UNICAMP

CLAUDIA EDITH VÁSQUEZ MERCEDES

LIMITE SUPERIOR SOBRE A PROBABILIDADE DE CONFINAMENTO DE PASSEIO ALEATÓRIO EM MEIO ALEATÓRIO

CAMPINAS
2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

CLAUDIA EDITH VÁSQUEZ MERCEDES

LIMITE SUPERIOR SOBRE A PROBABILIDADE DE CONFINAMENTO DE PASSEIO ALEATÓRIO EM MEIO ALEATÓRIO

Orientador: Prof. Dr. Christophe Frédéric Gallesco
Coorientador: Prof. Dr. Serguei Popov

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de Mestra em Estatística

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA CLAUDIA EDITH VÁSQUEZ MERCEDES E ORIENTADA PELO PROF.DR CHRISTOPHE FRÉDÉRIC GALLESCO

Assinatura do Orientador

Assinatura do Coorientador

Serguei Popov

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

V444L Vásquez Mercedes, Claudia Edith, 1989-
Limite superior sobre a probabilidade de confinamento de passeio aleatório em meio aleatório / Claudia Edith Vásquez Mercedes. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Christophe Frédéric Gallesco.
Coorientador: Serguei Popov.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Passeio aleatório (Matemática). 2. Markov, Processos de. 3. Probabilidades. 4. Markov, Campos aleatórios de. I. Gallesco, Christophe Frédéric,1979-. II. Popov, Serguei,1972-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Upper bound on the probability of confinement random walk in random environment
Palavras-chave em inglês:
Randon walks (Mathematics)
Markov processes
Probabilities
Markov random fields
Área de concentração: Estatística
Titulação: Mestra em Estatística
Banca examinadora:
Christophe Frédéric Gallesco [Orientador]
Marina Vachkovskaia
Pablo Martin Rodriguez
Data de defesa: 02-05-2013
Programa de Pós-Graduação: Estatística

Dissertação de Mestrado defendida em 02 de maio de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). CHRISTOPHE FRÉDÉRIC GALLESCO

Prof(a). Dr(a). MARINA VACHKOVSKAIA

Prof(a). Dr(a). PABLO MARTIN RODRIGUEZ

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo que tem feito na minha vida, pelo amor, pelo cuidado e pelas bençãos. E aos meus amados pais, Armando Mauro Vasquez Corro e Claudina Mercedes Abanto que sempre me apoiaram com muito amor, carinho e conforto.

Agradeço ao meu coorientador Prof. Dr. Serguei Popov, pelo incentivo, atenção e compreensão. Um excelente professor tanto como orientador quanto lecionador. Foi altamente gratificante poder ser orientada por ele. Agradeço também ao meu orientador Prof. Dr. Christophe por toda a atenção e paciência que teve comigo.

Agradeço aos amigos que fiz aqui em Campinas principalmente ao Pedro, Thalita, Anila e Daniel, que viveram comigo um pouco dessa história. Aos meus queridos amigos que me apoiaram emocionalmente Mayara e Luiz.

Agradeço aos professores do IMEEC que fizeram parte dessa importante etapa da minha vida, que me ensinaram com tanto apreço as matérias do curso que eu tanto almejei.

Agradeço a Capes pelo apoio finaceiro.

Resumo

O objetivo dessa dissertação é encontrar um limite superior para a probabilidade de confinamento de um passeio aleatório em meio aleatório nos inteiros, usando como principal ferramenta o tempo de comutação desse passeio que é calculado associando-o a uma rede elétrica baseado no artigo Random Walks and Electric Networks de P. Doyle e J. Snell. A associação é estabelecida por uma função harmônica, aplicando-se assim as propriedades físicas das redes elétricas a uma cadeia de Markov. Quando nos referimos a probabilidade de confinamento de um passeio aleatório em meio aleatório confinado no intervalo de $[a, b]$, estamos falando da probabilidade de um passeio aleatório em meio aleatório começando em x permanecer no intervalo (a, b), ou seja, $P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > n]$ no qual $\tau_{\{a,b\}}$ é o primeiro tempo em que o passeio aleatório visita a ou b e n é um tempo relativamente grande.

Abstract

The objective of this dissertation is to find an upper limit for the probability of confined of a random walk in random environment in integers, using as main tool the commute time which is calculated by associating this walk to a electric network based on Article Random Walks and Electric Networks of P. Doyle and J. Snell. The association is established by a harmonic function, applying the physical properties of electrical networks to a Markov chain. When we refer to probability of confined of a random walk in random environment, confined in the interval $[a, b]$ we are talking about the probability f a random walk in random environment starting in x remain in the interval $[a, b]$, in other words, $P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > n]$ in which $\tau_{\{a,b\}}$ is the first time that the random walk visit a or b and n is a time relatively big.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A dissertação num primeiro momento é baseada nos artigos, Random Walks an Electric Networks de P. G. Doyle e J. L. Snell e Probability on Trees and Networks de R. Lyons e Y. Peres, no qual ambos mostram a excelente combinação da Física e da Matemática que juntas podem resolver belíssimos problemas. Utilizando isso como base encontraremos um limite superior para a probabilidade de confinamento de um passeio aleatório em meio aleatório, confinado no intervalo $[a, b]$, ou seja, um limite superior para a probabilidade desse passeio começando num dado ponto x, permanecer no intervalo (a, b).

No capítulo 2 teremos uma leve introdução a cadeias de Markov, utilizadas para definir uma cadeia de Markov reversível que será importante no decorrer dos próximos capítulos.

No capítulo 3 iremos definir um passeio aleatório em uma dimensão e o associaremos a uma determinada rede elétrica, usando as propriedades de uma função harmônica, com a finalidade de demonstrar que $p(x)$, a probabilidade do passeio começando em x atingir N antes de 0, é equivalente a função $v(x)$, a voltagem da rede elétrica.

Na seção 3.4 definiremos um passeio aleatório em redes mais gerais, no qual dado uma rede elétrica o associamos a uma cadeia de Markov. Depois de muita manipulação algébrica na seção 3.6 definiremos e calcularemos o Tempo de comutação de um passeio aleatório em redes mais gerais .

No capítulo 4 definiremos passeio aleatório em meio aleatório nos inteiros, em seguida o restringiremos a um conjunto finito de pontos. Faremos de modo análogo ao que foi feito no capítulo anterior para obter o tempo de comutação desse passeio, mas através de uma abordagem diferente nos cálculos, no qual dada a cadeia de Markov encontraremos a rede elétrica associada.

Finalmente no capítulo 5 chegaremos ao nosso objetivo principal enunciado como Teorema, no qual encontraremos um limite superior para a probabilidade de confinamento de um passeio aleatório em meio aleatório confinado no intervalo de $[a, b]$, utilizando como principal ferramenta o tempo de comutação desse passeio.

Capítulo 2

Cadeias de Markov reversíveis

2.1 Algumas notações básicas

Seja $X_n, n \geq 0$ uma cadeia de Markov tendo espaço de estados $\mathcal{S}$ enumerável e função de transição P. Se $\pi(x), x \in \mathcal{S}$ são números não negativos tais que

$$\sum_x \pi(x) = 1$$

e

$$\sum_x \pi(x)P(x,y) = \pi(y), \quad y \in \mathcal{S}$$

então π é chamada distribuição estacionária.

