

Análise Matemática de um Modelo de Controle de Populações de Mosquitos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Anderson Luis Albuquerque de Araujo** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 21 de Fevereiro de 2008.



Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Luiz Boldrini .

Prof. Dr. Aloísio José Freiria Neves .

Profa. Dra. Gabriela Del Valle Planas .

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE em MATEMÁTICA**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Araujo, Anderson Luís Albuquerque de

Ar15a Análise matemática de um modelo de controle de populações de mosquitos / Anderson Luís Albuquerque de Araujo -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador: José Luís Boldrini

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Otimização matemática. 2. Teoria do controle. 3. Mosquito. 4. Equações diferenciais parciais. I. Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: A mathematical analysis of a model of control of mosquito populations.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Mathematical optimization. 2. Control theory. 3. Partial differential equations. 4. Mosquito.

Área de concentração: Análise matemática

Titulação: Mestre em Matemática

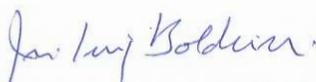
Banca examinadora: Prof. Dr. José Luís Boldrini (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Aloísio José Freiria Neves (IMECC-Unicamp)
Profa. Dra. Gabriela Del Valle Planas (ICMC – USP-São Carlos)

Data da defesa: 21/02/2008

Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 21 de fevereiro de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). JOSÉ LUÍZ BOLDRINI



Prof. (a). Dr (a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS



Prof. (a). Dr (a). ALOÍSIO JOSÉ FREIRIA NEVES

*Aos meus avós,
Artur e Alice.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por ter dado-me esta oportunidade e guiado-me nesta dissertação. Sem ele nada disso teria sentido.

À meus avós Alice Albuquerque e Artur Amorim dos Santos (falecido). À minha mãe Vanda de Albuquerque que sempre me incentivou e apoiou nesta caminhada e à minha namorada Fernanda.

À minha família que fiz em Campinas, Lino, Luis , João e Mateus eternos companheiros de república. Aos demais companheiros , galera do futebol, colegas de curso do IMECC/UNICAMP, dentre tantos outros que permanecerão em minha memória.

Sou grato aos professores e funcionários do IMECC-UNICAMP e do CCEN - UFPA, pela minha formação e por todo o serviço prestado. Em especial meu orientador, José Luiz Boldrini, pela paciência, dedicação, orientação excelente e por toda ajuda que me concedeu com o seu imenso conhecimento matemático. E também em especial à professora Cristina Lúcia Dias Vaz que me proporcionou estudar Análise e principalmente, pela sua contribuição decisiva para minha vinda aqui para a UNICAMP.

Finalmente, agradeço à FAPESP (proc. número 06/02262 – 9) pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, consideramos um problema de controle ótimo governado por uma equação diferencial parcial parabólica, que modela o crescimento e a difusão de uma população de mosquitos em uma certa região Ω do plano. Para este modelo relativamente simples, mostramos a existência de uma trajetória ótima a ser seguida por uma unidade volante de pulverização de inseticida, no sentido de minimizar um certo funcional que leva em conta a população total de mosquitos bem como os custos da operação. Caracterizamos também tais trajetórias (controles) ótimas pela derivação de suas respectivas condições de otimalidade de primeira ordem. Para isso, usamos o formalismo de Dubovitskii e Milyutin, o qual está baseado na separação de certos cones associados ao funcional a ser minimizado e às restrições do problema, incluindo a equação. Também analisamos o problema do ponto de vista do método de penalização.

ABSTRACT

In this work, we consider an optimal control problem governed by a parabolic partial differential equation, which models the growth and diffusion of a mosquito population in a certain region Ω of the Euclidean plane. For this relatively simple model, we show the existence of an optimal trajectory to be followed by an insecticide spraying device, in the sense of minimizing a certain functional that takes in consideration both the total mosquito population and the operational costs. We also characterize such optimal trajectories (controls) by deriving their respective first order optimal conditions. For this, we use the Dubovitskii and Milyutin formalism, which is based on the separation of certain cones associated to the functional to be minimized, and to the restrictions of the problem, including the equation. We also analyze the problem from the point of view of the penalization method.

ÍNDICE

Introdução	1
1 Notações e Resultados Preliminares	6
1.1 Notações e Resultados	6
2 O Formalismo de Dubovitskii e Milyutin	16
2.1 Definições e Resultados	17
2.2 Cálculo Explícito dos Cones	22
2.2.1 Algumas Ferramentas do Cálculo Diferencial	22
2.2.2 Direções de Descida	26
2.2.3 Direções Factíveis ou Admissíveis	27
2.2.4 Direções Tangentes	28
2.3 Cálculo dos Cones Duais	29
3 Problema de Controle Ótimo Sem Restrição no Controle	31
3.1 Formulação Matemática do Problema	31
3.2 Formulação Como Problema de Otimização e Resultados	33
3.2.1 Existência de Controle Ótimo	36
3.2.2 Cálculo dos Cones Associados	43

3.2.3	Aplicação do Formalismo de Dubovitskii e Milyutin	51
4	Problema de Controle Ótimo Com Restrição no Controle	55
4.1	Formulação Matemática do Problema	55
4.2	Formulação Como Problema de Otimização e Resultados	57
4.2.1	Existência de Controle Ótimo	57
4.2.2	Aplicação do Formalismo de Dubovitskii e Milyutin	58
4.3	Formulação de um Problema Auxiliar Usando o Método de Penalização . . .	63
4.3.1	Formulação Matemática do Problema Penalizado	63
4.4	Solução do Problema Penalizado	65
4.4.1	Existência de Controle Ótimo para o Problema Penalizado	65
4.4.2	Aplicação do Formalismo de Dubovitskii e Milyutin	67
5	Considerações Finais	78
	Bibliografia	79

Introdução

A proliferação de mosquitos em regiões habitadas é uma importante questão de saúde pública, uma vez que tais insetos são vetores de várias doenças infecciosas e consequentemente causam grandes transtornos à população humana dessas regiões. Dessa forma, o estudo de técnicas de controle de populações de mosquitos tem um papel na busca da eficiência no seu combate. Para isto, a compreensão adequada de modelos matemáticos que descrevem tais situações pode lançar alguma luz sobre procedimentos adequados a serem adotados. Neste trabalho, tivemos interesse em fazer uma análise matemática rigorosa de um problema de controle ótimo associado a uma equação diferencial parcial que modela o crescimento e a disseminação de uma população de mosquitos em uma certa região. Pretende-se controlar tal população através da aplicação de inseticida por uma unidade volante de pulverização.

Analizaremos um problema simplificado de controle ótimo distribuído correspondente a uma situação onde deseja-se encontrar uma trajetória ótima em um sentido que será esclarecido a seguir. As trajetórias admissíveis começam em um ponto fixado (normalizado para a origem) e cada um destes determina uma função suficientemente regular $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $0 < T < \infty$ um tempo final fixado. Elas são as possíveis trajetórias de um dispositivo que é assumido exercer continuamente um certo custo de inseticida durante o percurso, na tentativa de controlar uma população de mosquitos presente em uma região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Em termos matemáticos, queremos encontrar uma trajetória $\gamma^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, o requerido

controle ótimo tal que

$$F(\gamma^*) = \min\{F(\gamma) : \gamma \in \mathcal{A}\},$$

onde,

$$\mathcal{A} = \{\gamma \in (H^1(0, T))^2 : \gamma(0) = 0\}$$

é o conjunto dos controles admissíveis e

$$F(\gamma) = J(\gamma, u) = \mu_0 \int_0^T |\gamma(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt + \mu_2 \int_Q |u(x, t)|^2 dx dt.$$

Onde, $Q = \Omega \times (0, T)$; $\mu_0 \geq 0$, $\mu_1 > 0$ são constantes que estão associadas aos custos da pulverização e $\mu_2 > 0$ é uma constante associada ao peso que se dá à redução da população total de mosquitos, $u(x, t)$ é a densidade de mosquitos presentes na posição x no instante t ; e satisfaz

$$\begin{cases} \partial_t u - \alpha \Delta u = a u - b k(x - \gamma(t)) u & \text{em } Q, \\ (\partial/\partial n)(u) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

As principais hipóteses simplificadas para o modelo são as seguintes.

- (1) A população de mosquito cresce e difunde-se respectivamente com taxa de crescimento a e coeficiente de difusão $\alpha > 0$. Neste trabalho admitiremos que α é constante;
- (2) O inseticida mata imediatamente uma fração fixada da população com uma taxa que decresce com a distância do ponto de aplicação inicial; isto é matematicamente realizado assumindo que a taxa de mortalidade efetiva em um certo ponto x obtido por aplicação do inseticida, em uma posição $\gamma(t)$, é dada por $b k(x - \gamma(t))$, onde $0 \leq k(\cdot) \leq 1$ é uma função C^1 de suporte compacto e a constante $b > 0$ é a taxa máxima do inseticida induzir mortalidade;
- (3) Por simplicidade, no modelo acima supõe-se que a população não pode abandonar a região Ω ($\partial/\partial n$ representa a derivada normal exterior na fronteira $\partial\Omega$ de Ω);
- (4) Também por simplicidade, supõe-se que não existem obstáculos para as possíveis trajetórias.

Observamos que as hipóteses anteriores poderiam ser relaxadas de várias maneiras; comentaremos sobre isto ao final deste trabalho.

Observamos que existem muitos outros trabalhos que consideram modelos matemáticos para a evolução de populações de mosquito. Alguns destes trabalhos analisam modelos mais detalhados do que aquele aqui considerado, no sentido de que eles consideram as interações entre várias subpopulações (fase aquática, a fase adulta, etc), agentes patógenos e outros. Exemplos de tais trabalhos são Atkinson *et al.* [3], Maidana *et al.* [16] e Tumwiine *et al.* [23]. Existem também trabalhos que consideram casos de populações estruturadas, tais como, Norman *et al.* [20]. Entretanto, a maioria destes trabalhos não levam em conta a distribuição espacial das populações envolvidas. Exceções a esta situação são os trabalhos de Maidana e Yang [15] e Trana e Raffy [22] os quais consideram entretanto apenas a análise de soluções do tipo onda viajante.

Para o problema anterior, provaremos a existência de uma solução ótima e também a caracterizaremos por sua correspondente condição de otimalidade de primeira ordem. Esta caracterização será dada usando a metodologia de Dubovitskii e Milyutin(veja por exemplo De Aguiar [6], Girsanov [10] e Lopes [18]) e será descrita a seguir. Denotando por $\gamma^*(.)$ o controle ótimo, e por $u^*(.,.)$ e $p^*(.,.)$ respectivamente os correspondentes estado ótimo e estado adjunto, as condições de otimalidade são:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u^* - \alpha \Delta u^* = a u^* - b k(x - \gamma^*) u^* & \text{em } Q, \\ (\partial/\partial n)(u^*) = 0 & \text{em } S, \\ u^*(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \\ \\ -\partial_t p^* - \alpha \Delta p^* = a p^* - b k(x - \gamma^*) p^* - u^* & \text{em } Q, \\ (\partial/\partial n)(p^*) = 0 & \text{em } S, \\ p^*(T) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \\ -\mu_1 \gamma^{*''} + \mu_0 \gamma^* - \mu_2 b \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) dx = 0 & \text{em } (0, T), \\ \gamma^*(0) = 0, \quad \gamma^{*'}(T) = 0. & \end{array} \right.$$

A metodologia de Dubovitskii e Milyutin é uma ferramenta de análise de problemas extremos (máximos e mínimos). Ela foi originalmente desenvolvida para aplicação em programação matemática, e mais tarde se mostrou muito útil para a teoria de controle ótimo

de equações diferenciais ordinárias. Uma boa exposição do uso deste formalismo em outras áreas pode ser encontrada em Girsanov [10]. Recentemente este formalismo tem sido aplicado, de uma forma promissora, para problemas de controle distribuído. Por exemplo, os seguintes artigos usam o formalismo nesse sentido: Boldrini *et al.* [5], Aguiar *et al.* [7], Gayte *et al.* [9], Magalhães *et al.* [19] e Lopes [18].

A idéia básica que fundamenta o formalismo é a seguinte: Em um ponto de minimização local, o conjunto de descida associado ao funcional deve ser disjunto da interseção das restrições do problema. Então, os correspondentes cones desses conjuntos neste ponto ótimo devem ter a mesma propriedade. Portanto, o Teorema de Hahn-Banach e argumentos adicionais implicam que existem elementos nos cones duais associados, não todos nulos, cuja soma é nula. Esta condição algébrica dá as equações de Euler- Lagrange para o problema em questão, e a grande dificuldade é quando podemos identificar tais cones e cones duais.

Neste trabalho também consideraremos uma modificação do problema anteriormente descrito. Esta modificação acrescenta uma restrição no conjunto dos controles admissíveis que está associada a uma limitação dos custos operacionais. Neste caso o conjunto dos controles admissíveis será dado por

$$\mathcal{B} = \{\gamma \in (H^1(0, T))^2 : \gamma(0) = 0 \text{ e } \|\gamma\|_{(H^1(0, T))^2} \leq R_0\},$$

onde $R_0 > 0$ é uma constante.

Para este problema modificado, também provaremos existência de controle ótimo e obteremos as condições de otimalidade dada pela metodologia de Dubovitskii e Milyutin.

Em seguida, utilizaremos o método da penalização para caracterizar uma condição necessária para o controle ótimo desse novo problema.

Obteremos o seguinte resultado. Existe $\bar{\gamma}^*(\cdot) \in \mathcal{B}$ um controle ótimo deste problema, $\bar{u}^*(\cdot, \cdot)$ e $\bar{p}^*(\cdot, \cdot)$ respectivamente os correspondentes estado ótimo e estado adjunto associado.

Daí, obteremos as seguintes condições de otimalidade de primeira ordem:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \partial_t \bar{u}^* - \alpha \Delta \bar{u}^* = a \bar{u}^* - b k(x - \bar{\gamma}^*) \bar{u}^* & \text{em } Q, \\
 (\partial/\partial n)(\bar{u}^*) = 0 & \text{em } S, \\
 \bar{u}^*(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \\
 \\
 -\partial_t \bar{p}^* - \alpha \Delta \bar{p}^* = a \bar{p}^* - b k(x - \bar{\gamma}^*) \bar{p}^* - \bar{u}^* & \text{em } Q, \\
 (\partial/\partial n)(\bar{p}^*) = 0 & \text{em } S, \\
 \bar{p}^*(T) = 0 & \text{em } \Omega, \\
 \\
 \mu_0 \int_0^T \bar{\gamma}^* \cdot (\gamma - \bar{\gamma}^*) dt + \mu_1 \int_0^T \bar{\gamma}^{*'} \cdot (\gamma' - \bar{\gamma}^{*}') dt - \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} \bar{u}^* \bar{p}^* \nabla k(x - \bar{\gamma}^*) \cdot (\gamma - \bar{\gamma}^*) dx dt \geq 0, \\
 \text{para todo } \gamma \in \mathcal{B}, \text{ e mais, existe uma função } \tau \in \mathcal{A} \text{ tal que} \\
 -\mu_1 \bar{\gamma}^{*''} + \mu_0 \bar{\gamma}^* - \mu_2 b \int_{\Omega} \bar{p}^* \bar{u}^* \nabla k(x - \bar{\gamma}^*) dx - \tau''(t) = 0 \text{ em } (0, T), \\
 \bar{\gamma}^*(0) = 0, \\
 \bar{\gamma}^{*'}(T) = -\frac{\tau'(T)}{\mu_1}.
 \end{array} \right.$$

Para abordar os modelos propostos, estruturamos este trabalho da seguinte maneira:

No Capítulo 1 apresentaremos as notações e os espaços que serão usados; destacaremos alguns resultados de imersão do tipo Sobolev e da teoria L^p das equações diferenciais parabólicas lineares (Ladyzhenskaya [11], Capítulo IV).

No Capítulo 2 apresentaremos os conceitos e resultados preliminares para a utilização do formalismo de Dubovitskii e Milyutin apresentados por Girsanov em [10].

No Capítulo 3 procuraremos uma trajetória ótima que ao mesmo tempo reduza a população de mosquitos e os custos operacionais do dispositivo que aplica o inseticida.

No Capítulo 4 procuraremos uma trajetória ótima para o problema modificado com restrição no controle descrito anteriormente.

CAPÍTULO 1

Notações e Resultados Preliminares

Nosso objetivo neste capítulo é relembrar definições e resultados importantes para uma melhor compreensão do texto. Em geral, não apresentaremos as demonstrações, e em alguns casos menos conhecidos, indicaremos as devidas referências bibliográficas.

1.1 Notações e Resultados

Ao longo deste trabalho usaremos coordenadas cartesianas e as seguintes notações:

\mathbb{R}^n representará o espaço euclidiano n -dimensional.

Ω é um aberto limitado do \mathbb{R}^n com medida de Lebesgue $|\Omega|$ e fronteira $\partial\Omega$.

Q representará o cilindro $\Omega \times (0, T)$.

$S = \partial\Omega \times (0, T)$ representará a superfície lateral do cilindro Q .

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{i=1}^n$ representará o operador gradiente.

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ representará o operador Laplaciano.

$|u| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ e $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}$ é norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$ e do vetor gradiente.

Necessitaremos também dos seguintes espaços funcionais:

$C^m(\Omega)$ é o espaço das funções com todas as derivadas de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m inteiro não-negativo ou $m = \infty$). Denotaremos $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

$C_0^m(\Omega)$ é o espaço das funções com todas as derivadas de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m inteiro positivo ou $m = \infty$) e tanto a função quanto todas as suas derivadas possuindo suporte compacto em Ω .

$\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço vetorial das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω .

$L^q(\Omega)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $u(\cdot)$ de Ω em \mathbb{R} mensuráveis (no sentido de Lebesgue) e q -integráveis ($q \geq 1$) cuja norma é dada por

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1 \leq q < \infty)$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| \quad (q = \infty).$$

$W_q^p(\Omega)$ é o espaço de Banach (com p inteiro) das funções $u(\cdot)$ em $L^q(\Omega)$ com derivadas generalizadas de ordem $\leq p$ que pertencem a $L^q(\Omega)$ e cuja norma é dada por

$$\|u\|_{W_q^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq p} \|D^\alpha u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Para $\Omega = (0, T)$, temos o espaço de Hilbert $H^1(0, T) = W_2^1(0, T)$ definido por

$$H^1(0, T) = \{u \in L_2(0, T); u' \in L_2(0, T)\},$$

com a norma definida por

$$\|u\|_{H^1(0, T)} = \left(\int_0^T |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T |u'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

Para maiores informações e resultados, veja Adams [1] e Brezis [4].

Frequentemente, precisaremos dos espaços de funções vetoriais com n componentes em algum dos espaços enunciados acima. Consideraremos esses espaços, quando normados, com a norma do produto usual. Em particular, usaremos as notações:

$$(H^1(0, T))^2 = H^1(0, T) \times H^1(0, T)$$

e

$$(C([0, T]))^2 = C([0, T]) \times C([0, T]).$$

Também vamos supor que estes espaços produtos são equipados com a norma do produto usual dada por

$$\|(\gamma_1, \gamma_2)\|_{(H^1(0, T))^2} = \left(\|\gamma_1\|_{H^1(0, T)}^2 + \|\gamma_2\|_{H^1(0, T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|(\gamma_1, \gamma_2)\|_{(C([0, T]))^2} = \|\gamma_1\|_{C([0, T])} + \|\gamma_2\|_{C([0, T])}.$$

Para funções dependendo de variáveis espaciais e temporais usaremos os seguintes espaços funcionais, cujas notações e definições podem ser encontradas em Ladyzhenskaya [11].

$L^{q,r}(Q)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $u(x, t)$ de Q em \mathbb{R} mensuráveis (no sentido de Lebesgue) cuja norma é dada por

$$\|u\|_{q,r,Q} = \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega} |u(x, t)|^q dx \right)^{r/q} dt \right)^{1/r}, \quad (q, r \geq 1).$$

Para $q = r$ usaremos a notação $L^{q,q}(Q) = L^q(Q)$.

$W_q^{2,1}(Q)$ o espaço de Banach ($q \geq 1$) das funções $u(\cdot, \cdot) \in L^q(Q)$ com derivadas generalizadas $D_x u, D_x^2 u, D_t u$ em $L^q(Q)$. Consideraremos em $W_q^{2,1}(Q)$ a norma definida por

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} = \|u\|_{L^q(Q)} + \|D_x u\|_{L^q(Q)} + \|D_x^2 u\|_{L^q(Q)} + \|D_t u\|_{L^q(Q)}.$$

$W_q^0(\Omega)$ representa o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W_q^p(\Omega)$.

