André Ferreira e Pereira

Análise Matemática de um Modelo de Campo de Fase para um Processo de Solidificação de uma Liga Binária

Campinas
2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

ANDRÉ FERREIRA E PEREIRA

ANÁLISE MATEMÁTICA DE UM MODELO DE CAMPO DE FASE PARA UM PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO DE UMA LIGA BINÁRIA

Orientador: Profa. Dra. Gabriela Del Valle Planas

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO ANDRÉ FERREIRA E PEREIRA,
E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. GABRIELA DEL VALLE PLANAS

Assinatura do Orientador

____

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P414a

Pereira, André Ferreira e, 1989-
Análise matemática de um modelo de campo de fase para um processo de solidificação de uma liga binária / André Ferreira e Pereira. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Gabriela Del Valle Planas.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise matemática. 2. Galerkin, Métodos de. 3. Solidificação. 4. Equações diferenciais parciais. I. Planas, Gabriela Del Valle,1972-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Mathematic analysis to a phase-field model for the solidification process of a binary alloy
Palavras-chave em inglês:
Mathematical analysis
Galerkin methods
Solidification
Partial differential equations
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Gabriela Del Valle Planas [Orientador]
Élder Jesús Villamizar Roa
Sérgio Henrique Monari Soares
Data de defesa: 24-04-2013
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 24 de abril de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS

Prof.(a). Dr(a). ÉLDER JESÚS VILLAMIZÁR ROA

Prof.(a). Dr(a). SÉRGIO HENRIQUE MONARI SOARES

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus por estar comigo em todos os momentos, me ajudando nas dificuldades, me dando paciência e calma nos momentos de perturbação, me dando fé nos momentos de dúvidas e sendo meu guia em todas as situações.

Agradeço a minha orientadora Gabriela que sem dúvida é peça fundamental na minha formação, não apenas pelo que aprendi sobre matemática, mas também pelo seu exemplo de ética e profissionalismo. Além disso, agradeço a ela por ser paciente comigo e por estar sempre disposta e empenhada em esclarecer minhas dúvidas.

Agradeço a minha família pelo apoio moral, e por acreditarem que eu seria capaz de concluir essa fase mesmo quando até eu duvidava, me dando assim força para continuar.

Sou grato também a minha namorada Manuela por ser paciente comigo e não se importar de ter que me dividir com a matemática.

Não poderia deixar de agradecer aos meus colegas de estudo, pois aprendi muita matemática com eles e isso certamente influenciou neste trabalho.

Agradeço o apoio financeiro dado pela CAPES e pelo CNPq que com certeza foi fundamental para que esse trabalho fosse concluído.

Agradeço a todos os funcionários do IMECC que propiciaram todas as condições necessárias para um ambiente adequado para o estudo. Em especial aos funcionários da secretaria de Pós-Graduação que de forma muito atenciosa deu todo o suporte necessário.

Resumo

Nesta dissertação investigamos um problema de evolução do tipo campo de fase que descreve o processo de solidificação isotérmica de uma liga binária. O modelo consiste de um sistema altamente não linear de equações diferenciais parciais para o campo de fase, que é a variável que identifica as fases, e para a concentração de um dos materiais. O sistema é complementado com condições de fronteira do tipo Neumann e condições iniciais. Estudaremos duas situações: no primeiro caso o coeficiente de difusão da equação da concentração é maior ou igual a uma constante positiva e desta forma a equação é parabólica. No segundo caso, o coeficiente de difusão pode se anular, perdendo o caráter parabólico. Resultados de existência, regularidade, estabilidade e unicidade para a solução são estabelecidos para o primeiro modelo. Já no segundo caso, por ser um problema degenerado, espera-se obter menos regularidade para a solução. De fato, é obtido apenas um resultado de existência de solução fraca. Em ambos os casos é estabelecido um princípio do máximo para as soluções, o qual justifica as condições impostas sobre as não linearidades.

Palavras-chave: campo de fase, transição de fase, Método de Galerkin, existência e regularidade de solução, solidificação.

Abstract

In this dissertation we investigate an evolution problem of phase-field type describing an isothermal solidification process for a binary alloy. The model is a highly non-linear system of partial differential equations for the phase-field parameter (which identifies the phase) and the relative concentration. Neumann boundary conditions and initial conditions are added to complete the model. We study two cases: in the first case, the diffusion coefficient in the concentration equation is bounded from below by a positive constant, and then this equation is parabolic. In the second case, the diffusion coefficient can be zero; so when it vanishes the equation loses its parabolic character. Some results on existence, regularity and stability for the solution are established for the first model. In the second case, as the problem became degenerate, it is expected to obtain less regularity for the solution. Indeed, we only obtain existence of a weak solution. In both cases, a maximum principle for the solution is established, which justifies the conditions imposed to the nonlinear terms.

Keywords: phase-field, phase transition, Galerkin method, existence and regularity of solution, solidification.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O estudo de problemas de mudança de fase (i.e., líquido-sólido, líquido-gasoso, sólido-gasoso) é um assunto de interesse em várias áreas de pesquisa, como a ciência dos materiais, a física e a engenharia. Uma abordagem para esse tipo de problema que vem sendo bastante estudada, é conhecida como 'método de campo de fase' (*phase-field method*). O método postula a existência de uma função, chamada campo de fase (*phase-field*), cujos valores identificam a fase em um ponto particular no espaço e no tempo. Atualmente este método tem sido utilizado para modelar vários fenômenos físicos, como por exemplo, o escoamento de um fluido em meios porosos (veja [1]), evolução da microestrutura do aço (veja [15]), a deformação e aglutinação de partículas em meio a um campo elétrico (veja [14]), entre outros. Uma ótima referência para os modelos do tipo campo de fase é o recente livro de Provatas-Elder [16].

Neste trabalho estudamos um modelo para um processo de solidificação isotérmico de uma liga binária, isto é, de uma substância formada por dois compostos. O modelo em questão envolve a concentração relativa c de um dos compostos, e um outro parâmetro ϕ que descreve o "quão sólido" está cada ponto da substância em um determinado tempo; esse parâmetro é conhecido como *campo de fase*. Mais precisamente, se ϕ é igual a 0 então a liga se encontra em estado sólido; se ϕ é igual a 1, a liga se encontra em estado líquido e para os valores de ϕ entre 0 e 1, a liga se encontra em um estado intermediário, chamado *mushy*.

Como motivação faremos a seguir uma breve dedução do modelo estudado. Uma dedução mais detalhada desse modelo pode ser encontrada em Warren-Boettinger [23].

No caso de um material puro ocupando uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $1 \leq d \leq 3$, um modelo de campo de fase é deduzido pela introdução do seguinte funcional de energia livre de Ginzburg-Landau (*Ginzburg-Landau free energy functional*):

$$\mathcal{F}[\theta, \phi] = \int_\Omega \left[f(\theta, \phi) + \frac{\epsilon^2}{2} |\nabla \phi|^2 \right] \mathrm{dx}\,, \tag{1.0.1}$$

onde f é a densidade de energia livre (*free energy density*), ϵ é uma constante e $\theta(t)$ é a temperatura. Uma breve dedução do funcional (1.0.1) é dada na seção 3.1 de [16]. Uma escolha particular para a densidade de energia livre f é um polinômio de grau quatro na variável ϕ que tem mínimo em $\phi = 0$ e em $\phi = 1$ (veja por exemplo [13]).

Para o caso de uma liga binária, digamos uma liga formada por substâncias A e B, a densidade de energia livre depende também da concentração c, e é dada por:

$$f(\theta, \phi, c) = (1-c) f^A(\theta, \phi) + c f^B(\theta, \phi) + \frac{R\theta}{v_m} [(1-c)\ln(1-c) + c \ln(c)],$$

onde f^A e f^B são as densidades de energia livre associadas respectivamente às substâncias A e B, R é a constante de Boltzman e v_m é o volume molar. Então, de forma análoga a (1.0.1) introduz-se o seguinte funcional de energia de Ginzburg-Landau:

$$\mathcal{F}[\theta, c, \phi] = \int_\Omega \left[f(\theta, c, \phi) + \frac{\epsilon^2}{2} |\nabla \phi|^2 \right] \mathrm{dx}\,. \tag{1.0.2}$$

O funcional dado em (1.0.2) pode ser encontrado em [24].

Utilizando certas leis de termodinâmica e de conservação de massa, são obtidas as seguintes equações que governam a evolução no tempo de c e ϕ (veja [24]):

$$\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta \phi - \frac{\partial f}{\partial \phi}, \tag{1.0.3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \mathrm{div}(M \nabla \frac{\partial f}{\partial c}), \tag{1.0.4}$$

com ϕ e c sujeitos a condição homogênea de Neumann sobre a fronteira de Ω, ϵ e α sendo constantes positivas e $M(c, \phi)$ uma função positiva.

Veja que

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = (1-c)\frac{\partial f^A}{\partial \phi} + c\frac{\partial f^B}{\partial \phi} = \frac{\partial f^A}{\partial \phi} + c\left(\frac{\partial f^B}{\partial \phi} - \frac{\partial f^A}{\partial \phi}\right),$$

assim, como f^A e f^B podem ser escolhidas com polinômios de grau quatro na variável ϕ com mínimos em $\phi = 0$ e em $\phi = 1$, podemos escolher

$$-\frac{\partial f}{\partial \phi} = F_1(\phi) + cF_2(\phi),$$

onde F_1 e F_2 são polinômios de grau três na variável ϕ tal que $F_1(0) = F_2(0) = F_1(1) = F_2(1) = 0$. Além disso, claramente

$$\nabla\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial \phi}\nabla\phi + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 c}\nabla c = -F_2(\phi)\nabla\phi + \frac{R\theta}{v_m}\frac{1}{c(1-c)}\nabla c.$$

Então, (1.0.3) e (1.0.4) nos leva a:

$$\alpha\frac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon^2\Delta\phi + F_1(\phi) + cF_2(\phi), \tag{1.0.5}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}\left(-MF_2(\phi)\nabla\phi + M\frac{R\theta}{v_m}\frac{1}{c(1-c)}\nabla c\right). \tag{1.0.6}$$

Uma escolha adequada para a função M é feita com o objetivo de reobter as equações clássicas de difusão para c quando $\phi = 0$ ou $\phi = 1$, ou seja, quando a liga está no estado sólido ou líquido. Mais precisamente, escolhe-se

$$M(c,\phi) = \frac{v_m}{R\theta}D_1(\phi)c(1-c),$$

onde D_1 é uma função suave decrescente limitada inferiormente e superiormente (veja [17]) e lembrando que vamos considerar o caso isotérmico, isto é, o caso em que θ é constante. Então, definindo $D_2(c,\phi) = (v_m/R\theta)c(c-1)F_2(\phi)$, substituindo M em (1.0.5)-(1.0.6), obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon^2\Delta\phi + F_1(\phi) + cF_2(\phi) \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,T), \tag{1.0.7}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi)(\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi)) \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,T), \tag{1.0.8}$$

para todo $T > 0$, onde por simplicidade escolhemos $\alpha = 1$.

Neste trabalho estaremos interessados na análise matemática rigorosa das equações (1.0.7)-(1.0.8). Para tanto, consideremos as seguintes hipóteses: Ω é um domínio aberto e limitado em $\mathbb{R}^d$, $1 \leq d \leq 3$ com fronteira $\partial\Omega$ regular, ϵ é uma constante positiva dada, e as funções F_1, F_2, D_1 e D_2 são Lipschitz e limitadas. Além disso, vamos considerar a condição de Neumann sobre a fronteira e certas condições iniciais.

Com o intuito de mostrar consistência do modelo, é importante estudar resultados de boa colocação para o problema, ou seja, resultados de existência, estabilidade e unicidade de soluções. Além disso, é fundamental realizar uma análise qualitativa da solução do problema, como por exemplo, princípio do máximo e comportamento assintótico para a solução ou até mesmo a existência de atratores, para compreender melhor o fenômeno estudado.

Inúmeros modelos tem sido desenvolvidos desde o pioneiro artigo de Caginalp [3] e seria impossível listar todos aqui. De modo geral, os modelos consistem de sistemas de equações diferenciais parciais altamente não lineares e a análise matemática rigorosa torna-se difícil. Em particular, para o problema (1.0.7)-(1.0.8), citamos os artigos de Rappaz-Scheid [17] e Scheid [18], que são os artigos nos quais este trabalho está baseado.

No Capítulo 2, introduzimos as definições e resultados necessários para as demonstrações nos capítulos posteriores. No Capítulo 3 foi aplicado o bem conhecido método de Faedo-Galerkin, para demonstrar resultados de existência e regularidade de soluções para o problema (1.0.7)-(1.0.8), onde tomamos D_1 uma função limitada inferiormente por uma constante positiva. Ainda no Capítulo 3 foram provados resultados de estabilidade e unicidade para a solução. Finalmente, com hipóteses adicionais é estabelecido um princípio do máximo para esse problema. Já no Capítulo 4 foi demonstrado um resultado de existência e um princípio do máximo para o caso degenerado do problema (1.0.7)-(1.0.8), isto é, supondo apenas que D_1 é uma função não negativa.

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo é reservado para introduzir algumas definições e resultados que serão úteis nos próximos capítulos, bem como, para estabelecer algumas notações. Indicamos que o leitor familiarizado com os conceitos de análise funcional, teoria das distribuições e espaços de Sobolev, leia apenas a primeira seção deste capítulo.

2.1 Notações

Notação de conjuntos

1. Ω denota um aberto de $\mathbb{R}^d$, onde $d \geq 1$. (Nos capítulos 3 e 4 o conjunto Ω será uma domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^d$ onde $\partial\Omega$ é C^∞).

2. $\partial\Omega =$ fronteira de Ω.

3. Diremos que $\partial\Omega$ é C^k se $\partial\Omega$ é uma $(d-1)-$superfície de classe C^k. Se $\partial\Omega$ é C^k para todo $k \in \mathbb{N}$, diremos que $\partial\Omega$ é C^∞.

4. $Q_T = \Omega \times (0, T)$, onde $T > 0$.

5. Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^d$, dizemos que U está *compactamente contido* em V e denotamos por

$$U \subset\subset V$$

se $U \subset \bar{U} \subset V$ e $\bar{U}$ é compacto.

Notação de funções

1. Denotamos por
$$\int_\Omega u\mathrm{dx} \text{ ou } \int_\Omega u$$
a integral de u sobre Ω com respeito a medida usual de $\mathbb{R}^d$, i.e., a medida de Lebesgue.

2. Se $\partial\Omega$ é de classe C^∞, então
$$\int_{\partial\Omega} u\mathrm{dS} \text{ ou } \int_{\partial\Omega} u$$
denota a integral de u sobre $\partial\Omega$ com respeito a medida usual induzida em $\partial\Omega$.

3. Definimos o suporte de uma função contínua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ por
$$\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

4. Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$, definimos
$$u^- = \max(-u, 0)$$
e
$$u^+ = \max(u, 0),$$
respectivamente a parte negativa e a parte positiva da função u.

Notação de espaços de funções

1. $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ é } k \text{ vezes diferenciável com derivada contínua}\}$.

2. $C^\infty(\Omega) = \cap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$.

3. $C_c^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega);\ \operatorname{supp}(u) \text{ é compacto}\}$.

4. $C^{k,\beta}(\bar{\Omega})$, com $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \beta \leq 1$, denota os espaços de Hölder, veja Definição 2.5.11 na página 18.

5. $\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço das funções teste, veja a Definição 2.5.3 na página 14.

6. $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o espaço das distribuições sobre Ω, veja Definição 2.5.4 na página 14.

7. $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u$ é Lebesgue mensurável, $\|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$, veja §2.5.1.

8. $L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \in L^p(U)\ \forall\ U \subset\subset \Omega\}$.

9. $W^{k,P}(\Omega)$ e $H^k(\Omega)$ com $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$, denotam os espaços de Sobolev, veja §2.5.3.

10. Para $L^p(0,T;X)$, $C([0,T];X)$ e $W^{1,p}(0,T;X)$, onde X é um espaço de Banach e $T > 0$, veja a Definição 2.5.28 na página 25.

Notações de derivadas

1. Considere $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. Definimos o operador

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_d} x_d},$$

onde $|\cdot|$ é a norma da soma. α é chamado multi-índice.

2. Seja $u \in C^1(\Omega)$, então denotamos o gradiente de u por:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right).$$

3. Seja $u \in C^2(\Omega)$, então denotamos o laplaciano de u por:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i}.$$

4. Suponha que $\partial\Omega$ é C^1 e seja $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Vamos denotar por n o campo de vetores unitários e normais a $\partial\Omega$ e

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$$

a derivada de u na direção da normal.

Demais notações

1. $x_n \rightharpoonup x$ em E, significa que x_n converge para x na topologia fraca de E. Veja §2.4.

2. $f_n \rightharpoonup f$ em E', significa que f_n converge para f na topologia fraca estrela de E'. Veja também §2.4.

3. Sejam X e Y espaços de Banach, diremos que X está *continuamente imerso* em Y e denotamos por
$$X \hookrightarrow Y,$$
se $X \subset Y$ e o operador inclusão é contínuo, isto é, existe uma constante $C > 0$, tal que
$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \ \forall \ x \in X.$$

4. Sejam X e Y espaços de Banach, diremos que X está *compactamente imerso* em Y e denotamos por
$$X \overset{c}{\hookrightarrow} Y,$$
se $X \subset Y$ e o operador inclusão é compacto e contínuo, isto é, toda sequência limitada em X tem subsequência convergente em Y e
$$X \hookrightarrow Y.$$

5. Vamos denotar o par dual $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)}$ apenas por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2.2 Resultados de EDO

Definição 2.2.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, I um intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ contínua. Uma função diferenciável $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ chama-se solução da equação
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$
no intervalo I se:

1. $G_\varphi = \{(t, \varphi(t)); t \in I\} \subset \Omega$ e

2. $\dfrac{d\varphi}{dt}(t) = f(t,\varphi(t))\ \forall\ t \in I$, onde, se t é um ponto de fronteira de I, a derivada é a derivada lateral à direita ou esquerda dependendo do caso.

Teorema 2.2.2. Seja Ω um aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Suponha que $|f| \leq M$ em Ω. Considere o problema de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ \ x(t_0) = x_0. \tag{2.2.1}$$

1. Se f é contínua e lipschitziana com relação a segunda variável em $U = [t_0 - a, t_0 + a] \times B[x_0; b]$, então, existe uma única solução de (2.2.1) em $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

2. Se f é contínua em Ω e para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução de (2.2.1) definida em um intervalo aberto I, então, existe uma única solução φ de (2.2.1) definida em um intervalo maximal, onde, dizemos que $I_M = (c, d)$ é um *intervalo maximal* se toda solução ψ de (2.2.1) num intervalo I satisfaz $I \subset I_M$ e $\psi = \varphi|_I$.

3. Se f é contínua em Ω e φ é a única solução de (2.2.1) definida em um intervalo maximal, então, para todo compacto $K \subset \Omega$ existe uma vizinhança V_d de d tal que, $(t, \varphi(t)) \notin K$ para todo $t \in V_d$.

Demonstração. Para o primeiro item veja o Teorema de Picard na página 13 de [19]. Para o segundo e terceiro item veja respectivamente a Proposição 1 e o Teorema 3 na página 17 de [19]. Segue uma breve ideia das demonstrações dos dois primeiros itens.

1. Seja $C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; B[x_0; b])$ o espaço das funções contínuas $f : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to B[x_0; b]$. Seja $F : C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; B[x_0; b]) \to \mathbb{R}^d$ definida por
$$F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\mathrm{ds}.$$
Utilizando um resultado de ponto fixo para contração, é possível mostrar que F tem um único ponto fixo. Portanto, existe única $y \in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; B[x_0; b])$ tal que
$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{ds}.$$

Assim $y(t_0) = x_0$. Além disso, derivando em t e usando o teorema fundamental do cálculo, obtemos que

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

2. Definindo $I_M = \cup I_\psi$, onde ψ são soluções de (2.2.1) no intervalo I_ψ. Definimos $\varphi(t) = \psi(t)$ se $t \in I_\psi$. É possível mostrar que φ é bem definida. Para ver que φ é única, suponha que existe $\bar{\varphi}$ solução de (2.2.1) em I_M. Em particular $I_M = I_{\bar{\varphi}}$, então, pela definição de φ, tem-se que $\varphi(t) = \bar{\varphi}(t)$ para todo $t \in I_{\bar{\varphi}} = I_M$.

$\square$

Definição 2.2.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}^{n_i}$, I um intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$ e $f_i : \Omega \to \mathbb{R}^{n_i}$ com $i = 1, \cdots, m$ contínuas, seja $f = (f_1, \cdots, f_m)$. Uma função diferenciável $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m) : I \to \prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}^{n_i}$ chama-se solução do sistema equações

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

no intervalo I se:

1. $G_\varphi = \{(t, \varphi(t)); t \in I\} \subset \Omega$ e

2. $\dfrac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))\ \forall\ t \in I$, onde, se t é um ponto de fronteira de I, a derivada é a derivada lateral à direita ou esquerda dependendo do caso.

Observação 2.2.4. Veja que a Definição 2.2.3 é equivalente a Definição 2.2.1 se tomarmos $n = n_1 + \cdots + n_m$. Além disso, as hipóteses do Teorema 2.2.2 são satisfeitas se as funções coordenadas f_i satisfazem as mesmas hipóteses. Assim, o Teorema 2.2.2, com as devidas adaptações no enunciado, continua válido para o caso de sistemas de EDO.

Para mais detalhes sobre sistemas de EDO veja a seção 6 do capítulo 1 de [19].

2.3 Algumas desigualdades

Nesta seção, listamos algumas desigualdades que serão frequentemente usadas no decorrer deste trabalho. Todas elas podem ser encontrada no apêndice de Evans [6].

Teorema 2.3.1 (Desigualdade de Young com η)**.** Sejam $a,\ b > 0$, $1 < p,\ q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então para qualquer $\eta > 0$

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\eta) b^q$$

onde $C(\eta) = \frac{1}{(\eta p)^{p/q} q}$.

Teorema 2.3.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** Sejam $x,\ y \in \mathbb{R}^d$. Então

$$|x \cdot y| \leq |x||y|.$$

Teorema 2.3.3 (Desigualdades de Gronwall)**.**

(i) Seja $\eta(\cdot)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0, T]$ e que satisfaz:

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \quad \text{q.t.p em } [0, T],$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções somáveis não negativas em $[0, T]$. Então,

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^T \phi(s)ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds \right] \quad \forall\ t \in [0, T].$$

Em particular, se

$$\eta' \leq \phi\eta \text{ em } [0, T] \text{ e } \eta(0) = 0,$$

então,

$$\eta \equiv 0 \text{ em } [0, T].$$

(ii) Seja $\xi(t)$ uma função somável não negativa em $[0, T]$ e que satisfaz

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds + C_2 \quad \text{q.t.p em } [0, T]$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas. Então,

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}) \quad \text{q.t.p em } [0, T].$$

Em particular, se

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds \quad \text{q.t.p em } [0, T],$$

então,

$$\xi(t) = 0 \quad \text{q.t.p em } [0, T].$$

2.4 Resultados de análise funcional

Seja E um espaço normado, com norma $\|\cdot\|$, e E' seu dual topológico.

Diremos que uma sequência $\{x_n\} \subset E$ *converge fraco* (ou *converge na topologia fraca*) para $x \in E$, e denotaremos por

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{em } E,$$

se para todo funcional $f \in E'$ temos que $f(x_n) \to f(x)$. A topologia induzida por essa noção de limite será chamada *topologia fraca* e denotada por $\sigma(E, E')$.

Diremos que uma sequência $\{f_n\} \subset E'$ *converge fraco-estrela* (ou converge na *topologia fraca-estrela*) para $f \in E'$, e denotaremos por

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{em } E',$$

se para todo $x \in E$ temos que $f_n(x) \to f(x)$. A topologia induzida por essa noção de limite será chamada *topologia fraca-estrela* e denotada por $\sigma(E', E)$.

Proposição 2.4.1. Seja E um espaço de Banach, e sejam $\{x_n\} \in E$ e $\{f_n\} \in E'$.

(i) Se $x_n \rightharpoonup x$, então $\|x_n\|$ é limitado e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(ii) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, então $\|f_n\|_{E'}$ é limitado e $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$.

Demonstração. Veja as proposições 3.5 e 3.13 de Brezis [2]. □

Teorema 2.4.2 (Alaoglu)**.** Seja E um espaço normado. Então,

$$B_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$.

Demonstração. Veja o Teorema 3.16 em Brezis [2]. □

Teorema 2.4.3 (Kakutani)**.** Seja E um espaço de Banach. Então, E é reflexivo se, e somente se,

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia fraca $\sigma(E, E')$.

Demonstração. Veja o Teorema 3.17 em Brezis [2]. □

Teorema 2.4.4 (Schauder)**.** Sejam E e F espaços de Banach. Se $T : E \to F$ é uma aplicação linear contínua e compacta, então a aplicação dual $T' : F' \to E'$ também é uma aplicação linear contínua e compacta.

Demonstração. Veja o Teorema 6.4 em Brezis [2]. □

2.5 Espaços de funções

Nesta seção vamos definir alguns espaços que serão nossos espaços ambiente. Além disso, vários resultados envolvendo esses espaços serão enunciados aqui. Entre esses resultados serão enunciados resultados de imersão contínua e compacta, desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, autofunções do laplaciano e uma regra da cadeia em espaços de Sobolev.

2.5.1 O espaço $L^p(\Omega)$

Seja Ω um conjunto não vazio. Dizemos que uma classe Σ de subconjuntos de Ω é uma *σ-álgebra* se satisfaz as seguintes propriedades:

(S1) $\Omega \in \Sigma$;

(S2) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$;

(S3) para toda sequência $\{A_n\} \subset \Sigma$, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Dizemos que a função $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ é uma *medida* em Σ se satisfaz:

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(M2) se a sequência $\{A_n\} \subset \Sigma$ é disjunta, $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \cup_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

A tripla (Ω, Σ, μ) é chamada *espaço de medida*.

Neste trabalho vamos sempre considerar Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^d$ e μ a medida de Lebesgue que é a medida usual em $\mathbb{R}^d$.

Considere o espaço de medida (Ω, Σ, μ). Dadas f_1, $f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis, dizemos que f_1 é equivalente a f_2 se $\mu(\{x \in \Omega : f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0$. Daqui em diante, uma função mensurável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ denota a classe de equivalência de f. Seja $1 \leq p \leq \infty$, definimos $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ (que também denotaremos por $L^p(\Omega)$) como o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty,$$

onde

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}|f| = \inf\{C > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > C\}) = 0\} & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

É possível mostrar que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ define uma norma em $L^p(\Omega)$. Mais ainda, valem os seguintes resultados:

Teorema 2.5.1 (Convergência dominada)**.** Seja f_n uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$, tal que $f_n \to f$ q.t.p em Ω, e existe uma função não negativa $g \in L^1(\Omega)$, tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p em Ω para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f.$$

Demonstração. Veja Teorema 2.24 de [8]. □

Teorema 2.5.2 (Desigualdade de Hölder generalizada)**.** Seja $1 \leq p_1, \cdots, p_m \leq \infty$, com $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$, e assuma que $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ para $k = 1, \cdots, m$. Então

$$\int_\Omega |u_1 \cdots u_k| \mathrm{dx} \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja o apêndice de Evans [6]. □

2.5.2 Distribuições

Todos os resultados enunciados nessa subseção podem ser encontrados em Cavalcanti [4]. Por isso não daremos referência para as demonstrações.

