n!} \delta^n f(x) \right\|_B r^n \leq \|f\|_{V \cap E_B} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{r}{s} \right)^n$ é convergente, o que mostra que $\rho_f^B(x) \geq s$ para toda $f \in \mathcal{A}_V$.

Consideremos uma cobertura admissível $\mathcal{V}$ do domínio (X, φ) sobre E e seja $\mathcal{A}_V$ a classe regular sobre X determinada por $\mathcal{V}$. Temos que, $\forall B \in \mathcal{B}_E$,

(1) $\mathcal{V}$ dá origem a uma cobertura admissível de X_B :

$$\mathcal{V}_B = \{U_B = U \cap X_B = (\varphi|_U)^{-1}(\varphi(U) \cap E_B) ; U \in \mathcal{V}\}$$

Que $\mathcal{V}_B$ é cobertura de X_B é óbvio. Resta mostrar que é admissível. Como $\mathcal{V}$ é cobertura admissível, para cada $U \in \mathcal{V}$ existe W vizinhança de zero em E e $V \in \mathcal{V}$ tal que $U+W \subset V$. Tomando-

se $U_B, W_B = W \cap E_B =$ vizinhança de 0 em E_B e V_B , tem-se claramente que $U_B + W_B \subset V_B$.

Se $U_B, V_B \in \mathcal{V}_B$, $U_B \cup V_B = (U \cap X_B) \cup (V \cap X_B) = (U \cup V) \cap X_B \in \mathcal{V}_B$ pois $U \cup V \in \mathcal{V}$ por hipótese.

Ainda mais, como por hipótese existe $s > 0$ tal que $d_X^B(U) > s$ e $U_s^B \subset V$, é fácil ver que $d_{X_B}^B(U_B) > s$ e que $(U_B)_s^B \subset V_B$.

Denotemos $\mathcal{A}_{\mathcal{V}, B} = \{f|_{X_B}; f \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}}\}$ e consideremos aí a topologia da convergência uniforme sobre os U_B da cobertura admissível $\mathcal{V}_B$.

(2) $\mathcal{A}_{\mathcal{V}, B}$ é uma classe regular sobre X_B .

É óbvio que $\lambda(f|_{X_B})^m \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}, B}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$.

Que $\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n(f|_{X_B})(a) \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}, B}$ para toda

$f|_{X_B} \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}, B}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a \in E \setminus \{0\}$ segue da seguinte igualdade

$$\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n(f|_{X_B})(a) = \left(\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(a) \right)|_{X_B}.$$

De $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ ser uma classe regular tem-se que $\rho_{\mathcal{A}_{\mathcal{V}}}^B(x) > 0$ para todo $x \in X_B$, e como $\rho_{\mathcal{A}_{\mathcal{V}, B}}^B(x) = \rho_{\mathcal{A}_{\mathcal{V}}}^B(x)$ para todo $x \in X_B$, segue o resultado desejado.

(3) Sejam (Y, φ') domínio modelado sobre E ,

$j: X \rightarrow Y$ c.s.-h.s. de $\mathcal{A}_Y$, $A' = \{f' \in \mathcal{H}_S(Y) ; f' \circ j \in \mathcal{A}_Y\}$,
 $Y_B = \{y \in Y ; \varphi'(y) \in E_B\}$, e em Y_B consideremos topologia análoga
 a de X_B . Denotemos por j_B a restrição de j a X_B , $j_B: X_B \rightarrow Y_B$.
 Obviamente, $\varphi|_{X_B} = \varphi'|_{Y_B} \circ j_B$.

Sejam $x \in X_B$ e U vizinhança aberta arbitrária de
 $j_B(x)$ em Y_B . Por hipótese existe $V \in \mathcal{B}(j_B(x))$, isto é, $V \subset Y_B$ com
 $\varphi'|_V$ 1-1, $\varphi'(V)$ vizinhança de $\varphi'(x)$ em E_B , tal que $V \subset U$. Como
 φ é contínua de X_B em E_B , existe W vizinhança de x em X_B tal que
 $\varphi(W) \subset \varphi'(V)$. Podemos tomar W de tal sorte que $\varphi|_W$ é 1-1. Para
 cada $t \in W$ tem-se que

$$j_B(t) = (\varphi'|_V)^{-1}((\varphi|_W)(t)) \in V,$$

isto é, $j_B(W) \subset V \subset U$, e assim j_B é contínua de X_B em Y_B . Deste
 modo, tem-se que j_B é um morfismo de espaços modelados de X_B em Y_B .

Mostremos agora que j_B é uma c. h. s. de $\mathcal{A}_{Y,B}$.

Por hipótese, para cada $f \in \mathcal{A}_Y$ existe $f' \in \mathcal{H}_S(Y)$ tal que $f = f' \circ j$,
 logo para cada $x \in X_B$ $f(x) = f'(j(x))$ e como $j(x) \in Y_B$ e
 $f'|_{Y_B} \in \mathcal{H}(Y_B)$ tem-se que $f|_{X_B}$ se fatora analiticamente através
 de j_B : $f|_{X_B} = f'|_{Y_B} \circ j_B$.

4.6 Exemplo de recobrimento admissível cuja classe regular é tonelada.

Seja E_i espaço complexo Banach para cada $i=1,2,\dots$, com $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots \subset E$, onde, para cada i , a topologia induzida sobre E_i pela topologia de E_{i+1} é a topologia inicial de E_i e E é o limite indutivo estrito dos E_i . Se $A_n = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i(0,n)$, onde $B_{i+1}(0,n) \cap E_i = B_i(0,n)$, tem-se que A_n é um subconjunto convexo, equilibrado e aberto em E , $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E$ e $\mathcal{V} = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ é um recobrimento de E . Então se

$$\mathcal{A}_{\mathcal{V}} = \{f \in \mathcal{H}_S(E) ; \|f\|_{A_n} < +\infty, \forall n\},$$

$\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ é uma classe regular tonelada

4.7 Proposição. Seja $\mathcal{V}$ uma cobertura admissível do domínio X sobre E tal que, para cada $B \in \mathcal{B}_E$, $\mathcal{A}_{\mathcal{V},B}$ é tonelado. Supomos que $j: X \rightarrow Y$ é uma continuação S -holomorfa simultânea de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ e denotemos $A' = \{f' \in \mathcal{H}_S(Y) ; f' \circ j \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}}\}$. Então se $x \in Y_B$ e

$$\begin{aligned} \hat{x} : \mathcal{A}_{\mathcal{V}} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \hat{x}(f) = f'(x) \end{aligned}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \hat{x} : \mathcal{A}_{\mathcal{V},B} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração. Para cada componente conexa $X'_B \neq \emptyset$ de X_B seja Y'_B a componente conexa de Y_B correspondente a X'_B por j_B .

(1) O conjunto $Z = \{x \in Y'_B ; \hat{x} \text{ é contínua}\}$ é aberto em Y'_B :
seja $x \in Z$ e $U_B \in \mathcal{V}_B$ tal que $|\hat{x}(g)| \leq c \|g\|_{U_B}$ para toda $g \in \mathcal{A}_{\mathcal{V},B}$ e um conveniente $c > 0$. Como $\mathcal{A}_{\mathcal{V},B}$ é uma álgebra e $\hat{x}$ é um homomorfismo podemos tomar $c = 1$. Desde que $\mathcal{V}_B$ é uma cobertura admissível de X_B , e portanto de X'_B , existe $s > 0$ e $V_B \in \mathcal{V}_B$ tais que $d_{X'_B}^B(U_B) > s$ e $(U_B)^B \subset V_B$. Pela desigualdade de Cauchy ($g = f|_{X_B} \in \mathcal{A}_{\mathcal{V},B} \subset \mathcal{H}(X_B)$) temos para todo $r \in (0, s)$ e $a \in rB$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left| \frac{1}{n!} \hat{d}^n g'(x)a \right| &= \sum_{n \geq 0} \left| \left(\frac{1}{n!} \hat{d}^n g(\cdot)a \right)'(x) \right| = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left| \hat{x} \left(\frac{1}{n!} \hat{d}^n g(\cdot)(a) \right) \right| \leq \sum_{n \geq 0} \left\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n g(\cdot)(a) \right\|_{U_B} \leq \\ &\leq \|g\|_{V_B} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{r}{s} \right)^n < +\infty. \end{aligned}$$

Logo $\rho_{g'}^B(x) \geq s$ para toda $g \in \mathcal{A}_{\mathcal{V},B}$. Seja $0 < r <$

$< \min \{s, d_{Y'_B}^B(x)\}$. Para $x' \in x + rB \subset Y'_B$, como $g' \in \mathcal{H}(Y'_B)$,

$$g'(x') = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \hat{d}^n g'(x)(\varphi'(x') - \varphi'(x)),$$

se $a = \psi'(x') - \psi'(x)$, então $\|a\|_B \leq r$,

$$\begin{aligned} g'(x') &\leq \sum_{n \geq 0} \left| \frac{1}{n!} \hat{d}^n g'(x)(a) \right| \\ &= \sum_{n \geq 0} \left| \hat{x} \left(\frac{1}{n!} \hat{d}^n g'(\cdot)(a) \right) \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 0} \left\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n g'(\cdot)(a) \right\|_{U_B} \\ &\leq \|g\|_{V_B} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{r}{s} \right)^n . \end{aligned}$$

Como $\mathcal{A}_{V,B}$ é uma álgebra, tem-se que $\|g'\|_{x+rB} \leq \|g\|_{V_B}$, logo, para todo $y \in x+rB \subset Y'_B$, $|\hat{y}(g)| = |g'(y)| \leq \|g\|_{V_B}$ para toda $g \in \mathcal{A}_{V,B}$, isto é, $x+rB \subset Z$ e portanto Z é aberto.