Neste trabalho, também faremos uso dos espaços de Sobolev $H^s(\Omega)$, algumas vezes conhecidos como espaços de Sobolev fracionários, onde, s é um número real e Ω é um aberto bem regular de \mathbb{R}^2 . Medeiros [14], desenvolveu um breve estudo sobre os espaços $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$, via transformada de Fourier. Enquanto que, Lions e Magenes [13], desenvolveu um estudo mais geral sobre tais espaços, no caso $s \in \mathbb{R}$, aplicando a teoria de interpolação. As notações e resultados que usaremos sobre os espaços $H^s(\Omega)$ podem ser encontrados em Lions e Magenes [13].

Além disso, usaremos os seguintes espaços funcionais abstratos.

Seja B um espaço de Banach qualquer com norma $\|\cdot\|_B$ e $0 < T < \infty$. $L^p(0, T; B)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $u : [0, T] \rightarrow B$, mensuráveis tal que a função $t \in [0, T] \rightarrow \|u(t)\|_B$ (definidas q.t.p) é p -integrável ($1 \leq p \leq \infty$) com norma dada por

$$\|u\|_{L^p(0, T; B)} = \left(\int_0^T \|u(x)\|_B^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; B)} = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_B \quad (p = \infty).$$

$C([0, T]; B)$ é o espaço de Banach das funções $u : [0, T] \rightarrow B$, contínuas (com relação a topologia forte de B).

$W^{m, p}(0, T; B)$ é o espaço das (classes de) funções em $L^p(0, T; B)$ cujas derivadas generalizadas de ordem $\leq m$ também pertencem a $L^p(0, T; B)$.

$\mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$ é o espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em $L^2(\Omega)$. A derivada $df/dt = f'$ de uma distribuição f é definida por $(f')(\varphi) = -f(\varphi')$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$.

Também apresentaremos alguns resultados clássicos de imersão do tipo Sobolev e Aubin - Lions e ainda alguns resultados de análise funcional que serão importantes para o desenvolvimento do trabalho. Uma referência bibliográfica padrão sobre espaços de Sobolev é Adams [1] (veja também Medeiros e Miranda [17]).

Lema 1.1.1. *Seja $(0, T)$ um intervalo limitado da reta. A imersão $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$ é contínua e compacta.*

Demonstração: Veja Brezis [4], p. 129.

Lema 1.1.2. *Seja Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 , $r \geq 1$ e $p < \infty$. Se j e m são inteiros tais que $0 \leq j < m$ e*

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{r} + \frac{j}{n} - \frac{m}{n}$$

então a seguinte imersão:

$$W_r^m(\Omega) \rightarrow W_p^j(\Omega)$$

é compacta.

Demonstração: Veja Adams [1], p. 144, Teorema 6.2.

O seguinte resultado é conhecido como *Imersão de Aubin-Lions*. Essa versão foi apresentada por J. Simon em [21], Corolário 4, p.85.

Lema 1.1.3. *Sejam X , B e Y espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ com imersões contínuas e $X \hookrightarrow B$ compacta, $0 < T < \infty$. Têm-se as seguintes imersões compactas:*

$$(i) L^q(0, T; X) \cap \left\{ \phi; \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^1(0, T; Y) \right\} \rightarrow L^q(0, T; B) \quad 1 \leq q \leq \infty$$

$$(ii) L^\infty(0, T; X) \cap \left\{ \phi; \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^r(0, T; Y) \right\} \rightarrow C([0, T]; B) \quad 1 < r \leq \infty.$$

O próximo resultado é um caso particular do Lema 3.3 em Ladyzenskaja ([11]; p.80) com $l = 1$ e $r = s = 0$.

Lema 1.1.4. *Seja Ω um domínio do \mathbb{R}^n . Suponhamos que a fronteira $\partial\Omega$ tem a propriedade do cone. Então para qualquer função $u \in W_q^{2,1}(Q)$ valem as seguintes desigualdades:*

$$(i) \|u\|_{L^p(Q)} \leq M \|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} \text{ com } p \geq q \text{ e } 2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) (n+2) \geq 0,$$

$$(ii) |u|_Q^{(r)} \leq M \|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} \text{ com } p > \frac{n+2}{2} \text{ e } 0 \leq \tau = 2 - \left(\frac{n+2}{q} \right),$$

com M uma constante que depende de p, q, n e Ω .

Observação 1.1.5. *Para $q > n+2$ no Lema 1.1.4, temos que as derivadas da função $u \in W_q^{2,1}(Q)$ com relação a x_i também satisfazem uma condição de Hölder em x e t e a desigualdade *ii*).*

Em particular estamos interessados nos casos $n = 2, 3$ e vamos reescrever o Lema 1.1.4 como segue:

Lema 1.1.6. *Seja Ω um domínio do \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$. Suponhamos que a fronteira $\partial\Omega$ tem a propriedade do cone. Então a imersão $W_q^{2,1}(Q) \rightarrow L^p(Q)$ é contínua e existe uma constante M que depende de p, q e Ω tal que*

$$\|u\|_{L^p(Q)} \leq M \|u\|_{W_q^{2,1}(Q)},$$

com p dado, para $n = 2$, por

$$p = \begin{cases} \infty & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{1}{2} < 0 \\ \forall p \geq 1 & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = 0 \\ \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)^{-1} & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

e com p dado, para $n = 3$, por

$$p = \begin{cases} \infty & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{5} < 0 \\ \forall p \geq 1 & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{5} = 0 \\ \left(\frac{1}{q} - \frac{2}{5}\right)^{-1} & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{5} > 0. \end{cases}$$

Observação 1.1.7. Temos ainda as seguintes imersões compactas (veja Lions [12], p.13).

A injeção $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^p(Q)$ é compacta para $p < 10$ se $n = 3$, qualquer que seja p finito se $n = 2$. ■

No que segue, $H^m(\Omega)$ é o espaço de Sobolev usual, m um inteiro não negativo (veja Evans [8], p.288).

Teorema 1.1.8. Suponhamos que Ω é aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^{m+3} e m é um inteiro não-negativo. Suponhamos também que $u \in L^2(0, T; H^{m+2}(\Omega))$, com $u' \in L^2(0, T; H^m(\Omega))$. Então

(i) $u \in C([0, T]; H^{m+1}(\Omega))$,

(ii) Além disso, temos a estimativa

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^{m+1}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(0, T; H^{m+2}(\Omega))} + \|(\partial/\partial t)u\|_{L^2(0, T; H^m(\Omega))}),$$

a constante C dependendo unicamente de T , Ω e m .

O próximo resultado é uma versão do Teorema do Traço em $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$ (veja Lions e Magenes [13], p.41).

Teorema 1.1.9. *Assuma que Ω é um aberto limitado do \mathbb{R}^n com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{\mu+1}$. Então, a aplicação*

$$u \rightarrow \left\{ \frac{\partial^j u}{\partial v^j} \Big|_{\partial\Omega}, j = 0, 1, \dots, \mu \right\} \quad (1.2)$$

de $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow (\mathcal{D}(\partial\Omega))^m$ estende-se por continuidade para uma aplicação linear e contínua

$$u \rightarrow \left\{ \frac{\partial^j u}{\partial v^j} \Big|_{\partial\Omega}, j = 0, 1, \dots, \mu \right\} \text{ de } H^s(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{\mu} H^{s-j-1/2}(\partial\Omega).$$

onde μ é o maior inteiro tal que

$$\mu < s - \frac{1}{2}.$$

Também apresentaremos um resultado de compacidade para os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$ (Lions e Magenes [13], p.99).

Teorema 1.1.10. *Assuma que Ω é um aberto limitado do \mathbb{R}^n com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^μ , com μ o menor inteiro positivo tal que $\mu > s$ e $s \in \mathbb{R}$. Então, para cada $\epsilon > 0$, a inclusão*

$$H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\epsilon}(\Omega)$$

é compacta.

O seguinte resultado é um caso particular, simplificado para as necessidades deste trabalho, da teoria L^p (clássica) para equações diferenciais parciais parabólicas lineares com condições de Neumann na fronteira (Ladyzenskaja [11]; Teorema 9.1, p.341, o qual vale para condições de Dirichelet, devidamente modificado pela observação ao final da seção 9 do Capítulo 4 para a condição de Neumann) .

Consideremos, então, o seguinte problema:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \alpha \Delta u(x, t) + a(x, t)u(x, t) = f(x, t) & \text{em } Q \\ (\partial/\partial\eta)(u) = 0 & \text{em } S \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

Proposição 1.1.11. *Sejam Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 , $q > 1$ e $\alpha > 0$ uma constante. Suponha que:*

a) $f \in L^q(Q)$.

b) $u_0 \in W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)$ com $q \neq 3$, satisfazendo no caso em que $q > 3$ a condição suplementar de compatibilidade $(\partial/\partial\eta)(u_0) = 0$ em $\partial\Omega$.

c) $a \in L^s(Q)$ com

$$s = \begin{cases} \max\left(q, \frac{n+2}{2}\right) & \text{para } q \neq \frac{n+2}{2} \\ \frac{n+2}{2} + \varepsilon & \text{para } q = \frac{n+2}{2}, \end{cases}$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Então, existe uma única solução $u \in W_q^{2,1}(Q)$ do problema (1.3) satisfazendo a seguinte estimativa:

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq M\left(\|f\|_{L^q(Q)} + \|u_0\|_{W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)}\right)$$

com M uma constante que depende apenas de T, q, s e Ω .

O próximo resultado será importante no estudo dos problemas de controle ótimo, na obtenção das condições necessárias de otimalidade requeridas. Antes de enunciarmos o resultado, recordemos algumas definições. Seja X um espaço topológico. Uma função $J : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ é dita *semicontínua inferiormente* se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x \in X; J \leq \lambda\}$$

é fechado. Dizemos que J é uma *função convexa* se

$$J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t \in (0, 1).$$

Proposição 1.1.12. *Seja X um espaço de Banach e $J : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função convexa, semicontínua inferiormente (na topologia forte). Então J é semicontínua inferiormente na topologia fraca. Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente, então*

$$J(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n).$$

Demonstração: Veja Brezis [4], p.38.

Lema 1.1.13. *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência real limitada, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e monótona não-decrescente. Então,*

$$\varphi(\liminf x_n) = \liminf \varphi(x_n).$$

Demonstração: Definamos

$$a_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\},$$

$$A_n = \inf\{\varphi(x_n), \varphi(x_{n+1}), \dots\}.$$

Notemos que estes números são finitos, pois (x_n) é limitada e φ é monótona.

Agora, temos

$$A_n \leq \varphi(x_m), \quad \forall m \geq n.$$

Por outro lado, existe uma subsequência (x_{n_k}) de $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, tal que,

$$x_{n_k} \xrightarrow{k \nearrow \infty} a_n.$$

Mas, $A_n \leq \varphi(x_{n_k})$. Logo, usando a continuidade de φ , segue por passagem ao limite que

$$A_n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_{n_k}) = \varphi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = \varphi(a_n).$$

Portanto,

$$\inf\{\varphi(x_n), \varphi(x_{n+1}), \dots\} \leq \varphi(\inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}).$$

Agora, como φ é monótona e $a_n \leq x_m$, $\forall m \geq n$, vem

$$\varphi(a_n) \leq \varphi(x_m), \quad \forall m \geq n.$$

Portanto,

$$\varphi(a_n) \leq A_n.$$

Assim, concluímos que

$$\varphi(a_n) = A_n. \tag{1.4}$$

Agora, tomando o supremo em n e usando (1.4), obtemos

$$\sup_n A_n = \sup_n \varphi(a_n). \quad (1.5)$$

Por definição, temos que a sequência (a_n) é monótona não-decrescente e limitada superiormente, portanto, a mesma é convergente, seja então;

$$a = \lim a_n = \sup_n a_n.$$

Mas, como φ é uma função monótona, vem que $\varphi(a_n)$ é uma sequência monótona não-decrescente e limitada superiormente, portanto, convergente. Tome então,

$$\beta = \lim_n \varphi(a_n) = \sup_n \varphi(a_n).$$

Agora, usando a continuidade de φ , obtemos

$$\beta = \lim_n \varphi(a_n) = \varphi(\lim_n a_n) = \varphi(a) = \varphi(\sup_n a_n).$$

Portanto, juntando os dois últimos resultados, obtemos

$$\sup_n \varphi(a_n) = \varphi(\sup_n a_n). \quad (1.6)$$

Agora, substituindo (1.6) em (1.5), obtemos

$$\sup_n A_n = \sup_n \varphi(a_n) = \varphi(\sup_n a_n),$$

ou seja,

$$\sup_n \inf\{\varphi(x_n), \varphi(x_{n+1}), \dots\} = \varphi(\sup_n \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}).$$

Mais isso, é justamente a definição de limite inferior, isto é,

$$\lim_n \inf \varphi(x_n) = \varphi(\lim_n \inf x_n).$$

Isto conclui a demonstração do lema. ■

CAPÍTULO 2

O Formalismo de Dubovitskii e Milyutin

Neste capítulo, para facilitar as referências apresentaremos as definições e os principais resultados que constituem o método que usaremos para obter sistemas de otimalidade dos problemas de otimização. Tal técnica é conhecida como formalismo de Dubovitskii e Milyutin, veja Girsanov [10].

Vamos considerar inicialmente o problema de minizar um funcional definido sobre um aberto de um espaço de Banach, sujeito a restrições com interior vazio e não vazio (as chamadas restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente); em geral as restrições de igualdade aparecem como núcleos de operadores não lineares. Mais especificamente, sejam X e Y espaços de Banach, $M : X \rightarrow Y$ um operador, $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional e consideremos o seguinte problema de otimização:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(x) \\ \text{sujeito a} \\ x \in \mathcal{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathcal{Q}_i \end{array} \right. \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{Q}_i, i = 1, \dots, n$, são ditas restrições de desigualdades ($\text{int}\mathcal{Q}_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n$) e

$\mathcal{Q}_{n+1} = \{x \in X/M(x) = 0\}$ é uma restrição de igualdade ($\text{int}\mathcal{Q}_{n+1} = \emptyset$).

No trabalho de Dubovitskii e Milyutin as condições necessárias de otimalidade local em um ponto $x_0 \in X$ foram obtidas a partir da separação das aproximações cônicas aos conjuntos de restrições $Q_i, i = 1, \dots, n + 1$ e do conjunto $\{x \in X/J(x) < J(x_0)\}$. Neste estudo as definições foram feitas de tal forma que se os cones aproximantes fossem não vazios e convexos, então x_0 seria mínimo local do Problema (2.1) se, e somente se, não existe um ponto comum a todos os cones aproximantes. Os resultados obtidos por Dubovitskii e Milyutin provam que esta propriedade geométrica da otimalidade local do ponto x_0 pode ser equivalentemente descrita em termos das formas lineares dos correspondentes cones duais.

Assim, neste capítulo daremos algumas definições preliminares, seguidas de alguns resultados sobre os cones de direções de descida do funcional objetivo, de direções factíveis e de direções tangentes. Em seguida, apresentaremos o teorema de Dubovitskii e Milyutin, que nada mais é do que a regra dos multiplicadores de Lagrange em uma versão funcional. Para a aplicação prática deste teorema, daremos alguns resultados que nos permitam calcular os cones aproximantes e seus duais. Todos os resultados foram apresentados em sua maioria por Girsanov em [10] e Alexéev, Tikhomirov e Fomine [2].

2.1 Definições e Resultados

Nesta seção, apresentaremos os principais resultados que fundamentam a teoria de Dubovitskii e Milyutin.

Definição 2.1.1. Dizemos que um vetor h é uma **direção de descida** do funcional $J(\cdot)$ no ponto x_0 se existe uma vizinhança U de h , $\epsilon_0 > 0$ e um número estritamente negativo $\alpha = \alpha(J, x_0, h)$ tal que, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ e qualquer $\bar{h} \in U$,

$$J(x_0 + \epsilon\bar{h}) \leq J(x_0) + \epsilon\alpha.$$

Definição 2.1.2. Dizemos que um funcional $J(\cdot)$ é **regularmente de descida** em x_0 se suas direções de descida em x_0 formam um conjunto convexo.

Definição 2.1.3. Sendo Q_i dado por restrições de desigualdade, dizemos que o vetor h é uma **direção factível** para Q_i no ponto $x_0 \in Q_i$ se existe uma vizinhança U de h e $\epsilon_0 > 0$

tal que, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ e qualquer $\bar{h} \in U$, os vetores

$$x_0 + \epsilon \bar{h} \in Q_i.$$

Definição 2.1.4. Dizemos que uma restrição de desigualdade Q_i é **regular** no ponto $x_0 \in Q_i$ se o conjunto das direções factíveis a Q_i em x_0 é convexo.

Observação 2.1.5. Se Q_i for dado por restrição de igualdade, então a definição anterior não faz sentido. Neste caso, precisamos de uma outra definição para as direções factíveis.

Definição 2.1.6. Dizemos que h é um vetor **tangente unilateral** ou simplesmente **direção tangente** a Q_i no ponto $x_0 \in Q_i$ se existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para qualquer $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ existe um ponto $x(\epsilon) \in Q_i$ tal que

$$x(\epsilon) = x_0 + \epsilon h + r(\epsilon) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\epsilon} r(\epsilon) \in U,$$

para qualquer $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e qualquer vizinhança U de zero, ou equivalentemente

$$\|r(\epsilon)\| = o(\epsilon).$$

Definição 2.1.7. Uma restrição de igualdade Q_i é **regular** no ponto x_0 se o conjunto de suas direções tangentes a Q_i em x_0 é convexo.

Observação 2.1.8. Quando o conjunto das direções tangentes é um subespaço vetorial ele é chamado **espaço tangente**.

Definição 2.1.9. Dizemos que um conjunto K é um **cone** com vértice em zero se $\lambda x \in K$ para qualquer $\lambda > 0$ e $x \in K$.

Proposição 2.1.10. (i) As direções de descida geram um cone aberto com vértice em zero.

(ii) As direções factíveis geram um cone aberto com vértice em zero.

(iii) As direções tangentes geram um cone com vértice em zero.

Definição 2.1.11. Se K é um cone em X , seu cone dual denotado por K^* é dado por

$$K^* = \{\varphi \in X' / \varphi(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in K\}.$$

Observação 2.1.12. *O uso da notação K^* para o cone dual não parece adequado, pois se $K = X$, então $K^* = \{0\} \neq X^*$ (X^* é o dual algébrico de X). Contudo, isto é usual na literatura, não devendo, portanto, causar confusão.*

Agora apresentaremos o resultado principal desta secção. Mais antes, enunciaremos alguns resultados auxiliares, sem demonstração, que serão úteis para provar o teorema de Dubovitskii e Milyutin. Queremos deixar claro que todos esses resultados foram retirados de Girsanov [10], e resolvemos demonstrá-lo neste trabalho por uma questão didática.

Definição 2.1.13. *Sejam A e B dois conjuntos de X . Dizemos que um funcional linear e contínuo $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, não-nulo separa A e B , se existe um número real α tal que, $f(x) \geq \alpha$, $\forall x \in A$ e $f(x) \leq \alpha$, $\forall x \in B$. O hiperplano fechado $H = \{x | f(x) = \alpha\}$ é então chamado de hiperplano separador para A e B .*

Lema 2.1.14. *Quaisquer dois conjuntos convexos disjuntos, com um deles contendo um ponto interior são separados.*

Lema 2.1.15. *Seja K um cone com vértice em x_0 e f um funcional linear tal que, $f(x) \geq \alpha$ $\forall x \in K$. Então, $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in K$.*

Lema 2.1.16. *Sejam K_1, K_2, \dots, K_n cones abertos e convexos tais que, $\bigcap_{i=1}^n K_i \neq \emptyset$. Então,*

$$\left(\bigcap_{i=1}^n K_i\right)^* = \sum_{i=1}^n K_i^*.$$

Lema 2.1.17. *Sejam $K_1, K_2, \dots, K_n, K_{n+1}$ cones convexos com vértices em zero, tais que K_1, K_2, \dots, K_n são abertos. Então, $\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i = \emptyset$ se, e somente se, existem funcionais lineares e contínuos $f_i \in K_i^*$, $i = 1, \dots, n+1$, nem todos nulos, tais que*

$$f_1 + \dots + f_n + f_{n+1} = 0.$$

Demonstração: Suponhamos que $\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i = \emptyset$. Agora, suponhamos que $\bigcap_{i=1}^n K_i = K \neq \emptyset$, logo, $K_{n+1} \cap K = \emptyset$. Como K é um aberto, podemos aplicar o Lema de separação 2.1.14 junto com o Lema 2.1.15, para garantir que existe $f \in X'$, $f \neq 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in K$ e $f(x) \leq 0$ para todo $x \in K_{n+1}$.