Seja τ a topologia em $C_c^\infty(\Omega)$ induzida pela seguinte noção de convergência em $C_c^\infty(\Omega)$: diremos que a sequência ϕ_n converge a ϕ em $C_c^\infty(\Omega)$ se existe um compacto $K \subset \Omega$, tal que $\{\phi_n\} \subset C_c^\infty(K)$ e $D^\alpha \phi_n \to D^\alpha \phi$ uniformemente para todo multi-índice α.

Definição 2.5.3 (Funções teste)**.** Definimos o espaço das funções testes em Ω como sendo o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ munido com a topologia τ. Denotamos esse espaço por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Dizemos que um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é contínuo se satisfaz:

$$\phi_j \to \phi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow T(\phi_j) \to T(\phi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$ é o conjunto de todos os funcionais lineares contínuo em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 2.5.4 (Espaço das distribuições)**.** Definimos por distribuições sobre Ω e denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Dizemos que $\{T_j\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se $T_j(\phi) \to T(\phi)$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Com essa topologia, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é Hausdorff, então o limite em $\mathcal{D}'(\Omega)$ é único.

Definição 2.5.5 (Derivada de uma distribuição)**.** Considere $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Definimos a derivada de T de ordem α (denotada por $D^\alpha T$) por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

É possível demostrar que se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi \mathrm{dx} \tag{2.5.1}$$

é uma distribuição em Ω. Do próximo lema (conhecido como Lema de Du Bois Raymond) segue que $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ q.t.p em Ω.

Lema 2.5.6 (Lema de Du Bois Raymond)**.** Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então, $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ q.t.p em Ω.

Definição 2.5.7 (Derivada fraca)**.** Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se $D^\alpha T_u \in L^1_{loc}(\Omega)$ (no sentido que existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $D^\alpha T_u = T_v$) chamaremos $D^\alpha T_u$ de derivada fraca de u e denotaremos $D^\alpha T_u$ por $D^\alpha u$.

2.5.3 Espaços de Sobolev

Vimos que toda função em $L^1_{loc}(\Omega)$ define uma distribuição, mas não é verdade que toda distribuição pode ser definida via uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$. Um exemplo é a distribuição conhecida como distribuição de Dirac, que é definida da seguinte forma: dado $x_0 \in \Omega$, definimos

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Surge então a seguinte pergunta: a derivada no sentido das distribuições de uma função em $L^1_{loc}(\Omega)$ é uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$? A resposta para essa pergunta é negativa, pois a derivada no sentido das distribuições da função

$$u(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x > 0 \\ 1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

é exatamente a distribuição de Dirac, que como vimos não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 2.5.8 (Espaço de Sobolev)**.** Seja $u \in L^p(\Omega)$, dizemos que u pertence ao espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ se $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$ para todo multi índice α tal que $|\alpha| \leq k$.

Sempre vamos considerar o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p \leq \infty \\ \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p} & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

para todo $u \in W^{k,p}(\Omega)$. É possível provar que com essa norma o espaço de Sobolev é um espaço de Banach. No caso que $p = 2$ denotamos $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$. Com o produto interno

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \text{ para todo } u,\ v \in H^k(\Omega),$$

$H^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Segue uma lista de resultados envolvendo os espaços de Sobolev e que serão úteis ao longo deste trabalho.

Começamos colocando o seguinte resultado de densidade em espaços de Sobolev:

Teorema 2.5.9. Assuma que Ω é limitado e $\partial\Omega$ é C^1. Suponha $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < \infty$. Então existem funções $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que

$$u_m \to u \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Veja Evans [6] seção 5.3, Teorema 3. □

Essencialmente o Teorema 2.5.9 está afirmando que

$$\overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{W^{k,p}(\Omega)} = W^{k,p}(\Omega).$$

O próximo teorema é uma generalização do bem conhecido teorema de integração por partes. Ao longo deste trabalho vamos aplicar a regra de integração por partes apenas para funções que estão em $H^1(\Omega)$, por isso, enunciamos e demonstramos o teorema somente neste caso particular (para uma versão mais geral veja o Teorema 1.5.3.1 de [9]).

Teorema 2.5.10 (Integração por partes)**.** Sejam Ω um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^d$, onde $\partial\Omega$ é C^1 e $u,\ v \in H^1(\Omega)$. Então

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \mathrm{dx} = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} T(u)T(v) n_i \mathrm{dS}\,,$$

para todo $1 \leq i \leq d$, onde $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ é o operador traço (veja, por exemplo, seção 5.5 de [6]).

Demonstração. Pelo Teorema 2.5.9 temos que existem sequência u_m e v_n em $C^\infty(\bar{\Omega})$, tais que

$$u_m \to u \quad \text{em } H^1(\Omega)$$

e

$$v_n \to v \quad \text{em } H^1(\Omega).$$

Utilizando o teorema clássico de integração por partes, temos que para todo n_0 fixado

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_{n_0} = -\int_\Omega u_m \frac{\partial v_{n_0}}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} u_m v_{n_0} n_i. \tag{2.5.2}$$

Mas, veja que usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\left| \int_\Omega \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v_{n_0} \right| \leq \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|v_{n_0}\|_{L^2(\Omega)},$$

portanto, como $u_m \to u$ em $H^1(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_{n_0} \to \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v_{n_0}.$$

Analogamente,

$$\int_\Omega u_m \frac{\partial v_{n_0}}{\partial x_i} \to \int_\Omega u \frac{\partial v_{n_0}}{\partial x_i}.$$

Agora, seja $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ o operador traço. Então existem constantes C_1 e C_2, tais que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} T((u_m - u)v_{n_0}) n_i \right| &\leq \|T((u_m - u)v_{n_0})\|_{L^2(\partial\Omega)} \|n_i\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq C_1 \|(u_m - u)v_{n_0}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|u_m - u\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como $u_m \to u$ em $H^1(\Omega)$, Temos que

$$\int_{\partial\Omega} u_m v_{n_0} n_i \to \int_{\partial\Omega} T(u) v_{n_0} n_i.$$

Dessa forma, passando o limite com $m \to +\infty$ em (2.5.2), segue que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v_n = -\int_\Omega u \frac{\partial v_n}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} T(u) v_n n_i. \tag{2.5.3}$$

Agora basta tomar o limite com $n \to +\infty$ em (2.5.3), então, usando argumentos análogos aos anteriores, obtemos que

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \mathrm{dx} = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} T(u) T(v) n_i \mathrm{dS},$$

donde segue o resultado.

□

Para enunciarmos um importante resultado de imersão, conhecido como desigualdade de Sobolev, colocamos a seguinte definição:

Definição 2.5.11. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto e $\gamma \in (0,1]$. O espaço de Hölder

$$C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$$

consiste de todas as funções $u \in C^k(\bar{\Omega})$, tal que a norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$$

é finita. Onde,

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} := \sup_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

e

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sup_{x,y \in \Omega,\ x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\}.$$

Teorema 2.5.12 (Desigualdade de Sobolev)**.** Assuma que Ω é um subconjunto limitado e aberto de $\mathbb{R}^d$, e $\partial\Omega$ é C^1.

(i) Se $k < \frac{d}{p}$. Então,

$$W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

para cada $1 \leq q \leq \frac{dp}{d-pk}$. Além disso, a inclusão é contínua, isto é, existe uma constante $C > 0$ (que depende apenas de $k,\ p$ e d) tal que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

(ii) se $k > \frac{d}{p}$. Então,

$$W^{k,p}(\Omega) \subset C^{k-l-1,\gamma}(\bar{\Omega}),$$

para todo l satisfazendo $l < \frac{d}{p} < l+1$ e

$$\gamma = \begin{cases} l+1-\frac{d}{p}, \text{ se } \frac{d}{p} \text{ não é inteiro} \\ \text{qualquer número positivo menor que 1, se } \frac{d}{p} \text{ é inteiro.} \end{cases}$$

Além disso, a inclusão é contínua.

Demonstração. Veja Teorema 6 da seção 5.6.1 de Evans [6]. □

Teorema 2.5.13 (Rellich-Kondrachov)**.** Assuma que Ω é um subconjunto limitado e aberto de $\mathbb{R}^d$, e $\partial\Omega$ é C^1. Então,

1. se $1 \leq p < d$ tem-se
$$W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$$
para cada $1 \leq q < p^* := \frac{dp}{d-p}$,

2. se $p = d$ tem-se
$$W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$$
para cada $1 \leq q < +\infty$.

Demonstração. Veja o Teorema 3 da seção 4.3 de [4]. □

Temos os seguintes corolários dos teoremas anteriores:

Corolário 2.5.14. Seja $u \in H^1(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^d$, e $\partial\Omega$ é de classe C^1. Então, para todo $\eta > 0$ existe $C_\eta > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta\|u\|_{H^1(\Omega)} + C_\eta\|u\|_{H^1(\Omega)'}.$$

Demonstração. Veja Lema 8 de [21]. □

Corolário 2.5.15. Assuma que Ω é um subconjunto limitado e aberto de $\mathbb{R}^d$, $1 \leq d \leq 3$ e $\partial\Omega$ é C^1. Então,

$$H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

para cada $1 \leq q \leq 6$. Além disso a inclusão é contínua.

Demonstração. Para o caso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ basta usar o primeiro item do Teorema 2.5.12, para $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ use o segundo item. Agora, o caso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ basta usar o segundo item do Teorema 2.5.13. □

Corolário 2.5.16. Assuma que Ω é um subconjunto limitado e aberto de $\mathbb{R}^d$, $d \leq 3$ e $\partial\Omega$ é C^∞. Então,

$$H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega),$$

com inclusão contínua.

Demonstração. Segue imediatamente do segundo item do Teorema 2.5.12. □

Corolário 2.5.17. Assuma que Ω é um subconjunto limitado e aberto de $\mathbb{R}^d$, e $\partial\Omega$ é C^1. Suponha que $1 \leq p < d$. Então,

$$W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,q}(\Omega)$$

para cada $1 \leq q < p^* := \frac{dp}{d-p}$.

Demonstração. Veja a demonstração do Corolário 1 na seção 4.3 de [4]. □

Outro resultado importante que usaremos é a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (veja página 37 de [10]):

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C\|u\|^{\theta}_{W^{m,q}(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^r(\Omega)} \quad \forall \;\; u \in W^{m,q}(\Omega), \tag{2.5.4}$$

onde, $p \geq q$, $p \geq r$, $0 \leq \theta \leq 1$, e

$$k - \frac{d}{p} \leq \theta\left(m - \frac{d}{q}\right) - \frac{d(1-\theta)}{r},$$

com desigualdade restrita se $q = 1$ ou se $r = 1$. O caso particular que será importante neste trabalho é o seguinte lema:

Lema 2.5.18. Assuma que Ω é um subconjunto limitado e aberto de $\mathbb{R}^d$, $1 \leq d \leq 3$, onde $\partial\Omega$ é C^∞. Então, existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$\|u\|_{L^3(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \quad \forall \ \ u \in H^1(\Omega), \tag{2.5.5}$$

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \quad \forall \ \ u \in H^2(\Omega). \tag{2.5.6}$$

Demonstração. Ambas as desigualdades podem ser vistas como caso particular de (2.5.4). Mas segue uma demonstração mais elementar para (2.5.5).

Por uma desigualdade de interpolação (veja por exemplo, Proposição 5 da seção 3.1 de Cavalcanti [4]), temos

$$\|u\|_{L^3(\Omega)} \leq \|u\|_{L^6(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

Então, pelo Corolário 2.5.15 existe constante C_1, tal que

$$\|u\|_{L^3(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2},$$

o que mostra (2.5.5). □

Proposição 2.5.19. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $u \in H^1(\Omega)$ satisfazendo $\Delta u \in H^k(\Omega)$ e $\partial u / \partial n = 0$ em $\partial\Omega$. Então $u \in H^{k+2}(\Omega)$ e existe uma constante $C > 0$ que não depende de u, tal que

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C(\|\Delta u\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Demonstração. Escolhendo $b_{ij} = \delta_{ij}$ e $b_j = b = 0$ no Teorema 7.13 em Folland [7], temos que

$$D(u, v) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u$$

é coercivo sobre $H^1(\Omega)$. Seja $L = -\Delta$. Usando o fato que $\partial u / \partial n = 0$ em $\partial\Omega$ e o teorema de integração por partes, temos

$$D(u, v) = -\int_\Omega \Delta u v = (Lu, v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall \ \ v \in H^1(\Omega).$$

Portanto, Aplicando o Teorema 7.32 de Folland [7], segue que se $\Delta u \in H^k(\Omega)$, então, $u \in H^{k+2}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C(\|\Delta u\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

□

Como, por definição $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^k(\Omega)}$, obtemos da proposição anterior o seguinte lema:

Lema 2.5.20. Seja $k \in \mathbb{N}$ e $u \in H^2(\Omega)$ satisfazendo $\Delta u \in H^k(\Omega)$ e $\partial u/\partial n = 0$ em $\partial\Omega$. Então $u \in H^{k+2}(\Omega)$ e existe uma constante $C > 0$ que não depende de u tal que

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C(\|\Delta u\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{H^k(\Omega)}).$$

Lema 2.5.21. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ limitado, aberto, com fronteira de classe C^∞. Então o problema de autovalor

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad u \in H^1(\Omega)$$

tem uma quantidade enumerável de autovalores

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots$$

com

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_m = \infty,$$

onde as autofunções $\{v_j\}_{1\leq j}$ formam um conjunto ortonormal completo em $L^2(\Omega)$, e para todo i, v_i satisfaz

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Demonstração. Veja Jost [11], Teorema 8.5.2. □

Corolário 2.5.22. As autofunções dadas no Lema 2.5.21, estão em $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Demonstração. Seja u uma autofunção dada no Lema 2.5.21. Escolhendo $b_{ij} = -\delta_{ij}$, $b_j = 0$ e $b = \lambda$ no Teorema 7.13 em Folland [7], temos que

$$D(u,v) = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + \int_\Omega v\lambda u$$

é coercivo sobre $H^1(\Omega)$. Seja $Lu = \Delta u + \lambda u$. Usando o teorema de integração por partes e o fato que $\partial u/\partial n = 0$ em $\partial\Omega$, temos

$$D(u,v) = \int_\Omega \Delta uv + \int_\Omega \lambda uv = (Lu, v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall \ \ v \in H^1(\Omega).$$

Portanto, Aplicando o Teorema 7.32 de Folland [7], segue que $u \in H^{k+2}(\Omega)$. Agora, pela desigualdade de Sobolev (i.e., o item (ii) do Teorema 2.5.12) temos que $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. □

Observação 2.5.23. Pelo corolário anterior as autofunções dadas no Lema 2.5.21 estão em $L^\infty(\Omega)$, pois, como Ω é limitado, $\bar{\Omega}$ é compacto. Mas, toda função contínua definida em um compacto admite máximo e mínimo. Assim, se v é uma autofunção dada no Lema 2.5.21, segue que

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}|v| = \sup_{x\in\Omega} |v(x)| \leq \infty.$$

Lema 2.5.24. Uma função $F \in L^\infty(\mathbb{R})$ pertence a $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ se, e somente se, existe uma constante C tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq |x - y| \text{ q.t.p } x, y \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Veja Proposição 8.4 de Brezis [2]. $\square$

Enunciamos o próximo teorema como em Kavian [12] Teorema 16.7.

Teorema 2.5.25. Sejam $1 \leq q \leq p < d$, Ω um aberto de $\mathbb{R}^d$ e f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Definimos $B(u) := f(u(\cdot))$, onde u é uma função de Ω em $\mathbb{R}$. Então, B é um operado contínuo de $W^{1,p}(\Omega)$ em $W^{1,q}(\Omega)$ se, e somente se, f é localmente lipschitziana e sua derivada (que existe q.t.p em $\mathbb{R}$) satisfaz a seguinte condição de crescimento:

$$\exists\ a,\ b \geq 0, \text{ tal que } \forall\ s \in \mathbb{R},\ |f'(s)| \leq a + b|s|^{d(p-q)/(qN-qp)}.$$

Se $1 \leq p \leq \infty$ e f é lipschitziana em $\mathbb{R}$, então, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ temos que $B(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\nabla B(u) = f'(u)\nabla u \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Além disso, se $1 \leq p < \infty$, o operador B é contínuo de $W^{1,p}(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$ (em geral se $p = \infty$, B não é contínuo de $W^{1,\infty}(\Omega)$ em $W^{1,\infty}(\Omega)$).

Lema 2.5.26. Seja $u \in H^1(\Omega)$, então $u^-,\ u^+ \in H^1(\Omega)$ e

$$\nabla u^- = \begin{cases} -\nabla u & \text{se } u < 0 \\ 0 & \text{se } u \geq 0, \end{cases} \tag{2.5.7}$$

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u \leq 0. \end{cases} \tag{2.5.8}$$

Demonstração. Para $\epsilon > 0$, defina

$$f_\epsilon(u) = \begin{cases} -(u^2+\epsilon^2)^{1/2} - \epsilon & \text{se } u < 0 \\ 0 & \text{se } u \geq 0. \end{cases}$$

Aplicando a regra da cadeia (i.e., o Teorema 2.5.25) temos que para qualquer $\varphi \in C_c^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= -\int_{u<0} \varphi \frac{\partial f_\epsilon(u)}{\partial x_i} \\ &= -\int_{u<0} \varphi f_\epsilon'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &= -\int_{u<0} \varphi \left(-\frac{u}{(u^2+\epsilon^2)^{1/2}} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Aplicando o limite quando $\epsilon \to 0$, obtemos

$$\int_\Omega (u^-) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_{u<0} \varphi \left(-\frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

donde segue que $u^- \in H^1(\Omega)$ e vale (2.5.7).

Agora, escolhendo

$$f_\epsilon(u) = \begin{cases} (u^2+\epsilon^2)^{1/2} - \epsilon & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u \leq 0 \end{cases}$$

e procedendo analogamente, concluímos que $u^+ \in H^1(\Omega)$ e que vale (2.5.8). □

O próximo resultado é na verdade um caso particular do Teorema 1 de [22].

Corolário 2.5.27. Considere Ω um domínio aberto de $\mathbb{R}^d$ com $1 \leq d \leq 3$, onde $\partial\Omega$ é C^∞. Se $u,\ v \in H^1(\Omega)$, então $uv \in W^{1,4/3}(\Omega)$.

Demonstração. Basta escolher $m = 1$, $p = q = 2$ e $r = 4/3$ no Teorema 1 em [22]. □

2.5.4 Espaços envolvendo tempo

Seja X um espaço de Banach, com norma $\| \cdot \|$. Considere $T > 0$ fixado.

Definição 2.5.28. 1. O espaço $L^p(0,T;X)$ consiste de todas as funções mensuráveis $u : [0,T] \to X$ com

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\| \mathrm{dt} \right)^{1/p} < \infty$$

para $1 \leq p < \infty$, e

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \text{ess sup}_{t \in [0,T]} \|u(t)\| \leq \infty.$$

2. O espaço $C([0,T];X)$ consiste de todas as funções contínuas $u : [0,T] \to X$ tais que
$$\|u\|_{C([0,T],X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\| \leq \infty.$$

3. O espaço $W^{1,p}(0,T;X)$ é o conjunto de todas as funções $u \in L^p(0,T;X)$ tal que existe $v \in L^p(0,T;X)$ satisfazendo

$$\int_0^T \phi'(t) u(t) \mathrm{dt} = - \int_0^T \phi(t) v(t) \quad \forall \, \phi \in C_c^\infty(0,T).$$

No caso em que v existe dizemos que v é a derivada fraca de u e denotamos $v := u'$.

Um fato que usaremos frequentemente ao longo deste trabalho é que $(L^2(0,T;H^1(\Omega)))'$ é isometricamente isomorfo a $L^2(0,T;(H^1(\Omega))')$, denotaremos por:
$$L^2(0,T;H^1(\Omega))' \approx L^2(0,T;H^1(\Omega)').$$

Esse resultado é na verdade mais geral que isso. Segundo o Teorema 1.4.19 de [5], temos:

Teorema 2.5.29. Se $1 \leq p < \infty$ e X é reflexivo ou se X' é separável, então $(L^p(0,T;X))' \approx L^{p*}(0,T;X')$. Além disso, Se $1 < p < \infty$ e X é reflexivo, então $L^p(0,T;X)$ é reflexivo.

Posteriormente veremos que o próximo teorema tem um papel fundamental neste trabalho.

Teorema 2.5.30. Sejam X, B e Y espaços de Banach, onde $X \subset B \subset Y$ com $X \overset{c}{\hookrightarrow} B$.

1. Sejam F limitado em $L^p(0,T;X)$ onde $1 \leq p < \infty$ e seja $\frac{\partial F}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} : f \in F \right\}$ limitado em $L^1(0,T;Y)$. Então, F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$.

2. Sejam F limitado em $L^\infty(0,T;X)$ e $\frac{\partial F}{\partial t}$ limitado em $L^r(0,T;Y)$ para algum $r > 1$. Então, F é relativamente compacto em $C([0,T];B)$.

Demonstração. Veja Corolário 4 em Simon [21]. □

Lema 2.5.31. Seja $\psi \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)')$. Então,

$$\psi \in C([0,T];L^2(\Omega)).$$

Além disso,

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}, \psi \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração. Pelo Corolário 2.5.15 temos que

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

com inclusão contínua. Além disso, como a inclusão é compacta, usando o Teorema 2.4.4 obtemos que

$$(L^2(\Omega))' \subset (H^1(\Omega))'$$

e a inclusão é contínua.

Pelo Teorema 2.5.9 segue que

$$L^2(\Omega) = \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{L^2(\Omega)} \subset \overline{H^1(\Omega)}^{L^2(\Omega)} \subset \overline{L^2(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega),$$

ou seja, $H^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$.

É verdade também que $(L^2(\Omega))'$ é denso em $(H^1(\Omega))'$. Na verdade, dados H e V dois espaços de Hilbert, onde a inclusão de V em H é contínua, V é denso em H e V é reflexivo, segue que $i'(H')$ é denso em V', onde $i' : H' \to V'$ denota o operador dual do operado inclusão. Isso pode ser visto na observação 3 no capítulo 5 de [2].

Então,

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \subset (H^1(\Omega))'$$

onde as inclusões são contínuas, e cada espaço é denso no seguinte. Assim, esse resultado é, na verdade, um caso particular do Lema 1.2 do capítulo III de [20]. □

Teorema 2.5.32. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio limitado e aberto, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^∞. Seja k um inteiro não negativo e suponha que $\psi \in L^2(0,T;H^{k+2}(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^k(\Omega))$. Então,

$$\psi \in C([0,T];H^{k+1}(\Omega)).$$

Demonstração. Veja o Teorema 4 da seção 5.9.2 de [6]. □

Capítulo 3

Problema não Degenerado

Neste capítulo serão apresentados resultados de existência, regularidade, estabilidade, unicidade e um princípio do máximo para a solução do problema (1.0.7)-(1.0.8) que, como foi dito na introdução, é um sistema não linear de equações diferenciais parciais associado a um modelo do tipo campo de fase para a solidificação de ligas binárias com temperatura constante. Vamos considerar um modelo não degenerado, isto é, o caso em que a função D_1 é limitada inferiormente por uma constante positiva.

Lembramos que o modelo em questão envolve a concentração relativa c e um outro parâmetro ϕ que representa o estado de solidificação da liga como sendo igual a 0 se o sistema está em um estado sólido e igual a 1 se está em um estado líquido.

Veja em (1.0.7)-(1.0.8) que D_1 e D_2 são ambas limitadas e Lipschitz, então o produto dessas funções também é uma função limitada e Lipschitz. Dessa forma, podemos considerar o seguinte modelo que dá a evolução no tempo de c e ϕ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta\phi + F_1(\phi) + cF_2(\phi) & \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty), \\[2ex] \dfrac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi) & \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty), \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = \dfrac{\partial c}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, +\infty), \\[2ex] \phi(0) = \phi_0, \quad c(0) = c_0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.0.1}$$

onde Ω é um domínio aberto e limitado em $\mathbb{R}^d$, com $1 \leq d \leq 3$, a fronteira $\partial\Omega$ é C^∞, n é o campo de vetores unitários normais a $\partial\Omega$, ϵ é uma constante positiva dada.

Neste capítulo assumiremos que as funções $F_1,\ F_2,\ D_1$ e D_2 satisfazem as seguintes hipóteses:

(H1) $F_1,\ F_2 \in C(\mathbb{R})$ são funções Lipschitz e limitadas, com

$$|F_i(r)| \leq M_1, \text{ para } i = 1, 2 \text{ e } \forall\, r \in \mathbb{R}.$$

(H2) $D_1 \in C(\mathbb{R})$ é uma função Lipschitz positiva e limitada, com

$$0 < D_s \leq D_1(r) \leq D_1, \quad \forall r \in \mathbb{R},$$

onde D_s e D_1 são constantes.

(H3) $D_2 \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ é uma função Lipschitz e limitada, com

$$|D_2(r_1, r_2)| \leq M_2, \quad \forall (r_1, r_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Veremos na Observação 3.6.2 que essas hipóteses matemáticas fazem sentido físico.

Lembre que $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

3.1 Definição de solução fraca e forte

Nesta seção, introduzimos o que significa o par (ϕ, c) ser solução do problema (3.0.1).

A título de motivação, suponha que existam c e ϕ funções suaves satisfazendo o problema (3.0.1). Multiplicando a primeira equação em (3.0.1) por v e a segunda por w, onde v e w estão em $C^\infty(\Omega)$, integrando sobre Ω e utilizando o teorema de integração por partes, obtemos

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t} v \mathrm{dx} + \epsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla v \mathrm{dx} = \int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi)) v \mathrm{dx},$$

$$\int_\Omega \frac{\partial c}{\partial t} w \mathrm{dx} + \int_\Omega (D_1(\phi)\nabla c + D_2(c, \phi)\nabla\phi) \cdot \nabla w \mathrm{dx} = 0.$$

Isso induz a seguinte questão: é possível "andarmos" na direção contrária, ou seja, se existem c e ϕ funções suaves satisfazendo as duas últimas equações tais que $c(0) = c_0$ e $\phi(0) = \phi_0$, então essas funções satisfazem (3.0.1)?

Na verdade, podemos enfraquecer essa pergunta até o ponto em que continuam fazendo sentido as integrais nas duas últimas igualdades, i.e, podemos colocar o seguinte problema: se $\phi,\ c \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$, para algum $T > 0$ fixado arbitrariamente, e supondo que $c(0) = c_0$, $\phi(0) = \phi_0$ e as duas igualdades valem para todo $v,\ w \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$, então, ϕ e c satisfazem (3.0.1)?

Podemos "enfraquecer" mais ainda essa pergunta. Para isso colocamos a seguinte definição:

Definição 3.1.1. Seja $T > 0$ fixado arbitrariamente. Dizemos que o par $(\phi, c) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))^2 \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)')^2$, é uma *solução fraca* para o problema (3.0.1) se $c(0) = c_0$, $\phi(0) = \phi_0$ e valem

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle + \epsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla v \mathrm{dx} = \int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi))v \mathrm{dx}\,, \quad (3.1.1)$$

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, w \right\rangle + \int_\Omega (D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi) \cdot \nabla w \mathrm{dx} = 0 \quad (3.1.2)$$

para todo $v,\ w \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$. Lembrando que o símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o para dual $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)}$.