(2) Z é fechado em Y'_B .

É suficiente mostrar que Z é sequencialmente fechado. Seja (x_n) uma sequência em Z convergindo para $x \in Y'_B$. $(\hat{x}_n)$ é fracamente limitada em $(\mathcal{A}_{V,B})' = \text{dual de } \mathcal{A}_{V,B}$ desde que

$$\hat{x}_n(g) = g'(x_n) \longrightarrow g'(x) = \hat{x}(g) \text{ com } n \rightarrow \infty ,$$

para toda $g \in \mathcal{A}_{V,B}$. De $\mathcal{A}_{V,B}$ ser tonelado segue que $(\hat{x}_n)$ é equicontínuo. Assim podemos encontrar $U_B \in \mathcal{V}_B$ tal que $|\hat{x}_n(g)| \leq \|g\|_{U_B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $g \in \mathcal{A}_{V,B}$. Assim, $\|\hat{x}(g)\| \leq \|g\|_{U_B}$ para toda

$g \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}, B}$, isto é, $x \in Z$.

Da conexidade de Y'_B conclui-se que $Z = Y'_B$, de onde segue o resultado desejado.

4.8 Observação. Para mostrar que $\hat{x}: \mathcal{A}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua para todo $x \in Y$ devemos mostrar que existe $U \in \mathcal{V}$ e $B \in \mathfrak{B}_E$ tal que $|\hat{x}(f)| \leq c \|f\|_{U_B}$ para toda $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}}$. Mas para cada $x \in Y$ existe $B \in \mathfrak{B}_E$ tal que $x \in Y_B$, logo pela proposição 4.7, como $\|f\|_{U_B} = \|f|_{U_B}\|_{U_B}$ para toda U_B , $U \in \mathcal{V}$ e

$$\hat{x}(f|_{X_B}) = (f|_{X_B})'(x) = (f'|_{X_B})(x) = f'(x) = \hat{x}(f),$$

segue que existe $U \in \mathcal{V}$ e $c > 0$ tal que

$$|\hat{x}(f)| = |\hat{x}(f|_{X_B})| \leq c \|f|_{X_B}\|_{U_B} = c \|f\|_{U_B}.$$

Construiremos agora a continuação S-holomorfa simultânea maximal de uma classe regular $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$, tal que $\mathcal{A}_{\mathcal{V}, B}$ é tonelada para cada $B \in \mathfrak{B}_E$, via o espectro $\mathcal{I}(\mathcal{A}_{\mathcal{V}})$ de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$. Para uma álgebra complexa A o espectro $\mathcal{I}(A)$ de A é o conjunto de homomorfismos não nulos de A em $\mathbb{C}$. Então usamos este resultado para construir a envoltória S-holomorfa de certos domínios X com a ajuda do espectro $\mathcal{I}(\mathcal{H}_S(X))$ de $\mathcal{H}_S(X)$.

Seja (X, φ) um domínio modelado sobre E e seja $j: X \rightarrow Y$ uma c. S-h.s. de $\mathcal{A}_Y$, onde $\mathcal{V}$ é uma cobertura admissível de X . Então j é também uma c. S-h.s. de $\mathcal{A}_Y \cup \varphi^* E^*$, $\varphi^* E^* = \{\mu \circ \varphi; \mu \in E^*\}$, $(\mu \circ \varphi \in \mathcal{H}_S(X))$, onde E^* é o espaço vetorial das funções lineares de E em $\mathbb{C}$ que são limitadas sobre os subconjuntos limitados de E , e cada ponto $x \in Y$ define uma aplicação avaliação

$$\hat{x}: \mathcal{A}_Y \cup \varphi^* E^* \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que $E^* \ni \mu \mapsto \hat{x}(\mu \circ \varphi) = \mu(\varphi'(x)) \in \mathbb{C}$ é fracamente contínua, isto é, contínua para a topologia $\sigma(E^*, E)$. Se $\mathcal{A}_{Y,B}$ é tonelada para todo $B \in \mathcal{B}_E$, então $\hat{x}|_{\mathcal{A}_Y}$ é contínua pela observação 4.8. Assim é razoável considerar o seguinte conjunto:

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{V}) = \{h: \mathcal{A}_Y \cup \varphi^* E^* \rightarrow \mathbb{C}; h|_{\mathcal{A}_Y} \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_Y) \text{ é contínua e } h \circ \varphi^*: E^* \ni \mu \mapsto h(\mu \circ \varphi) \in \mathbb{C} \text{ é fracamente contínua}\}.$$

Claramente, $\hat{X} = \{\hat{x}; x \in X\} \subset \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$. Cada $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$ define um vetor $qh \in E$ tal que $\mu(qh) = h(\mu \circ \varphi)$ para todo $\mu \in E^*$, desde que $h \circ \varphi^*$ é fracamente contínua. $\mathcal{M}(X, \mathcal{V})$ pode ser munido com uma topologia Hausdorff tal que $q: \mathcal{M}(X, \mathcal{V}) \rightarrow E$ é um homeomorfismo local. Vejamos: dado $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$, existe $U \in \mathcal{V}$ e $B \in \mathcal{B}_E$ tais que

$$|h(f)| \leq \|f\|_{U \cap E_B} = \|f\|_{U_B}$$

para toda $f \in \mathcal{A}_V$. Para estes U e B sejam W e V como na definição

4.4. Para $a \in W$ coloca-se

$$(1) \quad h_a(f) = \sum_{n \geq 0} h\left(\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(\cdot)(a)\right)$$

para $f \in \mathcal{A}_V$. Tem-se que $|h(\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(\cdot)(a))| \leq \|\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(\cdot)(a)\|_{U \cap E_B}$.

Agora, para $x \in U \cap E_B$,

$$\left| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x)(a) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=2} \frac{f(\varphi|_V)^{-1}(\varphi(x) + \lambda a)}{\lambda^{n+1}} d\lambda \right|$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \sup_{|\lambda|=2} |f(x + \lambda a)|,$$

tomando-se B_0 tal que $B_0 \supseteq B$ e $a \in E_{B_0}^*$, para qualquer $x \in U \cap E_B$, $x + \lambda a \in (U + 2W) \cap E_{B_0} \subset V \cap E_{B_0}$, então

$$\left| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x)(a) \right| \leq \frac{1}{2^n} \|f\|_{V \cap E_{B_0}} < +\infty$$

para todo $x \in U \cap E_B$. Logo,

$$(2) \quad |h_a(f)| \leq \|f\|_{V \cap E_{B_0}} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = 2 \|f\|_{V \cap E_{B_0}} < +\infty,$$

para toda $f \in \mathcal{A}_V$ e para todo $a \in W \cap E_{B_0}$.

Ainda mais, h_a é um homomorfismo, portanto

h_a e $\mathcal{J}(\mathcal{A}_\nu)$, pois para $f, g \in \mathcal{A}_\nu$:

$$\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n(fg)(a) = \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!} \hat{\delta}^i f(a) \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j g(a),$$

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \left| h\left(\frac{1}{i!} \hat{\delta}^i f(a)\right) \right| \left| h\left(\frac{1}{j!} \hat{\delta}^j g(a)\right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \|f\|_{V \cap E_{B_0}} \frac{1}{2^j} \|g\|_{V \cap E_{B_0}}$$

$$= \|f\|_{V \cap E_{B_0}} \|g\|_{V \cap E_{B_0}} \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} < +\infty,$$

$$h_a(fg) = \sum_{n=0}^{\infty} h\left(\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n(fg)(a)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} h\left(\frac{1}{i!} \hat{\delta}^i f(a)\right) h\left(\frac{1}{j!} \hat{\delta}^j g(a)\right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} h\left(\frac{1}{i!} \hat{\delta}^i f(a)\right) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} h\left(\frac{1}{j!} \hat{\delta}^j g(a)\right) \right)$$

$$= h_a(f) h_a(g).$$

Para $\mu \in E^*$ temos, se $\mu \circ f \in \mathcal{A}_\nu$,

$$h_a(\mu \circ \varphi) = \sum_{n \geq 0} h\left(\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n(\mu \circ \varphi)\right)(a)$$

$$= h(\mu \circ \varphi) + h(\mu(a))$$

$$= \mu(qh) + \mu(a) = \mu(qh+a).$$

Assim, se definimos $h_a(\mu \circ \varphi) = \mu(qh) + \mu(a)$ para $\mu \in E^*$, então $h_a \in \mathcal{M}(X, \nu)$. h_a define $qh_a \in E$ tal que $\mu(qh_a) = h_a(\mu \circ \varphi) = \mu(qh+a)$, portanto $qh_a = qh + a$ pois E^* separa os pontos de E .

Mostremos agora que $(h_a)_b = h_{a+b}$ para $a, b \in E$ tal que $\{a, b, a+b\} \subset W$:

$$\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(a+b) = \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!} \hat{\delta}^i \left(\frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f(b) \right) (a)$$

$$(h_a)_b(f) = \sum_{j \geq 0} h_a \left(\frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f(b) \right)$$

$$= \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{i \geq 0} h \left(\frac{1}{i!} \hat{\delta}^i \left(\frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f(b) \right) \right) (a) \right)$$

$$= \sum_{n \geq 0} h \left(\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(a+b) \right) = h_{a+b}(f)$$

para toda $f \in \mathcal{A}_\nu$.

