IDEAIS PRIMOS E RADICAIS EM EXTENSÕES DE ANÉIS

"IDEAIS PRIMOS E RADICAIS EM EXTENSÕES DE ANÉIS"

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Manuel José Malásquez Negrón e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 23 de Março de 1992

Prof. Dr. _____

AGRADECIMENTO

Penso que qualquer frase de gratidão é realmente pouco para agradecer à dedicação, o incentivo e o apoio recibidos do professor Miguel Ferrero durante todo este caminho percorrido chamado Doutorado. Mesmo assim, neste momento, só posso dizer muito obrigado, professor Miguel.

Obrigado também a todas as pessoas que, de uma maneira ou de outra, contribuiram para a conclusão desta jornada, em especial

- *à minha família, porque sempre representou a razão dos meus esforços;*
- *aos professores Francisco Thaine, Antônio Paques, Tenkasi Wanathan, Paulo Brumatti, José Engler, Andrzej Nowicki, Ives Lequian, Djairo Figueiredo, e Francesco Mercuri, porque todos eles também me encaminharam na formação matemática;*
- *aos professores, funcionarios e amigos do Instituto de Matemática da UFRGS, pelo apoio recibido durante todo o tempo em que fiquei em Porto Alegre;*
- *aos professores e amigos Manuel Folledo, Rodney Bassanezi, Belmer Negrillo, Alcibíades Rigas e Raquel Brumatti, pelo estímulo e auxílio oportuno que me deram quando estive em Campinas;*
- *aos amigos chilenos, em particular a Moisés Cañas, Haroldo Villarroel, Eduardo Correa e suas respectivas famílias, pelo seu apoio e amizade;*
- *aos professores e amigos da Faculdade de Educação Física da UNICAMP, Zwinglio Moreira, Marcelo, Wagner, Enori, Deco, Padua, Paulo e José Júlio, pelos inúmeros*

momentos agradáveis que compartilhei com todos eles;

– *aos senhores Oclide José Dotto, Alexandre Carnielli, Roberto Scop, Arlindo Paschoetto, Luiz Dinon, Ênio Bernardes, Adalberto Bernardi, Dárcio Nascimento, José Cardoso, Valfredo Barbisan, Rubens Guerra, e Cayo Blasquez, por me permitir compartilhar com eles como mais um membro de suas respectivas famílias;*

– *aos amigos de Porto Alegre, André Jablonski, Moises Meza, Anísio Peixoto, Solange Shama, Eduardo Molina, Leopoldo Ginez, Andrea Bernades, Adriane Lawich, Deyse Cabistani, Suzana Teixeira e Diosnel Rodriguez, pela suas amizades;*

– *ao amigão chileno Luis Valderrama Campusano porque me ajudou a encontrar o caminho que sempre procurei.*

– *E a Ti Senhor, porque nos presenteias com esta formosa vida sem pedir nunca nada.*

A meus irmãos Roberto Scop, Luis Valderrama, Alexandre Carnielli, Zwinglio Moreira e André Jablonski.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Seja R um anel. Para uma derivação D (respectivamente automorfismo σ) de R denotamos com R[X,D] (respectivamente R(X,σ)) o skew anel de polinômios tipo derivação (respectivamente o skew anel de polinômios de Laurent) sobre R. Em [9] Ferrero provou que se S é qualquer uma das extensões acima citadas e α é um radical satisfazendo certas condições, então o α-radical α(S) de S é o ideal estendido I·S, onde I = σ(S) $\cap$ R. Também é obtido uma representação do radical β dos skew anéis de polinômios R[X,σ], onde β é um radical satisfazendo certas condições (quase idênticas às satisfeitas por α). A família de radicais α e β em consideração inclui os radicais mais conhecidos como o radical primo, de Jacobson, de Brown McCoy, de Levitzki, e o radical fortemente primo.

O primeiro trabalho nessa direção é de Amitsur. Ele prova que o radical de Jacobson J(R[X]) de um anel de polinômios R[X] é o ideal estendido I·R[X], onde I é o nil ideal J(R[X]) $\cap$ R de R ([1]). Depois Pearson e Stephenson descrevem completamente o radical primo do skew anel de polinômios R[X,σ] ([19], Teorema 1.3). Bedi e Ram estendem os resultados de Amitsur ao provar que o radical de Jacobson do skew anel de Laurent R(X,σ) é o ideal estendido I·R(X,σ), onde I = J(R(X, σ)) $\cap$ R ([2], Teorema 3.1). Nesse mesmo trabalho eles descrevem o radical de Jacobson do skew anel de polinômios R[X,σ] ([2], Teorema 3.1). Os radicais primo e de Jacobson do skew anel R[X,D] são descritos por Ferrero, Kishimoto e Motose. Eles provam que se α é qualquer um desses radicais, então o radical α(R[X,D]) é também um ideal estendido. Bergen, Montgomery e Passman descrevem o radical

primo do anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$. Se prova que o radical primo de $R * \mathcal{L}$ é o ideal estendido $N \cdot (R * \mathcal{L})$, onde N é a intersecção de todos os $\mathcal{L}$-ideais do anel R([3], Proposição 2.6). Também, eles conseguem uma descrição do radical de Jacobson de anéis de operadores diferenciais sob certas condições ([3], Corolários 3.4 e 3.5).

Um dos propósitos desta tese é provar generalizações dos resultados de [9] para os skew anéis generalizados $R[X, \mathcal{D}]$, $R(X, \mathcal{A})$ e $R[X, \mathcal{A}]$, onde X é um conjunto de indeterminadas e $\mathcal{D}$ (respectivamente $\mathcal{A}$) é um certo conjunto de derivações (respectivamente automorfismos) do anel R.

De outro lado em [8] se definem os ideais fechados de uma extensão livre R[E] do anel R. Os resultados obtidos se aplicam, em particular, ao estudo dos ideias primos de R[E].

Um outro propósito desta tese será provar resultados correspondentes para os skew anéis de polinômios de Laurent generalizados $R(X, \mathcal{A})$.

O Capítulo I inicia com a construção dos skew anéis generalizados que serão considerados, bem como as propriedades dessas estruturas. Ditos anéis são basicamente generalizações das extensões de Ore ([10]), dos anéis considerados por Kishimoto em [16], Sec. 2, e incluem os anéis de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$, onde $\mathcal{L}$ é uma K-álgebra de Lie que satisfaz certas condições. De fato, um dos resultados mais importantes deste Capítulo é aquele onde se dão condições sobre a K-álgebra de Lie $\mathcal{L}$ para que o anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$ seja isomorfo com o skew anel $R[X, \mathcal{D}]$ (Teorema I.1.5).

O Capítulo II é iniciado com uma introdução rápida da teoria de radicais de anéis associativos, para depois provar que o radical superior dos anéis $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Z}_p[X]$ (onde X é um conjunto de indeterminadas) é zero (Teoremas II.1.3 e II.1.4). Os resultados que afirmam que o radical superior dos anéis $\mathbb{Z}_p(X)$ e

$\mathbb{Z}(X)$ é também zero são dados mais adiante no parágrafo 3 deste Capítulo. Então, utilizando métodos semelhantes aos de [9], se prova nos parágrafos 2 e 3 que, se S é qualquer uma das extensões $R[X, \mathcal{D}]$ e $R(X,\mathcal{A})$ e α é um radical satisfazendo certas condições, se tem que $\alpha(S) = I{\cdot}S$, onde $I = \alpha(S) \cap R$ (Teoremas II.2.6 e II.3.9). Esses resultados generalizam assim os resultados citados inicialmente.

A determinação dos ideais contraídos $I = \alpha(S) \cap R$ é então um problema de interesse para cada radical α e cada anel-extensão. Alguns resultados parciais são obtidos no parágrafo 4. Também se prova que, se α é um radical determinado pela intersecção de ideais primos e satisfaz certas condições, então o radical α do skew anel de polinômios generalizado tipo automorfismo $S_n = R[X_1,\sigma_1] \ldots [X_n,\sigma_n]$ é um ideal de S_n da forma:

$$\sigma(S_n) = (\alpha(S_n) \cap R) \bigoplus_{t} \bigoplus_{i_1,\ldots,i_t} A_{i_1 \ldots i_t}[X_{i_1},\sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t},\sigma_{i_t}] X_{i_1} \cdots X_{i_t} ,$$

onde os $A_{i_1 \ldots i_t}$ são certos ideais $\mathcal{A}$-invariantes do anel R (Teorema II.5.10). Finaliza-se este Capítulo calculando o nil radical generalizado dos skew anéis $R*\mathcal{L}$ e $R(X,\mathcal{A})$ (Teoremas II.6.3 e II.6.6).

No Capítulo III, para um anel $\mathcal{A}$-primo R(com automorfismos $\mathcal{A}$) lembra-se a noção do anel completo de $\mathcal{A}$-quocientes à esquerda Q de R. Logo são definidos os ideais do skew anel $R(X,\mathcal{A})$ de forma análoga aos ideais fechados considerados nas extensões livres R[E] ([8]). Então, seguindo um procedimento similar ao usado no trabalho de Ferrero, se prova que, quando os automorfismos de $\mathcal{A}$ comutam entre si, então existe uma correspondência biunivoca entre o conjunto dos ideais fechados do anel $R(X,\mathcal{A})$ e o conjunto de ideais fechadas do anel $Q(X,\mathcal{A})$ (Teorema III.3.8), e essa correspondência preserva os ideais primos (Teorema III.3.10). Então nos parágrafos 4 e 5 desse Capítulo se usa esta correspondência entre os ideais primos de $R(X,\mathcal{A})$ e $Q(X,\mathcal{A})$ para provar que todo ideal $\mathcal{A}$-primo de R é $\mathcal{A}$-fortemente primo (respectivamente não singular) se, e somente se, todo ideal primo de $R(X,\mathcal{A})$ é fortemente primo (respectimente não singular) (Teoremas III.4.4 e III.5.3).

CAPÍTULO I

ALGUMAS EXTENSÕES DE ANÉIS

1 – O Anel de Operadores Diferenciais $R * \mathcal{L}$

Para construir os anéis de operadores diferencais seguiremos [5].

Sejam K um anel comutativo com unidade, e R uma K-álgebra associativa fiel com unidade (a mesma de K). Seja $\mathcal{L}$ uma K-álgebra de Lie livre como K-módulo e $U(\mathcal{L})$ a álgebra envolvente universal de $\mathcal{L}$.

Se $\mathcal{L}$ age sobre R como K-derivações através do K-homomorfismo Δ: $\mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Der}_K(R)$ (não necessariamente um homomorfismo de K-álgebras de Lie), onde $\Delta(x) = d_x \quad \forall\, x \in \mathcal{L}$, então esta ação determina, de maneira natural, um anel $R * \mathcal{L}$ gerado por R e $U(\mathcal{L})$.

Esse anel $R * \mathcal{L}$ tem como conjunto subjacente o R-módulo (à esquerda) livre $R \otimes_K U(\mathcal{L})$.

Para cada $x \in \mathcal{L}$ denotamos com $\overline{x}$ o elemento $1 \otimes x$ de $R * \mathcal{L}$, e para cada $r \in R$ denotamos com o próprio r o elemento $r \otimes 1$ de $R * \mathcal{L}$.

Se em $R*\mathcal{L}$ consideramos a multiplicação sujeita às relações:

$$(1)\quad \overline{x}r = r\overline{x} + d_x(r)\,, \qquad \forall\, r \in R,\ \forall\, x \in \mathcal{L}\,,$$

$$(2)\quad \overline{x}\,\overline{y} = \overline{y}\,\overline{x} + \overline{[x,y]} + t(x,y)\,, \qquad \forall\, x, y \in \mathcal{L}\,,$$

(onde $t\colon \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow R$ é uma função K-bilinear que satisfaz condições para que $R*\mathcal{L}$ seja um anel ([5], Cap. 1), e $[\ ,\ ]$ denota o produto de Lie em $\mathcal{L}$), então $R*\mathcal{L}$ torna-se um anel extensão de R. $R*\mathcal{L}$ é chamado o *anel de operadores diferencais* ou o *produto cruzado de R por* $\mathcal{L}$.

No caso particular em que a K-álgebra de Lie $\mathcal{L}$ seja abeliana e finito dimensional (como K-módulo livre) se tem que $R*\mathcal{L}$ é isomorfo com o "skew" anel de polinômios tipo derivação, considerado por K. Kishimoto ([15], Sec. 2). Nós veremos depois situações mais gerais (onde $\mathcal{L}$ não necessariamente é abeliana nem finito dimensional), nas quais $R*\mathcal{L}$ é isomorfo com um anel construído usando sucessivas extensões de Ore.

Durante todo o desenvolvimento desta tese Λ denotará um segmento de ordinais, e sempre vamos supor que as K-álgebras de Lie em consideração possuem uma K-base ordenada, indexada por Λ.

Se $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma K-base de $\mathcal{L}$ então o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt ([13]) garante que o conjunto de monômios

$$\left\{ \overline{x}_{\lambda_1}^{\nu_{\lambda_1}} \overline{x}_{\lambda_2}^{\nu_{\lambda_2}} \cdots \overline{x}_{\lambda_n}^{\nu_{\lambda_n}} \ :\ \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n\,,\ \nu_{\lambda_i} \geq 0,\quad \forall\, i \right\}$$

forma uma base de $R*\mathcal{L}$ como R-módulo à esquerda. Além disso, as relações (1) e (2) são equivalentes às relações:

$$(1)'\quad \overline{x}_\lambda r = r\overline{x}_\lambda + d_\lambda(r)\,, \qquad \forall\, r \in R,\ \forall\, \lambda \in \mathcal{L}\,,$$

$$(2)'\quad \overline{x}_\lambda\,\overline{x}_\iota = \overline{x}_\iota\,\overline{x}_\lambda + \overline{[x_\lambda, x_\iota]} + t(x_\lambda, x_\iota)\,, \qquad \forall\, \lambda, \iota \in \Lambda\,,$$

onde d_λ denota a derivação d_{x_λ}.

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números inteiros não negativos. Se consideramos o seguinte subconjunto do produto cartesiano $\mathbb{N}^{\Lambda}$,

$$\Omega = \{\overline{\nu} = (\nu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathbb{N}^{\Lambda} : \nu_\lambda = 0 \text{ excepto para um número finito de índices } \lambda\},$$

então um monômio de $\mathrm{R} * \mathcal{L}$ da forma $\overline{\mathrm{X}}_{\lambda_1}^{\nu_{\lambda_1}} \overline{\mathrm{X}}_{\lambda_2}^{\nu_{\lambda_2}} \cdots \overline{\mathrm{X}}_{\lambda_n}^{\nu_{\lambda_n}}$ pode ser denotado simplesmente com $\overline{\mathrm{X}}^{\overline{\nu}}$ (onde $\overline{\nu} = (\nu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$) e, portanto, podemos escrever

$$\mathrm{R} * \mathcal{L} = \left\{ \alpha = \sum_{\overline{\nu}} \mathrm{r}_{\overline{\nu}} \overline{\mathrm{X}}^{\overline{\nu}} \text{ (soma finita)} \ : \ \mathrm{r}_{\overline{\nu}} \in \mathrm{R}, \overline{\nu} \in \Omega \right\}.$$

A fim de definir um grau para cada elemento não nulo de $\mathrm{R} * \mathcal{L}$, apresentamos previamente algumas definições e resultados que são fáceis de verificar.

Para cada elemento $\overline{\nu} = (\nu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \Omega$ definimos $|\overline{\nu}| = \sum_{\lambda} \nu_\lambda \in \mathbb{N}$. Se no conjunto Ω consideramos a relação lexicográfica

$$\overline{\nu} < \overline{\mu} \iff \begin{cases} |\overline{\nu}| < |\overline{\mu}|, & \text{ou} \\ |\overline{\nu}| = |\overline{\mu}| \quad \text{e } \exists \lambda_0 \in \Lambda \text{ tal que } \nu_\lambda = \mu_\lambda \quad \forall \lambda < \lambda_0, \text{ e} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nu_{\lambda_0} > \mu_{\lambda_0}, \end{cases}$$

então $(\Omega, <)$ é um conjunto totalmente ordenado, e cada subconjunto finito de $(\Omega, \leq)$ tem um elemento minimal e um elemento maximal. Em particular, se o conjunto Λ é finito então $(\Omega, \leq)$ é um conjunto bem ordenado.

Para cada elemento não nulo $\alpha = \sum_{\overline{\nu}} \mathrm{r}_{\overline{\nu}} \overline{\mathrm{X}}^{\overline{\nu}}$ de $\mathrm{R} * \mathcal{L}$ definimos: o *suporte* de α como sendo o conjunto $\mathrm{supp}(\alpha) = \{\overline{\nu} : \mathrm{r}_{\overline{\nu}} \neq 0\}$; o *grau* de α como o elemento de Ω, $\partial \alpha = \max \mathrm{supp}(\alpha)$; o *$\overline{\nu}$-ésimo coeficiente* (à esquerda) de α, $\mathrm{c}_{\overline{\nu}}(\alpha) = \mathrm{r}_{\overline{\nu}}$; e o *coeficiente principal* de α, $\ell \mathrm{c}(\alpha) = \mathrm{c}_{\overline{\nu}_0}(\alpha)$, onde $\overline{\nu}_0 = \partial \alpha$.

Assim, o elemento α de $\mathrm{R} * \mathcal{L}$ pode escrever-se na forma $\alpha = \sum_{\overline{\nu} \in \mathrm{supp}(\alpha)} \mathrm{r}_{\overline{\nu}} \overline{\mathrm{X}}^{\overline{\nu}}$, mas nós usaremos a notação $\alpha = \sum_{\overline{\nu} \leq \overline{\nu}_0} \mathrm{r}_{\overline{\nu}} \overline{\mathrm{X}}^{\overline{\nu}}$, onde $\overline{\nu}_0 = \partial \alpha$.

Sejam α e β elementos não nulos do anel $R * \mathcal{L}$. É fácil provar que, se $\alpha + \beta \neq 0$, então $\partial(\alpha + \beta) \leq \max\{\partial\alpha, \partial\beta\}$. Também, dados r e s em R, e $\overline{\nu}$ e $\overline{\mu}$ em Ω, existem elementos únicos $a_{\overline{\tau}} \in R$ $(\overline{\tau} < \overline{\nu} + \overline{\mu})$ tais que

$$r\overline{x}^{\overline{\nu}} \cdot s\overline{x}^{\overline{\mu}} = rs\overline{x}^{\overline{\nu}+\overline{\mu}} + \sum_{\overline{\tau} < \overline{\nu}+\overline{\mu}} a_{\overline{\tau}}\overline{x}^{\overline{\tau}},$$

onde $\overline{\nu} + \overline{\mu}$ é definido componente à componente. Em conseqüência, se $\alpha\beta \neq 0$, então $\partial(\alpha\beta) \leq \partial\alpha + \partial\beta$.

Agora introduzimos uma condição que será importante no que segue.