Então, a pergunta agora fica: se (ϕ, c) é solução fraca do problema (3.0.1), então (ϕ, c) satisfaz as equações em (3.0.1)?

Uma situação onde essa última pergunta, em um certo sentido, é respondida de forma afirmativa, é dada na seguinte observação:

Observação 3.1.2. Se $(\phi, c) \in L^2(0,T;H^2(\Omega))^2 \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))^2$ na definição anterior, então teremos

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t} v \mathrm{dx} + \epsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla v \mathrm{dx} = \int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi))v \mathrm{dx}\,, \quad (3.1.3)$$

$$\int_\Omega \frac{\partial c}{\partial t} w \mathrm{dx} + \int_\Omega (D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi) \cdot \nabla w \mathrm{dx} = 0, \quad (3.1.4)$$

para todo $v,\ w \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$, em particular, para todo v, $w \in C_c^\infty(\Omega)$. Então, aplicando integração por partes nas duas equações com

$v,\, w \in C_c^\infty(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta\phi - (F_1(\phi) + cF_2(\phi)) \right) v\mathrm{dx} \,= 0,\\
&\int_\Omega \left(\frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div}(D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi) \right) w\mathrm{dx} \,= 0,
\end{aligned}$$

para todo $v,\, w \in C_c^\infty(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$. Então, usando o Lema 2.5.6, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta\phi = F_1(\phi) + cF_2(\phi) \text{ q.t.p em } Q_T,\\
&\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi) \text{ q.t.p em } Q_T.
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Por outro lado, se integrarmos (3.1.3) e (3.1.4) por partes com $v,\, w \in H^1(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta\phi - (F_1(\phi) + cF_2(\phi)) \right) v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} v = 0,\\
&\int_\Omega \left(\frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div}(D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi) \right) w\\
&+ \int_{\partial\Omega} \left(D_1(\phi)\frac{\partial c}{\partial n} + D(c,\phi)\frac{\partial \phi}{\partial n} \right) w = 0,
\end{aligned}$$

para todo $v,\, w \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$. Usando (3.1.5), temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} v = 0,\\
&\int_{\partial\Omega} \left(D_1(\phi)\frac{\partial c}{\partial n} + D(c,\phi)\frac{\partial \phi}{\partial n} \right) w = 0,
\end{aligned}$$

para todo $v,\, w \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$. Como D_1 é estritamente positiva, segue que

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial c}{\partial n} = 0 \text{ q.t.p em } \partial\Omega \times (0,T).$$

Essa observação motiva a seguinte definição:

Definição 3.1.3. Dizemos que $(\phi, c) \in L^2(0,T;H^2(\Omega))^2 \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))^2$, é uma *solução forte* para o problema (3.0.1) se $c(0) = c_0$, $\phi(0) = \phi_0$ e valem

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta \phi = F_1(\phi) + cF_2(\phi) \text{ q.t.p em } Q_T,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla \phi) \text{ q.t.p em } Q_T,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial c}{\partial n} = 0 \text{ q.t.p em } \partial\Omega \times (0,T).$$

Na verdade, as contas que fizemos na Observação 3.1.2 demonstra o seguinte lema:

Lema 3.1.4. Sejam (ϕ, c) solução fraca do problema (3.0.1). Suponha que

$$(\phi, c) \in L^2(0,T; H^2(\Omega))^2 \cap H^1(0,T; L^2(\Omega))^2.$$

Então, (ϕ, c) é solução forte do problema (3.0.1).

Nosso primeiro objetivo neste capítulo é mostrar que para quaisquer $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $T > 0$, existe solução fraca (no sentido da Definição 3.1.1) para o problema (3.0.1). Para isso, vamos seguir a seguinte eurística:

1. *Construção e solução de um problema aproximado*: a grosso modo, vamos encontrar uma sequência V_m crescente de subespaços de dimensão finita de $L^2(\Omega)$, onde o limite dessa sequência é denso em $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$. Para cada V_m vamos deduzir um problema aproximado que será resumido a um sistema de EDO. Assim, o problema aproximado será resolvido usando teoria clássica de EDO.

2. *Estimativas a priori*: basicamente, vamos estimar a sequência de soluções citadas do item anterior e suas derivadas no tempo por uma constante que não depende de m.

3. *Passagem ao limite*: essencialmente, vamos tomar o limite de uma subsequência do problema aproximado e mostrar que é uma solução do problema original. As estimativas do item anterior e argumentos de compacidade vão garantir a existência de tal limite.

3.2 Problema aproximado

Nesta seção vamos construir um problema auxiliar e mostrar que o mesmo tem uma única solução. Aplicaremos o método de Faedo-Galerkin.

Pelo Lema 2.5.21 temos que o problema de autovalor

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad u \in H^1(\Omega)$$

tem uma quantidade enumerável de autovalores

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots$$

onde as autofunções $\{v_j\}_{1\leq j}$ formam um conjunto ortonormal completo em $L^2(\Omega)$, e para todo i, v_i satisfaz

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = 0 \quad em \quad \partial\Omega.$$

Além do mais, pelo Corolário 2.5.22 temos que para todo i $v_i \in C^\infty(\bar{\Omega})$ e $\{v_j\}_{1\leq j}$ formam um conjunto ortogonal completo de $H^1(\Omega)$. De fato, usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
(\nabla v_j, \nabla v_k)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla v_i \cdot \nabla v_k \mathrm{dx} \\
&= \int_\Omega v_j \frac{\partial v_k}{\partial n} \mathrm{dx} + \int_\Omega v_j(-\Delta v_k) \mathrm{dx} \\
&= \int_\Omega v_j \lambda_k v_k \mathrm{dx} = \lambda_k (v_j, v_k)_{L^2(\Omega)} = \lambda_k \delta_{jk}
\end{aligned}$$

para todo $j,\ k \geq 1$.

Denotaremos por $V_m := \mathrm{span}\{v_j\}_{1\leq j\leq m}$ o espaço vetorial gerado por $\{v_j\}_{1\leq j\leq m}$. Então $\cup_{m\geq 1} V_m = \mathrm{span}\{v_j\}_{j\geq 1}$ é denso em $L^2(\Omega)$ e em $H^1(\Omega)$, pois $\{v_j\}_{j\geq 1}$ é completo em $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$. Como V_m é um subespaço de dimensão finita de $L^2(\Omega)$ faz sentido definir $p_m : L^2(\Omega) \longrightarrow V_m$, a projeção ortogonal em V_m. Para cada $m \geq 1$, considere o problema aproximado de encontrar $\phi_m,\ c_m \in H^1(0, T; V_m)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t} v\mathrm{dx} + \epsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi_m \cdot \nabla v\mathrm{dx} = \int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))v\mathrm{dx}\,, \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t} w\mathrm{dx} + \int_\Omega (D_1(\phi_m)\nabla c_m + D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m)\cdot\nabla w\mathrm{dx} = 0, \\ \forall\ v,\ w \in V_m \text{ e q.t.p } t\in(0,T), \\ \phi_m(0) = p_m\phi_0 \in V_m, \quad c_m(0) = p_m c_0 \in V_m. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Nosso objetivo inicial é mostrar que o problema (3.0.1) tem uma solução fraca, ou seja, queremos mostrar que existem ϕ e c satisfazendo a Definição 3.1.1. Mas, se $\phi,\ c \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)')$, pelo Lema 2.5.31 temos que $\phi,\ c \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Então, para que faça sentido as condições iniciais ($\phi(0) = \phi_0$ e $c(0) = c_0$), no mínimo temos que pedir que $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

Antes de mostrar existência de solução fraca para o problema (3.0.1), teremos que mostrar existência de solução para o problema aproximado (3.2.1). Note que é suficiente provar existência e unicidade de solução para o problema (3.2.1) trocando v e w por vetores arbitrários da base de V_m. Além disso, como estamos procurando solução em $H^1(0,T;V_m)$, segue que tais soluções (caso existam) devem ter a seguinte forma:

$$\phi_m(t) = \sum_{i=1}^m \varphi_{im}(t)v_i, \quad c_m(t) = \sum_{i=1}^m c_{im}(t)v_i. \tag{3.2.2}$$

Então, substituindo (3.2.2) em (3.2.1) e tomando $v = v_k$, temos para todo $1 \le k \le m$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))v_k \\ &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^m \varphi_{im}(t)v_i\right)v_k + \epsilon^2\int_\Omega \nabla\left(\sum_{i=1}^m \varphi_{im}(t)v_i\right)\cdot\nabla v_k \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial\varphi_{im}(t)}{\partial t}\int_\Omega v_i v_k + \epsilon^2\sum_{i=1}^m \varphi_{im}(t)\int_\Omega \nabla v_i\cdot\nabla v_k \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial\varphi_{im}(t)}{\partial t}\int_\Omega v_i v_k - \epsilon^2\sum_{i=1}^m \varphi_{im}(t)\int_\Omega \Delta v_i v_k \\ &= \frac{\partial\varphi_{km}(t)}{\partial t} + \lambda_k\epsilon^2\varphi_{km}(t), \end{aligned}$$

onde usamos integração por partes e que v_i é autofunção do laplaciano. Analogamente, obtemos que

$$-\int_\Omega (D_1(\phi_m)\nabla c_m + D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m)\cdot\nabla v_k = \frac{\partial c_{km}(t)}{\partial t}$$

para todo $1 \le k \le m$. Defina,

$$U_m(t) = \begin{pmatrix} (\varphi_{im}(t)) \\ (c_{im}(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m},$$

$$\mathfrak{F}(U_m(t)) = \begin{pmatrix} (\int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))v_i) \\ (-\int_\Omega (D_1(\phi_m)\nabla c_m + D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m)\cdot\nabla v_i) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m},$$

e

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1\epsilon^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2\epsilon^2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m\epsilon^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}\times\mathbb{R}^{2m}.$$

Como $\{v_j\}_{1\le j\le m}$ é uma base de V_m, o problema de resolver (3.2.1), é equivalente a resolver o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} U_m'(t) + BU_m(t) = \mathfrak{F}(U_m(t)), \\ U_m(0) = U_0. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Como veremos no próximo lema, de fato esse último sistema tem única solução.

Lema 3.2.1. Seja $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$. Então, para cada inteiro $m \ge 1$ o problema (3.2.1) tem um única solução (ϕ_m, c_m) em um intervalo $[0, T_m)$, tal que

$$(\phi_m, c_m) \in C^1([0,T_m); V_m \times V_m).$$

Demonstração. Seja $\mathcal{G}(t, U_m(t)) = \mathfrak{F}(U_m(t)) - BU_m(t)$, se $\mathcal{G}$ é localmente Lipschitz com relação a segunda variável, pelo Teorema 2.2.2 e pela Observação 2.2.4, temos que para cada $m \geq 1$ o Problema (3.2.3) tem única solução $U_m(t)$ em algum intervalo maximal $[0, T_m)$ com $T_m > 0$ e $U_m \in C^1([0, T_m))$. Ou seja, o problema (3.2.1) tem um única solução (ϕ_m, c_m) no intervalo $[0, T_m)$ e $(\phi_m, c_m) \in C^1([0, T_m); V_m \times V_m)$. Vejamos que de fato $\mathcal{G}$ é localmente Lipschitz com relação a segunda variável. Observe que para isso basta provar que $\mathfrak{F}(U_m(t))$ é localmente Lipschitz para cada $t \in [0, T_0)$, onde $T_0 > 0$. Sejam U_m e $\bar{U}_m$ em uma bola em $\mathbb{R}^{2m}$ de raio R e centrada na origem. Temos que

$$|\mathfrak{F}(U_m) - \mathfrak{F}(\bar{U}_m)|^2 = A + B,$$

onde

$$A = \sum_{i=1}^{m} \left| \int_\Omega (F_1(\phi_m) - F_1(\bar{\phi}_m) + c_m F_2(\phi_m) - \bar{c}_m F_2(\bar{\phi}_m)) v_i \right|^2$$

e

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^{m} \left| \int_\Omega \big((D_1(\phi_m)\nabla c_m - D_1(\bar{\phi}_m)\nabla \bar{c}_m\big) \cdot \nabla v_i \right|^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m} \left| \int_\Omega \big(D_2(c_m, \phi_m)\nabla \phi_m - D_2(\bar{c}_m, \bar{\phi}_m)\nabla \bar{\phi}_m)\big) \cdot \nabla v_i \right|^2 . \end{aligned}$$

Agora, usando as desigualdades triangular e de Hölder, lembrando que $v_i \in L^\infty(\Omega)$ (veja a Observação 2.5.23), obtemos que existe uma constante C, tal que

$$\begin{aligned} &|A| \\ &\leq C \sum_{i=1}^{m} \left(\left| \int_\Omega (F_1(\phi_m) - F_1(\bar{\phi}_m)) v_i \right|^2 + \left| \int_\Omega F_2(\phi_m)(c_m - \bar{c}_m) v_i \right|^2 \right) \\ &\quad + C \sum_{i=1}^{m} \left(\left| \int_\Omega \bar{c}_m (F_2(\phi_m) - F_2(\bar{\phi}_m)) v_i \right|^2 \right) \\ &\leq C \sum_{i=1}^{m} \left(\|F_1(\phi_m) - F_1(\bar{\phi}_m)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|F_2(\phi_m)(c_m - \bar{c}_m)\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C \sum_{i=1}^{m} \left(\|v_i\|^2_{L^\infty(\Omega)} \|\bar{c}_m (F_2(\phi_m) - F_2(\bar{\phi}_m))\|^2_{L^1(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Como F_1 é Lipschitz e limitada, $\{v_i\}_{i\geq 1}$ são ortonormais em $L^2(\Omega)$ e usando novamente a desigualdade de Hölder, segue que existe constante $C>0$, tal que

$$\begin{aligned}|A| &\leq C\left(\|\phi_m-\bar{\phi}_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\|c_m-\bar{c}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\quad +C\left(\|\bar{c}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\|F_2(\phi_m)-F_2(\bar{\phi}_m)\|^2_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Usando o fato que $\bar{U}_m$ está em uma bola de raio R e que $\{v_i\}_{i\geq 1}$ são ortonormais em $L^2(\Omega)$, vemos facilmente que $\|\bar{c}_m\|_{L^2(\Omega)}\leq R$. Então, usando que F_2 é Lipschitz, segue que existe constante $C>0$, tal que

$$|A|\leq C\left(\|\phi_m-\bar{\phi}_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\|c_m-\bar{c}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Por meio de um procedimento análogo, obtemos que existe uma constante $C>0$, tal que

$$|B|\leq C\left(\|\phi_m-\bar{\phi}_m\|^2_{H^1(\Omega)}+\|c_m-\bar{c}_m\|^2_{H^1(\Omega)}\right).$$

Portanto, lembrando que $\|\nabla v_i\|^2_{L^2(\Omega)}=\lambda_i\|v_i\|^2_{L^2(\Omega)}$, obtemos que existem constantes positivas C_1 e C_2, tais que

$$\begin{aligned}&|\mathfrak{F}(U_m)-\mathfrak{F}(\bar{U}_m)|^2\\ &\leq C\left(\|\phi_m-\bar{\phi}_m\|^2_{H^1(\Omega)}+\|c_m-\bar{c}_m\|^2_{H^1(\Omega)}\right)\\ &= C\left(\int_\Omega\left|\sum_{i=1}^m(\varphi_{im}(t)-\bar{\varphi}_{im}(t))v_i\right|^2+\int_\Omega\left|\sum_{i=1}^m(c_{im}(t)-\bar{c}_{im}(t))v_i\right|^2\right)\\ &+ C\left(\int_\Omega\left|\sum_{i=1}^m(\varphi_{im}(t)-\bar{\varphi}_{im}(t))\nabla v_i\right|^2+\int_\Omega\left|\sum_{i=1}^m(c_{im}(t)-\bar{c}_{im}(t))\nabla v_i\right|^2\right)\\ &\leq C_1\left(\sum_{i=1}^m|\varphi_{im}(t)-\bar{\varphi}_{im}(t)|^2\|v_i\|^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^m|c_{im}(t)-\bar{c}_{im}(t)|^2\|v_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\ &+ C_1\left(\sum_{i=1}^m|\varphi_{im}(t)-\bar{\varphi}_{im}(t)|^2\|\nabla v_i\|^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^m|c_{im}(t)-\bar{c}_{im}(t)|^2\|\nabla v_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\leq C_2|U_m-\bar{U}_m|^2,\end{aligned}$$

onde, na última desigualdade, usamos o fato que $\{v_i\}_{i\geq 1}$ são vetores unitários em $L^2(\Omega)$. Portanto, com queríamos, $\mathfrak{F}$ é localmente Lipschitz. $\square$

3.3 Existência de solução fraca

Essa seção é reservada para mostrar existência de solução fraca para o problema (3.0.1). Como já havíamos comentado, isso será feito tomando o limite no problema (3.2.1). Para isso, teremos que estimar a sequência de soluções (ϕ_m, c_m) do problema (3.2.1), dada pelo Lema 3.2.1, para que assim possamos usar o teorema de Alaoglu (Teorema 2.4.2) e de Kakutani (Teorema 2.4.3) e garantir a existência de uma subsequência que converge respectivamente na topologia fraca estrela e na topologia fraca de certos espaços de funções. Entretanto, por causa dos termos não lineares, tais convergências não serão suficientes para aplicar o limite no problema (3.2.1), por isso, invocaremos o Teorema 2.5.30 para garantir convergência forte.

Aqui vamos fixar $T > 0$ e denotar por C uma constante positiva dependendo de $\epsilon^2, M_1, M_2, D_s, D_1, |\Omega|$, $\|\phi_0\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|c_0\|_{L^2(\Omega)}$, mas que não depende de m.

Antes de mostrarmos as estimativas de energia, observe que como a norma da projeção é menor ou igual a 1, temos que

$$\|\phi_{0m}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi_0\|_{L^2(\Omega)} \text{ e } \|c_{0m}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|c_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.3.1}$$

onde, $\phi_{0m} = p_m\phi_0$ e $c_{0m} = p_m c_0$.

Veja também que para todo $\varphi_m \in V_m$

$$\|\varphi_m\|_{H^1(\Omega)'} = \max_{\psi_m \in V_m\setminus\{0\}} \frac{|(\varphi_m, \psi_m)_{L^2(\Omega)}|}{\|\psi_m\|_{H^1(\Omega)}}. \tag{3.3.2}$$

De fato, como p_m é a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em V_m, temos

$$\begin{aligned}
\|\varphi_m\|_{H^1(\Omega)'} &= \sup_{\psi \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi\rangle|}{\|\psi\|_{H^1(\Omega)}} = \sup_{\psi \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi_m + \psi_m^{\perp}\rangle|}{\|\psi\|_{H^1(\Omega)}} \\
&= \sup_{\psi \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi_m\rangle|}{\|\psi\|_{H^1(\Omega)}} \geq \sup_{\psi_m \in V_m\setminus\{0\}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi_m\rangle|}{\|\psi_m\|_{H^1(\Omega)}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\|\psi_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\psi\|_{H^1(\Omega)}$ implica que

$$\frac{|\langle \varphi_m, \psi_m\rangle|}{\|\psi_m\|_{H^1(\Omega)}} \geq \frac{|\langle \varphi_m, \psi_m\rangle|}{\|\psi\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Tomando o supremo com $\psi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$, obtemos

$$\|\varphi_m\|_{H^1(\Omega)'} \leq \sup_{\psi_m \in V_m\setminus\{0\}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi_m\rangle|}{\|\psi_m\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Como V_m tem dimensão finita, a bola fechada em V_m é compacta. Portanto,

$$\|\varphi_m\|_{H^1(\Omega)'} = \sup_{\psi_m \in V_m \setminus \{0\}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi_m \rangle|}{\|\psi_m\|_{H^1(\Omega)}} = \max_{\psi_m \in V_m \setminus \{0\}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi_m \rangle|}{\|\psi_m\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Lema 3.3.1. Sejam $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e (c_m, ϕ_m) solução de (3.2.1) dada pelo Lema 3.2.1. Então, existe constante $C > 0$ (que não depende de m) tal que

$$\|(c_m, \phi_m)\|_{(L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))^2} \leq C, \tag{3.3.3}$$

$$\|(c_m, \phi_m)\|_{(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2} \leq C, \tag{3.3.4}$$

$$\left\| \left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right) \right\|_{(L^2(0,T;H^1(\Omega)'))^2} \leq C. \tag{3.3.5}$$

Demonstração. Substituindo na primeira equação em (3.2.1) v por $\phi_m(t)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))\phi_m &= \int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\phi_m + \epsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi_m \cdot \nabla\phi_m \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2 \|\nabla\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

para todo $t \in [0, T_m)$. Analogamente, substituindo na segunda equação em (3.2.1) w por $c_m(t)$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\phi_m)|\nabla c_m|^2 = -\int_\Omega D_2(c_m, \phi_m)\nabla\phi_m \cdot \nabla c_m = 0, \tag{3.3.7}$$

para cada $t \in [0, T_m)$. Multiplicando (3.3.7) por $\delta > 0$ (que será escolhido adequadamente posteriormente), somando com (3.3.6) e utilizando a hipótese (H2) (i.e., $D_s \leq D_1$), segue que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\|c_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \epsilon^2\|\nabla\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta D_s\|\nabla c_m\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))\phi_m - \delta\int_\Omega D_2(c_m, \phi_m)\nabla\phi_m \cdot \nabla c_m \\ &\leq \int_\Omega |F_1(\phi_m)||\phi_m| + \int_\Omega |c_m||F_2(\phi_m)||\phi_m| + \delta\int_\Omega |D_2(c_m, \phi_m)||\nabla\phi_m \cdot \nabla c_m| \\ &\leq M_1\left(\int_\Omega |\phi_m| + \int_\Omega |c_m||\phi_m|\right) + M_2\delta\int_\Omega |\nabla\phi_m||\nabla c_m| \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

onde utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Aplicando as desigualdades de Hölder e de Young, temos que

$$\int_\Omega |\phi_m| \mathrm{dx} \leq \|\phi_m\|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{1/2} \leq \frac{\|\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)}}{2} + \frac{|\Omega|}{2}.$$

Utilizando a última desigualdade em (3.3.8) e aplicando a desigualdade de Young com η, tem-se que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\|c_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \epsilon^2\|\nabla\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta D_s\|\nabla c_m\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M_1\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\phi_m|^2 + \frac{|\Omega|}{2} + \frac{1}{2}\int_\Omega |c_m|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \phi_m^2\right) + M_2\delta\int_\Omega |\nabla\phi_m||\nabla c_m| \\ &\leq C\left(1 + \|\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|c_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \frac{M_2\delta}{2\eta}\|\nabla\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{M_2\delta\eta}{2}\|\nabla c_m\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Tomando $\delta = D_s(\epsilon^2/M_2^2)$ e $\eta = (D_s/M_2)$ em (3.3.9), obtemos que existe constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\|\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\|c_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \epsilon^2\|\nabla\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta D_s\|\nabla c_m\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\left(1 + \|\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\|c_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Então,

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

onde $\eta(t) = \|\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\|c_m\|^2_{L^2(\Omega)}$ e $\phi(t) = \psi(t) = C$. Aplicando a desigualdade de Gronwall, segue que para todo $0 \leq t < T_m$ existe uma constante que também denotaremos por C, tal que

$$\|\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|c_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \tag{3.3.11}$$

Suponha que $T_m < +\infty$, pelo item 3 do Teorema 2.2.2 existe uma vizinhança de T_m tal que $\|\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|c_m(t)\|_{L^2(\Omega)} > C$, contradizendo (3.3.11). Portanto, para todo $t \in [0, T]$, onde $T > 0$ é fixado arbitrariamente, vale a estimativa (3.3.11) com uma constante C que não depende de m. Ou seja, existe uma constante positiva C que não depende de m, tal que

$$\|(c_m, \phi_m)\|_{(L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))^2} \leq C.$$

Integrando (3.3.10) sobre $[0,T]$ e usando (3.3.1) e (3.3.3), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|\phi_m^2(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\|c_m^2(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\nabla\phi_m\|^2_{L^2(Q_T)} + \delta D_s\|\nabla c_m\|^2_{L^2(Q_T)} \\
&\leq CT + \|\phi_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|c_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m\|^2_{L^2(Q_T)} + \|c_m\|^2_{L^2(Q_T)} \\
&\leq C
\end{aligned}
$$

então, como $\|\phi_m^2(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\|c_m^2(T)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0$, obtemos que existe uma constante que também denotaremos por C, tal que

$$
\|\nabla\phi_m\|^2_{L^2(Q_T)} + \|\nabla c_m\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C. \tag{3.3.12}
$$

Assim, de (3.3.12) e (3.3.3) obtemos (3.3.4), isto é,

$$
\|(c_m,\phi_m)\|_{(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2} \leq C.
$$

Agora vamos mostrar a estimativa (3.3.5). Substituindo v por $\psi_m \in V_m$ na primeira equação em (3.2.1), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}\psi_m \\
&= \quad -\epsilon^2\int_\Omega \nabla\phi_m\cdot\nabla\psi_m + \int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_mF_2(\phi_m))\psi_m \\
&\leq \quad \epsilon^2\int_\Omega |\nabla\phi_m||\nabla\psi_m| + \int_\Omega |(F_1(\phi_m) + c_mF_2(\phi_m))||\psi_m| \\
&\leq \quad \epsilon^2\|\nabla\phi_m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi_m\|_{L^2(\Omega)} + \|(F_1(\phi_m) + c_mF_2(\phi_m))\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \quad \epsilon^2\|\nabla\phi_m\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_m\|_{H^1(\Omega)} + \|(F_1(\phi_m) + c_mF_2(\phi_m))\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_m\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

onde utilizamos desigualdade de Cauchy-Schwarz na primeira desigualdade, a desigualdade de Hölder na segunda e que $\|\psi_m\|^2_{H^1(\Omega)} = \|\psi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\psi_m\|^2_{L^2(\Omega)}$ na terceira. Assim, temos por (3.3.2) que

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right\|_{H^1(\Omega)'} &= \max_{\|\psi_m\|_{H^1(\Omega)}=1}\left|\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}\psi_m \mathrm{dx}\right| \\
&\leq \epsilon^2\|\nabla\phi_m\|_{L^2(\Omega)} + \|F_1(\phi_m) + c_mF_2(\phi_m)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Agora, aplicando a desigualdade triangular e usando o fato que F_1 e F_2 são limitadas e que Ω é um conjunto limitado, obtemos

$$
\left\|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right\|_{H^1(\Omega)'} \leq \epsilon^2\|\nabla\phi_m\|_{L^2(\Omega)} + C(1+\|c_m\|_{L^2(\Omega)}) \leq C(1+\|c_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m\|_{H^1(\Omega)}).
$$

Então, elevando os dois lados ao quadrado e integrando sobre $[0, T]$, temos que existe outra constante (que também denotamos por C), tal que

$$\left\| \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} \leq C(1 + \|\phi_m\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|c_m\|^2_{L^2(Q_T)}). \qquad (3.3.13)$$

Agora, substituindo $\psi_m \in V_m$ na segunda equação em (3.2.1), obtemos que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t} \psi_m &= -\int_\Omega (D_1(\phi_m)\nabla c_m + D_2(c_m, \phi_m)\nabla \phi_m) \cdot \nabla \psi_m \\
&\leq \int_\Omega |D_1(\phi_m)\nabla c_m||\nabla \psi_m| + \int_\Omega |D_2(c_m, \phi_m)\nabla \phi_m||\nabla \psi_m| \\
&\leq C(\int_\Omega |\nabla c_m||\nabla \psi_m| + \int_\Omega |\nabla \phi_m||\nabla \psi_m|) \\
&\leq C\|\nabla \psi_m\|_{L^2(\Omega)}(\|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \phi_m\|_{L^2(\Omega)}) \\
&\leq C\|\psi_m\|_{H^1(\Omega)}(\|\nabla c_m\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla \phi_m\|_{H^1(\Omega)}),
\end{aligned}$$

onde utilizamos as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Hölder. Assim, por (3.3.2), elevando os dois lados ao quadrado e integrando sobre $[0, T]$, temos

$$\left\| \frac{\partial c_m}{\partial t} \right\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} \leq C(\|\phi_m\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|c_m\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}). \qquad (3.3.14)$$

Finalmente, usando (3.3.4) em (3.3.13) e (3.3.14), obtemos (3.3.5), ou seja

$$\left\| \left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right) \right\|_{(L^2(0,T;H^1(\Omega)'))^2} \leq C.$$

$\square$

Antes de demonstrarmos a existência de solução fraca para o problema (3.0.1), iremos apresentar alguns lemas de convergência.