Proposição 2.1 *A distribuição de X_n é independente de n se, e somente se, a distribuição inicial é uma distribuição estacionária.*

Prova: Se X_0 tem a distribuição estacionária π, então temos que

$$\mathbb{P}(X_n = y) = \sum_x \pi(x)P^n(x,y) = \pi(y), \quad \forall y \in \mathcal{S}$$

ou seja a distribuição de X_n independe de n.

Reciprocamente, suponha que a distribuição de X_n é independente de n, seja π_0 a distribuição inicial, temos

$$\pi_0(y) = \mathbb{P}(X_0 = y) = \mathbb{P}(X_1 = y) = \sum_x \pi(x)P(x,y)$$

assim concluimos que π_0 é uma distribuição estacionária. ▪

Seja $\rho_{xy} = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)$ a probabilidade da cadeia, começando em x, estará no estado y em algum tempo positivo, no qual $T_y = \min\{n > 0; X_n = y\}$.

Definição 2.1 *Um estado x é chamado recorrente se $\rho_{xx} = 1$ e transiente se $\rho_{xx} < 1$, no qual $\rho_{xx} = \mathbb{P}_x(T_x < \infty)$ denota a probabilidade da cadeia, começando em x, retornará a x em algum tempo positivo.*

Seja $N(y)$ o número de vezes que a cadeia está no estado y, ou seja

$$N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_y(X_n)$$

Como os eventos $\{N(y) \geq 1\}$ e $\{T_y < \infty\}$ são os mesmos, temos que

$$\mathbb{P}_x(N(y) \geq 1) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty) = \rho_{xy}$$

Denote

$$G(x,y) = \mathbb{E}_x(N(y)) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,y)$$

pois

$$\mathbb{E}_x(N(y)) = \mathbb{E}_x(\sum_{n=1}^{\infty} 1_y(X_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_x(1_y(X_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,y)$$

então $G(x,y)$ é o número esperado de visitas a y, para uma Cadeia de Markov começando em x.

Teorema 2.1 *i) Seja y um estado transiente. Então*

$$\mathbb{P}_x(N(y) < \infty) = 1$$

e

$$G(x,y) = \frac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{yy}}, \quad x \in \mathcal{S}$$

ii) Seja y um estado recorrente. Então $\mathbb{P}_y(N(y) = \infty) = 1$ e $G(y,y) = \infty$. Também

$$P_x(N(y)=\infty) = P_x(T_y<\infty) = \rho_{xy}, \quad x \in \mathcal{S}$$

Se $\rho_{xy}=0$, então $G(x,y)=0$, enquanto se $\rho_{xy}>0$, temos que $G(x,y)=\infty$.

Definição 2.2 *Sejam x e y dois estados quaisquer, se $\rho_{xy}>0$ então dizemos que x leva a y.*

Teorema 2.2 *Seja x um estado recorrente e suponha que x leva a y então y é recorrente e $\rho_{xy}=\rho_{yx}=1$.*

Definição 2.3 *Um espaço de estados é irredutível se $\forall x,y \in \mathcal{S}$, x leva a y.*

Definição 2.4 *Uma cadeia de Markov é dita irredutível se o seu espaço de estados é irredutível.*

2.2 Estados recorrentes positivos nulos e positivos recorrentes

Denote $N_n(y)$ o número de visitas da cadeia de Markov ao estado y até o tempo n, ou seja

$$N_n(y) = \sum_{m=1}^{n} 1_y(X_m)$$

e $G_n(x,y)$ o número esperado de tais visitas para uma cadeia de Markov começando em x, assim temos que

$$G_n(x,y) = \sum_{m=1}^{n} P^m(x,y)$$

Seja $m_y = E_y(T_y)$ o tempo médio de retorno a y, para uma cadeia de Markov começando em y, se esse tempo de retorno tem esperança finita. E seja $m_y=\infty$ caso contrário.

Teorema 2.3 *Seja y um estado recorrente. Então com probalidade 1:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{1_{\{T_y<\infty\}}}{m_y}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x,y) = \frac{\rho_{xy}}{m_y}, \quad x \in \mathcal{S}$$

Definição 2.5 *Um estado y é chamado recorrente nulo se $m_y = \infty$.*

Assim temos que se y é um estado recorrente nulo, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(x,y)}{n} = 0, \quad x \in \mathcal{S}$$

Definição 2.6 *Um estado y é chamado recorrente positivo se $m_y < \infty$*

Assim temos que se y é um estado recorrente positivo, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(x,y)}{n} = \frac{1}{m_y} > 0$$

2.3 Cadeia de Markov reversível

Definição 2.7 *Uma cadeia de Markov irredutível positiva recorrente é estacionária se, a distribuição inicial é uma distribuição estacionária.*

Considere uma cadeia de Markov tendo função de probabilidade P e distribuição estacionária π, suponha que comece em algum tempo, no qual traçamos a sequência de estados que vão para atrás no tempo, ou seja, começando no tempo n, considere a sequência de estados $X_n, X_{n-1} \ldots$ Verifica-se que essa sequência de estados é uma cadeia de Markov, com função de transição P^* definido por:

$$P^*(i,j) = P(X_m = j/\ X_{m+1} = i,\ X_{m+2} = i_2,\ ...,\ X_{m+k} = i_k)$$

$$= \frac{P(X_m = j,\ X_{m+1} = i,\ X_{m+2} = i_2,\ ...,\ X_{m+k} = i_k)}{P(X_{m+1} = i,\ X_{m+2} = i_2,\ ...,\ X_{m+k} = i_k)}$$

$$= \frac{P(X_m = j)P(X_{m+1} = i/\ X_m = j)P(X_{m+2} = i_2,\ ...,\ X_{m+k} = i_k/\ X_m = j,\ X_{m+1} = i)}{P(X_{m+1} = i)P(X_{m+2} = i_2,\ ...,\ X_{m+k} = i_k/\ X_{m+1} = i)}$$

$$= \frac{\pi_j P(j,i) P(X_{m+2} = i_2,\ ...,\ X_{m+k} = i_k/\ X_{m+1} = i)}{\pi_i P(X_{m+2} = i_2,\ ...,\ X_{m+k} = i_k/\ X_{m+1} = i)} = \frac{\pi_j P(j,i)}{\pi_i}$$

Então temos que o processo reverso no tempo é também uma cadeia de Markov com probabilidade de transição dada por:

$$P^*(i,j) = \frac{\pi_j P(j,i)}{\pi_i}$$

Definição 2.8 *Uma cadeia de Markov é reversível se* $P^*_{ij} = P_{ij}, \quad \forall i,j \in \mathcal{S}$. *Ou equivalentemente se,*

$$\pi_i P(i,j) = \pi_j P(j,i), \quad \forall i,j \in \mathcal{S}$$

Capítulo 3

Passeio aleatório e redes elétricas

3.1 Passeio aleatório em uma dimensão

Existem vários exemplos clássicos de passeios aleatórios em uma dimensão, como a ruína do jogador, a caminhada de um bêbado... Vamos abordar o caso particular do passeio aleatório em uma dimensão definido no conjunto de pontos $0, 1, .., N$, onde 0 e N são estados absorventes, o passeio começa em qualquer estado $i \in \{0, 1, ..., N\}$, onde a probabilidade de ir do estado i para o $i + 1$ é $p_{i,i+1}$, e a probabilidade de ir do estado i para o $i - 1$ é $p_{i,i-1}$, no qual $p_{i,i+1} + p_{i,i-1} = 1$