Dizemos que uma K-álgebra de Lie $\mathcal{L}$ possui a *propriedade (s)* (respectivamente *(n)*) se existir um segmento de ordinais Λ e uma K-base $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de $\mathcal{L}$ que satisfaz a seguinte condição: para cada par de elementos ι e ρ de Λ, com $\iota < \rho$, existem elementos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ de Λ e elementos $k_1^{(\iota,\rho)}, k_2^{(\iota,\rho)}, \ldots, k_n^{(\iota,\rho)}$, de K tais que $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \leq \iota$ (respectivamente $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \iota$) e

$$[x_\iota, x_\rho] = \sum_{i=1}^{n} k_i^{(\iota,\rho)} x_{\lambda_i}.$$

Neste caso $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ será dita uma *base admissível* relativa à propriedade (s) (respectivamente (n)), e os elementos $k_i^{(\iota,\rho)}$ (onde $\iota, \rho \in \Lambda$ são tais que $\iota < \rho$) serão chamados constantes correspondentes a esta base.

Suponhamos que K seja um corpo e que a K-álgebra de Lie $\mathcal{L}$ seja finito dimensional. Então $\mathcal{L}$ é soluvel se, e somente se, existir uma cadeia $0 = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{L}_n = \mathcal{L}$, onde $\dim_K \mathcal{L}_i = i$ e $\mathcal{L}_{i-1}$ é um ideal de $\mathcal{L}_i$ ([13] pg 29, Ex. 13). Como conseqüência imediata temos que $\mathcal{L}$ é soluvel se, e somente se, $\mathcal{L}$ possui a propriedade (s). Também usando o Teorema de Engel ([13]) podemos provar que $\mathcal{L}$ é nilpotênte se, e somente se, $\mathcal{L}$ possui a propriedade (n).

Agora suponhamos que o corpo K seja algebricamente fechado e $\mathcal{L}$ de dimensão arbitrária. Usando o fato de que, se $\mathcal{L}$ não é nilpotente então $\mathcal{L}$ contém

uma subálgebra bidimensional não abeliana ([13] pg 54, Ex. 04), pode-se provar que quando $\mathcal{L}$ possui a propriedade (n) então $\mathcal{L}$ é nilpotente.

Assim, as condições (s) e (n) definidas acima são, de certo modo, generalizações dos conceitos de solubilidade e nilpotência.

Daqui em diante, salvo menção em contrário, quando se falar de uma K-álgebra de Lie $\mathcal{L}$ que possui a propriedade (s) ou (n), será entendido que $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ e $\{k_i^{(\iota,\rho)} : \iota, \rho \in \Lambda \text{ com } \iota < \rho\}$ denotam respectivamente a base admissível e as constantes correspondentes.

O seguinte resultado é chave para o desenvolvimento dos resultados fundamentais dos anéis de operadores diferenciais que podem ser construídos por sucessivas extensões de Ore (ver Cap. II §2, adiante), e portanto mostra a importância da propriedade (s).

PROPOSIÇÃO 1.1 – se $\mathcal{L}$ é uma K-álgebra de Lie que possui a propriedade (s), então, para cada $\lambda \in \Lambda$ e cada $\overline{\nu} \in \Omega$, existem elementos únicos $r_{\overline{\mu}}$ de R tais que no anel $R * \mathcal{L}$ se tem

$$\overline{x}_\lambda \, \overline{x}^{\overline{\nu}} = \overline{x}^{\overline{\nu} + \overline{\epsilon}_\lambda} + \sum_{\overline{\mu} \leq \overline{\nu}} r_{\overline{\mu}} \overline{x}^{\overline{\mu}} \, ,$$

onde $\overline{\epsilon}_\lambda$ denota o elemento (ρ_ι) de Ω tal que $\rho_\lambda = 1$ e $\rho_\iota = 0, \quad \forall \, \iota \neq \lambda$.

PROVA – É feita por indução em relação a $| \overline{\nu} | \geq 1$.

Se para cada elemento $\lambda \in \Lambda$ consideramos a derivação interna de $R * \mathcal{L}$, $\overline{d}_\lambda = \widetilde{\overline{x}}_\lambda$, determinada pelo elemento $\overline{x}_\lambda$ (i.e. $\overline{d}_\lambda(\alpha) = \overline{x}_\lambda \, \alpha - \alpha \, \overline{x}_\lambda, \quad \forall \, \alpha \in R * \mathcal{L}$), então é claro que $\overline{d}_\lambda(\overline{x}_\iota) = \overline{[x_\lambda, x_\iota]} + t(x_\lambda, x_\iota), \quad \forall \, \iota \in \Lambda$. Esta derivação $\overline{d_\lambda}$ é uma extensão da derivação d_λ e também será denotada simplesmente por d_λ.

Agora vamos mostrar que certos anéis de operadores diferenciais podem ser obtidos como sucessivas extensões de Ore.

Para isto lembremos primeiro que, se d é uma derivação de R, então o "skew" anel de polinômios R[X,d] é definido como o conjunto $\left\{ \sum_i r_i X^i \ : \ r_i \in R \right\}$ com a soma usual de polinômios e uma multiplicão, dada por $X r = r X + d(r)$, $\forall\, r \in R$ ([10]).

Doravante, para um segmento de ordinais Λ, definimos o conjunto

$$\Lambda^* = \{\lambda \in \Lambda \ : \ \lambda \text{ é um ordinal sucessor } \}$$

Consideremos um anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$ e um conjunto de indeterminadas $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda^*\}$.

Supondo que a K-álgebra de Lie $\mathcal{L}$ possui a propriedade (s), definimos $T_0 = R$, $D_1 = d_1$, e $T_1 = T_0[X_1, D_1]$.

LEMA 1.2 – Seja $\phi_1 : T_1 \longrightarrow R * \mathcal{L}$ o R-monomorfismo definido por $\phi_1 \left(\sum r_i X_1^i \right) = \sum r_i \overline{x}_1^i$. Se $D_2 : T_1 \longrightarrow T_1$ é definido aditivo e satisfazendo $D_2(X_1) = -k_1^{(1,2)} X_1 - t(x_1, x_2)$ e $D_2(r X_1^m) = d_2(r) X_1^m + r \sum_{v=0}^{m-1} X_1^v D_2(X_1) X_1^{m-1-v}$, $\forall\, r \in R$, $\forall\, m \geq 1$, então

(i) $\phi_1 \circ D_2 = d_2 \circ \phi_1$

(ii) D_2 é uma K-derivação de T_1.

PROVA – (i) Se $r \in R$ e $i \geq 1$, então

$$\begin{aligned}
\phi_1 (D_2(r X_1^i)) &= \phi_1 \Big(d_2(r) X_1^i + r \sum_{v=0}^{i-1} X_1^v \big(-k_1^{(1,2)} X_1 - t(x_1, x_2) \big) X_1^{i-1-v} \Big) \\
&= d_2(r) \overline{x}_1^i + r \sum_{v=0}^{i-1} \overline{x}_1^v \big(-k_1^{(1,2)} \overline{x}_1 - t(x_1, x_2) \big) \overline{x}_1^{i-1-v} \\
&= d_2(r) \overline{x}_1^i + r \sum_{v=0}^{i-1} \overline{x}_1^v (\overline{x}_2 \overline{x}_1 - \overline{x}_1 \overline{x}_2) \overline{x}_1^{i-1-v} \\
&= d_2(r) \overline{x}_1^i + r (\overline{x}_2 \overline{x}_1^i - \overline{x}_1^i \overline{x}_2)
\end{aligned}$$

$$= d_2(r)\,\overline{x}_1^i + r\,d_2(\overline{x}_1^i)$$
$$= d_2(r\,\overline{x}_1^i) = d_2\big(\phi_1(r\,X_1^i)\big)$$

Com isto é claro que $\phi_1 \circ D_2 = d_2 \circ \phi_1$.

(ii) Vejamos que $D_2(fg) = D_2(f)g + f\,D_2(g)$, $\forall\, f,g \in T_1$. Sejam $r,s \in R$ e $i,j \in \mathbb{N}$. Nós temos que

$$\begin{aligned} d_2\big(\phi_1(r\,X_1^i\,s\,X_1^j)\big) &= d_2(r\,\overline{x}_1^i\,s\,\overline{x}_1^j) \\ &= d_2(r\,\overline{x}_1^i)\,s\,\overline{x}_1^j + r\,\overline{x}_1^i\,d_2(s\,\overline{x}_1^j) \\ &= d_2\big(\phi_1(r\,X_1^i)\big)\,\phi_1(s\,X_1^j) + \phi_1(r\,X_1^i)\,d_2\big(\phi_1(s\,X_1^j)\big) \\ &= \phi_1\big(D_2(r\,X_1^i)\big)\,\phi_1(s\,X_1^j) + \phi_1(r\,X_1^i)\,\phi_1\big(D_2(s\,X_1^j)\big) \\ &= \phi_1\big(D_2(r\,X_1^i)\,s\,X_1^j + r\,X_1^i\,D_2(s\,X_1^j)\big)\ , \end{aligned}$$

e também

$$d_2\big(\phi_1(r\,X_1^i\,s\,X_1^j)\big) = \phi_1\big(D_2(r\,X_1^i\,s\,X_1^j)\big)\ .$$

Então, usando a injetividade de ϕ_1, segue que $D_2(rX_1^i\,sX_1^j) = D_2(rX_1^i)\,sX_1^j + rX_1^i\,D_2(sX_1^j)$. Com isso prova-se a igualdade desejada.

Como conseqüência do lema anterior podemos definir $T_2 = T_1[X_2, D_2]$.

Agora, para cada inteiro n em Λ tal que $n \geq 2$, definimos a função $D_{n+1} : T_n \longrightarrow T_n$ como sendo aditiva e satisfazendo

$$D_{n+1}(X_\ell) = -\sum_i k_i^{(\ell,n+1)}\,X_{\lambda_i} - t(x_\ell, x_{n+1}), \quad \forall\, \ell \leq n, \ \text{e}$$

$$\begin{aligned} D_{n+1}(rX_{\ell_1}^{\nu_{\ell_1}} \cdots X_{\ell_m}^{\nu_{\ell_m}}) &= d_{n+1}(r)\,X_{\ell_1}^{\nu_{\ell_1}} \cdots X_{\ell_m}^{\nu_{\ell_m}} \\ &+ r \sum_{u=1}^{m} \sum_{v=0}^{\nu_{\ell_u}-1} X_{\ell_1}^{\nu_{\ell_1}} \cdots X_{\ell_{u-1}}^{\nu_{\ell_{u-1}}} X_{\ell_u}^{v}\,D_{n+1}(X_{\ell_u})\,X_{\ell_u}^{\nu_{\ell_u}-1-v} X_{\ell_{u+1}}^{\nu_{u+1}} \cdots X_{\ell_m}^{\nu_{\ell_m}}, \end{aligned}$$

$\forall\, r \in R$, $\forall\, \ell_1, \ldots, \ell_m$ com $\ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_m \leq n$, onde $T_n = T_{n-1}[X_n, D_n]$.

Seguindo um procedimento análogo à prova do Lema 1.2, podemos verificar o seguinte

LEMA 1.3 – Seja $n \geq 2$. Se definimos a função $\phi_n : T_n \longrightarrow R * \mathcal{L}$ por

$$\phi_n\Big(\sum r_{i_1 \ldots i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}\Big) = \sum r_{i_1 \ldots i_n} \overline{x}_1^{i_1} \cdots \overline{x}_n^{i_n},$$

então

(1) $\phi_\ell \circ D_{n+1} = d_{n+1} \circ \phi_\ell$, $\forall\, \ell \leq n$.

(2) ϕ_ℓ é um R-monomorfismo para todo $\ell \leq n$.

(3) D_{n+1} é uma K-derivação de T_n.

Assim, com esse resultado, temos que os anéis $T_n = T_{n-1}[X_n, D_n]$ estão bem definidos para todo n em $\mathbb{N}$.

Seja λ um ordinal limite. Se $\lambda \in \Lambda$, definimos o anel $T_\lambda = \bigcup_{\iota < \lambda} T_\iota$ e a função $\phi_\lambda : T_\lambda \longrightarrow R * \mathcal{L}$ por $\phi_\lambda(f) = \phi_\iota(f)$ se $f \in T_\iota$ com $\iota < \lambda$. Claramente ϕ_λ é um monomorfismo se os $\phi_\iota (\iota < \lambda)$ o são.

Seja $\lambda = \rho + 1$ um ordinal sucessor. Se $\lambda \in \Lambda$, definimos a função $D_{\rho+1}$: $T_\rho \longrightarrow T_\rho$ que seja aditiva e que satisfaça as condições:

(a) $D_{\rho+1}(X_\iota) = -\sum_i k_i^{(\tau,\rho)} Z_i - t(x_\tau, x_\rho)$, $\forall\, \iota \in \Lambda^*$, com $\iota \leq \rho$, onde

$$\tau = \begin{cases} \iota & , \text{se } \iota < \aleph_0 \\ \iota - 1 & , \text{se } \iota > \aleph_0 \end{cases}$$

$$\text{e } Z_i = \begin{cases} X_{\rho_i} & , \text{se } \rho_i < \aleph_0 \\ X_{\rho_i + 1} & , \text{se } \rho_i > \aleph_0 \end{cases}$$

(b) $D_{\rho+1}(r X_{\iota_1}^{\nu_{\iota_1}} \cdots X_{\iota_m}^{\nu_{\iota_m}}) = d_\rho(r) X_{\iota_1}^{\nu_{\iota_1}} \cdots X_{\iota_m}^{\nu_{\iota_m}}$

$$+ r \sum_{u=1}^{m} \sum_{v=0}^{\nu_{\iota_u} - 1} X_{\iota_1}^{\nu_{\iota_1}} \cdots X_{\iota_{u-1}}^{\nu_{\iota_{u-1}}} X_{\iota_u}^{v} D_{\rho+1}(X_{\iota_u}) X_{\iota_u}^{\nu_{\iota_u} - 1 - v} X_{\iota_{u+1}}^{\nu_{\iota_{u+1}}} \cdots X_{\iota_m}^{\nu_{\iota_m}}.$$

Procedendo como na prova do Lema 1.2 e usando indução transfinita sobre $\rho \in \Lambda$ tal que $\rho \geq \mathcal{X}_0$, consegue-se provar o

LEMA 1.4 – Seja $\lambda = \rho + 1$ um ordinal sucessor no conjunto Λ tal que $\lambda \geq \mathcal{X}_0$. Se $\phi_\rho : T_\rho \longrightarrow R * \mathcal{L}$ é definido por

$$\phi_\rho\Big(\sum r_{\iota_1 \ldots \iota_m} X_{\iota_1}^{\nu_{\iota_1}} \cdots X_{\iota_m}^{\nu_{\iota_m}}\Big) = \sum r_{\iota_1 \ldots \iota_m} \phi_\rho(X_{\iota_1})^{\nu_{\iota_1}} \cdots \phi_\rho(X_{\iota_m})^{\nu_{\iota_m}} ,$$

onde $\phi_\rho(X_n) = \overline{x}_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ (positivo) e $\phi_\rho(X_\iota) = \overline{x}_{\iota-1} \quad \forall\, \iota \in \Lambda^* \setminus \mathbb{N}$, então

(1) $\phi_\iota \circ D_{\rho+1} = d_\rho \circ \phi_\iota \ , \quad \forall\, \iota \leq \rho.$

(2) ϕ_ι é um R-monomorfismo para todo $\iota \leq \rho$.

(3) $D_{\rho+1}$ é uma K-derivação de T_ρ.

Agora definimos, para cada $\lambda \in \Lambda^* \setminus \mathbb{N}$, o anel $T_\lambda = T_{\lambda-1}[X_\lambda, D_\lambda]$.

Se denotamos com $\mathcal{D}$ o conjunto de todas as derivações $D_\lambda (\lambda \in \Lambda^*)$, então definimos o anel $R[X, \mathcal{D}] = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ e temos o

TEOREMA 1.5 – Se $\mathcal{L}$ é uma K-álgebra de Lie que possui a propriedade (s), então $R[X, \mathcal{D}]$ é um anel extensão de R, isomorfo com o anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$.

PROVA – A função $\phi : R[X, \mathcal{D}] \longrightarrow R * \mathcal{L}$, definida por $\phi(f) = \phi_\lambda(f), \quad \forall\, f \in T_\lambda$, é um isomorfismo de anéis e um R-homomorfismo.

Seja $\lambda \in \Lambda^*$. Se definimos $D_\lambda(X_\lambda) = 0$ e $D_\lambda(X_\iota) = -D_\iota(X_\lambda), \quad \forall\, \iota \in \Lambda^*$, tal que $\iota > \lambda$, então D_λ torna-se uma derivação interna de $R[X, \mathcal{D}]$, determinada pelo elemento X_λ se $\lambda < \mathcal{X}_0$ ou por $X_{\lambda-1}$ se $\lambda > \mathcal{X}_0$.

Concluímos este parágrafo apresentando algumas definições e diversos resultados para os anéis T_λ. Dado que as provas destes resultados são simples, elas não são incluídas aqui.

Seja $\lambda \in \Lambda$. É claro que T_ι é um subanel de T_λ, $\forall\, \iota < \lambda$. Também, se I é um ideal de T_λ, então $D_\iota(I) \subseteq I$, $\forall\, \iota \in \Lambda^*$ tal que $\iota < \lambda$.

Um ideal I de T_λ será chamado um *$\mathcal{D}$-ideal*, se $D_\iota(I) \subseteq I$, $\forall\, \iota \in \Lambda^*$ tal que $\iota \geq \lambda$.

No que segue, a menos que seja dito outra coisa, Ω^* denotará o seguinte subconjunto do produto cartesiano $\mathbb{N}^{\Lambda^*}$,

$$\{\overline{\nu} = (\nu_\iota) \in \mathbb{N}^{\Lambda^*} \,:\, \nu_\iota = 0 \text{ exceto para um número finito de índices } \iota \in \Lambda^*\}\,.$$

Também, dado $\overline{\nu} \in \Omega^*$, denotamos com $X^{\overline{\nu}}$ o elemento $X_{\iota_1}^{\nu_{\iota_1}} \cdots X_{\iota_m}^{\nu_{\iota_m}}$ do anel $R[X, \mathcal{D}]$.

Proposição 1.6 – Se I é um $\mathcal{D}$-ideal de T_λ, então $I \cdot R[X, \mathcal{D}]$ é um ideal bilátero de $R[X, \mathcal{D}]$ que coincide com o conjunto

$$\Big\{ \sum_{\overline{\nu}} t_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}} \,:\, t_{\overline{\nu}} \in I \text{ e } \overline{\nu} = (\nu_\iota) \in \Omega^* \text{ com } \nu_\iota = 0 \;\; \forall \iota \in \Lambda^* \text{ tal que } \iota < \lambda \Big\}$$

e satisfaz a condição $I\,R[X, \mathcal{D}] \cap T_\lambda = I$.

O ideal estendido $I \cdot R[X, \mathcal{D}]$ de $R[X, \mathcal{D}]$ será denotado com $I[X, \mathcal{D}]$.