Agora seja $\mathcal{F}$ o filtro de vizinhanças abertas absolutamente convexas de 0 em E. Para definir uma topologia sobre $\mathcal{M}(X, \mathcal{V})$ definimos uma base de vizinhanças: para cada $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$ seja

$\mathcal{F}(h) = (\{h_a ; a \in W'\}, \text{ onde } U \in \mathcal{V} \text{ é determinado pela continuidade de } h|_{\mathcal{A}_U}, W, \text{ vizinhança de } 0 \text{ em } E \text{ e } V \in \mathcal{V} \text{ são como na definição 4.4, } W' \in \mathcal{F}, W' \subset W) .$

Para $h^1, h^2 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{V})$, consideremos $N(h^1), N(h^2)$ onde $N(h^i) \in \mathcal{F}(h^i) = (\{(h^i)_{a_i} ; a_i \in W^i\}, U^i, W_1^i, V^i, \text{ determinados como anteriormente, } W^i \in \mathcal{F}, W^i \subset W_1^i) \text{ para } i = 1, 2.$

Se $h \in N(h^1) \cap N(h^2)$, então $h = (h^1)_{a_1} = (h^2)_{a_2}$ com $a_1 \in W^1, a_2 \in W^2$. Tomando $U = V^1 \cup V^2 \in \mathcal{V}$, existe W vizinhança da origem em E e $V \in \mathcal{V}$ tais que $U + 2W \subset V$. Seja W' vizinhança da origem em E tal que $a_1 + W' \subset W^1, a_2 + W' \subset W^2$ e $W' \subset W$. Para qualquer $c \in W'$ tem-se que

$$h_c = ((h^1)_{a_1})_c = (h^1)_{a_1+c} \in N(h^1) ,$$

$$h_c = ((h^2)_{a_2})_c = (h^2)_{a_2+c} \in N(h^2) ,$$

portanto $N(h) = \{h_c, c \in W'\} \subset N(h^1) \cap N(h^2)$. É fácil ver que a topologia definida por esta base de vizinhanças é uma topologia Haus

dorff sobre $\mathcal{M}(X, \nu)$ e que $q: \mathcal{M}(X, \nu) \longrightarrow E$ é um homeomorfismo local. A extensão $\hat{f}$ de uma função $f \in \mathcal{A}_\nu$ é dada por

$$\hat{f}: \mathcal{M}(X, \nu) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$h \longmapsto \hat{f}(h) = h(f) .$$

$\hat{f}$ é G-holomorfa, desde que para $|z|$ pequeno, $z \in \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(h_{za}) = \sum_{n \geq 0} h\left(\frac{1}{n!} \delta^n f(\cdot)(a)\right) z^n .$$
 Mostremos que $\hat{f}$ é S-holomorfa :

seja $N(h) = \{h_a ; a \in W'\}$ uma vizinhança de h em $\mathcal{M}(X, \nu)$; $q|_{N(h)}$

é um homeomorfismo, $q(N(h)) = qh + W'$. Seja $B_1 \in \beta_E$ tal que

$qh \in E_{B_1}$, então $(qh + W') \cap E_{B_1}$ é vizinhança de qh em E_{B_1} , portanto

existe $\rho > 0$ tal que $qh + \rho B_1 \subset (qh + W') \cap E_{B_1}$ e

$$(q|_{N(h)})^{-1}(qh + \rho B_1) = \{h_{\rho b} ; b \in B_1\}, \text{ logo}$$

$$|\hat{f}(h_{\rho b})| = |h_{\rho b}(f)| \leq 2 \|f\|_{V \cap E_{B_0}} < +\infty$$

por (2), onde $B_0 = [B_1 \cup B]$ e B existe da continuidade de h . Assim

sendo, temos que $\hat{f}$ é S-holomorfa.

Agora seja $\mathcal{G}(X, \nu)$ a componente de $\mathcal{M}(X, \nu)$ que contem $\hat{X}$ e definimos

$$j_\nu : X \longrightarrow \mathcal{M}(X, \nu)$$

$$x \longmapsto j_\nu(x) = \hat{x} .$$

Está claro que $j_\nu : X \longrightarrow \mathcal{C}(X, \nu)$ é uma c.S-h.s. de $\mathcal{A}_\nu$.

4.9 Proposição. Se $\mathcal{A}_\nu$ é tal que $\mathcal{A}_{\nu, B}$ é tonela da para todo $B \in \mathcal{B}_E$, então $j_\nu : X \longrightarrow \mathcal{C}(X, \nu)$ é a c.S-h.s. maximal de $\mathcal{A}_\nu$.

Demonstração. Seja $j' : X \longrightarrow X'$ uma c.S-h.s. de $\mathcal{A}_\nu$. Denotemos por $f' \in \mathcal{H}_S(X')$ a continuação S-holomorfa de $f \in \mathcal{A}_\nu$. De acordo com a proposição 4.7, cada $x \in X'$ define um homomorfismo contínuo $\bar{x} : \mathcal{A}_\nu \longrightarrow \mathbb{C}$, $\bar{x}(f) = f'(x)$. Ainda mais, $\bar{x}(\mu \circ \psi) = \mu(\psi'(x))$ para todo $\mu \in E^*$. Portanto, a aplicação

$$j'' : X' \longrightarrow \mathcal{M}(X, \nu)$$

$$x \longmapsto \bar{x}$$

está bem definida e satisfaz $j_\nu = j'' \circ j'$ e $\psi' = q \circ j''$, onde ψ' é o homeomorfismo local de X' em E . Da continuidade de j'' segue que $j''(X') \subset \mathcal{C}(X, \nu)$. Podemos então concluir que $j_\nu : X \longrightarrow \mathcal{C}(X, \nu)$ é a c.S-h.s. maximal de $\mathcal{A}_\nu$.

4.10 Definição. Seja X um domínio modelado sobre E . Definimos

$\mathcal{C}(X) = \{\nu \in \mathcal{N}(X) ; \mathcal{A}_{\nu, B} \text{ é tonelado } \forall B \in \mathcal{B}_E\}$. Dizemos que X é um S $\mathcal{C}$ -domínio se $\mathcal{H}_S(X) = \cup \{\mathcal{A}_\nu ; \nu \in \mathcal{C}(X)\}$.

Qualquer domínio metrizável é um $\mathcal{C}$ -domínio, portanto um S $\mathcal{C}$ -domínio.

Define-se

$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(X) = \{h \in \mathcal{I}(\mathcal{H}_S(X)) ; h \in \mathcal{C}(X, \nu) \text{ para todo } \nu \in \mathcal{C}(X) \text{ e existe } W \in \eta_E(o) = \text{sistema fundamental de vizinhanças de zero em } E \text{ tal que } h_a \in \mathcal{C}(X, \nu) \text{ para todo } a \in W, \text{ para todo } \nu \in \mathcal{C}(X)\}.$
 Para $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(X)$, $\bigcup_{a \in W} h_a = h+W = (q_\nu|_V)^{-1} (q_\nu h+W)$ onde V é tal que $V \subset \mathcal{C}(X, \nu)$ aberto, $h \in V$, $q_\nu|_V$ é homeomorfismo, $q_\nu h+W \subset q_\nu(V)$, para todo $\nu \in \mathcal{C}(X)$. Logo $d_{\mathcal{C}(X, \nu)}^B(h) > 0$ para todo $B \in \mathcal{B}_E$, para todo $\nu \in \mathcal{C}(X)$.

A família de todos os conjuntos $\{h_a; a \in W\} \subset \mathcal{C}(X, \nu)$, para todo $\nu \in \mathcal{C}(X)$ e W como acima é uma base de uma topologia Hausdorff sobre $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(X)$ tal que $q: \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(X) \longrightarrow E$ é um homeomorfismo local ($q = q_\nu$ para todo $\nu \in \mathcal{C}(X)$). A extensão de uma função $f \in \mathcal{A}_\nu$, $\nu \in \mathcal{C}(X)$, é dada por

$$\begin{aligned} \hat{f}: \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ h &\longmapsto h(f) . \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}(X)$ a componente de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(X)$ que contem $\hat{X}$.

Então

$$\begin{aligned} j_X: &\longrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{C}}(X) \\ x &\longmapsto \hat{x} \end{aligned}$$

é a c.S-h.s. maximal de $\cup \{A_\nu; \nu \in \mathcal{C}(X)\}$.

4.11 Proposição. Se X é um $S\mathcal{C}$ -domínio, então

$j_X: X \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(X)$ é a envoltória de S -holomorfia de X .

Demonstração. A maximalidade de j_X é uma consequência da propriedade da intersecção (ver Schottenloher [1]). Seja $j': X \longrightarrow X'$ uma c.S-h.s. de $\mathcal{H}_S(X)$, então j' é uma c.S-h.s. de cada A_ν , $\nu \in \mathcal{C}(X)$. De acordo com a proposição 4.9 existe morfismo de domínios modelados $j'_\nu: X' \longrightarrow \mathcal{C}(X, \nu)$ tal que $j_\nu = j'_\nu \circ j'$ para todo $\nu \in \mathcal{C}(X)$. j'_ν é definido por $j'_\nu: X' \ni x \longmapsto \hat{x} \in \mathcal{C}(X, \nu)$. É fácil ver que a aplicação $j'': X' \ni x \longmapsto \hat{x} \in \mathcal{H}_{\mathcal{C}}(X)$ está bem definida e é contínua (ver dem. prop. 4.9), logo $j''(X') \subset \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(X)$ e $j'': X' \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(X)$ é um morfismo de domínios satisfazendo $j_X = j'' \circ j'$, o que completa a prova.

CAPÍTULO 5

CONVEXIDADE POLINOMIAL

Neste capítulo introduzimos uma propriedade de aproximação (P.S-A.F) para estudar a convexidade polinomial. Provamos alguns teoremas de aproximação e um resultado sobre prolongamento simultâneo de funções S-holomorfas sobre um aberto S-Runge.

Sejam E um e.l.c.s. e U um subconjunto aberto não vazio de E .