Seja $p(x)$ a probabilidade de começando em x atingir N antes de 0. Assim $p(x)$ é uma função definida nos pontos $x = 0, 1, ...N$ com as seguintes propriedades:

1. $p(0) = 0$

2. $p(N) = 1$

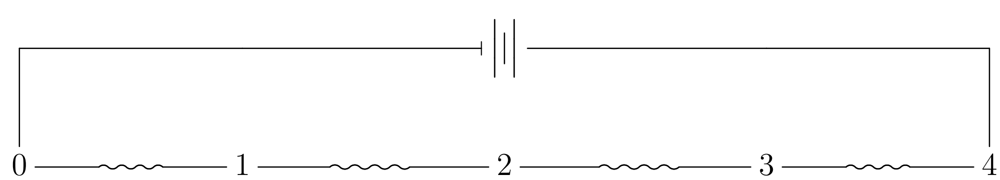
3. se $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2} \quad \forall i \in \{1, 2, ..., N - 1\}$ então,
   $p(x) = \frac{1}{2}p(x + 1) + \frac{1}{2}p(x - 1), \quad \forall x \in \{1, 2, ..., N - 1\}$

3.2 Um problema de rede elétrica

Vamos fazer uma pequena introdução à circuitos elétricos. Considere um aparelho cuja função é manter entre seus terminas 0 e N uma diferença de potencial elétrico (ddp) expressa por $v(0) - v(N)$. Esse aparelho é chamado gerador elétrico e seus terminais 0 e N denominados polos. Considere agora um condutor metálico ligado aos polos 0 e N do gerador elétrico, várias propriedades físicas ocorrem no condutor elétrico mas não serão discutidas aqui, mas temos que flui uma corrente elétrica por esse condutor.

Denominamos circuito elétrico ao conjunto de aparelhos com os quais se pode estabelecer uma corrente elétrica. Existem elementos do circuito cuja função, entre outras, é a de transformar energia elétrica em energia térmica, ou limitar a intensidade de corrente elétrica em circuitos elêtronicos. Tais elementos recebem o nome de resistores.

Usando as leis da física, vamos considerar o seguinte problema: conectamos resistores iguais em série, e colocamos uma unidade de voltagem nos pontos finais, podemos ver um exemplo na figura abaixo, com $N = 4$.



Seja os pontos $x = 0, 1, 2, ..., N$, vamos estabelecer a voltagem $v(x)$ nesses pontos. Colocando $v(0) = 0$ e $v(N) = 1$, então $v(x)$ satisfaz as propriedades 1) e 2) da *seção 3.1*, vamos mostrar que $v(x)$ também safisfaz 3)

Pela lei de Kirchhoff, a corrente entrando em x deve ser igual a corrente saindo. Pela lei de Ohm, se os pontos x e y são conectados por uma resistência de magnitude R, então a corrente i_{xy} que flui de x para y é igual a:

$$i_{xy} = \frac{v(x) - v(y)}{R}$$

Então para $x = 1, 2, ..., N - 1$

$$i_{x-1,x} = i_{x,x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v(x-1) - v(x)}{R} = \frac{v(x) - v(x+1)}{R}$$

$$\Leftrightarrow v(x) = \frac{v(x+1) + v(x-1)}{2}$$

Assim $v(x)$ também satisfaz 3).

3.3 Função harmônica (O princípio da unicidade)

Nesta seção vamos nomear o problema de Dirichlet e mostrar que ambas as funções $p(x)$ e $v(x)$ são harmônicas, e que pelo princípio da unicidade elas são equivalentes.

Seja $\mathbb{S}$ um conjunto de pontos, $\mathbb{S} = \{0, 1, 2, ..., N\}$, chamamos de pontos inteiros de $\mathbb{S}$, os pontos do conjunto $\mathbb{I} = \{1, 2, ..., N-1\}$, e de pontos limites os pontos do conjunto $\mathbb{L} = \{0, N\}$.

Definição 3.1 *Uma função $f(x)$ definida em $\mathbb{S}$ é harmônica se satisfaz a propriedade da média, ou seja, $\forall x \in \mathbb{I}$, temos que*

$$f(x) = \frac{f(x-1) + f(x+1)}{2}$$

No caso mais geral, no qual $p_{x,x+1} \neq \frac{1}{2}$, uma função $f(x)$ é harmônica se satisfaz a seguinte propriedade

$$f(x) = \sum_{x \sim y} p_{xy} f(y)$$

no qual p_{xy} é a probabilidade de ir do estado x para o estado y, e $x \sim y$ indica que x e y são conectados.

Nós vimos que, $p(x)$ e $v(x)$ são funções harmônicas em $\mathbb{S}$, tendo os mesmos valores no limite, $p(0) = v(0)$ e $p(N) = v(N)$.

O problema de Dirichlet trata de se encontrar uma função harmônica dado os seus valores no limite, pelo princípio da unicidade para o problema de Dirichlet, temos que $v(x)$ e $p(x)$ são realmente a mesma função.

Para mostrar o princípio da unicidade, iremos primeiramente provar o princípio do máximo para funções harmônicas.

Princípio do máximo: *Uma função harmônica definida em $\mathbb{S}$, atinge o seu valor máximo M e o seu valor mínimo m, no limite.*

Prova: Seja M o maior valor de f. Então se $f(x) = M$ para algum x em $\mathbb{I}$, o mesmo deve ocorrer para $f(x-1)$ e $f(x+1)$, já que $f(x)$ é a média desses dois valores. Se $x-1$ ainda é um ponto interior o mesmo argumento vale para $x-2$, implicando que $f(x-2) = M$, continuando assim, iremos concluir que $f(0) = M$. O argumento é análogo para o valor mínimo m. ∎

Princípio da unicidade: *Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções harmônicas em $\mathbb{S}$, tal que $f(x) = g(x)$ em $\mathbb{L}$, então $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{S}$.*

Prova: Seja $h(x) = f(x) - g(x)$, então se $x \in \mathbb{I}$ temos que,

$$\frac{h(x-1)+h(x+1)}{2} = \frac{f(x-1)+f(x+1)}{2} - \frac{g(x-1)+g(x+1)}{2}$$

assim h é harmônica, mas $h(x) = 0$ para $x \in \mathbb{L}$, então pelo princípio do máximo, o valores máximo e mínimo de h são 0 o que implica que $h(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{S}$, então $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{S}$. ∎

3.4 Passeio aleatório em redes mais gerais

Um grafo é uma coleção finita de pontos (também chamado sítios), com certos pares de pontos conectados por uma borda (também chamado elos). Pode ser assim definido $\mathbb{G} = (V, E)$, no qual V é o conjunto dos sítios e E é um subconjunto simétrico irreflexivo de $V \times V$, chamado conjunto dos elos, irreflexivo significa que E não contém elementos da forma (x,x). O grafo é conectado se é possível ir entre quaisquer dois sítios, movendo-se ao longo dos elos.