Lema 3.3.2. Sejam $(c_0, \phi_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $p_m \phi_0 := \phi_{0m}$ e $p_m c_0 := c_{0m}$. Então, quando $m \to +\infty$ temos

$$\phi_{0m} \to \phi_0 \text{ e } c_{0m} \to c_0 \text{ em } L^2(\Omega). \qquad (3.3.15)$$

Demonstração. Como $\{v_i\}_{i\geq 1}$ é uma conjunto ortonormal e completo em $L^2(\Omega)$, temos que ϕ_0 pode ser escrito da seguinte forma:

$$\phi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_0, v_i)_{L^2(\Omega)} v_i.$$

Portanto,

$$\phi_{0m} = p_m \phi_0 = \sum_{i=1}^{m} (\phi_0, v_i)_{L^2(\Omega)} v_i.$$

Ou seja,

$$\|\phi_{0m} - \phi_0\|^2_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Analogamente,

$$\|c_{0m} - c_0\|^2_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

□

Lema 3.3.3. Sejam $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e (c_m, ϕ_m) solução de (3.2.1) dada pelo Lema 3.2.1. Então, para qualquer $T > 0$, existem

$$c,\ \phi \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T; H^1(\Omega)')$$

e subsequências de c_m e de ϕ_m (que também denotaremos por c_m e ϕ_m), tais que, quando $m \to +\infty$,

$$(c_m, \phi_m) \rightharpoonup (c, \phi) \text{ em } L^2(0,T; H^1(\Omega))^2, \tag{3.3.16}$$

$$(c_m, \phi_m) \to (c, \phi) \text{ em } (L^2(Q_T))^2 \cap (C([0,T]; H^1(\Omega)'))^2, \tag{3.3.17}$$

$$\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right) \overset{*}{\rightharpoonup} \left(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \text{ em } (L^2(0,T; H^1(\Omega))')^2, \tag{3.3.18}$$

lembrando que os símbolos $\rightharpoonup$ e $\overset{*}{\rightharpoonup}$ significam respectivamente que a sequência converge na topologia fraca e na topologia fraca estrela.

Demonstração. Como $L^2(0,T; H^1(\Omega))$ é reflexivo, pelo Teorema 2.4.3 e pela estimativa (3.3.4) segue (3.3.16).

Considere agora (c_m, ϕ_m) a subsequência que converge fraco a (c, ϕ) em $L^2(0,T; H^1(\Omega))^2$. Pela estimativa (3.3.5), a sequência $\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right)$ é limitada em $(L^2(0,T; H^1(\Omega))')^2$ (no sentido que os funcionais definidos por $\frac{\partial c_m}{\partial t}$ e $\frac{\partial \phi_m}{\partial t}$ são limitados em $L^2(0,T; H^1(\Omega))')$. Então, pelo Teorema 2.4.2 existem $\tilde{c}$ e

$\tilde{\phi}$ em $(L^2(0,T;H^1(\Omega)))'$, tais que, para alguma subsequência de $\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right)$ (que também denotaremos por $\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right)$), temos que

$$\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right) \overset{*}{\rightharpoonup} (\tilde{c}, \tilde{\phi}) \text{ em } (L^2(0,T;H^1(\Omega))')^2.$$

Para demostrar (3.3.18) resta mostrar que $(\tilde{c}, \tilde{\phi}) = \left(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$. Mostraremos apenas que $\tilde{c} = \frac{\partial c}{\partial t}$, pois para ϕ é análogo. Por definição,

$$\tilde{c} = \frac{\partial c}{\partial t} \Leftrightarrow \int_0^T \psi'(t) c(t) \mathrm{dt} = -\int_0^T \psi(t) \tilde{c}(t) \mathrm{dt}\,, \ \forall \psi \in C_c^\infty(0,T).$$

Mas, $\frac{\partial c_m}{\partial t} \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{c} \in (L^2(0,T;H^1(\Omega)))' \approx L^2(0,T;H^1(\Omega)')$ significa que para qualquer $\varphi \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial c_m}{\partial t}(t), \varphi(t) \right\rangle \mathrm{dt} \to \int_0^T \langle \tilde{c}(t), \varphi(t) \rangle \,\mathrm{dt}\,.$$

Então, temos que para todo $\psi \in C_c^\infty(0,T)$ e $w \in H^1(\Omega)$

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial c_m}{\partial t}(t), \psi(t) w \right\rangle \mathrm{dt} \to \int_0^T \langle \tilde{c}, \psi(t) w \rangle \,\mathrm{dt}\,,$$

pois, $\psi(t) w \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\langle \frac{\partial c_m}{\partial t}(t), \psi(t) w \right\rangle \mathrm{dt} \\
&= \left\langle \int_0^T \frac{\partial c_m}{\partial t}(t) \psi(t) \mathrm{dt}\,, w \right\rangle = -\left\langle \int_0^T c_m(t) \psi'(t) \mathrm{dt}\,, w \right\rangle \\
&= -\int_0^T \langle c_m(t), \psi'(t) w \rangle \,\mathrm{dt}\,. \qquad (3.3.19)
\end{aligned}$$

Como, $c_m \rightharpoonup c \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e para todo $\psi \in C_c^\infty(0,T)$ e $w \in H^1(\Omega)$ temos que $\psi'(t) w \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \subset L^2(0,T;H^1(\Omega)')$, segue que

$$\int_0^T \langle \psi'(t) w, c_m(t) \rangle \,\mathrm{dt} \to \int_0^T \langle \psi'(t) w, c(t) \rangle \,\mathrm{dt}\,.$$

Então, tomando o limite em (3.3.19), temos que para todo $w \in H^1(\Omega)$

$$\int_0^T \langle \tilde{c}, \psi(t) w \rangle \,\mathrm{dt} = -\int_0^T \langle c(t), \psi'(t) w \rangle \,\mathrm{dt}\,.$$

Ou seja,

$$\left\langle \int_0^T \tilde{c}\psi(t)\mathrm{dt}\,, w \right\rangle = \left\langle -\int_0^T c(t)\psi'(t)\mathrm{dt}\,, w \right\rangle,$$

para todo $w \in H^1(\Omega)$. Isto é,

$$\int_0^T \psi'(t)c(t)\mathrm{dt} = -\int_0^T \psi(t)\tilde{c}(t)\mathrm{dt}\,,\ \forall \psi \in C_c^\infty(0,T),$$

como queríamos provar.

Para provar (3.3.17), considere os seguintes conjuntos:

$$W_1 = \left\{ u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)') \right\}$$

e

$$W_2 = \left\{ u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)') \right\}.$$

Pelo Lema 3.3.1 temos que c_m e ϕ_m são limitados em W_1 e em W_2. Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, temos que $H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$. Então, pelo primeiro item do Teorema 2.5.30, todo conjunto limitado em W_1 é relativamente compacto em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, ou seja, $W_1 \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Além disso, como $H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, pelo Teorema 2.4.4 temos que $L^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^1(\Omega)'$. Então, pelo segundo item do Teorema 2.5.30, temos que qualquer conjunto limitado em W_2 é relativamente compacto em $C([0,T];H^1(\Omega)')$. Segue que, existe $(\bar{c},\bar{\phi}) \in L^2(Q_T)^2 \cap C([0,T],H^1(\Omega)')^2$ tal que

$$(c_m,\phi_m) \to (\bar{c},\bar{\phi}) \text{ em } L^2(Q_T)^2 \cap C([0,T],H^1(\Omega)')^2.$$

Consequentemente, $(c_m,\phi_m) \rightharpoonup (\bar{c},\bar{\phi})$ em $L^2(Q_T)^2$. Portanto por (3.3.16), $(c_m,\phi_m) \to (\bar{c},\bar{\phi})$ e $(c_m,\phi_m) \to (c,\phi)$ em $\mathcal{D}'(Q_T)$, então, pela unicidade do limite temos que $(c,\phi) = (\bar{c},\bar{\phi})$. □

Lema 3.3.4. Sejam $(\phi_0,c_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e (c_m,ϕ_m) solução de (3.2.1) dada pelo Lema 3.2.1. Então, existem subsequências de c_m e de ϕ_m (que também denotaremos por c_m e ϕ_m), tais que, quando $m \to +\infty$,

$$F_i(\phi_m) \to F_i(\phi)\ i = 1,2 \text{ em } L^p(Q_T),\ \forall\ p \in [1,+\infty), \tag{3.3.20}$$

$$D_1(\phi_m) \to D_1(\phi) \text{ em } L^p(Q_T),\ \forall\ p \in [1,+\infty), \tag{3.3.21}$$

$$c_m F_2(\phi_m) \to cF_2(\phi) \text{ em } L^q(Q_T),\ \forall\ q \in [1,2), \tag{3.3.22}$$

$$D_1(\phi_m)\nabla c_m \rightharpoonup D_1(\phi)\nabla c \text{ em } L^q(Q_T)^d,\ \forall\ q \in [1,2), \tag{3.3.23}$$

$$D_2(c_m,\phi_m)\nabla \phi_m \rightharpoonup D_2(c,\phi)\nabla \phi \text{ em } L^q(Q_T)^d,\ \forall\ q \in [1,2). \tag{3.3.24}$$

Demonstração. De (3.3.17) temos que $\phi_m \to \phi$ q.t.p em Q_T. Então, como F_i é Lipschitz, temos que $|F_i(\phi_m) - F_i(\phi)| \to 0$ q.t.p em Q_T, em particular $|F_i(\phi_m) - F_i(\phi)|^p \to 0$ q.t.p em Q_T para todo $p \in [1, +\infty)$. Além disso segue de (H1) que $|F_i(\phi_m)|^p \leq C$. Então aplicando o teorema da convergência dominada (Teorema 2.5.1), obtemos que

$$\|F_i(\phi_m) - F_i(\phi)\|^p_{L^p(Q_T)} = \int_{Q_T} |F_i(\phi_m) - F_i(\phi)|^p \to 0,$$

donde segue (3.3.20).

A prova de (3.3.21) é análoga à anterior.

Para mostrar (3.3.22), observe que

$$\begin{aligned}
&\|c_m F_2(\phi_m) - cF_2(\phi)\|^q_{L^q(Q_T)} \\
&\quad = \|c_m F_2(\phi_m) - c_m F_2(\phi) + c_m F_2(\phi) - cF_2(\phi)\|^q_{L^q(Q_T)} \\
&\quad \leq C\left(\|(c_m - c)F_2(\phi)\|^q_{L^q(Q_T)} + \|c_m(F_2(\phi_m) - F_2(\phi))\|^q_{L^q(Q_T)}\right) \\
&\quad \leq C\left(\|c_m - c\|^q_{L^q(Q_T)} + \|c_m(F_2(\phi_m) - F_2(\phi))\|^q_{L^q(Q_T)}\right)
\end{aligned}$$

pois F_2 é limitada. Agora, aplicando a desigualdade de Hölder (com $s = 2/q$) no segundo termo da última desigualdade, obtemos

$$\|c_m(F_2(\phi_m) - F_2(\phi))\|^q_{L^q(Q_T)} \leq \|c_m\|^q_{L^2(Q_T)} \|F_2(\phi_m) - F_2(\phi)\|^q_{L^{(q2/(2-q))}(Q_T)},$$

veja que $\frac{q2}{2-q} \geq 1 \Leftrightarrow q \geq \frac{2}{3}$, mas $q \geq 1 \geq \frac{2}{3}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&\|c_m F_2(\phi_m) - cF_2(\phi)\|^q_{L^q(Q_T)} \\
&\quad \leq C\left(\|c_m - c\|^q_{L^q(Q_T)} + \|c_m\|^q_{L^2(Q_T)} \|F_2(\phi_m) - F_2(\phi)\|^q_{L^{(q2/(2-q))}(Q_T)}\right).
\end{aligned}$$

Então, passando o limite quando $m \to +\infty$ e usando (3.3.17) e (3.3.20) segue (3.3.22).

Para provar (3.3.23) devemos mostrar que para todo funcional T em $(L^q(Q_T)^d)'$, tem-se que $T(D_1(\phi_n)\nabla c_m) \to T(D_1(\phi)\nabla c)$ quando $m \to \infty$. Pelo Teorema da Representação de Riesz, isso é o mesmo que mostrar que para todo $v \in L^{q^*}(Q_T)^d$ (onde q^* é o conjugado de q)

$$\int_{Q_T} D_1(\phi_m)\nabla c_m v \to \int_{Q_T} D_1(\phi)\nabla c v.$$

É claro que é suficiente mostrar para uma coordenada do vetor gradiente, ou seja, queremos mostrar que

$$\int_{Q_T}\left(D_1(\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial x_j}-D_1(\phi)\frac{\partial c}{\partial x_j}\right)v\to 0,\ \forall\ v\in L^{q^*}(Q_T)\ \text{ e } 1\le j\le d.$$

Mas, veja que

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T}\left(D_1(\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial x_j}-D_1(\phi)\frac{\partial c}{\partial x_j}\right)v \\ =&\int_{Q_T}\left(D_1(\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial x_j}-D_1(\phi)\frac{\partial c_m}{\partial x_j}+D_1(\phi)\frac{\partial c_m}{\partial x_j}-D_1(\phi)\frac{\partial c}{\partial x_j}\right)v \\ =&\int_{Q_T}(D_1(\phi_m)-D_1(\phi))\frac{\partial c_m}{\partial x_j}v+\int_{Q_T}D_1(\phi)\left(\frac{\partial c_m}{\partial x_j}-\frac{\partial c}{\partial x_j}\right)v.\end{aligned}\tag{3.3.25}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder generalizada com $1/s+1/(q*)+1/2=1$ no primeiro termo do lado direito da última igualdade, obtemos que

$$\begin{aligned}&\left|\int_{Q_T}(D_1(\phi_m)-D_1(\phi))\frac{\partial c_m}{\partial x_j}v\right| \\ &\le\ \|D_1(\phi_m)-D_1(\phi)\|_{L^s(Q_T)}\left\|\frac{\partial c_m}{\partial x_j}\right\|_{L^2(Q_T)}\|v\|_{L^{q*}(Q_T)}.\end{aligned}$$

Como ∇c_m é limitado em $L^2(Q_T)$, $v\in L^{q*}(Q_T)$ e de (3.3.21) temos que o primeiro termos do lado direito de (3.3.25) tende a zero. Como D_1 é limitado, $D_1(\phi)v\in L^{q*}(Q_T)$. Assim usando (3.3.16) segue que o segundo termo do lado direito de (3.3.25) também vai a zero quando $m\to+\infty$.

Procedendo de forma análoga à anterior, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T}\left(D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial\phi_m}{\partial x_j}-D_2(c,\phi)\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)v \\ =&\int_{Q_T}D_2(c,\phi)\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial x_j}-\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)v+\int_{Q_T}(D_2(c_m,\phi_m)-D_2(c,\phi))\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial x_j}\right)v.\end{aligned}$$

Utilizando o mesmo argumento usado anteriormente, concluímos que o primeiro termo do lado direito da última desigualdade vai a zero. Usando a desigualdade de Hölder com s satisfazendo $\frac{1}{s}+\frac{1}{2}+\frac{1}{q^*}=1$, obtemos que

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T}|D_2(c_m,\phi_m)-D_2(c,\phi)|\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right||v| \\ &\le\|D_2(c_m,\phi_m)-D_2(c,\phi)\|_{L^s(Q_T)}\left\|\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right\|_{L^2(Q_T)}\|v\|_{L^{q^*}(Q_T)}.\end{aligned}$$

Agora, como $s > 2$, usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade triangular e o fato que D_2 é limitada e Lipschitz, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|D_2(c_m,\phi_m) - D_2(c,\phi)\|^s_{L^s(Q_T)} \\
&= \int_{Q_T} |D_2(c_m,\phi_m) - D_2(c,\phi)|^2 |D_2(c_m,\phi_m) - D_2(c,\phi)|^{s-2} \\
&\leq C\|D_2(c_m,\phi_m) - D_2(c,\phi)\|^2_{L^2(Q_T)} \\
&\leq C(\|c_m - c\|^2_{L^2(Q_T)} + \|\phi_m - \phi\|^2_{L^2(Q_T)}).
\end{aligned}
$$

Portanto, por (3.3.17) o segundo termo também vai a zero quando $m \to \infty$. Assim,

$$
\int_{Q_T} \left(D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_j} - D_2(c,\phi)\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) v \to 0.
$$

□

Já temos em mãos todas as ferramentas necessárias para mostrarmos existência de solução fraca para o problema (3.0.1). Essencialmente vamos usar os resultados obtidos nos dois lemas anteriores para tomar o limite no problema (3.2.1).

Teorema 3.3.5 (Existência de solução fraca)**.** Para quaisquer $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe (ϕ, c) solução fraca (no sentido da Definição 3.1.1) do problema (3.0.1).

Demonstração. Sejam $m_0 \in \mathbb{N}$ e v_i um elemento qualquer da base de V_{m_0}. Tome $v = fv_i$ na primeira equação em (3.2.1), onde $f \in C_c^\infty(0,T)$. Então, integrando sobre $(0,T)$ obtemos que para qualquer $m \geq m_0$

$$
\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t} v + \epsilon^2 \int_0^T \int_\Omega \nabla \phi_m \cdot \nabla v = \int_0^T \int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))v
$$

Passando o limite quando $m \to \infty$, obtemos

$$
\int_0^T \left\langle \frac{\partial \phi_m}{\partial t}, v \right\rangle = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t} v \to \int_0^T \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle, \tag{3.3.26}
$$

$$
\int_0^T \int_\Omega \nabla \phi_m \cdot \nabla v \to \int_0^T \int_\Omega \nabla \phi \cdot \nabla v, \tag{3.3.27}
$$

$$
\int_0^T \int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))v \to \int_0^T \int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi))v. \tag{3.3.28}
$$

De fato, (3.3.26) segue de (3.3.18). Como $\nabla v \in (L^2(Q_T))^d$ e de (3.3.17), isto é, do fato que

$$\phi_m \rightharpoonup \phi \text{ em } L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$

obtemos (3.3.27).

Agora, veja que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{Q_T}(F_1(\phi_m)+c_mF_2(\phi_m)-F_1(\phi)-cF_2(\phi))v\right| \\
&\quad\le \left|\int_{Q_T}(F_1(\phi_m)-F_1(\phi))v\right| + \left|\int_{Q_T}(c_mF_2(\phi_m)-cF_2(\phi))v\right| \\
&\quad\le \int_{Q_T}|F_1(\phi_m)-F_1(\phi)||v| + \int_{Q_T}|c_mF_2(\phi_m)-cF_2(\phi)||v| \\
&\quad\le \|F_1(\phi_m)-F_1(\phi)\|_{L^2(Q_T)}\|v\|_{L^2(Q_T)} + \|c_mF_2(\phi_m)-cF_2(\phi)\|_{L^q(\Omega)}\|v\|_{L^{q^*}(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde $q \in (1,2)$ e $q^* = q/(q-1)$. Então, usando (3.3.20) o primeiro termo do lado direito da última desigualdade vai a zero, agora, pela Observação 2.5.23 na página 23, $\|v\|_{L^{q^*}(\Omega)}$ é limitado e por (3.3.22) segue que o segundo termo do lado direito também vai a zero. O que conclui a demonstração de (3.3.28).

Portanto, de (3.3.26), (3.3.27) e (3.3.28), obtemos que

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, v\right\rangle \mathrm{dt} + \epsilon^2\int_0^T\int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla v \mathrm{dx}\,\mathrm{dt} = \int_0^T\int_\Omega (F_1(\phi)+cF_2(\phi))v\mathrm{dx}\,\mathrm{dt}\,,$$

ou seja,

$$\int_0^T \left(\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, v_i\right\rangle + \epsilon^2\int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla v_i \mathrm{dx} - \int_\Omega (F_1(\phi)+cF_2(\phi))v_i\mathrm{dx}\right) f\mathrm{dt} = 0,$$

para todo $f \in C_c^\infty(0,T)$. Dessa forma, pelo Lema 2.5.6, segue que

$$\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, v_i\right\rangle + \epsilon^2\int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla v_i \mathrm{dx} = \int_\Omega (F_1(\phi)+cF_2(\phi))v_i\mathrm{dx}\,,$$

q.t.p em $(0,T)$ e para todo v_i elemento da base de V_m para qualquer m. Consequentemente, a última igualdade vale trocando v_i por $v \in \cup_{m\ge1}V_m$. Como, $\cup_{m\ge1}V_m$ é denso em $H^1(\Omega)$, obtemos

$$\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, v\right\rangle + \epsilon^2\int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla v \mathrm{dx} = \int_\Omega (F_1(\phi)+cF_2(\phi))v\mathrm{dx}\,,$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$.

Vamos proceder analogamente para obter a parte relativa a segunda equação em (3.2.1). Tome $w = fv_i$ na segunda equação em (3.2.1), onde $f \in C_c^\infty(0,T)$ e v_i é um elemento qualquer da base de V_{m_0}, e integrando sobre $(0,T)$ obtemos que para qualquer $m \geq m_0$

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t} w + \int_0^T \int_\Omega (D_1(\phi_m)\nabla c_m + D_2(c_m,\phi_m)\nabla \phi_m) \cdot \nabla w = 0$$

Passando o limite quando $m \to \infty$, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t} w \to \int_0^T \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, fv_i \right\rangle, \quad (3.3.29)$$

$$\int_0^T \int_\Omega D_1(\phi_m)\nabla c_m \cdot \nabla w \to \int_0^T \int_\Omega D_1(\phi)\nabla c \cdot \nabla w, \quad (3.3.30)$$

$$\int_0^T \int_\Omega (D_2(c_m,\phi_m)\nabla \phi_m) \cdot \nabla w) \to \int_0^T \int_\Omega D_2(c,\phi)\nabla\phi) \cdot \nabla w. \quad (3.3.31)$$

De fato, (3.3.29) segue de (3.3.18). Além disso, pelo Corolário 2.5.22 na página 22, $\nabla w \in (L^{q^*}(Q_T))^d$, onde $1 < q < 2$ e $q^* = q/(1-q)$, então por (3.3.23) temos que vale (3.3.30). Com o mesmo argumento, agora usando (3.3.24) no lugar de (3.3.23), mostramos que vale (3.3.31).

Agora, como anteriormente, aplicando o limite e usando o fato que $\cup_{m\geq 1} V_m$ é denso em $H^1(\Omega)$, obtemos

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, w \right\rangle + \int_\Omega (D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi) \cdot \nabla w \mathrm{dx} = 0$$

para todo $w \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$.

Além disso, usando (3.3.17) segue que

$$\phi_{m0} = \phi_m(0) \to \phi(0) \text{ e } c_{m0} = c_m(0) \to c(0) \;\text{ em } H^1(\Omega)'.$$

Por outro lado de (3.3.15) temos que

$$\phi_{m0} \to \phi_0 \text{ e } c_{m0} \to c_0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Então, como o limite é único, obtemos, com desejávamos, que

$$c(0) = c_0 \text{ e } \phi(0) = \phi_0.$$

O que conclui a prova de que a Definição 3.1.1 é satisfeita. $\square$

3.4 Regularidade e solução forte

O objetivo nesta seção é conseguir mais regularidade para a solução (ϕ, c) dada no Teorema 3.3.5. Queremos mostrar que $(\phi, c) \in L^2(0,T;H^2(\Omega))^2 \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))^2$, para que assim possamos utilizar o Lema 3.1.4 e mostrar que o problema (3.0.1) tem uma solução forte.

Lema 3.4.1. A projeção ontogonal $p_m : L^2(\Omega) \to V_m$ restrito a $H^1(\Omega)$ também é a projeção ortogonal em V_m. Além disso,

$$\|\nabla\phi_{0m}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.4.1}$$

$$\|\nabla c_{0m}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla c_0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.4.2}$$

desde que ϕ_0 e c_0 estejam em $H^1(\Omega)$.

Demonstração. Sejam $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \in H^1(\Omega)$ onde $\varphi_1 \in V_m$ e $\varphi_2 \in V_m^\perp$. Então, utilizando a regra de integração por partes (veja Teorema 2.5.10), obtemos que para todo $v \in V_m$

$$\begin{aligned}(\nabla(p_m\varphi - \varphi), \nabla v)_{L^2(\Omega)} &= (\nabla(-\varphi_2), \nabla v)_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega \nabla\varphi_2 \cdot \nabla v \mathrm{dx} \\ &= \int_\Omega \varphi_2 \Delta v \mathrm{dx} = \int_\Omega \varphi_2^k \Delta \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \mathrm{dx} \\ &= -\sum_{i=1}^m \alpha_i\lambda_i \int_\Omega \varphi_2^k v_i \mathrm{dx}\end{aligned}$$

para todo $k \geq 1$. Como $\varphi_2 \in V_m^\perp$ e $v_i \in V_m$, obtemos

$$(\nabla(p_m\varphi - \varphi), \nabla v)_{L^2(\Omega)} = 0 \ \forall \ v \in V_m. \tag{3.4.3}$$

A última igualdade implica que p_m restrito a $H^1(\Omega)$ também é a projeção ortogonal em V_m. De fato, pois

$$(p_m\varphi - \varphi, v)_{H^1(\Omega)} = (p_m\varphi - \varphi, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla(p_m\varphi - \varphi), \nabla v)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

A desigualdade (3.4.1) é satisfeita trivialmente quando $\|\nabla\phi_{0m}\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Então, suponha $\|\nabla\phi_{0m}\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$, substituindo $\varphi = \phi_0$ e $v = \phi_{0m}$ em (3.4.3), obtemos

$$\|\nabla\phi_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 = (\nabla\phi_{0m}, \nabla\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} = (\nabla\phi_0, \nabla\phi_{0m})_{L^2(\Omega)}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\|\nabla\phi_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla\phi_{0m}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|\nabla\phi_{0m}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

A demonstração de (3.4.2) é análoga à de (3.4.1).