5.1- Definição. a) Seja $A(U)$ uma família de funções definidas sobre U com valores em $\mathbb{C}$. A envoltória $A(U)$ -convexa de um conjunto compacto estrito K de U é definida por

$$\hat{K}_{A(U)} = \{x \in U ; |f(x)| \leq \|f\|_K, \text{ para toda } f \in A(U)\}.$$

b) Dizemos que U é $A(U)$ -convexo em E se a envoltória $A(U)$ -convexa de todo compacto estrito K de U é precompacta em U , isto é, existe V vizinhança de 0 em E tal que $\hat{K}_{A(U)} + V \subset U$ e $\hat{K}_{A(U)}$ é precompacto.

5.2 Definição. a) Dizemos que U é S-Runge em E se $\mathcal{P}_b(E)$ é denso em $(\mathcal{H}_S(U), \mathcal{T}_{oe})$. U é finitamente S-Runge em E se, para todo subespaço F de dimensão finita de E , $U \cap F$ é Runge em F .

b) Dizemos que U é finitamente $\mathcal{P}_b(E)$ -convexo em E ou finitamente polinomialmente convexo em E se, para todo subespaço F de dimensão finita de E , $U \cap F$ é $\mathcal{P}(F)$ -convexo em F .

5.3 Definição. Dizemos que E tem a propriedade da S -aproximação forte (P.S-A.F.) se existe uma família $\mathcal{F}_E$ de projeções de E , limitadas sobre os subconjuntos limitados de E , de posto finito, sendo $(u(E))_{u \in \mathcal{F}_E}$ filtrante crescente pela inclusão e com a seguinte propriedade:

para todo compacto estrito K de E e toda vizinhança V de zero em E_B , onde $B \in \mathcal{B}_E$ é tal que $K \subset E_B$ e é compacto aí, existe $u \in \mathcal{F}_E$ tal que $u(x) - x \in V$ para todo $x \in K$.

Se E é a soma direta de uma sequência $(E_n)_{n=0}^{\infty}$ de espaços de Banach com a P.A.F., então E tem a P.S-A.F..

5.4 Definição. Dizemos que uma função $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ é Silva-contínua, $f \in \mathcal{C}_{SC}(U)$, se para qualquer $B \in \mathcal{B}_E$, $f|_{U \cap E_B} \in \mathcal{C}(U \cap E_B)$, isto é, $f|_{U \cap E_B}: U \cap E_B \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua.

Em um e.l.c.s. com P.S-A.F. se $E_u = \text{Im } u$, $E^u = \text{Ker } u$, para todo $u \in \mathcal{F}_E$, tem-se que $E = E_u \oplus E^u$ (soma direta topológica). A aplicação identidade de E é aderente a $\mathcal{F}_E$ para a topologia da

convergência compacta estrita.

Seja $P_{Sc}(U)$ a família das funções plurisubharmônicas Silva-contínuas definidas sobre U , denotamos por $P_{Sc,u}(U \cap E_u)$ o conjunto das funções f definidas sobre $(U \cap E_u) \oplus E^u$ por $f = g \circ u$ onde $g \in P_{Sc}(U \cap E_u)$. Todo elemento $f \in P_{Sc}(U)$ define um elemento de $P_{Sc,u}(U \cap E_u)$ por $g = (f|_{U \cap E_u}) \circ u$.

Notações e resultados análogos são obtidos ao se substituir $P_{Sc}(U)$ por $\mathcal{P}_b(E)$ ou $\mathcal{C}_{Sc}(U)$.

Se E tem a P.S-A.F., pode-se aproximar uniformemente sobre compactos estritos as funções Silva-contínuas por funções que dependem de um subespaço de dimensão finita.

5.5 Proposição. Sejam E e.l.c.s. com a P.S-A.F., U um subconjunto aberto não vazio de E e $f \in \mathcal{C}_{Sc}(U)$. Então, para todo compacto estrito K de U e $\varepsilon > 0$, existe um elemento $u \in \mathcal{F}_E$ tal que $f \circ u \in \mathcal{C}_{Sc,u}(U \cap E_u)$ e $|f(x) - f \circ u(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.

Demonstração. Se K é um compacto estrito de U , existe $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto aí. Como $f \in \mathcal{C}_{Sc}(U)$ tem-se que $f|_{U \cap E_B} \in \mathcal{C}(U \cap E_B)$ e assim f é uniformemente contínua sobre K . Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe vizinhança V de zero em E_B tal que $K + V \subset U \cap E_B$ e se $x - x' \in V$ com $x, x' \in K + V$ segue que

$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Por outro lado, como E tem a P.S-A.F., existe $u \in \mathcal{F}_E$ tal que $u(x) - x \in V$ para todo $x \in K$, o que conduz a $|f(u(x)) - f(x)| = |f \circ u(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.

5.6 Corolário. Se E é um e.l.c.s. com a P.S-A.F. tem-se que:

- a) O espaço $\bigcup_{u \in \mathcal{F}_E} \mathcal{P}_{b,u}(E_u)$ é denso em $\mathcal{P}_b(E)$ para a topologia da convergência uniforme sobre os compactos estritos de U.
- b) Para todo compacto estrito K de E

$$\hat{K}_{\mathcal{P}_b(E)} = \bigcap_{u \in \mathcal{F}_E} \hat{K}_{\mathcal{P}_{b,u}(E)}$$

Demonstração. a) Segue imediatamente da proposição desde que $\mathcal{P}_b(E) \subset \mathcal{C}_{Sc}(E)$ e $\mathcal{P}_{b,u}(E_u)$ é o conjunto dos elementos da forma $P \circ u$ onde P é um polinômio sobre E_u .

b) Segue da parte (a) pois, como $\bigcup_{u \in \mathcal{F}_E} \mathcal{P}_{b,u}(E_u)$ é denso em $\mathcal{P}_b(E)$ para a topologia $\mathcal{C}_{oe}$, tem-se que

$$\hat{K}_{\mathcal{P}_b(E)} = \hat{K}_{\bigcup_{u \in \mathcal{F}_E} \mathcal{P}_{b,u}(E_u)} = \bigcap_{u \in \mathcal{F}_E} \hat{K}_{\mathcal{P}_{b,u}(E_u)}$$

O próximo lema encontra-se em Noverraz [1].

5.7 Lema. Seja K um compacto de U . Para todo $u \in \mathcal{F}_E$ tal que $u(K) \subset U$ tem-se:

$$\hat{K}_{P_{Sc,u}(U \cap E_u)} = \widehat{u(K)}_{P_{Sc}(U \cap E_u)} \oplus E^u,$$

ou, equivalentemente,

$$u(\hat{K}_{P_{Sc,u}(U \cap E_u)}) = \widehat{u(K)}_{P_{Sc}(U \cap E_u)}.$$

5.8 Lema. Se K é um compacto estrito de U tem-se que

$$\hat{K}_{P_{Sc}(U)} \supset \bigcup_{\substack{u \in \mathcal{F}_E \\ u(K) \subset U}} \hat{K}_{P_{Sc,u}(U \cap E_u)}.$$

Demonstração. Se $x_0 \notin \hat{K}_{P_{Sc}(U)}$ existe $f \in P_{Sc}(U)$ tal que $|f(x_0)| > \|f\|_K$. Sejam $a = |f(x_0)| - \|f\|_K$ e $K' = K \cup \{x_0\}$. Pela proposição 5.6 existe $u \in \mathcal{F}_E$ tal que $u(K') \subset U$ e $|f \circ u(x) - f(x)| \leq \frac{a}{3}$ para todo $x \in K'$. Segue daí que $|f \circ u(x_0)| \geq |f(x_0)| - \frac{a}{3} = \|f\|_K + \frac{2a}{3} \geq \|f \circ u\|_K + \frac{a}{3}$, ou seja, que $x_0 \notin \hat{K}_{P_{Sc,u}(U \cap E_u)}$.

5.9 Teorema. Se U é um aberto finitamente Runge de um e.l.c.s. com a P.S-A.F., as condições abaixo são equivalentes:

- (1) U é $P_{Sc}(U)$ -convexo.
- (2) U é $\mathcal{H}_S(U)$ -convexo.
- (3) U é $\mathcal{P}_P(E)$ -convexo.

Demonstração. Inicialmente temos que para todo compacto estrito K de U , $\hat{K}_{\mathcal{H}_S(U)} \subset \hat{K}_{\mathcal{P}_D(E)}$, pois $\mathcal{P}_D(E) \subset \mathcal{H}_S(U)$, e assim $(3) \Rightarrow (2)$.

Mostremos agora que $\hat{K}_{P_{Sc}(U)} \subset \hat{K}_{\mathcal{H}_S(U)}$. Para todo $g \in \mathcal{H}_S(U)$ temos que $g|_{U \cap E_B} \in \mathcal{H}(U \cap E_B)$ e assim $|g|_{U \cap E_B} \in P_c(U \cap E_B)$ para todo $B \in \mathcal{B}_E$. Se $x \in \hat{K}_{P_{Sc}(U)}$, existe $B_0 \in \mathcal{B}_E$ tal que $x \in U \cap E_{B_0}$, $K \subset U \cap E_{B_0}$ e é compacto aí, logo

$$|g(x)| = |g|_{U \cap E_{B_0}}(x) \leq \|g|_{U \cap E_{B_0}}\|_K = \|g\|_K,$$

de onde segue que $x \in \hat{K}_{\mathcal{H}_S(U)}$ e fica provada a implicação $(2) \Rightarrow (1)$.

