Instituto de Matemática , Estatística e Computação Científica
IMECC

Universidade Estadual de Campinas
UNICAMP

Tese de Doutorado em Matemática

Fenômenos de Não-cancelamento Relacionados a S^3-fibrados

Autor : **Tomas Edson Barros**

Orientador : **Alcibíades Rigas**

abril 1997

Fenômenos de Não-cancelamento Relacionados a S^3-fibrados

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. **Tomas Edson Barros** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 04 de abril de 1997

Prof. Dr. Alcibíades Rigas

Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

UNIDADE IMECC
N.º CHAMADA: UNICAMP
B278f
V. Ex.
TOMBO BC/ 30678
PROC. 281/97
C [ ] D [X]
PREÇO R$ 11,00
DATA 23/05/97
Nº CPD

CM-00098450-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Barros, Tomas Edson

B278f Fenômenos de não-cancelamento relacionados a S^3 -fibrados / Tomas Edson Barros -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1997.

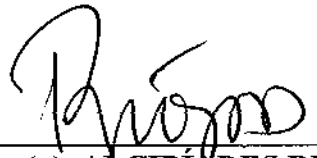
Orientador : Alcibíades Rigas

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Espaços fibrados. 2. Grupos de homotopia. 3. Teoria da homotopia. 4. Teoria de comutadores. I. Rigas, Alcibíades. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 04 de ABRIL de 1997

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). ALCIBÍADES RIGAS

Prof (a). Dr (a). DEREK DOUGLAS JACK HACON

Prof (a). Dr (a). DACIBERG LIMA GONÇALVES

Prof (a). Dr (a). LUCAS MONTEIRO CHAVES

Prof (a). Dr (a). FRANCESCO MERCURI

À minha esposa *Cláudia*

e à minha filha *Júlia*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho só foi possível graças à colaboração direta ou indireta de várias pessoas, as quais merecem meu sincero e profundo agradecimento.

Agradeço ao professor A. Rigas como matemático e como pessoa, pelo muito que aprendi do seu vasto conhecimento e pela pessoa humana e honesta que nele encontrei, ao professor Juno Mukai por sua valiosa contribuição nas discussões que tivemos nos meses de agosto e setembro quando o mesmo se encontrava na UNICAMP como pesquisador visitante, as quais deram origem ao capítulo 6 desse trabalho, aos professores Norai Rocco e Said Sidk pela presteza e rapidez com que responderam a nossas questões algébricas e pelas sugestões que nos deram.

Agradeço também ao Conselho Departamental de Matemática da UFSCar, o qual foi sempre sensível aos meus pedidos de afastamento e nunca colocou obstáculos para o bom desempenho nos meus estudos, bem como aos colegas em geral do Departamento de Matemática entre os quais destaco a professora Lúcia Valéria Cossi.

Não poderia deixar de agradecer aos meus pais , Antonio e Shirley aos quais devo tudo o que conquistei até hoje, e a duas pessoas especiais que não somente agradeço mas também divido com elas essa tese, uma vez que de uma forma ou de outra sempre estiveram ao meu lado e no meu pensamento, me fazendo compreender a cada dia o quanto me ajudaram e o quanto ainda me ajudam. Obrigado , Cláudia e Júlia.

Finalmente agradeço a Deus por ter me permitido conhecer e manter contato com todas essas pessoas.

íNDICE

Abstract

Resumo

0. Introdução 1

1. O fenômeno de não-cancelamento 2

2. Relação com S^3-fibrados sobre S^4 7

3. Forma fraca do fenômeno de não cancelamento 19

4. Funções de transição

   4.1 Funções de transição de $\tilde{P}_n$ e $E_{\alpha\beta}$ 23

   4.2 Cálculos com comutadores 30

   4.3 Trivialização de $\tilde{P}_9$ e homotopia das funções de transição 37

5. Geradores explícitos de $\pi_6(S^3)$ e $\pi_9(S^3)$ 50

6. Classificação dos fibrados $E_{\alpha\beta}$ 55

Epílogo 61

Bibliografia 62

ABSTRACT

The present work is intended to the study of the Rigas's models [**R2**], for principal S^3-bundles over S^7, to search a better understanding of a specific non-cancellation phenomena, namely, using these models we explicit (up to some homotopies) the diffeomorphism between $Sp(2) \times S^3$ and $E_{7\omega} \times S^3$ where $E_{7\omega}$ is the total space of the principal S^3-bundle over S^7 classified by 7 times the generator of $\pi_6(S^3)$ (cf. [**H2**]).We detect and correct some imprecision in the classification of such models, based on it we give a new approach to the problem of non-cancellation phenomena relating it with commutators of groups. with this tecnique we explicit generators of $\pi_6(S^3)$ and $\pi_9(S^3)$ in terms of commutators by a distinct method employed in [**J2**] , [Mc] and [**H2**]. We close the work with the computation of the classifying group of certain bundles which provide the non-cancellation phenomena cited.

RESUMO

O presente trabalho se presta a um estudo dos modelos de Rigas **[R2]**, para S^3-fibrados principais sobre S^7 , na busca de compreender um pouco mais acerca de um fenômeno de não-cancelamento específico, a saber, pretendemos estudar o difeomorfismo entre $Sp(2) \times S^3$ e $E_{7\omega} \times S^3$ onde $E_{7\omega}$ é o espaço total do S^3-fibrado principal sobre S^7 classificado por 7 vezes o gerador ω de $\pi_6(S^3)$ (cf. **[HR2]**). Detectamos e corrigimos uma imprecisão na classificação de tais modelos. Baseados nisso demos uma nova abordagem ao problema proposto relacionando-o com comutadores de grupos. Com essa técnica conseguimos explicitar geradores de $\pi_6(S^3)$ e $\pi_9(S^3)$ em termos de comutadores através de um método distinto do encontrado em **[J2]** , **[Mc]** e **[H2]**. Finalizamos o trabalho com o cálculo do grupo classificante de certos fibrados que dão origem ao fenômeno de não-cancelamento citado.

0. Introdução

O presente trabalho se presta a um estudo dos modelos de Rigas **[R2]**, para S^3-fibrados principais sobre S^7 , na busca de compreender um pouco mais acerca de um fenômeno de não-cancelamento específico, a saber, pretendemos estudar o difeomorfismo entre $Sp(2) \times S^3$ e $E_{7\omega} \times S^3$ onde $E_{7\omega}$ é o espaço total do S^3-fibrado principal sobre S^7 classificado por 7 vezes o gerador ω de $\pi_6(S^3)$ (cf. **[HR2]**).

Detectamos e corrigimos uma imprecisão na classificação de tais modelos. Baseados nisso demos uma nova abordagem ao problema proposto relacionando-o com comutadores de grupos. Com essa técnica conseguimos explicitar geradores de $\pi_6(S^3)$ e $\pi_9(S^3)$ em termos de comutadores através de um método distinto do encontrado em **[J2]** , **[Mc]** e **[H2]**.

Finalizamos o trabalho com o cálculo do grupo classificante de certos fibrados que dão origem ao fenômeno de não-cancelamento citado.

Fixamos a seguinte notação:

$\mathbf{P} = (P, \pi, M, G)$ denotará um fibrado principal com grupo estrutural G, espaço total P, espaço base M e projeção π.

$\mathbf{EG} = (EG, \pi, BG, G)$ será o fibrado universal para o grupo G.

$\equiv_d$ significará difeomorfismo.

$\equiv_f$ será usado para equivalência de fibrados.

$\simeq$ indicará tanto homotopia entre aplicações quanto mesmo tipo de homotopia entre espaços.

$\cong$ denotará isomorfismo entre grupos.

ι_n será a aplicação identidade de S^n.

$\mathbf{f}$ indicará a classe de homotopia de f.

1. O Fenômeno de Não-cancelamento

O fenômeno mencionado trata da seguinte questão:

Obter variedades diferenciáveis M_1 , M_2 e N sastifazendo:

(i) $M_1 \times N$ é difeomorfa a $M_2 \times N$;

(ii) M_1 e M_2 não possuem mesmo tipo de homotopia.

Charlap, em 1965 forneceu um primeiro exemplo de tal fenômeno em **[Ch]** , onde M_1 , M_2 são variedades riemannianas de curvatura zero e $N = S^1$. Tal exemplo é obtido como consequência de sua classificação para Z_p-variedades (variedades riemannianas com grupo de holonomia igual a Z_p) onde p é primo.

Em 1969 , Hilton e Roitberg **[HR2]** construiram seus exemplos com , M_1 e M_2 sendo espaços totais de fibrados principais e N o grupo estrutural correspondente, mais precisamente são considerados S^3-fibrados principais sobre esferas S^n. M_1 e M_2 são construidos seguindo o procedimento abaixo.

Os S^3-fibrados principais sobre S^n são classificados por $\pi_n(BS^3) \cong \pi_{n-1}(S^3)$ (cf. **[St]**). Temos assim, para cada $\alpha \in \pi_{n-1}(S^3)$ o correspondente S^3-fibrado $\mathbf{E}_\alpha = (E_\alpha, p_\alpha, S^n, S^3)$ classificado pelo adjunto $\alpha_0 \in \pi_n(BS^3)$ de α.

Dados pois, α , $\beta \in \pi_{n-1}(S^3)$ seja $\mathbf{E}_{\alpha\beta}$ o S^3-fibrado principal sobre E_α induzido do fibrado $\mathbf{E}_\beta$ pela projeção $p_\alpha : E_\alpha \longrightarrow S^7$. Temos desta forma o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} S^3 & & S^3 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ E_{\alpha\beta} & \longrightarrow & E_\beta & & \\ \downarrow & & \downarrow p_\beta & & \\ E_\alpha & \xrightarrow{p_\alpha} & S^7 & \xrightarrow{\beta_0} & BS^3 \end{array}$$

diagrama 1

Tem-se o seguinte:

Teorema (Hilton-Roitberg): i) $E_\alpha \simeq E_\beta \iff \alpha = \pm\beta$.

ii) Sejam, $\alpha \in \pi_{n-1}(S^3)$ um elemento de ordem k e $\beta = l\alpha \quad l \in Z$. Se existe l', $l' \equiv l \; mod \; k$ tal que:

$$\frac{l'(l'-1)}{2}\omega \circ \Sigma^3\alpha = 0 \in \pi_{n+2}(S^3)$$

onde $\omega \in \pi_6(S^3)$ é o gerador, Σ^3 é a suspensão terceira de α, então o fibrado $\mathbf{E}_{\alpha\beta}$ é trivial.

Observamos que por construção do fibrado induzido segue facilmente que $E_{\alpha\beta} \equiv_d E_{\beta\alpha}$. Esta observação juntamente com o teorema acima fornecem os seguintes exemplos de fenômeno de não-cancelamento:

(1) Considerando S^3-fibrados principais sobre S^{21}, temos:

$M_1 = E_\alpha$ onde $\alpha \in \pi_{20}(S^3) \cong Z_{12} \oplus Z_2 \oplus Z_2$ é um elemento de ordem 12.

$M_2 = E_\beta$ onde $\beta = 5\alpha$.

Pois tomando $l' = 5$ temos que $\frac{l'(l'-1)}{2}\Sigma\omega \circ \Sigma^4\alpha = 5\Sigma\omega \circ 2\Sigma^4\alpha = 0$, já que $\Sigma^4\alpha \in \pi_{24}(S^7) \cong Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ e como $\Sigma : \pi_{23}(S^3) \longrightarrow \pi_{24}(S^4)$ é injetora (cf. **[HR2]**) segue que $\frac{l'(l'-1)}{2}\omega \circ \Sigma^3\alpha = 0$ donde pelo teorema acima:

$$E_{\alpha\beta} \equiv_d E_\alpha \times S^3$$

Como $\alpha = 5\beta$ segue de maneira análoga que, $\frac{l'(l'-1)}{2}\omega \circ \Sigma^3\beta = 0$ donde:

$$E_{\beta\alpha} \equiv_d E_\beta \times S^3$$

e como $\alpha \neq \pm\beta$ tem-se também $M_1 \not\simeq M_2$.

(2) Considerando S^3-fibrados sobre S^{14} temos:

$M_1 = E_\alpha$ onde $\alpha \in \pi_{13}(S^3) \cong Z_{12} \oplus Z_2$ é um elemento de ordem 12.

$M_2 = E_\beta$ onde $\beta = 5\alpha$.

Desde que tomando agora $l' = 17$ obtemos $\frac{l'(l'-1)}{2}\Sigma\omega \circ \Sigma^4\alpha = 136\Sigma\omega \circ \Sigma^4\alpha =$ $= 34\Sigma\omega \circ 4\Sigma^4\alpha = 0$ uma vez que de **[T2]** conclui-se que $\Sigma^4\alpha \in \pi_{17}(S^7)$ tem ordem 4. Assim segue novamente do teorema acima:

$$E_{\alpha\beta} \equiv_d E_\alpha \times S^3$$

Analogamente, como $\alpha = 5\beta$ e $4\Sigma^4\beta = 0$ temos que, $\frac{l'(l'-1)}{2}\Sigma\omega \circ \Sigma^4\beta = 0$ donde:

$$E_{\beta\alpha} \equiv_d E_\beta \times S^3$$

e novamente como $\alpha \neq \pm\beta$ temos $M_1 \not\simeq M_2$.

(3) Consideremos finalmente S^3-fibrados sobre S^7:

Neste caso $M_1 = E_\alpha$ onde $\alpha = \omega \in \pi_6(S^3) \cong Z_{12}$ é o gerador.

$M_2 = E_\beta$ com $\beta = 7\alpha$

Já que $\frac{7(7-1)}{2}\omega \circ \Sigma^3\alpha = 21\omega \circ \Sigma^3\alpha = 0$ pois $\pi_9(S^3) \cong Z_3$, analogamente como $\alpha = 7\beta$ temos também $\frac{7(7-1)}{2}\omega \circ \Sigma^3\beta = 0$. Como E_ω é o S^3-fibrado canônico $Sp(2)$ sobre S^7 temos desta vez:

$$Sp(2) \times S^3 \equiv_d E_{7\omega} \times S^3 \quad e \quad Sp(2) \not\simeq E_{7\omega} \qquad (*)$$

Este último exemplo tem imporância redobrada, uma vez que $Sp(2)$ e $E_{7\omega}$ são os únicos S^3-fibrados sobre S^7 a menos de orientação que admitem estrutura de loop-space (cf. **[HMR2]** , **[CM]** ou **[Z]**), isso juntamente com a segunda parte de $(*)$ nos diz que $Sp(2)$ e $E_{7\omega}$ são H-espaços com distintas H-estruturas.

Scheerer **[Sc]** em 1970 obteve uma obstrução que detecta a trivialidade de fibrados principais sobre esferas onde o grupo estrutural é um grupo de Lie simples conexo e compacto generalizando assim a obstrução de Hilton-Roitberg dada acima.

Seja pois, G um grupo de Lie simples conexo e compacto, denotemos por $u_k : G \longrightarrow G$ a aplicação $u_k(x) = x^k$, $k \in Z$ e $w_k : G \times G \longrightarrow G$ a aplicação $w_k(x,y) = u_k(y^{-1})u_k(x^{-1})u_k(xy)$. Os G-fibrados principais sobre a esfera S^n são classificados por $\pi_n(BG) \cong \pi_{n-1}(G)$ (cf. **[Sa]**). Usando a mesma notação dada

anteriormente para S^3-fibrados principais sobre S^n, ou seja, $\mathbf{E}_\alpha$ denotando agora o G-fibrado principal sobre S^n classificado por $\alpha \in \pi_{n-1}(G)$ e $\mathbf{E}_{\alpha\beta}$ denotando o G-fibrado principal sobre E_α induzido de $\mathbf{E}_\beta$ pela projeção $p_\alpha : E_\alpha \longrightarrow S^n$ temos:

Teorema (Scheerer): Suponha que G tem mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo enumeravel. Se $\beta = t\alpha \in \pi_{n-1}(G)$ e existe $k \in Z$, $k \equiv t \ mod \ (ord(\alpha))$ tal que:

$$w_k \circ (\alpha \times id_G) : S^{n-1} \times G \longrightarrow G$$

é homotópica à aplicação constante, então $\mathbf{E}_{\alpha\beta}$ é o fibrado trivial.

Mostraremos no capítulo 5 que o elemento de obstrução de Hilton-Roitberg é equivalente ao elemento de obstrução de Scheerer quando $G = S^3$, conforme mencionado mas não provado em **[HMR2]**.

Nos exemplos acima M_1 , M_2 e N são no máximo 2-conexos, em 1972 Hilton, Mislin e Roitberg **[HMR1]** conseguiram fornecer exemplos de M_1 , M_2 e N todos n-conexos para n arbitrariamente grande.

Notamos que em todos os trabalhos mencionados, os exemplos para o fenômeno de não-cancelamento são obtidos de maneira indireta, ou seja, não se explicita o difeomorfismo (i).

Nos trabalhos de Hilton e Roitberg, **[HR1]** e **[HR2]** se leva em conta a decomposição celular dos espaços E_α $(\alpha \in \pi_{n-1}(S^3))$, a saber:

$$E_\alpha = (S^3 \cup_\alpha e^n) \cup e^{n+3} = C_\alpha \cup e^{n+3}$$

é mostrado que sob as mesmas condições em que se tem $E_\alpha \times S^3 \equiv_d E_\beta \times S^3$ também se tem $C_\alpha \vee S^3 \simeq C_\beta \vee S^3$ (onde $\vee$ denota a união por um ponto) embora em geral $E_\alpha \not\simeq E_\beta$ e $C_\alpha \not\simeq C_\beta$. É sugerido então uma análise mais cuidadosa do difeomorfismo entre $E_\alpha \times S^3$ e $E_\beta \times S^3$.

Nosso objetivo central foi seguir esta sugestão e estudar o exemplo (3) de Hilton-Roitberg acima, tentando dar uma idéia da complexidade do difeomorfismo entre $Sp(2) \times S^3$ e $E_{7\omega} \times S^3$.

Para tanto, trabalhamos com os modelos de Rigas para S^3-fibrados principais sobre S^7, denotados em **[R2]** por $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n}$. Com isso detectamos e corrigimos um erro na classificação dos fibrados $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n}$. A partir disso explicitamos geradores de $\pi_6(S^3)$ e $\pi_9(S^3)$ e na tentativa de explicitar o difeomorfismo citado, conseguimos relacioná-lo com o estudo de um certo grupo nilpotente associado às funções de transição de $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n}$. Por fim provamos com a ajuda do professor Juno Mukai que $\pi_9(S^3)$ não é somente o ambiente da obstrução de Hilton-Roitberg mas é também grupo classificante dos S^3-fibrados sobre $Sp(2)$ e sobre $E_{7\omega}$.

2. Relação com S^3-fibrados sobre S^4

Apresentamos neste capítulo os modelos de Rigas para S^3-fibrados principais sobre S^7 e corrigimos sua classificação.

Sejam:

H a álgebra dos quatérnios.

$Sp(n)$ o grupo das matrizes quaterniônicas A tais que $A.A^* = A^*.A = I$, onde A^* é a matriz transposta conjugada de A e I é a matriz identidade.

HP^{n-1} o espaço projetivo quaterniônico cujos elementos serão denotados por:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

significando a classe de equivalência do correspondente elemento de S^{4n-1} pela ação de $Sp(1)$.

$\triangle_n : Sp(1) \longrightarrow Sp(n)$ a inclusão diagonal:

$$\triangle_n(q) = diag(q, q, ..., q) = \begin{pmatrix} q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q \end{pmatrix}$$

Em [**R2**], Rigas construiu os fibrados principais:

$$\mathbf{P_n} = (P_n, p_n, S^4, Sp(1)) \quad e \quad \tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n} = (\tilde{P}_n, \tilde{p}_n, S^7, Sp(1)) \quad n \in \mathbf{N}, n \geq 2.$$

com as seguintes características:

(4) $P_n \subseteq \overset{n}{Sp}(1) \setminus Sp(n)$, $\quad \overset{n}{Sp}(1) = \triangle_n(Sp(1))$ e o quociente é induzido pela ação à esquerda de $\overset{n}{Sp}(1)$ sobre $Sp(n)$.

(5) A primeira coluna de um elemento $P \in P_n$ tem a forma $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in HP^{n-1}$ e

$p_n(P) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in HP^1 \equiv S^4$.

(6) $Sp(1)$ atua livremente por multiplicação (quaterniônica) à direita sobre a última coluna.

(7) $\pi_3(P_n) \cong Z_n$.

(8) $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n} = h^*(\mathbf{P_n})$ é o fibrado induzido de $\mathbf{P_n}$ pela aplicação de Hopf, $h : S^7 \longrightarrow S^4$.