□

Estamos caminhando na direção de mostrar que o problema (3.0.1) tem solução forte, para isso, mostraremos um teorema que nos dá uma noção de solução intermediária entre solução fraca e solução forte. Queremos mostrar que existem $\phi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $c \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)')$, tais que (ϕ, c) é solução de (3.0.1) no sentido que a equação do campo de fase (a primeira equação em (3.0.1)) satisfaz a definição de solução forte e a equação da concentração (a segunda equação em (3.0.1)) continua satisfazendo apenas a definição de solução fraca. Mas se ϕ pertence a $L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$, pelo Teorema 2.5.32 temos que $\phi \in C([0,T];H^1(\Omega))$, e se $c \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)')$, pelo Lema 2.5.31 segue que $c \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Então, para que façam sentido as condições iniciais ($\phi(0) = \phi_0$ e $c(0) = c_0$), no mínimo temos que pedir que $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Lema 3.4.2. Seja $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $T > 0$. Então, existe uma constante C que não depende de m, tal que

$$\left\|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(Q_T)} + \|\phi_m\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C, \tag{3.4.4}$$

$$\|\phi_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C. \tag{3.4.5}$$

Demonstração. Vamos começar mostrando (3.4.4). Para isso, escolhemos $v = \partial\phi_m/\partial t$ em (3.2.1) e obtemos

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|^2 + \epsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi_m \cdot \nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t} = \int_\Omega F_1(\phi_m)\frac{\partial\phi_m}{\partial t} + \int_\Omega F_2(\phi_m)c_m\frac{\partial\phi_m}{\partial t}.$$

Então, usando o fato que F_1 e F_2 são limitadas, temos que

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|^2 + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m|^2 \leq M_1\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right| + \int_\Omega |c_m|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right).$$

Aplicando a desigualdade de Young, obtemos que para todo η_1, $\eta_2 > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right|^2 + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m|^2 \\
&\leq \ M_1\left(\int_\Omega \left(C(\eta_1)\left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right|^2 + \eta_1\right) + \int_\Omega \left(\eta_2|c_m|^2 + C(\eta_2)\left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right|\right)\right) \\
&= \ M_1\eta_1|\Omega| + \left(\frac{M_1}{4\eta_1} + \frac{M_1}{4\eta_2}\right)\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right|^2 + M_1\eta_2\int_\Omega |c_m|^2,
\end{aligned}$$

onde usamos que $C(\lambda) = 1/4\lambda$. Agora, tomando $\eta_1 = \eta_2 = M_1$ e usando o fato que Ω é um conjunto limitado, temos que existe constante positiva C, que não depende de m, tal que

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right|^2 + \epsilon^2\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m|^2 \leq C\left(1 + \int_\Omega |c_m|^2\right).$$

Integrando a última desigualdade sobre $(0, t)$, com $t \in [0, T]$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right|^2 + \epsilon^2\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2 \ &\leq \ C\left(t + \int_0^t\int_\Omega |c_m|^2\right) + \epsilon^2\int_\Omega |\nabla\phi_m(0)|^2 \\
&\leq \ C\left(T + \|c_m\|^2_{L^2(Q_T)}\right) + \epsilon^2\|\nabla\phi_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Usando (3.3.4), (3.4.1) e readaptando a constante C, obtemos que

$$\int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right|^2 + \epsilon^2\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2 \leq C.$$

Agora basta tomar o supremo essencial com $t \in [0, T]$ de ambos os lados, para então obtermos

$$\left\|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(Q_T)} + \|\nabla\phi_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C,$$

e como, $\|\phi_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C$ (veja (3.3.3)), concluímos que

$$\left\|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(Q_T)} + \|\phi_m\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C.$$

Agora queremos mostrar (3.4.5). Como $-\Delta\phi_m(t) \in V_m\ \forall\ t \in [0,T]$ (isso decorre do fato que $\phi_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{im}(t)v_i$, onde $v_i \in V_m$ são autofunções do laplaciano), podemos escolher $v = -\Delta\phi_m(t)$ em (3.2.1), obtendo que

$$-\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}\Delta\phi_m - \epsilon^2\int_\Omega \nabla\phi_m\cdot\nabla(\Delta\phi_m) = -\int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))\Delta\phi_m.$$

Integrando por partes e usando que F_1 e F_2 são limitadas, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m|^2 + \epsilon^2\int_\Omega |\Delta\phi_m|^2 &= -\int_\Omega F_1(\phi_m)\Delta\phi_m - \int_\Omega c_m F_2(\phi_m)\Delta\phi_m \\ &\leq M_1(\int_\Omega |\Delta\phi_m| + \int_\Omega |c_m||\Delta\phi_m|).\end{aligned}$$

Usando agora a desigualdade de Young, temos que para todo $\eta_1,\ \eta_2 > 0$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m|^2 + \epsilon^2\int_\Omega |\Delta\phi_m|^2 \\ &\qquad \leq M_1\left(\eta_1|\Omega| + C(\eta_1)\int_\Omega |\Delta\phi_m|^2 + \eta_2\int_\Omega |c_m|^2 + C(\eta_2)\int_\Omega |\Delta\phi_m|^2\right),\end{aligned}$$

onde neste caso $C(\lambda) = 1/4\lambda$. Então,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m|^2 + \epsilon^2\int_\Omega |\Delta\phi_m|^2 \\ &\qquad \leq M_1\eta_1|\Omega| + \left(\frac{M_1}{4\eta_1} + \frac{M_1}{\eta_2}\right)\int_\Omega |\Delta\phi_m|^2 + M_1\eta_2\int_\Omega |c_m|^2.\end{aligned}$$

Tomando $\eta_1 = \eta_2 = M_1/\epsilon^2$, multiplicando por 2 de ambos os lados e escolhendo C_1 uma constante maior que o máximo entre $M_1\eta_1|\Omega|$ e $M_1\eta_1$, tem-se que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1(1 + \|c_m\|^2_{L^2(\Omega)}).$$

Então, integrando sobre $[0,T]$, obtemos que existe uma constante C_2, tal que

$$\|\nabla\phi_m(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\Delta\phi_m\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C_2(1 + \|c_m\|^2_{L^2(Q_T)}) + \|\nabla\phi_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

E então, por (3.4.1) e (3.3.4) existe uma constante C, onde

$$\|\Delta\phi_m\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C.$$

Assim, pelo Lema 2.5.20 e usando outra vez (3.3.4), obtemos que existe uma constante $C > 0$ que não depende de m, tal que

$$\|\phi_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C.$$

$\square$

Agora estamos em condições de demonstrar um teorema que fornece a noção de uma solução intermediária entre uma solução fraca (que é o Teorema 3.3.5) e uma solução forte para o problema (3.0.1).

Teorema 3.4.3. Dado $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe um par de funções (ϕ, c) satisfazendo

$$\phi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$c \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)'),$$

tais que $\phi(0) = \phi_0$, $c(0) = c_0$ e

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta \phi = F_1(\phi) + cF_2(\phi) \text{ q.t.p em } Q_T, \\ &\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ q.t.p em } \partial\Omega \times (0,T), \\ &\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, v \right\rangle + \int_\Omega (D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi) \cdot \nabla v \mathrm{dx} = 0 \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$.

Demonstração. De (3.4.4) e (3.4.5), segue do Teorema de Kakutani (veja Teorema 2.4.3) que existe uma subsequência (que ainda denotaremos por ϕ_m) da sequência ϕ_m do Lema 3.3.3, de tal forma que, quando $m \to +\infty$,

$$\phi_m \rightharpoonup \tilde{\phi} \text{ em } L^2(0,T;H^2(\Omega))$$

e

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} \rightharpoonup \varphi \text{ em } L^2(Q_T).$$

Agora, como a sequência ϕ_m aqui é uma subsequência da sequência dada no Lema 3.3.3, pela unicidade do limite, temos na verdade que

$$\phi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$\phi_m \rightharpoonup \phi \;\text{ em } L^2(0,T;H^2(\Omega)) \tag{3.4.7}$$

e

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \phi}{\partial t} \;\text{ em } L^2(Q_T). \tag{3.4.8}$$

Agora, seguindo os mesmos passos da Observação 3.1.2 na página 31, obtemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta \phi = F_1(\phi) + cF_2(\phi) \;\text{ q.t.p em } Q_T$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \;\text{ q.t.p em } \partial\Omega \times (0,T).$$

De fato, como $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, vale o Teorema 3.3.5, mais ainda, como $\partial\phi/\partial t \in L^2(Q_T)$, obtemos que

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t} v + \epsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla v = \int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi))v \tag{3.4.9}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$. Em particular, a última igualdade vale para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Então integrando por partes, temos

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta\phi - (F_1(\phi) + cF_2(\phi)) \right) v\text{dx} = 0 \tag{3.4.10}$$

para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$. Assim, usando o Lema 2.5.6, obtemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta \phi = F_1(\phi) + cF_2(\phi) \;\text{ q.t.p em } Q_T. \tag{3.4.11}$$

Por outro lado, se integrarmos (3.4.9) por partes com $v \in H^1(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta\phi - (F_1(\phi) + cF_2(\phi)) \right) v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} v = 0$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$. Utilizando (3.4.11), segue que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} v = 0$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$. Ou seja,

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{q.t.p em } \partial\Omega \times (0,T).$$

O fato que $c(0) = c_0$ e $\phi(0) = \phi_0$, segue como no Teorema 3.3.5.

$\square$

Observação 3.4.4. De (3.4.4) e (3.4.5), segue que a sequência ϕ_m é limitada em

$$W_3 = \left\{ u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)); \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \right\}.$$

Agora, pelo Corolário 2.5.17, $H^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^1(\Omega)$. Então, pelo Teorema 2.5.30 temos que qualquer conjunto limitado em W_3 é relativamente compacto em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Como ϕ_m é limitado em W_3 temos que existe uma subsequência (da última subsequência) que ainda vamos denotar por ϕ_m tal que, quando $m \to +\infty$,

$$\phi_m \to \phi \in L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.4.12}$$

O que queremos destacar nesta observação, é que com as hipóteses deste último teorema, temos "melhor convergência" para uma subsequência da sequência ϕ_m. Observe que em momento algum utilizamos esse fato para demonstrar o teorema anterior, entretanto, se fossemos repetir o processo da demonstração feita no Teorema 3.3.5, essa informação facilitaria a demonstração.

Observação 3.4.5. Veja que no Teoremas 3.3.5 e no Teorema 3.4.3 não usamos a hipótese que $1 \leq d \leq 3$. Então, esses teoremas valem para todo domínio Ω aberto e limitado de $\mathbb{R}^d$ para todo $d \geq 1$. Entretanto, nos próximos resultados usaremos, por exemplo, o Corolário 2.5.15 que exige $1 \leq d \leq 3$ e as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg dadas no Lema 2.5.18. Então, daqui em diante vamos considerar Ω um domínio limitado e aberto de $\mathbb{R}^d$, $1 \leq d \leq 3$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^∞.

Nossa próxima meta é mostrar que o problema (3.0.1) tem uma solução forte (ϕ, c) onde $\phi \in L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega))$ e $c \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$. Mas, se $\phi \in L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega))$, pelo Teorema 2.5.32 temos que $\phi \in C([0,T];H^2(\Omega))$. Além disso, se c pertence a $L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$, pelo Lema 2.5.31 segue que c pertence a $C([0,T];H^1(\Omega))$. Então, para que as condições iniciais ($\phi(0) = \phi_0$ e $c(0) = c_0$) façam sentido, temos que exigir pelo menos que $(\phi_0, c_0) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Além disso, para conseguirmos novas estimativas para ϕ_m, será necessária a hipótese de que $\partial\phi_0/\partial n = 0$ em $\partial\Omega$.

No próximo lema, encontramos novas estimativas para ϕ_m, por isso, ainda não será necessário que $c_0 \in H^1(\Omega)$.

Lema 3.4.6. Seja $(\phi_0, c_0) \in H^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que $\partial\phi_0/\partial n = 0$ em $\partial\Omega$. Então, existe uma constante C que não depende de m, tal que valem as seguintes estimativas:

$$\|\phi_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq C, \tag{3.4.13}$$

$$\|\phi_m\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \leq C, \tag{3.4.14}$$

$$\left\|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C. \tag{3.4.15}$$

Demonstração. Para provar (3.4.13) e (3.4.14), escolhemos $v = \Delta^2\phi_m$ em (3.2.1). Então, obtemos

$$\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}\Delta^2\phi_m + \epsilon^2\int_\Omega \nabla\phi_m \cdot \nabla(\Delta^2\phi_m) = \int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))\Delta^2\phi_m.$$

Integrando o primeiro termo do lado esquerdo por partes e usando a hipótese que $\partial\phi_m/\partial n = 0$ em $\partial\Omega$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}\Delta^2\phi_m &= -\int_\Omega \nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\cdot\nabla\Delta\phi_m + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial n}\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\\ &= \int_\Omega \Delta\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\Delta\phi_m - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial^2\phi_m}{\partial n\partial t}\Delta\phi_m\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Integrando por partes o segundo termo do lado esquerdo, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\phi_m\cdot\nabla(\Delta^2\phi_m) &= -\int_\Omega \Delta\phi_m\Delta^2\phi_m + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_m}{\partial n}\Delta^2\phi_m\\ &= \int_\Omega \nabla\Delta\phi_m\cdot\nabla\Delta\phi_m - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial n}\Delta\phi_m\\ &= \|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

Agora usando integração por partes e a regra da cadeia (veja Teorema 2.5.25) no lado direito, conseguimos que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))\Delta^2\phi_m\\ &= -\int_\Omega (F_1'(\phi_m)\nabla\phi_m + \nabla c_m F_2(\phi_m) + c_m F_2'(\phi_m)\nabla\phi_m)\cdot\nabla\Delta\phi_m\\ &\leq \int_\Omega |F_1'(\phi_m)||\nabla\phi_m\cdot\nabla\Delta\phi_m| + \int_\Omega |F_2(\phi_m)||\nabla c_m\cdot\nabla\Delta\phi_m|\\ &\quad + \int_\Omega |F_2'(\phi_m)||c_m\nabla\phi_m\cdot\nabla\Delta\phi_m|.\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.5.24 (isto é, F_1 e F_2 pertencem a $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que existe uma constante $C > 0$ (que não depende de m) tal que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))\Delta^2\phi_m \\
&\quad \leq \; C\left(\int_\Omega |\nabla\phi_m||\nabla\Delta\phi_m| + \int_\Omega |\nabla c_m||\nabla\Delta\phi_m| + \int_\Omega |c_m\nabla\phi_m\cdot\nabla\Delta\phi_m|\right).
\end{aligned}$$

Seja $\mathscr{B} = \displaystyle\int_\Omega |c_m\nabla\phi_m\cdot\nabla\Delta\phi_m|$. Aplicando a desigualdade de Young, obtemos que para quaisquer $\eta_1,\ \eta_2 > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))\Delta^2\phi_m \\
&\quad \leq \; C\left(\eta_1\|\nabla\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{1}{4\eta_1} + \frac{1}{4\eta_2}\right)\|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \eta_2\|\nabla c_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathscr{B}\right).
\end{aligned}$$

Escolhendo $\eta_1 = \eta_2 = 2C/\epsilon^2$, existe uma outra constante que não depende de m a qual também chamaremos de C, tal que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))\Delta^2\phi_m \\
&\quad \leq \; \frac{\epsilon^2}{4}\|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + C\left(\|\nabla\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla c_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathscr{B}\right).
\end{aligned}$$

Então, por (3.4.16), (3.4.17) e a última desigualdade obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{3\epsilon^2}{4}\|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|\nabla\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla c_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathscr{B}\right). \tag{3.4.18}$$

Agora vamos estimar o termo $\mathscr{B}$. Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Hölder, segue que

$$\mathscr{B} = \int_\Omega |c_m\nabla\phi_m\cdot\nabla\Delta\phi_m| \leq \|c_m\|_{L^3(\Omega)}\|\nabla\phi_m\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla\Delta\phi_m\|_{L^2(\Omega)}.$$

Usando as interpolações (2.5.5) e (2.5.6), e as estimativas (3.3.3) e (3.4.4), temos que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} \;&\leq C_1C_2\|c_m\|^{1/2}_{H^1(\Omega)}\|c_m\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\nabla\phi_m\|^{1/2}_{H^2(\Omega)}\|\nabla\phi_m\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\nabla\Delta\phi_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\|c_m\|^{1/2}_{H^1(\Omega)}\|\nabla\phi_m\|^{1/2}_{H^2(\Omega)}\|\nabla\Delta\phi_m\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos que para todo $\delta > 0$, vale

$$\mathscr{B} \leq C\left(\frac{\delta}{2}\|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\delta}\|c_m\|_{H^1(\Omega)}\|\nabla\phi_m\|_{H^2(\Omega)}\right).$$

Do fato que $\|\nabla\phi_m\|_{H^2(\Omega)} \leq \|\phi_m\|_{H^3(\Omega)}$, temos

$$\mathscr{B} \leq C\left(\frac{\delta}{2}\|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\delta}\|c_m\|_{H^1(\Omega)}\|\phi_m\|^2_{H^3(\Omega)}\right).$$

Usando o Lema 2.5.20, segue que existe uma constante positiva (que também chamaremos de C), de tal forma que

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} &\leq C\left(\frac{\delta}{2}\|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\delta}\|c_m\|_{H^1(\Omega)}(\|\Delta\phi_m\|_{H^1(\Omega)} + \|\phi_m\|_{H^1(\Omega)})\right) \\
&\leq C\left(\frac{1}{2\delta}\|c_m\|_{H^1(\Omega)}(\|\Delta\phi_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\Delta\phi_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m\|_{H^1(\Omega)})\right) \\
&\quad + C\left(\frac{\delta}{2}\|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young mais uma vez, obtemos em particular (isto é, escolhendo ϵ da desigualdade igual a $2\delta^2$) que

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} &\leq C\left(\frac{1}{2\delta}(\frac{1}{4\delta^2}\|c_m\|^2_{H^1(\Omega)} + \delta^2(\|\Delta\phi_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\Delta\phi_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m\|_{H^1(\Omega)})^2\right) \\
&\quad + C\left(\frac{\delta}{2}\|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&= C\left(\delta\|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{8\delta^3}\|c_m\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\delta}{2}\|\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta}{2}\|\phi_m\|^2_{H^1(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Agora, escolhendo $C\delta = \epsilon^2/4$ e substituindo a última desigualdade em (3.4.18), chegamos em

$$\frac{d}{dt}\|\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|c_m\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m\|^2_{H^1(\Omega)}\right). \tag{3.4.19}$$

Integrando (3.4.19) sobre $(0,t)$ com $t \in [0,T]$ e usando (3.3.4), obtemos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\Delta\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta\phi_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)} + C\left(1 + \int_0^t \|\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Veja que $\|\Delta\phi_{0m}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta\phi_0\|_{L^2(\Omega)}$. De fato, usando integração por partes, o fato que $(\phi_0-\phi_{0m}, v)_{L^2(\Omega)} = 0$ para todo $v \in V_m$, a hipótese que $\partial\phi_0/\partial n = 0$ e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\|\Delta\phi_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)} &= (\Delta\phi_{0m}, \Delta\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} = (\phi_{0m}, \Delta^2\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} \\ &= (\phi_0, \Delta^2\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} = (\Delta\phi_0, \Delta\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\Delta\phi_0\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\phi_{0m}\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Como $\phi_0 \in H^2(\Omega)$, isso implica que

$$\|\Delta\phi_{0m}\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \tag{3.4.20}$$

Então, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|\Delta\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(1 + \int_0^t \|\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.4.21}$$

Usando a versão integral da Desigualdade de Gronwall (i.e., o item (ii) do Teorema 2.3.3) temos que

$$\|\Delta\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Então,

$$\|\Delta\phi_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C. \tag{3.4.22}$$

Agora, tomando o supremo essencial com $t \in [0,T]$ em (3.4.21), segue que

$$\|\nabla\Delta\phi_m\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C\left(1 + \|\Delta\phi_m\|^2_{L^2(Q_T)}\right) \leq C. \tag{3.4.23}$$

Utilizando o Lema 2.5.20, obtemos que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|\phi_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq \|\Delta\phi_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\phi_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))},$$

$$\begin{aligned}\|\phi_m\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} &\leq \|\Delta\phi_m\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|\phi_m\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ &\leq C(\|\nabla\Delta\phi_m\|_{L^2(Q_T)} + \|\Delta\phi_m\|_{L^2(Q_T)} + \|\phi_m\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}).\end{aligned}$$

Usando as estimativas (3.3.3), (3.3.4), (3.4.22) e (3.4.23) nas duas últimas desigualdades, concluímos que existe uma constante $C > 0$, que não depende de m, de tal forma que

$$\|\phi_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq C$$

e

$$\|\phi_m\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \leq C,$$

o que prova (3.4.13) e (3.4.14).

Agora vamos mostrar a estimativa (3.4.15). Para isso, escolhemos $v = -(\partial\Delta\phi_m/\partial t)$ em (3.2.1). Deste modo, segue que

$$-\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t} - \epsilon^2\int_\Omega \nabla\phi_m\cdot\nabla\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t} = -\int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t}.$$

Ou seja,

$$\left\|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t}. \tag{3.4.24}$$

Usando integração por partes, a regra da cadeia (Teorema 2.5.25), a desigualdade de Cauchy-Schwarz, o fato que F_1 e F_2 pertencem a $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ e a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t} \\
&= \int_\Omega \nabla(F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))\cdot\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t} \\
&= \int_\Omega (F_1'(\phi_m)\nabla\phi_m + \nabla c_m F_2(\phi_m) + c_m F_2'(\phi_m)\nabla\phi_m)\cdot\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t} \\
&\leq \int_\Omega |\nabla\phi_m|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right| + \int_\Omega |\nabla c_m|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right| + \int_\Omega \left|c_m\nabla\phi_m\cdot\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right| \\
&\leq \|\nabla\phi_m\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)}\left\|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \int_\Omega \left|c_m\nabla\phi_m\cdot\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|.
\end{aligned}$$

Então, (3.4.24) junto com a última desigualdade fornece:

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (\|\nabla\phi_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)})\left\|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)} + \mathscr{C},
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

onde $\mathscr{C} = \displaystyle\int_\Omega \left| c_m \nabla \phi_m \cdot \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right|$. Usando a desigualdade de Hölder, o Corolário 2.5.15 e a estimativa (3.4.13) obtemos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathscr{C} &\leq \|c_m\|_{L^3(\Omega)} \|\nabla \phi_m\|_{L^6(\Omega)} \left\| \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \|c_m\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla \phi_m\|_{H^1(\Omega)} \left\| \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \|c_m\|_{H^1(\Omega)} \left\| \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Combinando (3.4.25) com a última desigualdade e usando a desigualdade de Young, vemos que existe $C_1 > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
&\left\| \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta \phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_1 (\|\nabla \phi_m\|_{L^2(\Omega)} + \|c_m\|_{H^1(\Omega)}) \left\| \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_1 (\|\phi_m\|_{H^1(\Omega)} + \|c_m\|_{H^1(\Omega)}) \left\| \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_1 \left(\eta (\|\phi_m\|_{H^1(\Omega)} + \|c_m\|_{H^1(\Omega)})^2 + \frac{1}{4\eta} \left\| \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right),
\end{aligned}$$

para todo $\eta > 0$. Então, escolhendo em particular $\eta = C_1/2$, segue que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\left\| \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2 \frac{d}{dt} \|\Delta \phi_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C (\|\phi_m\|^2_{H^1(\Omega)} + \|c_m\|^2_{H^1(\Omega)}). \quad (3.4.26)$$

Integrando (3.4.26) sobre $[0, T]$, segue que

$$\begin{aligned}
&\left\| \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right\|^2_{L^2(Q_T)} + \epsilon^2 \|\Delta \phi_m(T)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \epsilon^2 \|\Delta \phi_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + C (\|\phi_m\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|c_m\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}).
\end{aligned}$$

Agora, usando as estimativas (3.3.4) e (3.4.20), temos

$$\left\|\nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q_T)} + \epsilon^2 \|\Delta \phi_m(T)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Usando a estimativa (3.4.4), concluímos que

$$\left\|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C.$$

□

O próximo lema visa obter mais estimativas para c_m.