Proposição 1.7 – Se I é um ideal de T_λ tal que $D_{\lambda+1}(I) \subseteq I$ então $I \cdot T_{\lambda+1}$ é um ideal bilátero de $T_{\lambda+1}$ que coincide com o conjunto

$$\Big\{ \sum_{i=0}^{n} t_i\, X_{\lambda+1}^i \,:\, t_i \in I, \quad n \geq 0 \Big\}$$

e satisfaz a condição $I \cdot T_{\lambda+1} \cap T_\lambda = I$.

O ideal estendido $I \cdot T_{\lambda+1}$ de $T_{\lambda+1}$ será denotado com $I[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]$.

Se I é um $\mathcal{D}$-ideal de T_λ então é claro que $I[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]\,[X, \mathcal{D}] = I\,[X, \mathcal{D}]$.

Sejam $\lambda \in \Lambda$ e I um $\mathcal{D}$-ideal de T_λ. Se para cada $\iota \in \Lambda^*$ definimos $\overline{D}_\iota : T_\lambda / I \longrightarrow T_\lambda / I$ por $\overline{D}_\iota(t+I) = D_\iota(t) + I$, $\forall\, t \in T_\lambda$, então as funções

$\overline{D}_\iota (\iota \in \Lambda^*)$ são K-derivações do anel quociente T_λ / I. Com isso, temos que a função $\overline{\Delta} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Der}_K(T_\lambda / I)$, definida por

$$\overline{\Delta}\Big(\sum_i k_i x_{\iota_i}\Big) = \sum_i k_i \overline{\Delta}(x_{\iota_i}) ,$$

$$\text{onde} \qquad \overline{\Delta}(x_\iota) = \begin{cases} \overline{D}_\iota , & \text{se } \iota \in \mathbb{N} \\ \overline{D}_{\iota+1} , & \text{se } \iota \geq \aleph_0 \end{cases}$$

é um K-homomorfismo que torna possível a construção dos anéis

$$(T_\lambda / I)[X_{\lambda+1}, \overline{D}_{\lambda+1}] \qquad \text{e} \qquad (T_\lambda / I)[X, \overline{\mathcal{D}}]$$

onde $\overline{\mathcal{D}} = \{\overline{D}_\iota : \iota \in \Lambda^*\}$.

O seguinte resultado mostra que o anel quociente T_λ / I pode ser considerado um subanel dos anéis $T_{\lambda+1} / I[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]$ e $R[X, \mathcal{D}] / I[X, \mathcal{D}]$.

PROPOSIÇÃO 1.8 – Se $\lambda \in \Lambda$ e I é um $\mathcal{D}$-ideal de T_λ então

(1) $T_{\lambda+1} / I[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}] \cong (T_\lambda / I)[X_{\lambda+1}, \overline{D}_{\lambda+1}]$

(2) $R[X, \mathcal{D}] / I[X, \mathcal{D}] \cong (T_\lambda / I)[X, \overline{\mathcal{D}}]$.

Seja $\lambda \in \Lambda$. É fácil provar que, se J é um ideal de $R[X, \mathcal{D}]$, então $J \cap T_\lambda$ é um $\mathcal{D}$-ideal de T_λ. Também, se L é um ideal de $T_{\lambda+1}$, então $L \cap T_\lambda$ é um ideal de T_λ que satisfaz $D_{\lambda+1}(L \cap T_\lambda) \subseteq L \cap T_\lambda$.

A Proposição seguinte e seu Corolário serão de muita utilidade nas provas do parágrafo 2 no Capítulo seguinte.

PROPOSIÇÃO 1.9 – Sejam $\lambda \in \Lambda$ e I um $\mathcal{D}$-ideal de T_λ.

(1) Se J é um ideal de $R[X, \mathcal{D}]$ tal que $I[X, \mathcal{D}] \subseteq J$, então

$$(J / I[X, \mathcal{D}]) \cap (T_\lambda / I) = (J \cap T_\lambda) / I .$$

(2) Se L é um ideal de $T_{\lambda+1}$ tal que $I[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}] \subseteq L$, então

$$\left(L / I[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]\right) \cap (T_\lambda / I) = (L \cap T_\lambda) / I \, .$$

COROLÁRIO 1. 10 – Se $\lambda \in \Lambda$, então temos o seguinte:

(1) Se J é um ideal de $R[X, \mathcal{D}]$, então

$$\left(J / (J \cap T_\lambda)[X, \mathcal{D}]\right) \cap \left(T_\lambda / (J \cap T_\lambda)\right) = 0 \, ;$$

(2) Se L é um ideal de $T_{\lambda+1}$, então

$$\left(L / (L \cap T_\lambda)[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]\right) \cap \left(T_\lambda / (L \cap T_\lambda)\right) = 0 \, .$$

2 – Os Skew Anéis $R\langle X, \mathcal{A}\rangle$ e $R[X, \mathcal{A}]$.

Iniciamos este parágrafo introduzindo algumas notações e resultados fáceis de verificar e que serão usados na construção dos skew anéis $R\langle X, \mathcal{A}\rangle$ e $R[X, \mathcal{A}]$.

Consideremos os seguintes conjuntos

$\Omega_1 = \left\{\overline{\nu} = (\nu_\lambda) \in \mathbb{Z}^\Lambda : \nu_\lambda = 0 \text{ exceto para um número finito de índices } \lambda \in \Lambda\right\}$ e
$\Omega_1^* = \left\{\overline{\nu} = (\nu_\lambda) \in \mathbb{Z}^{\Lambda^*} : \nu_\lambda = 0 \text{ exceto para um número finito de índices } \lambda \in \Lambda\right\}$,

onde Λ e Λ^* são definidos como no parágrafo 1.

É claro que $\Omega \subseteq \Omega_1$. Se em Ω_1 consideramos a relação lexicográfica "$<$" definida em Ω no parágrafo 1, então $(\Omega_1, <)$ é também um conjunto totalmente ordenado, e cada subconjunto finito de $(\Omega_1, \leq)$ possui um elemento minimal e um elemento maximal.

Se u é uma unidade do anel R, então $\tilde{u}$ denotará o automorfismo interno de R determinado por u, i.e., $\tilde{u}(r) = u\, r\, u^{-1}$, $\forall\, r \in R$. Também, denotamos com

$(R,\mathcal{A},\mathcal{U})$ um anel R, um conjunto ordenado de automorfismos $\mathcal{A}$ de R, e um conjunto de unidades $\mathcal{U}$ de R, tais que $\mathcal{A}$ é equivalente a Λ^*, e as condições

$$(K)\begin{cases}\sigma\circ\rho=\tilde{u}_{\sigma,\rho}\circ\rho\circ\sigma\\ \sigma(u_{\rho,\theta})\,u_{\sigma,\theta}\,\theta(u_{\sigma,\rho})=u_{\sigma,\rho}\,\rho(u_{\sigma,\theta})\,u_{\rho,\theta}\\ u_{\sigma,\rho}^{-1}=u_{\rho,\sigma}\qquad e\qquad u_{\sigma,\sigma}=1\end{cases}$$

são satisfeitas para $\sigma,\rho,\theta\in\mathcal{A}$ arbitrárias. Aqui a condição "$\mathcal{A}$ é equivalente a Λ^*" significa que existe uma bijeção de Λ^* sobre $\mathcal{A}$ que preserva a ordem e, portanto, podemos indexar $\mathcal{A}$ com Λ^*, i.e., vamos supor $\mathcal{A}=\{\sigma_\lambda:\lambda\in\Lambda^*\}$.

Antes de passar a definir o skew anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$, lembramos que, para um automorfismo σ de R, o skew anel de polinômios de Laurent $R\langle X,\sigma\rangle$ é definido como o anel com conjunto subjacente

$$\Big\{\sum_{i=u}^{v}r_iX^i\ :\ r_i\in R,\ u,v\in\mathbb{Z}\text{ com }u\le v\Big\}$$

e com as operações de soma usual de polinômios, e o produto dado por $Xr=\sigma(r)X$, $\forall\, r\in R$ ([9]).

Consideremos um anel com automorfismos $(R,\mathcal{A},\mathcal{U})$ e um conjunto de indeterminadas $X=\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda^*\}$.

Definamos primeiro

$$V_0=R,\qquad \sigma_1'=\sigma_1,\qquad V_1=V_0\langle X_1,\sigma_1'\rangle\ .$$

Agora definamos a função $\sigma_2':V_1\longrightarrow V_1$, por

$$\sigma_2'\Big(\sum_i r_iX_1^i\Big)=\sum_i\sigma_2(r_i)\,(u_{2,1}\,X_1)^i$$

PROPOSIÇÃO 2.1 – σ_2' é um automorfismo de V_1 que estende σ_2.

PROVA – Sejam $r,s\in R$ e $i,j\in\mathbb{Z}$. Usando a condição $\sigma_2\circ\sigma_1=\tilde{u}_{2,1}\circ\sigma_1\circ\sigma_2$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_2'(r\,X_1^i\,s\,X_1^j) &= \sigma_2'\big(r\,\sigma_1^i(s)\,X_1^{i+j}\big)\\
&= \sigma_2\big(r\,\sigma_1^i(s)\big)\,(u_{2,1}\,X_1)^{i+j}\\
&= \sigma_2(r)\,\sigma_2\circ\sigma_1\big(\sigma_1^{i-1}(s)\big)\,u_{2,1}\,X_1(u_{2,1}\,X_1)^{i+j-1}\\
&= \sigma_2(r)\,u_{2,1}\,\sigma_1\circ\sigma_2\big(\sigma_1^{i-1}(s)\big)\,X_1(u_{2,1}\,X_1)^{i+j-1}\\
&= \sigma_2(r)\,u_{2,1}\,X_1\,\sigma_2\circ\sigma_1\big(\sigma_1^{i-2}(s)\big)\,u_{2,1}\,X_1(u_{2,1}\,X_1)^{i+j-2}\\
&= \sigma_2(r)\,u_{2,1}\,X_1\,u_{2,1}\,\sigma_1\circ\sigma_2\big(\sigma_1^{i-2}(s)\big)\,X_1(u_{2,1}\,X_1)^{i+j-2}\\
&= \sigma_2(r)\,(u_{2,1}\,X_1)^2\,\sigma_2\,\big(\sigma_1^{i-2}(s)\big)\,(u_{2,1}\,X_1)^{i+j-2}\\
&\qquad\vdots\\
&= \sigma_2(r)\,(u_{2,1}\,X_1)^t\,\sigma_2\,\big(\sigma_1^{i-t}(s)\big)\,(u_{2,1}\,X_1)^{i+j-t}\\
&\qquad\vdots\\
&= \sigma_2(r)\,(u_{2,1}\,X_1)^i\,\sigma_2\,(s)\,(u_{2,1}\,X_1)^j\\
&= \sigma_2'(r\,X_1^i)\,\sigma_2'(s\,X_1^i)\,.
\end{aligned}$$

Com isso e usando a aditividade de σ_2', prova-se facilmente que σ_2' é um homomorfismo de anéis.

Não é difícil verificar que σ_2' tem inverso definido por

$$\sigma_2'^{-1}\Big(\sum_i r_i\,X_1^i\Big) = \sum_i \sigma_2^{-1}(r_i)\,\big(\sigma_2^{-1}(u_{1,2})\,X_1\big)^i\,,$$

e assim σ_2' é um isomorfismo. Finalmente, é claro que σ_2' é uma extensão do automorfismo σ_2.

Por causa da Proposição 2.1, podemos agora definir o anel

$$V_2 = V_1\langle X_2, \sigma_2'\rangle\,.$$

Continuando dessa forma definimos, para cada $n \in \mathbb{N} \cap \Lambda$ com $n \geq 2$, a função $\sigma_{n+1}' : V_n \longrightarrow V_n$ por

$$\sigma_{n+1}'\Big(\sum r_{i_1\ldots i_n}\,X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}\Big) = \sum \sigma_{n+1}\,(r_{i_1\ldots i_n})\,(u_{n+1,1}\,X_1)^{i_1}\cdots(u_{n+1,n}\,X_n)^{i_n}$$

Uma prova análoga àquela da Proposição 2.1 mostra que σ'_{n+1} é um automorfismo de V_n que estende σ_{n+1}. Assim podemos definir agora o anel $V_{n+1} = V_n\langle X_{n+1}, \sigma'_{n+1}\rangle$.

Agora seja $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq \aleph_0$. Se λ é um ordinal limite, definimos o anel $V_\lambda = \bigcup_{\iota<\lambda} V_\iota$. Se λ é um ordinal sucessor, com $\lambda = \rho + 1$, então consideramos a função $\sigma'_\lambda : V_\rho \longrightarrow V_\rho$ definida por

$$\sigma'_\lambda\Big(\sum_{\overline{\nu}} r_{\overline{\nu}} X_{\iota_1}^{\nu_{\iota_1}} \cdots X_{\iota_m}^{\nu_{\iota_m}}\Big) = \sum_{\overline{\nu}} \sigma'_\lambda(r_{\overline{\nu}})\,(u_{\lambda,\iota_1} X_{\iota_1})^{\nu_{\iota_1}} \cdots (u_{\lambda,\iota_m} X_{\iota_m})^{\nu_{\iota_m}} ,$$

onde $\overline{\nu} = (\nu_\iota) \in \Omega_1^*$. Podemos provar também que σ'_λ é um automorfismo de V_ρ que estende σ_ρ. Isso nos permite definir o anel $V_{\rho+1} = V_\rho\langle X_{\rho+1}, \sigma'_{\rho+1}\rangle$.

Finalmente definimos o anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ por

$$R\langle X,\mathcal{A}\rangle = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda .$$

É claro que $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ é um anel extensão de R.

Cada automorfismo σ_λ pode ser estendido a um automorfismo de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ como antes. Este automorfismo será denotado ainda por σ_λ.

Usando as condições (K) vamos provar o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 2.2 – Para todo $\alpha \in R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ e $\iota, \lambda \in \Lambda^*$ tem-se:

(1) $X_\lambda X_\iota = u_{\lambda,\iota} X_\iota X_\lambda$;

(2) $X_\lambda \alpha = \sigma_\lambda(\alpha) X_\lambda$.

PROVA – (1) $X_\lambda X_\iota = \sigma_\lambda(X_\iota) X_\lambda = u_{\lambda,\iota} X_\iota X_\lambda$.

(2) Usando a parte (1) sucessivamente obtemos para cada $r \in R$ que

$$
\begin{aligned}
\sigma_\lambda(\mathrm{r}\,\mathrm{X}_{\iota_1}^{\nu_{\iota_1}}\cdots\mathrm{X}_{\iota_m}^{\nu_{\iota_m}})\,\mathrm{X}_\lambda &= \sigma_\lambda(\mathrm{r})\,(\mathrm{u}_{\lambda,\iota_1}\mathrm{X}_{\iota_1})^{\nu_{\iota_1}}\cdots(\mathrm{u}_{\lambda,\iota_m}\mathrm{X}_{\iota_m})^{\nu_{\iota_m}}\,\mathrm{X}_\lambda \\
&= \sigma_\lambda(\mathrm{r})\,(\mathrm{u}_{\lambda,\iota_1}\mathrm{X}_{\iota_1})^{\nu_{\iota_1}}\cdots(\mathrm{u}_{\lambda,\iota_m}\mathrm{X}_{\iota_m})^{\nu_{\iota_m}-1}\,\mathrm{u}_{\lambda,\iota_m}\mathrm{X}_{\iota_m}\,\mathrm{X}_\lambda \\
&= \sigma_\lambda(\mathrm{r})\,(\mathrm{u}_{\lambda,\iota_1}\mathrm{X}_{\iota_1})^{\nu_{\iota_1}}\cdots(\mathrm{u}_{\lambda,\iota_m}\mathrm{X}_{\iota_m})^{\nu_{\iota_m}-1}\,\mathrm{X}_\lambda\,\mathrm{X}_{\iota_m} \\
&= \sigma_\lambda(\mathrm{r})\,(\mathrm{u}_{\lambda,\iota_1}\mathrm{X}_{\iota_1})^{\nu_{\iota_1}}\cdots(\mathrm{u}_{\lambda,\iota_m}\mathrm{X}_{\iota_m})^{\nu_{\iota_m}-2}\,\mathrm{u}_{\lambda,\iota_m}\mathrm{X}_{\iota_m}\,\mathrm{X}_\lambda\,\mathrm{X}_{\iota_m} \\
&= \sigma_\lambda(\mathrm{r})\,(\mathrm{u}_{\lambda,\iota_1}\mathrm{X}_{\iota_1})^{\nu_{\iota_1}}\cdots(\mathrm{u}_{\lambda,\iota_m}\mathrm{X}_{\iota_m})^{\nu_{\iota_m}-2}\,\mathrm{X}_\lambda\,\mathrm{X}_{\iota_m}^2 \\
&\qquad\vdots \\
&= \sigma_\lambda(\mathrm{r})\,(\mathrm{u}_{\lambda,\iota_1}\mathrm{X}_{\iota_1})^{\nu_{\iota_1}}\cdots(\mathrm{u}_{\lambda,\iota_{m-1}}\mathrm{X}_{\iota_{m-1}})^{\nu_{\iota_{m-1}}}\,\mathrm{X}_\lambda\,\mathrm{X}_{\iota_m}^{\nu_{\iota_m}} \\
&\qquad\vdots \\
&= \sigma_\lambda(\mathrm{r})\,\mathrm{X}_\lambda\,\mathrm{X}_{\iota_1}^{\nu_{\iota_1}}\cdots\mathrm{X}_{\iota_m}^{\nu_{\iota_m}} \\
&= \mathrm{X}_\lambda\,\mathrm{r}\,\mathrm{X}_{\iota_1}^{\nu_{\iota_1}}\cdots\mathrm{X}_{\iota_m}^{\nu_{\iota_m}}
\end{aligned}
$$

Com isso e usando a aditividade de σ_λ fica claro que $\mathrm{X}_\lambda\,\alpha = \sigma_\lambda(\alpha)\mathrm{X}_\lambda$, para todo $\alpha \in \mathrm{R}\langle \mathrm{X}, \mathcal{A}\rangle$.

Como conseqüência da Proposição 2.2 temos que, para cada $\lambda \in \Lambda^*$,

$$\sigma_\lambda(\alpha) = \mathrm{X}_\lambda\,\alpha\,\mathrm{X}_\lambda^{-1}, \qquad \forall \alpha \in \mathrm{R}\langle \mathrm{X}, \mathcal{A}\rangle\,,$$

isto é, σ_λ é o automorfismo interno de $\mathrm{R}\langle \mathrm{X}, \mathcal{A}\rangle$, determinado pelo elemento X_λ.