Sejam $M_n = M_n(a, b, x_1, x_2, ..., x_n) \in Sp(n)$ dadas por:

$$M_2 = \begin{pmatrix} a & x_1 \\ b & x_2 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & -b|b|^2 & x_1 \\ b & b\bar{a}b & x_2 \\ 0 & a\sqrt{1+|b|^2} & x_3 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} a & -b|b|^2 L(4)^{-1} & 0 & x_1 \\ b & b\bar{a}bL(4)^{-1} & 0 & x_2 \\ 0 & a|a|^2 L(4)^{-1} & -b & x_3 \\ 0 & a\bar{b}aL(4)^{-1} & a & x_4 \end{pmatrix},$$

onde $L(4) = \sqrt{|a|^4 + |b|^4}$. E para $n \geq 5$:

$$M_n = \begin{pmatrix} a & \frac{-b|b|^2}{L(n)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ b & \frac{b\bar{a}b}{L(n)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & \frac{af_{n-5}}{L(n)} & \frac{-b}{L_{n-4}} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & \frac{(a\bar{b})af_{n-6}}{L(n)} & \frac{af_{n-6}}{L_{n-4}} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & \frac{(a\bar{b})^2af_{n-7}}{L(n)} & \frac{(a\bar{b})af_{n-7}}{L_{n-4}} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & \frac{(a\bar{b})^3af_{n-8}}{L(n)} & \frac{(a\bar{b})^2af_{n-8}}{L_{n-4}} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & x_6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{(a\bar{b})^{n-7}af_2}{L(n)} & \frac{(a\bar{b})^{n-8}af_2}{L_{n-4}} & \cdots & \frac{-b}{L_3} & 0 & 0 & 0 & x_{n-4} \\ 0 & \frac{(a\bar{b})^{n-6}af_1}{L(n)} & \frac{(a\bar{b})^{n-7}af_1}{L_{n-4}} & \cdots & \frac{af_1}{L_3} & \frac{-b}{L_2} & 0 & 0 & x_{n-3} \\ 0 & \frac{(a\bar{b})^{n-5}af_0}{L(n)} & \frac{(a\bar{b})^{n-6}af_0}{L_{n-4}} & \cdots & \frac{(a\bar{b})af_0}{L_3} & \frac{af_0}{L_2} & \frac{-b}{L_1} & 0 & x_{n-2} \\ 0 & \frac{(a\bar{b})^{n-4}a|a|^2}{L(n)} & \frac{(a\bar{b})^{n-5}a|a|^2}{L_{n-4}} & \cdots & \frac{(a\bar{b})^2a|a|^2}{L_3} & \frac{(a\bar{b})a|a|^2}{L_2} & \frac{a|a|^2}{L_1} & -b & x_{n-1} \\ 0 & \frac{(a\bar{b})^{n-3}a}{L(n)} & \frac{(a\bar{b})^{n-4}a}{L_{n-4}} & \cdots & \frac{(a\bar{b})^3a}{L_3} & \frac{(a\bar{b})^2a}{L_2} & \frac{(a\bar{b})a}{L_1} & a & x_n \end{pmatrix}$$

onde:

$L_1^2 = |a|^4 + |b|^2$, $L_k^2 = |a|^{2(k+1)}(L_1L_2L_3...L_{k-1})^2 + |b|^2$, $k = 2, 3, 4, ..., n-4$.

$L(n)^2 = |a|^{2(n-2)}(L_1L_2L_3...L_{n-4})^2 + |b|^4$

$f_0 = |a|^4$, $f_k = |a|^{2(k+2)}(L_1L_2L_3...L_{k-1})^2$, $k = 2, 3, 4, ..., n-4$.

(9) $\tilde{P}_n = \{M \in Sp(n) : M = M_n(a, b, x_1, ..., x_n)$, para certos a, b, x_i em $H\}$, $\tilde{p}_n(M_n(a, b, x_1, ..., x_n)) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in S^7$ e $Sp(1)$ atua sobre $\tilde{P}_n$ por multiplicação á direita sobre a última coluna.

Os S^3-fibrados principais sobre S^7 são classificados por $\pi_6(S^3) \cong Z_{12}$, assim existem 12 S^3-fibrados principais sobre S^7 a menos de equivalência de fibrados, os quais denotaremos por:

$$\mathbf{E_i} = (E_i, \pi_i, S^7, S^3) \quad i \in Z \tag{10}$$

e $\mathbf{E_i}$ é classificado por i vezes o gerador de $\pi_6(S^3)$.

Como $Sp(1) \cong S^3$ os fibrados $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n}$ são S^3-fibrados principais sobre S^7, assim para cada $n \in N$, $n \geq 2$ existe um k_n, $1 \leq k_n \leq 12$ tal que $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n} \equiv_f \mathbf{E_{k_n}}$.

Em **[R2]** encontramos o seguinte resultado:

$$\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n} \equiv_f \mathbf{E_{(n-1)mod12}} \quad n \geq 3$$

o qual não está correto. Pretendemos mostrar que, na realidade tem-se:

$$\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n} \equiv_f \mathbf{E_{\varphi(n-1)mod12}} \quad n \geq 2 \tag{11}$$

onde $\varphi(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Para tanto, como os S^3-fibrados principais sobre S^4 são classificados por $\pi_4(BS^3) \cong \pi_3(S^3) \cong Z$, temos que, dado $\mathbf{E} = (E, p, S^4, S^3)$ existe $f : S^4 \longrightarrow BS^3$ tal que o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{id} & S^3 \\ j_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ E & \xrightarrow{F} & ES^3 \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^4 & \xrightarrow{f} & BS^3 \end{array}$$

diagrama 2

comuta.

Suponhamos que $\mathbf{f} \in \pi_4(BS^3)$ corresponda a $n \in Z$ e analisemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \pi_4(ES^3) & \cong & 0 \\
 & & & & \downarrow \pi_* & & \\
Z & \cong & \pi_4(S^4) & \xrightarrow{f_*} & \pi_4(BS^3) & \cong & Z \\
 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_1 & & \\
Z & \cong & \pi_3(S^3) & \xrightarrow{id} & \pi_3(S^3) & \cong & Z \\
 & & \downarrow j_{2*} & & \downarrow j_{1*} & & \\
 & & \pi_3(E) & \xrightarrow{F_*} & \pi_3(ES^3) & \cong & 0 \\
 & & \downarrow p_* & & \downarrow \pi_* & & \\
0 & \cong & \pi_3(S^4) & \xrightarrow{f_*} & \pi_3(BS^3) & \cong & 0
\end{array}$$

diagrama 3

onde as sequências verticais são sequências exatas induzidas do diagrama 1.

Como $\partial_1 : Z \longrightarrow Z$ é isomorfismo, segue que:

$$\partial_1(1) = \pm 1 \tag{12}$$

Temos que:

$$\begin{array}{rccccccc}
f_* : & \pi_4(S^4) & \longrightarrow & \pi_4(BS^3) & & & & \\
 & \iota_4 & \longmapsto & f_*(\iota_4) & = & \mathbf{f} \circ \iota_4 & = & \mathbf{f}
\end{array} \tag{13}$$

Assim:

$$\begin{array}{ccc}
Z & \xrightarrow{f_*} & Z \\
1 & \longmapsto & n
\end{array}$$

Portanto:

$$\begin{array}{rccc}
\partial_1 \circ f_* : & Z & \longrightarrow & Z \\
 & 1 & \longmapsto & \pm n
\end{array}$$

Donde:

$$\begin{array}{rccc}
\partial_2 : & Z & \longrightarrow & Z \\
 & 1 & \longmapsto & \pm n
\end{array}$$

isso implica que $\partial_2(Z) = nZ$.

Sendo j_{2*} sobrejetora e $\ker(j_{2*}) = \partial_2(Z) = nZ$ segue que:

$$\pi_3(E) \cong \frac{Z}{nZ} = Z_n$$

Reciprocamente, supondo que $\pi_3(E) \cong Z_n$ então:

$$\ker(j_{2*}) = nZ \ , \text{ ou seja } \partial_2(Z) = nZ$$

isso implica que:

$$\begin{array}{rccc} \partial_2 : & Z & \longrightarrow & Z \\ & 1 & \longmapsto & \pm n \end{array}$$

Donde:

$$\begin{array}{rccc} \partial_1 \circ f_* : & Z & \longrightarrow & Z \\ & 1 & \longmapsto & \pm n \end{array} \tag{14}$$

Sabemos que:

$$\begin{array}{rccc} f_* : & Z & \longrightarrow & Z \\ & 1 & \longmapsto & m.1 \end{array} \tag{15}$$

para algum $m \in Z$.

Utilizando (12),(14) e (15) temos:

$$\pm n = \partial_1 \circ f_*(1) = \partial_1(m.1) = m.\partial_1(1) = \pm m$$

Logo, $m = \pm n$ e por (13) e (15) temos que:

$$\mathbf{f} \in \pi_4(BS^3) \text{ corresponde a } \pm n \in Z$$

Provamos assim:

Lema 2.1: $\mathbf{E} = (E, p, S^4, S^3)$ é classificado por $n \in Z \cong \pi_4(BS^3)$ se, e somente se, $\pi_3(E) \cong Z_{|n|}$.

Sejam, $\mathbf{R_n} = (R_n, r_n, S^4, S^3)$ o fibrado classificado por $n \in Z \cong \pi_4(BS^3)$ e $n \equiv \mathbf{g_n} \in \pi_4(BS^3)$.

Sabemos que o fibrado de Hopf, (S^7, h, S^4, S^3) é um S^3-fibrado universal para espaços CW-complexos de dimensão menor ou igual a 6 (cf. **[H]** Theorem 6 pg. 83).

Assim, $g_n \simeq j \circ f_n$ onde:

j=inclusão : $S^4 \equiv_d HP^1 \longrightarrow HP^\infty \equiv_d BS^3$

$f_n : S^4 \longrightarrow S^4$

Logo:

$$\begin{array}{rccc} j_* : & Z \cong \pi_4(S^4) & \longrightarrow & Z \cong \pi^4(BS^3) \\ & 1 \equiv \iota_4 & \longmapsto & 1 \equiv j_*(\iota_4) = \mathbf{j} \circ \iota_4 = \mathbf{j} \\ & n \equiv n.\iota_4 & \longmapsto & n \equiv j_*(n.\iota_4) = n.j_*(\iota_4) = n.\mathbf{j} \end{array}$$

Como $\mathbf{g_n} \equiv n$ temos que $\mathbf{g_n} = n.\mathbf{j}$, donde:

$$\mathbf{f_n} = n.\iota_4,$$

ou seja, f_n é uma aplicação de grau n.

Notamos que:

$$\mathbf{f_{-n}} = -\mathbf{f_n} = \mathbf{f_n} \circ -\iota_4$$

onde $-\iota_4$ é a aplicação antípoda de $S^4 \longrightarrow S^4$.

Temos então:

$$\begin{array}{ccccccc} S^3 & & S^3 & & S^3 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ R_{-n} & \longrightarrow & R_n & \longrightarrow & S^7 & & \\ \downarrow r_{-n} & & \downarrow r_n & & \downarrow h & & \\ S^4 & \xrightarrow{-\iota_4} & S^4 & \xrightarrow{f_n} & S^4 & \xrightarrow{j} & BS^3 \end{array}$$

diagrama 4

Por definição:

$$R_{-n} = \{(\alpha, \beta) \in S^4 \times R_n / \ -\iota_4(\alpha) = r_n(\beta)\} = \{(-r_n(\beta), \beta) \in S^4 \times R_n\} \equiv_d R_n \ ,$$

ou seja, $\mathbf{R_{-n}} = (R_n, -r_n, S^4, S^3)$ e os fibrados $\mathbf{R_n}$ e $\mathbf{R_{-n}}$ diferem apenas na orientação de S^4.

Assim, pelo lema 2.1 e (7) temos que:

$$\mathbf{P_n} \equiv_\mathbf{f} \mathbf{R_n} \ \text{ ou } \ \mathbf{P_n} \equiv_\mathbf{f} \mathbf{R_{-n}}$$

donde:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & S^3 & & S^3 & & S^3 & & S^3 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \downarrow j_2 & & \downarrow j_1 \\
S^3 & \cdots & \tilde{P}_n & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & S^7 & \longrightarrow & ES^3 \\
 & & \downarrow \tilde{p}_n & & \downarrow p_n & & \downarrow h & & \downarrow \pi \\
S^3 & \cdots & S^7 & \xrightarrow{h} & S^4 & \xrightarrow{f_{\delta n}} & S^4 & \xrightarrow{j} & BS^3
\end{array}$$

diagrama 5

com $n \geq 2$ e $\delta = \pm 1$ dependendo da orientação de S^4.

Para $n = 0$ ou 1 temos um diagrama similar, substituindo P_n por R_n e p_n por δr_n , especificamente temos:

$R_0 = S^4 \times S^3$ e o fibrado $\mathbf{R_0}$ é trivial.

$\mathbf{R_1}$ é o fibrado de Hopf , (S^7, h, S^4, S^3).

$\mathbf{R_{-1}} = (S^7, -h, S^4, S^3)$.

$h^*(\mathbf{R_0}) \equiv_f h^*(\mathbf{R_1}) \equiv_f (S^7 \times S^3, p, S^7, S^3) =$ fibrado trivial.

$h^*(\mathbf{R_{-1}}) = (Sp(2), \tilde{p}_2, S^7, S^3)$ (cf. **[CR]**). (16)

Consideremos os seguintes resultados (cf. **[H1]** e **[Hu]**):

(17) Se $\mathbf{g} \in \pi_m(S^n), m \leq 3n-3$ e $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2} \in \pi_n(X)$ então :

$(\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}) \circ \mathbf{g} = \mathbf{F_1} \circ \mathbf{g} + \mathbf{F_2} \circ \mathbf{g} + [\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}]\mathbf{H(g)}$

onde: $[\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}] =$ produto de Whitehead de $\mathbf{F_1}$ por $\mathbf{F_2}$, e $\mathbf{H(g)} =$ invariante de Hopf de g.

(18) $[\iota_4, \iota_4] = \mathbf{2h} - \epsilon\mathbf{\Sigma}(\omega)$

onde: $[\iota_4, \iota_4] =$ produto de Whitehead de ι_4 por ι_4, $\mathbf{h} =$ aplicação de Hopf de $S^7 \longrightarrow S^4$, $\mathbf{\Sigma}(\omega) =$ suspensão do gerador de $\pi_6(S^3)$, $\epsilon = \pm 1$ dependendo da convenção de orientação.

(19) $\mathbf{h}$ gera a parte livre de $\pi_7(S^4) \cong Z \oplus Z_{12}$ e $\mathbf{\Sigma}(\omega)$ gera a parte de torção, consideramos então de acordo com o isomorfismo acima a seguinte identificação, $\mathbf{h} \equiv (1, 0)$ e $\mathbf{\Sigma}(\omega) \equiv (0, 1)$.

Utilizando (17) pode-se concluir facilmente que se $\alpha \in \pi_n(X)$ e $\mathbf{g} \in \pi_m(S^n)$,

$m \leq 3n-3$, então:

$$(k\alpha) \circ \mathbf{g} = k(\alpha \circ \mathbf{g}) + \frac{k(k-1)}{2}[\alpha,\alpha]\mathbf{H}(\mathbf{g}) \quad k \in Z \tag{20}$$

pois, supondo primeiramente $k \in N$ temos:

Para, $k = 0$ *ou* 1 o resultado é trivial.

Assumindo que:

$$((k-1)\alpha) \circ g = (k-1)(\alpha \circ g) + \frac{(k-1)(k-2)}{2}[\alpha,\alpha]H(g) \qquad k > 1$$

teremos:

$$\begin{aligned}
(k\alpha) \circ g &= (\alpha + (k-1)\alpha) \circ g = \\
&= \alpha \circ g + ((k-1)\alpha) \circ g + [\alpha,(k-1)\alpha]H(g) = \\
&= \alpha \circ g + (k-1)(\alpha \circ g) + \tfrac{(k-1)(k-2)}{2}[\alpha,\alpha]H(g) + (k-1)[\alpha,\alpha]H(g) = \\
&= k(\alpha \circ g) + \tfrac{k(k-1)}{2}[\alpha,\alpha]H(g)
\end{aligned}$$

logo a fórmula é válida para todo $k \geq 0$.

Se $k < 0$ temos:

$$\begin{aligned}
0 = (k\alpha + (-k\alpha)) \circ g &= (k\alpha) \circ g + (-k\alpha) \circ g + [k\alpha,-k\alpha]H(g) = \\
&= (k\alpha) \circ g + (-k)(\alpha \circ g) + \tfrac{-k(-k-1)}{2}[\alpha,\alpha]H(g) - k^2[\alpha,\alpha]H(g) = \\
&= (k\alpha) \circ g - k(\alpha \circ g) - \tfrac{k(k-1)}{2}[\alpha,\alpha]H(g)
\end{aligned}$$

donde segue a fórmula.

Com isso temos:

$\mathbf{f_{\delta n}} \circ \mathbf{h} = (\delta n \iota_4) \circ \mathbf{h} = \delta n(\iota_4 \circ \mathbf{h}) + \frac{\delta n(\delta n-1)}{2}[\iota_4,\iota_4]\mathbf{H}(\mathbf{h}) = \delta n\mathbf{h} + \frac{\delta n(\delta n-1)}{2}[\iota_4,\iota_4]\mathbf{H}(\mathbf{h})$.

e com auxílio de (18) , (19) e notando que $\mathbf{H}(\mathbf{h}) = \mathbf{1}$ segue que:

$$\mathbf{f_{\delta n}} \circ \mathbf{h} = \delta n\mathbf{h} + \frac{\delta n(\delta n-1)}{2}(2\mathbf{h} - \epsilon\boldsymbol{\Sigma}(\omega)) \equiv (n^2, -\epsilon\frac{\delta n(\delta n-1)}{2}) \tag{21}$$

analisemos agora o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
Z_2 & \cong & \pi_7(S^3) & & & & \\
 & & \downarrow j_{2*} & & & & \\
Z & \cong & \pi_7(S^7) & \longrightarrow & \pi_7(ES^3) & \cong & 0 \\
 & & \downarrow h_* & & \downarrow \pi_* & & \\
Z \oplus Z_{12} & \cong & \pi_7(S^4) & \xrightarrow{j_*} & \pi_7(BS^3) & \cong & Z_{12} \\
 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_1 & & \\
Z_{12} & \cong & \pi_6(S^3) & \xrightarrow{id} & \pi_6(S^3) & \cong & Z_{12} \\
 & & \downarrow j_{2*} & & \downarrow j_{1*} & & \\
0 & \cong & \pi_6(S^7) & \longrightarrow & \pi_6(ES^3) & \cong & 0
\end{array}$$

diagrama 6

onde as sequências verticais são sequências exatas induzidas das duas últimas colunas do diagrama 5.

Observamos que $j_{2*} : \pi_7(S^3) \longrightarrow \pi_7(S^7)$ é o homomorfismo nulo, donde por **[St]** pg 93, theorem 17.10 segue que:

$$\pi_7(S^4) \cong h_*(\pi_7(S^7)) \oplus M$$

onde $M \subseteq \pi_7(S^4)$, $M \cong \pi_6(S^3) \cong Z_{12}$.

Concluimos então que:

$$\begin{array}{ccccc}
\partial_2 : \pi_7(S^4) \cong h_*(\pi_7(S^7)) \oplus M \cong Z \oplus Z_{12} & \longrightarrow & \pi_6(S^3) \cong Z_{12} \\
(a, b) & \longmapsto & b
\end{array}$$

Como $\partial_2 = \partial_1 \circ j_*$ e ∂_1 é um isomorfismo de $Z_{12} \longrightarrow Z_{12}$, segue que:

$$\begin{array}{ccccc}
j_* : \pi_7(S^4) \cong Z \oplus Z_{12} & \longrightarrow & \pi_7(BS^3) \cong Z_{12} \\
(a, b) & \longmapsto & b
\end{array}$$

com isso e mais (21) concluimos que:

$$\mathbf{j} \circ \mathbf{f}_{\delta \mathbf{n}} \circ \mathbf{h} = j_*(\mathbf{f}_{\delta \mathbf{n}} \circ \mathbf{h}) \equiv j_*((n^2, -\epsilon \frac{\delta n(\delta n - 1)}{2})) \equiv -\epsilon \frac{\delta n(\delta n - 1)}{2}$$

Para:

$$\delta = 1 \qquad \mathbf{j} \circ \mathbf{f}_{\mathbf{n}} \circ \mathbf{h} \equiv -\epsilon\varphi(n-1), \qquad n > 0 \tag{22}$$

$$\delta = -1 \qquad \mathbf{j} \circ \mathbf{f}_{-\mathbf{n}} \circ \mathbf{h} \equiv -\epsilon\varphi(n), \qquad n \geq 0 \tag{23}$$

onde $\varphi(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Como $(Sp(2), \tilde{p}_2, S^7, S^3) \equiv_f \mathbf{E_1}$ é classificado pelo gerador de $\pi_6(S^3)$ segue de (16) que:

$$\mathbf{j} \circ \mathbf{f_{-1}} \circ \mathbf{h} \equiv 1 \in Z_{12}$$

Por (23) então , segue que $\epsilon = -1$ desta forma:

$$\mathbf{j} \circ \mathbf{f_2} \circ \mathbf{h} \equiv \varphi(1) = 1 \in Z_{12}$$

e como $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{2} = (Sp(2), \tilde{p}_2, S^7, S^3)$ temos que $\mathbf{j} \circ \mathbf{f_2} \circ \mathbf{h}$ classifica $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{2}$, donde no diagrama 5 $\delta = 1$ para $n \geq 2$.