Para terminar a demonstração resta provar que, se U é $P_{Sc}(U)$ -convexo, $\hat{K}_{\mathcal{P}_D(E)} \subset \hat{K}_{P_{Sc}(U)}$, para todo compacto estrito K de U . Se U é $P_{Sc}(U)$ -convexo, U é $P(U)$ -convexo, de onde segue (ver Hooverraz [1], cor. 2.3.7) que, para todo subespaço F de dimensão finita de E , $U \cap F$ é pseudo convexo e portanto polinomialmente convexo em F , isto é, $\mathcal{P}(F)$ -convexo em F , desde que por hipótese é de Runge em F . Do teorema de Runge em dimensão finita segue que

$\widehat{K}_{\mathcal{P}}(F) = \widehat{K}_{P_C}(U \cap F)$ para todo compacto K de $U \cap F$, e como estamos em dimensão finita, $\widehat{K}_{P_C}(U \cap F) = \widehat{K}_{P_{Sc}}(U \cap F)$. Segue daí, pelos lemas 5.7 e 5.8 que

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{P_{Sc}}(U) &\supset \bigcup_{u(K) \subset U} \widehat{K}_{P_{Sc,u}}(U \cap E_u) = \bigcup_{u(K) \subset U} \widehat{u(K)}_{P_{Sc}}(U \cap E_u) \oplus E^u = \\ &= \bigcup_{u(K) \subset U} \widehat{u(K)}_{\mathcal{P}_b(E_u)} \oplus E^u = \bigcup_{u(K) \subset U} \widehat{K}_{\mathcal{P}_{b,u}}(E_u) = \widehat{K}_{\mathcal{P}_b}(E), \end{aligned}$$

o que nos dá a implicação (3) $\Rightarrow$ (1).

5.10 Corolário. Se U é finitamente polinomialmente convexo em um e.l.c.s. com a P.S-A.F., então $\widehat{K}_{\mathcal{P}_b}(E) = \widehat{K}_{\mathcal{P}_S}(U) = \widehat{K}_{P_{Sc}}(U)$ para todo compacto estrito K de U .

Demonstração. Ver demonstração do teorema.

5.11 Corolário. Se U é $P_{Sc}(U)$ -convexo em um e.l. c.s. com a P.S-A.F., as seguintes condições são equivalentes:

- (1) U é finitamente S-Runge
- (2) U é finitamente polinomialmente convexo.
- (3) U é $\mathcal{P}_b(E)$ -convexo.

Demonstração. As implicações $(1) \Rightarrow (3), (1) \Rightarrow (2)$ aparecem na demonstração do teorema.

É sempre verdade que $(3) \Rightarrow (2)$. Que $(2) \Rightarrow (3)$ segue do corolário 5.10 e que $(2) \Rightarrow (1)$ segue de resultado para dimensão finita.

5.12 Observação. Como em dimensão finita todo aberto Runge é S-Runge, então todo aberto equilibrado em relação a um de seus pontos é finitamente Runge.

Em um espaço normado E com a P.S-A.F. todo aberto finitamente $\mathcal{P}_b(E)$ -convexo é pseudo convexo e portanto $P_{Sc}(U)$ -convexo (ver Noverraz [1], resultados 2.1.5 e 2.3.7), temos assim a equivalência entre as condições (2) e (3) do corolário 5.11. Este resultado pode ser generalizado para o caso não normado.

5.13 Teorema. Seja E um e.l.c.s. possuindo um sistema fundamental de seminormas p tais que $E_p = (E, p) / p^{-1}(0)$ possui a P.S-A.F. Um aberto não vazio U de E é $\mathcal{P}_b(E)$ -convexo se, e somente se, é finitamente polinomialmente convexo.

Demonstração. É suficiente mostrar que se U é conexo e finitamente polinomialmente convexo ele é $\mathcal{P}_b(E)$ -convexo pois a recíproca é evidente se lembrarmos que a condição " U é finitamen

te polinomialmente convexo" é equivalente a "para todo compacto (estrito) K de dimensão finita de $U, \hat{K}_{\mathcal{P}_b(E)}$ é compacto em U ".

Se U é finitamente $\mathcal{P}_b(E)$ -convexo, U é pseudo convexo. Seja p uma seminorma tal que U contém uma p -bola de raio não nulo. Consideremos a aplicação $u_p: (E, p) \longrightarrow (E, p) / p^{-1}(0)$, que é sobre e aberta. Por teorema conhecido (ver Noverraz [1], teor. 2.1.7), temos que $U = u_p^{-1} \circ u_p(U)$ e não é difícil ver que $u_p(U)$ é também finitamente $\mathcal{P}_b(E_p)$ -convexo. Com efeito, mostrar que $u_p(U)$ é finitamente $\mathcal{P}_b(E_p)$ -convexo é mostrar que para qualquer subespaço vetorial F de dimensão finita de E_p e para qualquer compacto K de $F \cap u_p(U)$, $\hat{K}_{\mathcal{P}_b(F)}$ é compacto. Seja $e_1, \dots, e_n$ uma base para F com $e_i = u_p(f_i)$, $1 \leq i \leq n$, onde $f_1, \dots, f_n \in E$ e são linearmente independentes. Seja G o subespaço gerado por $\{f_1, \dots, f_n\}$. Então $u_p(G) = F$, $u_p|_G$ é isomorfismo e $(u_p|_G)^{-1}(K) = L$ é um compacto em G , $L \subset U \cap G$, e como U é finitamente $\mathcal{P}_b(E)$ -convexo, $\hat{L}_{\mathcal{P}_b(G)}$ é compacto. De onde segue o resultado desejado, pois

$$\begin{aligned} u_p(\hat{L}_{\mathcal{P}_b(G)}) &= \{y = u_p(x) \in F; |P(x)| \leq \|P\|_L, \forall P \in \mathcal{P}_b(G)\} \\ &= \{y = u_p(x) \in F; |P(u_p|_G)^{-1}(u_p(x))| = |P(u_p|_G)^{-1}(y)| \leq \\ &\leq \|P(u_p|_G)^{-1}\|_K, \forall P \in \mathcal{P}_b(G)\} = \hat{K}_{\mathcal{P}_b(F)}, \end{aligned}$$

e a correspondência $\mathcal{V}_b(G) \longleftrightarrow \mathcal{V}_b(F)$

$$P \longleftrightarrow P \circ (u_p|_G)^{-1}$$

é biunívoca e linear.

Usando o fato de $u_p(U)$ ser finitamente $\mathcal{V}_b(E_p)$ -convexo prova-se que $V_p = \text{interior de } u_p(U)$ é finitamente polinomialmente convexo em E_p e portanto $\mathcal{V}_b(E_p)$ -convexo em E_p , lembrando que p é uma norma sobre E_p , e como $u_p^{-1}(V_p) = U_p = \text{interior de } U$ em (E,p) , segue que se U_p é $\mathcal{V}_b(E)$ -convexo em (E,p) e portanto em E , desde que a aplicação $i_p: E \longrightarrow (E,p)$ é linear, contínua e $i_p^{-1}(U_p) = U_p$, se conclui o teorema: U é a reunião filtrante crescente dos U_p e uma reunião filtrante crescente de abertos $\mathcal{V}_b(E)$ -convexos é ainda $\mathcal{V}_b(E)$ -convexa.

Podemos supor que a topologia de E é definida por uma família de normas e transferir a demonstração de E_p para (E,p) . Mostremos que U_p é $\mathcal{V}_b(E)$ -convexo. Seja K um compacto de dimensão finita de U . Existe uma norma p e $a > 0$ tais que $K + B_p(0,a) \subset U_p = \text{interior de } U \text{ em } (E,p)$. Para todo subespaço F de dimensão finita, contendo K , tem-se: $K + B_p(0,a) \cap F \subset U_p \cap F \subset U \cap F$ e $\hat{K}_{\mathcal{V}_b(F)} = \hat{K}_{\mathcal{V}_b(E)} \cap F = \hat{K}_{\mathcal{V}_b(E)}$. O aberto $U \cap F$ é por hipótese $\mathcal{V}_b(F)$ -convexo em F e p induz uma norma sobre F , segue que $(\hat{K}_{\mathcal{V}_b(E)} + B_p(0,a)) \cap F \subset U \cap F$ pois, em dimensão finita, a passagem à envoltória polinomial não diminui a

p-distância à fronteira. A inclusão anterior é válida para todo sub espaço F de dimensão finita contendo K , assim tem-se que

$\hat{K}_{\mathcal{P}_b}(E) + B_p(0,a) \subset U$ e que $\hat{K}_{\mathcal{P}_b}(E) + B_p(0,a) \subset U_p$ o que prova ser U_p finitamente polinomialmente convexo em (E,p) , logo polinomialmente convexo em (E,p) e portanto em E como queríamos.

Da demonstração acima segue a seguinte

5.14 Proposição. Seja E um e.l.c.s., $\mathcal{C}$ sua topologia e $\mathcal{C}'$ uma topologia sobre E mais fraca que $\mathcal{C}$. Então o interior para $\mathcal{C}'$ de todo conjunto $\mathcal{C}$ -aberto e finitamente polinomialmente convexo é, se não for vazio, finitamente polinomialmente convexo. Ainda mais, se o espaço E satisfaz as hipóteses do teorema 5.13, o interior, se não for vazio, de todo conjunto finitamente polinomialmente convexo, é $\mathcal{P}_b(E)$ -convexo.

5.15 Teorema. (Runge) Um aberto U S -holomorficamente convexo em um e.l.c.s. E com a P.S-A.F. é $\mathcal{P}_b(E)$ -convexo se, e somente se, é S -Runge.

Demonstração. Se U é S -Runge, para todo compacto K de U tem-se que $\hat{K}_{\mathcal{P}_b}(E) = \hat{K}_{\mathcal{H}_S}(U)$.