Se usamos a notação $\mathrm{X}^{\overline{\nu}}$ para cada monômio de $\mathrm{R}\langle \mathrm{X}, \mathcal{A}\rangle$ da forma $\mathrm{X}_{\iota_1}^{\nu_{\iota_1}}\cdots\mathrm{X}_{\iota_m}^{\nu_{\iota_m}}$ (onde $\overline{\nu} = (\nu_\iota) \in \Omega_1^*$), então podemos escrever

$$\mathrm{V}_\lambda = \left\{\alpha = \sum_{\overline{\nu}} \mathrm{r}_{\overline{\nu}}\mathrm{X}^{\overline{\nu}} \,:\, \mathrm{r}_{\overline{\nu}} \in \mathrm{R},\quad \overline{\nu} = (\nu_\iota) \in \Omega_1^* \quad \text{e} \quad \nu_\iota = 0 \quad \forall \iota > \lambda \right\}$$

e $$\mathrm{R}\langle \mathrm{X}, \mathcal{A}\rangle = \left\{\alpha = \sum_{\overline{\nu}} \mathrm{r}_{\overline{\nu}}\mathrm{X}^{\overline{\nu}} : \mathrm{r}_{\overline{\nu}} \in \mathrm{R},\, \overline{\nu} \in \Omega_1^*\right\}.$$

No caso particular em que Λ^* seja finito, temos que $\mathrm{R}\langle \mathrm{X}, \mathcal{A}\rangle$ coincide com o anel $\mathcal{B}$ considerado por K. Kishimoto em [16], Sec. 2.

Também, como conseqüência da Proposição 2.2, temos o

COROLARIO 2.3 – Para cada par de elementos $\overline{\nu}, \overline{\mu} \in \Omega_1^*$, existe uma única unidade $u^{(\overline{\nu},\overline{\mu})}$ de R tal que no anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ se tem

$$X^{\overline{\nu}} X^{\overline{\mu}} = u^{(\overline{\nu},\overline{\mu})} X^{\overline{\nu}+\overline{\mu}} ,$$

onde $\overline{\nu} + \overline{\mu}$ está definido componente a componente.

Dado um automorfismo σ de R, se define o skew anel de polinômios $R[X,\sigma]$ como o subanel

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} r_i X^i \ : \ r_i \in R, \quad n \geq 0 \right\}$$

de $R\langle X,\sigma\rangle$ ([9]).

Para cada $\lambda \in \Lambda$ consideramos o subanel de V_λ,

$$S_\lambda = \left\{ \alpha = \sum_{\overline{\nu}} r_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}} \ : \ r_{\overline{\nu}} \in R, \quad \overline{\nu} = (\nu_\iota) \in \Omega^* \ e \ \nu_\iota = 0 \ \ \forall \in \iota > \lambda \right\}$$

e o subanel de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$,

$$R[X,\mathcal{A}] = \left\{ \alpha = \sum_{\overline{\nu}} r_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}} \ : \ r_{\overline{\nu}} \in R, \quad \overline{\nu} \in \Omega^* \right\} .$$

Temos que

$$S_\lambda = \begin{cases} \bigcup_{\iota < \lambda} S_\iota , & \text{se } \lambda \text{ é um ordinal limite} \\ S_{\lambda-1}[X_\lambda, \sigma_\lambda] , & \text{se } \lambda \text{ é um ordinal sucessor} \end{cases}$$

e $R[X,\mathcal{A}] = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$.

Cada σ_λ restrito a $R[X,\mathcal{A}]$ é ainda um automorfismo e a Proposição 2.2 vale também para o anel $R[X,\mathcal{A}]$. Mas desta vez cada automorfismo σ_λ de $R[X,\mathcal{A}]$ não é interno.

Tal como foi feito em $R*\mathcal{L}$, definimos para um elemento não nulo $\alpha = \sum_{\overline{\nu}} r_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}}$, de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ o *suporte* de α como sendo o conjunto $\mathrm{Supp}(\alpha) = \{\overline{\nu} \in \Omega_1^* : r_{\overline{\nu}} \neq 0\}$, e o *$\overline{\nu}$-ésimo coeficiente (à esquerda)* de α por $c_{\overline{\nu}}(\alpha) = r_{\overline{\nu}}$. O *grau* e o *coeficiente principal* de α só será definido se α pertencer a $R[X,\mathcal{A}]$. Assim se $\alpha \in R[X,\mathcal{A}]$, então $\partial\alpha = \text{máx Supp}(\alpha)$ e $\ell c(\alpha) = c_{\overline{\nu}_0}(\alpha)$, onde $\overline{\nu}_0 = \partial\alpha$.

Um ideal I de V_λ (respectivamente S_λ) será dito *$\mathcal{A}$-invariante* se $\sigma_\lambda(I) = I$, $\forall\, \lambda \in \Lambda^*$. Neste caso notaremos isto com $I \lhd_{\mathcal{A}} V_\lambda$ (respectivamente $I \lhd_{\mathcal{A}} S_\lambda$).

Para um ideal $\mathcal{A}$-invariante I de V_λ (respectivamente S_λ) podemos definir os ideais estendidos $I\langle X,\mathcal{A}\rangle = I\,R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ e $I\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle = I\,V_{\lambda+1}$ (respectivamente $I[X,\mathcal{A}] = I\,R[X,\mathcal{A}]$ e $I[X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}] = I\,S_{\lambda+1}$). É rotineiro provar resultados análogos ás Proposições 1.6 e 1.7 para estes ideais estendidos.

As provas dos resultados restantes deste parágrafo são simples e, por causa disso, não serão incluídas aqui.

PROPOSIÇÃO 2.4 – Para um anel $(R,\mathcal{A},\mathcal{U})$ consideremos um ideal $I \lhd_{\mathcal{A}} R$. Se para cada $\lambda \in \Lambda^*$ definimos a função $\overline{\sigma}_\lambda : R/I \longrightarrow R/I$ por

$$\overline{\sigma}_\lambda(r + I) = \sigma_\lambda(r) + I, \qquad \forall r \in R\,,$$

então $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{\sigma}_\lambda : \lambda \in \Lambda^*\}$ é uma família de automorfismos de R/I tal que, $(R/I, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{U}} = \{u_{\iota,\lambda} + I : \iota, \lambda \in \Lambda^*\})$ satisfaz a condição (K).

PROPOSIÇÃO 2.5 – Se $\lambda \in \Lambda$ e $I \lhd_{\mathcal{A}} V_\lambda$, então

(1) $V_{\lambda+1}/I\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle \cong (V_\lambda/I)\langle X_{\lambda+1}, \overline{\sigma}_{\lambda+1}\rangle$,

(2) $R\langle X,\mathcal{A}\rangle / I\langle X,\mathcal{A}\rangle \cong (V_\lambda/I)\langle X,\overline{\mathcal{A}}\rangle$.

PROPOSIÇÃO 2.6 – Se $\lambda \in \Lambda$ e $I \lhd_{\mathcal{A}} S_\lambda$, então

(1) $S_{\lambda+1} / I[X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}] \cong (S_\lambda / I)[X_{\lambda+1}, \overline{\sigma}_{\lambda+1}]$,

(2) $R[X,\mathcal{A}\rangle / I[X,\mathcal{A}] \cong (S_\lambda / I)[X,\mathcal{A}]$.

PROPOSIÇÃO 2.7 – Seja λ um elemento de Λ.

(1) Se J é um ideal de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ então $J \cap V_\lambda$ é um ideal $\mathcal{A}$-invariante de V_λ que satisfaz $\big(J / (J \cap V_\lambda)\langle X,\mathcal{A}\rangle\big) \cap (J / J \cap V_\lambda) = 0$.

(2) Se L é um ideal de $V_{\lambda+1}$ então $L \cap V_\lambda$ é um ideal de V_λ que satisfaz $\sigma_\lambda(L \cap V_\lambda) \subseteq L \cap V_\lambda$ e $\big(L / (L \cap V_\lambda)\ \langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle\big) \cap (L / L \cap V_\lambda) = 0$.

3 – Outros Anéis-Extensão.

Neste Parágrafo, enquanto não se disser o contrário, K denotará um anel comutativo com unidade, R um K-álgebra associativa e C um subanel de K.

Consideremos o anel soma direta $R^* = R \oplus C$, onde a soma e o produto vêm dados por

$$(r,c) + (r',c') = (r + r',\ c + c') \qquad \text{e} \qquad (r,c)(r',c') = (rr' + cr',\ +rc' cc')$$

para todo $(r,c),(r',c') \in R^*$.

Sabe-se que R^* é um anel com unidade extensão dos anéis R e C.

Consideremos o anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$. Se para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos a função $d^*_\lambda : R^* \longrightarrow R^*$ por $d^*_\lambda = (d_\lambda, 0)$, então não é difícil provar que d^*_λ é um K-derivação de R^* que estende a derivação d_λ.

Se $\Delta^* : \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Der}_K(R^*)$ é definida por $\Delta^*\Big(\sum_\lambda k_\lambda x_\lambda\Big) = \sum_\lambda k_\lambda d^*_\lambda$, então Δ^* é um homomorfismo de K-módulos. Assim podemos construir o anel de operadores diferenciais $R^* * \mathcal{L}$ (onde $t^* : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow R^*$ é definido por $t^*(x,y) = \big(t(x,y),0\big)$, $\forall\, (x,y) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$).

É fácil provar que R é um $\mathcal{L}$-ideal de R^* (i.e. $d_\lambda^*(R) \subseteq R \quad \forall\, \lambda \in \Lambda$), e portanto $R * \mathcal{L}$ é um ideal do anel $R^* * \mathcal{L}$.

PROPOSIÇÃO 3.1 – Sejam $r \in R$ e $\overline{\nu}, \overline{\mu} \in \Omega$. Se no anel $R * \mathcal{L}$ se tem

$$\overline{x}^{\overline{\nu}}\, r = r\, \overline{x}^{\overline{\nu}} + \sum_{\overline{\rho} < \overline{\nu}} r_{\overline{\rho}}\, \overline{x}^{\overline{\rho}} \qquad \text{e} \qquad \overline{x}^{\overline{\nu}}\, \overline{x}^{\overline{\mu}} = \overline{x}^{\overline{\nu}+\overline{\mu}} + \sum_{\overline{\rho} < \overline{\nu}+\overline{\mu}} s_{\overline{\rho}}\, \overline{x}^{\overline{\rho}}\,,$$

então no anel $R^* * \mathcal{L}$ se tem

$$\overline{x}^{\overline{\nu}}\,(r,c) = (r,c)\,\overline{x}^{\overline{\nu}} + \sum_{\overline{\rho} < \overline{\nu}} r_{\overline{\rho}}\, \overline{x}^{\overline{\rho}} \;\text{ e }\; \overline{x}^{\overline{\nu}}\, \overline{x}^{\overline{\mu}} = \overline{x}^{\overline{\nu}+\overline{\mu}} + \sum_{\overline{\rho} < \overline{\nu}+\overline{\mu}} (s_{\overline{\rho}}, 0)\, \overline{x}^{\overline{\rho}}\,, \quad \forall\, c \in C\,.$$

PROVA – Isto é conseqüência direta dos fatos $d_\lambda^*(R) \subseteq R \quad \forall\, \lambda \in \Lambda$, $K \subseteq R^*$, e $t^*(\mathcal{L} \times \mathcal{L}) \subseteq R$.

PROPOSIÇÃO 3.2 – Se C[X] denota o anel de polinômios sobre C com indeterminadas $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, então os anéis $(R \oplus C) * \mathcal{L} \,/\, R * \mathcal{L}$ e C[X] são isomorfos.

PROVA – É suficiente considerar o epimorfismo $\pi : (R \oplus C) * \mathcal{L} \longrightarrow C[X]$, definido por $\pi\Big(\sum_{\overline{\nu}} (r_{\overline{\nu}}, c_{\overline{\nu}})\, \overline{x}^{\overline{\nu}}\Big) = \sum c_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}}$ (onde $X^{\overline{\nu}} = X_{\lambda_1}^{\nu_{\lambda_1}} \cdots X_{\lambda_n}^{\nu_{\lambda_n}}$), o qual tem como kernel o ideal $R * \mathcal{L}$ de $(R \oplus C) * \mathcal{L}$.

Agora consideramos os aneis $(R, \mathcal{A}, \mathcal{U})$ e $R^\flat = R \times C$ (com a soma e o produto usuais). Se para cada $\lambda \in \Lambda^*$ definimos a função $\sigma_\lambda^\flat : R^\flat \longrightarrow R^\flat$ por $\sigma_\lambda^\flat = (\sigma_\lambda, 1_C)$, então não é difícil provar que $\sigma_\lambda^\flat$ é um automorfismo de $R^\flat$ que estende o autormorfismo σ_λ.

Também pode-se provar sem dificuldade que, se $\mathcal{A}^\flat = \{\sigma_\lambda^\flat : \lambda \in \Lambda^*\}$ e $\mathcal{U}^\flat = \{u_{i,\lambda}^\flat = (u_{i,\lambda}, 1) : i, \lambda \in \Lambda^*\}$, então $(R^\flat, \mathcal{A}^\flat, \mathcal{U}^\flat)$ satisfaz a condição (K). Assim torna-se possível construir os skew anéis $R^\flat\langle X, \mathcal{A}^\flat\rangle$ e $R^\flat[X, \mathcal{A}^\flat]$ (onde X é o conjunto de indeterminadas $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda^*\}$).

Utilizando as propriedades de multiplicação nos skew anéis $R^\flat\langle X, \mathcal{A}^\flat\rangle$ e levando em conta a forma em que $\mathcal{A}^\flat$ e $\mathcal{U}^\flat$ têm sido definidos, podemos provar facilmente o seguinte.

PROPOSIÇÃO 3.3 – Se no anel $R(X,\mathcal{A})$ (respectivamente $R[X,\mathcal{A}]$), se tem $X^{\overline{\nu}} X^{\overline{\mu}} = u^{(\overline{\nu},\overline{\mu})} X^{(\overline{\nu}+\overline{\mu})}$, então no anel $R^e(X,\mathcal{A}^e)$ (respectivamente $R^e[X,\mathcal{A}^e]$, tem-se $X^{\overline{\nu}} X^{\overline{\mu}} = (u^{(\overline{\nu},\overline{\mu})}, 1) X^{\overline{\nu}+\overline{\mu}}$.

É claro que o ideal R de R^e é $\mathcal{A}^e$-invariante. Como conseqüência disso, temos que $R(X,\mathcal{A})$ é um ideal do anel $R^e(X,\mathcal{A}^e)$, e $R[X,\mathcal{A}]$ é um ideal do anel $R^e[X,\mathcal{A}^e]$.

PROPOSIÇÃO 3.4 – Se $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda^*\}$ é um conjunto de indeterminadas e $C\langle X\rangle$ denota o anel de Laurent $\left\{ \sum_{\overline{\nu}} c_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}} \text{ (soma finita)} : c_{\overline{\nu}} \in C, \overline{\nu} \in \Omega_1^* \right\}$, então

(1) $(R \times C)(X,\mathcal{A}^e) / R(X,\mathcal{A}) \cong C\langle X\rangle$,

(2) $(R \times C)[X, \mathcal{A}^e] / R[X,\mathcal{A}] \cong C[X]$.

PROVA – É análoga à prova da Proposição 3.2

Para um anel R e cada primo p definimos o conjunto $R_p = \{r \in R : pr = 0\}$.

É rotineiro provar que R_p é um ideal de R. Também prova-se sem dificuldade os seguintes resultados

PROPOSIÇÃO 3.5 – Se $\mathcal{L}$ é um K-álgebra de Lie que age sobre o anel R como K-derivações, então R_p é um $\mathcal{L}$-ideal de R.

PROPOSIÇÃO 3.6 – Se consideramos o anel $(R,\mathcal{A},\mathcal{U})$, então R_p é um ideal $\mathcal{A}$-invariante do anel R.

Agora passamos a apresentar alguns resultados das extensões tipo anéis de operadores diferenciais e skew anéis do anel produto tensorial $R \otimes_c B$.

Seja B um anel com unidade extensão do anel C.

Suponhamos que a K-álgebra de Lie $\mathcal{L}$ age sobre R como K-derivações. Se

para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos a função $\overline{d}_\lambda : R \otimes_c B \longrightarrow R \otimes_c B$ por $\overline{d}_\lambda = d_\lambda \otimes 1_B$, então não é difícil provar que $\overline{d}_\lambda$ é uma K-derivação do anel $R \otimes_c B$. Se $\overline{\Delta}$: $\mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Der}_K(R \otimes_c B)$ é a função definida por $\overline{\Delta}\Big(\sum_\lambda k_\lambda x_\lambda\Big) = \sum_\lambda k_\lambda \overline{d}_\lambda$, então $\overline{\Delta}$ é um homomorfismo de K-módulos que permite construir o anel de operadores diferenciais $(R \otimes_c B) * \mathcal{L}$.

Usando as regras da multiplicação nos anéis de operadores diferenciais, podemos provar sem problemas o seguinte

LEMA 3.7 – Se no anel $R * \mathcal{L}$ se têm as relações

$$\overline{x}^{\overline{\nu}}\, r = r\,\overline{x}^{\overline{\nu}} + \sum_{\overline{\rho} < \overline{\nu}} r_{\overline{\rho}}\,\overline{x}^{\overline{\rho}} \qquad \text{e} \qquad \overline{x}^{\overline{\nu}}\,\overline{x}^{\overline{\mu}} = \overline{x}^{\overline{\nu}+\overline{\mu}} + \sum_{\overline{\rho} < \overline{\nu}+\overline{\mu}} s_{\overline{\rho}}\,\overline{x}^{\overline{\rho}}\,,$$

então no anel $(R \otimes_c B) * \mathcal{L}$ temos

$$\overline{x}^{\overline{\nu}}(r \otimes b) = (r \otimes b)\,\overline{x}^{\overline{\nu}} + \sum_{\overline{\rho} < \overline{\nu}} (r_{\overline{\rho}} \otimes b)\,\overline{x}^{\overline{\rho}} \quad \text{e} \quad \overline{x}^{\overline{\nu}}\,\overline{x}^{\overline{\mu}} = \overline{x}^{\overline{\nu}+\overline{\mu}} + \sum_{\overline{\rho} < \overline{\nu}+\overline{\mu}} (s_{\overline{\rho}} \otimes 1)\,\overline{x}^{\overline{\rho}}\,,$$

para todo $b \in B$.

O seguinte Teorema será de muita utilidade para o cálculo de α-radicais dos anéis $R[X,\mathcal{D}]$ (ver parágrafo 2 do Capítulo II), e é demonstrado aplicando em forma adequada as regras de multiplicação do lema 3.7.

TEOREMA 3.8 – A função $G : (R * \mathcal{L}) \otimes_c B \longrightarrow (R \otimes_c B) * \mathcal{L}$, definida por

$$G\Big(\sum_{\ell=1}^{u} \Big(\sum_{\overline{\nu}} r_{\overline{\nu}}^{(\ell)}\,\overline{x}^{\overline{\nu}}\Big) \otimes b_{(\ell)}\Big) = \sum_{\ell=1}^{u} \sum_{\overline{\nu}} (r_{\overline{\nu}}^{(\ell)} \otimes b_\ell)\overline{x}^{\overline{\nu}}\,,$$

é um isomorfismo de anéis com inverso definido por

$$G^{-1}\Big(\sum_{\overline{\nu}} \Big(\sum_{\ell=1}^{u_{\overline{\nu}}} (r_\ell^{(\overline{\nu})} \otimes b_\ell^{(\overline{\nu})})\Big)\,\overline{x}^{\overline{\nu}}\Big) = \sum_{\overline{\nu}} \sum_{\ell=1}^{u_{\overline{\nu}}} (r_\ell^{(\overline{\nu})}\,\overline{x}^{\overline{\nu}} \otimes b_\ell^{(\overline{\nu})})\,.$$

Agora consideremos o anel $(R,\mathcal{A},\mathcal{U})$. Se para cada $\lambda \in \Lambda^*$ definimos a função $\overline{\sigma}_\lambda : R \otimes_c B \longrightarrow R \otimes_c B$ por $\overline{\sigma}_\lambda = \sigma_\lambda \otimes 1_B$, então $\overline{\sigma}_\lambda$ é um automorfismo do

anel $R \otimes_c B$. Se $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{\sigma}_\lambda : \lambda \in \Lambda^*\}$ e $\overline{\mathcal{U}} = \{u_{\iota,\lambda} \otimes 1 : \iota, \lambda \in \Lambda^*\}$, então $(R, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{U}})$ é um anel que satisfaz a condição (K). Com isso podemos definir os skew anéis $(R \otimes_c B)(X, \overline{\mathcal{A}})$ e $(R \otimes_c B)[X, \overline{\mathcal{A}}]$.