Assim $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n}$ é classificado por $\mathbf{j} \circ \mathbf{f_n} \circ \mathbf{h} \equiv \varphi(n-1) mod 12$, portanto:

$$\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n} \equiv \mathbf{E}_{\boldsymbol{\varphi(n-1) mod 12}}$$

o que demonstra (11).

Notamos que:

$$\varphi(n-1) \equiv \varphi((n-1) + 24t) \; mod \; 12 \; , \quad t \in Z$$

pois:

$\varphi((n-1)+24t) = \frac{((n-1)+24t)(n+24t)}{2} = \frac{(n-1)n}{2} + 12((2n-1)t + 24t^2) \equiv \varphi(n-1) mod 12$

Temos:

$\mathbf{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\boldsymbol{\varphi(n-1) mod 12}$	0	1	3	6	10	3	9	4	0	9	7	6

$\mathbf{n}$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\boldsymbol{\varphi(n-1) mod 12}$	6	7	9	0	4	9	3	10	6	3	1	0

Com isso concluimos que:

$$\mathbf{E_0} \equiv_\mathbf{f} \tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{24t} \equiv_\mathbf{f} \tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{1+24t} \equiv_\mathbf{f} \tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{9+24t} \equiv_\mathbf{f} \tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{16+24t}$$

$\mathbf{E_1} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{2+24t}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{23+24t}}$

$\mathbf{E_3} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{3+24t}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{6+24t}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{19+24t}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{22+24t}}$

$\mathbf{E_4} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{8+24t}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{17+24t}}$

$\mathbf{E_6} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{4+24t}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{12+24t}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{13+24t}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{21+24t}}$

$\mathbf{E_7} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{11+24t}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{14+24t}}$

$\mathbf{E_9} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{7+24t}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{10+24t}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{15+24t}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{18+24t}}$

$\mathbf{E_{10}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{5+24t}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{20+24t}}$

$t \in N$ e em $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{24t}}$ e $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{1+24t}}$ $t \neq 0$.

Percebemos assim , que os fibrados $\mathbf{E_2}, \mathbf{E_5}, \mathbf{E_8}$ e $\mathbf{E_{11}}$ não podem ser realizados como $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{n}}$ para nenhum n.

Observamos por outro lado que se :

$$\mathbf{Q_n} = (Q_n, q_n, S^7, S^3) = \Sigma(\omega)^*(\mathbf{P_n})$$

então , $\mathbf{j} \circ \mathbf{f_n} \circ \mathbf{\Sigma}(\omega) \in \pi_7(BS^3)$ classifica $\mathbf{Q_n}$, mas:

$\mathbf{j} \circ \mathbf{f_n} \circ \mathbf{\Sigma}(\omega) = j_*(\mathbf{f_n} \circ \mathbf{\Sigma}(\omega)) = j_*((n\iota_4) \circ \mathbf{\Sigma}(\omega)) = j_*(n(\iota_4 \circ \mathbf{\Sigma}(\omega))) = j_*(n\mathbf{\Sigma}(\omega)) = nj_*(\mathbf{\Sigma}(\omega)) \equiv n \in Z_{12}$

Logo $\mathbf{Q_n} \equiv_{\mathbf{f}} \mathbf{E_n}$ $\mathbf{mod12}$.

Observamos que, se $\omega_0 \in \pi_7(BS^3)$ é um gerador e $g_n : S^7 \longrightarrow S^7$ é uma aplicação de grau n, então:

$$\omega_0 \circ \mathbf{g_n} = \omega_0 \circ (\mathbf{n}\iota_7) = \mathbf{n}(\omega_0 \circ \iota_7) = \mathbf{n}\omega_0$$

Portanto, o fibrado $\mathbf{E_n}$ também pode ser definido como sendo o fibrado induzido de $Sp(2)$ por uma aplicação de grau n.

Lembremos que se $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\beta = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ são elementos da álgebra de Cayley $K = H \oplus H$, então:

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} ac - \bar{d}b \\ da + b\bar{c} \end{pmatrix}$$

e $g_n : S^7 \longrightarrow S^7$, $g_n(\alpha) = \alpha^n$ é uma aplicação de grau n.

Temos assim, o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} S^3 & & S^3 & & S^3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{P}_n \equiv_d E_{\varphi(n-1)} & \longrightarrow & Sp(2) & \longrightarrow & ES^3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^7 & \xrightarrow{g_{\varphi(n-1)}} & S^7 & \xrightarrow{\omega_0} & BS^3 \end{array}$$

diagrama 7

Por definição, $E_{\varphi(n-1)} = \left\{ (\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, A) \in S^7 \times Sp(2) : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{\varphi(n-1)} = 1^{\underline{a}} \text{ coluna de } A \right\}$ e a ação de S^3 sobre $E_{\varphi(n-1)}$ com quociente S^7 é dada pela multiplicação à direita na última coluna de A.

Pela construção de $\tilde{P}_n \subseteq Sp(n)$ vemos que existe uma ação livre à esquerda sobre $E_{\varphi(n-1)}$ cujo quociente é $P_n \subseteq \overset{n}{Sp}(1)\backslash Sp(n)$. Temos assim o seguinte:

Problema: Explicitar a ação à esquerda sobre $E_{\varphi(n-1)}$ cujo quociente é $P_n \subseteq \overset{n}{Sp}(1)\backslash Sp(n)$.

3. Forma Fraca do Fenômeno de Não-cancelamento

Com base no capítulo anterior corrigimos também os índices de Eells-Kuiper [**EK**] das esferas exóticas construidas em [**R2**] e apresentamos com isso uma forma fraca do fenômeno de não-cancelamento.

Temos em [**R2**] a construção de modelos $\mathbf{P'_n}$ para $SO(4)$-fibrados principais sobre S^4 a partir dos modelos $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n}$, ou seja:

$$\mathbf{P'_n} = (P'_n, p'_n, S^4, SO(4))$$

com $P'_n = \frac{\tilde{P}_n}{Z_2}$, e $Z_2 = \{-1, 1\}$ atuando sobre a última coluna dos elementos de $\tilde{P}_n$ por multiplicação.

Os fibrados P'_n são classificados por $\pi_3(SO(4)) \cong \pi_3(S^3 \times SO(3)) \cong$ $\cong \pi_3(S^3) \times \pi_3(SO(3)) \cong Z \oplus Z$. Denotando por $P_{m,n}$ o fibrado classificado por (m,n) segundo essa identificação , segue de [**R2**] que:

(24) $\mathbf{P'_k} \equiv_f \mathbf{P_{1,k-1}}$,

(25) Se S^3 atua sobre $\tilde{P}_{k+1}$ por $q \star y = \bar{q}yq$ para cada elemento y de qualquer coluna exceto a última e por $q \star x = \bar{q}x$ para cada elemento x da última coluna, onde é subintendido que a multiplicação no lado direito de cada uma das igualdades é quaterniônica, então:

$$\frac{\tilde{P}_{k+1}}{S^3} \equiv_d P'_{k+1} \times_{SO(4)} S^3$$

onde o espaço a direita é o espaço total do fibrado associado a $\mathbf{P'_{k+1}}$ com fibra S^3 , e o grupo $SO(4)$ é considerado como o produto semi-direto de S^3 por $SO(3)$ com produto:

$$(p, \theta)(q, \eta) = (p\theta q\bar{\theta}, \theta\eta)$$

e ação linear sobre $y \in R^4$:

$$(p, \theta)y = p\theta y\bar{\theta}$$

p , $q \in S^3$ e θ , $\eta \in SO(3) \cong \frac{S^3}{Z_2}$, ou seja confundimos aqui θ e η com suas respectivas classes de equivalências, $\{-\theta, \theta\}$ e $\{-\eta, \eta\}$ (cf. [**R1**]). Visto dessa forma $SO(4)$ atua sobre S^3 por, $(p, \theta) \star q = \bar{\theta}\bar{p}q\theta$ e novamente a multiplicação à direita das últimas tres igualdades acima é subentendida ser a quaterniônica.

Em [**M**] temos a realização de 7-esferas exóticas (ou seja, variedades 7-dimensionais homeomorfas a S^7 mas não difeomorfas a S^7) como espaços totais de S^3-fibrados sobre S^4 com grupo estrutural $SO(4)$, denotados por $\xi_{h,j}$ os quais são classificados por $f_{h,j} : S^3 \longrightarrow SO(4)$, $f_{h,j}(u).v = u^h v u^j$, $v \in R^4$, onde a multiplicação à direita da igualdade é quaterniônica.

Para cada inteiro ímpar k , M^7_k denota o espaço total do fibrado $\xi_{h,j}$ com $h+j = 1$ e $h - j = k$ e possui estrutura diferenciável e orientação naturais.

Através do invariante de Milnor λ , temos que se $k^2 \not\equiv 1 \ mod \ 7$ então M^7_k é homeomorfo a S^7 mas não é difeomorfo a S^7.

Eells e Kuiper generalizaram o invariante de Milnor fornecendo todas as dezesseis 7-esferas exóticas que ocorrem como S^3-fibrados sobre S^4 com grupo $SO(4)$ de tal forma que:

$$M^7_{h-j} \equiv_d M^7_{\tilde{h}-\tilde{j}} \quad \Longleftrightarrow \quad h(h-1) \equiv \tilde{h}(\tilde{h}-1) \ mod \ 56$$

e M^7_{h-j} é difeomorfa a esfera usual S^7 quando e somente quando $h(h-1) \equiv 0 \ mod \ 56$.

De [**R1**] temos que $\mathbf{P_{m,n}} \times_{\mathbf{SO(4)}} \mathbf{S^3} \equiv_f \xi_{\mathbf{m+n,-n}}$. Logo por (24) e (25) segue que:

$$\frac{\tilde{P}_{k+1}}{S^3} \equiv_d P'_{k+1} \times_{SO(4)} S^3 \equiv_d P_{1,k} \times_{SO(4)} S^3 \equiv_d M^7_{2k+1} = \Sigma^7_{[k(k+1)]}$$

onde o índice [k(k-1)] denota o inteiro entre 0 e 55 que é côngruo a k(k-1) módulo 56.

Desta forma, corrigindo os corolários da pg 84 de [**R2**] temos o seguinte:

Teorema 3.1 (**Rigas**): Existem ações livres de S^3 sobre $\tilde{P}_{a+24t}$, $0 \leq a < 23$ cujo quociente $\tilde{P}_{a+24t}/S^3$ é difeomorfo à esfera exótica $\Sigma^7_{[((a-1)+24t)(a+24t)]}$.

Verifica-se facilmente o seguinte:

Lema 3.1: Dados $i, a \in Z$, se x é solução de:

$$((a-1)+24t)(a+24t) \equiv i \; mod 56$$

então, $x+7d$ também o é , onde $d \in Z$.

Sejam, $E_0(a,t) = ((a-1)+24t)(a+24t)$ onde $a = 0, 1, 9$ ou 16 , ou seja, os correspondentes $a's$ tais que $\tilde{P}_{a+24t} \equiv_f \mathbf{E_0}$, então:

t	$E_0(0,t) mod 56$	$E_0(1,t) mod 56$	$E_0(9,t) mod 56$	$E_0(16,t) mod 56$
0	0	0	16	16
1	48	40	48	48
2	16	0	0	0
3	16	48	40	40
4	48	16	0	0
5	0	16	48	48
6	40	48	16	16

Utilizando a tabela e o lema 3.1 acima juntamente com o Teorema da pg 81 de [**R2**] concluimos o:

Corolário 1: Existem ações livres de S^3 sobre $S^7 \times S^3$ com quociênte cada uma das esferas exóticas $\mathbf{\Sigma^7_{[s]}}$ para $s = 16, 40, 48$.

Os fibrados:

$$\mathbf{T_s} = (\Sigma^7_{[s]} \times S^3, p_s, \Sigma^7_{[s]}, S^3)$$

$$\mathbf{T_{s_0}} = (S^7 \times S^3, p_{s_0}, \Sigma^7_{[s]}, S^3)$$

para s=16,40,48 onde $\mathbf{T_s}$ são os fibrados triviais usuais e $\mathbf{T_{s_0}}$ são obtidos do corolário acima. Sendo ambos triviais e diferenciáveis temos para s=16,40 e 48:

$$S^7 \times S^3 \equiv_d \Sigma^7_{[s]} \times S^3$$

$$S^7 \; \textit{não é difeomeomorfa a} \; \Sigma^7_{[s]}$$

Temos portanto exemplos de fenômeno de não-cancelamento numa forma mais fraca que a apresentada anteriormente.

Explicitaremos (a menos de uma homotopia) no próximo capítulo a ação de S^3 em $S^7 \times S^3$ cujo quociênte é $\Sigma^7_{[16]}$ a qual dá origem ao fibrado $\mathbf{T_{16_0}}$ acima.

Seguindo o mesmo procedimento do corolário 1 concluimos o seguinte:

Corolário 2: Existem ações livres sobre:

a) $\mathbf{E_1}, \mathbf{E_9}$ com quociênte $\mathbf{\Sigma^7_{[r]}}, r = 2, 26, 34, 42$.

b) $\mathbf{E_3}, \mathbf{E_7}$ com quociênte $\mathbf{\Sigma^7_{[k]}}, k = 6, 14, 30, 54$.

c) $\mathbf{E_4}$ com quociênte $\mathbf{\Sigma^7_{[s]}}, s = 16, 40, 48$.

d) $\mathbf{E_6}, \mathbf{E_{10}}$ com quociênte $\mathbf{\Sigma^7_{[m]}}, m = 12, 20, 28, 44$.

4. Funções de Transição

Calculamos aqui as funções de transição dos fibrados $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{n}}$ sobre S^7 e dos fibrados $\mathbf{E}_{\alpha\beta}$ sobre E_α em relação a certa cobertura aberta de S^7 e E_α contendo apenas 2 abertos. Enunciamos vários lemas a respeito de comutadores de grupos, os quais serão usados posteriormente na trivialização de $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{9}}$ e no estudo da trivialização de $\mathbf{E}_{\alpha\beta}$ para certos α , $\beta \in \pi_6(S^3)$.

4.1 Funções de transição de $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{n}}$ e $\mathbf{E}_{\alpha\beta}$

Sejam,

$$S^7 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in H^2 : a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\},$$

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in S^7 : \ a \neq 0 \right\} \quad e \quad \mathbf{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in S^7 : \ b \neq 0 \right\}$$

Temos para $n \geq 5$:

$$\tilde{p}_n^{-1}(\mathbf{U}) = \{M_n(a, b, y_1, y_2, ..., y_n) \in Sp(n) : a \neq 0\}$$

$$\tilde{p}_n^{-1}(\mathbf{V}) = \{M_n(a, b, z_1, z_2, ..., z_n) \in Sp(n) : b \neq 0\}$$

onde:

$y_1 = -(a\bar{b})|a|^{-2}y_2$

$|y_2| = |y_2(a, b)| = |a|^{n-1}(L_1L_2...L_{n-4})L(n)^{-1}$

$y_k = -(a\bar{b})^{k-1}|a|^{-2(k-1)}(L_{n-(k+1)}L_{n-k}...L_{n-4})^{-2}y_2$, $3 \leq k \leq n-2$

$y_{n-1} = -(a\bar{b})^{n-2}|a|^{-2(n-2)}(L_1L_2...L_{n-4})^{-2}y_2$

$y_n = -(a\bar{b})^{n-1}|a|^{-2(n-1)}(L_1L_2...L_{n-4})^{-2}y_2$

$z_1 = (b\bar{a})^{n-2}|b|^{-2(n-2)}(L_1L_2...L_{n-4})^2z_n$

$z_2 = -(b\bar{a})^{n-1}|b|^{-2(n-1)}(L_1L_2...L_{n-4})^2z_n$

$z_k = (b\bar{a})^{n-k}|b|^{-2(n-k)}(L_1L_2...L_{n-(k+2)})^2x_n$, $3 \leq k \leq n-3$

$z_{n-2} = (b\bar{a})^2|b|^{-4}z_n$

$z_{n-1} = (b\bar{a})|b|^{-2}z_n$

$|z_n| = |z_n(a,b)| = |b|^{n-1}(L_1 L_2 ... L_{n-4} L(n))^{-1}$

são obtidos resolvendo as equações , $\overline{(col\ n)}.(col\ i) = 0 \quad i = 1, 2, ...n-1$ e usando o fato de $a \neq 0$ e $b \neq 0$ em $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$, respectivamente (cf. **[R2]**).

Notamos que um elemento de $\tilde{p}_n^{-1}(\mathbf{U})$ depende somente dos valores de a, b e y_2 , donde podemos escrever:

$$M_n(a, b, y_1, y_2, ..., y_n) = M_n(a, b, y_2) \in \tilde{p}_n^{-1}(\mathbf{U})$$

analogamente,

$$M_n(a, b, z_1, z_2, ..., z_n) = M_n(a, b, z_n) \in \tilde{p}_n^{-1}(\mathbf{V})$$

Definamos as secções parciais sobre $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$:

$$S_U^n : \mathbf{U} \longrightarrow \tilde{p}_n^{-1}(\mathbf{U}) \quad e \quad S_V^n : \mathbf{V} \longrightarrow \tilde{p}_n^{-1}(\mathbf{V})$$

dadas por:

$$S_U^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M_n(a, b, y_2) \ , \qquad y_2 = \bar{a}^{n-1}(L_1 L_2 ... L_{n-4}) L(n)^{-1}$$

$$S_V^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M_n(a, b, z_n) \ , \qquad z_n = -\bar{b}^{n-1}(L_1 L_2 ... L_{n-4} L(n))^{-1}$$

Observe que y_2 e z_n são restriros apenas em seus módulos. Seus valores foram escolhidos para que a função de transição g_{VU}^n possa ser fatorada através de $S^3 \wedge S^3 \equiv_d S^6$ (cf. seção 4.3).

Se $g_{VU}^n : \mathbf{U} \cap \mathbf{V} \longrightarrow S^3$ é função de transição do fibrado $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n}$ em relação aos abertos $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$, então:

$$S_V^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} . g_{VU}^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = S_U^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{V}.$$

Como a ação de S^3 sobre $\tilde{P}_n$ ocorre por multiplicação à direita na última coluna , devemos ter:

$$z_i.g^n_{VU}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = y_i, \qquad\qquad i = 1, 2, ..., n$$

assim por exemplo:

$$z_n.g^n_{VU}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = y_n = -(a\bar{b})^{n-1}|a|^{-2(n-1)}(L_1L_2...L_{n-4})^{-2}\bar{a}^{n-1}(L_1L_2...L_{n-4})L(n)^{-1}$$

logo:

$$-\bar{b}^{n-1}(L_1L_2...L_{n-4}L(n))^{-1}g^n_{VU}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{-(a\bar{b})^{n-1}\bar{a}^{n-1}}{(L_1L_2...L_{n-4})|a|^{2(n-1)}L(n)}$$

donde:

$$-b^{n-1}(-\bar{b}^{n-1})g^n_{VU}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{b^{n-1}(a\bar{b})^{n-1}\bar{a}^{n-1}}{|a|^{2(n-1)}}$$

portanto:

$$g^n_{VU}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{b^{n-1}(a\bar{b})^{n-1}\bar{a}^{n-1}}{(|a||b|)^{2(n-1)}}$$

Analogamente podemos definir secções :

$$S^k_U : \mathbf{U} \longrightarrow \tilde{p}_k^{-1}(\mathbf{U}) \quad e \quad S^k_V :\longrightarrow \tilde{p}_k^{-1}(\mathbf{V}) \qquad k = 2, 3, 4$$

de tal forma que $g^k_{VU}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{b^{k-1}(a\bar{b})^{k-1}\bar{a}^{k-1}}{(|a||b|)^{2(k-1)}}$ é função de transição de $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{k}$ em relação aos abertos **U** e **V**.

A título de exemplo façamos o caso k=3.