Agora, pelo Lema 2.1.16 e o fato que $f \in K^* = \left(\bigcap_{i=1}^n K_i\right)^*$, vem

$$f = \sum_{i=1}^n f_i, \quad f_i \in K_i^*, \quad i = 1, \dots, n.$$

Seja $f_{n+1} = -f$, então $f_{n+1} \in K_{n+1}^*$, $f_{n+1} \neq 0$ e

$$f_1 + \dots + f_n + f_{n+1} = 0.$$

Mas, por outro lado se $\bigcap_{i=1}^n K_i = \emptyset$, existe $1 \leq s < n$ tal que $K = \bigcap_{i=1}^s K_i \neq \emptyset$, com

$\bigcap_{i=1}^{s+1} K_i = \emptyset$. Agora, aplicando o resultado já provado (com n substituído por s), obtemos funcionais $f_i \in K_i^*$, $i = 1, \dots, s+1$, $f_{s+1} \neq 0$, tais que

$$f_1 + \dots + f_s + f_{s+1} = 0.$$

Tomando $f_{s+2} = \dots = f_{n+1} = 0$, obtemos os funcionais requeridos f_1, f_2, \dots, f_{n+1} .

Agora, provaremos a recíproca. Suponhamos que existem $f_i \in K_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, não todos nulos tais que

$$f_1 + \dots + f_n + f_{n+1} = 0.$$

Suponhamos por redução ao absurdo que $\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i \neq \emptyset$. Logo, existe $x_0 \in K_i$, $i = 1, \dots, n+1$, ao mesmo tempo, existe $1 \leq j \leq n$ tal que o funcional $f_j \neq 0$ (pois caso contrário teríamos $f_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ e portanto, $f_{n+1} = -\sum_{i=1}^n f_i = 0$, mais isso contradiz a hipótese), então $f_j(x_0) > 0$ (pois K_j é aberto). Assim, vem

$$0 = (f_1 + \dots + f_n + f_{n+1})(x_0) \geq f_j(x_0) > 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, $\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i = \emptyset$. ■

Teorema 2.1.18. (Dubovitskii e Milyutin) *Suponha que $J(\cdot)$ assume um mínimo local em*

$Q = \bigcap_{i=1}^{n+1} Q_i$ no ponto x_0 , J é regularmente de descida em x_0 , com direções de descida K_0 , Q_i , $i = 1, \dots, n$, é regular em x_0 , com direções factíveis K_i , $i = 1, \dots, n$, e Q_{n+1} é regular em

x_0 , com direções tangentes K_{n+1} . Então existem funcionais lineares contínuos $f_i \in K_i^*$, $i = 0, \dots, n+1$, não simultaneamente nulos, tais que

$$f_0 + f_1 + \dots + f_n + f_{n+1} = 0.$$

Demonstração: Primeiro, provaremos que uma condição necessária para o funcional ter um mínimo em x_0 é

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i = \emptyset, \quad (2.2)$$

ou seja, nenhuma direção de descida do funcional J pode ser factível para todas as restrições. Suponhamos que (2.2) seja falso, então existe $h \in K_i$, $i = 1, \dots, n+1$. Pela definição dos K_i , $i = 1, \dots, n$, existe uma vizinhança U do vetor h tal que, quando $0 < \epsilon < \epsilon_0$, qualquer vetor da forma $x_0 + \epsilon \bar{h}$, com $\bar{h} \in U$, está em $\bigcap_{i=1}^n Q_i$ e satisfaz a desigualdade

$$J(x_0 + \epsilon \bar{h}) \leq J(x_0) + \epsilon \alpha,$$

onde $\alpha = \alpha(J, x_0, h)$ é uma constante estritamente negativa.

Agora, considere o vetor $x(\epsilon) = x_0 + \epsilon h + r(\epsilon) \in Q_{n+1}$, como na definição de direções tangentes, e seja ϵ_1 tal que $\frac{1}{\epsilon} r(\epsilon) \in U - h$, ou seja, $\bar{h}(\epsilon) = h + \frac{1}{\epsilon} r(\epsilon) \in U$, para $0 < \epsilon < \epsilon_1$. Então, quando $0 < \epsilon < \min(\epsilon_0, \epsilon_1)$, vem

$$x(\epsilon) = x_0 + \epsilon \bar{h}(\epsilon) \in \bigcap_{i=1}^n Q_i \cap Q_{n+1}.$$

Em outras palavras, esses vetores satisfazem todas as restrições. Mas eles também satisfazem a desigualdade dada por

$$J(x_0 + \epsilon \bar{h}(\epsilon)) \leq J(x_0) + \epsilon \alpha < J(x_0),$$

o que contradiz a hipótese que x_0 é um ponto de mínimo. Assim, segue (2.2).

Agora, por definição K_0, K_1, \dots, K_n são cones abertos convexos e K_{n+1} é um cone convexo. Aplicando o Lema 2.1.17, segue o resultado desejado. ■

Observação 2.1.19. Segue do teorema de Dubovitskii e Milyutin que se desejarmos determinar as condições necessárias para um ponto extremo em algum problema específico, devemos resolver os seguintes problemas:

- 1- Determinar as Direções de Descida do Funcional,
- 2- Determinar as Direções Factíveis,
- 3- Determinar as Direções Tangentes,
- 4- Construir os Cones Duais.

Essas questões são o conteúdo das próximas seções.

2.2 Cálculo Explícito dos Cones

Iniciaremos esta seção apresentando algumas definições e resultados que serão utilizados para a construção dos cones desejados. Em seguida, abordaremos de forma detalhada os itens enunciados na Observação 2.1.19.

2.2.1 Algumas Ferramentas do Cálculo Diferencial

Uma boa referência para os resultados desta seção é Alexéev, Tikhomirov e Fomine [2], § 2.2, Cap. II. Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados, U uma vizinhança de um ponto x_0 em X e F uma aplicação de U em Y .

Definição 2.2.1. Dizemos que F tem uma **derivada direcional** no ponto x_0 na direção h , se o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + \epsilon h) - F(x_0)}{\epsilon}$$

existe. Denotaremos por $F'(x_0, h)$.

Definição 2.2.2. Suponhamos que para todo $h \in X$ a derivada $F'(x_0, h)$ na direção h exista. A aplicação $\delta_+ F(x_0, \cdot) : X \rightarrow Y$ definida por $\delta_+ F(x_0, h) = F'(x_0, h)$ é denominada a **primeira variação** da aplicação F no ponto x_0 .

Definição 2.2.3. Suponhamos que F possui uma primeira variação no ponto x_0 e que existe um operador linear contínuo $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\delta_+ F(x_0, h) = \Lambda h$. Então o operador Λ é denominado a **derivada de Gâteaux** da aplicação F no ponto x_0 e denotamos por $\nabla_G F(x_0)$.

Assim, $\nabla_G F(x_0)$ é um elemento de $\mathcal{L}(X, Y)$ tal que para cada $h \in X$ temos a relação

$$F(x_0 + \epsilon h) = F(x_0) + \epsilon \nabla_G F(x_0)h + o(\epsilon),$$

quando $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Definição 2.2.4. Dizemos que o operador F é **Fréchet-diferenciável** em x_0 se, em uma vizinhança de x_0 , ele pode ser representado sob a forma

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + \Lambda h + \alpha(h) \|h\|$$

onde $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ e

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\alpha(h)\| = \|\alpha(0)\| = 0.$$

O operador Λ é chamado derivada de Fréchet (ou simplesmente derivada) da aplicação F no ponto x_0 e é denotado por $F'(x_0)$.

Definição 2.2.5. Dizemos que um operador $F : X \rightarrow Y$ é **estritamente diferenciável** em x_0 se existe $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todos x_1, x_2 verificando $\|x_1 - x_0\| < \delta, \|x_2 - x_0\| < \delta$, temos a seguinte desigualdade

$$\|F(x_1) - F(x_2) - \Lambda(x_1 - x_2)\| \leq \epsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Definição 2.2.6. Dizemos que o operador $F : U \subset X \rightarrow Y$ definido sobre um aberto U é **de classe $C^1(U)$** se ele possui uma derivada em cada ponto $x \in U$ e a aplicação $x \mapsto F'(x)$ é contínua.

Observação 2.2.7. As seguintes conclusões são satisfeitas:

- (i) Se F é Fréchet-diferenciável em x_0 , então F é Gâteaux-diferenciável em x_0 e $F'(x_0) = \nabla_G F(x_0)$.
- (ii) Se F é estritamente diferenciável em x_0 , então F é Fréchet-diferenciável em x_0 e $\Lambda = F'(x_0)$.
- (iii) Se F é estritamente diferenciável em x_0 , então existe uma vizinhança de x_0 onde F é contínua, de fato, é Lipschitz contínua.

(iv) F pode ser Fréchet-diferenciável em x_0 e não ser estritamente diferenciável em x_0 .

Considere por exemplo, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

F é Fréchet-diferenciável em $x_0 = 0$, mas não é estritamente diferenciável, pois F só é contínua em $x_0 = 0$.

(v) Se F é de classe C^1 , então ela é estritamente diferenciável.

O próximo resultado, que enunciaremos na forma de um lema, foi retirado de Alexéev, Tikhomirov e Fomine [2]. Este resultado será de grande importância para caracterizar os cones de direções tangentes. Usaremos a notação Y' para o espaço dos funcionais lineares e contínuos definidos em Y (dual topológico de Y).

Lema 2.2.8. *Sejam X e Y dois espaços normados, $U \subset X$. Se $F : U \rightarrow Y$ é Gâteaux-diferenciável em cada ponto $x \in U$ e a aplicação definida por*

$$x \mapsto \nabla_G F(x)$$

é contínua em x_0 (na topologia de $\mathcal{L}(X, Y)$), então F é estritamente diferenciável em x_0 .

Demonstração: A demonstração deste lema será dada em três etapas:

1ª Etapa: (Teorema do Valor Médio) Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e $U \subset X$ um subconjunto aberto contendo o segmento $[a, b]$. Se a função $F : X \rightarrow Y$ é diferenciável segundo Gâteaux em cada ponto $x \in [a, b]$, então

$$\|F(a) - F(b)\| \leq \sup_{c \in [a, b]} \|\nabla_G F(c)\| \|b - a\|. \quad (2.3)$$

Demonstração: Escolhemos arbitrariamente $y_0 \in Y'$ e definimos a função

$$\phi(t) = \langle y_0, F(a + t(b - a)) \rangle$$

em cada ponto do segmento $[0, 1]$. Esta função possui uma derivada à direita e uma derivada à esquerda

$$\begin{aligned}
\phi'_-(t) &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\phi(t - \epsilon) - \phi(t)}{-\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\langle y_0, F(a + (t - \epsilon)(b - a)) \rangle - \langle y_0, F(a + t(b - a)) \rangle}{-\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\langle y_0, F(a + (t - \epsilon)(b - a)) - F(a + t(b - a)) \rangle}{-\epsilon} \\
&= - \langle y_0, \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{F(a + t(b - a) - \epsilon(b - a)) - F(a + t(b - a))}{\epsilon} \rangle \\
&= - \langle y_0, \nabla_G F(a + t(b - a))[-(b - a)] \rangle \\
&= \langle y_0, \nabla_G F(a + t(b - a))[b - a] \rangle .
\end{aligned}$$

De maneira análoga

$$\phi'_+(t) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\phi(t + \epsilon) - \phi(t)}{\epsilon} = \langle y_0, \nabla_G F(a + t(b - a))[b - a] \rangle .$$

Logo, $\phi'_-(t) = \phi'_+(t)$, e assim a função $\phi(t)$ é diferenciável (no sentido clássico) em $[0, 1]$; logo é contínua em tal intervalo. Aplicando o teorema do valor médio na reta, existe um $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\langle y_0, F(a) - F(b) \rangle = \phi(1) - \phi(0) = \phi'(\theta) = \langle y_0, \nabla_G F(a + \theta(b - a))[b - a] \rangle .$$

Agora, segue de um corolário do teorema de Hahn-Banach que para cada $y \in Y$ existe um funcional linear e contínuo $y_0 \in Y'$ verificando $\|y_0\| = 1$ e $\langle y_0, y \rangle = \|y\|$. Com isso, escolha um tal funcional y_0 para o elemento $y = F(b) - F(a)$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\|F(b) - F(a)\| &= \langle y_0, F(b) - F(a) \rangle \\
&= \langle y_0, \nabla_G F(a + \theta(b - a))[b - a] \rangle \\
&\leq \|y_0\| \|\nabla_G F(a + \theta(b - a))\| \|b - a\| \\
&\leq \sup_{c \in [a, b]} \|\nabla_G F(c)\| \|b - a\|.
\end{aligned}$$

2ª Etapa: Suponhamos que valem as hipóteses do teorema do valor médio e tome $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$. Então

$$\|F(b) - F(a) - \Lambda(b - a)\| \leq \sup_{c \in [a, b]} \|\nabla_G F(c) - \Lambda\| \|b - a\|. \quad (2.4)$$

Demonstração: Aplique o teorema do valor médio com a função $g(x) = F(x) - \Lambda(x)$.

3ª Etapa: Demonstração do Lema 2.2.8.

Dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|\nabla_G F(x) - \nabla_G F(x_0)\| < \epsilon, \quad \text{quando } \|x - x_0\| < \delta. \quad (2.5)$$

Se $\|x_1 - x_0\| < \delta$ e $\|x_2 - x_0\| < \delta$, então para todo

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1) \in [x_1, x_2], \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \|x_1 + t(x_2 - x_1) - x_0\| \\ &= \|x_1 + t(x_2 - x_1) - tx_0 - (1-t)x_0\| \\ &= \|t(x_2 - x_0) + (1-t)(x_1 - x_0)\| \\ &\leq t\|x_2 - x_0\| + (1-t)\|x_1 - x_0\| \\ &< t\delta + (1-t)\delta = \delta. \end{aligned}$$

Por (2.5),

$$\|\nabla_G F(x) - \nabla_G F(x_0)\| < \epsilon.$$

Agora, aplicando a segunda etapa para $\Lambda = \nabla_G F(x_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|F(x_2) - F(x_1) - \nabla_G F(x_0)(x_2 - x_1)\| &\leq \sup_{x \in [x_1, x_2]} \|\nabla_G F(x) - \nabla_G F(x_0)\| \|x_2 - x_1\| \\ &\leq \epsilon \|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

E isto implica a diferenciabilidade estrita de F no ponto x_0 .

■

2.2.2 Direções de Descida

Os próximos dois resultados podem ser encontrados em Girsanov [10], pp. 45 e 48.

Teorema 2.2.9. *Seja X um espaço de Banach. Suponha que o funcional $J(\cdot)$ satisfaz uma condição de Lipschitz em uma vizinhança do ponto $x_0 \in X$ e que é direcionalmente diferenciável em x_0 em qualquer direção h . Se $J'(x_0, h)$ é convexa como função de h , então $J(\cdot)$ é regularmente de descida em x_0 e seu cone de direções de descida K_0 vem dado por*

$$K_0 = \{h \in X \text{ tal que } J'(x_0, h) < 0\}.$$

Corolário 2.2.10. *Seja X um espaço de Banach.*

(i) *Se $J(\cdot)$ é um funcional convexo contínuo, então $J(\cdot)$ é diferenciável em qualquer ponto e em qualquer direção, $J(\cdot)$ é regularmente de descida em qualquer ponto e*

$$K_0 = \{h \in X \text{ tal que } J'(x_0, h) < 0\}.$$

(ii) *Se $J(\cdot)$ é Fréchet-diferenciável, então $J(\cdot)$ é regularmente de descida em qualquer ponto e*

$$K_0 = \{h \in X \text{ tal que } \langle J'(x_0), h \rangle < 0\}.$$

2.2.3 Direções Factíveis ou Admissíveis

Seja Q uma restrição de desigualdade e K_a seu cone de direções factíveis. Observamos que os “pontos interessantes” são os da fronteira de Q . Além disso, admitiremos que Q possui pontos interiores pois, caso contrário, $K_a = \emptyset$.

Trataremos o caso onde Q é definido por um funcional $F(x)$, isto é,

$$Q = \{x \in X \text{ tal que } F(x) \leq F(x_0)\}.$$

Se $F(x)$ é contínuo podemos estudar o caso mais geral

$$Q = \{x \in X \text{ tal que } F(x) \leq \lambda, \lambda \neq F(x_0)\}.$$

Aqui o cone de direções de descida do funcional $F(\cdot)$ no ponto x_0 será denotado por K_d .

Observação 2.2.11. *Observamos que sempre se verifica $K_d \subset K_a$. A questão que se coloca é: quando $K_a \subset K_d$? Para isto, temos o seguinte resultado:*

Teorema 2.2.12. *Suponha que $F(\cdot)$ é direcionalmente diferenciável em x_0 em qualquer direção. Se existe \tilde{h} tal que $F'(x_0, \tilde{h}) < 0$, então*

$$K_a \subset \{h \in X \text{ tal que } F'(x_0, h) < 0\}.$$

Observação 2.2.13. *Observe que a condição $F'(x_0, \tilde{h}) < 0$ para algum \tilde{h} é equivalente a dizer que $K_d \neq \emptyset$.*

Corolário 2.2.14. *Suponha que qualquer uma das condições abaixo seja satisfeita*

(i) *X é um espaço de Banach, $F(\cdot)$ satisfaz uma condição de Lipschitz numa vizinhança do ponto $x_0 \in X$ e é direcionalmente diferenciável em x_0 em qualquer direção h , $F'(x_0, h)$ é convexa como função de h e existe \tilde{h} tal que $F'(x_0, \tilde{h}) < 0$;*

(ii) *$F(\cdot)$ é um funcional convexo contínuo e existe \tilde{x} tal que $F(\tilde{x}) < F(x_0)$;*

(iii) *$F(\cdot)$ é Fréchet-diferenciável em x_0 e $F'(x_0) \neq 0$.*

Então

$$K_a = K_d = \{h \in X \text{ tal que } F'(x_0, h) < 0\}.$$

Proposição 2.2.15. *Se Q é um conjunto convexo, seu cone de direções factíveis no ponto x_0 é dado por*

$$\begin{aligned} K_a &= \{h \in X / h = \lambda(x - x_0), x \in \text{int}Q, \lambda > 0\} \\ &= \{\lambda(\text{int}Q - x_0) / \lambda > 0\}. \end{aligned}$$

2.2.4 Direções Tangentes

O resultado a seguir pode ser encontrado em Alexéev, Tikhomirov e Fomine [2], p. 167.

Teorema 2.2.16. *(Lyusternick) Sejam X, Z espaços de Banach, U uma vizinhança do ponto $x_0 \in X$, $P : U \rightarrow Z$ tal que $P(x_0) = 0$. Se P é estritamente diferenciável no ponto x_0 e $P'(x_0)X = Z$ ($P'(x_0)$ é um epimorfismo), então o conjunto*

$$Q = \{x \in X / P(x) = 0\}$$

tem no ponto x_0 um espaço tangente

$$T_{x_0}(Q) = \text{Ker}P'(x_0) = \{h \in X / P'(x_0)h = 0\}.$$

Observação 2.2.17. *Observamos que o teorema de Lyusternik é uma ferramenta poderosa para se obter o cone de direções tangentes, o qual é feito, basicamente pelo cálculo da derivada estrita do funcional associado. Porém, não é possível utilizá-lo no caso em que o operador associado não é estritamente diferenciável, ou quando a sua derivada não é sobrejetora. Na prática, a dificuldade se concentra na condição de sobrejetividade do operador derivada pois, muitas vezes a condição de o operador ser estritamente diferenciável vem do Lema 2.2.8.*

2.3 Cálculo dos Cones Duais

Teorema 2.3.1. *Suponha que o cone K é um subespaço vetorial de um espaço normado X . Então*

$$K^* = \{\varphi \in X' \text{ tal que } \varphi(x) = 0, \forall x \in K\}.$$

Teorema 2.3.2. *Seja $\varphi \in X'$,*

$$K_1 = \{x \in X \text{ tal que } \varphi(x) = 0\},$$

$$K_2 = \{x \in X \text{ tal que } \varphi(x) \geq 0\},$$

$$K_3 = \{x \in X \text{ tal que } \varphi(x) > 0\}.$$

Então

$$K_1^* = \{\lambda\varphi \text{ tal que } -\infty < \lambda < \infty\},$$

$$K_2^* = \{\lambda\varphi \text{ tal que } 0 \leq \lambda < \infty\},$$

$$K_3^* = \begin{cases} X^* & \text{se } \varphi = 0, \\ K_2^* & \text{se } \varphi \neq 0. \end{cases}$$

Definição 2.3.3. *Um **funcional suporte** para um subconjunto $A \subset X$ em $x_0 \in A$ é uma forma linear contínua $\varphi \in X'$ não nula tal que*

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) \text{ para todo } x \in A.$$

Sejam $Q \subset X, x_0 \in Q, K_a$ o cone de direções factíveis para Q em x_0 , K_T o cone das direções tangentes a Q em x_0 e Q^* o cone dos funcionais lineares suportes para Q em x_0 , isto é,

$$Q^* = \{\varphi \in X^* \text{ tal que } \varphi(x) \geq \varphi(x_0), \forall x \in Q\}.$$

Teorema 2.3.4. *Se Q é um convexo fechado, então*

$$K_T^* = Q^*.$$

Se, além disso, $\text{int}Q \neq \emptyset$, então

$$K_a^* = Q^*.$$

CAPÍTULO 3

Problema de Controle Ótimo Sem Restrição no Controle

Neste capítulo, trataremos do problema de controle ótimo sobre uma equação diferencial parcial linear que modela um problema matemático de controle de população de mosquitos. Nossa abordagem consiste em transformar o problema de controle em um problema de otimização abstrato, para, em seguida, mostrar a existência de solução ótima e as condições necessárias de otimalidade via o formalismo de Dubovitskii e Milyutin.