LEMA 3.9 – Se no anel $R(X, \mathcal{A})$ (respectivamente $R[X, \mathcal{A}]$), se tem que $X^{\overline{\nu}} X^{\overline{\mu}} = u^{(\overline{\nu}, \overline{\mu})} X^{\overline{\nu} + \overline{\mu}}$, então no anel $(R \otimes_c B)(X, \overline{\mathcal{A}})$ (respectivamente $(R \otimes_c B)[X, \overline{\mathcal{A}}]$) se tem $X^{\overline{\nu}} X^{\overline{\mu}} = (u^{(\overline{\nu}, \overline{\mu})} \otimes 1) X^{\overline{\nu} + \overline{\mu}}$.

O Teorema a seguir cumpre um papel importante na prova dos resultados centrais do parágrafo 3 no próximo Capítulo.

TEOREMA 3.10 – A função $H : R(X, \mathcal{A}) \otimes_c B \longrightarrow (R \otimes_c B)(X, \overline{\mathcal{A}})$, definida por

$$H\Big(\sum_{\ell=1}^{u} \Big(\sum_{\overline{\nu}} r_{\overline{\nu}}^{(\ell)} X^{\overline{\nu}} \Big) \otimes b_\ell \Big) = \sum_{\ell=1}^{u} \sum_{\overline{\nu}} (r_{\overline{\nu}}^{(\ell)} \otimes b_\ell) X^{\overline{\nu}} ,$$

é um isomorfismo de anéis tal que sua restrição ao anel $R[X, \mathcal{A}] \otimes_c B$ também é um isomorfismo sobre o anel $(R \otimes_c B)[X, \overline{\mathcal{A}}]$.

CAPÍTULO II

RADICAIS DOS ANÉIS R[X,$\mathcal{D}$], R(X,$\mathcal{A}$) E R[X,$\mathcal{A}$]

Neste Capítulo estudaremos certos radicais dos anéis de operadores diferenciais R[X,$\mathcal{D}$] e dos skew anéis R(X,$\mathcal{A}$) e R[X,$\mathcal{A}$].

1 – Introdução

Iniciamos apresentando alguns resultados referentes a radicais de anéis associativos. O leitor interessado nas provas e outros detalhes pode consultar [7], [22], ou as respectivas referências dadas.

Seja α uma certa propriedade que um anel pode possuir. Os anéis que possuem a propriedade α serão chamadas *α-anéis*. Todo ideal de um anel R que como anel é um α-anel, será dito um *α-ideal* de R.

A seguinte definição é devida a Amitsur-Kurosh. Uma propriedade α será dita *propriedade radical* se satisfizer as condições seguintes:

(a) toda imagem homomorfa de um α-anel é um α-anel;

(b) todo anel R tem um α-ideal $\alpha(R)$, que contém qualquer outro α-ideal de R;

(c) para cada anel R o anel quociente $R / \alpha(R)$ não tem nenhum α-ideal não nulo.

Seja α uma propriedade radical. O maior α-ideal $\alpha(R)$ do anel R é chamado o *α-radical* de R. Se, em particular, $\alpha(R) = R$, então R é dito *anel α-radical*. Dizemos que α é *hereditária* se todo ideal de um anel α-radical é também α-radical. As propriedades hereditárias podem ser caracterizadas como segue. Uma propriedade radical α é hereditária se, e somente se, para cada anel R e cada ideal I de R verifica-se a condição $\alpha(I) = \alpha(R) \cap I$.

Os radicais primo (L), de Jacobson (J), de Brown McCoy ($\mathcal{G}$), de Levitzki ($\mathcal{L}$) ([17]) e o radical fortemente primo (s) ([18]) são exemplos de radicais hereditarios.

Sejam R e S anéis tais que S é uma extensão de R. Dizemos que S é uma *extensão liberal* de R se existirem elementos $s_1, s_2, \ldots, s_n$ do anel S tais que $S = \sum_{i=1}^{n} s_i R$ e $s_i r = r s_i$, $\forall\, r \in R$, $\forall\, i\, (1 \leq i \leq n)$ ([20]).

Um exemplo de extensão liberal é o seguinte. Sejam C um anel comutativo e A uma C-álgebra. Se B é uma extensão Galoissiana finita de C então $A \otimes_c B$ é uma extensão liberal de A. De fato, sendo B uma extensão Galoissiana de C, então podemos provar, repetindo o processo seguido na prova do Lema 1.7 em [4], que $A \otimes_c B$ é uma extensão Galoissiana de A. Se $\{b_1, \ldots b_n\}$ são os C-geradores de B então os elementos $s_1 = 1 \otimes b_1, \ldots, s_n = 1 \otimes b_n$ do anel $A \otimes_c B$ são tais que $A \otimes_c B = \sum_{i=1}^{n} s_i A$, e $s_i a = a s_i$, $\forall\, a \in A$, $\forall\, i\, (1 \leq i \leq n)$.

Um radical α será chamado *admissível* se $\alpha(R) = \alpha(S) \cap R$ para toda extensão liberal S de R. Sendo que toda extensão liberal é normalizante ([20]) então a definição de radical admissível considerada por Ferrero em [9] é mais forte do que a nossa

definição. Em conseqüência, os radicais L, $\mathcal{L}$, J, $\mathcal{G}$ e s são radicais admissíveis ([9], Sec. 1).

Em ([7]), pág. 155) define-se o *radical F* associado à classe de todos os corpos e se prova que o radical F de um anel associativo R vem dado por

$$F(R) = \cap \{M \lhd R : R/M \text{ é um corpo } \} .$$

Analogamente definimos o *radical superior* γ associado à classe de todos os corpos finitos. Pode-se provar que

$$\gamma(R) = \cap \{M \lhd R : R/M \text{ é um corpo finito } \} .$$

Sendo que as classes que definem os radicais F e γ são especiais, então F e γ são hereditários ([7], Cap. 7).

Sejam α e β duas propriedades radicais. Dizemos que $\alpha \leq \beta$ se $\alpha(R) \subseteq \beta(R)$ para todo anel associativo R.

É claro que $F \leq \gamma$. Também em [7] prova-se que

$$L \leq \mathcal{L} \leq J \leq \mathcal{G} \leq F$$

e $L \leq s \leq N$.

A fim de apresentar o primeiro resultado importante desta tese fazemos previamente as seguintes considerações.

Sejam $n \geq 1$ um número inteiro e p um inteiro primo. Consideremos o epimorfismo $\pi_0 : \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n]$ definido por

$$\pi_0\Big(\sum_{\overline{\nu}} r_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}}\Big) = \sum_{\overline{\nu}} (r_{\overline{\nu}} + p\mathbb{Z})\, X^{\overline{\nu}} ,$$

onde $\overline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$. Sendo que $\mathbb{Z}_p[X_1]$ é um subanel de $\mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n]$, então para um polinômio $g_1(X_1) \in \mathbb{Z}_p[X_1]$ irredutível em $\mathbb{Z}_p[X_1]$ existe um polinômio $f_1(X_1) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $\pi_0(f_1(X_1)) = g_1(X_1)$.

Agora definimos o corpo finito $G_1 = \mathbb{Z}_p[X_1] / g(X_1)\,\mathbb{Z}_p[X_1]$. Consideremos o epimorfismo $\pi_1 : \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow G_1[X_2, \ldots, X_n]$, definido por

$$\pi_1\Big(\sum_{(\nu_2, \ldots, \nu_n)} h_{(\nu_2, \ldots, \nu_n)}(X_1)\, X_2^{\nu_2}, \ldots, X_n^{\nu_n}\Big) = \sum_{(\nu_2, \ldots, \nu_n)} \big(h_{(\nu_2, \ldots, \nu_n)}(X_1) + g_1(X_1)\,\mathbb{Z}_p[X_1]\big)\, X_2^{\nu_2}, \ldots, X_n^{\nu_n}\,,$$

(onde $h_{(\nu_2, \ldots, \nu_n)}(X_1) \in \mathbb{Z}_p[X_1]$), e consideremos um polinômio $g_2(X_2) \in G_1[X_2]$ irredutível em $G_1[X_2]$. Porque $G_1[X_2] \subseteq G_1[X_2, \ldots, X_n]$, existe um polinômio $f_2(X_2) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $\pi_1 \circ \pi_0\big(f_2(X_2)\big) = g_2(X_2)$.

Continuando dessa forma definimos, para cada $j \in \{2,3, \ldots, n-1\}$, o corpo finito $G_j = G_{j-1}[X_j] / g_j(X_j)\, G_{j-1}[X_j]$. Então consideramos o epimorfismo $\pi_j : G_{j-1}[X_j, \ldots, X_n] \longrightarrow G_j[X_{j+1}, \ldots, X_n]$, um polinômio $g_{j+1}(X_{j+1}) \in G_j[X_{j+1}]$ irredutível em $G_j[X_{j+1}]$ e um polinômio $f_{j+1}(X_{j+1}) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $\pi_j \circ \cdots \circ \pi_1 \circ \pi_0\big(f_{j+1}(X_{j+1})\big) = g_{j+1}(X_{j+1})$.

Finalmente definimos o corpo finito $G_n = G_{n-1}[X_n] / g_n(X_n)\, G_{n-1}[X_n]$.

Se nessas condições consideramos o ideal do anel $\mathbb{Z}\,[X_1, \ldots, X_n]$,

$$M(p, f_1, \ldots, f_n) = p\,\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] + \sum_{i=1}^{n} f_i(X_i)\,\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]\,,$$

então temos os seguintes resultados.

LEMA 1.1 – Para cada primo p e polinômios $f_1, \ldots, f_n$ de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, definidos como acima, se tem que $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] / M(p, f_1, \ldots, f_n)$ é um corpo finito.

PROVA – Isso decorre do fato seguinte:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \,/\, M(p, f_1, \ldots, f_n) \\
&= \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \Big/ \Big(p\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] + \sum_{i=1}^{n} f_i(X_i)\, \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \Big) \\
&= \frac{\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \,/\, p\ \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]}{\Big(p\ \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] + \sum_{i=1}^{n} f_i(X_i)\, \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \Big) \Big/ p\ \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]} \\
&\cong \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n] \Big/ \Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_0(f_i(X_i))\, \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n] \Big) \\
&= \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n] \Big/ \Big(g_1(X_1)\, \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n] + \sum_{i=2}^{n} \pi_0(f_i(X_i))\, \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n] \Big) \\
&= \frac{\mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n] \,/\, g_1(X_1)\, \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n]}{\Big(g_1(X_1)\, \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n] + \sum_{i=2}^{n} \pi_0(f_i(X_i))\, \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n] \Big) \Big/ g_1(X_1)\, \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n]} \\
&\cong G_1[X_1, \ldots, X_n] \Big/ \Big(\sum_{i=2}^{n} \pi_1 \circ \pi_0(f_i(X_i))\, G_1[X_1, \ldots, X_n] \Big) \\
&= G_1[X_1, \ldots, X_n] \Big/ \Big(g_2(X_2)\, G_1[X_2, \ldots, X_n] + \sum_{i=3}^{n} \pi_1 \circ \pi_0(f_i(X_i))\, G_1[X_2, \ldots, X_n] \Big) \\
&= \frac{G[X_2, \ldots, X_n] \,/\, g_2(X_2)\, G_1[X_2, \ldots, X_n]}{\Big(g_2(X_2)\, G_1[X_2, \ldots, X_n] + \sum_{i=3}^{n} \pi_1 \circ \pi_0(f_i(X_i))\, G_1[X_2, \ldots, X_n] \Big) \Big/ g_2(X_2)\, G_1[X_2, \ldots, X_n]} \\
&\cong G_2[X_3, \ldots, X_n] \Big/ \Big(\sum_{i=3}^{n} \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi_0(f_i(X_i))\, G_2[X_3, \ldots, X_n] \Big) \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&= G_{n-1}[X_n] \,/\, \pi_{n-1} \circ \cdots \circ \pi_1 \circ \pi_0(f_n(X_n))\, G_{n-1}[X_n] \\
&= G_{n-1}[X_n] \,/\, g_n(X_n)\, G_{n-1}[X_n] \\
&= G_n \,,
\end{aligned}
$$

que é um corpo finito.

LEMA 1.2 – A intersecção de todos os ideais $M(p,f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, onde p é um primo arbitrário e $f_1, \ldots, f_n$ são quaisquer polinômios do anel $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, definidos como acima, é nula.

PROVA – Denotemos por I o ideal intersecção de todos os ideais $M(p,f_1, \ldots, f_n)$. Consideremos um dos ideais $M(p,f_1, \ldots, f_n)$ e o epimorfismo canônico $\pi_n : G_{n-1}[X_n \longrightarrow G_n$.

Se $H = \sum_{\ell_n=0}^{m_n} h^{(\ell_n)}(X_1, \ldots, X_{n-1}) X_n^{\ell_n}$ é um elemento de I (com $h^{(\ell_n)}(X_1, \ldots, X_{n-1}) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$), então $\pi_n \circ \cdots \circ \pi_0(H) = 0$, i.e., $\pi_{n-1} \circ \cdots \circ \pi_0(H) \in g_n(X_n) G_{n-1}[X_n]$.

Agora, sendo que os $g_n(X_n) \in G_{n-1}[X_n]$ são irredutíveis em $G_{n-1}[X_n]$ e arbitrários, então em $G_{n-1}[X_n]$ se tem

$$0 = \pi_{n-1} \circ \cdots \circ \pi_0(H) = \sum_{\ell_n=0}^{m_n} \pi_{n-1} \circ \cdots \circ \pi_0\big(h^{(\ell_n)}(X_1, \ldots, X_{n-1})\big) X_n^{\ell_n} .$$

Logo $\pi_{n-1} \circ \cdots \circ \pi_0\big(h^{(\ell_n)}(X_1, \ldots, X_{n-1})\big) = 0$, $\forall\ \ell_n\ (0 \leq \ell_n \leq m_n)$, i.e., $\pi_{n-2} \circ \cdots \circ \pi_0\big(h^{(\ell_n)}(X_1, \ldots, X_n)\big) \in g_{n-1}(X_{n-1}) G_{n-2}[X_{n-1}]$, $\forall\ \ell_n\ (0 \leq \ell_n \leq m_n)$. Pela arbitrariedade dos $g_{n-1}(X_{n-1})$, concluímos que $\pi_{n-2} \circ \cdots \circ \pi_0\big(h^{(\ell_n)}(X_1, \ldots, X_{n-1})\big) = 0$, $\forall\ l_n\ (0 \leq \ell_n \leq m_n)$.

Se para cada $\ell_n \in \{0,1, \ldots, m_n\}$ temos

$$h^{(\ell_n)}(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \sum_{\ell_{n-1}=0}^{m_{n-1}} h^{(\ell_{n-1},\ell_n)}(X_1, \ldots, X_{n-2}) X_{n-1}^{\ell_{n-1}} ,$$

onde $h^{(\ell_{n-1},\ell_n)}(X_1, \ldots, X_{n-2}) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n-2}]$, então podemos provar como acima que $\pi_{n-3} \circ \ldots \circ \pi_0\big(h^{(\ell_{n-1},\ell_n)}(X_1, \ldots, X_{n-2})\big) = 0$ para todo ℓ_{n-1} e ℓ_n com $0 \leq \ell_{n-1} \leq m_{n-1}$ e $0 \leq \ell_m \leq m_n$.

Continuando dessa forma podemos provar o seguinte. Se

$$h^{(\ell_j, \ldots, \ell_n)}(X_1, \ldots, X_{j-1}) = \sum_{\ell_{j-1}=0}^{m_{j-1}} h^{(\ell_{j-1}, \ldots, \ell_n)}(X_1, \ldots, X_{j-2}) X_{j-1}^{\ell_{j-1}} ,$$

para cada $j \in \{3, \ldots, n\}$ e cada $\ell_j \in \{0,1, \ldots, m_j\}$ (onde se tem que $h^{(\ell_{j-1}, \ldots, \ell_n)}(X_1, \ldots, X_{j-2}) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{j-2}]$), então

$$\pi_{j-2} \circ \cdots \circ \pi_0\big(h^{(\ell_{j-1}, \ldots, \ell_n)}(X_1, \ldots, X_{j-2})\big) = 0 .$$

Assim $\pi_1 \circ \pi_0\big(h^{(\ell_2, \ldots, \ell_n)}(X_1)\big) = 0$, $\forall\, \ell_j$, i.e., $\pi_0\big(h^{(\ell_2, \ldots, \ell_n)}(X_1)\big) \in g_1(X_1)\,\mathbb{Z}_p[X_1]$, $\forall\, \ell_j$. Sendo $g_1(X_1)$ arbitrário, temos que necessariamente $\pi_0\big(h^{(\ell_2, \ldots, \ell_n)}(X_1)\big) = 0$, $\forall\, \ell_j$.

Se $h^{(\ell_2, \ldots, \ell_n)}(X_1) = \sum_{\ell_1 = 0}^{m_1} h^{(\ell_1, \ldots, \ell_n)} X_1^{\ell_1}$ (com $h^{(\ell_1, \ldots, \ell_n)} \in \mathbb{Z}$), então $\pi_0(h^{(\ell_1, \ldots, \ell_n)}) = 0$, $\forall\, \ell_j$, i.e., $h^{(\ell_1, \ldots, \ell_n)} \in p\,\mathbb{Z}$, $\forall\, \ell_j$. Sendo os primos p arbitrários, temos que $h^{(\ell_1, \ldots, \ell_n)} = 0$, $\forall\, \ell_j$.

Como conseqüência disso temos que $h^{(\ell_j, \ldots, \ell_n)}(X_1, \ldots, X_{j-1}) = 0$, $\forall\, j$ com $2 \leq j \leq n$ e $\forall\, \ell_j$ com $0 \leq \ell_j \leq m_j$. Assim $h^{(\ell_n)}(X_1, \ldots, X_{n-1}) = 0$, $\forall\, \ell_n$ com $0 \leq \ell_n \leq m_n$, i.e., $H = 0$.

Agora estamos em condições de apresentar o primeiro resultado importante.

TEOREMA 1.3 – Se $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ são indeterminadas, então $\gamma(\mathbb{Z}[X]) = 0$.

PROVA – Seja f um elemento de $\gamma(\mathbb{Z}[X])$ e sejam $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ elementos de Λ tais que $f = f(X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n})$.