Procedendo de maneira análoga ao caso geral temos:

$$\tilde{p}_3^{-1}(\mathbf{U}) = \left\{ M_3(a, b, y_2) \in Sp(3) : |y_2| = |a|^2\sqrt{1 + |b|^2} \right\}$$

$$\tilde{p}_3^{-1}(\mathbf{V}) = \left\{ M_3(a, b, z_3) \in Sp(3) : |z_3| = |b|^2 \right\}$$

onde:

$$M_3(a, b, y_2) = \begin{pmatrix} a & -b|b|^2 & -(a\bar{b})|a|^{-2}y_2 \\ b & b\bar{a}b & y_2 \\ 0 & a\sqrt{1 + |b|^2} & -(a\bar{b})^2|a|^{-4}(\sqrt{1 + |b|^2})^{-1}y_2 \end{pmatrix}$$

$$M_3(a, b, z_3) = \begin{pmatrix} a & -b|b|^2 & (b\bar{a})|b|^{-2}\sqrt{1 + |b|^2}z_3 \\ b & b\bar{a}b & -(b\bar{a})^2|b|^{-4}\sqrt{1 + |b|^2}z_3 \\ 0 & a\sqrt{1 + |b|^2} & z_3 \end{pmatrix}$$

Definimos:

$$S^3_U : \mathbf{U} \longrightarrow \tilde{p}_3^{-1}(\mathbf{U}) \quad e \quad S^3_V :\longrightarrow \tilde{p}_3^{-1}(\mathbf{V})$$

$$S^3_U \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b|b|^2 & -(a\bar{b})|a|^{-2}y_2(a,b) \\ b & b\bar{a}b & y_2(a,b) \\ 0 & a\sqrt{1+|b|^2} & -(a\bar{b})^2|a|^{-4}(\sqrt{1+|b|^2})^{-1}y_2(a,b) \end{pmatrix} = M_3(a,b,y_2(a,b))$$

onde $y_2(a,b) = \bar{a}^2\sqrt{1+|b|^2}$

$$S^3_V \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b|b|^2 & (b\bar{a})|b|^{-2}\sqrt{1+|b|^2}z_3(a,b) \\ b & b\bar{a}b & -(b\bar{a})^2|b|^{-4}\sqrt{1+|b|^2}z_3(a,b) \\ 0 & a\sqrt{1+|b|^2} & z_3(a,b) \end{pmatrix} = M_3(a,b,z_3(a,b))$$

onde $z_3(a,b) = -\bar{b}^2$

Com isso temos que:
$z_3 . g^3_{VU} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -(a\bar{b})^2|a|^{-4}(\sqrt{1+|b|^2})^{-1}\bar{a}^2\sqrt{1+|b|^2} \Longrightarrow -\bar{b}^2 g^3_{UV} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{-(a\bar{b})^2\bar{a}^2}{|a|^4}$
Portanto:

$$g^3_{VU} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{b^2(a\bar{b})^2\bar{a}^2}{(|a||b|)^4}$$

Temos assim o seguinte :

Lema 4.1.1 : Sejam ,

$$S^7 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in H : a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\}, \mathbf{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in S^7; a \neq 0 \right\} e \mathbf{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in S^7 : b \neq 0 \right\}$$

então, $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n} = (\tilde{P}_n, \tilde{p}_n, S^7, S^3)$ tem como função de transição relativa aos abertos $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$, a função $g^n_{VU} : \mathbf{U} \cap \mathbf{V} \longrightarrow S^3$ dada por:

$$g^n_{VU} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{b^{n-1}(a\bar{b})^{n-1}\bar{a}^{n-1}}{(|a||b|)^{2(n-1)}}$$

Tentamos agora seguir procedimentos análogos aos anteriores para obter funções de transição de $\mathbf{E}_{\alpha\beta}$.

Seja $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{n,m}}$ o S^3-fibrado principal sobre $\tilde{P}_n$ induzido de $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{m}$ pela projeção $\tilde{p}_n : \tilde{P}_n \longrightarrow S^7$. Assim, temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} S^3 & & S^3 & & S^3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{P}_{n,m} & \longrightarrow & \tilde{P}_m & \longrightarrow & Sp(2) \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{p}_m & & \downarrow \\ \tilde{P}_n & \xrightarrow{\tilde{p}_n} & S^7 & \xrightarrow{\varphi(m-1)\iota_7} & S^7 \end{array}$$

diagrama 8

Pela definição de fibrado induzido temos:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{n,m}} = \{(M_n, M_m) \in \tilde{P}_n \times \tilde{P}_m : \tilde{p}_n(M_n) = \tilde{p}_m(M_m)\}$$

Isso nos fornece um modelo para $\mathbf{E}_{\varphi(\mathbf{n-1})\omega,\varphi(\mathbf{m-1})\omega}$ onde $\omega \in \pi_6(S^3)$ é o gerador. Sejam $\tilde{\mathbf{U}}_\mathbf{n} = \tilde{p}_n^{-1}(\mathbf{U})$ e $\tilde{\mathbf{V}}_\mathbf{n} = \tilde{p}_n^{-1}(\mathbf{V})$, assim:

$$\tilde{\mathbf{U}}_\mathbf{n} = \{M_n(a, b, y_2) \in \tilde{P}_n : a \neq 0\}$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_\mathbf{n} = \{M_n(a, b, z_n) \in \tilde{P}_n : b \neq 0\}$$

Para cada k , $t \in Z$ tais que $\frac{m-tkn+tk-1}{t}$ seja inteiro, definamos secções parciais sobre $\tilde{\mathbf{U}}_\mathbf{n}$ e $\tilde{\mathbf{V}}_\mathbf{n}$:

$$s^{kt}_{\tilde{U}_n} : \tilde{\mathbf{U}}_\mathbf{n} \longrightarrow \tilde{P}_{n,m} \quad e \quad s^{kt}_{\tilde{V}_n} : \tilde{\mathbf{V}}_\mathbf{n} \longrightarrow \tilde{P}_{n,m}$$

dadas por:

$$s^{kt}_{\tilde{U}_n}(M_n(a, b, y_2)) = (M_n(a, b, y_2), M_m(a, b, Y_2(k, t)))$$

$$s^{kt}_{\tilde{V}_n}(M_n(a, b, z_n)) = (M_n(a, b, z_n), M_m(a, b, Z_m(k, t)))$$

onde:

$$Y_2(k, t) = (y_2^k \bar{a}^{\frac{m-tkn+tk-1}{t}})^t \frac{L_1 L_2 ... L_{m-4} L(n)^{tk}}{(L_1 L_2 ... L_{n-4})^{tk} L(m)}$$

$$Z_m(k, t) = (-1)^{tk+1}(z_n^k \bar{b}^{\frac{m-tkn+tk-1}{t}})^t \frac{(L_1 L_2 ... L_{n-4} L(n))^{kt}}{L_1 L_2 ... L_{m-4} L(m)}$$

Utilizando as expressões da página 23, se $M_n(a,b,y_2) = M_n(a,b,z_n)$ sobre $\tilde{\mathbf{U}}_\mathbf{n} \cap \tilde{\mathbf{V}}_\mathbf{n}$ então:

$$z_n = \frac{-(a\bar{b})^{n-1}y_2}{|a|^{2(n-1)}(L_1L_2...L_{n-4})^2} \quad \Longrightarrow z_n^k = \frac{(-1)^k((a\bar{b})^{n-1}y_2)^k}{|a|^{2k(n-1)}(L_1L_2...L_{n-4})^{2k}} \qquad (*)$$

Uma função de transição $g_{n,m,k,t} : \tilde{\mathbf{U}}_\mathbf{n} \cap \tilde{\mathbf{V}}_\mathbf{n} \longrightarrow S^3$ de $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{n,m}}$ em relação aos abertos $\tilde{\mathbf{U}}_\mathbf{n}$ e $\tilde{\mathbf{V}}_\mathbf{n}$ pode ser dada resolvendo-se a equação:

$$s^{kt}_{\tilde{V}_n}(M).g_{n,m,k,t}(M) = s^{kt}_{\tilde{U}_n}(M) \qquad \forall M \in \tilde{\mathbf{U}}_\mathbf{n} \cap \tilde{\mathbf{V}}_\mathbf{n} \qquad (26)$$

Segue das expressões da página 23 que:

$$Y_m(k,t) = \frac{-(a\bar{b})^{m-1}(y_2^k\bar{a}^{\frac{m-tkn+tk-1}{t}})^tL(n)^{tk}}{|a|^{2(m-1)}(L_1L_2...L_{m-4})(L_1L_2...L_{n-4})^{tk}L(m)}$$

Pondo $M_n = M_n(a,b,y_2)$ segue de (26) que:

$$Z_m(k,t).g_{n,m,k,t}(M_n) = Y_m(k,t)$$

donde:

$$(-1)^{tk+1}(z_n^k\bar{b}^{\frac{m-tkn+tk-1}{t}})^t\frac{(L_1L_2...L_{n-4}L(n))^{kt}}{L_1L_2...L_{m-4}L(m)}.g_{n,m,k,t}(M_n) =$$

$$= \frac{-(a\bar{b})^{m-1}(y_2^k\bar{a}^{\frac{m-tkn+tk-1}{t}})^tL(n)^{tk}}{|a|^{2(m-1)}(L_1L_2...L_{m-4})(L_1L_2...L_{n-4})^{tk}L(m)}$$

usando $(*)$ temos:

$$\frac{(-1)^{tk+1}((-1)^k((a\bar{b})^{n-1}y_2)^k\bar{b}^{\frac{m-tkn+tk-1}{t}})^t}{(|a|^{2k(m-1)}(L_1L_2...L_{n-4})^{2k})^t}.g_{n,m,k,t} = \frac{-(a\bar{b})^{m-1}(y_2^k\bar{a}^{\frac{m-tkn+tk-1}{t}})^t}{|a|^{2(m-1)}(L_1L_2...L_{n-4})^{2tk}}$$

Assim, pondo $p = \frac{m-ktn=kt-1}{t}$ temos:

$$\frac{(-1)^{2kt+1}|a|^{2kt(n-1)}|b|^{2kt(n-1)}|y_2|^{2kt}|b|^{2pt}}{|a|^{2kt(n-1)}} \cdot g_{n,m,k,t} = \frac{-(b^p(\bar{y}_2(b\bar{a})^{n-1})^k)^t(a\bar{b})^{m-1}(y_2^k\bar{a}^p)^t}{|a|^{2(m-1)}}$$

Portanto:

$$g_{n,m,k,t}(M_n) = \frac{(b^{\frac{m-tkn+tk-1}{t}}(\bar{y}_2(b\bar{a})^{n-1})^k)^t(a\bar{b})^{m-1}(y_2^k\bar{a}^{\frac{m-tkn+tk-1}{t}})^t}{|ab|^{2(m-1)}|y_2|^{2tk}}$$

Evidentemente, da definição de fibrado induzido temos que:

$$\tilde{g}_{n,m}(M_n(a,b,y_2)) = g_{VU}^m \circ \tilde{p}_n(M_n(a,b,y_2)) = \frac{b^{m-1}(a\bar{b})^{m-1}\bar{a}^{m-1}}{(|a||b|)^{2(m-1)}}$$

é também função de transição de $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{n,m}}$ a qual coincide com $g_{n,m,0,1}$.

Temos desta forma o seguinte:

Lema 4.1.2: Sejam n,m inteiros maiores ou iguais a 2 e

$$\tilde{\mathbf{U}}_\mathbf{n} = \{M_n(a,b,y_2) \in \tilde{P}_n : a \neq 0\} \quad e \quad \tilde{\mathbf{V}}_\mathbf{n} = \{M_n(a,b,z_n) \in \tilde{P}_n : b \neq 0\}$$

então as funções, $g_{n,m,k,t} : \tilde{\mathbf{U}}_\mathbf{n} \cap \tilde{\mathbf{V}}_\mathbf{n} \longrightarrow S^3$ $k\ t \in Z$ tais que $\frac{m-tkn+tk-1}{t} \in Z$ dadas por:

$$g_{n,m,k}(M_n(a,b,y_2)) = \frac{(b^{\frac{m-tkn+tk-1}{t}}(\bar{y}_2(b\bar{a})^{n-1})^k)^t(a\bar{b})^{m-1}(y_2^k\bar{a}^{\frac{m-tkn+tk-1}{t}})^t}{|ab|^{2(m-1)}|y_2|^{2tk}} \qquad (27)$$

são funções de transição equivalentes do fibrado $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{n,m}} = (\tilde{P}_{n,m}, \tilde{p}_{n,m}, \tilde{P}_n, S^3)$.

4.2 Cálculos com comutadores

Seja Γ um grupo multiplicativo , dados elementos x e y de Γ lembremos que (c.f. **[Ha]**) o **comutador** de x e y é definido por:

$$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

e para x, y e $z \in \Gamma$ tem-se as seguintes propriedades:

pc1 $[x,y]^{-1} = [y,x]$

pc2 $[xy,z] = [x,z][[x,z],y][y,z]$

pc3 $[x,yz] = [x,z][x,y][[x,y],z]$

pc4 $xy = yx[x,y]$

pc5 $xy = [x^{-1},y^{-1}]yx$

Dados subconjuntos X e Y de um grupo Γ , definimos $[X,Y]$ como sendo o subgrupo de Γ gerado por todos os $[x,y] \in \Gamma$ tais que $x \in X$ e $y \in Y$.

Um grupo Γ é dito **nilpotente de classe** $\leq$ **r** se existirem subgrupos , $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_r$ de Γ , tais que:

(28) $\Gamma = \Gamma_0 \supseteq \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq ... \supseteq \Gamma_r = \{1\}$

(29) Γ_i é subgrupo normal de Γ_{i-1} , $i = 1, 2, ..., r$

(30) $[\Gamma_i, \Gamma] \subseteq \Gamma_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, ..., r-1$

A série de subgrupos (28) satisfazendo (29) e (30) é chamada **série central** ou **cadeia central**.

Consideremos agora, um grupo multiplicativo, $G2$ nilpotente de classe ≤ 2 possuindo uma cadeia central:

$$G2 = \Gamma_0 \supseteq \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 = \{1\}$$

Temos os seguintes lemas:

Lema 4.2.1: $\Gamma_1 \subseteq Z(G2)$=centro de $G2$.

Dem.: Sejam $x \in \Gamma_1$ e $y \in G2$, pela propriedade pc4 , $xy = yx[x,y]$, como $x \in \Gamma_1$ então $[x,y] \in \Gamma_2 = \{1\}$ donde segue o resultado.

Lema 4.2.2: Dados x , $y \in G2$, então:

$$[x,y] = [y^{-1},x] = [y,x^{-1}] = [x^{-1},y^{-1}]$$

Dem: $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy \overset{pc4}{=} x^{-1}xy^{-1}[y^{-1},x]y \overset{lema\ 4.2.1}{=} [y^{-1},x]$.

Substituindo x por y e y por x , chegamos a:

$$[y,x] = [x^{-1},y]$$

donde:

$$[x,y] = [y,x]^{-1} = [x^{-1},y]^{-1} = [y,x^{-1}]$$

A última igualdade é agora trivial.

Lema 4.2.3: Dados x , $y \in G2$, então:

$$[x,y]^n = [x,y^n] = [x^n,y] \qquad n \in Z$$

Dem: Provemos primeiramente para $n \in N$.

Se $n = 1$ não há o que mostrar. Suponhamos que:

$$[x,y]^{n-1} = [x,y^{n-1}] \qquad n > 1$$

então:

$$[x,y^n] = [x,y^{n-1}y] \overset{pc3}{=} [x,y][x,y^{n-1}][[x,y^{n-1}],y] =$$

$$\overset{\Gamma_2=\{1\}}{=} [x,y][x,y^{n-1}] \overset{HI}{=} [x,y][x,y]^{n-1} = [x,y]^n$$

onde HI significa hipótese indutiva.

logo $[x,y^n]=[x,y]^n \quad \forall n \in N$. Analogamente tem-se $[x^n,y]=[x,y]^n \quad \forall n \in N$.

Se $n \in Z$ e $n<0$ segue então do que acabamos de mostrar que:

$$[x,y^n]=[x,(y^{-1})^{-n}]=[x,y^{-1}]^{-n}=[x^{-n},y^{-1}]=$$
$$=[(x^n)^{-1},y^{-1}] \overset{lema\ 4.2.2}{=} [x^n,y]$$

e:

$$[x,y]^n=([x,y]^{-1})^{-n}=[y,x]^{-n}=[y,x^{-n}]=[y,(x^n)^{-1}]=[x^n,y]$$

Para n=0 o resultado é trivial. Logo, o lema está provado.

Teorema 4.2.1: Se $G2$ é um grupo multiplicativo nilpotente de classe ≤ 2 , então dados $x,y \in G2$ e $n \in Z$, tem-se:

$$(xy)^n=y^n[x,y]^{\varphi(n)}x^n$$

onde $\varphi(n)=\frac{n(n+1)}{2}$.

Dem.: Se $n \in N$ procedemos por indução.

Para $n=0$ é trivial

Para $n=1$ temos:

$y[x,y]x \overset{lema\ 4.2.2}{=} y[y,x^{-1}]x=yy^{-1}xyx^{-1}x=xy$

Suponhamos que $(xy)^{n-1}=y^{n-1}[x,y]^{\varphi(n-1)}x^{n-1}$, $\quad n>1$ então:

$(xy)^n=(xy)^{n-1}(xy) \overset{HI}{=} y^{n-1}[x,y]^{\varphi(n-1)}x^{n-1}xy=$

$\overset{pc4}{=} y^{n-1}[x,y]^{\varphi(n-1)}yx^n[x^n,y]=$

$\overset{lema\ 4.2.1}{=} y^n[x,y]^{\varphi(n-1)}[x^n,y]x^n=$

$\overset{lema\ 4.2.3}{=} y^n[x,y]^{\varphi(n-1)}[x,y]^nx^n=y^n[x,y]^{\varphi(n)}x^n$

Suponhamos agora $n<0$, então:

$(xy)^n=(y^{-1}x^{-1})^{-n}=(x^{-1})^{-n}[y^{-1},x^{-1}]^{\varphi(-n)}(y^{-1})^{-n}=x^n[y,x]^{\varphi(-n)}y^n=$

$\overset{lema\ 4.2.1}{=} x^ny^n[y,x]^{\varphi(-n)} \overset{pc4}{=} y^nx^n[x^n,y^n][x,y]^{-\varphi(-n)}=$

$\overset{lema\ 4.2.3}{=} y^nx^n[x,y]^{n^2-\frac{(-n)(-n+1)}{2}} \overset{lema\ 4.2.1}{=} y^n[x,y]^{\frac{2n^2-n^2+n}{2}}x^n=$

$=y^n[x,y]^{\frac{n(n+1)}{2}}x^n=y^n[x,y]^{\varphi(n)}x^n$

Considerando agora, um grupo multiplicativo $G3$ nilpotente de classe ≤ 3 possuindo uma cadeia central:

$$G3 = \Gamma_0 \supseteq \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \Gamma_3 = \{1\}$$

Temos os seguintes lemas:

Lema 4.2.4: $\Gamma_2 \subseteq Z(G3)$=centro de $G3$.

Dem.: Análoga à demonstração do lema 4.2.1.

Lema 4.2.5: Dados $x, y, z \in \Gamma$, tem-se:

$$[[x,y],z] = [z^{-1},[x,y]] = [z,[y,x]] = [[y,x],z^{-1}]$$

Dem.: $[[x,y],z] = [x,y]^{-1}z^{-1}[x,y]z \overset{pc4}{=} [x,y]^{-1}[x,y]z^{-1}[z^{-1},[x,y]]z =$
$\overset{pc4}{=} z^{-1}z[z^{-1},[x,y]][[z^{-1},[x,y]],z] \overset{\Gamma_3=\{1\}}{=} [z^{-1},[x,y]]$

$[[x,y],z] \overset{pc1}{=} [z,[x,y]]^{-1} = (z^{-1}[y,x]z[x,y])^{-1} \overset{pc4}{=} (z^{-1}z[y,x][[y,x],z][x,y])^{-1} =$
$\overset{lema\ 4.2.4}{=} [[y,x],z]^{-1} = [z,[y,x]]$

a última igualdade agora é trivial.

Lema 4.2.6: Dados $x, y, z, w \in \Gamma$, então:

$$[[x,y],[z,w]] = \{1\}$$

Dem.: $[[x,y],[z,w]] = [[x,y],z^{-1}w^{-1}zw] =$
$\overset{pc3}{=} [[x,y],zw][[x,y],z^{-1}w^{-1}][[[x,y],z^{-1}w^{-1}],zw] =$
$\overset{\Gamma_3=\{1\}}{=} [[x,y],zw][[x,y],z^{-1}w^{-1}] =$
$\overset{pc3}{=} [[x,y],w][[x,y],z][[[x,y],z],w][[x,y],z^{-1}w^{-1}] =$
$\overset{\Gamma_3=\{1\}\ e\ pc3}{=} [[x,y],w][[x,y],z][[x,y],w^{-1}][[x,y],z^{-1}][[[x,y],z^{-1}],w^{-1}] =$
$\overset{\Gamma_2\subseteq Z(\Gamma)\ e\ \Gamma_3=\{1\}}{=} [[x,y],w][[x,y],w^{-1}][[x,y],z][[x,y],z^{-1}] \overset{lema\ 4.2.5}{=} 1$

Lema 4.2.7: Dados $x, y, z \in \Gamma$, então:

$$[x,[y,z]]^n = [x,[y^n,z]] = [x,[y,z^n]] \ , \quad n \in N$$

Dem.: Provemos a primeira igualdade por indução sobre n.