Assumimos que $\mathbb{G}$ é um grafo conectado e atribuímos a cada elo xy uma resistência R_{xy}, assim a condutância do elo xy é $C_{xy} = \frac{1}{R_{xy}}$ e $\mathbb{G}$ passa a ser uma rede.

Definimos o passeio aleatório em $\mathbb{G}$ como uma cadeia de Markov com matriz de transição $\mathbb{P}$ dada por:

$$P_{xy} = \frac{C_{xy}}{C_x}$$

com $C_x = \sum_y C_{xy}$.

Como a rede é conectado, é possível ir entre quaisquer dois pontos. Uma cadeia de Markov com essa propriedade é chamada uma cadeia de Markov irredutível.

Essa cadeia de Markov assim definida também é reversível.

Seja $\pi_j = \dfrac{C_j}{C}$, onde $C = \sum_x C_x$, temos que

$$\pi_x P_{xy} = \pi_y P_{yx}, \quad \forall x, y$$

pois

$$C_x P_{xy} = C_x \frac{C_{xy}}{C_x} = C_{xy} = C_y \frac{C_{xy}}{C_y} = C_y P_{yx} \ .$$

3.4.1 Interpretações probabilísticas da voltagem

Dada a rede $\mathbb{G}$, com resistores R_{xy} atribuídos aos elos xy. Escolhemos dois sítios a e b, e colocamos uma bateria de um volt nesses sítios, estabelecendo a voltagem $v(a) = 1$ e $v(b) = 0$. É fácil ver usando as propriedades da função harmônica, que $v(x)$, a voltagem no ponto x, é igual a probabilidade de começando em x atingir a antes de b.

3.5 Algumas interpretações probabilísticas

Seja τ_a o primeiro tempo que o passeio aleatório visita a e τ_a^+ o primeiro tempo depois de 0 que o passeio aleatório visita a.

Seja $P[a \to z] := P_a[\tau_z < \tau_a^+]$, ou seja a probabilidade de um passeio aleatório começando em a, atingir z antes de retornar a a.

Impondo a voltagem $v(a)$ em a e 0 em z. Como $v(\cdot)$ é linear em $v(a)$ pelo princípio da superposição, temos que $P_x[\tau_a < \tau_z] = \dfrac{v(x)}{v(a)}$. Assim temos que

$$P[a \to z] = \sum_x p(a,x)(1 - P_x[\tau_a < \tau_z]) = \sum_x \frac{C_{ax}}{C_a}\left[1 - \frac{v(x)}{v(a)}\right]$$

$$= \frac{1}{v(a)C_a} \sum_x C_{ax}[v(a) - v(x)] = \frac{1}{v(a)C_a} \sum_x i_{ax}$$

Em outras palavras,

$$v(a) = \frac{\sum_x i_{ax}}{C_a P[a \to z]}$$

definimos a condutância efetiva como:

$$\mathfrak{C}(a \leftrightarrow z) := C_a P[a \to z]$$

Definimos a resistência efetiva para ser o recíproco da condutância efetiva, ou seja

$$\Re(a \leftrightarrow z) := \frac{1}{\mathfrak{C}(a \leftrightarrow z)}$$

Agora o número de visitas a a antes de atingir z é uma variável aleatória geométrica, com média $P[a \to z]^{-1} = C_a \Re(a \leftrightarrow z)$. Se existe uma única unidade de corrente saindo de a para z e a voltagem é 0 em z, então a média seria $C_a v(a)$.

Generalizando, seja $G_z(a,x) = E_a \left[\sum_{k=0}^{\tau_z - 1} 1_{\{X_k = x\}} \right]$, ou seja, o número esperado de visitas a x estritamente antes de atingir z, por um passeio aleatório começando em a. Então $G_z(a,x) = 0$ para $x = z$ e

$$G_z(a,a) = P[a \to z]^{-1} = C_a \Re(a \leftrightarrow z)$$

A função $G_z(\cdot,\cdot)$ é chamada a função de Green do passeio aleatório absorvente em z.

Proposição 3.1 (Função de Green como voltagem) *Seja $\mathbb{G}$ uma rede finita conectada na qual a voltagem é imposta em $\{a\} \cup \{z\}$, tal que uma unidade de corrente flui de a para z e a voltagem é 0 em z, então a função da voltagem satisfaz*

$$v(x) = \frac{G_z(a,x)}{C_x}, \quad \forall x$$

Prova: Vimos que para $x \in \{a\} \cup \{z\}$ é verdadeiro pois,

$$v(a) = \frac{G_z(a,a)}{C_a} = \frac{1}{C_a P[a \leftrightarrow z]}$$

e

$$v(z) = \frac{G_z(a,z)}{C_z} = 0$$

Então basta mostrar que $\frac{G_z(a,x)}{C_x}$ é harmônica nos outros pontos. Como temos uma cadeia de Markov reversível então é fácil ver que

$$\frac{G_z(a,x)}{C_x} = \frac{G_z(x,a)}{C_a}$$

e usando a fórmula da esperança total, no qual V_x^z indica o número de visitas a x antes de atingir z e X_1 indica o primeiro passo do passeio aleatório, temos que:

$$G_z(x,a) = \; E_x(V_a^z) = \; E[E_x(V_a^z/X_1)] = \; E[E_{X_1}[V_a^z]]$$

$$= \sum_{x \sim y} p_{xy} \; E_y[V_a^z] = \sum_{x \sim y} p_{xy} \; G_z(y,a)$$

segue que

$$\frac{G_z(a,x)}{C_x} = \frac{G_z(x,a)}{C_a} = \sum_{x \sim y} p_{xy} \; \frac{G_z(y,a)}{C_a}$$

$$= \sum_{x \sim y} p_{xy} \; \frac{G_z(a,y)}{C_y}$$

Assim mostramos que $\frac{G_z(a,x)}{C_x}$ é uma função harmônica. ■

Proposição 3.2 *Seja $\mathbb{G}$ uma rede finita conectada. Começando um passeio aleatório em a, e que seja dado τ_z. Para todo $x \sim y$, seja S_{xy} o número de transições de x para y. Então*

$$E[S_{xy}] = G_z(a,x)p_{xy}$$

e

$$E[S_{xy} - S_{yx}] = i(x,y)$$

onde i é a corrente em $\mathbb{G}$ quando um potencial é aplicado entre a e z, tal que uma unidade de corrente flui dentro em a.

Prova: Note que contamos a transição de x para y quando $x \neq z$, mas se $y = z$ no entanto não computamos isso como uma visita a x em $G_z(a, x)$. Assim:

$$E[S_{xy}] = E\left[\sum_{k=0}^{\tau_z} 1_{\{x_k = x\}} 1_{\{x_{k+1} = y\}}\right] = \sum_{k=0}^{\tau_z} P[X_k = x, X_{k+1} = y]$$

$$= \sum_{k=0}^{\tau_z} P[X_k = x] p_{xy} = E\left[\sum_{k=0}^{\tau_z} 1_{\{x_k = x\}}\right] p_{xy}$$

$$= G_z(a, x) p_{xy}$$

Então pela proposição anterior, temos que $\forall x, y$

$$E[S_{xy} - S_{yx}] = G_z(a, x) p_{xy} - G_z(a, y) p_{yx}$$

$$= v(x) C_x p_{xy} - v(y) C_y p_{yx} = [v(x) - v(y)] C_{xy} = i(x, y) \quad \blacksquare$$

3.6 Tempo de comutação

Chegamos ao principal objetivo desta seção que é definir o tempo de comutação e dar o seu valor para o caso de um passeio aleatório simples.