No subanel $\mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}]$ de $\mathbb{Z}[X]$ consideremos um dos ideais $M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \ldots, f_n(X_{\lambda_n}))$, onde p é um primo e $f_i(X_{\lambda_i}) \in \mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}]$ é tal que $g_i(X_{\lambda_i}) = \pi_{i-1} \circ \cdots \circ \pi_0(f_i(X_{\lambda_i})) \in G_{i-1}[X_{\lambda_i}]$ é irredutível em $G_{i-1}[X_{\lambda_i}]$, $\forall\, i\ (1 \leq i \leq n)$.

Consideremos o ideal de $\mathbb{Z}[X]$

$$\overline{M}(p, f_1(X_{\lambda_1}), \ldots, f_n(X_{\lambda_n})) = p\mathbb{Z}[X] + \sum_{i=1}^{n} f_i(X_{\lambda_i})\,\mathbb{Z}[X] + \sum_{\substack{\iota \neq \lambda_i \\ i = 1, \ldots, n}} X_\iota\,\mathbb{Z}[X] .$$

Afirmamos que

$$\overline{M}(p, f_1(X_{\lambda_1}), \ldots, f_n(X_{\lambda_n})) \cap \mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}] = M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \ldots, f_n(X_{\lambda_n})) .$$

De fato, se $g \in \overline{M}(p, f_1(X_{\lambda_1}), \ldots, f_n(X_{\lambda_n})) \cap \mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}]$, então existem elementos $g_0, g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_u$ de $\mathbb{Z}[X]$ tais que

$$g = pg_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i(X_{\lambda_i})\, g_i + \sum_{\ell=1}^{u} X_{\iota_\ell}\, h_\ell ,$$

onde $\iota_\ell \neq \lambda_i$, $\forall\, \ell$,i. Fica claro que podemos escrever

$$g = pg'_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i(X_{\lambda_i})\, g'_i + \sum_{\ell=1}^{v} X_{\iota_\ell}\, h'_\ell ,$$

sendo que agora $g'_0, g'_1, \ldots, g'_n \in \mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}]$.

Uma vez que $g \in \mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}]$, temos necessariamente $\sum_{\ell=1}^{v} X_{\iota_\ell}\, h'_\ell = 0$. Assim $g \in M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \ldots, f_n(X_{\lambda_n}))$, e acabamos de provar que

$$\overline{M}(p, f_1(X_{\lambda_1}), \ldots, f_n(X_{\lambda_n})) \cap \mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}] \subseteq M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \ldots, f_n(X_{\lambda_n})) .$$

Sendo a outra inclusão óbvia, temos a igualdade procurada.

Usando o fato de que $\mathbb{Z}[X] / \overline{M}(p, f_1(X_{\lambda_1}), \ldots, f_n(X_{\lambda_n}))$ é isomorfo com $\mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}] / M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \ldots, f_n(X_{\lambda_n}))$ e o Lema 1.1, obtemos que $f \in \overline{M}(p, f_1(X_{\lambda_1}), \ldots, f_n(X_{\lambda_n}))$, e, como conseqüência da afirmação feita antes, obtemos que $f \in M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \ldots, f_n(X_{\lambda_n}))$.

Mas o ideal $M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \ldots, f_n(X_{\lambda_n}))$ de $\mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}]$, inicialmente considerado foi arbitrário. Então podemos concluir do Lema 1.2 que $f = 0$.

Seja p qualquer número primo fixo. Para um polinômio $f_1(X_1) \in \mathbb{Z}_p[X_1]$ irredutível em $\mathbb{Z}_p[X_1]$, consideramos o corpo finito $G_1 = \mathbb{Z}_p[X_1] / f_1(X_1)\, \mathbb{Z}_p[X_1]$.

Para um polinômio $g_2(X_2) \in G_1[X_2]$ irredutível em $G_1[X_2]$ consideramos um polinômio $f_2(X_2) \in \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $\pi_1(f_2(X_2)) = g_2(X_2)$.

Se continuarmos construindo os corpos finitos G_j $(2 \leq j \leq n)$ e considerarmos os respectivos polinômios $f_j(X_j) \in \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n]$, definidos como antes, podemos provar sem dificuldade que o ideal de $\mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n]$,

$$N(f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(X_i)\, \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n] ,$$

define o corpo finito $\mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n] / N(f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n))$, e que a intersecção de todos esses ideais $N(f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n))$ de $\mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n]$ é nula.

Com uma demonstração análoga à do Teorema 1.3, podemos provar o seguinte resultado importante.

TEOREMA 1.4 – Se $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ são indeterminadas, então $\gamma(\mathbb{Z}_p[X]) = 0$.

2 – O α-radical de $R[X, \mathcal{D}]$ é um Ideal Estendido do Anel R.

Em [9] Ferrero provou que, se α é um radical que satisfaz certas condições, o α-radical do skew anel de polinômios tipo derivação R[X,D] é um ideal estendido I[X,D], onde $I = \alpha(R[X,D]) \cap R$. Um resultado similar é provado por Bergen-Montgomery e Passmar ([3]) para anéis de operadores diferenciais, mas somente quando α é o radical primo. Nesse mesmo artigo eles descrevem o radical de Jacobson para alguns anéis de operadores diferenciais particulares.

Neste parágrafo generalizamos tais resultados para o skew anel de polinômios tipo derivação $R[X, \mathcal{D}]$ e, em particular, para o anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$, quando $\mathcal{L}$ possui a propriedade (s).

Seja $\mathcal{L}$ uma K-álgebra de Lie que possui a propriedade (s), e consideremos o anel de operadores diferenciais $R[X, \mathcal{D}]$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$ consideremos a família

$$\mathcal{F}(T_\lambda) = \left\{ I \lhd T_\lambda \ : \ D_\iota(I) \subseteq I \ \forall \iota \in \Lambda^* \text{ tal que } \iota \geq \lambda \right\} .$$

Dado um radical α, definimos, para cada $\lambda \in \Lambda$, a função $\overline{\alpha}_\lambda : \mathcal{F}(T_\lambda) \longrightarrow \mathcal{F}(T_\lambda)$ por $\overline{\alpha}_\lambda(I) = \alpha(I[X, \mathcal{D}]) \cap I$. A função $\overline{\alpha}_\lambda$ não é um radical, pois não está definida para anéis associativos arbitrários. Mesmo assim a função $\overline{\alpha}_\lambda$ tem suficientes propriedades dos radicais de forma tal que podemos proceder como em [9], sec. 3.

Seja $\lambda \in \Lambda$. Se α é um radical hereditário, é claro que $\overline{\alpha}_\lambda(I) = \overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda) \cap I$, $\forall\, I \in \mathcal{F}(T_\lambda)$. Agora, se p é um primo, então $(T_\lambda)_p \in \mathcal{F}(T_\lambda)$ (Proposição I. 3.5), logo $(T_\lambda)_p [X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}] \in \mathcal{F}(T_{\lambda+1})$. Conjugando esses fatos, podemos provar o seguinte.

PROPOSIÇÃO 2.1 – Sejam $\lambda \in \Lambda$ e p um número primo. Se α é um radical hereditário, $\overline{\alpha}_{\lambda+1}\left((T_\lambda)_p [X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]\right) = \overline{\alpha}_{\lambda+1}(T_{\lambda+1}) \cap (T_\lambda)_p [X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]$.

Seja p um número primo. Temos que $(R \oplus \mathbb{Z}_p)[X, \mathcal{D}^*] \,/\, R[X, \mathcal{D}] \cong \mathbb{Z}_p[X]$ (Proposição I.3.2) e $\gamma(\mathbb{Z}_p[X]) = 0$ (Teorema 1.4). Assim fica claro que $\alpha\left((R \oplus \mathbb{Z}_p)[X, \mathcal{D}^*]\right) = \alpha\left(R[X, \mathcal{D}]\right)$ para todo radical α tal que $\alpha \leq \gamma$. Com isso prova-se sem dificuldade a

PROPOSIÇÃO 2.2 – Sejam $\lambda \in \Lambda$ e p um número primo. Se α é um radical tal que $\alpha \leq \gamma$, então $\overline{\alpha}_{\lambda+1}\left((T_\lambda \oplus \mathbb{Z}_p)[X_{\lambda+1}, D^*_{\lambda+1}]\right) = \overline{\alpha}_{\lambda+1}(T_{\lambda+1})$.

Para um número primo p e um $m \geq 1$, denotemos com F_q o corpo com $q = p^m$ elementos. No parágrafo introdutório deste Capítulo vimos que $R[X, \mathcal{D}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$ é uma extensão Galoissiana e liberal do anel $R[X, \mathcal{D}]$ (pois F_q é uma extensão Galoissiana finita de $\mathbb{Z}_p$). Então, usando o Lema 1.2 de [9], podemos concluir que $\alpha\left(R[X, \mathcal{D}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q\right) = \alpha\left(R[X, \mathcal{D}]\right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$, para todo radical α que, seja admissível.

Sejam C um anel comutativo, e A e B duas subálgebras de uma C-álgebra D. Se M é um C-módulo livre (à esquerda), então $(A \cap B) \otimes_C M = (A \otimes_C M) \cap (B \otimes_C M)$.

Suponhamos que R é uma $\mathbb{Z}_p$-álgebra, seja $\lambda \in \Lambda$ e seja G o isomorfismo de $T_\lambda[X, \mathcal{D}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$ sobre $(T_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X, \mathcal{D}]$, considerado no Teorema I. 3.8.

Usando os resultados prévios, estamos em condições de provar o seguinte.

PROPOSIÇÃO 2.3 – Se R é uma $\mathbb{Z}_p$-álgebra, $\lambda \in \Lambda$ e α é um radical admissível, então

$$\overline{\alpha}_{\lambda+1}(T_{\lambda+1}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q \overset{G}{\cong} \overline{\alpha}_{\lambda+1}\big((T_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]\big) .$$

PROVA – Temos que

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_{\lambda+1}(T_{\lambda+1}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q &= \Big(\alpha\big(T_{\lambda+1}[X, \mathcal{D}]\big) \cap T_{\lambda+1}\Big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q \\ &= \Big(\alpha\big(T_{\lambda+1}[X, \mathcal{D}]\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q\Big) \cap (T_{\lambda+1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \\ &= \alpha\big(T_{\lambda+1}[X, \mathcal{D}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q\big) \cap (T_{\lambda+1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_{\lambda+1}(T_{\lambda+1}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q &= \alpha\big(T_\lambda[X, \mathcal{D}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q\big) \cap \big(T_\lambda[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q\big) \\ &\overset{G}{\cong} \alpha\big((T_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X, \mathcal{D}]\big) \cap \big((T_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]\big) \\ &= \overline{\alpha}_{\lambda+1}\big((T_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]\big) . \end{aligned}$$

Agora podemos provar o seguinte resultado chave.

LEMA 2.4 – Seja $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq 1$, e seja α um radical hereditário, admissível tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\overline{\alpha}_\iota(T_\iota) = 0$, $\forall\, \iota < \lambda$, então $\overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda) = 0$.

PROVA – Por redução ao absurdo, suponhamos que $\overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda) \neq 0$. Logo existe um elemento não nulo f em $\overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda)$.

Caso 1: λ é um ordinal limite. Nesse caso, $T_\lambda = \bigcup_{\iota<\lambda} T_\iota$. Portanto existe um elemento $\iota < \lambda$ tal que $f \in T_\iota$. Assim $0 \neq f \in \overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda) \cap T_\iota = \overline{\alpha}_\iota(T_\iota)$, o que é uma contradição.

Caso 2: λ é um ordinal sucessor. Nesse caso, seja $\lambda = \rho + 1$ e $f = \sum_{i=0}^{m} t_i X_{\rho+1}^i$, com $t_i \in T_\rho$ e $t_m \neq 0$. Já que $\overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda) \neq 0$, será $m \geq 1$, e podemos escolher f com $m \geq 1$ minimal.

Caso 2.1: $nt_m \neq 0$, $\forall\ 0 \neq n \in \mathbb{Z}$. Para esse caso consideramos o automorfismo ζ de $R[X, \mathcal{D}]$, definido pelas relações $\zeta(r) = r$, $\forall\ r \in R$, $\zeta(X_\lambda) = X_\lambda + 1$, e $\zeta(X_\iota) = X_\iota$, $\forall\ \iota \neq \lambda$.

Sendo que ζ restrito a T_λ é um automorfismo de T_λ, o elemento $g = \zeta(f)$ pertence a $\zeta(\overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda)) = \overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda)$. Logo $h = f - g \in \overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda)$. Mas h tem grau menor do que m (em relação à variavel $X_{\rho+1}$). Então $h = 0$.

Por isso

$$\sum_{i=0}^{m} t_i X_{\rho+1}^i = f = g = \sum_{i=0}^{m} t_i (X_{\rho+1} + 1)^i = \sum_{i=0}^{m} t_i \sum_{\ell=0}^{i} \binom{i}{\ell} X_{\rho+1}^\ell ,$$

e temos que $t_{m-1} = t_{m-1} + \binom{m}{m-1} t_m$, i.e., $t_m = 0$, uma contradição

Caso 2.2: existe $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ tal que $nt_m = 0$. Se $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ é tal que $n t_m = 0$, então $n f = 0$, e podemos considerar um número primo p e um elemento não nulo $f = \sum_{i=0}^{m} t_i X_{\rho+1}^i \in \overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda)$ tais que $m \geq 1$ é minimal e $pf = 0$. Daí $f \in (T_\rho)_p [X_{\rho+1}, D_{\rho+1}]$ e, em vista da Proposição 2.1, $f \in \overline{\alpha}_{\rho+1}((T_\rho)_p [X_{\rho+1}, D_{\rho+1}])$. Em conseqüência disso, podemos supor que R (e portanto T_ρ) seja uma $\mathbb{Z}_p$-álgebra.

Pela Proposição 2.2 $f \in \overline{\alpha}_{\rho+1}((T_\rho \oplus \mathbb{Z}_p)[X_{\rho+1}, D_{\rho+1}])$, e podemos supor que R contém o corpo $\mathbb{Z}_p$. Seja G o isomorfismo de $T_\rho[X, \mathcal{D}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$ sobre $(T_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X, \mathcal{D}]$. Se $g = G(f \otimes 1)$, então $g \in \overline{\alpha}_{\rho+1}((T_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X_{\rho+1}, D_{\rho+1}])$

(Proposição 2.3) e $g = \sum_{i=0}^{m} (t_i \otimes 1) X_{\rho+1}^i$, com $m \geq 1$ minimal.

Se definimos $q = p^m$, então $q > m$ e, portanto, podemos escolher m elementos não nulos $u_1, \ldots, u_m$ de F_q. Cada elemento u_s determina um automorfismo ζ_s de $R[X, \mathcal{D}]$ que satisfaz as condições $\zeta_s(r) = r \quad \forall\, r \in R$, $\zeta_s(X_s) = X_s + u_s$, e $\zeta_\iota(X_\iota) = X_\iota \quad \forall\, \iota \neq \lambda$.

Conforme foi feito no Caso 2.1 podemos provar que necessariamente se tem $\zeta_s(g) = g$, $\forall\, s$ com $1 \leq s \leq m$, isto é,

$$\sum_{i=0}^{m} (t_i \otimes 1) X_{\rho+1}^i = \sum_{i=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{i} \binom{i}{\ell} (t_i \otimes 1) u_s^\ell X_{\rho+1}^{i-\ell} ,$$

para todo $s \in \{1, \ldots m\}$. Daí $t_0 \otimes 1 = \sum_{i=0}^{m} (t_i \otimes 1) u_s^\ell$, $\forall\, s$ com $1 \leq s \leq m$, e, portanto,

$$\begin{aligned}
(t_1 \otimes 1) u_1 + (t_2 \otimes 1) u_1^2 + \cdots + (t_m \otimes 1) u_1^m &= 0, \\
(t_1 \otimes 1) u_2 + (t_2 \otimes 1) u_2^2 + \cdots + (t_m \otimes 1) u_2^m &= 0, \\
&\vdots \\
(t_1 \otimes 1) u_m + (t_2 \otimes 1) u_m^2 + \cdots + (t_m \otimes 1) u_m^m &= 0 .
\end{aligned}$$

Dado que $\det [u_j^i] = u_1 u_2 \ldots u_m \Delta \neq 0$ (onde Δ denota o determinante de Vandermonde $\prod_{i<j} (u_i - u_j)$), tem se $t_i \otimes 1 = 0$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq m$. Como conseqüência, $g = t_0 \otimes 1$ e temos $f = t_0$. Assim $m = 0$ e chegamos a uma contradição. Isto completa a prova do Lema.

LEMA 2.5 – Seja α um radical hereditário, admissível e tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\alpha(R[X, \mathcal{D}]) \cap R = 0$, $\alpha(R[X, \mathcal{D}]) = 0$.

PROVA – Vejamos primeiro, usando indução transfinita sobre λ, que $\overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda) = 0$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$.

A condição dada na hipótese $\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R = 0$ significa $\overline{\alpha}_0(T_0) = 0$.

Seja $\lambda \in \Lambda$ com $\lambda \geq 1$, e suponhamos $\overline{\alpha}_\iota(T_\iota) = 0 \quad \forall\, \iota < \lambda$. Pelo Lema 2.4 temos $\overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda) = 0$. Assim $\overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda) = 0 \quad \forall\, \lambda \in \Lambda$.

Agora seja $f \in \alpha(R[X,\mathcal{D}])$. Se $\lambda \in \Lambda$ é tal que $f \in T_\lambda$, temos que f pertence a $\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap T_\lambda = \overline{\alpha}_\lambda(T_\lambda) = 0$ e o Lema está demonstrado.

Como conseqüência desse Lema conseguimos o seguinte resultado, o mais importante deste parágrafo.

TEOREMA 2.6 – Se α é um radical hereditário e admissível tal que $\alpha \leq \gamma$, então $\alpha(R[X,\mathcal{D}]) = \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big)[X,\mathcal{D}]$.

PROVA – Sendo

$$\begin{aligned}
&\alpha\Big(\Big(R \Big/ \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big)\Big)[X,\mathcal{D}]\Big) \bigcap \Big(R \Big/ \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big)\Big) \\
&\quad \cong \alpha\Big(R[X,\mathcal{D}] \Big/ \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big)[X,\mathcal{D}]\Big) \bigcap \Big(R \Big/ \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big)\Big) \\
&\quad = \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \Big/ \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big)[X,\mathcal{D}]\Big) \bigcap \Big(R \Big/ \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big)\Big)\,,
\end{aligned}$$

segue-se da Proposição I.1.9. que

$$\begin{aligned}
&\alpha\Big(\Big(R \Big/ \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big)\Big)[X,\mathcal{D}]\Big) \bigcap \Big(R \Big/ \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big)\Big) \\
&\quad \cong \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big) \Big/ \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big) = 0\,,
\end{aligned}$$

Então, com apoio no Lema 2.5, temos $\alpha\Big(\Big(R \Big/ \Big(\alpha([X,\mathcal{D}]) \cap R\Big)\Big)[X,\mathcal{D}]\Big) = 0$, i.e., $\alpha\Big(R[X,\mathcal{D}] \Big/ \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big)[X,\mathcal{D}]\Big) = 0$. Disso, e por ser α um radical, obtemos $\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \subseteq \Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big)[X,\mathcal{D}]$. Também, sendo $\Big(\alpha(R[X,\mathcal{D}]) \cap R\Big)[X,\mathcal{D}] \subseteq \alpha(R[X,\mathcal{D}])$, é obvio que temos a igualdade desejada.