3.1 Formulação Matemática do Problema

Ao longo deste capítulo consideraremos Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^2 , com fronteira $\partial\Omega$ pelo menos de classe C^3 e uma constante $0 < T < +\infty$.

Definição 3.1.1. *Ao longo deste capítulo denotaremos o conjunto dos **controles admissíveis** por*

$$\mathcal{A} = \{\gamma \in (H^1(0, T))^2 \mid \gamma(0) = 0\}, \quad (3.1)$$

o subespaço fechado de $(H^1(0, T))^2$, com a topologia induzida pela norma definida por

$$\|\gamma\|_{(H^1(0, T))^2} = \left(\int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Observação 3.1.2. Na definição anterior a expressão dada por (3.2) é de fato uma norma pois, para cada curva $\gamma \in \mathcal{A}$ temos que $\gamma(0) = 0$.

Consideremos o funcional $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(\gamma, u) = \mu_0 \int_0^T |\gamma(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx dt, \quad (3.3)$$

onde $\mu_0 \geq 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ são constantes, γ é o controle que atua na equação e $u(x, t)$ é o estado tomado como solução da seguinte equação diferencial parcial que governa a população de mosquitos:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \alpha \Delta u(x, t) = a(x, t) u(x, t) - b k(x - \gamma(t)) u(x, t) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(u) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

Temos as seguintes hipóteses sobre os coeficientes da equação (3.4): α e b são constantes positivas e $a \in L^s(Q)$, com $s > 2$.

O problema de controle ótimo que estudaremos neste capítulo é o de encontrar uma par $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que, (γ^*, u^*) seja um mínimo do funcional (3.3) sujeito a (3.4).

A seguir, apresentaremos os teoremas que justificam a existência e unicidade de solução das equações de estado e co-estado. As demonstrações dos mesmos seguem diretamente da Proposição 1.1.11, no caso em que $q = 2$ (veja Capítulo 1, p. 12).

Teorema 3.1.3. Dadas as funções $k \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq k(\cdot) \leq 1$, $u_0 \in H^1(\Omega)$ e $\gamma \in (H^1(0, T))^2$. Além disso, $\alpha > 0$ e $b > 0$ são constantes, $a \in L^s(Q)$, com $s > 2$ e Ω é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 . Então existe uma única solução $u \in W_2^{2,1}(Q)$ da equação (3.4) satisfazendo a seguinte estimativa

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \widetilde{M}_1 \|u_0\|_{H^1(\Omega)}$$

com \widetilde{M}_1 uma constante que depende apenas de $T, \alpha, \|a\|_{L^s(Q)}, b$ e Ω .

O seguinte teorema justifica a existência e unicidade de solução para a equação de co-estado.

Teorema 3.1.4. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 3.1.3, sendo $\beta \in (H^1(0, T))^2$ e $v \in L^2(Q)$ dadas, existe uma única solução $p \in W_2^{2,1}(Q)$ para a equação*

$$\begin{cases} -\partial_t p - \alpha \Delta p = a p - b k(x - \beta)p - v & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(p) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ p(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.5)$$

Além disso, vale a seguinte estimativa

$$\|p\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \widetilde{M}_2 \|v\|_{L^2(Q)}$$

com \widetilde{M}_2 uma constante que depende apenas de $T, \alpha, \|a\|_{L^s(Q)}, b$ e Ω .

3.2 Formulação Como Problema de Otimização e Resultados

O problema de controle anunciado anteriormente pode ser equivalentemente representado pelo problema de otimização definido por

$$\min_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\gamma, u), \quad (3.6)$$

onde \mathcal{U}_{ad} é definido a seguir.

Definição 3.2.1. *Fixado $u_0 \in H^1(\Omega)$, o conjunto admissível \mathcal{U}_{ad} é dado por uma restrição de igualdade definida por*

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(\gamma, u) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); M(\gamma, u) = 0\},$$

com $M : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times H^1(\Omega)$, o operador definido de tal forma que $M(\gamma, u) = (\psi, \varphi)$, se (ψ, φ) satisfaz a equação definida por

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \alpha \Delta u(x, t) - a u(x, t) + b k(x - \gamma(t)) u(x, t) = \psi & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(u) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) - u_0(x) = \varphi & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

Definição 3.2.2. $(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}$ é chamado uma **solução ótima (local)** de (3.6), se existir $\epsilon > 0$ tal que

$$J(\gamma, u) \leq J(\beta, v),$$

para todo $(\beta, v) \in \mathcal{U}_{ad}$ satisfazendo

$$\|\beta - \gamma\|_{(H^1(0, T))^2} + \|v - u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \epsilon.$$

Precisaremos do seguinte resultado técnico.

Lema 3.2.3. Dadas $\gamma \in (C([0, T]))^2$ e $k \in C_0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Consideremos a função $K : \mathbb{R}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $K(x, t) := k(x - \gamma(t))$. Então, K é uma função contínua de suporte compacto e se $(\gamma_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência em $(C([0, T]))^2$ tal que $\gamma_n \rightarrow \gamma$ fortemente em $(C([0, T]))^2$. Então, segue que $K_n(x, t) := k(x - \gamma_n(t))$ converge uniformemente para $K(x, t) := k(x - \gamma(t))$ em $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$.

Demonstração: Como k é uma função contínua de suporte compacto, existe $\tilde{R} > 0$ tal que $\|x\| \leq \tilde{R}$, sempre que $x \in \text{supp}(k)$, ou seja,

$$\text{supp}(k) \subset B(0, \tilde{R}).$$

Notemos que $\text{supp}(k) - \text{Im}(\gamma) := \{x - \gamma(t); x \in \text{supp}(k) \text{ e } \gamma(t) \in \text{Im}(\gamma), 0 \leq t \leq T\}$ é um compacto de \mathbb{R}^2 . Agora, denotemos $K(x, t) := k(x - \gamma(t))$, a qual é uma função contínua pois, é a composta de funções contínuas.

Como $\gamma([0, T])$ é compacto, existe $t_0 \in [0, T]$ tal que $|\gamma(t)| \leq |\gamma(t_0)|$, para todo $t \in [0, T]$. Então, para cada $t \in [0, T]$, vem

$$\text{supp}(k) - \gamma(t) \subset B(\gamma(t), \tilde{R} + 2|\gamma(t_0)| + 1),$$

pois, se $x \in \text{supp}(k)$

$$\|x - \gamma(t) - \gamma(t)\| = \|x - 2\gamma(t)\| \leq \|x\| + 2\|\gamma(t)\| \leq \tilde{R} + 2|\gamma(t_0)| < \tilde{R} + 2|\gamma(t_0)| + 1.$$

Agora, se $x \notin B(\gamma(t), \tilde{R} + 2|\gamma(t_0)| + 1)$,

$$\|x - \gamma(t)\| > \tilde{R} + 2|\gamma(t_0)| + 1 > \tilde{R},$$

logo, $x - \gamma(t) \notin \text{supp}(k)$, ou seja, $k(x - \gamma(t)) = 0$. Portanto, $K(x, t) = 0$.

Assim, concluímos que para cada $t \in [0, T]$, vem

$$\text{supp}(K(\cdot, t)) \subset B(\gamma(t), \tilde{R} + 2|\gamma(t_0)| + 1).$$

E mais,

$$\text{supp}(k) - \gamma([0, T]) \subset \bigcup_{t \in [0, T]} B(\gamma(t), \tilde{R} + 2|\gamma(t_0)| + 1).$$

Portanto, existe m tal que

$$\text{supp}(k) - \gamma([0, T]) \subset \bigcup_{k=1}^m B(\gamma(t_k), \tilde{R} + 2|\gamma(t_0)| + 1) \subset B[0, N_1].$$

Assim, $\text{supp}(K) \subset B[0, N_1] \times [0, T]$. Isso mostra que K tem suporte compacto.

Agora, suponhamos que exista (γ_n) uma sequência de $(H^1(0, T))^2$ tal que $\gamma_n \rightarrow \gamma$ em $(H^1(0, T))^2$. Em particular, $K_n(x, t) = k(x - \gamma_n(t))$ é uma sequência de funções contínuas e para cada n , $\gamma_n([0, T])$ é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 . Logo, existe R tal que $\gamma_n([0, T]) \subset B[0, R]$, para todo n , pois (γ_n) é uma sequência limitada. Assim, $\text{supp}(k) - B[0, R]$ é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 e para cada $y \in B[0, R]$

$$\text{supp}(k) - y \subset B(y, \tilde{R} + 2R + 1).$$

Logo,

$$\text{supp}(k) - B[0, R] \subset \bigcup_{y \in B[0, R]} B(y, \tilde{R} + 2R + 1).$$

Portanto, existe l tal que

$$\text{supp}(k) - B[0, R] \subset \bigcup_{k=1}^l B(y_k, \tilde{R} + 2R + 1) \subset B[0, N_2].$$

Assim, $\text{supp}(K_n) \subset B[0, N_2] \times [0, T]$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por continuidade, para cada $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T]$, a sequência $(K_n(x, t))_{n=1}^{\infty}$ converge pontualmente para $K(x, t)$. Segue dos resultados anteriores que, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 e $(x_0, t_0) \in B[0, N] \times [0, T]$, com $N = \max\{N_1, N_2\}$, tal que

$$\begin{aligned} \|K_n - K\| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |K_n(x, t) - K(x, t)| \\ &= \sup_{x \in B[0, N], t \in [0, T]} |K_n(x, t) - K(x, t)| \\ &= |K_n(x_0, t_0) - K(x_0, t_0)| < \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$. Assim, $K_n \rightarrow K$ uniformemente. ■

Observação 3.2.4. *O resultado do Lema 3.2.3 ainda continua válido substituindo $(C([0, T]))^2$ por $(H^1(0, T))^2$ e a demonstração ocorre de maneira análoga, visto que, a imersão $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$ é contínua.*

3.2.1 Existência de Controle Ótimo

Nesta seção, provaremos que o Problema (3.6) tem solução. Para isso, tomaremos uma sequência minimizante $((\gamma_n, u_n))_{n=1}^{\infty}$ associada ao Problema (3.6) e, aplicando alguns resultados auxiliares descritos no Capítulo 1, mostraremos que essa sequência admite uma subsequência convergente para um limite (γ^*, u^*) que será uma solução ótima do Problema (3.6).

Teorema 3.2.5. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1.3, o Problema (3.6) possui uma solução.*

Demonstração: Primeiramente vamos provar que $\mathcal{U}_{ad} \neq \emptyset$.

De fato, dado $\xi \in \mathcal{A}$, segue do Teorema 3.1.3 a existência de uma única solução $z \in W_2^{2,1}(Q)$ para a equação (3.4), em particular $M(\xi, z) = 0$ e

$$J(\xi, z) = \mu_0 \int_0^T |\xi(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\xi'(t)|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |z(x, t)|^2 dx dt. \quad (3.8)$$

Agora, tomando $C = \max\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\} > 0$, obtemos

$$J(\xi, z) \leq C(\|\xi\|_{(H^1(0, T))^2}^2 + \|z\|_{L^2(Q)}^2) < \infty.$$

Logo, $(\xi, z) \in \mathcal{U}_{ad}$. Assim $\mathcal{U}_{ad} \neq \emptyset$.

Consideremos agora uma sequência $((\gamma_n, u_n))_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(\gamma_n, u_n) = \inf_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\gamma, u),$$

isto é, uma sequência minimizante.

Logo, existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$0 \leq J(\gamma_n, u_n) \leq C_0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, segue da definição de $J(., .)$ que

$$J(\gamma_n, u_n) = \mu_0 \int_0^T |\gamma_n(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma_n'(t)|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |u_n(x, t)|^2 dx dt \leq C_0$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, concluímos que

$$\|\gamma_n\|_{(H^1(0, T))^2}^2 \leq \frac{C_0}{\mu_1} \quad (3.9)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, como a imersão $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$ é contínua e compacta e $H^1(0, T)$ é reflexivo, existe $\gamma^* \in (H^1(0, T))^2$ e uma subsequência, que continuaremos denotando por $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que

$$\gamma_n \rightarrow \gamma^* \text{ fortemente em } (C([0, T]))^2$$

e

$$\gamma_n \rightarrow \gamma^* \text{ fracamente em } (H^1(0, T))^2.$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{U}_{ad}$, em particular $M(\gamma_n, u_n) = 0$. Também segue do Teorema 3.1.3 que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|u_n\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C_2,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Agora, aplicando o resultado de imersão dado pela Observação 1.1.7 obtemos que, a imersão $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ é compacta e mais, da reflexividade de $W_2^{2,1}(Q)$, podemos extrair uma subsequência, que continuaremos denotando por $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u^* \text{ fracamente em } W_2^{2,1}(Q); \\ u_n &\rightarrow u^* \text{ fortemente em } L^2(Q). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Temos que $\gamma^* \in \mathcal{A}$, pois para cada $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n(0) = 0$ e $\gamma_n \rightarrow \gamma^*$ em $(C([0, T]))^2$. Logo,

$$\gamma^*(0) = 0.$$

Provemos agora que $M(\gamma^*, u^*) = 0$. Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $M(\gamma_n, u_n) = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} \partial_t u_n(x, t) - \alpha \Delta u_n(x, t) = a(x, t) u_n(x, t) - b k(x - \gamma_n(t)) u_n(x, t) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(u_n) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ u_n(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Agora, como a sequência $(u_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $W_2^{2,1}(Q)$, resulta que

$$\|u_n\|_{L^2(Q)} + \|D_x u_n\|_{L^2(Q)} + \|D_x^2 u_n\|_{L^2(Q)} + \|\partial_t u_n\|_{L^2(Q)} \leq C_0.$$

Logo, obtemos que

$$\partial_t u_n \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\Delta u_n \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Agora, da reflexividade de $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, junto com a compacidade da imersão $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$, podemos extrair uma subsequência, que continuaremos denotando por $(u_n)_{n=1}^\infty$, tal que

$$\partial_t u_n \rightarrow u_1 \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\Delta u_n \rightarrow u_2 \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$u_n \rightarrow u^* \text{ fortemente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Daí, usando as seguintes imersões:

$$L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv (L^2(0, T; L^2(\Omega)))' \hookrightarrow H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$$

e também como $u_n \rightarrow u^*$ fortemente em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, segue que

$$u_n \rightarrow u^* \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)).$$

Logo, aplicando a teoria de distribuição, vem

$$\partial_t u_n \rightarrow \partial_t u^* \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\Delta u_n \rightarrow \Delta u^* \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)).$$

Mas, da unicidade dos limites obtemos que

$$u_1 = \partial_t u^* \quad \text{e} \quad u_2 = \Delta u^*.$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u^* \quad \text{fortemente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \partial_t u_n &\rightarrow \partial_t u^* \quad \text{fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \Delta u_n &\rightarrow \Delta u^* \quad \text{fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Agora provemos que

$$k(x - \gamma_n)u_n \rightarrow k(x - \gamma^*)u^* \quad \text{fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Pelo teorema de representação de Riesz é suficiente provar que

$$\int_0^T \int_{\Omega} k(x - \gamma_n(t))u_n(x, t)\varphi(x, t)dxdt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} k(x - \gamma^*(t))u^*(x, t)\varphi(x, t)dxdt,$$

para todo $\varphi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ pois, $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ é um espaço de Hilbert.

Assim, consideremos a sequência de funções, $K_n(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$K_n(x, t) := k(x - \gamma_n(t)).$$

Segue do Lema 3.2.3 que a sequência K_n converge uniformemente para K , ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k_n(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_0$. Logo,

$$\begin{aligned} & \left| \int_Q k(x - \gamma_n(t))u_n(x, t)\varphi(x, t)dxdt - \int_Q k(x - \gamma^*(t))u^*(x, t)\varphi(x, t)dxdt \right| \\ & \leq \int_Q |k(x - \gamma_n(t))u_n(x, t)\varphi(x, t) - k(x - \gamma^*(t))u_n(x, t)\varphi(x, t)|dxdt \\ & \quad + \int_Q |k(x - \gamma^*(t))u_n(x, t)\varphi(x, t) - k(x - \gamma^*(t))u^*(x, t)\varphi(x, t)|dxdt \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k_n(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| \int_Q |u_n(x, t)\varphi(x, t)|dxdt \\ & \quad + \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma^*(t))| \int_Q |u_n(x, t) - u^*(x, t)| |\varphi(x, t)|dxdt \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k_n(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| \|u_n\|_{L^2(Q)} \|\varphi\|_{L^2(Q)} \\ & \quad + \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma^*(t))| \|u_n - u^*\|_{L^2(Q)} \|\varphi\|_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

e o resultado segue tomando o limite em n pois, u_n converge fortemente para u^* em $L^2(Q)$ e conseqüentemente $\|u_n\|_{L^2(Q)}$ é limitada. Assim, concluímos que

$$k(x - \gamma_n)u_n \rightarrow k(x - \gamma^*)u^* \quad \text{fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Agora, consideremos a equação definida por

$$\partial_t u_n(x, t) - \alpha \Delta u_n(x, t) = a(x, t) u_n(x, t) - b k(x - \gamma_n(t)) u_n(x, t). \quad (3.11)$$

Resulta dos limites obtidos anteriormente que

$$\partial_t u^*(x, t) - \alpha \Delta u^*(x, t) = a(x, t) u^*(x, t) - b k(x - \gamma^*(t)) u^*(x, t),$$

mediante a passagem ao limite fracamente em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ na equação (3.11).

Agora, provemos que $(\partial/\partial)(u^*) = 0$ em $S = \partial\Omega \times (0, T]$.

Definamos

$$\Gamma(\cdot) = \text{rest}|_S : L^2(0, T; H^s(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)),$$

o operador traço dado pelo Teorema 1.1.9, com $\frac{1}{2} < s < 1$.

Temos que a seqüência $(u_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $W_2^{2,1}(Q)$. Logo, $(u_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $L^2(0, T; H^2(\Omega))$ pois, usando equivalência de normas podemos considerar

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} &= (\|u\|_{L^2(Q)}^2 + \|D_x u\|_{L^2(Q)}^2 + \|D_x^2 u\|_{L^2(Q)}^2 + \|D_t u\|_{L^2(Q)}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \left(\int_Q |u|^2 dx dt + \int_Q |D_x u|^2 dx dt + \int_Q |D_x^2 u|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \left(\int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|D_x u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|D_x^2 u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Também, $(\partial_t u_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Como

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

são imersões contínuas para $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, com a imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega)$ compacta pelo Teorema 1.1.10. Segue do Lema 1.1.3, a existência de uma subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$ tal que

$$u_{n_k} \rightarrow u^* \quad \text{fortemente em } L^2(0, T; H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega)),$$

consequentemente,

$$\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla u^* \text{ fortemente em } L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Omega)).$$

Portanto, segue da continuidade do operador Γ que

$$(\partial/\partial\eta)(u_{n_k})|_S := (\nabla u_{n_k} \cdot \eta)|_S \rightarrow (\nabla u^* \cdot \eta)|_S := (\partial/\partial\eta)(u^*)|_S$$

em $L^2(0, T; H^c(\partial\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))$. Como $(\partial/\partial\eta)(u_{n_k})|_S = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue que

$$(\partial/\partial\eta)(u^*) = 0 \text{ em } L^2(0, T; L^2(\partial\Omega)).$$

Agora provemos que $u^*(x, 0) = u_0$ em Ω .