Lema 3.4.7. Seja $(\phi_0, c_0) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ tal que $\partial\phi_0/\partial n = 0$. Então, existe uma constante C, que não depende de m, tal que valem as seguintes estimativas:

$$\|c_m\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C, \tag{3.4.27}$$
$$\|c_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C, \tag{3.4.28}$$
$$\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(Q_T)} \leq C. \tag{3.4.29}$$

Demonstração. Para mostrar as estimativas (3.4.27) e (3.4.28) escolhemos $w = -\Delta c_m$ em (3.2.1). Então, obtemos

$$-\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t}\Delta c_m - \int_\Omega (D_1(\phi_m)\nabla c_m + D_2(c_m, \phi_m)\nabla\phi_m) \cdot \nabla\Delta c_m = 0.$$

Usando integração por partes, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla c_m\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega (D_1(\phi_m)\nabla c_m + D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m)\cdot\nabla\Delta c_m \\
&= \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega D_1(\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial x_i}\frac{\partial \Delta c_m}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\frac{\partial \Delta c_m}{\partial x_i} \\
&= -\sum_{i=1}^{d}\left(\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(D_1(\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial x_i})\Delta c_m + \int_{\partial\Omega}\Delta c_m D_1(\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial x_i}n_i\right) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{d}\left(\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i})\Delta c_m + \int_{\partial\Omega}\Delta c_m D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}n_i\right) \\
&= -\int_\Omega \operatorname{div}(D_1(\phi_m)\nabla c_m)\Delta c_m + \int_{\partial\Omega}\Delta c_m D_1(\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial n} \\
&\quad -\sum_{i=1}^{d}\left(\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i})\Delta c_m\right) + \int_{\partial\Omega}\Delta c_m D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial n} \\
&= -\int_\Omega \operatorname{div}(D_1(\phi_m)\nabla c_m)\Delta c_m - \sum_{i=1}^{d}\left(\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i})\Delta c_m\right).
\end{aligned}
$$

Então, aplicando a regra da cadeia (Teorema 2.5.25) e lembrando que pelo

Lema 2.5.24, $D_2 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla c_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \operatorname{div}(D_1(\phi_m)\nabla c_m)\Delta c_m \\
&= -\sum_{i=1}^{d}\left(\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i})\Delta c_m\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{d}\left(\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} + D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial^2 x_i}\right)\Delta c_m\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{d}\left(\int_\Omega \left(D_2'(c_m,\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} + D_2'(c_m,\phi_m)\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\right)^2\right)\Delta c_m\right) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{d}\left(\int_\Omega \left(D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial^2 x_i}\right)\Delta c_m\right) \\
&= -\int_\Omega D_2'(c_m,\phi_m)\nabla c_m \cdot \nabla \phi_m \Delta c_m - \int_\Omega D_2'(c_m,\phi_m)|\nabla \phi_m|^2 \Delta c_m \\
&\quad -\int_\Omega D_2'(c_m,\phi_m)\Delta\phi_m \Delta c_m \\
&\leq C\left(\int_\Omega |\nabla c_m \cdot \nabla\phi_m \Delta c_m| + \int_\Omega |\nabla\phi_m|^2|\Delta c_m| + \int_\Omega |\Delta\phi_m \Delta c_m|\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla c_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_s\|\Delta c_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2), \tag{3.4.30}$$

onde,

$$\mathscr{E}_1 = \int_\Omega |\nabla c_m \cdot \nabla \phi_m \Delta c_m| \ \text{ e } \ \mathscr{E}_2 = \int_\Omega |\nabla\phi_m|^2|\Delta c_m| + \int_\Omega |\Delta\phi_m \Delta c_m|.$$

Agora vamos estimar $\mathscr{E}_1$ e $\mathscr{E}_2$. Usando a desigualdade de Hölder, o Corolário 2.5.15 e a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.5.6), obtemos que existe uma constante C_1, tal que

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_1 &\leq \|\nabla\phi_m\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla c_m\|_{L^3(\Omega)}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_1\|\nabla\phi_m\|_{H^1(\Omega)}\|\nabla c_m\|^{1/2}_{H^1(\Omega)}\|\nabla c_m\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Agora, usando que $\|\nabla u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)}$ para todo $u \in H^2(\Omega)$ e a estimativa (3.4.13), temos que existe constante $C_2 > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_1 &\leq C_1\|\phi_m\|_{H^2(\Omega)}\|c_m\|_{H^2(\Omega)}^{1/2}\|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_2\|c_m\|_{H^2(\Omega)}^{1/2}\|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young junto com o Lema 2.5.20, segue que para qualquer $\eta_1 > 0$ e para alguma constante $C_3 > 0$, vale

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_1 &\leq C_2\left(\frac{1}{4\eta_1}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta_1\|c_m\|_{H^2(\Omega)}\|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq \frac{C_2}{4\eta_1}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_3\eta_1(\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)} + \|c_m\|_{L^2(\Omega)})\|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{C_2}{4\eta_1}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_3\eta_1\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + C_3\eta_1\|c_m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Mais uma vez, usando a desigualdade de Young, temos que para qualquer $\eta_2 > 0$

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_1 &\leq \frac{C_2}{4\eta_1}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_3\eta_1}{4\eta_2}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta_2 C_3\eta_1\|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + C_3\eta_1\|c_m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Então, pela estimativa (3.3.4) e escolhendo $\eta_1 = 2C_2/D_s$ e $\eta_2 = 2C_3\eta_1/D_s$, concluímos que existe alguma constante $C > 0$, tal que

$$\mathscr{E}_1 \leq \frac{D_s}{4}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(1 + \|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)}^2). \tag{3.4.31}$$

Agora, para estimar $\mathscr{E}_2$ usamos a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Young duas vezes (escolhendo $\eta = 2/D_s$ em ambos), o Corolário 2.5.15 e o fato que $\|\nabla u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)}$ para todo $u \in H^2(\Omega)$, e então obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_2 &\leq \left(\int_\Omega |\nabla\phi_m|^4\right)^{1/2}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\phi_m\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{2}{D_s}\|\nabla\phi_m\|_{L^4(\Omega)}^4 + \frac{D_s}{8}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{D_s}\|\Delta\phi_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{D_s}{8}\|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Portanto, usando a estimativa (3.4.13), segue que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\mathscr{E}_2 \;\leq\; \frac{D_s}{4}\|\Delta c_m\|^2_{L^2(\Omega)} + C. \tag{3.4.32}$$

Assim, substituindo (3.4.31) e (3.4.32) em (3.4.30), obtemos que existe constante $C > 0$, tal que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla c_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_s\|\Delta c_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(1 + \|\nabla c_m\|^2_{L^2(\Omega)}). \tag{3.4.33}$$

Aplicando o lema de Gronwall em (3.4.33), obtemos

$$\|\nabla c_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{\int_0^T C ds}\left(\|\nabla c_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t C ds\right) \quad \forall\; t \in [0,T].$$

Como supomos que $c_0 \in H^1(\Omega)$, temos de (3.4.2) que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|c_m\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C.$$

Finalmente, pelo Lema 2.5.20 temos

$$\|c_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq \|\Delta c_m\|_{L^2(Q_T)} + \|c_m\|_{L^2(Q_T)}.$$

Mas, integrando (3.4.33) sobre $[0,T]$, temos que

$$\|\Delta c_m\|_{L^2(Q_T)} \leq C. \tag{3.4.34}$$

Assim, usando também (3.3.4), segue que existe $C > 0$, tal que

$$\|c_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C.$$

Agora vamos mostrar (3.4.29). Com esse propósito, tomamos $w = \partial c_m/\partial t$ em (3.2.1), então obtemos

$$\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega (D_1(\phi_m)\nabla c_m + D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m)\cdot\nabla\frac{\partial c_m}{\partial t}.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} &= -\sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \left(D_1(\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial x_i} + D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2 c_m}{\partial x_i \partial t} \\
= & \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_1(\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial x_i} + D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\right)\frac{\partial c_m}{\partial t} \\
& -\sum_{i=1}^{d}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial c_m}{\partial t}\left(D_1(\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial x_i} + D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\right) n_i \\
= & \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_1(\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial x_i} + D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\right)\frac{\partial c_m}{\partial t} \\
& -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial c_m}{\partial t}\left(D_1(\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial n} + D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial n}\right).
\end{aligned}
$$

Usando o fato que $\partial\phi_m/\partial n = \partial c_m/\partial n = 0$ e a regra da cadeia dada no Teorema 2.5.25, temos

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_1(\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial x_i} + D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\right)\frac{\partial c_m}{\partial t} \\
= & \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \left(D_1'(\phi_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\frac{\partial c_m}{\partial x_i} + D_1(\phi_m)\frac{\partial^2 c_m}{\partial^2 x_i}\right)\frac{\partial c_m}{\partial t} \\
+ & \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \left(D_2'(c_m,\phi_m)\frac{\partial c_m}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} + D_2'(c_m,\phi_m)\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\right)^2\right)\frac{\partial c_m}{\partial t} \\
+ & \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega D_2(c_m,\phi_m)\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial^2 x_i}\frac{\partial c_m}{\partial t} \\
= & \int_\Omega \left(D_1'(\phi_m)\nabla\phi_m\cdot\nabla c_m + D_1(\phi_m)\Delta c_m\right)\frac{\partial c_m}{\partial t} \\
+ & \int_\Omega \left(D_2'(c_m,\phi_m)(\nabla c_m\cdot\nabla\phi_m + |\nabla\phi_m|^2) + D_2(c_m,\phi_m)\Delta\phi_m\right)\frac{\partial c_m}{\partial t} \\
\leq & \; C\int_\Omega (|\nabla\phi_m\cdot\nabla c_m| + |\nabla\phi_m|^2 + |\Delta\phi_m| + |\Delta c_m|)\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right|.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\left(\|\nabla\phi_m\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla c_m\|_{L^3(\Omega)} + \left(\int_\Omega |\nabla\phi_m|^4\right)^{1/2}\right)\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C\left(\|\Delta\phi_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}\right)\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Do Corolário 2.5.15 junto com (3.4.13), temos que existe $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\left(\|c_m\|_{H^2(\Omega)} + \left(\int_\Omega |\nabla\phi_m|^4\right)^{1/2}\right)\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C\left(\|\Delta\phi_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}\right)\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, segue que para todo $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\eta\left(\|c_m\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi_m\|_{L^4(\Omega)}^4 + \|\Delta\phi_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \\ &\quad + \frac{c}{4\eta}\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

Escolhendo $\eta = c/2$, usando o Corolário 2.5.15 e as desigualdades (3.4.22) e (3.4.13), obtemos que existe uma constante positiva (que também chamaremos de C), de tal forma que

$$\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\left(1 + \|c_m\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)}^2\right).$$

Agora, integrando sobre $[0, T]$ e usando as desigualdades (3.4.28) e (3.4.34), concluímos como esperávamos, que

$$\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(Q_T)} \leq C,$$

onde C é uma constante positiva que não depende de m. □

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema que garante existência de solução forte para o problema (3.0.1).

Teorema 3.4.8 (Solução forte)**.** Para quaisquer $(\phi_0, c_0) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, tal que $\partial\phi_0/\partial n = 0$, existe um par de funções (ϕ, c) satisfazendo

$$\begin{aligned} &\phi \in L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)),\\ &c \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)), \end{aligned} \tag{3.4.35}$$

tal que (c, ϕ) é solução forte do problema (3.0.1) (no sentido da Definição 3.1.3).

Demonstração. Como $(\phi_0, c_0) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, em particular, temos que existem

$$c,\ \phi \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)')$$

e subsequências de c_m e de ϕ_m (que também denotaremos por c_m e ϕ_m) satisfazendo (3.3.16) e (3.3.17), ou seja, quando $m \to +\infty$,

$$\begin{aligned} &(c_m, \phi_m) \rightharpoonup (c, \phi) \text{ em } L^2(0,T;H^1(\Omega))^2,\\ &\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right) \overset{*}{\rightharpoonup} \left(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \text{ em } (L^2(0,T;H^1(\Omega))')^2. \end{aligned}$$

Pelas estimativas (3.4.14), (3.4.15), (3.4.28) e (3.4.29), temos que existem funções $\tilde{\phi}$, $\tilde{c}$, φ_1 e φ_2 satisfazendo

$$\begin{aligned} &\tilde{\phi} \in L^2(0,T;H^3(\Omega)),\\ &\tilde{c} \in L^2(0,T;H^2(\Omega)),\\ &\varphi_1 \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),\\ &\varphi_2 \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

tais que, existem subsequências das últimas subsequências ϕ_m e c_m, de tal forma que quando $m \to +\infty$,

$$\begin{aligned} &\phi_m \rightharpoonup \tilde{\phi} \ \text{ em } L^2(0,T;H^3(\Omega)),\\ &c_m \rightharpoonup \tilde{c} \ \text{ em } L^2(0,T;H^2(\Omega)),\\ &\frac{\partial \phi_m}{\partial t} \rightharpoonup \varphi_1 \ \text{ em } L^2(0,T;H^1(\Omega)),\\ &\frac{\partial c_m}{\partial t} \rightharpoonup \varphi_2 \ \text{ em } L^2(0,T;H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Como os limites são únicos, temos que $\tilde{\phi} = \phi$, $\tilde{c} = c$, $\varphi_1 = \partial\phi/\partial t$ e $\varphi_2 = \partial c/\partial t$. Então, na verdade mostramos que

$$\begin{aligned} &\phi \in L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)),\\ &c \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

que é em particular (segundo o Teorema 3.3.5) solução fraca para o problema (3.0.1). Então, pelo Lema 3.1.4, segue que (ϕ, c) é uma solução forte do problema (3.0.1). $\square$

Observação 3.4.9. Devido a (3.4.28) e (3.4.29), temos que c_m é limitado em

$$W_3 = \left\{ u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)); \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \right\},$$

Então, utilizando exatamente o mesmo argumento do Observação 3.4.4 na página 58, trocando ϕ por c, obtemos que existe

$$c \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$$

tal que existe uma subsequência de c_m, de tal forma que quando $m \to +\infty$

$$c_m \to c \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Mais ainda, de (3.4.14) e (3.4.15), segue que a sequência ϕ_m é limitada em

$$W_4 = \left\{ u \in L^2(0, T; H^3(\Omega)); \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \right\}.$$

Agora, pelo Corolário 2.5.17, $H^3(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^2(\Omega)$. Então, pelo Teorema 2.5.30 temos que qualquer conjunto limitado em W_4 é relativamente compacto em $L^2(0, T; H^2(\Omega))$. Como ϕ_m é limitado em W_4 temos que existe um subsequência (da última subsequência) que ainda vamos denotar por ϕ_m tal que, quando $m \to +\infty$,

$$\phi_m \to \phi \in L^2(0, T; H^2(\Omega)).$$

3.5 Estabilidade e unicidade

Vamos demonstrar um resultado de estabilidade, a grosso modo, esse resultado diz que “pequenas” mudanças nas condições iniciais provocam “pequenas” mudanças nas soluções do problema (3.0.1). Então é de se esperar que se não mudarmos em nada os dados iniciais a solução permanece a mesma. De fato, teremos como corolário do próximo teorema um resultado de unicidade.

Teorema 3.5.1 (Estabilidade)**.** Sejam (ϕ_0^1, c_0^1) e (ϕ_0^2, c_0^2) em $H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)$. Se (ϕ_1, c_1) e (ϕ_2, c_2) são soluções do problema (3.0.1) dadas pelo Teorema 3.4.8, onde seus dados iniciais são respectivamente (ϕ_0^1, c_0^1) e (ϕ_0^2, c_0^2), então temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}&\|\phi_1-\phi_2\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}+\|c_1-c_2\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\\ &\quad\le C\left(\|\phi_0^1-\phi_0^2\|_{H^1(\Omega)}+\|c_0^1-c_0^2\|_{L^2(\Omega)}\right),\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

onde C é uma constante.

Demonstração. Definimos $\phi=\phi_2-\phi_1$, $c=c_1-c_2$, $\phi_0=\phi_0^1-\phi_0^2$ e $c_0^1-c_0^2=c_0$. Veja que como (ϕ_1, c_1) e (ϕ_2, c_2) são soluções fortes, temos que

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t}-\epsilon^2\Delta\phi_1=F_1(\phi_1)+c_1F_2(\phi_1)\text{ q.t.p em } Q_T$$

e

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial t}-\epsilon^2\Delta\phi_2=F_1(\phi_2)+c_2F_2(\phi_2)\text{ q.t.p em } Q_T.$$

Então, subtraindo a última equação da penúltima e somando e subtraindo $c_2F_2(\phi_1)$ do lado direito, obtemos

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}-\epsilon^2\Delta\phi=F_1(\phi_2)-F_1(\phi_1)+c_2(F_2(\phi_2)-F_2(\phi_1))+cF_2(\phi_1)\text{ q.t.p em } Q_T. \tag{3.5.2}$$

Multiplicando (3.5.2) por ϕ e integrando sobre Ω e usando integração por partes (veja Teorema 2.5.10), obtemos que para q.t.p $t\in(0,T)$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}+\epsilon^2\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\quad=\int_\Omega(F_1(\phi_2)-F_1(\phi_1))\phi+\int_\Omega c_2(F_2(\phi_2)-F_2(\phi_1))\phi+\int_\Omega cF_2(\phi_1)\phi.\end{aligned}$$

Usando a hipótese (H1) (i.e., o fato que F_1 e F_2 são lipchitzianas e limitadas) junto com a desigualdade de Hölder, temos que existe $C>0$, tal que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}+\epsilon^2\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\quad\le C\left(\int_\Omega|\phi_2-\phi_1||\phi|+\int_\Omega|c_2||\phi_2-\phi_1||\phi|+\int_\Omega|c||\phi|\right)\\ &\quad= C\left(\int_\Omega|\phi|^2+\int_\Omega|c_2||\phi||\phi|+\int_\Omega|c||\phi|\right)\\ &\quad\le C\left(\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}+\|c_2\|_{L^4(\Omega)}\|\phi\|_{L^4(\Omega)}\|\phi\|_{L^2(\Omega)}+\|c\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Pela inclusão contínua dada no Corolário 2.5.15, por $c_2 \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ e devido a desigualdade de Young, segue que existe uma constante $C>0$, tal que para todo $\eta > 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad\leq \; C\left(\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\eta}\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)} + \|c\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\quad= \; C\left(\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\eta}\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\eta}\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|c\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Escolhendo $\eta = C/2\epsilon^2$, obtemos que existe uma constante positiva que também chamaremos de C, tal que

$$\frac{d}{dt}\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|c\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.5.3}$$

Agora, multiplicamos (3.5.2) por $-\Delta\phi$, integramos sobre Ω e usando integração por partes (veja Teorema 2.5.10), temos que para q.t.p $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\Delta\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad= \; -\int_\Omega (F_1(\phi_2) - F_1(\phi_1))\Delta\phi - \int_\Omega c_2(F_2(\phi_2) - F_2(\phi_1))\Delta\phi - \int_\Omega cF_2(\phi_1)\Delta\phi.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese (H1) e a desigualdade de Hölder, segue que existe uma constante $C>0$, tal que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\Delta\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad\leq \; C\left(\int_\Omega |\phi||\Delta\phi| + \int_\Omega |c_2||\phi||\Delta\phi| + \int_\Omega |c||\Delta\phi|\right) \\
&\quad\leq \; C\left(\|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|c_2\|_{L^4(\Omega)}\|\phi\|_{L^4(\Omega)} + \|c\|_{L^2(\Omega)}\right)\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como anteriormente, podemos usar o Corolário 2.5.15, o fato que $c_2 \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ e a desigualdade de Young, então obtemos que para todo $\eta > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\Delta\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \;&\leq\; C\eta\left(\|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi\|_{H^1(\Omega)} + \|c\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \\
&\quad + \frac{C}{4\eta}\|\Delta\phi\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\eta = C/2\epsilon^2$, concluímos que existe $C > 0$ de tal forma que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\Delta\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|c\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.5.4}$$

Veja que como (ϕ_1, c_1) e (ϕ_2, c_2) são soluções forte do problema (3.0.1), temos que

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi_1)\nabla c_1 + D_2(c_1,\phi_1)\nabla\phi_1) \text{ q.t.p em } Q_T$$

e

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi_2)\nabla c_2 + D_2(c_2,\phi_2)\nabla\phi_2) \text{ q.t.p em } Q_T.$$

Então, subtraindo a última equação da penúltima, obtemos

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi_2)\nabla c_2 + D_2(c_2,\phi_2)\nabla\phi_2) - \operatorname{div}(D_1(\phi_1)\nabla c_1 + D_2(c_1,\phi_1)\nabla\phi_1). \tag{3.5.5}$$

Mas, observe que usando integração por partes, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div}(D_1(\phi_i)\nabla c_i)c &= \sum_{j=1}^{d}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(D_1(\phi_i)\frac{\partial c_i}{\partial x_j}\right)c \\
&= -\sum_{j=1}^{d}\int_\Omega \left(D_1(\phi_i)\frac{\partial c_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial c}{\partial x_j} \\
&= -\int_\Omega D_1(\phi_i)\nabla c_i\cdot\nabla c,
\end{aligned}$$

para $i = 1$ ou $i = 2$. Analogamente,

$$\int_\Omega \operatorname{div}(D_2(c_i,\phi_i)\nabla\phi_i)c = -\int_\Omega D_2(c_i,\phi_i)\nabla\phi_i\cdot\nabla c,$$

onde $i = 1$ ou $i = 2$. Então, multiplicando (3.5.5) por c, integrando sobre Ω e usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \int_\Omega (D_1(\phi_2)\nabla c_2 - D_1(\phi_1)\nabla c_1)\cdot\nabla c \\
&+ \int_\Omega (D_2(c_2,\phi_2)\nabla\phi_2 - D_2(c_1,\phi_1)\nabla\phi_1)\cdot\nabla c = 0.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo

$$\int_\Omega D_1(\phi_1)\nabla c_2 \cdot \nabla c + \int_\Omega D_2(c_1,\phi_1)\nabla\phi_2 \cdot \nabla c$$

do lado direito da última equação, podemos reescreve-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\phi_1)|\nabla c|^2 \\
&\quad = \int_\Omega (D_1(\phi_1) - D_1(\phi_2))\nabla c_2 \cdot \nabla c - \int_\Omega D_2(c_1,\phi_1)\nabla\phi \cdot \nabla c \\
&\qquad + \int_\Omega (D_2(c_1,\phi_1) - D_2(c_2,\phi_2))\nabla\phi_2 \cdot \nabla c.
\end{aligned}$$

Assim, usando as hipóteses (H2) e (H3) (i.e., D_1 e D_2 são funções Lipschitz e limitadas), obtemos que existe constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c\|^2_{L^2(\Omega)} + D_s\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)} \leq\ & C\left(\int_\Omega |\phi||\nabla c_2 \cdot \nabla c| + \int_\Omega |\nabla\phi \cdot \nabla c|\right. \\
&\left. + \int_\Omega (|\phi| + |c|)|\nabla\phi_2 \cdot \nabla c|\right).
\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Agora vamos estimar o lado direito da equação (3.5.6). Usando o Corolário 2.5.16, a desigualdade de Hölder, o fato que $c_2 \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ junto com o Lema 2.5.20, temos que existem constantes C_1 e C_2, tais que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\phi||\nabla c_2 \cdot \nabla c| &\leq \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla c_2\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_1\|\phi\|_{H^2(\Omega)}\|c_2\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_2(\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi\|_{L^2(\Omega)})\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Analogamente, usando agora o fato que $\phi_2 \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, segue que existe uma constante $C_3 > 0$, tal que

$$\int_\Omega |\phi||\nabla\phi_2 \cdot \nabla c| \leq C_3(\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi\|_{L^2(\Omega)})\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.5.8}$$

Além disso, usando a desigualdade de Hölder, o Corolário 2.5.15 a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.5.5), o fato que $\phi_2 \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$, temos que existem constantes C_4 e C_5, tais que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |c||\nabla\phi_2\cdot\nabla c| &\leq \|c\|_{L^3(\Omega)}\|\nabla\phi_2\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq C_4\|\nabla\phi_2\|_{H^1(\Omega)}\|c\|^{1/2}_{H^1(\Omega)}\|c\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq C_4\|\phi_2\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}\|c\|^{1/2}_{H^1(\Omega)}\|c\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq C_5(\|\nabla c\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}+\|c\|^{1/2}_{L^2(\Omega)})\|c\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}\\
&= C_5(\|c\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|^{3/2}_{L^2(\Omega)}+\|c\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}).
\end{aligned}
\tag{3.5.9}
$$

Então, substituindo (3.5.7), (3.5.8) e (3.5.9) em (3.5.6) e usando a desigualdade de Hölder, obtemos que existe uma constante $C>0$, tal que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c\|^2_{L^2(\Omega)}+D_s\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\quad\leq 2C_2(\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)}+\|\phi\|_{L^2(\Omega)})\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}+C_5\|c\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|^{3/2}_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad+C_5\|c\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}\\
&\quad\leq C(\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)}+\|\phi\|_{H^1(\Omega)}+\|c\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}+\|c\|_{L^2(\Omega)})\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Agora, da desigualdade de Young deduzimos (escolhendo $\eta = C/D_s$) que existe uma constante positiva (que também denotamos por C), tal que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c\|^2_{L^2(\Omega)}+D_s\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\quad\leq C(\|\Delta\phi\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)}+\|c\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}+\|c\|^2_{L^2(\Omega)})+\frac{D_s}{4}\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Aplicando a desigualdade de Young novamente (escolhendo $\eta = C/D_s$), segue que existe outra constante positiva (que também chamaremos de C), tal que

$$
\frac{d}{dt}\|c\|^2_{L^2(\Omega)}+D_s\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C\left(\|\Delta\phi\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)}+\|c\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\tag{3.5.10}
$$

Agora, multiplicando (3.5.10) por $\mu>0$ e somando com (3.5.3) e (3.5.4), segue que existe uma constante $C>0$, tal que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)}+\mu\|c\|^2_{L^2(\Omega)}\right)+\epsilon^2\|\Delta\phi\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\quad\leq C\left(\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)}+\|c\|^2_{L^2(\Omega)}+\mu\left(\|\Delta\phi\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)}+\|c\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Escolhendo $\mu = \epsilon^2/C$, temos que existe uma constante positiva que também chamaremos de C, tal que

$$\frac{d}{dt}\left(\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)} + \|c\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \leq C\left(\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)} + \|c\|^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

q.t.p $t \in (0,T)$. Então, concluímos pelo Teorema 2.3.3 (Desigualdade de Gonwall) que

$$\|\phi(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|c(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|\phi_0\|^2_{H^1(\Omega)} + \|c_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

para todo $t \in [0,T]$. Donde segue (3.5.1). □

Como prevíamos, o próximo teorema é um corolário do teorema anterior.

Teorema 3.5.2 (Unicidade)**.** A solução forte (ϕ, c) do problema (3.0.1), dada pelo Teorema 3.4.8, é única.

Demonstração. Suponha que (ϕ_1, c_1) e (ϕ_2, c_2) são soluções do problema (3.0.1) com os mesmos dados iniciais. Então, pelo Teorema 3.5.1, segue que

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|c_1 - c_2\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq 0.$$

Portanto, $\phi_1 = \phi_2$ e $c_1 = c_2$ q.t.p em Q_T. □

3.6 Princípio do máximo

Do ponto de vista físico é de se esperar que a concentração de cada uma das duas substâncias nunca seja negativa nem ultrapasse a concentração máxima que é 1. Pelo significado físico do parâmetro campo de fase, também espera-se que ϕ esteja entre 0 e 1. Isso de fato acontece e será demonstrado no próximo teorema.

Para o próximo teorema vamos considerar as seguintes hipóteses adicionais:

(H4) $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$, em $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

(H5) $D_2(\cdot, r_2) \equiv 0$ em $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ e para todo $r_2 \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.6.1 (Princípio do máximo)**.** Suponha que as hipóteses (H1)-(H5) são satisfeitas. Suponha também que o dado inicial $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é tal que

$$0 \leq \phi_0(x), \quad c_0(x) \leq 1 \text{ para q.t.p } x \in \Omega.$$

Então para qualquer $T > 0$, toda solução fraca $(\phi, c) \in (L^2(0,T; H^1(\Omega)))^2 \cap (H^1(0,T; H^1(\Omega)'))^2$, satisfaz

$$0 \leq \phi(t,x), \quad c(t,x) \leq 1 \text{ para q.t.p } x \in \Omega \text{ e } \ \forall\ t \in [0,T].$$

Demonstração. Vamos provar que se $\phi_0,\ c_0 \geq 0$ q.t.p em Ω então $\phi(t),\ c(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,T]$ e q.t.p em Ω. Sejam $\phi^- = \max(-\phi, 0)$ e $c^- = \max(-c, 0)$. Então, pelo Lema 2.5.26, temos que

$$\nabla\phi^- = \begin{cases} -\nabla\phi & \text{se } \phi < 0 \\ 0 & \text{se } \phi \geq 0 \end{cases}$$

e

$$\nabla c^- = \begin{cases} -\nabla c & \text{se } c < 0 \\ 0 & \text{se } c \geq 0. \end{cases}$$

Então escolhemos $v = -\phi^-$ em (3.1.1) e $w = -c^-$ em (3.1.2), obtemos

$$-\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \phi^- \right\rangle + \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla\phi^-| = -\int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi))\phi^-,$$

$$-\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, c^- \right\rangle + \int_\Omega D_1(\phi)|\nabla c^-|^2 = \int_{c<0} D_2(c,\phi)\nabla\phi \cdot \nabla c.$$

Então, pelo Lema 2.5.31, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi^-\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla\phi^-| = -\int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi))\phi^-,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c^-\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\phi)|\nabla c^-|^2 = \int_{c<0} D_2(c,\phi)\nabla\phi \cdot \nabla c.$$

Agora, para os pontos onde $\phi \geq 0$ temos que $\phi^- = 0$. Para os pontos onde $\phi < 0$, temos pela a hipótese (H4) que $F_1(\phi) = F_2(\phi) = 0$. Então,

$$(F_1(\phi) + cF_2(\phi))\phi^- = 0, \text{ q.t.p em } Q_T.$$

Por outro lado, se $c < 0$, usando (H5), segue que

$$D_2(c,\phi) = 0, \text{ q.t.p em } Q_T.$$

Então, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi^-\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla\phi^-| = 0$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c^-\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\phi)|\nabla c^-|^2 = 0$$

para q.t.p $t \in (0, T)$. Integrando as duas últimas equação sobre $[0, t]$, onde $t \in [0, T]$, como $\phi_0^- = c_0^- = 0$, temos

$$\frac{1}{2}\|\phi^-(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2 \int_0^t \|\nabla\phi^-\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

e

$$\frac{1}{2}\|c^-(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega D_1(\phi)|\nabla c^-|^2 = 0.$$

Pelo fato que D_1 é uma função positiva, concluímos que $\phi^-(t) = c^-(t) = 0$ para todo t e q.t.p em Ω, ou seja, para todo $t \in [0, T]$ temos que

$$\phi(x, t),\ c(x, t) \geq 0 \quad \text{para q.t.p } x \in \Omega.$$

para mostrar que $\phi_0,\ c_0 \leq 1$ q.t.p em Ω implica $\phi(x, t),\ c(x, t) \leq 1$ para todo $t \in [0, T]$ e q.t.p em Ω, basta escolher $v = (\phi - 1)^+$ em (3.1.1) e $w = (c - 1)^+$ em (3.1.2). □

Observação 3.6.2. Como vimos na introdução F_1 e F_2 podem ser escolhidas como polinômios de grau três. Veja também que no problema (3.0.1)

$$D_2(c, \phi) = (v_m/RT)D_1(\phi)c(c - 1)F_2.$$

Entretanto, essas funções não são limitadas, então não podemos aplicar os resultados de existência e unicidade. Mas se supormos que F_1 e F_2 são identicamente nulas fora de $[0, 1]$ e que $D(r, \cdot) = 0$ para todo r fora de $[0, 1]$, como $F_1(0) = F_1(1) = F_2(0) = F_2(1) = D_2(0, \phi) = D_2(1, \phi) = 0$, podemos aplicar os resultados de existência, unicidade e o princípio do máximo, pois as hipóteses (H1)-(H5) são satisfeitas. Já que $0 \leq \phi(t, x),\ \ c(t, x) \leq 1$, segue que c e ϕ não dependem da extensão das funções F_1, F_2 e $D_2(\cdot, \phi)$ fora do intervalo $[0, 1]$.