COROLÁRIO 2.7 – Seja α um radical hereditário e admissível tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\mathcal{L}$ é um K-álgebra de Lie que possui a propriedade (s), então

$$\alpha(R * \mathcal{L}) = \big(\alpha(R * \mathcal{L}) \cap R\big) * \mathcal{L}\,.$$

Finalmente observamos o seguinte. Sendo os radicais L, J, $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}$, e s hereditários, admissíveis e menores ou iguais a em γ, o Corolário 2.7 é aplicável a todos eles. Assim fica claro que o Corolário 2.7 estende, de certa forma, os resultados de Bergen-Montgomery e Passman ([3], Proposição 2.6 e Corolários 3.4 e 3.5) e o Teorema 2.6 estende o resultado de Ferrero ([9], Teorema 3.2).

3 – O α-radical de R(X,$\mathcal{A}$) é um Ideal Estendido do Anel R.

O objetivo principal deste parágrafo é mostrar que o α-radical do skew anel R(X,$\mathcal{A}$) é o ideal estendido I(X,$\mathcal{A}$), onde $I = \alpha\big(R(X,\mathcal{A})\big) \cap R$. Sendo muitos dos resultados prévios similares àqueles do parágrafo 2, não entraremos em detalhes em algumas das demonstrações.

Seja (R,$\mathcal{A}$,U) um anel com automorfismos e consideremos o anel R(X,$\mathcal{A}$).

Para cada $\lambda \in \Lambda$ consideremos a família $\Im(V_\lambda) = \{I \lhd V_\lambda : I \text{ é } \mathcal{A}\text{-invariante}\}$.

Dado um radical α, definimos, para cada $\lambda \in \Lambda$, a função $\tilde{\alpha}_\lambda : \Im(V_\lambda) \longrightarrow \Im(V_\lambda)$ por $\tilde{\alpha}_\lambda(I) = \alpha\big(I(X,\mathcal{A})\big) \cap I, \quad \forall\, I \in \Im(V_\lambda)$.

O fato de que $A \otimes_c B$ é uma extensão liberal da C-álgebra A, sempre que B seja uma extensão Galoissiana finita do anel comutativo C, será muito usado no que segue.

Suponhamos que R é uma C-álgebra. Neste parágrafo, H denota o isomorfismo de $V_\lambda(X,\mathcal{A}) \otimes_c B$ sobre $(V_\lambda \otimes_c B)(X,\mathcal{A})$, considerado no Teorema I.3.10.

LEMA 3.1 – Seja B uma extensão Galoissiana finita do anel comutativo C, e supo-

nhamos que R seja uma C-álgebra, Se B é livre como C-módulo e α é um radical admissível, então

$$\tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}) \otimes_c B \overset{H}{\cong} \tilde{\alpha}_{\lambda+1}\big((V_{\lambda+1} \otimes_c B)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle\big) , \quad \text{para todo } \lambda \in \Lambda .$$

PROVA – Para qualquer $\lambda \in \Lambda$, temos que

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}) \otimes_c B &= \Big(\alpha\big(V_{\lambda+1}\langle X,\mathcal{A}\rangle\big) \cap V_{\lambda+1}\Big) \otimes_c B \\ &= \Big(\alpha\big(V_{\lambda+1}\langle X,\mathcal{A}\rangle\big) \otimes_c B\Big) \cap (V_{\lambda+1} \otimes_c B) \\ &= \Big(\alpha\big(V_{\lambda}\langle X,\mathcal{A}\rangle\big) \otimes_c B\Big) \cap \big(V_{\lambda}\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle \otimes_c B\big)\end{aligned}$$

Mas, usando o Lema 1.2 de [9], prova-se facilmente que

$$\alpha\big(V_{\lambda}\langle X,\mathcal{A}\rangle\big) \otimes_c B = \alpha\big(V_{\lambda}\langle X,\mathcal{A}\rangle \otimes_c B\big) ,$$

pois $V_{\lambda}\langle X,\mathcal{A}\rangle \otimes_c B$ é uma extensão liberal de $V_{\lambda}\langle X,\mathcal{A}\rangle$ e α é admissível.

Em conseqüência desses fatos temos,

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}) \otimes_c B &= \alpha\big(V_{\lambda}\langle X,\mathcal{A}\rangle\big) \otimes_c B) \cap \big(V_{\lambda}\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle \otimes_c B\big) \\ &\overset{H}{\cong} \alpha\big((V_{\lambda} \otimes_c B)\langle X,\mathcal{A}\rangle\big) \cap \big((V_{\lambda} \otimes_c B)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle\big) \\ &= \tilde{\alpha}_{\lambda+1}\big((V_{\lambda} \otimes_c B)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle\big) ,\end{aligned}$$

o que prova o lema.

Seja p um número primo. A fim de provar que $\gamma(\mathbb{Z}_p\langle X\rangle) = 0$, suponhamos $R = \mathbb{Z}_p$, $\sigma_\lambda = id$, $\forall\, \lambda \in \Lambda^*$, e $\alpha = \gamma$, o radical superior.

Primeiramente observamos o seguinte. Mesmo que γ não seja um radical admissível, podemos provar, semelhantemente ao Lema 3.1, o seguinte resultado: Se F_q denota o corpo com $q = p^m$ elementos, então

$$\tilde{\gamma}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q \cong \tilde{\gamma}_{\lambda+1}\big((V_{\lambda} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)\langle X_{\lambda+1}\rangle\big) .$$

Este resultado particular é usado no seguinte.

LEMA 3.2 – Seja $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq 1$. Se $\tilde{\gamma}_\iota(V_\iota) = 0$, para todo $\iota \in \Lambda$ tal que $\iota < \lambda$, então $\tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda) = 0$.

PROVA – Seja $f \in \tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda)$.

Caso 1: λ é um ordinal limite. Nesse caso $V_\lambda = \bigcup_{\iota < \lambda} V_\iota$ e existe um $\iota < \lambda$ tal que $f \in V_\iota$. Por isso $f \in \tilde{\gamma}_\iota(V_\iota)$ e temos $f = 0$ pela hipótese.

Caso 2: $\lambda = \rho + 1$ é um ordinal sucessor. Nesse caso $V_\lambda = V_\rho\langle X_{\rho+1}, \sigma_{\rho+1}\rangle$ e podemos supor $f = \sum_{i=0}^{m} v_i X_{\rho+1}^i$ com $v_i \in V_\rho$ (pois $\tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda)$ é um ideal de V_λ).

Se supomos $f \neq 0$, então, usando a hipótese, podemos considerar $v_m \neq 0$ e $m \geq 1$ minimal com relação à propriedade de que $f \in \tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda)$.

Se F_q é o corpo com $q = p^m$ elementos e H é o isomorfismo de $V_\rho\langle X\rangle \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$ sobre $(V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)\langle X\rangle$, então $g = H(f \otimes 1)$ pertence à $\tilde{\gamma}_{\rho+1}\big((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)\langle X_{\rho+1}\rangle\big)$ e $g = \sum_{i=0}^{m} (v_i \otimes 1) X_{\rho+1}^i$ com $v_m \otimes 1 \neq 0$ e $m \geq 1$ minimal.

Sejam $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m$ $m+1$ unidades diferentes em F_q. Se, para cada $j \in \{0,1, \ldots, m\}$ consideramos o automorfismo ζ_j de $(V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)\langle X_{\rho+1}\rangle$ definido por $\zeta_j(a) = a$, $\forall\, a \in V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$, e $\zeta_j(X_{\rho+1}) = \eta_j X_{\rho+1}$, então $\zeta_j\Big(\tilde{\gamma}_{\rho+1}\big((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)\langle X_{\rho+1}\rangle\big)\Big) = \tilde{\gamma}_{\rho+1}\big((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)\langle X_{\rho+1}\rangle\big)$.

Assim $h_j = \zeta_j(g)$ pertence a $\tilde{\gamma}_{\rho+1}\big((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)\langle X_{\rho+1}\rangle\big)$ com $h_j = \sum_{i=0}^{m} \eta_j^i (v_i \otimes 1) X_{\rho+1}^i$, $\forall\, j$ com $0 \leq j \leq m$. Desse modo, procedendo como na prova da regra de Cramer, concluímos que $\Delta(v_m \otimes 1) X_{\rho+1}^m$ esta no conjunto $\tilde{\gamma}_{\rho+1}\big((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)\langle X_{\rho+1}\rangle\big)$ (onde $\Delta = \prod_{i<j} (\eta_i - \eta_j)$ é uma unidade de F_q). Daí temos que $v_m \otimes 1 \in \tilde{\gamma}_{\rho+1}\big((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)\langle X_{\rho+1}\rangle\big)$ e $0 \neq v_m \in \tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda)$, isto é, $\tilde{\gamma}_\rho(V_\rho) = \tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda) \cap V_\rho \neq 0$, o que contradiz a hipótese. Assim $f = 0$ e provamos

que $\tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda) = 0$.

Se consideramos o ideal M do anel $\mathbb{Z}_p(X)$, gerado pelo conjunto $\{X_\lambda - 1 : \lambda \in \Lambda^*\}$, temos que $\mathbb{Z}_p(X)/M$ é um corpo finito e assim $\gamma(\mathbb{Z}_p(X)) \neq \mathbb{Z}_p(X)$. Por isso e usando o fato de que $\gamma(\mathbb{Z}_p(X)) \cap \mathbb{Z}_p$ é um ideal do corpo $\mathbb{Z}_p$, teremos necessariamente $\gamma(\mathbb{Z}_p(X)) \cap \mathbb{Z}_p = 0$, i.e., $\tilde{\gamma}_0(V_0) = 0$. Usando esse fato, o Lema 3.2, e indução transfinita sobre $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq 1$, prova-se sem dificuldade que $\tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda) = 0$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$. Logo segue facilmente o

TEOREMA 3.3 – Se p é um número primo e $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é um conjunto de indeterminadas, então $\gamma(\mathbb{Z}_p(X)) = 0$.

COROLÁRIO 3.4 – Seja R uma $\mathbb{Z}_p$-álgebra. Se α é um radical tal que $\alpha \leq \gamma$, então

$$\tilde{\alpha}_{\lambda+1}\big((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle\big) = \tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}), \quad \text{para todo } \lambda \in \Lambda$$

PROVA – Seja $\lambda \in \Lambda$. Sendo $(V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X, \mathcal{A}\rangle / V_\lambda\langle X, \mathcal{A}\rangle \cong \mathbb{Z}_p(X)$, usando o Teorema 3.3, seque que $\alpha\big((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X, \mathcal{A}\rangle\big) = \alpha\big(V_\lambda\langle X, \mathcal{A}\rangle\big)$. Com isso,

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{\lambda+1}&\big((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle\big)\\ &= \alpha\big((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X, \mathcal{A}\rangle\big) \cap \big((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle\big)\\ &= \alpha\big(V_\lambda\langle X, \mathcal{A}\rangle\big) \cap \big((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle\big)\,.\end{aligned}$$

Mas $\alpha\big(V_\lambda\langle X, \mathcal{A}\rangle\big) \subseteq V_\lambda\langle X, \mathcal{A}\rangle$. Logo

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{\lambda+1}\big((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle\big) &= \alpha\big(V_\lambda\langle X, \mathcal{A}\rangle\big) \cap V_{\lambda+1}\\ &= \alpha\big(V_{\lambda+1}\langle X, \mathcal{A}\rangle\big) \cap V_{\lambda+1}\\ &= \tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1})\,.\end{aligned}$$

Seja p um número primo e $\lambda \in \Lambda$. Se α é um radical hereditário, prova-se sem dificuldade que $\tilde{\alpha}_\lambda(I) = \tilde{\alpha}_\lambda(V_\lambda) \cap I$, $\forall\, I \in \Im(V_\lambda)$. Também temos que $(V_\lambda)_p\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle$ é um ideal do anel $V_{\lambda+1}$ (Proposição I.3.6). Em visto disso tudo, fica claro o seguinte

LEMA 3.5 – Seja p um número primo e $\lambda \in \Lambda$. Se α é um radical hereditário, então $\tilde{\alpha}_{\lambda+1}\big((V_\lambda)_p\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle\big) = \tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}) \cap (V_\lambda)_p\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle$.

Se ζ é uma raíz m-ésima primitiva complexa da unidade, então $\mathbb{Z}[\zeta]$ é uma extensão Galoissiana finita de $\mathbb{Z}$. Por isso, se A é uma $\mathbb{Z}$-álgebra, $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]$ é uma extensão liberal de A. Usamos esse fato no que segue.

LEMA 3.6 – Sejam R uma $\mathbb{Z}$-álgebra e ζ uma raíz m-ésima primitiva complexa da unidade. Se α é um radical admissível, então

$$\tilde{\alpha}_{\lambda+1}\Big(\big(V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]\big)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle\Big) = \tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}) , \qquad \forall\ \lambda \in \Lambda .$$

PROVA – Se $\lambda \in \Lambda$, temos

$$\begin{aligned}
&\alpha_{\lambda+1}\Big(\big(V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]\big)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle\Big) \cap V_{\lambda+1} \\
&\quad = \alpha\Big(\big(V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]\big)\langle X, \mathcal{A}\rangle\Big) \cap \Big(\big(V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]\big)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}\rangle\Big) \cap V_{\lambda+1} \\
&\quad = \alpha\Big(\big(V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]\big)\langle X, \mathcal{A}\rangle\Big) \cap V_{\lambda+1} && (V_\lambda \subseteq V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]) \\
&\quad = \alpha\Big(\big(V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]\big)\langle X, \mathcal{A}\rangle\Big) \cap V_\lambda\langle X, \mathcal{A}\rangle \cap V_{\lambda+1} && (V_{\lambda+1} \subseteq V_\lambda\langle X, \mathcal{A}\rangle) \\
&\quad = \alpha(V_\lambda\langle X, \mathcal{A}\rangle) \cap V_{\lambda+1} && (\alpha \text{ é admissível}) \\
&\quad = \tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}) .
\end{aligned}$$

Mesmo que γ não seja admissível, podemos provar que, quando $R = \mathbb{Z}$, $\gamma\Big(\big(V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]\big)\langle X\rangle\Big) \cap (V_\lambda\langle X\rangle) = \gamma(V_\lambda\langle X\rangle)$. Daí seguindo um procedimento similiar à demonstração do Lema 3.6, podemos provar que

$$\tilde{\gamma}_{\lambda+1}\Big(\big(V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]\big)\langle X_{\lambda+1}\rangle\Big) \cap V_\lambda\langle X_{\lambda+1}\rangle = \tilde{\gamma}_{\lambda+1}\big(V_\lambda\langle X_{\lambda+1}\rangle\big) , \quad \forall\ \lambda \in \Lambda .$$

Isso é usado para provar um resultado análogo ao Lema 3.2 para o anel $R = \mathbb{Z}$, e assim pode-se deduzir sem dificuldade que $\gamma\big(\mathbb{Z}\langle X\rangle\big) = 0$.

A prova do seguinte resultado é quase uma repetição do aprova do Lema 3.2 e por isso omitiremos vários detalhes.

PROPOSIÇÃO 3.7 – Seja $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq 1$, e seja α um radical hereditário, admissível tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\tilde{\alpha}_\iota(V_\iota) = 0$, para todo $\iota \in \Lambda$ tal que $\iota < \lambda$, então $\tilde{\alpha}_\lambda(V_\lambda) = 0$.

PROVA – Seja $f \in \tilde{\alpha}_\lambda(V_\lambda)$.

Caso 1: λ é um ordinal limite. Aqui procedemos como no Lema 3.2.

Caso 2: $\lambda = \rho + 1$ é um ordinal sucessor. Nesse caso $V_\lambda = V_\rho\langle X_{\rho+1}, \sigma_{\rho+1}\rangle$. Se supomos $f \neq 0$, então, como na prova do Lema 3.2, podemos considerar f da forma $f = \sum_{i=0}^{m} v_i X_{\rho+1}^i$ com $v_m \neq 0$ e $m \geq 1$ minimal.

Caso 2.1: existe $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ tal que $nv_m = 0$. Como na prova do Lema 2.4, podemos considerar um número primo p tal que $pf = 0$, e portanto podemos supor que R é uma $\mathbb{Z}_p$-álgebra. Mais ainda, o Corolário 3.4 permite supor que R contém o corpo $\mathbb{Z}_p$.

Consideremos o isomorfismo H de $V_\rho(X,\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$ sobre $(V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)(X,\mathcal{A})$ (Teorema I.3.10) e os automorfismos ζ_j de $(V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)\langle X_{\rho+1}, \sigma_{\rho+1}\rangle$, determinados por $m+1$ unidades $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m$ de F_q. Daqui em diante procedemos como na prova do Lema 3.2 para obter que $0 \neq v_m \in \tilde{\alpha}_\rho(V_\rho)$, isto é, chegamos a uma contradição à partir da suposição de que $f \neq 0$.

Caso 2.2: $n v_m \neq 0$, $\forall\ 0 \neq n \in \mathbb{Z}$. Nesse caso podemos supor que R contém o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$. Se ζ é uma raiz $(m+1)$-ésima primitiva complexa da unidade, então $f \in \tilde{\alpha}_{\rho+1}\Big(\big(V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]\big)\langle X_{\rho+1}, \sigma_{\rho+1}\rangle\Big)$ (Lema 3.6).

Tomando $m+1$ unidades $\eta_0, \ldots, \eta_m$ de $\mathbb{Z}(\zeta)$, podemos provar, como no Lema 3.2, que $\Delta(v_m \otimes 1)X_{\rho+1}^m \in \tilde{\alpha}_{\rho+1}\Big(\big(V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]\big)\langle X_{\rho+1}, \sigma_{\rho+1}\rangle\Big)$ (onde $\Delta = \prod_{i<j} (\eta_i - \eta_j)$).

Agora consideremos a extensão Galoissiana $\mathbb{Q}(\zeta)$ de $\mathbb{Q}$, e consideremos os m

$\mathbb{Q}$-automorfismos $\beta_1, \ldots, \beta_m$ de $\mathbb{Q}(\zeta)$, definidos por $\beta_i(\zeta) = \zeta^i$ $(1 \leq i \leq m)$.

Seja $\delta = \beta_1(\Delta) \ldots \beta_m(\Delta)$. Uma vez que $\beta_i(\mathbb{Z}[\zeta]) \subseteq \mathbb{Z}[\zeta]$, temos $\beta_i(\Delta) \in \mathbb{Z}[\zeta]$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq m$. Logo $\delta \in \mathbb{Z}[\zeta]$. Mas $\delta \in \mathbb{Q}(\zeta)^{\mathfrak{S}} = \mathbb{Q}$ (onde $\mathfrak{S}$ é o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}$). Logo $\delta \in \mathbb{Z}$.