Primeiramente vamos calcular o tempo esperado que leva para um passeio aleatório atingir um conjunto de vértices.

Proposição 3.3 *Dada uma rede finita com um vértice a e a é disjunto do vértice z. Seja $v(.)$ a voltagem quando uma unidade de corrente flui de a para z. Temos que*

$$E_a[\tau_z] = \sum_{x \in V} C_x v(x)$$

Prova: Sabemos que V_x^z indica o número de visitas a x antes de atingir z, então $\tau_z = \sum_x V_x^z$. Assim

$$E_a[\tau_z] = E_a\left[\sum_x V_x^z\right] = \sum_x E_a[V_x^z]$$

$$E_a[\tau_z] = \sum_x G_z(a,x)$$

e pela *proposição 3.1* segue que

$$E_a[\tau_z] = \sum_x G_z(a,x) = \sum_x C_x v(x) \quad \blacksquare$$

Definição 3.2 *O tempo de comutação é o tempo esperado para um passeio aleatório começando em a visitar z e depois voltar para a, ou seja, $E_a[\tau_z] + E_z[\tau_a]$.*

Proposição 3.4 *Seja $\mathbb{G}$ uma rede finita e $\gamma := \sum_{x \in V} C_x$. Seja a e z dois vértices de $\mathbb{G}$. O tempo de comutação entre a e z é $\gamma\ \Re[a \leftrightarrow z]$.*

Prova: O tempo $E_a[\tau_z]$ na *Proposição 3.3* é expresso usando a voltagem $v(x)$. Agora a voltagem em x, para uma unidade de corrente fluindo de z para a é igual a $v(a) - v(x)$. Então

$$E_z[\tau_a] = \sum_{x \in V} C_x[v(a) - v(x)]$$

o tempo de comutação é dado por:

$$E_z[\tau_a] + E_a[\tau_z] = \sum_{x \in V} C_x[v(a) - v(x)] + \sum_{x \in V} C_x v(x)$$

$$= \sum_{x \in V} C_x v(a) = v(a) \sum_{x \in V} C_x = v(a)\ \gamma$$

Como $v(a) = \Re[a \leftrightarrow z]$, temos que

$$E_z[\tau_a] + E_a[\tau_z] = \gamma\ \Re[a \leftrightarrow z] \quad \blacksquare$$

Capítulo 4

Passeio aleatório em meio aleatório em $\mathbb{Z}$

O passeio aleatório em ambiente aleatório é um passeio aleatório, no qual para todo $x \in \mathbb{Z}$ é dado o número positivo w_x. O ambiente $w := (w_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ no qual $w_x \in [0,1]$, é uma sequência iid de variáveis aleatórias positivas.

Assim dado o ambiente temos uma cadeia de Markov em $\mathbb{Z}$, começando em z, com probabilidade de transição determinada por:

$$P_w^z[S_{n+1} = x+1/\ S_n = x] = w_x = w_x^+$$

e

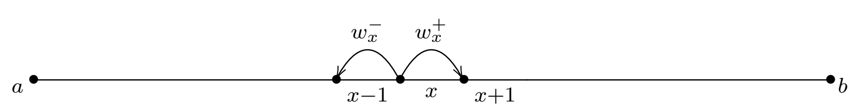
$$P_w^z[S_{n+1} = x-1/S_n = x] = 1 - w_x = w_x^-$$

No nosso caso suporemos que, para $\epsilon > 0$

$$P[\ w_x \in [\epsilon, 1-\epsilon]\ ] = 1$$

Agora vamos encontrar a medida reversível para o passeio aleatório em meio aleatório confinado no intervalo $[a,b]$, no qual $w_a^+ = 1$ e $w_b^- = 1$,

Como observamos na figura abaixo:



Temos pela *definição 2.8* que uma cadeia de Markov é reversível se $P^*_{ij} = P_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathcal{S}$. Ou equivalentemente se,

$$\pi_i P(i,j) = \pi_j P(j,i), \quad \forall i, j \in \mathcal{S}$$

seja $\pi_a = 1$, segue que

$$\begin{gathered}
\pi_a P(a,j) = \pi_j P(j,a) \\
\pi_a P(a, a+1) = \pi_{a+1} P(a+1, a) \\
\pi_a w_a^+ = \pi_{a+1} w_{a+1}^- \\
\pi_{a+1} = \frac{\pi_a w_a^+}{w_{a+1}^-} = \frac{w_a^+}{w_{a+1}^-}
\end{gathered}$$

para i=a+1 temos que

$$\begin{gathered}
\pi_{a+1} P(a+1, a+2) = \pi_{a+2} P(a+2, a+1) \\
\pi_{a+1} w_1^+ = \pi_{a+2} w_2^- \\
\pi_{a+2} = \frac{\pi_{a+1} w_{a+1}^+}{w_{a+2}^-} = \frac{w_a^+ w_{a+1}^+}{w_{a+1}^- w_{a+2}^-}
\end{gathered}$$

por indução chegamos ao seguinte resultado para a medida reversível

$$\pi_x = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x = a \\ \dfrac{w_a^+ \ldots w_{x-1}^+}{w_a^- \ldots w_x^-}, & \text{se} \quad x \geq a \end{cases}$$

Agora iremos encontrar a distribuição estacionária para esse passeio.

Temos que o sistema de equações

$$\sum_x \mu(x) P(x,y) = \mu(y), \tag{4.1}$$

é dada por:

$$\begin{gathered}
\mu(a+1) w_{a+1}^- = \mu(a) \\
\mu(y-1) w_{y-1}^+ + \mu(y+1) w_{y+1}^- = \mu(y) \\
\mu(b-1) w_{b-1}^+ = \mu(b)
\end{gathered}$$