Para $n = 1$ as igualdades são triviais.

Suponhamos que $[x,[y,z]]^{n-1} = [x,[y^{n-1},z]] \quad n > 1$, então:

$$[x,[y^n,z]] = [x,[y^{n-1}y,z]] \overset{pc2}{=} [x,[y^{n-1},z][[y^{n-1},z],y][y,z]] =$$

$$\overset{pc3}{=} [x,[y,z]][x,[y^{n-1},z][[y^{n-1},z],y]][[x,[y^{n-1},z][[y^{n-1},z],y]],[x,[y,z]] =$$

$$\overset{lema\ 4.2.6}{=} [x,[y,z]][x,[y^{n-1},z]][[y^{n-1},z],y]] =$$

$$\overset{pc3}{=} [x,[y,z]][x,[[y^{n-1},z],y]][x,[y^{n-1},z]][[x,[y^{n-1},z]],[[y^{n-1},z],y] =$$

$$\overset{\Gamma_3=\{1\}\ e\ HI}{=} [x,[y,z]][x,[y,z]]^{n-1} = [x,[y,z]]^n$$

de maneira análoga prova-se que $[x,[y,z^n]] = [x,[y,z]]^n$.

Lema 4.2.8: Dados $x, y \in \Gamma$, então:

(i) $[x,y^n] = [x,y]^n[[x,y],y]^{\varphi(n-1)} \qquad n \in N$

(ii) $[x^n,y] = [x,y]^n[x,[y,x]]^{\varphi(n-1)} \qquad n \in N$

onde $\varphi(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dem.: (i) indução sobre n.

Para $n = 1$ é trivial.

Suponhamos que $[x,y^{n-1}] = [x,y]^{n-1}[[x,y],y]^{\varphi(n-2)} \quad n > 1$, então:

$$[x,y^n] = [x,y^{n-1}y] \overset{pc3}{=} [x,y][x,y^{n-1}][[x,y^{n-1}],y] =$$

$$\overset{HI\ e\ lema\ 4.2.7}{=} [x,y][x,y]^{n-1}[[x,y],y]^{\varphi(n-2)}[[x,y],y]^{n-1} =$$

$$= [x,y]^n[[x,y],y]^{\varphi(n-1)}$$

(ii) $[x^n,y] \overset{pc1}{=} [y,x^n]^{-1} \overset{(i)}{=} ([y,x]^n[[y,x],x]^{\varphi(n-1)})^{-1} =$

$$= [x,[y,x]]^{\varphi(n-1)}[x,y]^n \overset{lema\ 4.2.1}{=} [x,y]^n[x,[y,x]]^{\varphi(n-1)}.$$

Lema 4.2.9: Dados $x, y \in \Gamma$, se $x \in \Gamma_1$ ou $y \in \Gamma_1$, então:

$$[x,y]^n = [x,y^n] = [x^n,y] \qquad n \in N$$

Dem.: Consequência imediata do lema 4.2.8.

Teorema 4.2.2: Dados x , $y \in G3$ e $n \in Z$ tem-se:

i) $(xy)^n = y^n[x^{-1},[y,x]]^{a(n)}[[x,y],y]^{a(n-1)}[x,y]^{\varphi(n)}x^n \qquad se \quad n \geq 0$

ii) $(xy)^n = y^n[y^{-1},[x^{-1},y^{-1}]]^{a(n)}[[x^{-1},y^{-1}],x^{-1}]^{a(n-1)}[x^{-1},y^{-1}]^{\varphi(n)}x^n \qquad se \quad n < 0$

onde $a(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ e $\varphi(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Dem.: i) Indução sobre n.

Se n=1 temos:

$$y[x^{-1},[y,x]]^{a(1)}[[x,y],y]^{a(0)}[x,y]^{\varphi(1)}x = y[x^{-1},[y,x]][x,y]x =$$
$$= yx[x,y]x^{-1}[y,x][x,y]x =$$
$$= yx[x,y] = xy$$

Suponhamos agora que:

$$(xy)^{n-1} = y^{n-1}[x^{-1},[y,x]]^{a(n-1)}[[x,y],y]^{a(n-2)}[x,y]^{\varphi(n-1)}x^{n-1}\ , \quad n > 1$$

Então:

$$(xy)^n = (xy)(xy)^{n-1} =$$

$$\overset{HI}{=} y[x^{-1},[y,x]][x,y]xy^{n-1}[x^{-1},[y,x]]^{a(n-1)}[[x,y],y]^{a(n-2)}[x,y]^{\varphi(n-1)}x^{n-1} =$$

$$\overset{pc\ 4\ e\ l.4.2.4}{=} y[x^{-1},[y,x]]^{1+a(n-1)}[x,y]y^{n-1}x[x,y^{n-1}][[x,y],y]^{a(n-2)}[x,y]^{\varphi(n-1)}$$
$$x^{n-1} =$$

$$\overset{pc\ 4}{=} y[x^{-1},[y,x]]^{1+a(n-1)}y^{n-1}[x,y][[x,y],y^{n-1}]x[x,y^{n-1}][[x,y],y]^{a(n-2)}$$
$$[x,y]^{\varphi(n-1)}x^{n-1} =$$

$$\overset{l.4.2.4\ e\ 4.2.9}{=} y^n[x^{-1},[y,x]]^{1+a(n-1)}[[x,y],y]^{n-1+a(n-2)}[x,y]x[x,y^{n-1}]$$
$$[x,y]^{\varphi(n-1)}x^{n-1} =$$

$$\overset{l.\ 4.2.8\ e\ 4.2.4}{=} y^n[x^{-1},[y,x]]^{1+a(n-1)}[[x,y],y]^{a(n-1)}[x,y]x[x,y]^{n-1+\varphi(n-1)}x^{n-1} =$$

$$\overset{pc\ 5}{=} y^n[x^{-1},[y,x]]^{1+a(n-1)}[[x,y],y]^{a(n-1)}[x,y][x^{-1},[y,x]^{n-1+\varphi(n-1)}]$$
$$[x,y]^{n-1+\varphi(n-1)}x^n =$$

$$\overset{l.4.2.4\ e\ 4.2.9}{=} y^n[x^{-1},[y,x]]^{a(n)}[[x,y],y]^{a(n-1)}[x,y]^{\varphi(n)}x^n$$

O caso n=0 é trivial.

ii) Se $n < 0$ então:

$$(xy)^n = (y^{-1}x^{-1})^{-n} =$$

$$\overset{i)}{=} (x^{-1})^{-n}[y,[x^{-1},y^{-1}]^{a(-n)}[[y^{-1},x^{-1}],x^{-1}]^{a(-n-1)}[y^{-1},x^{-1}]^{\varphi(-n)}(y^{-1})^{-n} =$$

$$= x^n[y,[x^{-1},y^{-1}]]^{a(-n)}[[y^{-1},x^{-1}],x^{-1}]^{a(-n-1)}[y^{-1},x^{-1}]^{\varphi(-n)}y^n =$$

$$\overset{pc\ 4}{=} x^n[y,[x^{-1},y^{-1}]]^{a(-n)}[[y^{-1},x^{-1}],x^{-1}]^{a(-n-1)}y^n[y^{-1},x^{-1}]^{\varphi(-n)}$$
$$[[y^{-1},x^{-1}]^{\varphi(-n)},y^n] =$$

$$\overset{l.4.2.4\ e\ l.4.2.9}{=} x^ny^n[y,[x^{-1},y^{-1}]]^{a(-n)}[[y^{-1},x^{-1}],x^{-1}]^{a(-n-1)}[[y^{-1},x^{-1}],y^{-1}]^{-n\varphi(-n)}$$
$$[y^{-1},x^{-1}]^{\varphi(-n)} =$$

$$\overset{pc\ 4}{=} y^nx^n[x^n,y^n][y,[x^{-1},y^{-1}]]^{a(-n)}[[y^{-1},x^{-1}],x^{-1}]^{a(-n-1)}$$
$$[[y^{-1},x^{-1}],y^{-1}]^{-n\varphi(-n)}[y^{-1},x^{-1}]^{\varphi(-n)} =$$

$$\overset{l.4.2.8\ ii)}{=} y^nx^n[x^{-1},y^n]^{-n}[x^{-1},[y^n,x^{-1}]]^{\varphi(-n-1)}[y,[x^{-1},y^{-1}]]^{a(-n)}$$
$$[[y^{-1},x^{-1}],x^{-1}]^{a(-n-1)}[[y^{-1},x^{-1}],y^{-1}]^{-n\varphi(-n)}[y^{-1},x^{-1}]^{\varphi(-n)} =$$

$$\overset{l.4.2.8\ i)}{=} y^nx^n\{[x^{-1},y^{-1}]^{-n}[[x^{-1},y^{-1}],y^{-1}]^{\varphi(-n-1)}\}^{-n}[x^{-1},[y^n,x^{-1}]]^{\varphi(-n-1)}$$
$$[y,[x^{-1},y^{-1}]]^{a(-n)}[[y^{-1},x^{-1}],x^{-1}]^{a(-n-1)}[[y^{-1},x^{-1}],y^{-1}]^{-n\varphi(-n)}[y^{-1},x^{-1}]^{\varphi(-n)} =$$

$$\overset{l.4.2.4\ e\ 4.2.7}{=} y^nx^n[x^{-1},y^{-1}]^{n^2}[[x^{-1},y^{-1}],y^{-1}]^{-n\varphi(-n-1)}[x^{-1},[y^{-1},x^{-1}]]^{-n\varphi(-n-1)}$$
$$[y,[x^{-1},y^{-1}]]^{a(-n)}[[y^{-1},x^{-1}],x^{-1}]^{a(-n-1)}[[y^{-1},x^{-1}],y^{-1}]^{-n\varphi(-n)}[y^{-1},x^{-1}]^{\varphi(-n)} =$$

$$\overset{l.4.2.5\ e\ 4.2.4}{=} y^nx^n[x^{-1},y^{-1}]^{n^2-\varphi(-n)}[[x^{-1},y^{-1}],y^{-1}]^{a(-n)+n(\varphi(-n)-\varphi(-n-1))}$$
$$[[y^{-1},x^{-1}],x^{-1}]^{a(-n-1)+n\varphi(-n-1)} =$$

$$\overset{pc\ 4}{=} y^n[x^{-1},y^{-1}]^{n^2-\varphi(-n)}x^n[x^n,[x^{-1},y^{-1}]^{n^2-\varphi(-n)}][[x^{-1},y^{-1}],y^{-1}]^{a(-n)-n^2}$$
$$[[y^{-1},x^{-1}],x^{-1}]^{a(-n-1)+n\varphi(-n-1)} =$$

$$\overset{l.4.2.9}{=} y^n[x^{-1},y^{-1}]^{\varphi(n)}x^n[x^{-1},[x^{-1},y^{-1}]]^{-n\varphi(n)}[[x^{-1},y^{-1}],y^{-1}]^{a(-n)-n^2}$$
$$[[y^{-1},x^{-1}],x^{-1}]^{a(-n-1)+n\varphi(-n-1)} =$$

$$\overset{l.4.2.4}{=} y^n[x^{-1},[x^{-1},y^{-1}]]^{-n\varphi(n)}[[x^{-1},y^{-1}],y^{-1}]^{a(-n)-n^2}$$

$$[[y^{-1},x^{-1}],x^{-1}]^{a(-n-1)+n\varphi(-n-1)}[x^{-1},y^{-1}]^{\varphi(n)}x^n =$$

$$\overset{l.4.2.4\ e\ 4.2.5}{=} y^n[x^{-1},[x^{-1},y^{-1}]]^{a(-n-1)+n(\varphi(-n-1)-\varphi(n))}[[x^{-1},y^{-1}],y^{-1}]^{-a(n)}$$

$$[x^{-1},y^{-1}]^{\varphi(n)}x^n =$$

$$\overset{l.4.2.4\ e\ pc\ 1}{=} y^n[y^{-1},[x^{-1},y^{-1}]]^{a(n)}[[x^{-1},y^{-1}],x^{-1}]^{a(n-1)}[x^{-1},y^{-1}]^{\varphi(n)}x^n$$

4.3 Trivialização de $\tilde{\mathbf{P}}_9$ e homotopia das funções de transição

Nesta seção construiremos uma secção global de $\tilde{\mathbf{P}}_9$ a menos de uma homotopia, utilizando o aparato da seção anterior. Mostraremos também, como tal método pode ser aplicado para construir um difeomorfismo entre $Sp(2)\times S^3$ e $E_{7\omega}\times S^3$ a menos de uma homotopia.

Para trivializar $\tilde{\mathbf{P}}_9$ consideremos os difeomorfismos:

$$\gamma : \mathbf{U}\cap\mathbf{V} \longrightarrow S^3\times S^3\times(0,\frac{\pi}{2}) \quad e \quad \delta : S^3\times S^3\times(0,\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbf{U}\cap\mathbf{V}$$

dados por:

$$\gamma\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\frac{a}{|a|},\frac{b}{|b|},cos^{-1}(|a|)) \quad e \quad \delta(A,B,\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta A \\ sen\theta B \end{pmatrix}$$

os quais são inversos um do outro (cf. [**R2**]).

Sejam $S^9_U : \mathbf{U} \longrightarrow \tilde{p}_9^{-1}(\mathbf{U})$ e $S^9_V : \mathbf{V} \longrightarrow \tilde{p}_9^{-1}(\mathbf{V})$ as secções dadas na pg 22 , ou seja:

$$S^9_U\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M_9(a,b,\bar{a}^8(L_1L_2L_3L_4L_5)L(9)^{-1})$$

$$S^9_V\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M_9(a,b,-\bar{b}^8(L_1L_2L_3L_4L_5L(9))^{-1})$$

$\tilde{\mathbf{P}}_9$ tem como função de transição $g^9_{VU} : \mathbf{U}\cap\mathbf{V} \longrightarrow S^3$,

$$g^9_{VU}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{b^8(a\bar{b})^8\bar{a}^8}{(|a||b|)^{16}}$$

Temos que $g^9_{VU}\circ\delta(A,B,\theta) = B^8(A\bar{B})^8\bar{A}^8$.

Como $S^3 \times S^3 \times (0, \frac{\pi}{2}) \simeq S^3 \times S^3$ segue que ,

$$[S^3 \times S^3 \times (0, \frac{\pi}{2}), S^3] \cong [S^3 \times S^3, S^3]$$

onde $[X, Y]$ denota o conjunto das classes de homotopia de aplicações de X em Y.

Em [**W2**] encontramos o seguinte:

Teorema (G. W. Whitehead): O grupo $[S^{n_1} \times S^{n_2} \times ... \times S^{n_k}, G]$ possui uma cadeia central:

$$\Gamma = \Gamma_0 \supseteq \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq ... \supseteq \Gamma_k = \{1\}$$

tal que:

$$\frac{\Gamma_{i-1}}{\Gamma_i} \cong \prod_{|\alpha|=i} \pi_{n(\alpha)}(G)$$

onde G é grupo topológico, $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, ..., k\}$, $|\alpha|$ = cardinalidade de α e $n(\alpha) = \sum_{i \in \alpha} n_i$.

Fazendo $\Gamma = [S^3 \times S^3, S^3]$ teremos:

$G = S^3$, $k = 2$, $n_1 = n_2 = 3$ e pelo resulado acima Γ é nilpotente de classe ≤ 2 e possui uma cadeia central:

$$\Gamma = \Gamma_0 \supseteq \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 = \{1\}$$

tal que:

$$\frac{\Gamma_0}{\Gamma_1} \cong Z \oplus Z \quad e \quad \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \cong \Gamma_1 \cong Z_{12}$$

Dada $f : S^3 \times S^3 \longrightarrow S^3$ denotemos por $\bar{f} : S^3 \times S^3 \longrightarrow S^3$ a aplicação $\bar{f}(x, y) = \overline{f(x, y)}$ (conjugação quaterniônica de f).

Consideremos as projeções $p_i : S^3 \times S^3 \longrightarrow S^3$, $p_i(x_1, x_2) = x_i \quad i = 1, 2$.

Sabemos que, se $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \Gamma = [S^3 \times S^3, S^3]$, então:

$\mathbf{f.g}$ é a classe de homotopia do produto de f por g em S^3

Com isso observamos que, $\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{i} = \mathbf{p}_\mathbf{i}^{-1} \quad i = 1, 2$ e pelo teorema 4.2.1 temos que:

$$(\mathbf{p_1}\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{2})^n = \bar{\mathbf{p}}_\mathbf{2}^n[\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{2}, \bar{\mathbf{p}}_\mathbf{1}]^{\varphi(n)}\mathbf{p_1}^n$$

assim:

$$\mathbf{p}_\mathbf{2}^\mathbf{n}(\mathbf{p_1}\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{2})^\mathbf{n}\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{1}^\mathbf{n} = [\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{2}, \bar{\mathbf{p}}_\mathbf{1}]^{\varphi(\mathbf{n})}$$

em $[S^3 \times S^3, S^3]$

Observando que $p_2^{n-1}(p_1\bar{p}_2)^{n-1}\bar{p}_1^{n-1} = g_{VU}^n \circ \delta$, concluimos:

$$g_{VU}^n \circ \delta \simeq [\bar{p}_2, \bar{p}_1]^{\varphi(n-1)} \tag{31}$$

Assim, $g_{VU}^9 \circ \delta \simeq [\bar{p}_2, \bar{p}_1]^{36}$, como $[\bar{p}_2, \bar{p}_1] \in \Gamma_1 \cong Z_{12}$ segue que $g_{VU}^9 \circ \delta \simeq 1$.

Seja $F : S^3 \times S^3 \times [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow S^3$ uma homotopia C^∞ tal que:

$$F(A, B, \theta) = B^8(A\bar{B})^8\bar{A}^8 \quad , \quad \theta \in [0, \tfrac{\pi}{6}]$$
$$F(A, B, \theta) = 1 \qquad\qquad , \quad \theta \in [\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}]$$

então $S : S^7 \longrightarrow \tilde{P}_9$ dada por:

$$S\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{cases} S_V^9\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ S_V^9\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.(F \circ \gamma)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ S_U^9\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

é uma secção global de $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{9}$.

Um difeomorfismo $\Phi : S^7 \times S^3 \longrightarrow \tilde{P}_9$ é dado por:

$$\Phi(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \nu) = M_9(a, b, w_1\nu, w_2\nu, w_3\nu, w_4\nu, w_5\nu, w_6\nu, w_7\nu, w_8\nu, w_9\nu)$$

onde:

$$w_1 = \begin{cases} -(b\bar{a})^7\bar{b}^8|b|^{-14}(L_1L_2L_3L_4L_5)L(9)^{-1}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ -(b\bar{a})^7\bar{b}^8|b|^{-14}(L_1L_2L_3L_4L_5)L(9)^{-1}(F \circ \gamma)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})\bar{a}^8|a|^{-2}(L_1L_2L_3L_4L_5)L(9)^{-1}, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$w_2 = \begin{cases} (b\bar{a})^8\bar{b}^8|b|^{-16}(L_1L_2L_3L_4L_5)L(9)^{-1}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ (b\bar{a})^8\bar{b}^8|b|^{-16}(L_1L_2L_3L_4L_5)L(9)^{-1}(F\circ\gamma)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ \bar{a}^8(L_1L_2L_3L_4L_5)L(9)^{-1}, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$w_k = \begin{cases} -(b\bar{a})^{9-k}\bar{b}^8|b|^{-2(9-k)}\frac{(L_1\ldots L_{9-(k+2)})}{L_{9-(k+1)}\ldots L_5L(9)}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ -(b\bar{a})^{9-k}\bar{b}^8|b|^{-2(9-k)}\frac{(L_1\ldots L_{9-(k+2)})}{L_{9-(k+1)}\ldots L_5L(9)}(F\circ\gamma)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})^{k-1}\bar{a}^8|a|^{-2(k-1)}\frac{(L_1\ldots L_{9-(k+2)})}{L_{9-(k+1)}\ldots L_5L(9)}, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

para $3 \leq k \leq 6$.

$$w_7 = \begin{cases} -(b\bar{a})^2\bar{b}^8|b|^{-4}(L_1L_2L_3L_4L_5L(9))^{-1}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ -(b\bar{a})^2\bar{b}^8|b|^{-4}(L_1L_2L_3L_4L_5L(9))^{-1}(F\circ\gamma)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})^6\bar{a}^8|a|^{-12}(L_1L_2L_3L_4L_5L(9))^{-1}, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$w_8 = \begin{cases} -(b\bar{a})\bar{b}^8|b|^{-2}(L_1L_2L_3L_4L_5L(9))^{-1}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ -(b\bar{a})\bar{b}^8|b|^{-2}(L_1L_2L_3L_4L_5L(9))^{-1}(F\circ\gamma)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})^7\bar{a}^8|a|^{-14}(L_1L_2L_3L_4L_5L(9))^{-1}, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$w_9 = \begin{cases} -\bar{b}^8(L_1L_2L_3L_4L_5L(9))^{-1}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ -\bar{b}^8(L_1L_2L_3L_4L_5L(9))^{-1}(F\circ\gamma)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})^8\bar{a}^8|a|^{-16}(L_1L_2L_3L_4L_5L(9))^{-1}, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

Podemos agora explicitar a ação de S^3 sobre $S^7 \times S^3$ cujo quociênte é $\Sigma^7_{[1,6]}$:

$$q \star (\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \nu) \equiv \Phi^{-1}(q \star \Phi(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \nu) = (\begin{pmatrix} \bar{q}aq \\ \bar{q}bq \end{pmatrix}, q \diamond \nu)$$

onde:

$$q \diamond \nu = \begin{cases} \bar{q}\nu, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ \overline{(F\circ\gamma)\begin{pmatrix} \bar{q}aq \\ \bar{q}bq \end{pmatrix}}\bar{q}(F\circ\gamma)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\nu, & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ \bar{q}\nu, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

Exploraremos agora o problema de explicitar o difeomorfismo $Sp(2)\times S^3 \equiv_d E_{7\omega}\times S^3$ seguindo os mesmos passos acima. Percebemos no entanto que a complexidade aqui é bem maior.