Como a subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$ está limitada em $W_2^{2,1}(Q)$, temos, em particular, que

$$(u_{n_k})_{k=1}^\infty \text{ está limitada em } L^2(0, T; H^2(\Omega))$$

e

$$(\partial_t u_{n_k})_{k=1}^\infty \text{ está limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Daí, pelo Teorema 1.1.8, com $m = 0$, vem

$$u_{n_k} \in C([0, T]; H^1(\Omega))$$

e

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_{n_k}(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|u_{n_k}\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} + \|\partial_t u_{n_k}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}),$$

para todo k . Logo, $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$ é uma sequência limitada de $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$. Temos ainda, passando a uma subsequência se necessário, que

$$\partial_t u_{n_k} \rightarrow \partial_t u^* \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Também sabemos que as imersões

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

são contínuas, com $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compacta. Segue do Lema 1.1.3, a existência de uma subsequência, que continuaremos denotando por $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$, tal que

$$u_{n_k} \rightarrow u^* \text{ fortemente em } C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Portanto,

$$\|u_{n_k}(0) - u^*(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \max_{0 \leq t \leq T} \|u_{n_k}(t) - u^*(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

fazendo o limite quando $k \rightarrow \infty$, concluímos que

$$\|u_0 - u^*(0)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Portanto

$$u^*(0) = u_0.$$

Assim, concluímos que u^* é solução de (3.4). Portanto, o ponto (γ^*, u^*) satisfaz $M(\gamma^*, u^*) = 0$ e assim obtemos que $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{U}_{ad}$.

Também temos que o funcional $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$J(\gamma, u) = \mu_0 \|\gamma\|_{L^2(0,T)}^2 + \mu_1 \|\gamma'\|_{L^2(0,T)}^2 + \mu_2 \|u\|_{L^2(Q)}^2,$$

é convexo pois, as funções $\|\cdot\|_{L^2(0,T)}^2 : L^2(0,T) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\|\cdot\|_{L^2(Q)}^2 : L^2(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ são convexas.

O funcional J é semi-contínuo inferiormente pois, é contínuo. Como já provamos que para uma subsequência apropriada

$$(\gamma_n, u_n) \rightarrow (\gamma^*, u^*) \text{ fracamente em } (H^1(0, T))^2 \times L^2(Q).$$

Segue da Proposição 1.1.12 que

$$J(\gamma^*, u^*) \leq \liminf J(\gamma_n, u_n) = \inf_{(\beta, v) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\beta, v).$$

Mais por outro lado, temos

$$\inf_{(\beta, v) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\beta, v) \leq J(\gamma^*, u^*).$$

Assim,

$$J(\gamma^*, u^*) = \inf_{(\beta, v) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\beta, v),$$

o que demonstra o teorema. ■

Observação 3.2.6. Recordemos que um espaço de Banach real é chamado **estritamente convexo** se a função norma

$$x \longmapsto \|x\|$$

é estritamente convexa. Observamos também que cada espaço de Hilbert real é estritamente convexo (veja Zeidler [24], Exemplo 5, p.69).

Segue da Observação 3.2.6 que $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional estritamente convexo pois,

$$J(\gamma, u) = \mu_0 \|\gamma\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + \mu_1 \|\gamma'\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + \mu_2 \|u\|_{L^2(Q)}^2,$$

com $(L^2(0,T))^2$ e $L^2(Q)$ espaços de Hilbert. Notemos que mesmo o funcional J sendo estritamente convexo, não podemos garantir de imediato a unicidade do controle, uma vez que, nosso conjunto admissível \mathcal{U}_{ad} não é convexo. ■

3.2.2 Cálculo dos Cones Associados

Antes de provarmos o teorema principal deste capítulo apresentaremos alguns resultados que serão fundamentais para a aplicação do formalismo de Dubovitskii e Milyutin.

Primeiramente, vamos verificar que o funcional $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ é Fréchet diferenciável em cada ponto (γ^*, u^*) e em qualquer direção (β, v) . Além disso, sua derivada é definida por

$$J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v) = 2\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \beta dt + 2\mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \beta' dt + 2\mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* v dx dt.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} J(\gamma^* + \beta, u^* + v) - J(\gamma^*, u^*) &= \mu_0 \int_0^T |\gamma^* + \beta|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma^{*'} + \beta'|^2 dt \\ &\quad + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |u^* + v|^2 dx dt \\ &\quad - \mu_0 \int_0^T |\gamma^*|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma^{*'}|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |u^*|^2 dx dt \\ &= \mu_0 \int_0^T |\gamma^*|^2 + 2\gamma^* \cdot \beta + |\beta|^2 dt \\ &\quad + \mu_1 \int_0^T |\gamma^{*'}|^2 + 2\gamma^{*'} \cdot \beta' + |\beta'|^2 dt \\ &\quad + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |u^*|^2 + 2u^* v + |v|^2 dx dt \\ &\quad - \mu_0 \int_0^T |\gamma^*|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma^{*'}|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |u^*|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J(\gamma^* + \beta, u^* + v) - J(\gamma^*, u^*) &= 2\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \beta dt + 2\mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \beta' dt + 2\mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* v dx dt \\ &\quad + \mu_0 \int_0^T |\beta|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\beta'|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |v|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned} &J(\gamma^* + \beta, u^* + v) - J(\gamma^*, u^*) - J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v) \\ &= \mu_0 \int_0^T |\beta|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\beta'|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |v|^2 dx dt \\ &= \|(\beta, v)\| \rho(\beta, v), \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \rho(\beta, v) &= \mu_0 \frac{1}{\|(\beta, v)\|} \int_0^T |\beta|^2 dt + \mu_1 \frac{1}{\|(\beta, v)\|} \int_0^T |\beta'|^2 dt + \mu_2 \frac{1}{\|(\beta, v)\|} \int_0^T \int_{\Omega} |v|^2 dx dt \\ &= \mu_0 \frac{\|\beta\|_{(L^2(0,T))^2}^2}{\|(\beta, v)\|} + \mu_1 \frac{\|\beta'\|_{(L^2(0,T))^2}^2}{\|(\beta, v)\|} + \mu_2 \frac{\|v\|_{L^2(Q)}^2}{\|(\beta, v)\|} \\ &\leq \mu_0 \frac{\|\beta\|_{(L^2(0,T))^2}^2}{\|\beta\|_{(L^2(0,T))^2}} + \mu_1 \frac{\|\beta'\|_{(L^2(0,T))^2}^2}{\|\beta'\|_{(L^2(0,T))^2}} + \mu_2 \frac{\|v\|_{L^2(Q)}^2}{\|v\|_{L^2(Q)}} \\ &= \mu_0 \|\beta\|_{(L^2(0,T))^2} + \mu_1 \|\beta'\|_{(L^2(0,T))^2} + \mu_2 \|v\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Portanto, vem

$$\lim_{\|(\beta, v)\|_{(H^1(0,T))^2 \times W_2^{2,1}(Q)} \rightarrow 0} |\rho(\beta, v)| = 0.$$

Assim, mostramos que J é Fréchet Diferenciável.

Lema 3.2.7. *O cone de direções de descida associado ao funcional $J(., .) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$, no ponto (γ^*, u^*) é dado por*

$$C_J(\gamma^*, u^*) = \{(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v) < 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[C_J(\gamma^*, u^*)]^* = \{g \in [\mathcal{A}]' \times [W_2^{2,1}(Q)]'; g(\beta, v) = -\lambda_1 J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v), \text{ para algum } \lambda_1 \geq 0\}.$$

Demonstração: Veja Corolário 2.2.10 e Teorema 2.3.2. ■

Lema 3.2.8. (i) A aplicação $M(.,.) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times H^1(\Omega)$ é Gâteaux - diferenciável e a derivada de Gâteaux de M no ponto (γ^*, u^*) e na direção (β, v) é definida por

$$\nabla_G M(\gamma^*, u^*)(\beta, v) = (M_1(\gamma^*, u^*), M_2(\gamma^*, u^*))$$

onde $M_1(\gamma^*, u^*)$ e $M_2(\gamma^*, u^*)$ satisfazem a equação

$$\begin{cases} \partial_t v - \alpha \Delta v = a v - b k(x - \gamma^*) v + b \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta u^* + M_1(\gamma^*, u^*) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(v) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ v(0) = M_2(\gamma^*, u^*) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.12)$$

(ii) A aplicação $M(.,.)$ é estritamente diferenciável e o operador $\nabla_G M(\gamma^*, u^*)$ é sobrejetivo.

Demonstração: Para provar (i); devemos verificar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{M(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - M(\gamma^*, u^*)}{h} - (M_1(\gamma^*, u^*), M_2(\gamma^*, u^*)) \right\|_{L^2(Q) \times H^1(\Omega)} = 0.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} [M(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - M(\gamma^*, u^*)] \\ &= \frac{1}{h} \left[\left(\partial_t(u^* + hv) - \alpha \Delta(u^* + hv) - a(u^* + hv) + bk(x - (\gamma^* + h\beta))(u^* + hv), \right. \right. \\ & \quad \left. \left. (u^* + hv)(0) - u_0 \right) - \left(\partial_t u^* - \alpha \Delta u^* - a u^* + bk(x - \gamma^*) u^*, u^*(0) - u_0 \right) \right]. \end{aligned}$$

Daí, cancelando adequadamente os termos correspondentes da identidade anterior e depois usando (3.12), obtemos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} [M(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - M(\gamma^*, u^*)] \\ &= \left[M_1(\gamma^*, u^*) + bk(x - (\gamma^* + h\beta))v - bvk(x - \gamma^*) \right. \\ & \quad \left. + bu^* \left(\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} \right) + bu^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta, M_2(\gamma^*, u^*) \right]. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{M(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - M(\gamma^*, u^*)}{h} - (M_1(\gamma^*, u^*), M_2(\gamma^*, u^*)) \right\|_{L^2(Q) \times H^1(\Omega)} \\ &= \|bv[k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)] \\ & \quad + bu^* \left[\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right]\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Agora, das hipóteses sobre $k(\cdot)$ temos o limite pontual dado por

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(x - \gamma^* + h(-\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} \\ &= \nabla k(x - \gamma^*) \cdot (-\beta) \\ &= -\nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta. \end{aligned}$$

Assim, vem

$$bu^* \left[\frac{k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right] \rightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Agora, aplicando o teorema do valor médio, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*) = \nabla k(x - \gamma^* - \theta h\beta) \cdot (-h\beta).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &bu^* \left[\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right] \\ &= bu^* \left[\frac{\nabla k(x - \gamma^* - \theta h\beta) \cdot (-h\beta)}{h} + \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right] \\ &= -bu^* [\nabla k(x - \gamma^* - \theta h\beta) \cdot \beta - \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta]. \end{aligned}$$

Como por hipótese $\nabla k \in (C^0(\Omega))^2$, se segue do Lema 3.2.3 aplicado à função ∇k que existe uma constante N_1 tal que

$$|bu^* [\nabla k(x - \gamma^* - \theta h\beta) \cdot \beta - \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta]| \leq 2bN_1 |u^*| |\beta|.$$

Notemos ainda que $2bN_1 |u^*| |\beta| \in L^2(Q)$.

Da mesma forma, concluímos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} |k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*)| = 0$$

e

$$|k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*)| \leq N_2.$$

Daí, segue que a função $k(x - \gamma^* - h\beta) - k(x - \gamma^*) \in L^2(Q)$ e

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{M(\gamma^* + h\beta, u^* + hv) - M(\gamma^*, u^*)}{h} - (M_1(\gamma^*, u^*), M_2(\gamma^*, u^*)) \right\|_{L^2(Q) \times H^1(\Omega)} \\ &\leq b \|v [k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)]\|_{L^2(Q)} \\ &\quad + b \|u^* \left[\frac{k(x - (\gamma^* + h\beta)) - k(x - \gamma^*)}{h} - \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta \right]\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Agora, aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue temos o resultado desejado. Assim, concluímos a afirmação (i).

Agora provaremos (ii). Para provar que a aplicação $M : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times H^1(\Omega)$ é estritamente diferenciável em (γ^*, u^*) , é suficiente mostrar que a função $(\gamma, u) \rightarrow \nabla_G M(\gamma, u)$ é contínua em (γ^*, u^*) e aplicar o item (i) juntamente com o Lema 2.2.8.

Agora, fixemos $(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ arbitrário, tal que

$$\nabla_G M(\gamma^*, u^*)(\beta, v) = (M_1(\gamma^*, u^*), M_2(\gamma^*, u^*)).$$

Consideremos o operador

$$M_1 : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q),$$

definido por

$$M_1(\gamma^*, u^*) = \partial_t v - \alpha \Delta v - av + bk(x - \gamma^*)v + bu^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta.$$

Enquanto que o operador

$$M_2 : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow H^1(\Omega)$$

satisfaz

$$M_2(\gamma^*, u^*) = v(0).$$

Esses operadores estão bem definidos e não é difícil verificar que $\nabla_G M(\gamma^*, u^*)(\cdot, \cdot) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times H^1(\Omega)$ é um operador linear e contínuo. Agora, provaremos a continuidade de $\nabla_G M$ em (γ^*, u^*) .

Consideremos $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que $(\gamma_n, u_n) \rightarrow (\gamma^*, u^*)$ fortemente em $\mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$. Temos que

$$\begin{aligned} & \|M_1(\gamma_n, u_n) - M_1(\gamma^*, u^*)\|_{L^2(Q)} \\ &= \|(\partial_t v - \alpha \Delta v - av + bk(\cdot - \gamma_n)v + bu_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) \cdot \beta) \\ &\quad - (\partial_t v - \alpha \Delta v - av + bk(\cdot - \gamma^*)v + bu^* \nabla k(\cdot - \gamma^*) \cdot \beta)\|_{L^2(Q)} \\ &= \|b(k(\cdot - \gamma_n) - k(\cdot - \gamma^*))v + b(u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) - u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*)) \cdot \beta\|_{L^2(Q)} \\ &\leq b\|(k(\cdot - \gamma_n) - k(\cdot - \gamma^*))v\|_{L^2(Q)} + b\|(u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) - u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*)) \cdot \beta\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Assim, das hipóteses sobre k e o Lema 3.2.3, vem

$$k(x - \gamma_n) \rightarrow k(x - \gamma^*) \text{ uniformemente em } [0, T] \times \mathbb{R}^2,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| < \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Assim,

$$\|(k(\cdot - \gamma_n) - k(\cdot - \gamma^*))v\|_{L^2(Q)} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |k(x - \gamma_n(t)) - k(x - \gamma^*(t))| \|v\|_{L^2(Q)} < \epsilon \|v\|_{L^2(Q)}.$$

Notemos também que pelo Lema 3.2.3 aplicado a ∇k , existe uma constante $C > 0$ tal que, $|\nabla k(x - \gamma_n)| \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\nabla k(x - \gamma_n) \rightarrow \nabla k(x - \gamma^*) \text{ uniformemente em } [0, T] \times \mathbb{R}^2,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |\nabla k(x - \gamma_n(t)) - \nabla k(x - \gamma^*(t))| < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_1$.

Também existe n_2 tal que

$$\|u_n - u^*\|_{L^2(Q)} < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_2$.

Tomando $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ e aplicando a continuidade da imersão $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$,

obtemos para $n \geq n_3$ que

$$\begin{aligned}
& \|u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) \cdot \beta - u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*) \cdot \beta\|_{L^2(Q)} \\
& \leq \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) - u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*)\|_{L^2(Q)} \\
& = \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|u_n \nabla k(\cdot - \gamma_n) - u^* \nabla k(\cdot - \gamma_n) + u^* \nabla k(\cdot - \gamma_n) - u^* \nabla k(\cdot - \gamma^*)\|_{L^2(Q)} \\
& \leq \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|\nabla k(\cdot - \gamma_n)(u_n - u^*)\|_{L^2(Q)} \\
& \quad + b \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|u^*(\nabla k(\cdot - \gamma_n) - \nabla k(\cdot - \gamma^*))\|_{L^2(Q)} \\
& \leq \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \|\nabla k(\cdot - \gamma_n)(u_n - u^*)\|_{L^2(Q)} \\
& \quad + \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]} |\nabla k(x - \gamma_n(t)) - \nabla k(x - \gamma^*(t))| \|u^*\|_{L^2(Q)} \\
& \leq \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| C \|u_n - u^*\|_{L^2(Q)} + \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \epsilon \|u^*\|_{L^2(Q)} \\
& < \epsilon (C + \|u^*\|_{L^2(Q)}) \max_{0 \leq t \leq T} |\beta(t)| \\
& \leq \epsilon (C + \|u^*\|_{L^2(Q)}) C_1 \|\beta\|_{(H^1(0, T))^2} = \epsilon C_2 \|\beta\|_{(H^1(0, T))^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|M_1(\gamma_n, u_n) - M_1(\gamma^*, u^*)\|_{L^2(Q)} \leq \epsilon (\|v\|_{L^2(Q)} + C_2 \|\beta\|_{(H^1(0, T))^2}),$$

para todo $n \geq n_3$.

Para provar a continuidade de M_2 em (γ^*, u^*) , consideremos novamente $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que $(\gamma_n, u_n) \rightarrow (\gamma^*, u^*)$ fortemente em $\mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$. Segue da definição de M_2 que

$$\|M_2(\gamma_n, u_n) - M_2(\gamma^*, u^*)\|_{H^1(\Omega)} = \|v(0) - v(0)\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& \|\nabla_G M(\gamma_n, u_n)(\beta, v) - \nabla_G M(\gamma^*, u^*)(\beta, v)\|_{L^2(Q) \times H^1(\Omega)} \\
& = \|(M_1(\gamma_n, u_n), M_2(\gamma_n, u_n)) - (M_1(\gamma^*, u^*), M_2(\gamma^*, u^*))\|_{L^2(Q) \times H^1(\Omega)} \\
& = \|M_1(\gamma_n, u_n) - M_1(\gamma^*, u^*)\|_{L^2(Q)} + \|M_2(\gamma_n, u_n) - M_2(\gamma^*, u^*)\|_{H^1(\Omega)} \\
& = \|M_1(\gamma_n, u_n) - M_1(\gamma^*, u^*)\|_{L^2(Q)} \\
& \leq \epsilon (\|v\|_{L^2(Q)} + C_2 \|\beta\|_{(H^1(0, T))^2}),
\end{aligned}$$

para todo $n \geq n_3$. Portanto, obtemos que

$$\begin{aligned} & \|\nabla_G M(\gamma_n, u_n) - \nabla_G M(\gamma^*, u^*)\| \\ &= \sup\{\|\nabla_G M(\gamma_n, u_n)(\beta, v) - \nabla_G M(\gamma^*, u^*)(\beta, v)\|_{L^2(Q) \times H^1(\Omega)}, \|(\beta, v)\|_{(H^1(0,T))^2 \times W_2^{2,1}(Q)} \leq 1\} \\ &\leq \epsilon \sup\{\|v\|_{L^2(Q)} + C_2 \|\beta\|_{(H^1(0,T))^2}, \|(\beta, v)\|_{(H^1(0,T))^2 \times W_2^{2,1}(Q)} \leq 1\} \\ &\leq \epsilon(1 + C_2). \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_3$. Assim, concluímos que

$$\nabla_G M(\gamma_n, u_n) \rightarrow \nabla_G M(\gamma^*, u^*),$$

ou seja, a aplicação $(\beta, v) \mapsto \nabla_G M(\beta, v)$ é contínua em (γ^*, u^*) . Logo, $M(\cdot, \cdot) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times H^1(\Omega)$ é estritamente diferenciável em (γ^*, u^*) .

Agora, provaremos que $\nabla_G M(\gamma^*, u^*)$ é um operador sobrejetor. Dados $(\varphi_1, \varphi_2) \in L^2(Q) \times H^1(\Omega)$ e $\beta \in \mathcal{A}$, consideremos $(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ a única solução da equação (3.12) com $(M_1, M_2) = (\varphi_1, \varphi_2)$, obtida pela aplicação do Teorema 3.1.3. Logo,

$$\nabla_G M(\gamma^*, u^*)(\beta, v) = (\varphi_1, \varphi_2).$$

Portanto, $\nabla_G M(\gamma^*, u^*)$ é sobrejetor. Isso conclui a demonstração do lema. ■

Lema 3.2.9. *O cone tangente ao conjunto*

$$W = \{(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); M(\beta, v) = 0\},$$

no ponto $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ é o subespaço vetorial dado por

$$T_{(\gamma^*, u^*)}(W) = \{(\gamma, u) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); \nabla_G M(\gamma^*, u^*)(\gamma, u) = 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[T_{(\gamma^*, u^*)}(W)]^* = \{g_2 \in [\mathcal{A}]' \times [W_2^{2,1}(Q)]'; g_2(\gamma, u) = 0, \forall (\gamma, u) \in T_{(\gamma^*, u^*)}(W)\}.$$

Demonstração: A demonstração segue do Lema 3.2.8 e do Teorema de Lyusternick (Teorema 2.2.16), junto com o Teorema 2.3.1. ■

3.2.3 Aplicação do Formalismo de Dubovitskii e Milyutin

Nesta seção, provaremos o teorema principal deste capítulo. Este teorema dá as condições necessárias de otimalidade para uma solução ótima do Problema (3.6).