Como

$$w_x^+ + w_x^- = 1$$

segue que

$$\mu(a+1)w_{a+1}^- - \mu(a) = 0$$
$$\mu(b-1)w_{b-1}^+ - \mu(b) = 0$$
$$\mu(y-1)w_{y-1}^+ + \ \mu(y+1)w_{y+1}^- + \ (1 - w_y^+ - w_y^-)\mu(y) = \ \mu(y)$$

que podemos escrever como:

$$w_{y+1}^-\mu(y+1) - \ w_y^+\mu(y) = \ w_y^-\mu(y) - \ w_{y-1}^+\mu(y-1)$$

Por indução temos

$$w_{y+1}^-\mu(y+1) - \ w_y^+\mu(y) = \ 0$$

Assim

$$\mu(y+1) = \frac{w_y^+}{w_{y+1}^-}\mu(y)$$

Consequentemente

$$\mu(x) = \frac{w_a^+ ... w_{x-1}^+}{w_{a+1}^- ... w_x^-}\mu(a), \quad x \geq a+1$$

e escrevemos

$$\mu(x) = \ \pi_x \mu(a), \quad x \geq a.$$

Concluimos que essa cadeia de Markov tem uma única distribuição estacionária dada por:

$$\mu(x) = \frac{\pi_x}{\sum_{y=a}^{b} \pi_y}, \quad a \leq x \leq b$$

A medida reversível π_x também pode ser escrita como

$$\pi_x = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x = a \\ \dfrac{w_a^+}{w_x^-} \exp\left(-\sum_{k=a+1}^{x-1} \rho_k\right), & \text{se} \quad x \geq a+1 \end{cases}$$

no qual

$$\rho_k = \ln\left(\frac{w_k^-}{w_k^+}\right)$$

Definimos o potencial como sendo

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x = a, a+1 \\ \sum_{k=a+1}^{x-1} \rho_k, & \text{se} \quad x > a+1 \end{cases}$$

4.1 O tempo de comutação para passeio aleatório em meio aleatório

Dado o passeio aleatório em meio aleatório visto na seção anterior, iremos calcular o seu tempo de comutação. Para isso vamos associá-lo a uma rede elétrica.

Seja o passeio aleatório em meio aleatório definido nos pontos entre a e b, onde $a, b \in \mathbb{Z}$, com probabilidade de transição determinada por:

$$P_w[S_{n+1} = x+1/S_n = x] = w_x^+$$

e

$$P_w[S_{n+1} = x-1/S_n = x] = 1 - w_x^+ = w_x^-$$

com
$w_a^+ = 1$ e $w_b^- = 1$

Como vimos no capítulo anterior na seção 3.4 , que dada uma rede elétrica obtemos uma cadeia de Markov, aqui faremos ao contrário, ou seja, dada a cadeia de Markov obteremos a rede elétrica associada.

Vimos que

$$P_{xy} = \frac{C_{xy}}{C_x}$$

com $C_x = \sum\limits_y C_{xy}$

Assim temos que:

$$\begin{cases} w_x^+ & = & \dfrac{C_{x,x+1}}{\sum\limits_y C_{xy}} & = & \dfrac{C_{x,x+1}}{C_{x,x+1} + C_{x,x-1}} \\ \\ w_x^- & = & \dfrac{C_{x,x-1}}{\sum\limits_y C_{xy}} & = & \dfrac{C_{x,x-1}}{C_{x,x+1} + C_{x,x-1}} \end{cases} \tag{4.2}$$

Tinhamos que a distribuição estacionária era dada por:

$$\pi(x) = \frac{C_x}{C}$$

onde $C = \sum\limits_x C_x$

Mas no *capítulo* 4 temos que, para um passeio aleatório em meio aleatório, a distribuição estacionária é

$$\pi(x) = \frac{\pi_x}{\sum\limits_{y=a}^{b} \pi_y}$$

Então,

$$\frac{C_x}{\sum\limits_x C_x} = \frac{\dfrac{w_a^+ \dots w_{x-1}^+}{w_{a+1}^- \dots w_x^-}}{\sum\limits_{y=a}^{b} \left(\dfrac{w_a^+ \dots w_{y-1}^+}{w_{a+1}^- \dots w_y^-} \right)} \tag{4.3}$$

mas

$$C_x = C_{x,x-1} + C_{x,x+1}$$

voltando a 4.3 segue que

$$\frac{C_{x,x-1} + C_{x,x+1}}{\displaystyle\sum_{y=a}^{b} C_{y,y-1} + C_{y,y+1}} = \frac{\dfrac{w_a^+ \dots w_{x-1}^+}{w_{a+1}^- \dots w_x^-}}{\displaystyle\sum_{y=a}^{b} \left(\frac{w_a^+ \dots w_{y-1}^+}{w_{a+1}^- \dots w_y^-} \right)}$$

ou seja, podemos tomar

$$C_{x,x-1} + C_{x,x+1} = \frac{w_a^+ \dots w_{x-1}^+}{w_{a+1}^- \dots w_x^-}$$

Voltando a 4.2, chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{cases} C_{x,x+1} &= w_x^+ \dfrac{w_a^+ \dots w_{x-1}^+}{w_{a+1}^- \dots w_x^-} &= w_x^+ \pi_x \\ \\ C_{x,x-1} &= w_x^- \dfrac{w_a^+ \dots w_{x-1}^+}{w_{a+1}^- \dots w_x^-} &= w_x^- \pi_x \end{cases}$$

Usando a *proposição* 3.4 do *capítulo* 3 vamos calcular o tempo de comutação entre a e b. Temos que o tempo de comutação entre a e b é dado por:

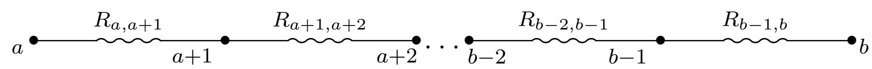
$$E_b[\tau_a] + E_a[\tau_b] = \gamma \, \Re[a \leftrightarrow b]$$

onde $\gamma = \displaystyle\sum_{x \in V} C_x$ e $\Re[a \leftrightarrow z] = \dfrac{1}{C_a P[a \to b]}$.

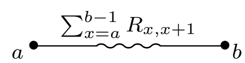
Já calculamos anteriormente que

$$\gamma = \sum_{x \in V} C_x = \sum_{y=a}^{b} \left(\frac{w_a^+ \dots w_{y-1}^+}{w_{a+1}^- \dots w_y^-} \right)$$

Agora basta calcular a resistência efetiva entre a e b, ou seja $\Re[a \leftrightarrow b]$. Um importante fato sobre redes elétricas, é que resistores que são conectados em série entre dados dois pontos, é equivalente a um único resistor cuja sua resistência é a soma das resistências de todos os resistores entre esses dois pontos. Como pode ser visto na figura abaixo



é equivalente a



Assim a resistência efetiva entre a e b também pode ser calculada como

$$\Re[a \leftrightarrow b] = \sum_{x=a}^{b-1} R_{x,x+1}$$

mas a resistência é dada por $R_{x,x+1} = \dfrac{1}{C_{x,x+1}} = \dfrac{1}{w_x^+ \pi_x}$.

Chegamos ao resultado principal desta seção, ou seja, o tempo de comutação entre a e b, quando se é dado um passeio aleatório em meio aleatório, que é dado por

$$E_b[\tau_a] + E_a[\tau_b] = \left[\sum_{y=a}^{b} \left(\frac{w_a^+ \dots w_{y-1}^+}{w_{a+1}^- \dots w_y^-} \right) \right] \sum_{x=a}^{b-1} \frac{1}{w_x^+ \left(\dfrac{w_a^+ \dots w_{x-1}^+}{w_{a+1}^- \dots w_x^-} \right)}.$$

Capítulo 5

Limite superior para a probabilidade de confinamento

Os capítulos anteriores foram desenvolvidos para calcular o tempo de comutação para um passeio aleatório em meio aleatório. Aqui iremos encontrar um limite superior para a probabilidade de confinamento de passeio aleatório em meio aleatório. Primeiramente vamos enunciar o *Teorema* mais importante de todo este trabalho, que será demonstrado no decorrer desse capítulo.