Lema 4.3.1: Existe um difeomorfismo $\delta_n : S^3\times S^3\times S^3\times(0,\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \tilde{\mathbf{U}}_\mathbf{n}\cap\tilde{\mathbf{V}}_\mathbf{n}$ para todo $n\in N$, $n\geq 2$.

Dem.: Definimos δ_n como segue:

$$\delta_n(A,B,X,\theta) = M_n(cos\theta A, sen\theta B, (cos^{n-1}\theta)(l_1 l_2 ... l_{n-4})l(n)^{-1}X)$$

onde $l_k = L_k$ trocando-se a por $cos\theta A$ e b por $sen\theta B$ $\quad 1\leq k\leq n-4$ e $l(n)=L(n)$ efetuando-se as mesmas trocas.

Como exemplos temos:

$$\delta_2(A,B,X,\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta A & -sen\theta A\bar{B}X \\ sen\theta B & cos\theta X \end{pmatrix}$$

$$\delta_3(A,B,X,\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta A & -sen^3\theta B & -cos\theta sen\theta\sqrt{1+sen^2\theta}A\bar{B}X \\ sen\theta B & cos\theta sen^2\theta B\bar{A}B & cos^2\theta\sqrt{1+sen^2\theta}X \\ 0 & cos\theta\sqrt{1+sen^2\theta}A & -cos^{-1}\theta sen\theta A\bar{B}X \end{pmatrix}$$

$$\delta_4(A,B,X,\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta A & -sen^3\theta Bl^{-1} & 0 & -cos^2\theta sen\theta A\bar{B}Xl^{-1} \\ sen\theta B & sen^2\theta cos\theta B\bar{A}Bl^{-1} & 0 & cos^3\theta Xl^{-1} \\ 0 & cos^3\theta Al^{-1} & -sen\theta B & -cos\theta sen^2\theta(A\bar{B})^2Xl^{-1} \\ 0 & cos^2\theta sen\theta A\bar{B}Al^{-1} & cos\theta A & -sen^3\theta(A\bar{B})^3Xl^{-1} \end{pmatrix}$$

onde $l = l(4) = \sqrt{sen^4\theta + cos^4\theta}$.

Verifica-se então facilmente que:

$$\delta_n^{-1}(M_n(a,b,y_2)) = (\frac{a}{|a|},\frac{b}{|b|},\frac{y_2}{|y_2|},cos^{-1}|a|)$$

e com isso o lema está provado.

Lema 4.3.2: Sejam $f : S^3\times S^3\times S^3 \longrightarrow S^3$ e $p : S^3\times S^3\times S^3 \longrightarrow S^3\times S^3$ funções contínuas.

i) Se $f = c_2 \circ p$, onde $c_2(x,y) = [x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$, então a classe de f em $[S^3 \times S^3 \times S^3, S^3]$ tem ordem k onde k é um divisor de 12.

ii) Se $f = c_3 \circ p$, onde $c_3(x,y) = [x,[x,y]]$ *ou* $[y,[x,y]]$, então $f \simeq 1$.

Dem.: Basta observar que, pelo teorema de Whitehead aplicado ao grupo $[S^3 \times S^3, S^3]$ temos que c_2 representa uma classe de homotopia de ordem 12, e $c_3 \simeq 1$.

De posse desse lema, notamos que para $x, y \in G_3 = [S^3 \times S^3 \times S^3, S^3]$ tem-se:

$$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}xy^{-1}[y^{-1},x]y = y^{-1}y[y^{-1},x][[y^{-1},x],y] = [y^{-1},x]$$

segue então de forma análoga ao lema 4.2.2 o:

Lema 4.2.2': Dados $x, y \in G_3 = [S^3 \times S^3 \times S^3, S^3]$, então:

$$[x,y] = [y^{-1},x] = [y,x^{-1}] = [x^{-1},y^{-1}]$$

Com auxílio dos dois lemas anteriores observamos que o lema 4.2.8 e o teorema 4.2.2 aplicados ao grupo $G_3 = [S^3 \times S^3 \times S^3, S^3]$ se transformam em:

Lema 4.2.8': Dados $x, y \in G_3 = [S^3 \times S^3 \times S^3, S^3]$, então:

$$[x,y]^n = [x^n,y] = [x,y^n] \quad , \qquad n \in Z$$

Dem.: Para $n \geq 0$ o resultado segue diretamente dos lemas 4.3.2 e 4.2.8.

Se $n < 0$ temos:

$$[x,y]^n = [y,x]^{-n} = [y^{-n},x] = [y,x^{-n}]$$

mas:

$$[y^{-n},x] = [(y^n)^{-1},x] = [x,y^n] \quad e \quad [y,x^{-n}] = [y,(x^n)^{-1}] = [x^n,y]$$

donde segue o resultado.

Teorema 4.2.2': Dados $x, y \in G_3 = [S^3 \times S^3 \times S^3, S^3]$, então:

$$(xy)^n = y^n [x,y]^{\varphi(n)} x^n \quad , \qquad n \in Z$$

Observamos que:

$$[S^3 \times S^3 \times S^3 \times (0, \frac{\pi}{2}), S^3] = [S^3 \times S^3 \times S^3, S^3]$$

Segue do teorema de Whitehead que $\Gamma = [S^3 \times S^3 \times S^3, S^3]$ é um grupo nilpotente de classe ≤ 3 com cadeia central, $\Gamma = \Gamma_0 \supseteq \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \Gamma_3 = \{1\}$, tal que:

$$\frac{\Gamma_0}{\Gamma_1} \cong Z \oplus Z \oplus Z$$

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \cong Z_{12} \oplus Z_{12} \oplus Z_{12}$$

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_3} = \Gamma_2 \cong Z_3$$

Denotemos por $A, B, X : S^3 \times S^3 \times S^3 \times (0, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow S^3$ as projeções:

$$A(x_1, x_2, x_3, \theta) = x_1 \quad B(x_1, x_2, x_3, \theta) = x_2 \quad X(x_1, x_2, x_3, \theta) = x_3$$

e por $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{X}$ os conjugados quaterniônicos de A , B , X respectivamente.

Para simplificar a notação colocamos $p = \frac{m - tkn + tk - 1}{t}$ e utilizando os resultados acima obtemos:

$g_{n,m,k,t} \circ \delta_n = (B^p (\bar{X}(B\bar{A})^{n-1})^k)^t (A\bar{B})^{m-1} (X^k \bar{A}^p)^t \simeq$

$$\overset{T.\ 4.2.2'}{\simeq} (\bar{X}(B\bar{A})^{n-1})^{tk} [B^p, (\bar{X}(B\bar{A})^{n-1})^k]^{\varphi(t)} B^{pt} (A\bar{B})^{m-1} \bar{A}^{pt} [X^k, \bar{A}^p]^{\varphi(t)} X^{tk} \simeq$$

$$\overset{l.4.3.2}{\simeq} [B^p,(\bar{X}(B\bar{A})^{n-1})^k]^{\varphi(t)}(\bar{X}(B\bar{A})^{n-1})^{tk}B^{pt}(A\bar{B})^{m-1}\bar{A}^{pt}[X^k,\bar{A}^p]^{\varphi(t)}X^{kt} \simeq$$

$$\overset{T.\ 4.2.2' \text{ e } L.\ 4.2.8'}{\simeq} [B,\bar{X}(B\bar{A})^{n-1}]^{k\varphi(t)p}(B\bar{A})^{tk(n-1)}[\bar{X},(B\bar{A})^{n-1}]^{\varphi(tk)}\bar{X}^{tk}B^{pt}(A\bar{B})^{m-1}$$
$$\bar{A}^{pt}[X,\bar{A}]^{k\varphi(t)p}X^{tk} \simeq$$

$$\overset{T.\ 4.2.2'}{\simeq} [B,\bar{X}(B\bar{A})^{n-1}]^{k\varphi(t)p}[\bar{X},(B\bar{A})^{n-1}]^{\varphi(tk)}(B\bar{A})^{tk(n-1)}\bar{X}^{tk}B^{pt}(A\bar{B})^{m-1}\bar{A}^{pt}$$
$$[X,\bar{A}]^{k\varphi(t)p}X^{tk} \simeq$$

$$\overset{pc\ 4}{\simeq} [B,\bar{X}(B\bar{A})^{n-1}]^{k\varphi(t)p}[\bar{X},(B\bar{A})^{n-1}]^{\varphi(tk)}\bar{X}^{tk}(B\bar{A})^{tk(n-1)}[(B\bar{A})^{tk(n-1)},\bar{X}^{tk}]$$
$$B^{pt}(A\bar{B})^{m-1}\bar{A}^{pt}[X,\bar{A}]^{k\varphi(t)p}X^{tk} \simeq$$

$$\overset{T.\ 4.2.2'}{\simeq} [B,\bar{X}(B\bar{A})^{n-1}]^{k\varphi(t)p}[\bar{X},(B\bar{A})^{n-1}]^{\varphi(tk)}\bar{X}^{tk}[(B\bar{A})^{tk(n-1)},\bar{X}^{tk}](B\bar{A})^{tk(n-1)}$$
$$B^{pt}(A\bar{B})^{m-1}\bar{A}^{pt}[X,\bar{A}]^{k\varphi(t)p}X^{tk} \simeq$$

$$\overset{pc\ 3\ ,\ pc\ 4 \text{ e } L.\ 4.2.8'}{\simeq} ([B,(B\bar{A})^{n-1}][B\bar{X}][[B\bar{X}],(B\bar{A})^{n-1}])^{k\varphi(t)p}[\bar{X},B\bar{A}]^{\varphi(tk)(n-1)}\bar{X}^{tk}$$
$$[B\bar{A},\bar{X}]^{(tk)^2(n-1)}B^{pt}(B\bar{A})^{tk(n-1)}[(B\bar{A})^{tk(n-1)},B^{pt}](A\bar{B})^{m-1}\bar{A}^{pt}[X,\bar{A}]^{k\varphi(t)p}X^{tk} \simeq$$

$$\overset{L.\ 4.2.4 \text{ e } T.\ 4.2.2'}{\simeq} [B,B\bar{A}]^{(n-1)k\varphi(t)p}[B,\bar{X}]^{k\varphi(t)p}[[B,\bar{X}],B\bar{A}]^{(n-1)k\varphi(t)p}[\bar{X},B\bar{A}]^{\varphi(tk)(n-1)}$$
$$\bar{X}^{tk}[B\bar{A},\bar{X}]^{(tk)^2(n-1)}[(B\bar{A})^{tk(n-1)},B^{pt}]B^{pt}(A\bar{B})^{pt}\bar{A}^{pt}[X,\bar{A}]^{k\varphi(t)p}X^{tk} \simeq$$

$$\overset{pc\ 2\ ,\ pc\ 3 \text{ e } L.\ 4.3.2}{\simeq} [B,\bar{A}]^{(n-1)k\varphi(t)p}[B,\bar{X}]^{k\varphi(t)p}[[B,\bar{X}],\bar{A}]^{(n-1)k\varphi(t)p}[B\bar{A},\bar{X}]^{\varphi(tk-1)(n-1)}$$
$$\bar{X}^{tk}[\bar{A},B]^{tk(n-1)pt}[A,\bar{B}]^{\varphi(pt)}[X,\bar{A}]^{k\varphi(t)p}X^{tk} \simeq$$

$$\overset{pc\ 2 \text{ e } pc\ 4}{\simeq} [B,\bar{A}]^{(n-1)k\varphi(t)p}[B,\bar{X}]^{k\varphi(t)p}[[B,\bar{X}],\bar{A}]^{(n-1)k\varphi(t)p}$$
$$([B,\bar{X}][[B,\bar{X}],\bar{A}][\bar{A},\bar{X}])^{\varphi(tk-1)(n-1)}[\bar{A},B]^{\varphi(pt)+tk(n-1)pt}\bar{X}^{tk}[\bar{X},[\bar{A},B]]^{tk\varphi(pt)+(tk)^2(n-1)pt}$$
$$[X,\bar{A}]^{k\varphi(t)p}X^{tk} \simeq$$

$$\overset{L.\ 4.2.4 \text{ e } L.4.2.8'}{\simeq} [B,\bar{X}]^{k\varphi(t)p+\varphi(tk-1)(n-1)}[A,\bar{B}]^{\varphi(pt)+tk(n-1)pt-(n-1)k\varphi(t)p}$$
$$[X,\bar{A}]^{k\varphi(t)p+\varphi(tk-1)(n-1)}[[B,\bar{X}],\bar{A}]^{(n-1)k\varphi(t)p+\varphi(tk-1)(n-1)}[\bar{X},[\bar{A},B]]^{tk\varphi(pt)+(tk)^2(n-1)pt}$$

Mostramos assim que para k e $t \in Z$ tais que $\frac{m-tkn+tk-1}{t} \in Z$ temos:

$$g_{n,m,k,t} \circ \delta_n \simeq [B,\bar{X}]^{e_1}[A,\bar{B}]^{e_2}[X,\bar{A}]^{e_1}[[B,\bar{X}],\bar{A}]^{e_3}[\bar{X},[\bar{A},B]]^{e_4} \qquad (32)$$

onde:

$$e_1 = \frac{k\varphi(t)(m-tkn+tk-1)}{t} + \varphi(tk-1)(n-1)$$
$$e_2 = \varphi(m-tkn+tk-1) + tk(n-1)(m-tkn+tk-1) - \frac{(n-1)k\varphi(t)(m-tkn+tk-1)}{t}$$
$$e_3 = \frac{(n-1)k\varphi(t)(m-tkn+tk-1)}{t} + \varphi(tk-1)(n-1)$$
$$e_4 = tk\varphi(m-tkn+tk-1) + (tk)^2(n-1)(m-tkn+tk-1)$$
$$\varphi(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

Segue da classificação dos fibrados $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{n}}$ do capítulo 2 que, $\mathbf{E_{1,7}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{23,14}}$ e $\mathbf{E_{7,1}} \equiv_{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{14,23}}$. Tomando então, $k = 19$ e $t = 1$ temos que $g_{14,23,19,1} \circ \delta_{14}$ é homotópica a:

$$([B,\bar{X}]^{12})^{171}([A,\bar{B}]^{12})^{2100}([X,\bar{A}]^{12})^{171}([[B,\bar{X}],\bar{A}]^3)^{-17784}([\bar{X},[\bar{A},B]]^3)^{-554040} \simeq 1 \quad (33)$$

em virtude do teorema de Whitehead e do lema 4.3.2.

Tomando agora, $k = 5$ e $t = -13$ obtemos que $g_{23,14,5,-13}$ é homotópica a:

$$([\bar{X},B]^{12})^{325}([\bar{B},A]^{12})^{5772}([\bar{A},X]^{12})^{325}([\bar{A},[B,\bar{X}]]^3)^{301730}([\bar{X},[\bar{A},B]]^3)^{7720635} \simeq 1 \quad (34)$$

também em virtude do Teorema de Whitehead e do lema 4.3.2

Assim, seguindo os mesmos passos da trivialização de $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{9}}$ podemos exibir (a menos de uma homotopia) os difeomorfismos:

$$\tilde{P}_{23} \times S^3 \equiv_d \tilde{P}_{23,14} \qquad e \qquad \tilde{P}_{14} \times S^3 \equiv_d \tilde{P}_{14,23}$$

Seja $H : S^3 \times S^3 \times S^3 \times [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow S^3$ uma homotopia C^∞ tal que:

$$H(A,B,X,\theta) = \begin{cases} g_{23,14,5,-13} \circ \delta_{23}(A,B,X,\theta), & \text{se } \theta \in [0, \frac{\pi}{6}] \\ 1, & \text{se } \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Lembrando que $s^{5,-13}_{\tilde{U}_{23}} : \tilde{U}_{23} \longrightarrow \tilde{P}_{23,14}$ e $s^{5,-13}_{\tilde{V}_{23}} : \tilde{V}_{23} \longrightarrow \tilde{P}_{23,14}$ são secções parciais de $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{23,14}}$ sobre $\tilde{U}_{23}$ e $\tilde{V}_{23}$ respectivamente dadas por:

$$s^{5,-13}_{\tilde{U}_{23}}(M_{23}(a,b,y_2)) = (M_{23}(a,b,y_2), M_{14}(a,b,Y_2(5,-13)))$$

$$s^{5,-13}_{\tilde{V}_{23}} M_{23}(a,b,z_{23}) = (M_{23}(a,b,z_{23}), M_{14}(a,b,Z_{14}(5,-13)))$$

onde:

$$Y_2(5,-13) = (y_2^5 \bar{a}^{-111})^{-13} \frac{L_1 L_2 ... L_{10} L(23)^{-65}}{(L_1 L_2 ... L_{19})^{-65} L(14)}$$

$$Z_{14}(5,-13) = (-1)^{-64} (z_{23}^5 \bar{b}^{-111})^{-13} \frac{(L_1 L_2 ... L_{19} L(23))^{-65}}{L_1 L_2 ... L_{10} L(14)}$$

Podemos então construir uma secção global $s_{23,14} : \tilde{P}_{23} \longrightarrow \tilde{P}_{23,14}$ dada por:

$$s_{23,14}(M_{23}) = \begin{cases} s^{5,-13}_{\tilde{V}_{23}}(M_{23}), & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ s^{5,-13}_{\tilde{V}_{23}}(M_{23}).(H \circ \delta_{23}^{-1})(M_{23}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ s^{5,-13}_{\tilde{U}_{23}}(M_{23}), & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

Assim, um difeomorfismo $\Phi_{23,14} : \tilde{P}_{23} \times S^3 \longrightarrow \tilde{P}_{23,14}$ é dado por:

$$\Phi_{23,14}(M_{23}, q) = (M_{23}, M_{14})$$

onde, $M_{23} = M_{23}(a,b,x_1,x_2,...x_{23})$

$M_{14} = M_{14}(a,b,y_1.q, y_2.q, ..., y_{14}.q)$

e se $\theta = \theta(a) = cos^{-1}(|a|)$ então:

$$y_1 = \begin{cases} (b\bar{a})^{12}|b|^{-24}(L_1 L_2 ... L_{10})^2 Z_{14}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ (b\bar{a})^{12}|b|^{-24}(L_1 L_2 ... L_{10})^2 Z_{14}.(H \circ \delta_{23}^{-1})(M_{23}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})|a|^{-2} Y_2, & \text{se } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} -(b\bar{a})^{13}|b|^{-26}(L_1 L_2 ... L_{10})^2 Z_{14}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -(b\bar{a})^{13}|b|^{-26}(L_1 L_2 ... L_{10})^2 Z_{14}.(H \circ \delta_{23}^{-1})(M_{23}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12} \\ Y_2, & \text{se } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$y_k = \begin{cases} (b\bar{a})^{14-k}|b|^{2(14-k)}(L_1 L_2 ... L_{14-(k+2)})^2 Z_{14}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ (b\bar{a})^{14-k}|b|^{2(14-k)}(L_1 L_2 ... L_{14-(k+2)})^2 Z_{14}.(H \circ \delta_{23}^{-1})(M_{23}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})^{k-1}|a|^{-2(k-1)}(L_{14-(k+1)} L_{14-k} ... L_{10})^{-2} Y_2, & \text{se } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

se $3 \leq k \leq 11$.