Teorema 3.2.10. *Seja $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ uma solução ótima do problema (3.6), então existe uma função $p^* \in W_2^{2,1}(Q)$ tais que: (γ^*, u^*) satisfaz*

$$\begin{cases} \partial_t u^* - \alpha \Delta u^* = a u^* - b k(x - \gamma^*) u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(u^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ u^*(0) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

p^* é solução do problema adjunto, ou seja,

$$\begin{cases} -\partial_t p^* - \alpha \Delta p^* = a p^* - b k(x - \gamma^*) p - u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(p^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ p^*(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

E o controle γ^* satisfaz o sistema de equações integro-diferenciais definido por

$$\begin{cases} -\mu_1 \gamma^{*''} + \mu_0 \gamma^* - \mu_2 b \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) dx = 0 & \text{em } (0, T), \\ \gamma^*(0) = 0, \\ \gamma^{*'}(T) = 0, \end{cases}$$

no sentido fraco dado em (3.15).

Demonstração: Primeiramente a existência de uma solução ótima $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ para o Problema (3.6) é garantida pelo Teorema 3.2.5.

Agora, segue do teorema de Dubovitskii e Milyutin (veja Teorema 2.1.18) que existem funcionais lineares e contínuos $g_1 \in [C_J(\gamma^*, u^*)]^*$ e $g_2 \in [T_{(\gamma^*, u^*)}(W)]^*$, não simultaneamente nulos, tais que vale a equação de Euler-Lagrange

$$g_1 + g_2 = 0. \quad (3.13)$$

Sabemos que para algum $\lambda_1 \geq 0$,

$$\begin{aligned} g_2(\beta, v) &= -g_1(\beta, v) = \lambda_1 J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v) \\ &= 2\lambda_1 \left(\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \beta dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \beta' dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* v dx dt \right), \end{aligned}$$

para todo $(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$.

Vejam que $\lambda_1 > 0$. De fato, se $\lambda_1 = 0$ temos que $g_1 \equiv 0$ e da equação (3.13) deduzimos que $g_2 \equiv 0$, o que contradiz o teorema de Dubovitskii e Milyutin. Portanto, $\lambda_1 > 0$.

Seja $\gamma \in \mathcal{A}$ um controle arbitrário e tome w a solução da equação dada por

$$\begin{cases} \partial_t w - \alpha \Delta w = a w - b k(x - \gamma^*) w + b \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \gamma u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial \eta)(w) = 0 & \text{em } S = \partial \Omega \times (0, T], \\ w(0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.14)$$

note que esta solução existe pela Proposição 1.1.11. Neste caso, temos que $(\gamma, w) \in T_{(\gamma^*, u^*)}(W)$ e conseqüentemente $g_2(\gamma, w) = 0$.

Agora, segue da equação (3.13) que

$$\begin{aligned} g_1(\gamma, w) &= -\lambda_1 J'(\gamma^*, u^*)(\gamma, w) = \\ &= -2\lambda_1 \left(\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \gamma dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \gamma' dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* w dx dt \right) = 0. \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 > 0$, obtemos que

$$\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \gamma dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \gamma' dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* w dx dt = 0,$$

para todo $(\gamma, w) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$, com w solução de (3.14).

Consideremos p^* a variável de co-estado (ou adjunta), solução da equação definida por

$$\begin{cases} -\partial_t p - \alpha \Delta p = a p - b k(x - \gamma^*) p - u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial \eta)(p) = 0 & \text{em } S = \partial \Omega \times (0, T], \\ p(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega} u^* w dx dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} (-u^*) w dx dt \\
&= - \int_0^T \int_{\Omega} [-\partial_t p^* - \alpha \Delta p^* - a p^* + b k(x - \gamma^*) p^*] w dx dt \\
&= - \int_0^T \int_{\Omega} p^* [\partial_t w - \alpha \Delta w - a w + b k(x - \gamma^*) w] dx dt \\
&= - \int_0^T \int_{\Omega} b p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \gamma dx dt.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \gamma dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \gamma' dt - \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \gamma dx dt = 0, \quad (3.15)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{A}$.

Em particular, para todo $\gamma \in (\mathcal{D}(0, T))^2 \subset \mathcal{A}$ vem

$$\left\langle \gamma^{*''}, \gamma \right\rangle_{(\mathcal{D}'(0, T))^2, (\mathcal{D}(0, T))^2} = - \left\langle \gamma^{*'}, \gamma' \right\rangle_{(\mathcal{D}'(0, T))^2, (\mathcal{D}(0, T))^2} = - \int_0^T \gamma^{*'} \gamma' dt.$$

Portanto, restringindo (3.15) a $(\mathcal{D}(0, T))^2$, obtemos no sentido de distribuição que

$$\left\langle \mu_0 \gamma^* - \mu_1 \gamma^{*''} - \mu_2 b \int_{\Omega} p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) dx, \gamma \right\rangle_{(\mathcal{D}'(0, T))^2, (\mathcal{D}(0, T))^2} = 0.$$

Logo, obtemos em particular que

$$\mu_0 \gamma^*(t) - \mu_1 \gamma^{*''}(t) - \mu_2 b \int_{\Omega} p^* u^* k'(x - \gamma^*(t)) dx = 0, \quad (3.16)$$

no sentido de distribuição.

Agora, obteremos as condições de contorno para o problema. Segue dos resultados anteriores que

$$\gamma^*(0) = 0, \quad (3.17)$$

pois $\gamma^* \in \mathcal{A}$.

Temos também que

$$\gamma^{*'}(T) = 0 \quad (3.18)$$

no sentido fraco. De fato, se γ^* tivesse mais regularidade de tal forma que $\gamma^{*''}$ fosse integrável, usando integração por partes teríamos que

$$\int_0^T \gamma^{*'}(t)\gamma'(t)dt = \gamma^{*'}(T)\gamma(T) - \int_0^T \gamma^{*''}(t)\gamma(t)dt.$$

De (3.15), vem

$$\left(\mu_0\gamma^* - \mu_1\gamma^{*''} - \mu_2b \int_{\Omega} p^*u^*\nabla k(x - \gamma^*)dx, \gamma \right)_{(L^2(0,T))^2} + \mu_1\gamma^{*'}(T)\gamma(T) = 0, \quad (3.19)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{A}$.

Agora, por (3.16) obtemos que

$$\mu_1\gamma^{*'}(T)\gamma(T) = 0, \quad \forall \gamma \in \mathcal{A}.$$

Como para $\gamma \in \mathcal{A}$ arbitrário, $\gamma(T)$ não é necessariamente nulo, segue que $\gamma^{*'}(T) = 0$.

De (3.16),(3.17) e (3.18) segue o teorema. ■

CAPÍTULO 4

Problema de Controle Ótimo Com Restrição no Controle

Neste capítulo, estudaremos o problema anterior modificado, ou seja, acrescentaremos a hipótese adicional $\|\gamma'\|_{(L^2(0,T))^2} \leq R_0$, sobre o conjunto dos controles admissíveis. Novamente transformaremos o problema de controle em um problema matemático de otimização abstrato, para, em seguida, mostrarmos a existência de uma solução ótima e as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem via o formalismo de Dubovitskii e Milyutin. Em seguida, utilizaremos o método da penalização para obter uma condição de otimalidade para o controle ótimo dada por um sistema de equações diferenciais, semelhante à obtida no capítulo anterior.

4.1 Formulação Matemática do Problema

Seja Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^2 , com fronteira de classe C^3 e $0 < T < +\infty$ uma constante.

Neste capítulo continuaremos denotando \mathcal{A} como na Definição 3.1.1, ou seja,

$$\mathcal{A} = \{\gamma \in (H^1(0,T))^2 \mid \gamma(0) = 0\}, \quad (4.1)$$

é o subespaço fechado de $(H^1(0, T))^2$, com a topologia induzida pela norma definida por

$$\|\gamma\|_{(H^1(0, T))^2} = \left(\int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

Definição 4.1.1. *Ao longo deste capítulo denotaremos o conjunto dos **controles admissíveis** por \mathcal{B} o subconjunto fechado de \mathcal{A} definido por*

$$\mathcal{B} = \{\gamma \in (H^1(0, T))^2; \gamma(0) = 0 \text{ e } \|\gamma\|_{(H^1(0, T))^2} \leq R_0\}, \quad (4.3)$$

onde $R_0 > 0$ é uma constante.

Consideremos o funcional $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(\gamma, u) = \mu_0 \int_0^T |\gamma(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx dt, \quad (4.4)$$

com u a solução da equação definida por

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \alpha \Delta u(x, t) = a(x, t) u(x, t) - b k(x - \gamma(t)) u(x, t) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(u) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.5)$$

Os coeficientes $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \alpha, a$ e b são os mesmos do capítulo anterior.

Queremos encontrar condições de otimalidade para o problema dado por

$$\min_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\gamma, u), \quad (4.6)$$

onde \mathcal{U}_{ad} é definido a seguir.

Definição 4.1.2. *O conjunto admissível \mathcal{U}_{ad} é definido por*

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(\gamma, u) \in \mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q); M(\gamma, u) = 0\},$$

onde $M : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times H^1(\Omega)$ é o operador dado pela Definição 3.2.1.

4.2 Formulação Como Problema de Otimização e Resultados

Nesta seção mostraremos que o Problema (4.6) admite uma solução ótima $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{U}_{ad}$. Também mostraremos que para este problema modificado podemos aplicar a teoria de Dubovitskii e Milyutin. Mas, devido ao conjunto dos controles admissíveis \mathcal{B} não ser um subespaço de $(H^1(0, T))^2$, não será possível obter de imediato uma condição necessária para o controle γ^* , semelhante à que foi obtida no capítulo anterior. Algumas demonstrações desta seção serão omitidas, por serem análogas às do capítulo anterior.

Por uma questão de notação, continuaremos denotando por (γ^*, u^*) a solução ótima do Problema (4.6). Necessariamente esta solução não será a mesma obtida no capítulo anterior.

4.2.1 Existência de Controle Ótimo

Teorema 4.2.1. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1.3, existe $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)$ uma solução ótima do Problema (4.6).*

Demonstração: Para cada $\gamma \in \mathcal{B}$, segue do Teorema 3.1.3 a existência de uma única solução $u \in W_2^{2,1}(Q)$ para a equação (4.5). Logo, $M(\gamma, u) = 0$ e portanto, $\mathcal{U}_{ad} \neq \emptyset$.

Seja $(\gamma_n, u_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de \mathcal{U}_{ad} tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(\gamma_n, u_n) = \inf_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\gamma, u), \quad (4.7)$$

isto é, uma sequência minimizante.

Como $(\gamma_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de \mathcal{B} , segue que $\|\gamma_n'\|_{(L^2(0, T))^2} \leq R_0$ para todo n , em particular $(\gamma_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência limitada de $(H^1(0, T))^2$.

Agora, segue da reflexividade de $(H^1(0, T))^2$ e da compacidade da imersão $(H^1(0, T))^2 \hookrightarrow (C([0, T]))^2$ que existe $\gamma^* \in (H^1(0, T))^2$ e uma subsequência $(\gamma_{n_k})_{k=1}^\infty$ tais que:

1. $\gamma_{n_k} \rightharpoonup \gamma^*$ fracamente em $(H^1(0, T))^2$
2. $\gamma_{n_k} \rightarrow \gamma^*$ fortemente em $(C([0, T]))^2$.

Por (2.) temos que $\gamma^*(0) = 0$ e portanto, $\gamma^* \in \mathcal{A}$. Por outro lado, segue de (1.) que

$$\|\gamma^*\|_{(L^2(0,T))^2} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\gamma'_{n_k}\|_{(L^2(0,T))^2} \leq R_0.$$

Portanto, $\gamma^* \in \mathcal{B}$.

Também podemos verificar que existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ e $u^* \in W_2^{2,1}(Q)$ tal que, (γ^*, u^*) satisfaz a equação (4.5) e

$$u_{n_k} \rightharpoonup u^* \text{ fracamente em } W_2^{2,1}(Q).$$

Portanto,

$$(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Agora, como J é um funcional convexo e contínuo, segue da Proposição 1.1.12 que

$$J(\gamma^*, u^*) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(\gamma_{n_k}, u_{n_k}) = \inf_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\gamma, u).$$

Conseqüentemente, obtemos que

$$J(\gamma^*, u^*) = \inf_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\gamma, u).$$

■

4.2.2 Aplicação do Formalismo de Dubovitskii e Milyutin

Como já provamos anteriormente na seção 3.2.2., o funcional $J : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ é Fréchet diferenciável e a derivada de J no ponto (γ, u) e na direção (β, v) é dada por

$$J'(\gamma, u)(\beta, v) = 2\mu_0 \int_0^T \gamma \cdot \beta dt + 2\mu_1 \int_0^T \gamma' \cdot \beta' dt + 2\mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} uv dx dt.$$

Similarmente ao que foi desenvolvido no capítulo anterior, seguem os seguintes resultados.

Lema 4.2.2. *O cone de direções de descida associado ao funcional $J(., .) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$, no ponto (γ^*, u^*) é dado por*

$$C_J(\gamma^*, u^*) = \{(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v) < 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[C_J(\gamma^*, u^*)]^* = \{g \in [\mathcal{A}]' \times [W_2^{2,1}(Q)]'; g(\beta, v) = -\lambda_1 J'(\gamma^*, u^*)(\beta, v), \text{ para algum } \lambda_1 \geq 0\}.$$

Demonstração: Veja Corolário 2.2.10 e Teorema 2.3.2. ■

Lema 4.2.3. (i) A aplicação $M(.,.) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times H^1(\Omega)$ é Gâteaux - diferenciável e a derivada de Gâteaux de M no ponto (γ^*, u^*) e na direção (β, v) é definida por

$$\nabla_G M(\gamma^*, u^*)(\beta, v) = (M_1(\gamma^*, u^*), M_2(\gamma^*, u^*))$$

se $M_1(\gamma^*, u^*)$ e $M_2(\gamma^*, u^*)$ satisfazem a equação

$$\begin{cases} v_t - \alpha \Delta v = a v - b k(x - \gamma^*) v + b \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \beta u^* + M_1(\gamma^*, u^*) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial \eta)(v) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ v(0) = M_2(\gamma^*, u^*) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.8)$$

(ii) A aplicação $M(.,.)$ é estritamente diferenciável e o operador $\nabla_G M(\gamma^*, u^*)$ é sobrejetivo.

Demonstração: Análoga à do Lema 3.2.8. ■

Lema 4.2.4. O cone tangente ao conjunto $W = \{(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); M(\beta, v) = 0\}$ no ponto $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)$ é o subespaço vetorial dado por

$$T_{(\gamma^*, u^*)}(W) = \{(\gamma, u) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); \nabla_G M(\gamma^*, u^*)(\gamma, u) = 0\},$$

e seu cone dual é dado por

$$[T_{(\gamma^*, u^*)}(W)]^* = \{g_2 \in [\mathcal{A}]' \times [W_2^{2,1}(Q)]'; g_2(\gamma, u) = 0, \forall (\gamma, u) \in T_{(\gamma^*, u^*)}(W)\}.$$

Demonstração: A demonstração segue do Lema 4.2.3 e do Teorema de Lyusternick (Teorema 2.2.16), junto com o Teorema 2.3.1. ■

Um simples cálculo mostra que \mathcal{B} é um subconjunto convexo e fechado de \mathcal{A} . Como \mathcal{B} é uma bola, visto como subconjunto na topologia de \mathcal{A} , segue que $\text{int}\mathcal{B} \neq \emptyset$. Logo, $\mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)$ é um subconjunto convexo e fechado de $\mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ e $\text{int}(\mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)) \neq \emptyset$.

Lema 4.2.5 (Análise das Restrições de Controle). O conjunto das direções factíveis para $\mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)$ no ponto (γ^*, u^*) é dado por

$$\mathcal{B}_f = \{\lambda(\text{int}(\mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)) - (\gamma^*, u^*))/\lambda > 0\},$$

e seu cone dual é dado por

$$[\mathcal{B}_f]^* = [\mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)]^* = \{g \in [\mathcal{A}]' \times [W_2^{2,1}(Q)]'; g(\gamma, u) - g(\gamma^*, u^*) \geq 0, \\ \text{para todo } (\gamma, u) \in \mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)\}.$$

Demonstração: Segue da Proposição 2.2.15 e do Teorema 2.3.4. ■

Observação 4.2.6. No Capítulo 3, seção 3.2 não tivemos restrição de controle uma vez que, \mathcal{A} é um espaço vetorial.

O próximo teorema segue dos resultados anteriores e do teorema de Dubovitskii e Milyutin (Teorema 2.1.18). Este teorema fornecerá uma condição de otimalidade para o controle ótimo γ^* .

Teorema 4.2.7. Seja $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)$ uma solução ótima do Problema (4.6), então existe uma função $p^* \in W_2^{2,1}(Q)$ tais que: (γ^*, u^*) satisfaz

$$\begin{cases} \partial_t u^* - \alpha \Delta u^* = a u^* - b k(x - \gamma^*) u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(u^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ u^*(0) = u_0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

p^* é solução do problema adjunto, ou seja,

$$\begin{cases} -\partial_t p^* - \alpha \Delta p^* = a p^* - b k(x - \gamma^*) p^* - u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(p^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ p^*(T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e o controle γ^* satisfaz a condição necessária de otimalidade dada por

$$\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot (\gamma - \gamma^*) dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot (\gamma' - \gamma^{*}') dt - \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} u^* p^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot (\gamma - \gamma^*) dx dt \geq 0, \quad (4.9)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{B}$.

Demonstração: Seja $(\gamma^*, u^*) \in \mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)$ uma solução ótima de (4.6). Segue do teorema de Dubovitskii e Milyutin (Teorema 2.1.18), a existência de funcionais lineares é

contínuos $g_1 \in [C_J(\gamma^*, u^*)]^*$, $g_2 \in [T_{(\gamma^*, u^*)}(W)]^*$ e $g_3 \in [\mathcal{B}_f]^*$, não simultaneamente nulos, tais que vale a equação de Euler-Lagrange dada por

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0. \quad (4.10)$$

Notemos que $g_3(\gamma, u) = g_3^{(1)}(\gamma)$, com $g_3^{(1)} \in [\mathcal{A}]'$. De fato,

$$g_3(\gamma, u) = g_3^{(1)}(\gamma) + g_3^{(2)}(u),$$

com $g_3^{(1)} \in [\mathcal{B}]^*$ e $g_3^{(2)} \in [W_2^{2,1}(Q)]^*$. Logo, $g_3^{(2)} \equiv 0$ pois, $[W_2^{2,1}(Q)]^* = \{0\}$.

Seja $\gamma \in \mathcal{B}$ um controle arbitrário e tome w a solução da equação

$$\begin{cases} \partial_t w - \alpha \Delta w = a w - b k(x - \gamma^*) w + b \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \gamma u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial \eta)(w) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ w(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.11)$$

Neste caso, temos que $(\gamma, w) \in T_{(\gamma^*, u^*)}(W)$ e conseqüentemente $g_2(\gamma, w) = 0$.

Agora, segue da equação (4.10) que

$$g_1(\gamma, w) + g_3^{(1)}(\gamma) = 0.$$

Assim, para algum $\lambda_1 \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned} g_3^{(1)}(\gamma) = -g_1(\gamma, w) &= \lambda_1 J'(\gamma^*, u^*)(\gamma, w) = \\ &= 2\lambda_1 \left(\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \gamma dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \gamma' dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^* w dx dt \right), \end{aligned}$$

para todo $\gamma \in \mathcal{B}$ e w a solução de (4.11) correspondente a γ .

Vejamus que $\lambda_1 > 0$. De fato, se $\lambda_1 = 0$, a equação (4.10) se reduz a

$$g_2 + g_3 = 0.$$

Agora, atuando essa equação sobre qualquer $(\gamma, w) \in T_{(\gamma^*, u^*)}(W)$, ou seja, sobre qualquer $\gamma \in \mathcal{A}$ e w a solução de (4.11) correspondente a γ , resulta que $g_2(\gamma, w) = 0$. Assim,

$$g_3(\gamma, w) = g_3^{(1)}(\gamma) = 0,$$

para todo $\gamma \in \mathcal{A}$. De onde concluímos que

$$g_3^{(1)} \equiv 0,$$

ou seja

$$g_3 \equiv 0.$$

Mas isso contradiz o teorema de Dubovitskii e Milyutin. Portanto, $\lambda_1 > 0$.