Teorema 5.1 *Existe constantes $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tais que para $\mathbb{P}$-q-t w, para todo intervalo $[a, b]$ e para todo $m > K_2(b-a)^2 e^{R_{[a,b]}(V)}$, temos que:*

$$\max_{x \in (a,b)} P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > m] \leq K_1 \exp\left(-\frac{m}{K_2(b-a)^2 e^{R_{[a,b]}(V)}}\right) .$$

Quando nos referimos a probabilidade de confinamento de um passeio aleatório em meio aleatório confinado no intervalo de $[a, b]$, estamos falando da probabilidade de um passeio aleatório em meio aleatório começando em x permanecer no intervalo (a, b), ou seja, $P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > n]$ no qual $\tau_{\{a,b\}}$ é o primeiro tempo em que o passeio aleatório visita a ou b e n é um tempo relativamente grande.

Vamos definir o comute time entre x e b : $T_{x,b} =$ o tempo que leva para o passeio aleatório ir de x para b e depois retornar a x.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] & & b \arrow[ll, bend right] \end{tikzcd}$$

Temos pela propriedade de Markov forte que

$$E^x_w[T_{x,b}] = E^x_w[\tau_b] + E^b_w[\tau_x], \quad \forall x \in (a,b)$$

Vamos encontrar um limite superior para:

$$P^x_w[\tau_{\{a,b\}} > n]$$

Usando a desigualdade de Chebyshev temos que

$$P^x_w[\tau_{\{a,b\}} > n] \leq \frac{E^x_w[\tau_{\{a,b\}}]}{n}$$

mas como $\tau_{\{a,b\}} = \min\{n; X_n \in \{a,b\}\}$, então $\tau_{\{a,b\}} \leq \tau_a$ e $\tau_{\{a,b\}} \leq \tau_b$, segue que

$$\tau_{\{a,b\}} \leq \tau_a + \tau_b$$

aplicando a esperança nas variáveis aleatórias positivas, temos que

$$E^x_w[\tau_{\{a,b\}}] \leq E^x_w[\tau_a + \tau_b]$$
$$E^x_w[\tau_{\{a,b\}}] \leq E^x_w[\tau_a] + E^x_w[\tau_b]$$

É fácil ver pela propriedade de Markov que

$$E^x_w[\tau_a] \leq E^b_w[\tau_a] \tag{5.1}$$

e

$$E^x_w[\tau_b] \leq E^a_w[\tau_b] \tag{5.2}$$

Vamos demonstrar somente que $E^x_w[\tau_a] \leq E^b_w[\tau_a]$, já que a equação (5.2) segue de modo análogo. Seja $E^b_w[\tau_a]$, aplicando a esperança condicional com relação à σ-álgebra $\mathcal{F}_{\tau_x}$, temos

$$E^b_w[\tau_a] = E^b_w[E^b_w(\tau_x + \tau_a - \tau_x/\mathcal{F}_{\tau_x})]$$

$$E^b_w[\tau_a] = E^b_w[\tau_x] + E^b_w[E^b_w(\tau_a - \tau_x/\mathcal{F}_{\tau_x})]$$

usando a propriedade de Markov forte temos que

$$E^b_w[\tau_a - \tau_x/\mathcal{F}_{\tau_x}] = E^x_w[\tau_a]$$

segue que

$$E_w^b[\tau_a] = E_w^b[\tau_x] + E_w^x[\tau_a]$$

mas $E_w^b[\tau_x] > 0$ pois $\tau_x > 0$, implicando que

$$E_w^b[\tau_a] \geq E_w^x[\tau_a] \quad \blacksquare$$

Concluímos que

$$P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > n] \leq \frac{E_w^x[\tau_{\{a,b\}}]}{n} \leq \frac{E_w^x[\tau_a] + E_w^x[\tau_b]}{n} \leq \frac{E_w^b[\tau_a] + E_w^a[\tau_b]}{n}, \quad \forall x \in (a,b)$$

ou seja,

$$P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > n] \leq \frac{E_w^b[\tau_a] + E_w^a[\tau_b]}{n}, \quad \forall x \in (a,b)$$

5.1 O limite superior dado em função do Range do potencial

Anteriormente obtivemos o limite superior para a probabilidade de confinamento de um passeio aleatório em meio aleatório, dado por

$$P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > n] \leq \frac{E_w^b[\tau_a] + E_w^a[\tau_b]}{n} \tag{5.3}$$

Vimos no *capítulo* 4 que

$$E_w^b[\tau_a] + E_w^a[\tau_b] = \left[\sum_{y=a}^{b}\left(\frac{w_a^+ \dots w_{y-1}^+}{w_{a+1}^- \dots w_y^-}\right)\right] \sum_{x=a}^{b-1} \frac{1}{w_x^+ \left(\frac{w_a^+ \dots w_{x-1}^+}{w_{a+1}^- \dots w_x^-}\right)}$$

no qual $\pi_x = \frac{w_a^+ \dots w_{x-1}^+}{w_{a+1}^- \dots w_x^-}$.

Assim temos que o limite superior é dado por

$$\frac{E_w^b[\tau_a] + E_w^a[\tau_b]}{n} = \frac{\sum_{y=a}^{b} \pi_y \sum_{x=a}^{b-1} \left(\frac{1}{w_x^+ \pi_x}\right)}{n}$$

mas $\pi_x = \begin{cases} 1 = e^{-V(0)}, & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{w_a^+}{w_x^-} \exp\left(-V(x)\right), & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Então,

$$\frac{E_w^b[\tau_a] + E_w^a[\tau_b]}{n} = \frac{\displaystyle\sum_{y=a}^{b} \frac{w_a^+}{w_y^-} \exp\left(-V(y)\right) \sum_{x=a}^{b-1} \left[\frac{1}{w_x^+ \left(\frac{w_a^+}{w_x^-} \exp\left(-V(x)\right) \right)} \right]}{n}$$

como $P[\ w_y \in [\epsilon, 1-\epsilon]\ ] = 1, \forall y$ e $\epsilon > 0$, temos que $\dfrac{1}{C_1} \leq \dfrac{w_a^+}{w_y^-} \leq C_1$, no qual $C_1 = \dfrac{1-\epsilon}{\epsilon}$ é uma constante. Assim podemos escrever a desigualdade (5.3) da seguinte maneira

$$P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > n] \leq \frac{\displaystyle\sum_{y=a}^{b} C_1 \exp\left(-V(y)\right) \sum_{x=a}^{b-1} \frac{C_1}{\epsilon} \exp\left(V(x)\right)}{n}$$

$$\leq \frac{\dfrac{C_1^2}{\epsilon}(b-a) \exp\left(-\min\limits_{x\in(a,b)} V(x)\right)(b-a)\exp\left(\max\limits_{x\in(a,b)} V(x)\right)}{n}$$

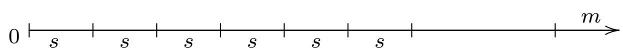
$$\leq \frac{C(b-a)^2 \exp\left(\max\limits_{x\in(a,b)} V(x) - \min\limits_{x\in(a,b)} V(x)\right)}{n}$$