$$y_{12} = \begin{cases} (b\bar{a})^2|b|^{-4}Z_{14}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ (b\bar{a})^2|b|^{-4}Z_{14}.(H \circ \delta_{23}^{-1})(M_{23}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})^{11}|a|^{-22}(L_1L_2...L_{10})^{-2}Y_2, & \text{se } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$y_{13} = \begin{cases} (b\bar{a})|b|^{-2}Z_{14}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ (b\bar{a})|b|^{-2}Z_{14}.(H \circ \delta_{23}^{-1})(M_{23}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})^{12}|a|^{-24}(L_1L_2...L_{10})^{-2}Y_2, & \text{se } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$y_{14} = \begin{cases} Z_{14}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ Z_{14}.(H \circ \delta_{23}^{-1})(M_{23}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})^{13}|a|^{-26}(L_1L_2...L_{10})^{-2}Y_2, & \text{se } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

onde:

$$Z_{14} = (-1)^{-64}(x_{23}^5\bar{b}^{-111})^{-13}\frac{(L_1L_2...L_{19}L(23))^{-65}}{(L_1L_2...L_{10}L(14))}$$

$$Y_2 = (x_2^5\bar{a}^{-111})^{-13}\frac{L_1L_2...L_{10}L(23)^{-65}}{(L_1L_2...L_{19})^{-65}L(14)}$$

Seja agora $G : S^3 \times S^3 \times S^3 \times [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow S^3$ uma homotopia C^∞ tal que:

$$G(A, B, X, \theta) = \begin{cases} g_{14,23,19,1} \circ \delta_{14}(A, B, X, \theta), & \text{se } \theta \in [0, \frac{\pi}{6}] \\ 1, & \text{se } \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Seguindo os mesmos passos da construção de $\Phi_{23,14}$ temos que:

$$s_{\tilde{U}_{14}}^{19,1}(M_{14}(a, b, y_2)) = (M_{14}(a, b, y_2), M_{23}(a, b, \mathcal{Y}_2(19, 1)))$$

$$s_{\tilde{V}_{14}}^{19,1}(M_{14}(a, b, z_{14})) = (M_{14}(a, b, z_{14}), M_{23}(a, b, \mathcal{Z}_{23}(19, 1))$$

são secções parciais de $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{14,23}}$ sobre $\tilde{U}_{14}$ e $\tilde{V}_{14}$ respectivamente, onde:

$$\mathcal{Y}_2(19, 1) = \mathcal{Y}_2(19, 1)(a, b, y_2) = y_2^{19}\bar{a}^{-225}\frac{L_1L_2L_3...L_{19}L(14)}{(L_1L_2...L_{10})^{19}L(23)}$$

$$\mathcal{Z}_{23}(19, 1) = \mathcal{Z}_{23}(19, 1)(a, b, z_{14}) = -z_{14}^{19}\bar{b}^{-225}\frac{(L_1L_2...L_{10}L(14))^{19}}{L_1L_2L_3...L_{19}L(23)}$$

Se $M_{14} = M_{14}(a, b, x_1, x_2, ..., x_{14}) \in \tilde{P}_{14}$ então uma secção global, $s_{14,23} : \tilde{P}_{14} \longrightarrow \tilde{P}_{14,23}$ é dada por:

$$s_{14,23}(M_{14}) = \begin{cases} s^{19,1}_{\tilde{V}_{14}}(M_{14}), & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ s^{19,1}_{\tilde{V}_{14}}(M_{14}).(G \circ \delta_{14}^{-1})(M_{14}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ s^{19,1}_{\tilde{U}_{14}}(M_{14}), & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

e um difeomorfismo $\Phi_{14,23} : \tilde{P}_{14} \times S^3 \longrightarrow \tilde{P}_{14,23}$ é dado por:

$$\Phi(M_{14}(a, b, x_1, x_2...x_{14}), q) = (M_{14}(a, b, x_1...x_{14}), M_{23}(a, b, r_1.q, r_2.q...r_{23}.q))$$

onde:

$$r_1 = \begin{cases} (b\bar{a})^{21}|b|^{-42}(L_1L_2...L_{19})^2\mathcal{Z}_{23}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ (b\bar{a})^{21}|b|^{-42}(L_1L_2...L_{19})^2\mathcal{Z}_{23}.(G \circ \delta_{14}^{-1})(M_{14}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})|a|^{-2}\mathcal{Y}_2, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$r_2 = \begin{cases} -(b\bar{a})^{22}|b|^{-44}(L_1L_2...L_{19})^2\mathcal{Z}_{23}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ -(b\bar{a})^{22}|b|^{-44}(L_1L_2...L_{19})^2\mathcal{Z}_{23}.(G \circ \delta_{14}^{-1})(M_{14}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ x_2^{19}\bar{a}^{-225}\frac{L_1L_2...L_{19}L(14)^{19}}{(L_1L_2...L_{10})^{19}L(23)}, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$r_k = \begin{cases} (b\bar{a})^{23-k}|b|^{-2(23-k)}(L_1L_2...L_{21-k})^2\mathcal{Z}_{23}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{(b\bar{a})^{23-k}}{|b|^{2(23-k)}}(L_1L_2...L_{21-k})^2\mathcal{Z}_{23}.(G \circ \delta_{14}^{-1})(M_{14}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})^{k-1}|a|^{-2(k-1)}(L_{23-(k+1)}L_{23-k}...L_{19})^{-2}\mathcal{Y}_2, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

se $3 \leq k \leq 20$.

$$r_{21} = \begin{cases} (b\bar{a})^2|b|^{-4}\mathcal{Z}_{23}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ (b\bar{a})^2|b|^{-4}\mathcal{Z}_{23}.(G \circ \delta_{14}^{-1})(M_{14}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})^{20}|a|^{-40}(L_1L_2...L_{19})^{-2}\mathcal{Y}_2, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$r_{22} = \begin{cases} (b\bar{a})|b|^{-2}\mathcal{Z}_{23}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ (b\bar{a})|b|^{-2}\mathcal{Z}_{23}.(G \circ \delta_{14}^{-1})(M_{14}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})^{21}|a|^{-42}(L_1L_2...L_{19})^{-2}\mathcal{Y}_2, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$r_{23} = \begin{cases} -x_{14}^{19}\bar{b}^{-225}\frac{(L_1L_2...L_{10}L(14))^{19}}{L_1L_2...L_{19}L(23)}, & \text{se } \frac{5\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{2} \\ -x_{14}^{19}\bar{b}^{-225}\frac{(L_1L_2...L_{10}L(14))^{19}}{L_1L_2...L_{19}L(23)}.(G \circ \delta_{14}^{-1})(M_{14}), & \text{se } \frac{\pi}{12} \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{5\pi}{12} \\ -(a\bar{b})^{22}|a|^{-44}(L_1L_2...L_{19})^{-2}\mathcal{Y}_2, & \text{se } 0 \leq cos^{-1}(|a|) \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

onde:

$$\mathcal{Y}_2 = x_2^{19}\bar{a}^{-225}\frac{L_1L_2...L_{19}L(14)^{19}}{(L_1L_2...L_{10})^{19}L(23)}$$

$$\mathcal{Z}_{23} = -x_{14}^{19}\bar{b}^{-225}\frac{(L_1L_2...L_{10}L(14))^{19}}{L_1L_2...L_{19}L(23)}$$

Temos com isso:

$$\tilde{P}_{23} \times S^3 \overset{\Phi_{23,14}}{\longrightarrow} \tilde{P}_{23,14} \overset{c}{\longrightarrow} \tilde{P}_{14,23} \overset{\Phi_{14,23}^{-1}}{\longrightarrow} \tilde{P}_{14} \times S^3$$

onde, $c(M_2, M_{11}) = (M_{11}, M_2)$.

Temos então em essência que os problemas da **trivialização do fibrado** $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{9}}$, de **explicitar a ação exótica de** $\mathbf{S^3}$ **sobre** $\mathbf{S^7 \times S^3}$ e de **explicitar o difeomorfismo** $\mathbf{Sp(2) \times S^3 \equiv_d E_{7\omega} \times S^3}$ estão associados à comutatividade (homotopica) de certos elementos de S^3

Observamos que o mesmo procedimento fornece a trivialização do fibrado $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{2,11}}$, tomando-se k=11 e t=5

Embora não tenhamos a resolução total de nosso problema (não sabemos explicitar as homotopias envolvidas nos difeomorfismos $\mathbf{\Phi_{23,14}}$, $\Phi_{14,23}$) , o método descrito acima se mostrou potente pois, através dele conseguimos explicitar o gerador de $\pi_6(S^3)$ por meio de comutadores sem uso do aparato clássico utilizado por James, **[J2]** e McCarty, **[Mc]** como veremos no próximo capítulo.

5. Geradores explícitos de $\pi_6(S^3)$ e $\pi_9(S^3)$

A argumentação utilizada em 4.3 nos mostra que se a função de transição g^n_{VU} é homotópica à aplicação constante, então o fibrado $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n}$ é trivial.

Consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & S^3 \times S^3 & \xrightarrow{[\bar{p}_2,\bar{p}_1]} & S^3 \\ & & \wedge \downarrow & & \uparrow \omega \\ S^6 \equiv_d & & S^3 \wedge S^3 & \xrightarrow{id} & S^3 \wedge S^3 \end{array}$$

diagrama 9

ou seja, ω é definido aqui por, $\omega(A \wedge B) = [\bar{B}, \bar{A}] = BA\bar{B}\bar{A}$.

Fazendo uso da observação acima podemos mostrar que ω é gerador de $\pi_6(S^3)$. Para tanto, como $\pi_6(S^3) \cong Z_{12}$ basta mostrarmos que a ordem de ω é 12.

As possíveis ordens de ω são $1, 2, 3, 4, 6$ e 12.

Pelo diagrama acima:

$$\wedge^*(\omega^k) = (\wedge^*(\omega))^k = (\omega \circ \wedge)^k = [\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{2}, \bar{\mathbf{p}}_\mathbf{1}]^k$$

e usando o fato que $\wedge^*$ é injetora (cf. **[Sc]**), temos que:

$$\omega^k \simeq 1 \Longleftrightarrow [\bar{p}_2, \bar{p}_1]^k \simeq 1$$

por (31) $g^n_{VU} \circ \delta \simeq [\bar{p}_2, \bar{p}_1]^{\varphi(n-1)}$ assim, se ordem$(\omega) = k$ e $k \equiv \varphi(n-1)\ mod\ 12$ para algum n então:

$$\mathbf{E}_{\varphi(\mathbf{n-1})\ \mathbf{mod12}} \equiv_\mathbf{f} \tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n} \quad \textit{é} \quad \textit{trivial} \tag{35}$$

Como $1 \equiv \varphi(1)\ mod 12$, $3 \equiv \varphi(2)\ mod 12$, $4 \equiv \varphi(7)\ mod 12$, $6 \equiv \varphi(3)\ mod 12$ e $\mathbf{E_1}, \mathbf{E_3}, \mathbf{E_4}, \mathbf{E_6}$ são todos fibrados não triviais temos que ω não pode ter ordem $1, 3, 4$ ou 6.

Se a ordem $(\omega) = 2 \Longrightarrow \omega^2 \simeq 1 \Longrightarrow [\bar{p}_2, \bar{p}_1]^2 \simeq 1 \Longrightarrow [\bar{p}_2, \bar{p}_1]^4 \simeq 1$, donde $g^8_{UV} \circ \delta \simeq [\bar{p}_2, \bar{p}_1]^{\varphi(7)} \simeq [\bar{p}_2, \bar{p}_1]^4 \simeq 1 \Longrightarrow \tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{8} \equiv_\mathbf{f} \mathbf{E_4}$ é trivial, logo a ordem(ω) também não pode ser 2.

Concluimos assim o:

Teorema 5.1: $\omega : S^3 \wedge S^3 \longrightarrow S^3$, dada por:

$$\omega(A \wedge B) = [\bar{B}, \bar{A}] = BA\bar{B}\bar{A}$$

representa um gerador de $\pi_6(S^3)$.

Este teorema foi provado nos trabalhos de James, **[J2]** e McCarty, **[Mc]** por um procedimento distinto do utilizado acima.

À luz desse resultado, temos que as funções de transição $g^n_{VU} : \mathbf{U} \cap \mathbf{V} \longrightarrow S^3$, $g^n_{VU}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{b^{n-1}(a\bar{b})^{n-1}\bar{a}^{n-1}}{(|a||b|)^{2(n-1)}}$ de $\tilde{\mathbf{P}}_\mathbf{n}$ são tais que:

$$g^n_{VU} \circ \delta : S^3 \times S^3 \longrightarrow S^3$$

todas se fatoram em $S^3 \wedge S^3$ onde δ o difeomorfismo entre $S^3 \times S^3 \times (0, \frac{\pi}{2})$ e $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ dado em 4.3, ou seja, existe $\omega_n : S^3 \wedge S^3 \longrightarrow S^3$ tal que $g^n_{UV} \circ \delta = \omega_n \circ \wedge$.

Além disso se a classe de equivalência da função de transição g^n_{VU} classifica um fibrado ξ então a classe de homotopia de ω_n em $\pi_6(S^3)$ também classifica o mesmo fibrado ξ. Temos assim o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^3 \times S^3 & \xrightarrow{g^n_{VU} \circ \delta} & S^3 \\ \downarrow \wedge & & \| \\ S^3 \wedge S^3 & \xrightarrow{\omega_n} & S^3 \end{array}$$

diagrama 10

onde $\omega_n(A \wedge B) \simeq [\bar{B}, \bar{A}]^{\varphi(n-1)}$.

Podemos agora mostrar conforme mencionado no capítulo 1 que o elemento de obstrução de Hilton-Roitberg é equivalente ao de Scheerer, para $G = S^3$, ou seja, mostraremos abaixo que:

$$w_k \circ (\alpha \times id_{S^3}) \simeq \pm(\omega \circ \Sigma^3\alpha)^{\frac{k(k-1)}{2}} \circ \wedge$$

onde $\wedge : S^{n-1} \times S^3 \longrightarrow S^{n-1} \wedge S^3 \equiv_d S^{n+2}$ é a projeção natural e o elemento de Hilton-Roitberg está posto aqui em notação multiplicativa.

Colocando convenções semelhantes às da página 43 para A e B, ou seja, A, $B : S^3 \times S^3 \longrightarrow S^3$ são as projeções sobre a primeira e segunda componente respectivamente, $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são os conjugados quaterniônicos de A e B, juntamente com os resultados sobre comutadores de 4.2 temos:

$$\begin{aligned}
w_k &= \bar{B}^k\bar{A}^k(AB)^k = \\
&= \bar{B}^k(AB)^k\bar{A}^k[\bar{A}^k,(AB)^k] \simeq \\
&\simeq \bar{B}^k(AB)^k\bar{A}^k[\bar{A},AB]^{k^2} \simeq \\
&\simeq \bar{B}^kB^k[B,\bar{A}]^{\varphi(k)}A^k\bar{A}^k[\bar{A},AB]^{k^2} = \\
&= [B,\bar{A}]^{\varphi(k)}(A\bar{B}\bar{A}\bar{A}AB)^{k^2} = \\
&= [\bar{A},B]^{-\varphi(k)}[\bar{A},B]^{k^2} = \\
&= [\bar{A},B]^{\varphi(k-1)} \simeq \\
&\simeq [\bar{B},\bar{A}]^{\varphi(k-1)} = \\
&= [\bar{B},\bar{A}]^{\frac{k(k-1)}{2}}
\end{aligned}$$

Agora com uso do teorema 5.1 acima e do corolário (8.11) de **[W3]** pg. 481 temos que o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
S^{n-1} \times S^3 & \xrightarrow{\alpha \times id_{S^3}} & S^3 \times S^3 & \xrightarrow{w_k} & S^3 \\
\downarrow \wedge & & \downarrow \wedge & & \| \\
S^{n-1} \wedge S^3 & \xrightarrow{\pm\Sigma^3\alpha} & S^3 \wedge S^3 & \xrightarrow{\omega^{\varphi(k-1)}} & S^3
\end{array}$$

diagrama 11

é homotopicamente comutativo, donde segue o resultado.

Finalizamos este capítulo agora exibindo um gerador explícito de $\pi_9(S^3)$.

Se Γ é um grupo multiplicativo nilpotente de classe ≤ 2 então para todos $x, y, z \in \Gamma$ tem-se $[[x,y],z] = 1$, reciprocamente se $[[x,y],z] = 1$ para todos os $x, y, z \in \Gamma$ então Γ é nilpotente de classe ≤ 2 (cf. **[Ha]**).

Consideremos as projeções $p_i : S^3 \times S^3 \times S^3 \longrightarrow S^3$ dadas por:

$$p_i(x_1, x_2, x_3) = x_i \qquad i = 1, 2, 3$$

AFIRMAÇÃO 1: $[[\bar{p}_2, \bar{p}_3], \bar{p}_1] \not\simeq 1 \in [S^3 \times S^3 \times S^3, S^3]$.

pois caso contrário, dados $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in [S^3 \times S^3 \times S^3, S^3]$ teríamos que:

$$[[\mathbf{f}, \mathbf{g}], \mathbf{h}] = [[\bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_3], \bar{\mathbf{p}}_1] \circ (\bar{\mathbf{h}} \times \bar{\mathbf{f}} \times \bar{\mathbf{g}}) = \mathbf{1} \circ (\bar{\mathbf{h}} \times \bar{\mathbf{f}} \times \bar{\mathbf{g}}) = \mathbf{1} \in [S^3 \times S^3 \times S^3, S^3]$$

donde pelo comentário acima segue que $[S^3 \times S^3 \times S^3, S^3] = \Gamma$ é um grupo nilpotente de classe ≤ 2 , mas pelo teorema de Whitehead segue que Γ é nilpotente de classe ≤ 3 com cadeia central, $\Gamma = \Gamma_0 \supseteq \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \Gamma_3 = \{1\}$ e $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_3} = \Gamma_2 \cong \pi_9(S^3) \cong Z_3$, donde Γ não tem classe ≤ 2, portanto a afirmação 1 está provada.

Consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & S^3 \times S^3 \times S^3 & \xrightarrow{[[\bar{p}_2,\bar{p}_3],\bar{p}_1]} & S^3 \\ & & \wedge \downarrow & & \uparrow \eta \\ S^9 \equiv_d & & S^3 \wedge S^3 \wedge S^3 & \xrightarrow{id} & S^3 \wedge S^3 \wedge S^3 \end{array}$$

diagrama 12

Pela afirmação 1 $\eta \not\simeq 1 \in \pi_9(S^3)$, como $\pi_9(S^3) \cong Z_3$ segue que η representa um gerador de $\pi_9(S^3)$.

AFIRMAÇÃO 2: $\eta = \omega \circ \mathbf{\Sigma^3}\omega$

pois, $\omega \circ \Sigma^3\omega(A \wedge B \wedge C) = \omega(A \wedge [\bar{C}, \bar{B}]) = [[\bar{B}, \bar{C}], \bar{A}] =$

$$= [[\bar{p}_2, \bar{p}_3], \bar{p}_1](A, B, C) = \eta \circ \wedge(A, B, C) = \eta(A \wedge B \wedge C)$$

Com isso temos o:

Teorema 5.2: $\omega \circ \Sigma^3\omega : S^3 \wedge S^3 \wedge S^3 \longrightarrow S^3$ representa um gerador de $\pi_9(S^3)$ e:

$$\omega \circ \Sigma^3\omega(A \wedge B \wedge C) = [[\bar{B}, \bar{C}], \bar{A}]$$

6. Classificação dos fibrados $\mathbf{E}_{\alpha\beta}$

Sabemos que os S^3-fibrados principais sobre E_n (espaço total do S^3-fibrado principal sobre S^7 classificado por n vezes o gerador de $\pi_6(S^3)$, c.f. capítulo 2) são classificados pelo conjunto das classes de homotopia de aplicações de E_n em $BS^3 \equiv_d HP^\infty$ denotado por $[E_n, BS^3]$, sabemos pelo que foi exposto anteriormente que o elemento de Hilton-Roitberg em $\pi_9(S^3)$ detecta se alguns fibrados sobre E_n são triviais. Provamos abaixo que na realidade tem-se $[E_n, BS^3] \cong \pi_9(S^3)$ para n=1 ou 7, os quais são justamente os índices que nos dão o fenômeno de não-cancelamento para os fibrados sobre S^7.

Primeiramente fixamos algumas notações de **[T2]**.

$\eta_2 : S^3 \longrightarrow S^2$ é a aplicação de Hopf e representa um gerador de $\pi_3(S^2) \cong Z$.

$\eta_k = \Sigma^{k-2}\eta_2 : S^{k-1} \longrightarrow S^k$ para $k > 2$ é gerador de $\pi_{k+1}(S^k) \cong Z_2$.

$\nu' \in \pi_6(S^3) \cong Z_{12} \cong Z_4 \oplus Z_3$ é gerador da componente 2-primária de $\pi_6(S^3)$, ou seja gerador de Z_4 na identificação acima.

Em [**T2**] encontramos também as seguintes fórmulas:

$$\Sigma(\eta_2 \circ \nu') = 0 \qquad (\textit{lemma } 5.7 \ \textit{p. } 43 \ \textit{de } [\mathbf{T2}]) \tag{36}$$

$$\eta_n^3 := \eta_n \circ \eta_{n+1} \circ \eta_{n+2} = 2\Sigma^{n-3}\nu' \qquad \textit{para } n \geq 3 \tag{37}$$

Como foi mencionado no capítulo 1, temos a seguinte estrutura celular para os espaços E_n (c.f. **[HR2]** ou **[JW]**):

$$E_n = (S^3 \cup_{n\omega} e^7) \cup_\gamma e^{10}$$

onde ω é o elemento de Blakers-Massey, **[BM]** , ou seja , um gerador de $\pi_6(S^3) \cong Z_{12}$ e γ é a aplicação de colagem da celula 10-dimensional de E_n.