Consideremos agora p^* , a variável de co-estado (ou adjunta), solução da equação definida por

$$\begin{cases} -\partial_t p - \alpha \Delta p = a p - b k(x - \gamma^*) p - u^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(p) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ p(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.12)$$

Daí

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u^* w dx dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} [-\partial_t p^* - \alpha \Delta p^* - a p^* + b k(x - \gamma^*) p^*] w dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} p^* [\partial_t w - \alpha \Delta w - a w + b k(x - \gamma^*) w] dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} b p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \gamma dx dt. \end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$g_3^{(1)}(\gamma) = g_3(\gamma, w) = 2\lambda_1 \mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot \gamma dt + 2\lambda_1 \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot \gamma' dt - 2\lambda_1 \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} b p^* u^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot \gamma dx dt, \quad (4.13)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{B}$. Mas, pelo Lema 4.2.5 vem

$$g_3(\gamma, w) \geq g_3(\gamma^*, u^*),$$

para todo $(\gamma, w) \in \mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)$, ou seja,

$$g_3^{(1)}(\gamma - \gamma^*) \geq 0,$$

para todo $\gamma \in \mathcal{B}$. Portanto,

$$\mu_0 \int_0^T \gamma^* \cdot (\gamma - \gamma^*) dt + \mu_1 \int_0^T \gamma^{*'} \cdot (\gamma' - \gamma^{*}') dt - \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} u^* p^* \nabla k(x - \gamma^*) \cdot (\gamma - \gamma^*) dx dt \geq 0, \quad (4.14)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{B}$. Com u^* a solução da equação (4.5) e p^* a solução da equação (4.12). ■

Observação 4.2.8. *Note que da estimativa (4.9) não podemos concluir a identidade (3.15) para todo $\gamma \in \mathcal{B}$, uma vez que, \mathcal{B} não é um subespaço de \mathcal{A} .* ■

4.3 Formulação de um Problema Auxiliar Usando o Método de Penalização

Notemos que devido ao conjunto das restrições de controle \mathcal{B} não ser um subespaço de \mathcal{A} , o cone dual $[\mathcal{B}_f]^* \neq \{0\}$. Assim, na seção anterior não foi possível obter um resultado de otimalidade para o controle γ^* em termos de uma equação diferencial como no capítulo anterior; observamos que o que foi obtida foi uma desigualdade diferencial.

Como o objetivo de obter uma condição de otimalidade para o controle ótimo que seja uma igualdade, nesta seção reanalisaremos o problema utilizando outro método.

Para isto, formularemos um problema penalizado que é um problema auxiliar para o modelo estudado na seção anterior, com o termo penalizante atuando na restrição $\|\gamma\|_{(H^1(0,T))^2} \leq R_0$.

Mostraremos que para esse novo problema, existe uma sequência $(\gamma_n, u_n)_{n=1}^\infty$ de soluções ótimas, com condições de otimalidade a serem verificadas posteriormente e que esta sequência admite uma subsequência convergente para o ponto $(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*) \in \mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)$. Também, mostraremos que este limite é uma solução ótima do Problema (4.6). Daí, mostraremos que o vetor $\bar{\gamma}^*$ satisfaz a condição da seção anterior obtida pela teoria de Dubovitskii e Milyutin e também uma certa equação diferencial.

4.3.1 Formulação Matemática do Problema Penalizado

Primeiramente recordemos a definição do conjunto \mathcal{A} .

Definição 4.3.1. *Denotemos por*

$$\mathcal{A} = \{\gamma \in (H^1(0, T))^2 \mid \gamma(0) = 0\}, \quad (4.15)$$

o subespaço fechado de $(H^1(0, T))^2$, com a topologia induzida pela norma definida por

$$\|\gamma\|_{(H^1(0,T))^2} = \left(\int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.16)$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a família de funcionais $J_n : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$J_n(\gamma, u) = J(\gamma, u) + n\varphi(\|\gamma'\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2). \quad (4.17)$$

Queremos encontrar condições de otimalidade para o problema definido por

$$\min_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}^A} J_n(\gamma, u), \quad (4.18)$$

onde

$$\mathcal{U}_{ad}^A = \{(\gamma, u) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); M(\gamma, u) = 0\}.$$

Novamente, tomaremos o operador M dado pela Definição 3.2.1 e u é a solução da equação (4.5) correspondente ao vetor γ .

A função φ tem as seguintes propriedades:

- i) $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
- ii) φ é convexa,
- iii) φ, φ' são não-decrescentes,
- iv) $\varphi(x) = \varphi'(x) = 0$, para todo $x \leq 0$ e $\varphi(x), \varphi'(x) > 0$ para todo $x > 0$.

Observação 4.3.2. Note que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}_{ad}^A$.

Observação 4.3.3. Temos que a curva $\gamma \equiv 0 \in \mathcal{A}$. Seja $z^0 \in W_2^{2,1}(Q)$ a única solução da equação (4.5) correspondente ao vetor $\gamma \equiv 0$. Logo, temos que $(0, z^0) \in \mathcal{U}_{ad}^A$.

Assim, para cada n obtemos que

$$J_n(0, z^0) = \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |z^0(x, t)|^2 dx dt = \mu_2 \|z^0\|_{L^2(Q)}^2.$$

Logo,

$$\inf_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}^A} J_n(\gamma, u) \leq \mu_2 \|z^0\|_{L^2(Q)}^2. \quad (4.19)$$

4.4 Solução do Problema Penalizado

Para cada n , mostraremos que o Problema (4.18) admite uma solução ótima

$$(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$$

e que a sequência $(\gamma_n, u_n)_{n=1}^\infty$ assim obtida, admite uma subsequência convergente para um limite $(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*)$. Então, mostraremos que este limite é uma solução ótima do Problema (4.6).

Das hipóteses sobre J e φ , não é difícil verificar que o funcional convexo e contínuo definido por

$$J_n(\gamma, u) = \mu_0 \int_0^T |\gamma(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_\Omega |u(x, t)|^2 dx dt + n\varphi(\|\gamma'\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2),$$

é Gateaux-diferenciável em $\mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$. A derivada em um ponto (γ, u) e na direção (β, v) é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_G J_n(\gamma, u)(\beta, v) &= 2\mu_0 \int_0^T \gamma \cdot \beta dt + 2\mu_1 \int_0^T \gamma' \cdot \beta' dt + 2\mu_2 \int_0^T \int_\Omega u v dx dt + \\ &+ 2n\varphi'(\|\gamma'\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \int_0^T \gamma' \cdot \beta' dt. \end{aligned}$$

4.4.1 Existência de Controle Ótimo para o Problema Penalizado

Teorema 4.4.1. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1.3, existe, para cada n , uma solução ótima $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ para o Problema (4.18), ou seja, temos que*

$$J_n(\gamma_n, u_n) = \inf_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}^A} J_n(\gamma, u),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Não é difícil verificar que $\mathcal{U}_{ad}^A \neq \emptyset$. Agora, para cada n , tomemos uma sequência $(\gamma_n^l, u_n^l)_{l=1}^\infty \subset \mathcal{U}_{ad}^A$ tal que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} J_n(\gamma_n^l, u_n^l) = \inf_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}^A} J_n(\gamma, u),$$

ou seja, uma sequência minimizante.

Assim, existe uma constante C tal que

$$J_n(\gamma_n^l, u_n^l) \leq C,$$

para todo l . Em particular, vem

$$\|\gamma_n^l\|_{(H^1(0,T))^2} \leq C.$$

Agora, segue da reflexividade de $H^1(0, T)$, junto com a compacidade da imersão $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$ que existe $\gamma_n \in (H^1(0, T))^2$ e uma subsequência $(\gamma_n^{l_k})_{k=1}^\infty$ tal que

$$\gamma_n^{l_k} \xrightarrow{k \nearrow \infty} \gamma_n \text{ fracamente em } (H^1(0, T))^2,$$

$$\gamma_n^{l_k} \xrightarrow{k \nearrow \infty} \gamma_n \text{ em } (C([0, T]))^2.$$

Em particular, segue da convergência fraca que

$$\|\gamma_n'\|_{(L^2(0,T))^2} \leq \liminf_k \|\gamma_n^{l_k'}\|_{(L^2(0,T))^2}. \quad (4.20)$$

Também, segue da reflexividade de $W_2^{2,1}(Q)$ que existe $u_n \in W_2^{2,1}(Q)$ e uma subsequência $(u_n^{l_k})_{k=1}^\infty$ tal que

$$u_n^{l_k} \xrightarrow{k \nearrow \infty} u_n \text{ fracamente em } W_2^{2,1}(Q).$$

Analogamente ao que já foi demonstrado nos capítulos anteriores, podemos mostrar que $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{U}_{ad}^A$.

Agora, segue da estimativa (4.20) que

$$\|\gamma_n'\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2 \leq \liminf_k (\|\gamma_n^{l_k'}\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2). \quad (4.21)$$

Também, temos que a subsequência $(\|\gamma_n^{l_k'}\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)_{k=1}^\infty$ é limitada.

Por outro lado, sabemos que J é um funcional convexo e contínuo e φ é uma função contínua e monótona não-decrescente. Logo, segue por passagem ao limite inferior, junto

com a Proposição 1.1.12 e o Lema 1.1.13 que

$$\begin{aligned}
\inf_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}^A} J_n(\gamma, u) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} J_n(\gamma_n^{l_k}, u_n^{l_k}) \\
&= \liminf_{k \rightarrow \infty} (J(\gamma_n^{l_k}, u_n^{l_k}) + n\varphi(\|\gamma_n^{l_k'}\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)) \\
&\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(\gamma_n^{l_k}, u_n^{l_k}) \\
&\quad + \liminf_{k \rightarrow \infty} (n\varphi(\|\gamma_n^{l_k'}\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)) \\
&\geq J(\gamma_n, u_n) + n\varphi(\liminf_{k \rightarrow \infty} (\|\gamma_n^{l_k'}\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)) \\
&\geq J(\gamma_n, u_n) + n\varphi(\|\gamma_n'\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \\
&= J_n(\gamma_n, u_n).
\end{aligned}$$

Nesta última desigualdade usamos a estimativa (4.21).

Portanto,

$$J_n(\gamma_n, u_n) = \inf_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}^A} J_n(\gamma, u),$$

pois $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{U}_{ad}^A$. ■

4.4.2 Aplicação do Formalismo de Dubovitskii e Milyutin

Alguns dos próximos resultados possuem provas similares aos resultados já demonstrados no capítulo anterior e por isso serão omitidas.

Lema 4.4.2. *O cone de direções de descida associado ao funcional $J_n(\cdot, \cdot) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$, no ponto (γ_n, u_n) é dado por*

$$C_J(\gamma_n, u_n) = \{(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); \nabla_G J(\gamma_n, u_n)(\beta, v) < 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[C_J(\gamma_n, u_n)]^* = \{g \in [\mathcal{A}]' \times [W_2^{2,1}(Q)]'; g(\beta, v) = -\lambda_1 \nabla_G J(\gamma_n, u_n)(\beta, v), \text{ para algum } \lambda_1 \geq 0\}.$$

Demonstração: Veja Corolário 2.2.10 e Teorema 2.3.2. ■

Lema 4.4.3. (i) A aplicação $M(.,.) : \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^2(Q) \times H^1(\Omega)$, é Gâteaux - diferenciável e a derivada de Gâteaux de M no ponto (γ_n, u_n) e na direção (β, v) é definida por

$$\nabla_G M(\gamma_n, u_n)(\beta, v) = (M_1(\gamma_n, u_n), M_2(\gamma_n, u_n)),$$

onde $M_1(\gamma_n, u_n)$ e $M_2(\gamma_n, u_n)$ satisfazem a equação

$$\begin{cases} \partial_t v - \alpha \Delta v = a v - b k(x - \gamma^*)v + b \nabla k(x - \gamma_n) \cdot \beta u_n + M_1(\gamma_n, u_n) & \text{em } Q, \\ (\partial/\partial\eta)(v) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ v(0) = M_2(\gamma_n, u_n) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.22)$$

(ii) A aplicação $M(.,.)$ é estritamente diferenciável e o operador $\nabla_G M(\gamma_n, u_n)$ é sobrejetivo.

Lema 4.4.4. O cone tangente ao conjunto

$$W = \{(\beta, v) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); M(\beta, v) = 0\},$$

no ponto $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$, é o subespaço vetorial dado por

$$T_{(\gamma_n, u_n)}(W) = \{(\gamma, u) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q); \nabla_G M(\gamma_n, u_n)(\gamma, u) = 0\},$$

e seu cone dual é dado por

$$[T_{(\gamma_n, u_n)}(W)]^* = \{g_2 \in [\mathcal{A}]' \times [W_2^{2,1}(Q)]'; g_2(\gamma, u) = 0, \forall (\gamma, u) \in T_{(\gamma_n, u_n)}(W)\}.$$

Demonstração: A demonstração segue do Lema 4.4.3 e do Teorema de Lyusternick (Teorema 2.2.16), junto com o Teorema 2.3.1. ■

Proposição 4.4.5. Para cada n , seja $(\gamma_n, u_n) \in \mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$ uma solução ótima de (4.18). Então, existe $p_n \in W_2^{2,1}(Q)$ tal que: (γ_n, u_n) satisfaz

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \alpha \Delta u_n = a u_n - b k(x - \gamma_n)u_n & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(u_n) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ u_n(0) = u_0 & \text{em } \Omega; \end{cases} \quad (4.23)$$

a função p_n é a solução da equação

$$\begin{cases} -\partial_t p_n - \alpha \Delta p_n = a p_n - b k(x - \gamma_n) p_n - u_n & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(p_n) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ p_n(T) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (4.24)$$

e o controle γ_n satisfaz a identidade dada por

$$\begin{aligned} \mu_0 \int_0^T \gamma_n \cdot \gamma dt + \mu_1 \int_0^T \gamma'_n \cdot \gamma' dt - \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} b u_n p_n \nabla k(x - \gamma_n) \cdot \gamma dx dt \\ + n \varphi'(\|\gamma'_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \int_0^T \gamma'_n \cdot \gamma' dt = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{A}$.

Demonstração: Análoga à do Teorema 3.2.10. ■

Além disso, segue de (4.19) e (4.25) que a família $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ é um subconjunto de \mathcal{A} , satisfazendo para cada n a seguinte equação:

$$\begin{cases} -\mu_1 \gamma''_n + \mu_0 \gamma_n - \mu_2 \int_{\Omega} b p_n u_n \nabla k(x - \gamma_n) dx - n \varphi'(\|\gamma'_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \gamma''_n = 0, & \text{em } (0, T), \\ \gamma_n(0) = 0, \\ \gamma'_n(T) = 0, \end{cases} \quad (4.26)$$

no sentido fraco dado em (4.25).

Pela estimativa (4.19), obtemos que

$$J_n(\gamma_n, u_n) = \min_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}^A} J_n(\gamma, u) \leq \mu_2 \|z^0\|_{L^2(Q)}, \quad (4.27)$$

ou seja,

$$\mu_0 \int_0^T |\gamma_n|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma'_n|^2 dt + \mu_2 \int_0^T \int_{\Omega} |u_n|^2 dx dt + n \varphi(\|\gamma'_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \leq \mu_2 \|z^0\|_{L^2(Q)}.$$

Lema 4.4.6. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1.3, existem $(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*) \in \mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)$ limite de alguma subsequência de (γ_n, u_n) , $\tau \in \mathcal{A}$ e uma função $\bar{p}^* \in W_2^{2,1}(Q)$ tais que: $(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*)$ satisfaz*

$$J(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*) = \min_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\gamma, u)$$

e a equação definida por

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}^* - \alpha \Delta \bar{u}^* = a \bar{u}^* - b k(x - \bar{\gamma}^*) \bar{u}^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(\bar{u}^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ \bar{u}^*(0) = u_0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Além disso, \bar{p}^* é a solução do problema adjunto associado, ou seja,

$$\begin{cases} -\partial_t \bar{p}^* - \alpha \Delta \bar{p}^* = a \bar{p}^* - b k(x - \bar{\gamma}^*) \bar{p}^* - \bar{u}^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(\bar{p}^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ \bar{p}^*(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Também, obtemos que o controle $\bar{\gamma}^*$ satisfaz o sistema definido por

$$\begin{cases} -\mu_1 \bar{\gamma}^{*''} + \mu_0 \bar{\gamma}^* - \mu_2 b \int_{\Omega} \bar{p}^* \bar{u}^* \nabla k(x - \bar{\gamma}^*) dx - \tau''(t) = 0 & \text{em } (0, T), \\ \bar{\gamma}^*(0) = 0, \\ \bar{\gamma}^{*'}(T) = -\frac{\tau'(T)}{\mu_1}. \end{cases}$$

Demonstração: Primeiramente restringindo a identidade (4.25) a $\gamma = \gamma_n$, obtemos que

$$\begin{aligned} & \mu_0 \int_0^T |\gamma_n(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma_n'(t)|^2 dt - \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} u_n(x, t) p_n(x, t) \nabla k(x - \gamma_n(t)) \cdot \gamma_n(t) dx dt + \\ & + n\varphi'(\|\gamma_n'\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \int_0^T |\gamma_n'(t)|^2 dt = 0. \end{aligned}$$

Daí, vem

$$\begin{aligned} & \mu_0 \|\gamma_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + \mu_1 \|\gamma_n'\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + n\varphi'(\|\gamma_n'\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \|\gamma_n'\|_{(L^2(0,T))^2}^2 \\ & \leq \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} |u_n(x, t)| |p_n(x, t)| |\nabla k(x - \gamma_n(t))| |\gamma_n(t)| dx dt \\ & \leq N(k) \mu_2 b \max_{0 \leq t \leq T} |\gamma_n(t)| \int_0^T \int_{\Omega} |u_n(x, t)| |p_n(x, t)| dx dt \\ & \leq N(k) \mu_2 b C_0 \|\gamma_n'\|_{(L^2(0,T))^2} \|u_n\|_{L^2(Q)} \|p_n\|_{L^2(Q)} \\ & \leq N(k) \mu_2 b C_0 \|\gamma_n'\|_{(L^2(0,T))^2} \|u_n\|_{W_2^{2,1}(Q)} \|p_n\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\ & \leq N(k) \mu_2 b C_0 \|\gamma_n'\|_{(L^2(0,T))^2} M \\ & \leq \frac{\epsilon}{2} \|\gamma_n'\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \mu_2^2 b^2 C_0^2 M^2 N(k)^2 \end{aligned}$$

onde $\epsilon > 0$, $M = M(T, \alpha, a, b, \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)})$ e $N(k)$ é tal que $|\nabla k(x - \gamma_n(t))| \leq N(k)$ para todo $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$. Além do mais, $\tilde{C} = \frac{\mu_2^2 b^2 C_0^2 M^2}{2} N(k)^2$ é uma constante que independe de n .

Assim, para cada $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, obtemos a estimativa dada por

$$\begin{aligned} & \mu_0 \|\gamma_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + \mu_1 \|\gamma'_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + n\varphi'(\|\gamma'_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \|\gamma'_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 \\ & \leq \frac{\epsilon}{2} \|\gamma'_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + \frac{1}{\epsilon} \tilde{C}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Em particular, tomando $\epsilon = \mu_1$ obtemos que

$$\mu_0 \|\gamma_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\gamma'_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 + n\varphi'(\|\gamma'_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \|\gamma'_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 \leq \frac{1}{\mu_1} \tilde{C}.$$

Daí, vem

$$\|\gamma_n\|_{(H^1(0,T))^2}^2 = \|\gamma'_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 \leq \frac{2}{\mu_1^2} \tilde{C} \quad (4.29)$$

e

$$n\varphi'(\|\gamma'_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \|\gamma'_n\|_{(L^2(0,T))^2}^2 \leq \frac{1}{\mu_1} \tilde{C}, \quad (4.30)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponhamos agora que dado $\delta > 0$ arbitrário, exista uma subsequência $(\gamma_k)_{k=1}^\infty$ de $(\gamma_n)_{n=1}^\infty$ tal que

$$\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2 > \delta, \quad (4.31)$$

para todo $k \geq k_0$. Das hipóteses sobre φ temos que

$$\varphi'(\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) > \varphi'(\delta) > 0.$$

Agora, usando (4.30) vem

$$\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 \leq \frac{1}{k} \frac{\tilde{C}}{\mu_1 \varphi'(\delta)}.$$

Portanto, tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$ nesta última expressão, concluímos que

$$\gamma'_k \rightarrow 0 \text{ fortemente em } (L^2(0,T))^2.$$

Agora, tomando o limite quando $k \rightarrow 0$ na estimativa (4.31), obtemos que

$$0 \geq -R_0 = \lim_{k \rightarrow 0} (\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \geq \lim_{k \rightarrow 0} \delta = \delta > 0.$$

Mas isso é um absurdo.