Reciprocamente, se U é $\mathcal{P}_D(E)$ convexo, sejam $K \subset U$ compacto estrito, $f \in \mathcal{H}_S(U)$ e $\varepsilon > 0$. Existe $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto aí, existe uma vizinhança V de zero em E_B com $K + V \subset U \cap E_B$ e se $x-y \in V$ com $x, y \in K + V$ segue que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Seja $u \in \mathcal{T}_E$ tal que $u(x) - x \in V$, $\forall x \in K$; $u|_{E_B}$ é contínua e assim $u(K)$ é compacto em $U \cap E_u$ que é $\mathcal{P}(E_u)$ -convexo, logo, pelo teorema de Runge em dimensão finita, existe um polinômio p sobre E_u tal que, $\forall x \in u(K)$, $|f(x) - p(x)| < \varepsilon/2$. Se $\tilde{p} = p \circ u$, tem-se que $|f(x) - \tilde{p}(x)| \leq |f(x) - f \circ u(x)| + |f \circ u(x) - p \circ u(x)|$ para todo $x \in K$; pela escolha de u , $|f(x) - f \circ u(x)| < \varepsilon/2$ e $|f \circ u(x) - p \circ u(x)| \leq \sup_{y \in u(K)} |f(y) - p(y)| < \varepsilon/2$, o que termina a demonstração.

5.16 Proposição. Para um domínio U em um e.l.c. E as seguintes condições são equivalentes:

- i) U é pseudo convexo.
- ii) U é $\mathcal{P}(U)$ -convexo.

Demonstração. ver Noverraz [1], resultados 2.3.6 e 2.2.1 .

5.17 Proposição. Seja E e.l.c.s. com a P.S-A.F. e $U \subset E$ um aberto pseudo-convexo, finitamente S-Runge. Então para

qualquer compacto estrito K de U ,

$$\hat{K}_{P(U)} = \hat{K}_{P_{Sc}(U)} = \hat{K}_{\mathcal{H}_S(U)} = \hat{K}_{\mathcal{H}_S(E)} .$$

Demonstração. Obviamente

$$\hat{K}_{P(U)} \subset \hat{K}_{P_{Sc}(U)} \subset \hat{K}_{\mathcal{H}_S(U)} \subset \hat{K}_{\mathcal{H}_S(E)} .$$

Mostremos agora que $\hat{K}_{\mathcal{H}_S(E)} \subset \hat{K}_{P(U)}$. Seja $x_0 \in U$, $x_0 \notin \hat{K}_{P(U)}$. Então existe $v \in P(U)$ com $v(x_0) > \sup_{y \in K} v(y)$. Devido à semi continuidade de v existe $\alpha \in SNC(E)$, $\eta > 0$, $s > 0$ tais que, $\forall x \in K$, $B^\alpha(x, 2s) \subset U$ e $v(y) < v(x_0) - \eta$ para $y \in B^\alpha(x, 2s)$, lembrando que $B^\alpha(x, r) = \{y \in E ; \alpha(x-y) < r\}$. Como E tem a P.S-A.F. existe $u \in \mathcal{T}_E$ com $\alpha(u(x)-x) < s$ para $x \in K$. Se $\Psi = u + x_0 - u(x_0)$, Ψ satisfaz $\alpha(\Psi(x) - x) < 2s$ para $x \in K$, assim $\Psi(K) \subset U \cap F$ onde $F = \text{span}(\Psi(E))$, e $v \circ \Psi(x) < v(x_0) - \eta$ para todo $x \in K$. Segue que, para $w = v|_{U \cap F} \in P(U \cap F)$, $\sup_{y \in \Psi(K)} w(y) \leq v(x_0) - \eta \leq v(x_0) = w(x_0)$. Consequentemente, $x_0 \notin \widehat{\Psi(K)}_{P(U \cap F)}$. Como $U \cap F$ é pseudo convexo e Runge, existe um polinômio $g: F \rightarrow \mathbb{C}$ com $|g(x_0)| > \|g\|_{\Psi(K)}$ (Hormander [1] pág. 53 e 91). Como $g \circ \Psi \in \mathcal{P}_b(E)$ e $|g \circ \Psi(x_0)| = |g(x_0)| > \|g\|_{\Psi(K)} = \|g \circ \Psi\|_K$, segue que $x_0 \notin \mathcal{H}_S(E)$, o que termina a demonstração.

Das proposições 5.16 e 5.17 segue que

5.18 Corolário. Seja E e.l.c.s. com a P.S-A.F. .

Um aberto $U \subset E$ pseudo convexo e finitamente S-Runge é S-holomorfinicamente convexo.

5.19 Teorema. Seja E e.l.c.s. com a P.S-A.F. .

Para um subconjunto aberto U de E , as seguintes propriedades são equivalentes:

- a) U é pseudo convexo e finitamente S-Runge.
- b) U é S-holomorfinicamente convexo e S-Runge.
- c) U é $\mathcal{P}_D(E)$ -convexo.
- d) U é finitamente polinomialmente convexo.

Demonstração. Que $(b) \Rightarrow (c)$ segue do teorema 5.15, a implicação $(c) \Rightarrow (d)$ é trivial, e que $(d) \Rightarrow (a)$ segue dos resultados para dimensão finita (ver Hormander [1], pág. 53).

Mostremos que $(a) \Rightarrow (b)$. De acordo com o corolário 5.18, U é S-holomorfinicamente convexo, logo é suficiente mostrar que um conjunto finitamente S-Runge é um conjunto S-Runge. Sejam $f \in \mathcal{H}_S(U)$, $\varepsilon > 0$, $K \subset U$ compacto estrito e $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto aí. Pela proposição 5.5 existe $u \in \mathcal{F}_E$ tal que $\|f - f \circ u\|_K < \varepsilon/2$.

Seja $F = \text{span } u(E)$, portanto $\dim F < \infty$. Como U é

finitamente S-Runge existe um polinômio $g \in \mathcal{P}(F)$ com $\|f|_{U \cap F} - g\|_{u(K)} < \varepsilon/2$. Assim, $g \circ u \in \mathcal{P}_b(E)$ e $\|f - g \circ u\|_K \leq \|f - f \circ u\|_K + \|f \circ u - g \circ u\|_K < \varepsilon$.

5.20 Teorema. Seja E e.l.c.s. com a P.S-A.F. e com $\mathcal{F}_E$ tal que se $u < v$, isto é, se $E^v \subset E^u$, existe $\pi_{uv}: E_v \rightarrow E_u$, projeção contínua linear, com $\pi_{uv} \circ v = u$ e seja K um compacto estrito $\mathcal{P}_b(E)$ -convexo ($K = \hat{K}_{\mathcal{P}_b(E)}$). Então toda função S-holomorfa na vizinhança de K é aproximada uniformemente sobre K por polinômios.

Para a demonstração deste teorema necessitamos do seguinte lema:

5.21 Lema. Para $u_0 \in \mathcal{F}_E$ fixo, tem-se

$$u_0(K) = \bigcap_{u \in \mathcal{F}_E} u_0(\hat{K}_{\mathcal{P}_{b,u}(E_u)})$$

Demonstração. Notaremos $\hat{K}_u = \hat{K}_{\mathcal{P}_{b,u}(E_u)} = \widehat{u(K)_{\mathcal{P}_b(E_u)}} \oplus E^u$. Por hipótese $K = \bigcap_{u \in \mathcal{F}_E} \hat{K}_u$, então $u_0(K) \subset \bigcap_{u \in \mathcal{F}_E} u_0(\hat{K}_u)$. Reciprocamente, queremos $u_0(K) \supset \bigcap_{u \in \mathcal{F}_E} u_0(\hat{K}_u)$. Seja $x \in \bigcap_{u \in \mathcal{F}_E} u_0(\hat{K}_u)$, logo para todo $u \in \mathcal{F}_E$ existe $X_u \in \hat{K}_u$ tal que $x = u_0(X_u)$. Seja u' a projeção sobre E^u , paralelamente a E_u , isto é, $u' = \text{Id}_E - u$. Como K é um compacto estrito, existe $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset E_B$ e é compacto aí, logo, para todo $u \in \mathcal{F}_E$, $u(K)$ é um com

pacto de E_u , pois $u|_{E_B}$ é contínua. Para todo $u > u_0$, seja

$$K'_u = \hat{K}_u \cap \left(\bigcap_{u_0 < v \leq u} E_v \oplus v'(\widehat{u(K)}_{\mathcal{P}_b(E_u)}) \right).$$

Notemos que se $v < u$ então $\hat{K}_v \supset \hat{K}_u$. De fato, se $t \in \hat{K}_u$ tem-se que $\|fou(t)\| \leq \|fou\|_K$, para toda $f \in \mathcal{P}_b(E_u)$. Se $g \in \mathcal{P}_b(E_v)$, $f = g \circ \pi_{vu} \in \mathcal{P}_b(E_u)$ e $\|(g \circ \pi_{vu})(u(t))\| \leq \|g \circ \pi_{vu}\|_K$, isto é, $\|(gov)(t)\| \leq \|gov\|_K$, de onde segue que $t \in \hat{K}_v$.