Capítulo 4

Problema Degenerado

Neste capítulo apresentaremos um resultado de existência e um princípio do máximo para uma extensão do modelo dado no capítulo anterior. A extensão é no sentido de que a equação da concentração neste novo modelo pode se degenerar, isto é, exigimos apenas que $0 \leq D_1(r)$ no lugar de pedir que seja maior ou igual a uma constante positiva. Neste caso a equação da concentração perde o caráter parabólico. Mais precisamente, o modelo considerado é:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta \phi + F_1(\phi) + cF_2(\phi) & \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty), \\[2ex] \dfrac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi)(\nabla c + D_2(c, \phi)\nabla \phi)) & \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty), \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = \dfrac{\partial c}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, +\infty), \\[2ex] \phi(0) = \phi_0, \quad c(0) = c_0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{4.0.1}$$

onde Ω é um domínio aberto e limitado em $\mathbb{R}^d$, $1 \leq d \leq 3$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^∞, n é o campo de vetores unitários e normais a $\partial\Omega$, ϵ é uma constante positiva dada.

Neste capítulo assumiremos o seguinte conjunto de hipóteses sobre as funções $F_1,\ F_2,\ D_1$ e D_2:

(H1') $F_1,\ F_2 \in C(\mathbb{R})$ são funções Lipschitz e limitadas, com

$$|F_i(r)| \leq M_1, \text{ para } i = 1, 2 \text{ e } \forall r \in \mathbb{R}.$$

(H2') $D_1 \in C(\mathbb{R})$ é uma função Lipschitz e limitada, com

$$0 \leq D_1(r) \leq D_1, \quad \forall r \in \mathbb{R},$$

onde D_1 é constante.

(H3') $D_2 \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ é uma função Lipschitz e limitada, com

$$|D_2(r_1, r_2)| \leq M_2, \quad \forall (r_1, r_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Além dessas, são consideradas as seguintes hipóteses adicionais:

(H4') $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$, em $\in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

(H5') $D_2(\cdot, r_2) \equiv 0$ em $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ e para todo $r_2 \in \mathbb{R}$.

Observação 4.0.3. É natural esperar que quando a liga estiver no estado sólido não haja mais variação da concentração, ou seja, que no estado sólido o coeficiente de difusão seja nulo (i.e., $D_1(\phi) = 0$ para $\phi = 0$). Segue daí a importância de se estudar este problema.

Observação 4.0.4. Veja que em (3.3.8) foi fortemente usado que D_1 era maior que uma constante estritamente positiva. Por isso, não se obtém as mesmas estimativas do Lema 3.3.1 para o problema (4.0.1). Apesar disso, será possível demonstrar um resultado de existência. A estratégia usada aqui, consiste essencialmente em somar uma constante positiva ao termo D_1 que está multiplicando ∇c, obtendo assim um problema auxiliar. Então, aplica-se os resultados já conhecidos do capítulo anterior para encontrar uma solução para o problema auxiliar. Finalmente, serão feitas algumas estimativas para a solução possibilitando passar ao limite do problema, obtendo assim uma solução para o problema (4.0.1).

4.1 Problema Auxiliar

Considere

$$D_1^\lambda(r) = D_1(r) + \lambda,$$

onde $0 < \lambda \leq 1$. Então, $D_1^\lambda \in C(\mathbb{R})$ é uma função Lipschitz positiva e limitada, com

$$0 < \lambda \leq D_1^\lambda(r) \leq D_0, \quad \forall\ r \in \mathbb{R},$$

onde $D_0 = D_1 + 1$ é uma constante tanto com relação a r quanto com relação a λ.

Assim, substituindo D_1 que está multiplicando o gradiente de c no problema (4.0.1) por D_1^λ, obtemos o seguinte *problema auxiliar*: encontrar $(\phi^\lambda, c^\lambda)$ satisfazendo

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \phi^\lambda}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta \phi^\lambda + F_1(\phi^\lambda) + c^\lambda F_2(\phi^\lambda) & \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty), \\[2ex]
\dfrac{\partial c^\lambda}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1^\lambda(\phi) \nabla c^\lambda + D_1(\phi^\lambda) D_2(c^\lambda, \phi^\lambda) \nabla \phi^\lambda) & \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty), \\[2ex]
\dfrac{\partial \phi^\lambda}{\partial n} = \dfrac{\partial c^\lambda}{\partial n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, +\infty), \\[2ex]
\phi^\lambda(0) = \phi_0, \quad c^\lambda(0) = c_0 & \text{em} \quad \Omega.
\end{cases}
\tag{4.1.1}
$$

Daqui em diante assumiremos as hipóteses (H1')-(H3') e tomaremos $T > 0$ fixado.

Veja que como as funções D_1 e D_2 são Lipschitz e limitadas, temos que o produto de D_1 com D_2 também é Lipschitz e limitada. Dessa forma, estamos exatamente sobre as hipóteses do problema (3.0.1). Portanto, como uma aplicação direta do Teorema 3.4.3, obtemos o próximo resultado, que garante existência de solução para o problema (4.1.1).

Lema 4.1.1. Suponha que $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e seja $0 < \lambda \leq 1$. Então existe um par de funções $(\phi^\lambda, c^\lambda)$, satisfazendo

$$\phi^\lambda \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)), \tag{4.1.2}$$
$$c^\lambda \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)'), \tag{4.1.3}$$

tal que $\phi^\lambda(0) = \phi_0$, $c^\lambda(0) = c_0$ e

$$\frac{\partial \phi^\lambda}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta \phi^\lambda = F_1(\phi^\lambda) + c^\lambda F_2(\phi^\lambda) \text{ q.t.p em } Q_T, \tag{4.1.4}$$
$$\frac{\partial \phi^\lambda}{\partial n} = 0 \text{ q.t.p em } \partial\Omega \times (0, T), \tag{4.1.5}$$

$$\left\langle \frac{\partial c^\lambda}{\partial t}, v \right\rangle + \int_\Omega (D_1^\lambda(\phi^\lambda) \nabla c^\lambda + D_1(\phi^\lambda) D_2(c^\lambda, \phi^\lambda) \nabla \phi^\lambda) \cdot \nabla v = 0 \tag{4.1.6}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$.

Mais ainda, o próximo lema, segue como aplicação direta do Teorema 3.6.1 e nos dá um princípio do máximo para a solução dada no lema anterior.

Lema 4.1.2. Suponha válidas as hipóteses do lema anterior junto com as hipóteses (H4') e (H5'). Assuma também que

$$\phi_0,\ c_0 \in [0,1] \ \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Então, a solução $(\phi^\lambda, c^\lambda)$ dada pelo lema anterior, satisfaz

$$\phi^\lambda(t),\ c^\lambda(t) \in [0,1]\ \forall\ t \in [0,T] \text{ e q.t.p em } \Omega. \tag{4.1.7}$$

4.2 Estimativas e convergências

Nesta seção vamos denotar por C uma constante positiva que não depende de λ.

Lema 4.2.1. Seja $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Então, existe uma constante positiva C (que não depende de λ), tal que para todo $0 < \lambda \leq 1$, valem as seguintes estimativas:

$$\|\phi^\lambda\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|c^\lambda\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \tag{4.2.1}$$

$$\left\|\frac{\partial \phi^\lambda}{\partial t}\right\|_{L^2(Q_T)} + \int_{Q_T} D_1^\lambda(\phi^\lambda)|\nabla c^\lambda|^2 \leq C, \tag{4.2.2}$$

$$\|\phi^\lambda\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C, \tag{4.2.3}$$

$$\left\|\frac{\partial c^\lambda}{\partial t}\right\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)')} \leq C. \tag{4.2.4}$$

Demonstração. Para demonstrar (4.2.1) escolhemos $v = c^\lambda$ em (4.1.6). Assim, usando o Lema 2.5.31 e integrando sobre $(0,t)$ para $t \in [0,T]$, obtemos

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c^\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega (D_1^\lambda(\phi^\lambda)\nabla c^\lambda + D_1(\phi^\lambda)D_2(c^\lambda,\phi^\lambda)\nabla\phi^\lambda)\cdot\nabla c^\lambda = 0.$$

Então, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato que D_2 é limitada, temos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|c^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega D_1^\lambda(\phi^\lambda)|\nabla c^\lambda|^2 \\
&\quad = \frac{1}{2}\|c_0\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_0^t\int_\Omega D_1(\phi^\lambda)D_2(c^\lambda,\phi^\lambda)\nabla\phi^\lambda\cdot\nabla c^\lambda \qquad (4.2.5)\\
&\quad \leq \frac{1}{2}\|c_0\|^2_{L^2(\Omega)} + M_2\int_0^t\int_\Omega D_1^\lambda(\phi^\lambda)|\nabla\phi^\lambda||\nabla c^\lambda|.
\end{aligned}
$$

Mas, usando a desigualdade de Young com $\eta = 1/2M_2$, obtemos que existe $C > 0$, onde

$$
\begin{aligned}
&M_2\int_0^t\int_\Omega D_1^\lambda(\phi^\lambda)|\nabla\phi^\lambda||\nabla c^\lambda| \\
&\quad \leq \ \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega D_1^\lambda(\phi^\lambda)|\nabla c^\lambda|^2 + \frac{C}{2}\int_0^t\int_\Omega|\nabla\phi^\lambda|^2.
\end{aligned}
$$

Então, substituindo a última desigualdade em (4.2.5), concluímos que existe uma constante C_1 que não depende de λ, tal que

$$
\|c^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega D_1^\lambda(\phi^\lambda)|\nabla c^\lambda|^2 \leq C_1\left(1 + \int_0^t\|\nabla\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}\right), \quad (4.2.6)
$$

q.t.p $t \in [0,T]$.

Agora, multiplicando a equação (4.1.4) por $\partial\phi^\lambda/\partial t + \phi^\lambda$ e integrando sobre $\Omega\times(0,t)$, onde $t\in[0,T]$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t}\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t}\phi^\lambda - \epsilon^2\Delta\phi^\lambda\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t} - \epsilon^2\Delta\phi^\lambda\phi^\lambda\right)\\
&\quad = \int_0^t\int_\Omega(F_1(\phi^\lambda) + c^\lambda F_2(\phi^\lambda))\left(\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t} + \phi^\lambda\right).
\end{aligned}
$$

Então, aplicando integração por partes, segue que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\left(\left\|\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\nabla\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\quad = \int_0^t\int_\Omega(F_1(\phi^\lambda) + c^\lambda F_2(\phi^\lambda))\left(\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t} + \phi^\lambda\right),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\left(\|\phi^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\nabla\phi^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \int_0^t \left(\left\|\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\nabla\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \tag{4.2.7}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|\phi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\nabla\phi_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \int_0^t\int_\Omega (F_1(\phi^\lambda) + c^\lambda F_2(\phi^\lambda))\left(\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t} + \phi^\lambda\right),$$

para todo $t \in [0,T]$.

Mas, usando que F_1 e F_2 são limitadas e aplicando a desigualdade de Young, obtemos que existem constantes positivas C_1, C_2 e C_3 que não dependem de λ, tais que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_\Omega (F_1(\phi^\lambda) + c^\lambda F_2(\phi^\lambda))\left(\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t} + \phi^\lambda\right)\\
&\leq C_1\left(\int_0^t\int_\Omega\left|\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t} + \phi^\lambda\right| + \int_0^t\int_\Omega |c^\lambda|\left|\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t} + \phi^\lambda\right|\right)\\
&\leq C_2\left(1 + \frac{1}{2\eta}\int_0^t\int_\Omega\left|\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t} + \phi^\lambda\right|^2 + \eta\int_0^t \|c^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\leq C_3\left(1 + \frac{1}{\eta}\int_0^t\left\|\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\eta}\int_0^t \|\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} + \eta\int_0^t\|c^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Agora, substituindo a última desigualdade com $\eta = 2C_3$ em (4.2.7), temos que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|\phi^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\nabla\phi^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left(\left\|\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\nabla\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$
$$\leq C\left(1 + \int_0^t \|\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|c^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}\right), \tag{4.2.8}$$

para todo $t \in [0,T]$. Multiplicando (4.2.6) por $\delta > 0$ (que será escolhido de forma conveniente mais tarde) e somando com (4.2.8), obtemos que

$$\begin{aligned}
&\|\phi^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\nabla\phi^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\|c^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad + \int_0^t\left(\left\|\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\nabla\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \delta\int_0^t\int_\Omega D_1^\lambda(\phi^\lambda)|\nabla c^\lambda|^2\\
&\leq C\left(1 + \int_0^t \|\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|c^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \delta C_1\left(1 + \int_0^t \|\nabla\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$. Então, escolhendo $\delta = 2\epsilon^2/C_1$, temos que existe uma constante, que também denotaremos por C, tal que para todo $t \in [0,T]$, vale que

$$\begin{aligned}
&\|\phi^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2\|\nabla\phi^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\|c^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad + \int_0^t \left\|\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\int_0^t\int_\Omega D_1^\lambda(\phi^\lambda)|\nabla c^\lambda|^2 \\
&\quad\leq\ C\left(1+\int_0^t \|\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|c^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \epsilon^2\int_0^t \|\nabla\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Usando a positividade de D_1^λ, segue que existe uma constante, que mais uma vez denotamos por C, tal que para todo $t \in [0,T]$, temos que

$$\begin{aligned}
&\|\phi^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|c^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad\leq C\left(1+\int_0^t (\|\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} + \|c^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)})\right).
\end{aligned}$$

Portanto, usando a desigualdade de Gronwall, concluímos que existe uma constante C, tal que para todo $t \in [0,T]$, temos que

$$\|\phi^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|c^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

O que mostra (4.2.1), isto é , existe uma constante C, tal que

$$\|\phi^\lambda\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|c^\lambda\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.$$

Por outro lado, temos de (4.2.9) que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\|\frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\int_0^T\int_\Omega D_1^\lambda(\phi^\lambda)|\nabla c^\lambda|^2 \\
&\quad\leq\ C(1 + \|\phi^\lambda\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|c^\lambda\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}).
\end{aligned}$$

Então, usando (4.2.1) obtemos (4.2.2).

Para demonstrar (4.2.3) fazemos o produto interno em $L^2(\Omega)$ da equação (4.1.4) com $-\Delta\phi^\lambda$ e integramos sobre $(0,t)$ com $t \in [0,T]$. Então, obtemos

$$-\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial\phi^\lambda}{\partial t}\Delta\phi^\lambda + \epsilon^2\int_0^t\int_\Omega |\Delta\phi^\lambda|^2 = -\int_0^t\int_\Omega (F_1(\phi^\lambda) + c^\lambda F_2(\phi^\lambda))\Delta\phi^\lambda.$$

Integrando por partes (lembrando que $\partial\phi^\lambda/\partial n = 0$ em $\partial\Omega$), usando que F_1 e F_2 são limitadas e a desigualdade de Young, obtemos que existe constante positiva C_1, tal que para qualquer $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2 \int_0^t \|\Delta\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \int_0^t \int_\Omega |(F_1(\phi^\lambda)| + \int_0^t \int_\Omega |c^\lambda||F_2(\phi^\lambda))||\Delta\phi^\lambda| \\
&\leq C_1 \left(1 + \eta \int_0^t \|c^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\eta}\int_0^t \|\Delta\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Agora, escolhendo $\eta = C_1/2\epsilon^2$, segue que existe uma constante C, tal que para todo $t \in [0,T]$, temos

$$\|\nabla\phi^\lambda(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon^2 \int_0^t \|\Delta\phi^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(1 + \int_0^t \|c^\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Usando (4.2.1), segue que existe uma constante, tal que

$$\|\Delta\phi^\lambda\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.$$

Agora, usando o Lema 2.5.20 e a estimativa (4.2.1), obtemos a estimativa (4.2.3), isto é,

$$\|\phi^\lambda\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C.$$

Por último, para mostrar (4.2.4), seja v em (4.1.6) tal que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$, segue, aplicando a desigualdade de Hölder, que existem constantes C_1 e C, tais que

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \frac{\partial c^\lambda}{\partial t}, v\right\rangle\right| &= \left|\int_\Omega (D_1^\lambda(\phi^\lambda)\nabla c^\lambda + D_1(\phi^\lambda)D_2(c^\lambda,\phi^\lambda)\nabla\phi^\lambda)\cdot\nabla v\right| \\
&\leq C_1 \int_\Omega D_1^\lambda(\phi^\lambda)(|\nabla c^\lambda| + |\nabla\phi^\lambda|)|\nabla v| \\
&\leq C\left(\int_\Omega D_1^\lambda(\phi^\lambda)|\nabla c^\lambda|^2 + \int_\Omega |\nabla\phi^\lambda|^2\right)^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Então, usando que $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ para todo $u \in H^1(\Omega)$, aplicando o supremo com $v \in H^1(\Omega)$ tal que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$ e integrando sobre $[0,T]$, segue que existe uma constante C, tal que

$$\left\|\frac{\partial c^\lambda}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} \leq C\left(\int_{Q_T} D_1^\lambda(\phi^\lambda)|\nabla c^\lambda|^2 + \|\phi^\lambda\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right).$$

Finalmente, usando as estimativas (4.2.1) e (4.2.2) na última desigualdade obtemos a estimativa (4.2.4). $\square$

Observação 4.2.2. Como as estimativas do último lema valem para todo $\lambda \in (0,1]$, em particular valem para todo $\lambda = 1/n$ onde $n \in \mathbb{N}$. Daqui em diante vamos denotar

$$\phi^{1/n} := \phi_n,\ c^{1/n} := c_n \text{ e } D_1^{1/n} := D_{1n},$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

Lema 4.2.3. Sejam $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e (c_n, ϕ_n) solução de (4.1.1) dada pelo Lema 4.1.1. Então existem

$$\phi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$c \in L^2(Q_T) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)')$$

e subsequências de ϕ_n e c_n (que ainda denotamos por ϕ_n e c_n), tais que quando $n \to +\infty$,

$$\phi_n \rightharpoonup \phi \quad \text{em } L^2(0,T;H^2(\Omega)), \tag{4.2.10}$$
$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{em } L^2(Q_T), \tag{4.2.11}$$
$$\phi_n \to \phi \quad \text{em } L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega)), \tag{4.2.12}$$
$$c_n \rightharpoonup c \quad \text{em } L^2(Q_T), \tag{4.2.13}$$
$$\frac{\partial c_n}{\partial t} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{\partial c}{\partial t} \quad \text{em } L^2(0,T;H^1(\Omega)') \approx L^2(0,T;H^1(\Omega))', \tag{4.2.14}$$
$$c_n \to c \quad \text{em } C([0,T];H^1(\Omega)'). \tag{4.2.15}$$

Além disso, se supormos que as hipóteses (H4') e (H5') valem e que $\phi_0,\ c_0 \in [0,1]$ q.t.p em Ω, temos que

$$c \in L^\infty(Q_T)$$

e que existe subsequência c_n, tal que

$$c_n \overset{*}{\rightharpoonup} c \ \text{ em } L^\infty(Q_T). \tag{4.2.16}$$

Demonstração. Por (4.2.1)-(4.2.3) temos que a sequência ϕ_n é limitada em

$$W_1 = \left\{ u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \right\}$$

e em

$$W_2 = \left\{ u \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \right\}.$$

Pelo Corolário 2.5.17, temos que $H^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^1(\Omega)$. Então, pelo primeiro item do Teorema 2.5.30, todo conjunto limitado em W_1 é relativamente compacto em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Além disso, como $H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, pelo segundo item do Teorema 2.5.30, temos que qualquer conjunto limitado em W_2 é relativamente compacto em $C([0,T];L^2(\Omega))$. Segue que, existem $\phi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e uma subsequência de ϕ_n que também denotaremos por ϕ_n, tal que, quando $n \to +\infty$,

$$\phi_n \to \phi \ \text{ em } L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T],L^2(\Omega)).$$

Como $L^2(0,T;H^2(\Omega))$ e $L^2(Q_T)$ são reflexivos, segue de (4.2.3) e (4.2.2) que existem $\bar{\phi} \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ e $\varphi \in L^2(Q_T)$ e uma subsequência da última subsequência de ϕ_n, tal que

$$\begin{aligned} &\phi_n \rightharpoonup \bar{\phi} \quad \text{em } L^2(0,T;H^2(\Omega)), \\ &\frac{\partial \phi_n}{\partial t} \rightharpoonup \varphi \quad \text{em } L^2(Q_T). \end{aligned}$$

É claro que $\bar{\phi} = \phi$, pois em particular $\phi_n \rightharpoonup \phi$ em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e o limite fraco é único.

Agora vamos mostrar que $\partial\phi/\partial t = \varphi$, ou seja,

$$\int_0^T \varphi\psi = -\int_0^T \phi\psi' \ \text{ para todo } \psi \in C_c^\infty(0,T).$$

Temos que para todo $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $w \in L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial \phi_n}{\partial t}\psi w = -\int_\Omega \int_0^T \phi_n \psi' w.$$

Mas, como $\partial\phi_n/\partial t \rightharpoonup \varphi \quad$ em $L^2(Q_T)$, $\phi_n \rightharpoonup \phi \quad$ em $L^2(0,T;H^2(\Omega))$, $\psi w \in L^2(Q_T)$ e $\psi' w \in L^2(0,T;H^2(\Omega))'$, aplicando o limite com $n \to +\infty$, temos

$$\int_\Omega \int_0^T \varphi\psi w = -\int_\Omega \int_0^T \phi\psi' w, \ \forall\ \psi \in C_c^\infty(0,T) \text{ e } \forall\ w \in L^2(\Omega).$$

Em particular a última igualdade vale para todo $w \in C_c^\infty(\Omega)$, portanto, usando o Lema 2.5.6, segue que

$$\int_0^T \varphi\psi = -\int_0^T \phi\psi', \ \forall\ \psi \in C_c^\infty(0,T).$$

Portanto, estão demostrados (4.2.10), (4.2.11) e (4.2.12).

Agora, para demonstrarmos (4.2.13), (4.2.14) e (4.2.15), veja que por (4.2.1) e (4.2.4) temos que a sequência c_n é limitada em

$$W_3 = \left\{ u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)') \right\}.$$

Pelo teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema 2.5.13), $H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, então pelo teorema de Schauder (Teorema 2.4.4), $L^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^1(\Omega)'$. Assim, pelo Teorema 2.5.30, qualquer conjunto limitado em W_3 é relativamente compacto em $C([0,T];H^1(\Omega)')$. Então, existem

$$c \in L^2(Q_T) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)')$$

e uma subsequência de c_n, satisfazendo (4.2.13), (4.2.14) e (4.2.15).

Finalmente, supondo válidas as hipóteses (H4') e (H5') e que $\phi_0,\ c_0 \in [0,1]$ q.t.p em Ω, segue do Lema 4.1.2 que a sequência c_n é limitada em $L^\infty(Q_T)$. Então, existem $c \in L^\infty(Q_T)$ e uma subsequência c_n, tal que quando $n \to +\infty$,

$$c_n \overset{*}{\rightharpoonup} c \ \text{ em } L^\infty(Q_T).$$

$\square$

Com esses resultados de convergência, em especial por causa das convergências fortes (4.2.12) e (4.2.15), podemos demonstrar os próximos lemas que fará com que sejamos capazes de tomar o limite na parte não linear do problema (4.1.1).

Lema 4.2.4. Seja $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, onde $\phi_0,\ c_0 \in [0,1]$ q.t.p em Ω e seja (ϕ_n, c_n) solução do problema (4.1.1) dada pelo Lema 4.1.1. Então, existem subsequências de ϕ_n e de c_n (que também denotaremos por ϕ_n e c_n), tais que quando $n \to +\infty$, temos

$$F_i(\phi_n) \to F_i(\phi) \text{ em } L^p(Q_T),\ i = 1,2,\ \forall\, p \in [1, +\infty), \tag{4.2.17}$$
$$c_n F_2(\phi_n) \rightharpoonup c F_2(\phi) \text{ em } L^2(Q_T), \tag{4.2.18}$$
$$D_1(\phi_n) \to D_1(\phi) \text{ em } L^2(0,T; H^1(\Omega)), \tag{4.2.19}$$
$$c_n D_1(\phi_n) \rightharpoonup c D_1(\phi) \text{ em } L^2(Q_T), \tag{4.2.20}$$
$$c_n \nabla D_1(\phi_n) \rightharpoonup c \nabla D_1(\phi) \text{ em } L^1(Q_T)^d. \tag{4.2.21}$$

Demonstração. De (4.2.12) temos que $\phi_n \to \phi$ q.t.p em Q_T. Então, como F_i é Lipschitz, temos que $|F_i(\phi_n) - F_i(\phi)| \to 0$ q.t.p em Q_T, em particular $|F_i(\phi_n) - F_i(\phi)|^p \to 0$ q.t.p em Q_T para todo $p \in [1, +\infty)$. Além disso, segue de (H1') que $|F_i(\phi_n)|^p \leq C$. Então aplicando o teorema da convergência dominada (Teorema 2.5.1), obtemos que

$$\|F_i(\phi_n) - F_i(\phi)\|^p_{L^p(Q_T)} = \int_{Q_T} |F_i(\phi_n) - F_i(\phi)|^p \to 0,$$

donde segue (4.2.17).

Para demonstrar (4.2.18) tome $v \in L^2(Q_T)$, então temos

$$\int_{Q_T} (c_n F_2(\phi_n) - c F_2(\phi))v = \int_{Q_T} (c_n - c) F_2(\phi) v + \int_{Q_T} c_n (F_2(\phi_n) - F_2(\phi))v.$$

Como $F_2(\phi)v \in L^2(Q_T)$ (pois F_2 é limitada), segue de (4.2.13) que o primeiro termo do lado direito tende a zero quando $n \to +\infty$. Usando que $0 \leq c_n \leq 1$ (veja Lema 4.1.2) e (4.2.17), vemos que o segundo termo do lado direito também vai a zero.