Definimos $Q_n = (S^3 \cup_{n\omega} e^7)$ e denotamos por $j : (Q_n, *) \longrightarrow (Q_n, S^3)$ a inclusão.

Então pelo teorema 3.2 de **[HR2]** temos:

$$j_*\gamma = [\chi, \iota_3]$$

onde $\chi \in \pi_7(Q_n, S^3) \cong Z$ é a aplicação característica da 7-celula de Q_n e $[\chi, \iota_3]$ é o produto de Whitehead relativo de χ e ι_3.

Consideremos a seguinte sequência exata induzida da cofibração , $S^9 \xrightarrow{\gamma} Q_n \xrightarrow{i_n} E_n$:

$$\begin{array}{ccccccc} [E_n, BS^3] & \xleftarrow{q_n^*} & \pi_{10}(BS^3) & \xleftarrow{(\Sigma\gamma)^*} & [\Sigma Q_n, BS^3] & \xleftarrow{(\Sigma i_n)^*} & [\Sigma E_n, BS^3] \\ & & \| & & \| & & \| \\ & & \pi_9(S^3) & \xleftarrow{\gamma^*} & [Q_n, S^3] & \xleftarrow{i_n^*} & [E_n, S^3] \end{array}$$

onde $q_n : E_n \longrightarrow S^{10}$ é uma aplicação que leva Q_n em um ponto.

Se pudermos mostrar que $i_n^* : [E_n, S^3] \longrightarrow [Q_n, S^3]$ é sobrejetora, então o conjunto $[E_n, BS^3]$ é não trivial uma vez que $\pi_{10}(BS^3) \cong \pi_9(S^3) \cong Z_3$ .Desta forma nosso trabalho será examinar a aplicação $i_n^* : [E_n, S^3] \longrightarrow [Q_n, S^3]$.

Denotaremos por (a,b) o máximo divisor comum entre dois inteiros a e b. Seja $g : Q_n \longrightarrow S^7$ uma aplicação que leva S^3 em um ponto. Então temos o seguinte:

Lema 6.1: i) O conjunto $[Q_n, S^3]$ consiste dos seguintes elementos: uma extensão $\overline{\frac{12k}{(12,n)}\iota_3}$ de $\frac{12k}{(12,n)}\iota_3$ para todo inteiro k e $\omega\eta_6 g$.

ii) $[Q_n, BS^3] \cong Z_{(12,n)}$

Dem.: Na sequência exata induzida da cofibração, $S^6 \xrightarrow{n\omega} S^3 \xrightarrow{i} Q_n$, temos:

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_6(S^3) & \overset{(n\omega)^*}{\longleftarrow} & \pi_3(S^3) & \overset{i^*}{\longleftarrow} & [Q_n, S^3] & \overset{g^*}{\longleftarrow} & \pi_7(S^3) & \overset{(\Sigma n\omega)^*}{\longleftarrow} & \pi_4(S^3) \\ \| & & \| & & & & \| & & \| \\ Z_{12}\{\omega\} & & Z\{\iota_3\} & & & & Z_2\{\omega\eta_6\} & & Z_2\{\eta_3\} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_6(BS^3) & \overset{(n\omega)^*}{\longleftarrow} & \pi_3(BS^3) & \overset{i^*}{\longleftarrow} & [Q_n, BS^3] & \overset{g^*}{\longleftarrow} & \pi_7(BS^3) & \overset{(\Sigma n\omega)^*}{\longleftarrow} & \pi_4(BS^3) \\ & & \| & & & & \| & & \| \\ & & 0 & & & & Z_{12} & & Z \end{array}$$

onde a igualdade $Z_{12}\{\omega\} = \pi_6(S^3)$ significa que $\pi_6(S^3) \cong Z_{12}$ e é gerado por ω. As outras igualdades são interpretadas de forma semelhante.

Considerando a primeira sequência exata acima, temos que para cada $k \in Z$ existe uma extensão $\overline{\frac{12k}{(12,n)}\iota_3}$ desde que,

$$(n\omega)^*(\tfrac{12k}{(12,n)}\iota_3) = \tfrac{kn}{(12,n)}12\omega = 0$$

por outro lado, da definição de ν' e ω juntamente com a fórmula (36) acima segue que:

$$(\Sigma n\omega)^*\eta_3 = n(\Sigma\omega)^*\eta_3 = n(\eta_3 \circ \Sigma\omega) = 3n(\eta_3 \circ \Sigma\omega) = n\Sigma(\eta_2 \circ 3\omega) = n\Sigma(\eta_2 \circ \nu') = 0$$

Assim g^* é 1-1 e $\omega\eta_6 g$ é um elemento não nulo de $[Q_n, S^3]$. Isto prova i).

Na segunda sequência exata acima, como $(\Sigma n\omega)^* : Z \longrightarrow Z_{12}$ leva 1 em n então, $Ker(g^*) = Im((\Sigma n\omega)^*) = nZ_{12}$ e como g^* é sobrejetora temos $[Q_n, BS^3] \cong \frac{Z_{12}}{nZ_{12}} \cong$ $\cong Z_{(12,n)}$. Isto prova ii).

Lema 6.2: $\Sigma\gamma = (\Sigma i)_*(a(h \circ \Sigma^3 h) + b(\Sigma(\omega \circ \Sigma^3\omega))$, onde $h : S^7 \longrightarrow S^4$ é a aplicação de Hopf, a e b são inteiros.

Dem.: Consideremos o diagrama anti-comutativo (c.f. $[\mathbf{T_1}]$ $p.58$):

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_9(Q_n) & \overset{j_*}{\longrightarrow} & \pi_9(Q_n, S^3) \\ & & \downarrow \Sigma & & \downarrow \Sigma' \\ \pi_{10}(S^4) & \overset{(\Sigma i)_*}{\longrightarrow} & \pi_{10}(\Sigma Q_n) & \overset{(\Sigma j)_*}{\longrightarrow} & \pi_{10}(\Sigma Q_n, S^4) \end{array}$$

onde Σ' significa a suspensão relativa e a sequencia de baixo é exata.

Sabemos que $\pi_{10}(S^4) \cong Z_{24}\{h \circ \Sigma^3 h\} \oplus Z_3\{\Sigma(\omega \circ \Sigma^3\omega)\}$ (ver $[\mathbf{T_1}]$ ou $[\mathbf{E}]$). Como, $(\Sigma j)_*(\Sigma\gamma) = -\Sigma'(j_*(\gamma)) = -\Sigma'[\chi, \iota_3] = 0$, existem inteiros a e b tais que:

$$\Sigma\gamma = (\Sigma i)_*(a(h \circ \Sigma^3 h) + b\Sigma(\omega \circ \Sigma^3\omega))$$

isto completa a demonstração.

Teorema 6.1: $i_n^* : [E_n, S^3] \longrightarrow [Q_n, S^3]$ é sobrejetora se $n \not\equiv 0 \ mod\ 3$.

Dem.: É suficiente mostrar que $\gamma^* : [Q_n, S^3] \longrightarrow \pi_9(S^3)$ é trivial para $n \not\equiv 0 \ mod\ 3$.

Consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_9(S^3) & \xleftarrow{\gamma^*} & [Q_n, S^3] \\ \downarrow \Sigma & & \downarrow \Sigma \\ \pi_{10}(S^4) & \xleftarrow{(\Sigma\gamma)^*} & [\Sigma Q_n, S^4] \end{array}$$

Usando (37) e o fato de que $\eta_7 \circ \eta_8$ gera $\pi_9(S^7) \cong Z_2$ (c.f. $[\mathbf{T2}]$), temos:

$\omega\eta_6 g\gamma \in \omega\eta_6\pi_9(S^7) = \{\omega\eta_6 \circ (\eta_7 \circ \eta_8)\} = \{\omega\eta_6^3\} = \{\omega \circ 2\Sigma^3\nu'\} = \{\omega \circ 2\Sigma^3 3\omega\} = \{6(\omega \circ \Sigma^3\omega)\} = 0$.

Assumamos agora que exista algum $k \in Z$ tal que $\gamma^*(\overline{(\frac{12k}{(12,n)}\iota_3)} = \omega \circ \Sigma^3\omega \neq 0$, então pondo $c = \frac{12}{(12,n)}$ e usando os lemas 6.1 e 6.2,

$$\begin{aligned} \Sigma(\omega \circ \Sigma^3\omega) = \Sigma(\gamma^*\overline{ck\iota_3}) = \Sigma\overline{ck\iota_3} \circ (\Sigma i)_*(a(h \circ \Sigma^3 h) + b\Sigma(\omega \circ \Sigma^3\omega)) = \\ = (\Sigma\overline{ck\iota_3} \circ \Sigma i)_*(a(h \circ \Sigma^3 h) + b\Sigma(\omega \circ \Sigma^3\omega)) = \\ = (\Sigma(\overline{ck\iota_3} \circ i))_*(a(h \circ \Sigma^3 h) + b\Sigma(\omega \circ \Sigma^3\omega)) = \\ = (\Sigma ck\iota_3) \circ (a(h \circ \Sigma^3 h) + b\Sigma(\omega \circ \Sigma^3\omega)) = \\ = (ck\iota_4) \circ (a(h \circ \Sigma^3 h) + b\Sigma(\omega \circ \Sigma^3\omega)) = \\ = (ck\iota_4) \circ (a(h \circ \Sigma^3 h)) + (ck\iota_4) \circ (b\Sigma(\omega \circ \Sigma^3\omega)) = \\ = a((ck\iota_4) \circ (h \circ \Sigma^3 h)) + (ckb\iota_4) \circ (\Sigma(\omega \circ \Sigma^3\omega)) = \\ = a((ckh + \tfrac{ck(ck-1)}{2}[\iota_4, \iota_4]H(h)) \circ \Sigma^3 h) + ckb\Sigma(\omega \circ \Sigma^3\omega) \end{aligned}$$

logo:

$$\begin{aligned}(1-ckb)\Sigma(\omega\circ\Sigma^3\omega) &= a((ckh+\tfrac{ck(ck-1)}{2}(2h\pm\Sigma\omega))\circ\Sigma^3 h) = \\ &= a(((ck)^2h\pm\tfrac{ck(ck-1)}{2}\Sigma\omega)\circ\Sigma^3 h) = \\ &= a(((ck)^2h)\circ\Sigma^3 h\pm(\tfrac{ck(ck-1)}{2}\Sigma\omega)\circ\Sigma^3 h) = \\ &= a((ck)^2(h\circ\Sigma^3 h)\pm\tfrac{ck(ck-1)}{2}(\Sigma\omega\circ\Sigma^3 h) = \\ &= a(ck)^2(h\circ\Sigma^3 h)\pm\tfrac{ack(ck-1)}{2}(\Sigma\omega\circ\Sigma^3 h).\end{aligned}$$

Notamos que de $[\iota_4,\iota_4]=2h\pm\Sigma\omega$ segue que $2\Sigma h=\mp\Sigma^2\omega$. Como $\Sigma(\omega\circ\Sigma^2 h)$ e $\Sigma(\omega\circ\Sigma^3\omega)$ são elementos da componente 3-primária de $\pi_{10}(S^4)\cong Z_{24}\oplus Z_3$ (cf. **H2** e **T2**) temos que $\Sigma(\omega\circ\Sigma^2 h)=-2\Sigma\omega\circ\Sigma^3 h=-\Sigma\omega\circ 2\Sigma^3 h=\pm\Sigma(\omega\circ\Sigma^3\omega)=\mp 2\Sigma(\omega\circ\Sigma^3\omega)$.

Desta forma temos:

$(1-ckb)\Sigma(\omega\circ\Sigma^3\omega)=a(ck)^2(h\circ\Sigma^3 h)-ack(ck-1)\Sigma(\omega\circ\Sigma^3\omega)$.

Portanto:

$$(1-ckb+ack(ck-1))\Sigma(\omega\circ\Sigma^3\omega)=a(ck)^2(h\circ\Sigma^3 h)$$

isso implica:

$$a(ck)^2\equiv 0\ mod\ 3 \tag{38}$$

$$ck(b-a(ck-1))\equiv 1\ mod\ 3 \tag{39}$$

por hipótese $n\not\equiv 0\ mod\ 3$ e assim (12,n)=1,2 ou 4 donde $c=\frac{12}{(12,n)}=12,6$ ou 3 o que contradiz (39), assim $\gamma^*\equiv 0$, e a demonstração está completa.

Temos finalmente:

Teorema 6.2: i) Se $n\not\equiv 0\ mod\ 3$ então $[E_n,BS^3]\neq 0$.

ii) Se (12,n)=1 então $[E_n,BS^3]\cong\pi_9(S^3)$.

Dem.: Como antes considerando a sequência exata induzida da cofibração, $S^9\xrightarrow{\gamma}Q_n\overset{i_n}{\hookrightarrow}E_n$, e usando o lema 6.1 ii) , teremos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
[Q_n,BS^3] & \xleftarrow{i_n^*} & [E_n,BS^3] & \xleftarrow{q_n^*} & \pi_{10}(BS^3) & \xleftarrow{(\Sigma\gamma)^*} & [\Sigma Q_n,BS^3] & \xleftarrow{(\Sigma i_n)^*} & [\Sigma E_n,BS^3] \\
\| & & & & \| & & \| & & \| \\
Z_{(12,n)} & & & & \pi_9(S^3) & \xleftarrow{\gamma^*} & [Q_n,S^3] & \xleftarrow{i_n^*} & [E_n,S^3]
\end{array}$$

Pelo teorema 6.1 i_n^* é sobrejetora se $n \not\equiv 0 \ mod\ 3$, isto e o fato que $\pi_9(S^3) \cong Z_3$ implicam i). Por outro lado (12,n)=1 implica $n \not\equiv 0 \ mod\ 3$ e $[Q_n, BS^3] = 0$ isto implica que q_n^* é 1-1 e sobrejetora, assim ii) está provado.

O Teorema 6.2 ii) nos diz que existem apenas 3 S^3-fibrados sobre $E_1 \equiv Sp(2), E_5, E_7$ e E_{11} a menos de isomorfismo de fibrados.

EPÍLOGO

Finalizando, concluimos que o nosso método resolveu em essência, o problema proposto em **[HR2]**, ou seja, explicitar um difeomorfismo entre $E_{1,7}$ e $E_{7,1}$. Nós o fizemos módulo a explicitação das homotopias envolvidas nos difeomorfismos $\Phi_{23,14}$ e $\Phi_{14,23}$ dados na página 49.

Observamos, porém, que o potencial de nosso método se esgota nesse ponto, pois a natureza desse problema remanescente é totalmente diferente. As primeiras questões relacionadas a isso foram postas por Samelson **[Sa]** e não temos conhecimento de exemplos não triviais desta natureza na literatura. Por exemplo, uma questão preliminar à explicitação dos difeomorfismos Φ acima, seria produzir uma homotopia entre:

$$\begin{array}{ccc} S^3 \times S^3 & \longrightarrow & S^3 \\ (a,b) & \longmapsto & [a,b]^{12} \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{ccc} S^3 \times S^3 & \longrightarrow & S^3 \\ (a,b) & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Uma primeira aproximação deste tipo é feita em **[CR]** "Hopf Maps and Triality". Essa abordagem é de cunho mais geométrico.

BIBLIOGRAFIA

[**B**] Baues, H. J. *Commutator calculus and groups of homotopy classes*, London Mathematical Society, Lecture Notes Series 50, Cambridge University Press (1981).

[**BaM**] Barros, T. E. and Mukai, J. *A classification of some S^3-bundles*, J. Faculty of Science Shinshu Univ. 2 vol. 31 (1997).

[**BM**] Blakers, A. L. and Massey, W. S. *The homotopy groups of a triad*, Proc. Nat. Acad. Sci. 35 (1949), 322-328.

[**Ch**] Charlap, L. S. *Compact flat riemannian manifolds: I*, Ann. of Math. 81 (1965), 15-30.

[**CR**] Chaves, L. M. and Rigas, A. *Hopf maps and triality*, Pre-print.

[**CM**] Curtis, M. and Mislin, G. *H-spaces which are bundles over S^7*, J. Pure and Appl. Alg. 1 (1971), 27-40.

[**E**] Eckmann, B. *Zur homotopietheorie gefaserter räume*, Comm. Math. Helvetici 14 (1941) 141-192.

[**EK**] Eells, J. and Kuiper, N. H. *An invariant for certain smooth manifolds*, Ann. Math. Pura and Appl. (1962), 93-110.

[**Ha**] Hall, M. *The theory of groups*, The Macmillan Company, (1973).

[**H1**] Hilton, P. J. *Suspensions theorems and the generalized Hopf invariant*, Proc. London Math. Soc. v.3 1 (1951), 462-492.

[**H2**] Hilton, P. J. *A certain triple Whitehead product*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 50 (1954), 189-197.

[**H3**] Hilton, P. J. *On the homotopy groups of the union of spheres*, J. London Math. Soc. 30 (1955), 154-172.

[**H4**] Hilton, P. J. *Localization in group theory and homotopy theory and related topics* , Lecture Notes in Mathematics 418 (1974).

[**H5**] Hilton, P. J. *Nilpotente gruppen und nilpotente räume* , Lecture Notes in Mathematics 1053 (1984).

[**HMR1**] Hilton, P. , Mislin, G. and Roitberg, J. *Sphere bundles over sphere and non-cancellation phenomena*, J. London Math. Soc. 6 (1972), 15-23.

[**HMR2**] Hilton, P. , Mislin, G. and Roitberg, J. *H-spaces of rank 2 and non-cancellation phenomena*, Inv. Math. 16 (1972), 325-334.

[**HMR3**] Hilton, P. , Mislin, G. and Roitberg, J. *Note on a criterion of Scheerer*, Illinois J. Math. vol.17 (4) (1973) 680-688.

[**HMR4**] Hilton, P. , Mislin, G. and Roitberg, J. *Localization of Nilpotent groups and spaces*, Notas de Matematica, North Holland , (1975).

[**HR1**] Hilton, P. and Roitberg, J. *Note on principal S^3-bundles*, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 957-959.

[**HR2**] Hilton, P. and Roitberg, J. *On principal S^3-bundles over spheres*, Ann. of Math. 90 (1969), 91-107.

[**Hu**] Hu, S. T. *Homotopy theory*, Academic Press (1959).

[**H**] Husemoller, D. *Fibre bundles*, Springer-Verlag, (1975).

[**J1**] James, I. M. *On spaces with multiplication*, Pacific J. of Math. 7 (1957), 1083-1100.

[**J2**] James, I. M. *On H-spaces and their homotopy groups*, Quart. J. Math. Oxford (2), 11 (1960), 161-179.

[**JW**] James, I. M. and Whitehead, J. H. C. *The homotopy theory of sphere-bundles over spheres I , II*, Proc. london Math. Soc. 4 (1954), 196-218 ibid. 5 (1955), 148-166.

[**Mc**] McCarty Jr. G. S. *Products between homotopy groups and the J-morphism*, Quart. J. Math. Oxford (2), 15 (1964), 362-370.

[**M**] Milnor, J. *On manifolds homeomorphic to the 7-spheres*, Ann. of Math. 64 (1956), 399-405.

[**R1**] Rigas, A. *Some bundles of non-negative curvature*, Math. Ann. 232 (1978), 187-193.

[**R2**] Rigas, A. *S^3-bundles and exotic actions*, Bull. Soc. Math. France 112, (1984), 69-92.

[Sa] Samelson, H. *Groups and spaces of loops*, Comm. Math. Helvetici 28 (1954), 278-287.

[Sc] Scheerer, H. *On principal bundles over spheres*, Indag. Math. vol. 32, (1970), 353-355.

[St] Steenrod, N. *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, (1974).

[T1] Toda, H. *Generalized Whitehead products and homotopy groups of spheres*, J. Inst. Poly. Osaka City Univ. 3 (1952) , 43-82.

[T2] Toda, H. *Composition methods in homotopy groups of spheres*, Annals of Math. Studies 49, Princeton Univ. Press (1962).

[W1] Whitehead, G. W. *On the homotopy groups of spheres and rotation groups*, Ann. of Math. 43 (1942), 634-640.

[W2] Whitehead, G. W. *On Mappings into Group-like Spaces*,Comm. Math. Helvetici 28 (1954) 320-328.

[W3] Whitehead, G. W. *Elements of homotopy theory*, Springer-Verlag, (1978).

[Z] Zabrodsky, A. *The classification of simply-connected H-spaces with three cells I , II*, Math. Scand. 30 (1972) 193-210 ibid. 30 (1972) 211-222.