Para todo $u > u_0$ temos que K'_u é compacto estrito desde que

$$\begin{aligned} K'_u &\subset (\widehat{u(K)}_{\mathcal{P}_b(E_u)} \oplus E_u) \cap (E_u \oplus u'(\widehat{u(K)}_{\mathcal{P}_b(E_u)})) = \\ &= \widehat{u(K)}_{\mathcal{P}_b(E_u)} \oplus u'(\widehat{u(K)}_{\mathcal{P}_b(E_u)}) = \widehat{u(K)}_{\mathcal{P}_b(E_u)} \end{aligned}$$

e $\widehat{u(K)}_{\mathcal{P}_b(E_u)}$ é compacto de dimensão finita e portanto compacto estrito. Para cada $u_0 < v < u$ temos que $E_v \oplus v'(\widehat{u(K)}_{\mathcal{P}_b(E_u)})$ é fechado. Segue daí que K'_u , para cada $u > u_0$, é compacto estrito pois é fechado, como intersecção de fechados, e está contido em um compacto de dimensão finita. Podemos então concluir que a família $(K'_u)_{u > u_0}$ é uma família filtrante decrescente de compactos estritos de E . Temos também que $\bigcap_{u > u_0} K'_u \subset K$, desde que $K'_u \subset \hat{K}_u$ para todo $u > u_0$ e as

$\text{sim } \bigcap_{u > u_0} K'_u \subset \bigcap_{u > u_0} \hat{K} = K$, e que $u_0(\hat{K}_u) = u_0(K'_u)$ para todo $u > u_0$.
 De fato, que $u_0(K'_u) \subset u_0(\hat{K}_u)$ é óbvio. Mostremos que $u_0(K'_u) \supset u_0(\hat{K}_u)$:
 seja $t \in \hat{K}_u$, então $u(t) \in u(\hat{K}_u) = \widehat{u(K)}_{\mathcal{P}_b(E_u)} \subset \hat{K}_u$ e $u(t) =$
 $= v(u(t)) + u(t) - v(u(t))$, como $v(u(t)) \in E_v$ e $u(t) - v(u(t)) =$
 $= v'(u(t))$ segue que $u(t) \in E_v \oplus v'(\widehat{u(K)}_{\mathcal{P}_b(E_u)})$ para todo $u_0 < v < u$
 e portanto que $u(t) \in K'_u$. Agora, $t = u(t) + t - u(t)$, $u_0(t) =$
 $= u_0(u(t)) + u_0(t - u(t))$, e como $t - u(t) \in \text{Ker } u \subset \text{Ker } u_0$, $u_0(t - u(t)) = 0$
 e $u_0(t) = u_0(u(t))$ o que nos garante que $u_0(\hat{K}_u) \subset u_0(K'_u)$. Deste mo-
 do, para todo $u \in \mathcal{F}_E$, existe $X'_u \in K'_u$ tal que $u_0(X'_u) = x = u_0(X_u)$.
 Como (K'_u) é uma família filtrante decrescente de compactos cuja in-
 tersecção está contida em K , existe uma subfamília de (X'_u) , ainda
 denotada por (X'_u) , aderente a um ponto X de K . Como $u_0|_{K'_u}$ é contí-
 nua, tem-se que $u_0(X'_u) \rightarrow u_0(X)$, mas $u_0(X'_u) = x$ para todo u , de
 onde se conclui que $u_0(X) = x \in u_0(K)$, o que termina a demonstra-
 ção.

Demonstração. do teorema 5.20. Fixemos K , $\varepsilon > 0$, V
 vizinhança de zero e f uma função S -holomorfa em $K + V$. Mostremos
 que existe um polinômio P tal que $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ uniformemente
 sobre K .

Pode-se encontrar $u_0 \in \mathcal{F}_E$ tal que $u_0(K) \subset K + V$ e

(1) $|f(x) - f \circ u_0(x)| < \varepsilon/2$, para todo $x \in K$. u_0 é escolhido e fixado tal que $u_0(K) \subset K + V$ e $(u_0(\hat{K}_u))$ é uma família filtrante decrescente de compactos estritos (pode-se sempre supor que $E_{u_0} \subset E_u$ e neste caso temos também que $\ker u \subset \ker u_0$) cuja intersecção é igual a $u_0(K) = u_0(\hat{K}_{p_b(E)})$ (vide lema 5.21). Existe então um u tal que $u_0(\hat{K}_u) \subset K + V$.

Seja $\tilde{f}$ a função

$$\tilde{f}: ((K + V) \cap E_{u_0}) \oplus (E_u \ominus E_{u_0}) \subset E_u \longrightarrow \mathbb{C},$$

$(E_{u_0} \oplus (E_u \ominus E_{u_0}) = E_u)$, tal que $\tilde{f}(x+v) = f \circ u_0(x+v) = f(x)$ para todo $x \in (K+V) \cap E_{u_0}$, para todo $v \in E_u \ominus E_{u_0}$. Logo, $\tilde{f}$ é (S-) holomorfa, pois $u_0|_{E_{u_0}}$ é linear contínua com $u_0(((K+V) \cap E_{u_0}) \oplus (E_u \ominus E_{u_0})) = (K+V) \cap E_{u_0} \subset E_{u_0}$ que é de dimensão finita e $f|_{(K+V) \cap E_{u_0}}$ é holomorfa e assim $\tilde{f}$ é holomorfa em seu domínio. $\tilde{f}$ é holomorfa na vizinhança de $u(\hat{K}_u) = \widehat{u(K)}_{p_b(E_u)}$ pois $u(\hat{K}_u) \subset ((K+V) \cap E_{u_0}) \oplus (E_u \ominus E_{u_0})$, lembrando que $u_0(\hat{K}_u) \subset (K+V) \cap E_{u_0}$ e que, para todo $t \in \hat{K}_u$, $u(t) = u_0(t) + u(t) - u_0(t)$.

Como $u(\hat{K}_u) = \widehat{u(K)}_{p_b(E_u)}$ é um compacto polinomialmente convexo de E_u , pelo teorema para dimensão finita existe um polinômio $\tilde{P}$ sobre E_u tal que

$$(2) \quad |\tilde{P}(x) - \tilde{f}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } x \in u(\tilde{K}_u).$$

Sejam $P = \tilde{P} \circ u$ e $g = \tilde{f} \circ u$. P é o polinômio procurado. Com efeito: para todo $x \in \tilde{K}_u$

$$(3) \quad |P(x) - g(x)| = |\tilde{P}(u(x)) - \tilde{f}(u(x))| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ por (2) ;}$$

para todo $x \in K$, $|f(x) - P(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - P(x)|$ mas

$$|g(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ por (3) pois } K \subset \tilde{K}_u \text{ e } |f(x) - g(x)| =$$

$$= |f(x) - \tilde{f} \circ u(x)| \stackrel{\text{def. } \tilde{f}}{=} |f(x) - f \circ u_0(x)| \leq \varepsilon/2 \text{ por (1). Assim, pa}$$

ra todo $x \in K$, $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ como queríamos.

5.22 Teorema. A todo aberto U conexo S -Runge de um espaço localmente convexo E com a P.S-A.F. pode-se associar um aberto conexo V que possui as seguintes propriedades:

(1) toda função S -holomorfa sobre U se prolonga a V e a aplicação $\rho: \mathcal{H}_S(V) \rightarrow \mathcal{H}_S(U)$ é um isomorfismo para a topologia $\mathcal{T}_{oe}$ (diz-se que V é um prolongamento S -holomorfo normal de U). (Ver capítulo 3)

(2) V é maximal no seguinte sentido: todo prolongamento S -holomorfo normal de U contendo V é idêntico a V .

(3) V é $\mathcal{V}_b(E)$ -convexo..

Observemos que a condição (3) pode ser enunciado do seguinte modo: a envoltória S -normal de U é $\mathcal{V}_b(E)$ -convexa.

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ o conjunto ordenado pela inclusão dos abertos de E que são prolongamentos S -holomorfos normais de U . Para toda cadeia ordenada $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ de elementos de $\mathcal{V}$, o conjunto $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ é um prolongamento S -holomorfo normal de U pois todo compacto estrito de $\bigcup V_\alpha$ está contido em um V_{α_0} que é prolongamento normal de U . Afirmer que $\varphi: \mathcal{H}_S(V) \rightarrow \mathcal{H}_S(U)$ é um isomorfismo equivale a dizer que a envoltória $\mathcal{H}_S(V)$ -convexa de todo compacto estrito de V está contida na envoltória $\mathcal{H}_S(U)$ -convexa de um compacto estrito de U . De fato, se φ é isomorfismo para as topologias $\mathcal{T}_{oe}$, dado $K \subset V$ compacto estrito existe $L \subset U$ compacto estrito tal que $\|\varphi^{-1}(f)\|_K \leq \|f\|_L$, o que implica $\hat{K}_{\mathcal{H}_S(V)} \subset \{x \in V; |\varphi^{-1}f(x)| \leq \|f\|_L, \forall f \in \mathcal{H}_S(U)\}$.

Pelo lema de Zorn, o conjunto $\mathcal{V}$ contém um elemento maximal V satisfazendo as condições (1) e (2) do teorema. Resta provar que V é $\mathcal{P}_b(E)$ -convexo ou, o que é o mesmo, desde que V é S -Runge, que é holomorficamente convexo. Se o aberto V não é $\mathcal{H}_S(V)$ -convexo, existirá um compacto estrito K_0 de V e uma família $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ em $\hat{K}_0_{\mathcal{H}_S(V)}$ que é aderente a um ponto $x_0 \in \bar{V}$. Reproduzindo a demonstração do teorema 2.5, sendo que agora φ é a identidade vemos que existe uma vizinhança equilibrada V'_0 de zero tal que $K_0 + V'_0 \subset V$ e tal que todo elemento $f \in \mathcal{H}_S(V)$ se prolonga a $V_0 = \{x_0\} + V'_0$ em

uma função $\tilde{f}$. Dois casos podem então se apresentar:

(1°) Para toda f as funções f e $\tilde{f}$ assumem os mesmos valores sobre $V \cap V_0$, isto é, o prolongamento é univalente. Vamos então mostrar que $V \cup (\{x_0\} + \frac{1}{4} V'_0)$ é um prolongamento S-holomorfo normal de V , o que contradiz a maximalidade de V . Com efeito, seja $K \subset V \cup (\{x_0\} + \frac{1}{4} V'_0)$, K compacto estrito, então podemos escrever $K \subset K_1 \cup (\{x_0\} + K_2)$, onde K_1 é um compacto estrito de V e K_2 um compacto estrito equilibrado (em relação a 0) tal que $\{x_0\} + K_2 \subset (\{x_0\} + \frac{1}{4} V'_0)$ com $K_0 + 2 K_2$ compacto estrito de V .