No qual $C = \dfrac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3}$ é uma constante. Mas $\left(\max\limits_{x\in(a,b)} V(x) - \min\limits_{x\in(a,b)} V(x)\right)$ é chamado de amplitude do potencial e é denotado por range $= R_{[a,b]}(V)$. Concluímos que

$$P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > n] \leq \frac{C(b-a)^2 \exp\left(R_{[a,b]}(V)\right)}{n}$$

Vamos abordar esta cota superior de forma mais abrangente. Vamos escolher n tal que $P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > n] \leq p$, no qual $0 < p < 1$, chamamos de s

este valor de n, onde $s \in \mathbb{Z}$. Pegamos um intervalo m grande o suficiente tal que $m > s$ e o dividimos em intervalos de comprimento s, com isso o número de intervalos é $N = \left[\frac{m}{s}\right]$, ou seja N é a parte inteira de $\frac{m}{s}$, assim $\left(\frac{m}{s} - 1\right) \leq N \leq \frac{m}{s}$



Agora vamos calcular qual seria a probabilidade do passeio aleatório permanecer nesse intervalo m, ou seja, vamos calcular a $P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > m]$,

$$
\begin{aligned}
P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > m] &\leq P_w^x\left[\tau_{\{a,b\}} \notin \bigcup_{j=0}^{N-1} [js, (j+1)s]\right] \\
&= P_w^x\left[\bigcap_{j=0}^{N-1} \left\{\tau_{\{a,b\}} \notin [js, (j+1)s]\right\}\right]
\end{aligned}
$$

usando o teorema da multiplicação de probabilidades, obtemos

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{j=0}^{N-1} P_w^x\left[\tau_{\{a,b\}} \notin [js, (j+1)s] \Big/ \bigcap_{i=0}^{j} \left\{\tau_{\{a,b\}} \notin [is, (i+1)s]\right\}\right] \\
&= \prod_{j=0}^{N-1} P_w^x\left[\tau_{\{a,b\}} \notin [js, (j+1)s] \Big/ \tau_{\{a,b\}} \notin \left(\bigcup_{i=0}^{j} [is, (i+1)s]\right)\right] \\
&= \prod_{j=0}^{N-1} P_w^x\left[\tau_{\{a,b\}} \notin [js, (j+1)s] \Big/ \tau_{\{a,b\}} \notin [0, js]\right] \\
&= \prod_{j=0}^{N-1} \frac{P_w^x\left[\tau_{\{a,b\}} \notin [js, (j+1)s], \tau_{\{a,b\}} \notin [0, js]\right]}{P_w^x\left[\tau_{\{a,b\}} \notin [0, js]\right]}
\end{aligned}
$$

agora vamos usar a fórmula da probabilidade total

$$
= \prod_{j=0}^{N-1} \frac{E_w^x\left[P_w^x\left[\tau_{\{a,b\}} \notin [js, (j+1)s], \tau_{\{a,b\}} \notin [0, js] \Big/ \mathcal{F}_{js}\right]\right]}{P_w^x\left[\tau_{\{a,b\}} \notin [0, js]\right]}
$$

usando a propriedade de Markov

$$= \prod_{j=0}^{N-1} \frac{E_w^x \left[1_{\{\tau_{\{a,b\}} \notin [0,js]\}} \; P_w^{X(js)} \left[\tau_{\{a,b\}} \notin [0,s] \right] \right]}{P_w^x \left[\tau_{\{a,b\}} \notin [0,js] \right]}$$

$$\leq \prod_{j=0}^{N-1} \frac{E_w^x \left[1_{\{\tau_{\{a,b\}} \notin [0,js]\}} \; \max_{x \in (a,b)} P_w^x \left[\tau_{\{a,b\}} \notin [0,s] \right] \right]}{P_w^x \left[\tau_{\{a,b\}} \notin [0,js] \right]}$$

como a expressão $\max_{x \in (a,b)} P_w^x \left[\tau_{\{a,b\}} \notin [0,s] \right]$ não depende nem de x e nem de j temos que

$$\leq \prod_{j=0}^{N-1} \frac{P_w^x \left[\tau_{\{a,b\}} \notin [0,js] \right] \left[\max_{x \in (a,b)} P_w^x \left[\tau_{\{a,b\}} \notin [0,s] \right] \right]}{P_w^x \left[\tau_{\{a,b\}} \notin [0,js] \right]}$$

$$\leq \left(\max_{x \in (a,b)} P_w^x \left[\tau_{\{a,b\}} \notin [0,s] \right] \right)^N$$

$$\leq p^N = e^{N \ln p} = \leq e^{\ln p \left(\frac{m}{s} - 1 \right)} = e^{-\ln p} e^{\frac{m}{s} \ln p}$$

tinhamos que

$$\frac{C(b-a)^2 \exp \left(R_{[a,b]}(V) \right)}{s} \leq p$$

o que implica que

$$s \geq \frac{C(b-a)^2 \exp \left(R_{[a,b]}(V) \right)}{p}$$

$$s \geq \frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3 p} (b-a)^2 \exp \left(R_{[a,b]}(V) \right)$$

Concluímos que

$$P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > m] \leq e^{-\ln p} \exp \left(\frac{\epsilon^3 p \ln p}{(1-\epsilon)^2} \frac{m}{(b-a)^2 e^{R_{[a,b]}(V)}} \right),$$

mas seja $K_2 = -\dfrac{\epsilon^3 p \ln p}{(1-\epsilon)^2}$ e $K_1 = e^{-\ln p}$ constantes, então

$$P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > m] \leq K_1 \exp\left(-\frac{m}{K_2(b-a)^2 e^{R_{[a,b]}(V)}}\right)$$

ou seja, $\exists K_1$ e K_2 tal que para todo $m > K_2(b-a)^2 \exp\big(R_{[a,b]}(V)\big)$, temos que

$$\max_{x\in(a,b)} P_w^x[\tau_{\{a,b\}} > m] \leq K_1 \exp\left(-\frac{m}{K_2(b-a)^2 e^{R_{[a,b]}(V)}}\right) \quad \blacksquare$$

Referências Bibliográficas

[1] Doyle, P. G. and Snell, J.L (2000), *Random Walks and Electric Networks*, The Mathematical Association of America.

[2] Shiryaev, A. N. (1995), *Graduate Texts in Mathematics, Probability*, 2ed, Springer.

[3] Lyons, R. and Peres, Y.(2012), *Probability on trees and Networks.*

[4] Popov, S. and Comets, F. (2003), *Limit Law for Transition Probabilities and Moderate Desviations for Sinai's Random Walk in Random Environment*, Probability Theory and Related Field.

[5] Ofer Zeitouni. (2003), *Random Walks in Random Environmen*, Vol. 3,Proceedings of the International Congress of Mathematicians.

[6] Hoel, P. G. and Port, S.C and Stone, C. J. (1972), *Introduction to Stochastic Processes*, University of California, Los Angeles.

[7] Boulgerol, P. (2001), *Processes de Sauts et Files d'attente*, University Pierre and Marie Curie.

[8] Ross, Sheldon M. (1966), *Stochastic Processes*, 2ed, University of California, Berkeley.