Como consequência da contradição obtida anteriormente, um simples cálculo mostra que para qualquer subsequência $(\gamma_k)_{k=1}^\infty$ de $(\gamma_n)_{n=1}^\infty$ segue que

$$\limsup(\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \leq 0, \quad (4.32)$$

ou seja,

$$\limsup \|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2} \leq R_0. \quad (4.33)$$

Segue da estimativa (4.27) que a sequência $(\gamma_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $(H^1(0, T))^2$. Agora, segue da reflexividade de $H^1(0, T)$ junto com a compacidade da imersão $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$ que existe uma subsequência $(\gamma_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(\gamma_n)_{n=1}^\infty$ e $\bar{\gamma}^* \in (H^1(0, T))^2$ tal que

$$\begin{aligned} \gamma_{n_k} &\rightharpoonup \bar{\gamma}^* \text{ fracamente em } (H^1(0, T))^2, \\ \gamma_{n_k} &\rightarrow \bar{\gamma}^* \text{ em } (C([0, T]))^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

e

$$\|\bar{\gamma}^*\|_{(H^1(0,T))^2} \leq \liminf_k \|\gamma_{n_k}\|_{(H^1(0,T))^2}. \quad (4.35)$$

Assim, segue dos resultados (4.33), (4.34) e (4.35) que

$$\|\bar{\gamma}^*\|_{(H^1(0,T))^2} \leq R_0 \quad \text{e} \quad \bar{\gamma}^*(0) = 0.$$

Portanto, $\bar{\gamma}^* \in \mathcal{B}$.

Também sabemos que para cada n , a função u_n é a solução da equação (4.23), correspondente ao vetor γ_n e a variável de co-estado (ou adjunta) p_n é a solução da equação (4.24). Logo, como consequência dos Teoremas 3.1.3 e 3.1.4, obtemos que

$$\|u_n\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \widetilde{M}_1(T, \alpha, a, b, |\Omega|) \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad (4.36)$$

$$\|p_n\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \widetilde{M}_2(T, \alpha, a, b, |\Omega|) \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}. \quad (4.37)$$

Das estimativas (4.36), (4.37) e da reflexividade de $W_2^{2,1}(Q)$, junto com o Lema 1.1.3 e os Teoremas 1.1.9 e 1.1.10, existem $\bar{u}^*, \bar{p}^* \in W_2^{2,1}(Q)$ tais que, mediante a passagem ao limite fraco em (4.23) e (4.24), obtemos que

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}^*(x, t) - \alpha \Delta \bar{u}^*(x, t) = a(x, t) \bar{u}^*(x, t) - b k(x - \bar{\gamma}^*(t)) \bar{u}^*(x, t) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(\bar{u}^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ \bar{u}^*(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.38)$$

e

$$\begin{cases} -\partial_t \bar{p}^*(x, t) - \alpha \Delta \bar{p}^*(x, t) = a(x, t) \bar{p}^*(x, t) - b k(x - \bar{\gamma}^*(t)) \bar{p}^*(x, t) - \bar{u}^*(x, t) & \text{em } Q, \\ (\partial/\partial\eta)(\bar{p}^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ \bar{p}^*(x, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Portanto, $(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*) \in \mathcal{U}_{ad} \neq \emptyset$.

Agora, resta mostrar que

$$J(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*) = \inf_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\gamma, u).$$

Como consequência dos cálculos anteriores, segue passando a uma subsequência conveniente que

$$(\gamma_k, u_k) \rightarrow (\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*),$$

fracamente em $\mathcal{A} \times W_2^{2,1}(Q)$. Notemos ainda que $J_k(\gamma, u) = J(\gamma, u)$ para todo $(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}$, pois $\varphi = 0$ se $x \leq 0$.

Assim, segue das hipóteses sobre J e J_k (convexos e contínuos) que

$$\begin{aligned} \inf\{J(\gamma, u), (\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}\} &= \inf\{J_k(\gamma, u), (\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}\} \\ &\geq \inf\{J_k(\gamma, u), (\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}^A\} = J_k(\gamma_k, u_k). \end{aligned}$$

Logo, por passagem ao \liminf_k , resulta que

$$\begin{aligned} \inf\{J(\gamma, u), (\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}\} &= \liminf_k \inf\{J(\gamma, u), (\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}\} \\ &\geq \liminf_k \inf\{J_k(\gamma, u), (\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}^A\} \\ &= \liminf_k J_k(\gamma_k, u_k) \\ &\geq \liminf_k J(\gamma_k, u_k) \\ &\geq J(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*). \end{aligned}$$

Mas, $(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*) \in \mathcal{U}_{ad}$. Logo,

$$J(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*) = \inf\{J(\gamma, u), (\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}\}.$$

Assim, mostramos que $(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*)$ é uma solução ótima do Problema (4.6). Agora, tentaremos encontrar condições de otimalidade para o controle $\bar{\gamma}^*$.

Restringindo (4.25) à subsequência (γ_k) , segue que

$$\begin{aligned} & \mu_0 \int_0^T \gamma_k \cdot \gamma dt + \mu_1 \int_0^T \gamma'_k \cdot \gamma' dt - \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} u_k p_k \nabla k(x - \gamma_k) \cdot \gamma dx dt \\ & + k \varphi'(\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \int_0^T \gamma'_k \cdot \gamma' dt = 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{A}$.

Consideremos agora, a família de funcionais lineares $F_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$F_k(\gamma) = k \varphi'(\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2) \int_0^T \gamma'_k(t) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Notemos que existe uma constante C que não depende de k tal que

$$|F_k(\gamma)| \leq C \|\gamma\|_{(H^1(0,T))^2},$$

para todo k e para todo $\gamma \in \mathcal{A}$, ou seja, $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ constitui uma família de operadores lineares uniformemente limitados. De fato, usando a identidade (4.39), temos que

$$F_k(\gamma) = -\mu_0 \int_0^T \gamma_k \cdot \gamma dt - \mu_1 \int_0^T \gamma'_k \cdot \gamma' dt + \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} u_k p_k \nabla k(x - \gamma_k) \cdot \gamma dx dt.$$

O resultado segue aplicando a desigualdade de Hölder. Assim,

$$F_k \in (\mathcal{A})' \quad \text{e} \quad \|F_k\| \leq C.$$

Mas, \mathcal{A} é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert. Logo, \mathcal{A} é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(\gamma, \beta)_{(H^1(0,T))^2} = \int_0^T \gamma'(t) \beta'(t) dt,$$

para todo $\gamma, \beta \in \mathcal{A}$.

Logo, segue do teorema de representação de Riesz que para cada k , existe um único $\beta_k \in \mathcal{A}$ tal que

$$F_k(\gamma) = (\beta_k, \gamma)_{(H^1(0,T))^2} = \int_0^T \beta'_k(t) \gamma'(t) dt,$$

para todo $\gamma \in \mathcal{A}$.

Mas, por outro lado, temos que

$$F_k(\gamma) = \int_0^T k\varphi'(\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)\gamma'_k(t)\gamma'(t)dt,$$

ou seja,

$$F_k(\gamma) = \int_0^T (k\varphi'(\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)\gamma'_k)'(t)\gamma'(t)dt.$$

Segue da estimativa (4.29) que (γ_k) é uma sequência limitada. Logo, $(\varphi'(\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2))$ é uma sequência limitada. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$ obtemos que

$$k\varphi'(\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)\gamma_k \in \mathcal{A}.$$

Por outro lado, segue da unicidade de β_k que

$$k\varphi'(\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)\gamma_k = \beta_k.$$

Ainda pelo teorema de representação de Riesz, também obtemos que

$$\|F_k\| = \|\beta_k\|_{(H^1(0,T))^2} = \|\beta'_k\|_{(L^2(0,T))^2} \leq C,$$

isto é,

$$\|k\varphi'(\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2} \leq C.$$

Assim, $(k\varphi'(\|\gamma'_k\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)\gamma_k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência limitada de \mathcal{A} . Agora, da reflexividade de \mathcal{A} (pois é um subespaço fechado do espaço reflexivo $(H^1(0,T))^2$), podemos extrair uma subsequência $(k_j\varphi'(\|\gamma'_{k_j}\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)\gamma_{k_j})_{j=1}^\infty$ e $\tau \in \mathcal{A}$, tal que

$$k_j\varphi'(\|\gamma'_{k_j}\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)\gamma_{k_j} \xrightarrow{j \nearrow +\infty} \tau \text{ fracamente em } \mathcal{A}, \quad (4.40)$$

ou seja,

$$\int_0^T k_j\varphi'(\|\gamma'_{k_j}\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)\gamma'_{k_j}(t)\gamma'(t)dt \xrightarrow{j \nearrow +\infty} \int_0^T \tau'(t)\gamma'(t)dt,$$

para todo $\gamma \in \mathcal{A}$. Em particular, obtemos que

$$\|\tau'\|_{(L^2(0,T))^2} \leq \liminf_j k_j\varphi'(\|\gamma'_{k_j}\|_{(L^2(0,T))^2}^2 - R_0^2)\|\gamma'\|_{(L^2(0,T))^2}. \quad (4.41)$$

Agora, restringindo (4.39) à subsequência $(\gamma_{k_j})_{j=1}^{\infty}$, obtemos por passagem ao limite quando $j \rightarrow \infty$, a equação definida por

$$\begin{aligned} & \mu_0 \int_0^T \bar{\gamma}^* \cdot \gamma dt + \mu_1 \int_0^T \bar{\gamma}^{*'} \cdot \gamma' dt - \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} \bar{u}^* \bar{p}^* \nabla k(x - \bar{\gamma}^*) \cdot \gamma dx dt \\ & + \int_0^T \tau' \cdot \gamma' dt = 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{A}$.

Agora, por uma prova similar à do Teorema 3.2.10 concluímos que o controle ótimo $\bar{\gamma}^*$ satisfaz em $(0, T)$, uma condição necessária de otimalidade definida por

$$\begin{cases} -\mu_1 \bar{\gamma}^{*''}(t) + \mu_0 \bar{\gamma}^*(t) - \mu_2 b \int_{\Omega} \bar{p}^*(x, t) \bar{u}^*(x, t) \nabla k(x - \bar{\gamma}^*(t)) dx - \tau''(t) = 0, \\ \bar{\gamma}^*(0) = 0, \\ \bar{\gamma}^{*'}(T) = -\frac{\tau'(T)}{\mu_1}, \end{cases}$$

no sentido fraco dado em (4.42).

Assim, concluímos a demonstração do lema. ■

Agora, provaremos que $\bar{\gamma}^*$ também verifica a condição de otimalidade obtida pelo formalismo de Dubovitskii e Milyutin, ou seja,

$$\mu_0 \int_0^T \bar{\gamma}^* \cdot (\gamma - \bar{\gamma}^*) dt + \mu_1 \int_0^T \bar{\gamma}^{*'} \cdot (\gamma' - \bar{\gamma}^{*'}) dt - \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} \bar{u}^* \bar{p}^* \nabla k(x - \bar{\gamma}^*) \cdot (\gamma - \bar{\gamma}^*) dx dt \geq 0, \quad (4.43)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{B}$.

Esse resultado é obtido pelo seguinte corolário.

Corolário 4.4.7. *Seja $(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*)$ o controle ótimo para (4.6) obtido pelo Lema 4.4.6. Então*

$$\mu_0 \int_0^T \bar{\gamma}^* \cdot (\gamma - \bar{\gamma}^*) dt + \mu_1 \int_0^T \bar{\gamma}^{*'} \cdot (\gamma' - \bar{\gamma}^{*'}) dt - \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} \bar{u}^* \bar{p}^* \nabla k(x - \bar{\gamma}^*) \cdot (\gamma - \bar{\gamma}^*) dx dt \geq 0,$$

para todo $\gamma \in \mathcal{B}$.

Demonstração: Como $(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*)$ satisfaz

$$J(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*) = \inf_{(\gamma, u) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\gamma, u).$$

O resultado segue diretamente aplicando os Lemas 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4 e 4.2.5 para garantir as hipóteses do teorema de Dubovitskii e Milyutin. Assim, aplicamos o Teorema 4.2.7 para concluir o corolário. ■

Agora, enunciaremos o principal teorema deste capítulo. Este teorema dá as requeridas condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para uma solução ótima do Problema (4.6).

Teorema 4.4.8. *Existem $(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*) \in \mathcal{B} \times W_2^{2,1}(Q)$ uma solução ótima do Problema (4.6), $\tau \in \mathcal{A}$ e uma função $\bar{p}^* \in W_2^{2,1}(Q)$ tais que: $(\bar{\gamma}^*, \bar{u}^*)$ é uma solução da equação*

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}^* - \alpha \Delta \bar{u}^* = a \bar{u}^* - b k(x - \bar{\gamma}^*) \bar{u}^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(\bar{u}^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ \bar{u}^*(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

\bar{p}^* é a solução do problema adjunto associado, ou seja,

$$\begin{cases} -\partial_t \bar{p}^* - \alpha \Delta \bar{p}^* = a \bar{p}^* - b k(x - \bar{\gamma}^*) \bar{p}^* - \bar{u}^* & \text{em } Q = \Omega \times (0, T], \\ (\partial/\partial\eta)(\bar{p}^*) = 0 & \text{em } S = \partial\Omega \times (0, T], \\ \bar{p}^*(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

O controle $\bar{\gamma}^*$ satisfaz as seguintes condições necessárias de otimalidade:

$$\mu_0 \int_0^T \bar{\gamma}^* \cdot (\gamma - \bar{\gamma}^*) dt + \mu_1 \int_0^T \bar{\gamma}^{*'} \cdot (\gamma' - \bar{\gamma}^{*}') dt - \mu_2 b \int_0^T \int_{\Omega} \bar{u}^* \bar{p}^* \nabla k(x - \bar{\gamma}^*) \cdot (\gamma - \bar{\gamma}^*) dx dt \geq 0, \quad (4.44)$$

para todo $\gamma \in \mathcal{B}$ e o sistema definido por

$$\begin{cases} -\mu_1 \bar{\gamma}^{*''} + \mu_0 \bar{\gamma}^* - \mu_2 b \int_{\Omega} \bar{p}^* \bar{u}^* \nabla k(x - \bar{\gamma}^*) dx - \tau''(t) = 0 & \text{em } (0, T), \\ \bar{\gamma}^*(0) = 0, \\ \bar{\gamma}^{*'}(T) = -\frac{\tau'(T)}{\mu_1}, \end{cases}$$

no sentido fraco dado em (4.42).

Demonstração: Segue diretamente do Lema 4.4.6 e do Corolário 4.4.7. ■

CAPÍTULO 5

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos resultados de controle ótimo para um modelo que descreve a trajetória ótima a ser seguida por um dispositivo que irá fazer a aplicação de inseticida em uma certa região Ω , cujo objetivo principal é o de controlar a proliferação de mosquitos e ao mesmo tempo reduzir os custos da pulverização. Usamos como ferramenta principal o formalismo de Dubovitskii e Milyutin.

Vale ressaltar que o modelo estudado ainda não está nas condições mais próximas de uma situação real do cotidiano. Por se tratar de um modelo inicial, algumas hipóteses substanciais não foram consideradas, tais como: a fuga de uma parcela da população de mosquitos da região Ω durante o processo de pulverização; matematicamente queremos dizer $((\partial/\partial\eta)(u) \neq 0)$; também não consideramos o efeito residual do inseticida, ou seja, no modelo que estudamos não foi considerada a hipótese de que após a aplicação o inseticida continua agindo; também não foi tomada nenhuma restrição na região Ω , em forma de obstáculos, sobre o conjunto dos controles admissíveis; etc.

Tais hipóteses adicionais não foram consideradas neste trabalho pois, tivemos o objetivo primeiramente de estudar e aprimorar as técnicas usadas. Mesmo porque, não temos nenhuma informação sobre a existência de controles e condições de otimalidade para os modelos mais complexos e nenhuma informação sobre a matemática que será usada para o estudo

desses problemas.

Como mostramos no Capítulo 4, apenas com o acréscimo de uma restrição o problema apresentou uma dificuldade significativa, tanto que precisamos lançar mão das técnicas de penalização para obter as requeridas condições de otimalidade.

De modo geral, é de nosso interesse aprofundar os estudos sobre as possíveis estratégias para abordar os problemas propostos. Dando continuidade em nossas pesquisas, temos interesse em analisar o problema com obstáculos sobre os controles. Além disso, também temos o interesse de estudar o problema com alguma não linearidade na equação de estado.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Adams, R.A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Alexeév, V., Fomine, S., Tikomirov, V., Commande Optimale. Moscou, Mir, 1982.
- [3] Atkinson, M.P., Su, Z., Alphey, N., Alphey, L.S., Coleman, P.G., Wein, L.M., Analyzing the Control of Mosquito-Borne Diseases by a Dominant Lethal Genetic System, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 104 no. 22, (2007), 9540-9545.
- [4] Brezis, H., Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones, Masson, Paris, 1983.
- [5] Boldrini, J.L., Cara, E. F., Rojas-Medar, M.A., A mathematical analysis of an optimal control problem for a generalized Boussinesq model for viscous incompressible flows, Relatório de Pesquisa RP 53/05, 2005.
- [6] De Aguiar, R., Contribuições em Controle Ótimo Distribuído Via Formalismo de Dubovitskii-Milyutin. Aspectos Teóricos, Numéricos e Aplicados, Tese de Doutorado, Unicamp-IMECC, 2002.
- [7] De Aguiar, R., Ortega, J., Rojas-Medar, M.D., Rojas-Medar, M.A., Optimal control problem for the generalized bioconvective flow, pre-print, Univesidade Estadual de Campinas (IMECC), Brasil, 2004.
- [8] Evans, L.C., Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

- [9] Gayte, I., Guillén-González, F., Rojas-Medar, M.A., El formalismo de Dubovitskii-Milyutin aplicado a un problema de control óptimo con restricción la ecuación del calor retrógrada con control distribuido, pre-print, Universidade de Sevilla, Espanha, 2002.
- [10] Girsanov, I.V., Lectures on mathematical theory of extremum problem., Lectures notes in Economics and mathematical systems, 67, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [11] Ladyzhenskaya, O., Solonnikov, V., Uraltseva, N., Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, American Mathematical Society, 1968.
- [12] Lions, J.L., Contrôle des Systèmes Distribués Singuliers, Méthodes Mathématiques de l'Informatique, Gautier-Villars, 1983.
- [13] Lions, J. L., Magenes, M., Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol. 1, Springer Verlag, 1972.
- [14] Medeiros, L. A., Rivera, P. H., Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos nº9, Instituto de Matemática - UFRJ, 1975.
- [15] Maidana, N.A., Yang, H.M., A Spatial Model to Describe the Dengue Propagation, Mat. Apl. Comput., 8, No. 1 (2007), 83-92.
- [16] Maidana, N.A., Yang, H.M., Takahashi, L.T., Ferreira Jr, W.C., Pulino, P., Mathematical models for the Aedes aegypti dispersal dynamics: travelling waves by wing and wind, Bulletin of Mathematical Biology 67 (2005), 509-528.
- [17] Medeiros, L. A., Miranda, M. M., Espaços de Sobolev e Iniciação aos Problemas Elipticos Não Homogêneos, Rio de Janeiro, UFRJ. IM, 2000.
- [18] Marques-Lopes, F.P., Alguns Problemas de Controle Multiobjetivos Governados por Equações Diferenciais Parciais, Tese de Doutorado, Unicamp-IMECC, 2005.
- [19] Magalhães, P.M.D., Brandão, A.J.V., Rojas-Medar, M.A., Fernández-Cara, E., Optimal control for the FitzHugh-Nagumo equations, em perparação, 2005.

- [20] Norman, R. A., Chan, M. S., Srividya, A., Pani, S. P., Ramaiah, K. D., Vanamail, P., Michael, E., Das, P.K., Bundy, D. A. P., The development of an age-structured model for describing the transmission dynamics and control of lymphatic e transmission dynamics and control of lymphatic filariasis, *Epidemiol. Infect.* (2000), 124, 529-541.
- [21] Simon, J., Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$, *Annali Mat. Pura Appli., Serie IV*, v.146 (1987), 65-96.
- [22] Trana, A., Raffy, M., On the dynamics of dengue epidemics from large-scale information, *Theoretical Population Biology* 69 (2006), 3-12.
- [23] Tunwiine, J., Mugisha, J.Y.T., Luboobi, L.S., A mathematical model for the dynamics of malaria in a human host and mosquito vector with temporary immunity, *Applied Mathematics and Computation* 189 (2007), 1953-1965.
- [24] Zeidler, E., *Applied Functional Analysis*, Springer Verlag, 1995.