Passamos a demonstrar a seguinte afirmação:

$$\{x_0\} + K_2 \subset \widehat{(K_0 + 2 K_2)} \mathcal{H}_S(V)$$

Temos que $\mathcal{H}_S(V)$ e $\mathcal{H}_S(V \cup V_0)$ se correspondem biunivocamente. Para cada $f \in \mathcal{H}_S(V)$ tomemos $g \in \mathcal{H}_S(V \cup V_0)$ tal que $g|_V = f$, $g|_{V_0} = \tilde{f}$, $g|_{V \cap V_0} = f = \tilde{f}$. Como

$$\begin{aligned} \widehat{(K_0 + 2 K_2)} \mathcal{H}_S(V \cup V_0) &= \{x \in V \cup V_0 ; |g(x)| \leq \|g\|_{K_0 + 2 K_2}, \forall g \in \mathcal{H}_S(V \cup V_0)\} \\ &= \{x \in V \cup V_0 ; |g(x)| \leq \|f\|_{K_0 + 2 K_2}, \forall f \in \mathcal{H}_S(V)\}, \end{aligned}$$

queremos mostrar que para todo $k \in K_2$, $|g(x_0 + k)| \leq \|f\|_{K_0 + 2 K_2}$, para toda $f \in \mathcal{H}_S(V)$. Para cada $x \in \hat{K}_0 \mathcal{H}_S(V)$, para cada $k \in K_2$

$$(1) \quad \left| \frac{1}{n!} \hat{a}^n g(x) k \right| \leq \sup_{t \in K_0} \left| \frac{1}{n!} \hat{a}^n g(t) k \right|$$

$$\leq \sup_{t \in K_0} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=2} \frac{g(t+\lambda k)}{\lambda^{n+1}} d\lambda \right|$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \|f\|_{K_0} + 2 K_2$$

Como $x_\alpha \longrightarrow x_0$, a partir de um certo índice α_0 temos que

$x_\alpha - x_0 \in \frac{3}{4} V'_0$, é como, para todo $k \in K_2$, $x_\alpha + k = x_\alpha - x_0 + x_0 + k$, segue que $x_\alpha + k \in \{x_0\} + V'_0$, onde g é S -holomorfa. Então $g(x_\alpha + k) \longrightarrow g(x_0 + k)$, e como

$$g(x_\alpha + k) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \hat{a}^n g(x_\alpha) k, \quad |g(x_\alpha + k)| \leq \sum_{n \geq 0} \left| \frac{1}{n!} \hat{a}^n g(x_\alpha) k \right|,$$

segue que $|g(x_0 + k)| \leq \sum_{n \geq 0} \left| \frac{1}{n!} \hat{a}^n g(x_\alpha) k \right|$ e por (1)

$|g(x_0 + k)| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \|f\|_{K_0+2 K_2} = 2 \|f\|_{K_0+2 K_2}$. Usando este resultado para $g^n \in \mathcal{H}_S(V \cup V_0)$, extraíndo a raiz n -ésima e passando ao limite, com $n \rightarrow \infty$, obtemos $|g(x_0 + k)| \leq \|f\|_{K_0+2 K_2}$, como queríamos.

Agora, como $K \subset K_1 \cup (\{x_0\} + K_2)$ segue que

$$K \subset K_1 \cup (\widehat{K_0 + 2 K_2}) \mathcal{H}_S(V) \quad \text{e} \quad \|g\|_K \leq \|g\|_{K_1 \cup (K_0+2 K_2)} =$$

$= \|f\|_{K_1 \cup (K_0+2 K_2)}$, o que prova que a envoltória

$\mathcal{H}_S(V + (\{x_0\} + \frac{1}{4} V'_0))$ -convexa de qualquer compacto estrito de

$V \cup (\{x_0\} + \frac{1}{4} V'_0)$ está contida na envoltória $\mathcal{H}_S(V)$ -convexa de um compacto estrito de V , isto é, que $V \cup (\{x_0\} + \frac{1}{4} V'_0)$ é prolongamento S -holomorfo normal de V e portanto prolongamento S -holomorfo normal de U , o que contradiz a maximalidade de V .

(2º) Se, para uma função $f \in \mathcal{H}_S(V)$, existe $\xi \in V \cap V_0$ tal que $f(\xi) \neq \tilde{f}(\xi)$ constrói-se a superfície de Riemann de f acima de U e nota-se por ξ_1 o ponto, na segunda folha, correspondente a ξ .

Escolhemos uma vizinhança W , convexa, equilibrada de zero em E tal que: $2W \subset V'_0$, $W_B = W \cap E_B$, $\|f\|_{K_0+2W_B} < \infty$, onde $B \in \mathcal{B}_E$ é tal que $\hat{K}_0 \subset V \cap E_B$, $K_0 \subset V \cap E_B$ e é compacto aí. Então para todo $\alpha \in A$, para todo $z \in W_B$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x_\alpha) z \right| &\leq \sup_{t \in K_0} \left| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(t) z \right| \\ &= \sup_{t \in K_0} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=2} \frac{f(t + \lambda z)}{\lambda^{n+1}} d\lambda \right| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \|f\|_{K_0+2W_B} < +\infty \end{aligned}$$

assim $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x_\alpha) z$ define uma função $\hat{f}$ que é holomorfa em $x_\alpha + W_B$, para todo $\alpha \in A$, e como isto é verdade para todo $B \in \mathcal{B}_E$ temos que $\hat{f}$ é S -holomorfa em $x_\alpha + W$, para todo $\alpha \in A$, $\hat{f}|_V = \tilde{f}(x) =$
 $= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x_\alpha) (x - x_\alpha)$

Como V é S -Runge, existe uma rede de polinômios (P_β) tal que $P_\beta \xrightarrow{\mathcal{C}_{oe}} f$ em V , assim $(f - P_\beta)(\xi) \rightarrow 0$, pois $\xi \in V$. Como $\xi_1 \in x_0 + V'_0$, existe α tal que $\xi_1 \in x_\alpha + W$ e temos que

$$(\tilde{f} - \tilde{P}_\beta)(\xi_1) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \hat{d}^n(f - P_\beta)(x_\alpha)(\xi_1 - x_\alpha).$$

$$\left| \frac{1}{n!} \hat{d}^n(f - P_\beta)(x_\alpha)(\xi_1 - x_\alpha) \right| \leq \sup_{t \in K_0} \left| \frac{1}{n!} \hat{d}^n(f - P_\beta)(t)(\xi_1 - x_\alpha) \right|.$$

$$= \sup_{t \in K_0} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=2} \frac{(f - P_\beta)(t + \lambda(\xi_1 - x_\alpha))}{\lambda^{n+1}} d\lambda \right|$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \sup_{\substack{t \in K_0 \\ |\lambda|=2}} |(f - P_\beta)(t + \lambda(\xi_1 - x_\alpha))|,$$

$L = K_0 + \{\lambda(\xi_1 - x_\alpha); |\lambda| = 2\}$ é um compacto estrito de V ,

$$(1) \quad |(\tilde{f} - \tilde{P}_\beta)(\xi_1)| = |(\tilde{f} - P_\beta)(\xi_1)| \leq 2 \sup_{u \in L} |(f - P_\beta)(y)|.$$

Como $(f - P_\beta)(y) \rightarrow 0$, segue de (1) que $(\tilde{f} - P_\beta)(\xi_1) \rightarrow 0$. Por outro lado, como os polinômios são funções inteiras, tem-se que $P_\beta(\xi) = P_\beta(\xi_1)$ para todo β , de onde segue que $f(\xi) = \tilde{f}(\xi)$ e retornamos ao caso descrito em (1°), o que termina a demonstração do teorema.

BIBLIOGRAFIA

Alexander, H.

- [1] Analytic functions on Banach spaces, tese, Univ. Berkeley, 1968.

Barroso, J. A.

- [1] Topologia nos espaços de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos - Anais da Academia Brasileira de Ciências, Vol. 43 (1971).

Coeuré, G.

- [1] Fonctions plurisousharmoniques sur les espaces vectoriels topologiques et applications à l'étude des fonctions analytiques, Ann. Inst. Fourier, t. 20, 1970, pág. 361-432.

Hirschowitz, A.

- [1] Prolongement analytique en dimension infinie, Ann. Inst. Fourier, t. 22, 1972, pág. 255.

Hormander, L.

- [1] An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Van Nostrand, Princeton 1966.

Matos, M. G.

- [1] Holomorphic mappings and domains of holomorphy, tese, Univ. Rochester, 1970.

Nachbin, L.

- [1] Topologia dos espaços de aplicações holomorfas - Colóquio Brasileiro de Matemática, 6, Poços de Caldas, 1967.

- [2] Topology on spaces of holomorphic mappings-Ergebnisse der Mathematik, Vol, 47, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

Noverraz, P.

- [1] Pseudo-Convexit , Convexit  Polynomiale et Domaines d'Holomorphie en Dimension Infinie - Notas de Matemática, 48, North-Holland, Amsterdam, 1973.

Paques, O. W.

- [1] Produtos tensoriais de funções Silva-holomorfas e a propriedade de aproximação - tese, Unicamp, 1977.
- [2] Tensor Products of Silva-Holomorphic functions - Simpósio Brasileiro de Holomorfia - Rio de Janeiro.
- [3] The approximation property for certain spaces of holomorphic mappings em "Approximation Theory and Functional Analysis", Proceedings of the International Symposium on Approximation Theory, Campinas, 1977.

Schottenloher, M.

- [1] Analytic continuation and regular classes in locally convex Hausdorff spaces, Portugaliae Mathematica, Vol. 33, fasc. 4, 1974.
- [2] Riemann Domains: Basic Results and Open Problems-Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy, University of Kentucky 1973, Lecture Notes in Mathematics, 364, Springer-Verlag.