Como D_1 é Lipschitz, pelo Teorema 2.5.25 temos que para cada $t \in [0, T]$ o operador $D_1(\cdot)$ é contínuo de $H^1(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$. Isso implica que

$$\|D_1(\phi_n) - D_1(\phi)\|^2_{H^1(\Omega)} \to 0.$$

Então, integrando em t sobre $[0, T]$, temos que

$$\|D_1(\phi_n) - D_1(\phi)\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} = \int_0^T \|D_1(\phi_n) - D_1(\phi)\|^2_{H^1(\Omega)} \to 0.$$

Donde segue (4.2.19).

A demonstração de (4.2.20) é análoga a de (4.2.18).

Seja $v \in L^\infty(Q_T)^d$. Então, temos que

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} (c_n \nabla D_1(\phi_n) - c\nabla D_1(\phi)) \cdot v \qquad (4.2.22) \\ &= \int_{Q_T} (c_n - c)\nabla D_1(\phi) \cdot v + \int_{Q_T} c_n(\nabla D_1(\phi_n) - \nabla D_1(\phi)) \cdot v. \end{aligned}$$

Mas, como $D_1 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ (veja Lema 2.5.24) e usando a desigualdade de Hölder, segue que existem constantes positivas C_1 e C_2, tais que

$$\begin{aligned} \|\nabla D_1(\phi) \cdot v\|^2_{L^2(Q_T)} &= \|D_1'(\phi)\nabla\phi \cdot v\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C_1\|\nabla\phi \cdot v\|^2_{L^2(Q_T)} \\ &\leq C_1\|v\|^2_{L^\infty(Q_T)}\|\nabla\phi\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C_2. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\nabla D_1(\phi) \cdot v \in L^2(Q_T)$. Como $c_n \rightharpoonup c$ em $L^2(Q_T)$, segue que o primeiro termo do lado direito de (4.2.22) tende a zero. Usando que $\nabla D_1(\phi_n) \to \nabla D_1(\phi)$ em $L^2(Q_T)$ e que $0 \leq c_n \leq 1$ q.t.p em Q_T, segue que o segundo termo do lado direito de (4.2.22) tende a zero. $\square$

Como não sabemos se $c(t)$ pertence a $H^1(\Omega)$, não faz sentido falar em "∇c". Então, obviamente não devemos esperar que

$$D_{1n}(\phi_n)\nabla c_n \rightharpoonup D_1(\phi)\nabla c \text{ em } L^2(Q_T)^2.$$

A título de motivação, suponha que $c(t) \in H^1(\Omega)$ q.t.p $t \in (0, T)$. Então,

$$\nabla(D_1(\phi)c) = c\nabla D_1(\phi) + D_1(\phi)\nabla c \text{ q.t.p em } Q_T,$$

ou seja,

$$D_1(\phi)\nabla c = \nabla(D_1(\phi)c) - c\nabla D_1(\phi) \text{ q.t.p em } Q_T.$$

Veremos que mesmo quando $c(t) \notin H^1(\Omega)$ o lado direito da última igualdade faz sentido no sentido das distribuições.

Assim, faz sentido conjecturar que

$$D_{1n}(\phi_n)\nabla c_n \rightharpoonup \nabla(D_1(\phi)c) - c\nabla D_1(\phi) \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T).$$

De fato, é isso que vamos mostrar no próximo lema.

Lema 4.2.5. Sobre as mesmas hipóteses do lema anterior temos que quando $n \to +\infty$,

$$D_{1n}(\phi_n)\nabla c_n \rightharpoonup J \quad \text{em } L^2(Q_T)^d, \qquad (4.2.23)$$

onde

$$J = \nabla(D_1(\phi)c) - c\nabla D_1(\phi). \qquad (4.2.24)$$

Demonstração. Devido a (4.2.2), existe uma constante C, tal que

$$\begin{aligned}
\|D_{1n}(\phi_n)\nabla c_n\|^2_{L^2(Q_T)} &= \int_{Q_T} |D_{1n}(\phi_n)\nabla c_n|^2 \\
&\leq D_0 \int_{Q_T} D_{1n}(\phi^\lambda)|\nabla c_n|^2 \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Como $L^2(Q_T)$ é reflexivo, todo sequência limitada em $L^2(Q_T)$ tem subsequência convergente na topologia fraca. Então, existem $J \in L^2(Q_T)^d$ e uma subsequência de $D_{1n}(\phi_n)\nabla c_n$ (que ainda denotamos por $D_{1n}(\phi_n)\nabla c_n$), tais que

$$D_{1n}(\phi_n)\nabla c_n \rightharpoonup J \quad \text{em } L^2(Q_T)^d. \tag{4.2.25}$$

Como $D_1(\phi_n) \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ e $c_n \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, temos que $D_1(\phi_n)c_n \in L^2(0,T;W^{1,4/3}(\Omega))$ (veja o Corolário 2.5.27 na página 24). Então,

$$\nabla(D_1(\phi_n)c_n) = c_n\nabla D_1(\phi_n) + D_1(\phi_n)\nabla c_n \text{ q.t.p em } Q_T. \tag{4.2.26}$$

Agora, como $0 \leq c_n \leq 1$ q.t.p em Q_T e $u_n = D_1(\phi_n)c_n \in L^2(Q_T)$, temos que T_{u_n}, dado por (2.5.1), é uma distribuição. Seja $\varphi \in C_c^\infty(Q_T)$, então, pela definição de derivada de uma distribuição, segue que para todo $1 \leq i \leq d$

$$\left\langle \frac{\partial T_{u_n}}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T_{u_n}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\int_\Omega D_1(\phi_n)c_n\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Portanto, usando (4.2.20), obtemos

$$\left\langle \frac{\partial T_{u_n}}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \to -\int_\Omega D_1(\phi)c\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\left\langle T_u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T_u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle,$$

onde $u = D_1(\phi)c$. Ou seja,

$$\nabla(D_1(\phi_n)c_n) \to \nabla(D_1(\phi)c) \;\text{ em } \mathcal{D}'(Q_T), \tag{4.2.27}$$

onde para cada $1 \leq i \leq d$, estamos identificando $\dfrac{\partial T_{u_n}}{\partial x_i}$ com $\dfrac{\partial(D_1(\phi_n)c_n)}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial T_u}{\partial x_i}$ com $\dfrac{\partial(D_1(\phi)c)}{\partial x_i}$. Além disso, segue de (4.2.21), que

$$c_n\nabla D_1(\phi_n) \to c\nabla D_1(\phi) \;\text{ em } \mathcal{D}'(Q_T).$$

Então, (4.2.26) junto com (4.2.27), implica que

$$D_1(\phi_n)\nabla c_n \to \nabla(D_1(\phi)c) - c\nabla D_1(\phi) \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T). \tag{4.2.28}$$

Lembando que $D_{1n} = D_1^{1/n} = D_1 + 1/n$, temos que

$$D_{1n}(\phi_n)\nabla c_n = D_1(\phi_n)\nabla c_n + \frac{1}{n}\nabla c_n.$$

Mas como D_1 é não negativo, obtemos de (4.2.2) que

$$\frac{1}{n}\int_{Q_T} |\nabla c_n|^2 \leq \int_{Q_T} D_{1n}|\nabla c_n|^2 \leq C,$$

ou seja,

$$\left\|\frac{1}{n}\nabla c_n\right\|_{L^2(Q_T)} \leq \frac{C}{n}.$$

Portanto, quando $n \to +\infty$

$$\frac{1}{n}\nabla c_n \to 0 \text{ em } L^2(Q_T)^d.$$

Então, concluímos de (4.2.28) que

$$D_{1n}(\phi_n)\nabla c_n \to \nabla(D_1(\phi)c) - c\nabla D_1(\phi) \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T).$$

Como o limite em $\mathcal{D}'(Q_T)$ é único, segue de (4.2.25) que $J = \nabla(D_1(\phi)c) - c\nabla D_1(\phi)$. $\square$

Observação 4.2.6. Provamos que $D_1(\phi_n)c_n \in L^2(0,T;W^{1,4/3}(\Omega))$. Na verdade, temos mais que isso. De fato, pelo Lema 4.1.2, temos que $0 \leq c_n \leq 1$ q.t.p em Q_T, ademais, temos que $D_1 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Então, de (4.2.26), temos

$$\begin{aligned}\|\nabla(D_1(\phi_n)c_n)\|_{L^2(Q_T)} &= \|D_1'(\phi_n)\nabla\phi_n c_n + D_1(\phi_n)\nabla c_n\|_{L^2(Q_T)} \\ &\leq \|\nabla\phi_n\|_{L^2(Q_T)} + \|\nabla c_n\|_{L^2(Q_T)}.\end{aligned}$$

Mas, como $\phi_n,\ c_n \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, segue que $D_1(\phi_n)c_n \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

Lema 4.2.7. Sobre as hipóteses dos dois últimos lemas, temos que dado $T > 0$, existe uma constante positiva C que não depende de n, tal que

$$\|D_1(\phi_n)c_n\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C, \tag{4.2.29}$$

e quando $n \to +\infty$, temos que

$$D_1(\phi_n)c_n \to D_1(\phi)c \text{ em } L^2(Q_T), \tag{4.2.30}$$

$$D_1(\phi_n)D_2(c_n,\phi_n)\nabla\phi_n \rightharpoonup D_1(\phi)D_2(c,\phi)\nabla\phi \text{ em } L^1(Q_T)^d. \tag{4.2.31}$$

Demonstração. De (4.2.26), temos que

$$\|\nabla(D_1(\phi_n)c_n)\|^2_{L^2(Q_T)} \leq \int_{Q_T} |D_1(\phi_n)\nabla c_n|^2 + \int_{Q_T} |c_n D_1'(\phi_n)\nabla\phi_n|^2.$$

Então, usando que $D_1 \leq D_{1n} \leq D_0$, $D_1 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $0 \leq c_n \leq 1$ q.t.p em Q_T e a estimativa (4.2.2), obtemos que existem constantes positivas C_1, C_2 e C que não dependem de n, tais que

$$\begin{aligned}\|\nabla(D_1(\phi_n)c_n)\|^2_{L^2(Q_T)} &\leq C_1\left(D_0\int_{Q_T} D_{1n}(\phi_n)|\nabla c_n|^2 + \int_{Q_T}|c_n\nabla\phi_n|^2\right)\\ &\leq C_2\left(1+\|\nabla\phi_n\|^2_{L^2(Q_T)}\right) \leq C.\end{aligned}$$

O que conclui a prova de (4.2.29).

Como $D_1(\phi_n(t))c_n(t) - D_1(\phi(t))c(t) \in H^1(\Omega)$ q.t.p $t \in (0,T)$, podemos aplicar o Corolário 2.5.14, então temos que para todo $\eta > 0$ existe $C_\eta > 0$, tal que para q.t.p $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned}&\|D_1(\phi_n(t))c_n(t) - D_1(\phi(t))c(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\quad\leq \eta\|D_1(\phi_n(t))c_n(t) - D_1(\phi(t))c(t)\|_{H^1(\Omega)}\\ &\quad\quad + C_\eta\|D_1(\phi_n(t))c_n(t) - D_1(\phi(t))c(t)\|_{H^1(\Omega)'}.\end{aligned}$$

Então, elevando ao quadrado e integrando sobre $(0,T)$, obtemos

$$\begin{aligned}&\|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi)c\|_{L^2(Q_T)}\\ &\quad\leq \eta\|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi)c\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + C_\eta\|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi)c\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')}.\end{aligned}$$

Além disso, usando que D_1 é limitada e que $0 \leq c_n \leq 1$ q.t.p em Q_T, segue que existe uma constante positiva $C_1 > 0$, tal que

$$\begin{aligned}&\|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi)c\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')}\\ &\quad\leq \|D_1(\phi_n)(c_n - c)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} + \|c_n(D_1(\phi_n) - D_1(\phi))\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')}\\ &\quad\leq C_1\left(\|c_n - c\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} + \|D_1(\phi_n) - D_1(\phi)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')}\right).\end{aligned}$$

Então, as duas últimas desigualdades juntas, nos dá que para todo $\eta > 0$, existe C'_η, de tal forma que

$$\begin{aligned}&\|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi)c\|_{L^2(Q_T)}\\ &\quad\leq C'_\eta\left(\|c_n - c\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} + \|D_1(\phi_n) - D_1(\phi)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')}\right)\\ &\quad\quad + \eta\|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi)c\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}.\end{aligned}$$

Devido a (4.2.29) e como $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ é reflexivo, $D_1(\phi_n)c_n$ converge fraco em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Mas, por (4.2.20) e como o limite em $\mathcal{D}'(Q_T)$ é único, temos que $D_1(\phi_n)c_n$ converge fraco para $D_1(\phi)c \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Então, existe uma constante C_2 que não depende de n, tal que

$$\begin{aligned}&\|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi)c\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\\ &\qquad \le \|D_1(\phi_n)c_n\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|D_1(\phi)c\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \le C_2.\end{aligned}$$

Dessa forma, para todo $\eta > 0$, existe C'_η, tal que

$$\begin{aligned}&\|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi)c\|_{L^2(Q_T)}\\ &\quad \le \quad \eta C_2 + C'_\eta \left(\|c_n - c\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} + \|D_1(\phi_n) - D_1(\phi)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')}\right).\end{aligned}$$

Fixado $\epsilon > 0$, podemos escolher η de tal forma que $\eta C_2 \le \epsilon/2$, e então

$$\begin{aligned}&\|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi)c\|_{L^2(Q_T)}\\ &\quad \le \quad \frac{\epsilon}{2} + C'_\eta \left(\|c_n - c\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} + \|D_1(\phi_n) - D_1(\phi)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')}\right).\end{aligned}$$

Como sabemos que $C([0,T];H^1(\Omega)') \subset L^2(0,T;H^1(\Omega)')$, $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \subset L^2(0,T;H^1(\Omega)')$ e que as inclusões são contínuas, temos que existe uma constante positiva C_3, tal que

$$\begin{aligned}&\|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi)c\|_{L^2(Q_T)}\\ &\quad \le \quad \frac{\epsilon}{2} + C_3 \left(\|c_n - c\|_{C([0,T];H^1(\Omega)')} + \|D_1(\phi_n) - D_1(\phi)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right).\end{aligned}$$

Agora, pelas convergências fortes (4.2.15) e (4.2.19), segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi)c\|_{L^2(Q_T)} \le \epsilon \ \text{ para todo } n > n_0.$$

Portanto, como queríamos

$$D_1(\phi_n)c_n \to D_1(\phi)c \ \text{ em } L^2(Q_T).$$

Para mostrar (4.2.31), seja $v \in L^\infty(Q_T)^d$, então

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} (D_1(\phi_n)D_2(c_n,\phi_n)\nabla\phi_n - D_1(\phi)D_2(c,\phi)\nabla\phi)\cdot v\\ &\quad = \int_{Q_T} D_1(\phi_n)\left(D_2(c_n,\phi_n) - D_2(c,\phi)\right)\nabla\phi\cdot v\\ &\qquad + \int_{Q_T} \left(D_1(\phi_n) - D_1(\phi)\right)D_2(c,\phi)\nabla\phi\cdot v\\ &\qquad + \int_{Q_T} D_1(\phi_n)D_2(c_n,\phi_n)(\nabla\phi_n - \nabla\phi)\cdot v. \qquad (4.2.32)\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder e o fato que D_1 e D_2 são limitadas, obtemos que existem constantes positivas C_1 e C_2 que não dependem de n, tais que

$$\left|\int_{Q_T} \left(D_1(\phi_n) - D_1(\phi)\right) D_2(c,\phi)\nabla\phi\cdot v\right| \leq C_1\|D_1(\phi_n) - D_1(\phi)\|_{L^2(Q_T)}\|\nabla\phi\|_{L^2(Q_T)}$$

e

$$\left|\int_{Q_T} D_1(\phi_n)D_2(c_n,\phi_n)(\nabla\phi_n - \nabla\phi)\cdot v\right| \leq C_2\|\nabla\phi_n - \nabla\phi\|_{L^2(Q_T)}.$$

Então, usando (4.2.12) e (4.2.19), concluímos que os dois últimos termos em (4.2.32) convergem a zero quando $n \to +\infty$.

Agora, usando que D_2 é Lipschitz e o fato que D_1 é uma função não negativa e limitada, obtemos que existe uma constate positiva C_1 que não depende de n, tal que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{Q_T} D_1(\phi_n)\left(D_2(c_n,\phi_n) - D_2(c,\phi)\right)\nabla\phi\cdot v\right| \\
&\leq \int_{Q_T} D_1(\phi_n)\left(|c_n - c| + |\phi_n - \phi|\right)|\nabla\phi||v| \\
&\leq C_1\left(\int_{Q_T}|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi_n)c||\nabla\phi| + \int_{Q_T}|\phi_n - \phi||\nabla\phi|\right) \\
&\leq C_1\left(\int_{Q_T}|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi)c||\nabla\phi| + \int_{Q_T}|D_1(\phi) - D_1(\phi_n)||c||\nabla\phi|\right) \\
&\quad + C_1\left(\int_{Q_T}|\phi_n - \phi||\nabla\phi|\right) \\
&\leq C_1\left(\|D_1(\phi_n)c_n - D_1(\phi)c\|_{L^2(Q_T)}\|\nabla\phi\|_{L^2(Q_T)}\right) \\
&\quad + C_1\left(\|D_1(\phi) - D_1(\phi_n)\|_{L^2(Q_T)}\|c\|_{L^\infty(Q_T)}\|\nabla\phi\|_{L^2(Q_T)}\right) \\
&\quad + C_1\left(\|\phi_n - \phi\|_{L^2(Q_T)}\|\nabla\phi\|_{L^2(Q_T)}\right),
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder. Agora, pelo fato que $c \in L^\infty(Q_T)$ e das convergências (4.2.30), (4.2.19) e (4.2.12), concluímos que o primeiro termo do lado direito de (4.2.32) também converge a zero quando $n \to +\infty$. Assim, quando $n \to +\infty$,

$$\int_{Q_T}\left(D_1(\phi_n)D_2(c_n,\phi_n)\nabla\phi_n - D_1(\phi)D_2(c,\phi)\nabla\phi\right)\cdot v \to 0,$$

para todo $v \in L^\infty(Q_T)^d$. O que mostra (4.2.31). $\square$

4.3 Solução para o problema degenerado

Com os resultados obtidos nas seções anteriores, podemos demonstrar o seguinte teorema, que garante existência de solução para o problema (4.0.1).

Teorema 4.3.1. Seja $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com $\phi_0,\ c_0 \in [0,1]$ q.t.p em Ω. Então, sobre as hipóteses (H1')-(H5'), existe uma tripla (ϕ, c, J), satisfazendo

$$\begin{aligned}
&\phi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)),\\
&c \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)'),\\
&J \in L^2(Q_T)^d,
\end{aligned}$$

tal que $\phi(0) = \phi_0$, $c(0) = c_0$, $J = \nabla(D_1(\phi)c) - c\nabla D_1(\phi)$ e

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta\phi = F_1(\phi) + cF_2(\phi) \text{ q.t.p em } Q_T, \tag{4.3.1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ q.t.p em } \partial\Omega \times (0,T), \tag{4.3.2}$$

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, v \right\rangle + \int_\Omega (J + D_1(\phi)D_2(c,\phi)\nabla\phi)\cdot\nabla v \mathrm{dx} = 0, \tag{4.3.3}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$.

Demonstração. Vamos passar ao limite no problema auxiliar (4.1.1). Se $v \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, de (4.1.4), temos que

$$\int_{Q_T} \frac{\partial \phi_n}{\partial t} v - \epsilon^2 \int_{Q_T} \Delta\phi_n v = \int_{Q_T} (F_1(\phi_n) + c_n F_2(\phi_n))v.$$

Aplicando integração por partes e usando (4.1.5), obtemos

$$\int_{Q_T} \frac{\partial \phi_n}{\partial t} v + \epsilon^2 \int_{Q_T} \nabla\phi_n \cdot \nabla v = \int_{Q_T} (F_1(\phi_n) + c_n F_2(\phi_n))v.$$

Então, tomando o limite quando $n \to +\infty$, usando (4.2.11), (4.2.10), (4.2.17) e (4.2.18), segue que para todo $v \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$

$$\int_{Q_T} \frac{\partial \phi}{\partial t} v + \epsilon^2 \int_{Q_T} \nabla\phi \cdot \nabla v = \int_{Q_T} (F_1(\phi) + cF_2(\phi))v. \tag{4.3.4}$$

Em particular a última igualdade vale para todo $v \in C_c^\infty(Q_T)$. Assim, aplicando integração por partes, obtemos

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta \phi - (F_1(\phi) + cF_2(\phi)) \right) v = 0, \ \forall\, v \in C_c^\infty(Q_T).$$

Portanto, usando o Lema 2.5.6, segue (4.3.1). Por outro lado, aplicando integração por partes em (4.3.4), inferimos que

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon^2 \Delta \phi - (F_1(\phi) + cF_2(\phi)) \right) v + \int_{Q_T} \frac{\partial \phi}{\partial n} v = 0, \ \forall\, v \in L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Mas, por (4.3.1) segue que

$$\int_{Q_T} \frac{\partial \phi}{\partial n} v = 0 \ \forall\, v \in L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Donde segue (4.3.2).

Agora, seja $f \in C_c^\infty(0,T)$. Então, multiplicando (4.1.6) por f e integrando sobre $(0,T)$, temos em particular que

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial c_n}{\partial t}, fv \right\rangle + \int_{Q_T} (D_{n1}(\phi_n)\nabla c_n + D_1(\phi_n) D_2(c_n,\phi_n)\nabla \phi_n) \cdot \nabla(fv) = 0,$$

para todo $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Como em particular $fv \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e $\nabla(fv) \in L^\infty(Q_T)^d$, segue de (4.2.14), (4.2.31) e (4.2.23) que

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, fv \right\rangle + \int_{Q_T} (J + D_1(\phi) D_2(c,\phi)\nabla\phi) \cdot \nabla(fv) = 0,$$

para todo $f \in C_c^\infty(0,T)$ e todo $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Portanto,

$$\int_0^T \left(\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, v \right\rangle + \int_\Omega (J + D_1(\phi) D_2(c,\phi)\nabla\phi) \cdot \nabla v \right) f = 0,$$

para todo $f \in C_c^\infty(0,T)$ e todo $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Dessa forma aplicando o Lema 2.5.6 e lembrando que $C^\infty(\bar{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$ (veja Teorema 2.5.9), concluímos que vale (4.3.3). Agora, de (4.2.12) e (4.2.15), segue que

$$\phi_n(0) \to \phi(0) \text{ em } L^2(\Omega)$$

e

$$c_n(0) \to c(0) \text{ em } H^1(\Omega)'.$$

Mas, do Lema 4.1.1, $\phi_n(0) = \phi_0$ e $c_n(0) = c_0$. Então, segue que $\phi(0) = \phi_0$ e $c(0) = c_0$. $\square$

Além disso, como pode ser visto no próximo teorema, sobre as mesmas hipóteses do teorema anterior temos um princípio do máximo para o problema (4.0.1).

Teorema 4.3.2. Sejam $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com $\phi_0,\ c_0 \in [0,1]$ q.t.p em Ω. Então, sobre as hipóteses (H1')-(H5'), a solução (ϕ, c) dada pelo Teorema anterior, satisfaz

$$0 \leq \phi, \quad c \leq 1 \text{ q.t.p em } Q_T.$$

Demonstração. Passando a uma subsequência de ϕ_n, segue de (4.2.12) que $\phi_n(t,x) \to \phi(t,x)$ q.t.p em Q_T. Então, tomando o limite quando $n \to +\infty$ em

$$0 \leq \phi_n(t,x) \leq 1,$$

obtemos,

$$0 \leq \phi(t,x) \leq 1 \text{ q.t.p em } Q_T.$$

Agora, devido a (4.2.16) e a Proposição 2.4.1, temos que

$$\|c\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \liminf \|c_n\|_{L^\infty(Q_T)} \leq 1.$$

Portanto, $c \leq 1$ q.t.p em Q_T. Além disso, limite fraco de função positiva q.t.p é uma função positiva q.t.p, ou seja, de (4.2.13) segue que $c \geq 0$ q.t.p em Q_T. $\square$

Bibliografia

[1] Akhlaghi Amiri, H. A., Hamouda, A. A., *Evaluation of level set and phase field methods in modeling two phase flow with viscosity contrast through dual-permeability porous medium*, International Journal of Multiphase Flow 52 (2013) $22-34$.

[2] Brezis, H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equation*, Springer, New York, 2011.

[3] Caginalp, G., *An analysis of a phase-field model of a free boundary*, Arch. Rational Mech. Anal. 92, 205-245 (1986).

[4] Cavalcanti, M. M., Cavalcanti, V. N. D., *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev*, Eduen, Maringá, 2009.

[5] Cazenave, T., Haraux, A., *An Introduction to Semilinear Evolution Equation*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[6] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, American Matematical Society, 2002.

[7] Folland, G. B., *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press, Princeton, 1995.

[8] Folland, G. B., *Real analysis, modern techniques and their application*, John Wiley & Sons, 1999.

[9] Grisvard, P., *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman Publishing Limited, London, 1985.

[10] Henry, D., *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lectures Notes in Mathematics*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

[11] Jost, J., *Partial differential equations*, Springer, 1998.

[12] Kavian, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer, Paris, 1993.

[13] Kobayashi, R., *Modeling and numerical simulations of denditic crystal growth*, Physica D 63 (1993) 410 − 423.

[14] Lin, Y., Skjetne, P., Carlson, A., *Phase field modeling of microstructure evolution in steels*, International Journal of Multiphase Flow 45 (2012) 1 − 11.

[15] Militzer, M., *Phase field modeling of microstructure evolution in steels*, Current Opinion in Solid State and Materials Science 15 (2011) 106−115.

[16] Provatas, N., Elder, K., *Phase-field methods in materials science and engineering*, Wiley-VCH, 2010.

[17] Rappaz, J., Scheid, J. F., *Existence of solutions to a phase-field model for the isothermal solidification process of a binary alloy*, Math. Methods Appl. Sci. 23 (6) (2000) 491 − 513.

[18] Scheid, J. F., *Global solutions to a degenerate solutal phase-field model for the solidfication of a binary alloy*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 5 (2004) 207 − 217.

[19] Sotomayor, J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Rio de Janeiro, 1979.

[20] Temam, R., *Navier-Stokes Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[21] Simon, J., *Compact sets in the space* $L^p(0, T; B)$, Ann. Mat. Pura Apll., 146 (1987) 65 − 96.

[22] Valent, T., *A property of multiplication in Sobolev space*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 74 (1985) 63 − 73.

[23] Warren, J. A., Boettinger, W. J., *Prediction of dendritic growth and microsegregation patterns in a binary alloy using the phase-field method*, Acta Metall. Mater. 43 (2) (1995) 689 − 703.

[24] Wheeler, A. A., Boettinger, W. J., McFadden, G. B., *Phase-field model for isotermal phase transition in binary alloys*, Phys. Rev. A 45 (10) (1992).