Como $\delta(V_m \otimes 1) X_{\rho+1}^m \in \tilde{\alpha}_{\rho+1}\Big(\big(V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]\big)\langle X_{\rho+1}, \sigma_{\rho+1}\rangle\Big)$, vem que $\delta V_m X_{\rho+1}^m \in \tilde{\alpha}_{\rho+1}(V_{\rho+1})$ (Lema 3.1). Logo $0 \neq \delta v_m \in \tilde{\alpha}_{\rho+1}(V_{\rho+1}) \cap V_\rho = \tilde{\alpha}_\rho(V_\rho)$, o que também é uma contradição.

LEMA 3.8 – Seja α um radical hereditário, admissível tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\alpha\big(R\langle X,\mathcal{A}\rangle\big) \cap R = 0$, então $\alpha\big(R\langle X,\mathcal{A}\rangle\big) = 0$.

PROVA – É análoga à prova do Teorema 2.5.

Agora podemos provar o resultado central deste parágrafo, da mesma maneira que o Teorema 2.6.

TOEREMA 3.9 – Se α é um radical hereditário admissível tal que $\alpha \leq \gamma$, então

$$\alpha\big(R\langle X,\mathcal{A}\rangle\big) = \Big(\alpha\big(R\langle X,\mathcal{A}\rangle\big) \cap R\Big)\langle X,\mathcal{A}\rangle\,.$$

É claro que o Teorema 3.9 é aplicável aos radicais L, $\mathcal{L}$, J, $\mathcal{G}$, e s.

4 – Sobre os Ideais $\alpha\big(R[X,\mathcal{D}]\big) \cap R$ e $\alpha\big(R\langle X,\mathcal{A}\rangle\big) \cap R$

Seja S qualquer uma das extensões $R[X,\mathcal{D}]$ ou $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ do anel R, e seja α um radical hereditário admissível tal que $\alpha \leq \gamma$. Segundo os parágrafos 2 e 3, para conhecer realmente o radical $\alpha(S)$, é suficiente conhecer o ideal $\alpha(S) \cap R$. Assim apresentamos a seguir alguns resultados que fornecem informações do ideal $\alpha(S) \cap R$ para certos casos particulares do radical α.

Primeiramente seja $\mathcal{L}$ uma K-álgebra de Lie que age sobre o anel R como K-derivações. Lembremos que um $\mathcal{L}$-ideal I de R (que denotamos com $I \lhd_{\mathcal{L}} R$) é um ideal tal que $d_\lambda(I) \subseteq I, \quad \forall\, \lambda \in \Lambda$. É claro que, se I e J são $\mathcal{L}$-ideais de R, então $I+J$, $I \cap J$ e IJ também o são.

Como em [14] (pág. 194), definimos, para cada ordinal β, o $\mathcal{L}$-ideal $\mathcal{D}_R(\beta)$ como segue:

$$\mathcal{D}_R(\beta) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } \beta = 0 \\ \sum \{I \lhd_{\mathcal{L}} R : \text{Existe } n \geq 1 \text{ tal que } I^n \subseteq \mathcal{D}_R(\beta - 1)\}\,, & \text{se } \beta \text{ é um ordinal sucessor} \\ \sum\limits_{\iota < \beta} \mathcal{D}_R(\iota)\,, & \text{se } \beta \text{ é um ordinal limite .} \end{cases}$$

As seguintes propriedades são evidentes:

(1) $\mathcal{D}_R(\beta) = \bigcup\limits_{\iota < \beta} D_R(\iota)$, se β é um ordinal limite;

(2) $\mathcal{D}_R(\eta) \subseteq \mathcal{D}_R(\beta), \quad \forall\, \eta < \beta$;

(3) existe um ordinal ξ tal que $\mathcal{D}_R(\beta) = \mathcal{D}_R(\xi)$, para todo ordinal β tal que $\beta > \xi$.

Assim podemos definir, sem ambigüidade, o radical $\mathcal{L}$-primo do anel R como segue. Se ξ é um ordinal tal que $\mathcal{D}_R(\beta) = \mathcal{D}_R(\xi), \quad \forall\, \beta > \xi$, então o $\mathcal{L}$-ideal $L_{\mathcal{L}}(R) = \mathcal{D}_R(\xi)$, de R é chamado o *radical $\mathcal{L}$-primo* do anel R.

Um $\mathcal{L}$-ideal P de R é dito *$\mathcal{L}$-primo* se para quaisquer $\mathcal{L}$-ideais A e B de R tais que $AB \subseteq P$, se tem $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$. O anel R é dito *$\mathcal{L}$-primo* se o ideal zero 0 de R é $\mathcal{L}$-primo.

Sejam I um $\mathcal{L}$-ideal de R e $\overline{d}_\lambda : R/I \longrightarrow R/I \quad (\lambda \in \Lambda)$ as derivações do anel quociente R/I, definidas por $\overline{d}_\lambda(r + I) = d_\lambda(r) + I, \quad \forall\, r \in R$. O ideal J/I do anel R/I é um $\overline{\mathcal{L}}$-ideal se, e somente se, J é um $\mathcal{L}$-ideal de R.

O seguinte é um dos resultados importantes deste parágrafo.

TEOREMA 4.1 – Seja $L(R * \mathcal{L})$ o radical primo do anel do operadores diferencias $R * \mathcal{L}$. O $\mathcal{L}$-ideal $L(R * \mathcal{L}) \cap R$ de R é igual:

(i) à interseção dos ideais $\mathcal{L}$-primos do anel R;

(ii) ao radical $\mathcal{L}$-primo $L_{\mathcal{L}}(R)$ do anel R, e

(iii) à intersicção dos $\mathcal{L}$-ideais I de R tais que o anel quociente R / I não tem $\overline{\mathcal{L}}$-ideais nilpotentes não nulos.

PROVA – Denotemos com D_1 a intersecção dos ideais $\mathcal{L}$-primos de R, e com D_2 a intersecção dos $\mathcal{L}$-ideais I de R tais que R / I não tem $\overline{\mathcal{L}}$-ideais nilpotentes não nulos.

$D_1 \subseteq L_{\mathcal{L}}(R)$: Se para cada ordinal β, definimos o ideal $N_{R*\mathcal{L}}(\beta)$ de $R * \mathcal{L}$ como segue:

$$N_{R*\mathcal{L}}(\beta) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } \beta = 0 \\ \sum \{I \lhd R * \mathcal{L} : \text{Existe } n \geq 1 \text{ tal que } I^n \subseteq N_{R*\mathcal{L}}(\beta - 1)\}\,, & \\ & \text{se } \beta \text{ é um ordinal sucessor} \\ \sum_{\iota < \beta} N_{R*\mathcal{L}}(\iota)\,, & \text{se } \beta \text{ é um ordinal limite}\,. \end{cases}$$

então existe um ordinal η que define o radical primo $L(R * \mathcal{L}) = N_{R*\mathcal{L}}(\eta)$.

Usando indução transfinita, prova-se sem problemas que $N_{R*\mathcal{L}}(\beta) \cap R = \mathcal{D}_R(\mathcal{L})$, para todo ordinal β, e portanto obtem-se que $L(R * \mathcal{L}) \cap R = L_{\mathcal{L}}(R)$.

Disso e do fato de que $P \cap R$ é um ideal $\mathcal{L}$-primo de R sempre que P seja um ideal primo de $R * \mathcal{L}$, obtemos

$$\begin{aligned} D_1 &\subseteq \cap \{P \cap R : P \lhd R * \mathcal{L} \text{ é primo}\} \\ &= (\cap \{P \lhd R * \mathcal{L} :\ P \text{ é primo}\}) \cap R \end{aligned}$$

$$= L(R * \mathcal{L}) \cap R = L_{\mathcal{L}}(R) .$$

$L_{\mathcal{L}}(R) \subseteq D_2$: Se I é um $\mathcal{L}$-ideal de R tal que R / I não tem $\overline{\mathcal{L}}$-ideais nilpotentes não nulos, então é fácil provar, usando indução transfinita, que $\mathcal{D}_R(\beta) \subseteq I$, para todo ordinal β. Daí $L_{\mathcal{L}}(R) \subseteq I$ e segue que $L_{\mathcal{L}}(R) \subseteq D_2$.

$D_2 \subseteq D_1$: Seja Q um ideal $\mathcal{L}$-primo de R. Se J / Q é um $\overline{\mathcal{L}}$-ideal nilpotente de R / Q, então existe $t \geq 1$ tal que $J^t \subseteq Q$. Sendo J um $\mathcal{L}$-ideal de R, então temos que $J \subseteq P$, i.e., J / P = 0. Claramente, então, $D_2 \subseteq D_1$.

Em continuação apresentamos resultados contendo informações do $\mathcal{L}$-ideal $J(R * \mathcal{L}) \cap R$ de R para certos anéis de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$. O leitor interessado nas provas pode consultar as respectivas referências.

PROPOSIÇÃO 4.2 – Suponhamos que K seja um corpo de característica zero, e denotemos com $J(R * \mathcal{L})$ o radical de Jacobson do anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$. Se para cada ideal primo minimal P do anel R se tem que todo ideal não nulo do anel quociente R / P tem um elemento regular (de R / P), então $J(R * \mathcal{L}) \cap R = L_{\mathcal{L}}(R)$.

PROVA – Ver [3], Corolário 3.4.

PROPOSIÇÃO 4.3 – Seja K um corpo. Se R é um anel que satisfaz uma das seguintes condições:

(i) R é noetheriano à direita,

(ii) R é uma p. i. K-álgebra (com K de característica zero),

(iii) R não tem elementos nilpotentes não nulos,

então $J(R * \mathcal{L}) \cap R$ é o maior nil $\mathcal{L}$-ideal do anel R.

PROVA – Ver [3], Corolário 3.5.

Agora seja $(R, \mathcal{A}, \mathcal{U})$ um anel com automorfismos. Se, para cada ordinal β, definimos o ideal $\mathcal{A}$-invariante $\mathcal{A}_R(\beta)$ de R como segue:

$$\mathcal{A}_R(\beta) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } \beta = 0 \\ \sum \{I \lhd_{\mathcal{A}} R : \text{Existe } n \geq 1 \text{ tal que } I^n \subseteq \mathcal{A}_R(\beta - 1)\}\,, & \text{se } \beta \text{ é um ordinal sucessor} \\ \sum\limits_{\iota < \beta} \mathcal{A}_R(\iota)\,, & \text{se } \beta \text{ é um ordinal limite}\,, \end{cases}$$

então podemos provar que $\mathcal{A}_R(\eta) \subseteq \mathcal{A}_R(\beta)$, $\forall\, \eta < \beta$, e existe um ordinal ξ tal que $\mathcal{A}_R(\beta) = \mathcal{A}_R(\xi)$, $\forall\, \beta > \xi$. Então definimos o *radical $\mathcal{A}$-primo* do anel R como o ideal $\mathcal{A}$-invariante $L_{\mathcal{A}}(R) = \mathcal{A}_R(\xi)$.

Um ideal $\mathcal{A}$-invariante P de R é dito *$\mathcal{A}$-primo* se, para quaisquer ideais $\mathcal{A}$-invariantes A e B de R tais que $AB \subseteq P$, se tem $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$. O anel R é chamado *$\mathcal{A}$-primo* se o ideal zero 0 de R é $\mathcal{A}$-primo.

Analogamente ao Teorema 4.1 podemos provar sem dificuldade o seguinte resultado também importante.

TEOREMA 4.4 – O ideal $\mathcal{A}$-invariante $L(R(X,\mathcal{A})) \cap R$ de R é igual:

(i) à interseção dos ideais $\mathcal{A}$-primos do anel R;

(ii) ao radical $\mathcal{A}$-primo $L_{\mathcal{A}}(R)$ do anel R;

(iii) à interseção dos ideais $\mathcal{A}$-invariantes I de R tais que o anel quociente R/I não tem ideais $\overline{\mathcal{A}}$-invariantes nilpotentes não nulos.

Finalmente consideremos o ideal $s(R(X,\mathcal{A})) \cap R$, onde s é o radical fortemente primo, e os automorfismos de $\mathcal{A}$ comutam entre si.

Sejam P e I ideais do anel R tais que $I \not\subseteq P$. Um *insulador módulo P* (à esquerda) *para I* é um subconjunto finito F de I tal que, se r é um elemento de R que satisfaz $rF \subseteq P$, então $r \in P$. No que segue nós omitiremos a expressão "à esquerda".

Um ideal P de R é dito *fortemente primo* se todo ideal I de R tal que $I \not\subseteq P$ tem um insulador módulo P. Um anel R é dito *fortemente primo* se o ideal zero 0 de R é fortemente primo ([12]).

O radical fortemente primo s(R) do anel R é definido por

$$s(R) = \cap \{P \lhd R : P \text{ é fortemente primo}\} .$$

Analogamente, para um anel com automorfismos $(R, \mathcal{A}, U)$, podemos definir o seguinte. Um anel $\mathcal{A}$-invariante P de R é dito *$\mathcal{A}$-fortemente primo* se todo ideal $\mathcal{A}$-invariante I de R tal que $I \not\subseteq P$ tem um insulador módulo P. Um anel R será chamado *$\mathcal{A}$-fortemente primo* se o ideal zero 0 de R é $\mathcal{A}$-fortemente primo.

Definimos o radical $\mathcal{A}$-fortemente primo do anel R por

$$s_{\mathcal{A}}(R) = \cap \{P \lhd R : P \text{ é fortemente primo}\} .$$

É importante observar que a condição $I \not\subseteq P$ nas definições anteriores pode ser trocada pela condição equivalente $P \not\subseteq I$.

LEMA 4.5 – Se P é um ideal fortemente primo do skew anel $R(X,\mathcal{A})$, então o ideal $\mathcal{A}$-invariante $P \cap R$ de R é $\mathcal{A}$-fortemente primo.

PROVA – Se I é um ideal $\mathcal{A}$-invariante de R tal que $I \not\subseteq P \cap R$, então $I(X,\mathcal{A}) \not\subseteq P$, logo $I(X,\mathcal{A})$ tem um insulador F módulo P. Seja $F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ com $\alpha_i = \sum_{\overline{\nu}} a_{\overline{\nu}}^{(i)} X^{\overline{\nu}}$, onde $a_{\overline{\nu}}^{(i)} \in I$, $\forall\, \overline{\nu}$, i, e consideremos o subconjunto finito $A = \{a_{\overline{\nu}}^{(i)} : i, \overline{\nu}\}$ de I. Se $r \in R$ é tal que $rA \subseteq P \cap R$, então é claro que $rF \subseteq (P \cap R)(X,\mathcal{A}) \subseteq P$, e

portanto $r \in P$. Assim $r \in P \cap R$ e A é um insulador módulo $P \cap R$ para I. Em conseqüência fica provado que $P \cap R$ é $\mathcal{A}$-fortemente primo.

Na prova do seguinte lema usaremos o Lema III.4.3 que será provado no Capítulo III.

LEMA 4.6 – Suponhamos que os automorfismos de $\mathcal{A}$ comutam entre si, e seja Q um ideal $\mathcal{A}$-fortemente primo do anel R. Se P é um ideal de $R(X,\mathcal{A})$ que é maximal respecto da propriedade $P \cap R = Q$, então P é fortemente primo.

PROVA – Se P_1 é o ideal de $(R / Q)(X,\mathcal{A})$ imagem homeomorfa do ideal $P / Q(X,\mathcal{A})$, então P_1 é maximal com relação à propriedade de ser (R / Q)-disjunto, e

$$R(X,\mathcal{A}) / P \cong (R / Q)(X,\mathcal{A}) / P_1 .$$

O ideal P_1 é primo, pois o anel R / Q é $\mathcal{A}$-fortemente primo. Então segue do Lema III.4.3 que P_1, e portanto P, é um ideal fortemente primo.

Agora estamos em condições de provar o seguinte resultado importante.

TEOREMA 4.7 – Se os automorfismos de $\mathcal{A}$ comutam entre si, então $s(R(X,\mathcal{A})) \cap R = s_{\mathcal{A}}(R)$.

PROVA – Se P é qualquer ideal fortemente primo do skew anel $R(X,\mathcal{A})$, então $s_{\mathcal{A}}(R) \subseteq P \cap R$ (Lema 4.5). Por isso $s_{\mathcal{A}}(R) \subseteq s(R(X,\mathcal{A})) \cap R$.

Seja Q qualquer ideal $\mathcal{A}$-fortemente primo do anel R. Se P é um ideal de $R(X,\mathcal{A})$ maximal em relação à propriedade $P \cap R = Q$, então $s(R(X,\mathcal{A})) \subseteq P$ (Lema 4.6), e, em conseqüência, $s(R(X,\mathcal{A})) \cap R \subseteq Q$. Sendo Q arbitrário, obtemos $s(R(X,\mathcal{A})) \cap R \subseteq s_{\mathcal{A}}(R)$ e a igualdade procurada segue.

5 – o α-radical do Anel $S_n = R[X_1, \sigma_1] \cdots [X_n, \sigma_n]$.

Para um anel com automorfismos $(R, \mathcal{A}, \mathcal{U})$, onde $\mathcal{A} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ é finito, consideremos os skew anéis de polinômios: $S_0 = R$ e $S_\ell = S_{\ell-1}[X_\ell, \sigma_\ell]$, $1 \leq \ell \leq n$.

Para cada $\ell \in \{1,2, \ldots, n\}$ consideremos o conjunto

$$\mathcal{H}(S_\ell) = \{I \lhd S_\ell \ : \ I \text{ é } \mathcal{A} - \text{invariante}\} .$$

Dado um radical α, definimos, para cada $\ell \in \{1,2, \ldots, n\}$, a função $\hat{\alpha}_\ell : \mathcal{H}(S_\ell) \longrightarrow \mathcal{H}(S_\ell)$ por $\hat{\alpha}_\ell(I) = \alpha\big(I[X,\mathcal{A}]\big) \cap I, \ \forall\, I \in \mathcal{H}(S_\ell)$.

Sejam α um radical e $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. É rotineiro provar que:

(a) $\hat{\alpha}_\ell\big(S_\ell / \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)\big) = 0$,

e (b) Se $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) = S_\ell$, então $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / I) = S_\ell / I, \ \forall\, I \in \mathcal{H}(S_\ell)$.

Também, se α é hereditário, então $\hat{\alpha}_\ell(I) = \hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \cap I, \ \forall\, I \in \mathcal{H}(S_\ell)$. Como conseqüência, $\hat{\alpha}_\ell\big(\hat{\alpha}_\ell(I)\big) = \hat{\alpha}_\ell(I), \ \forall\, I \in \mathcal{H}(S_\ell)$.

O seguinte resultado generaliza um resultado conhecido de Szász ([22], Teorema 1.11).

PROPOSIÇÃO 5.1 – Sejam α um radical, $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, e $\Theta \subset \mathcal{H}(S_\ell)$. Se $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / I) = 0, \ \forall\, I \in \Theta$, então $\hat{\alpha}_\ell\Big(S_\ell / \bigcap_{I \in \Theta} I\Big) = 0$.

PROVA – Seja $M = \bigcap_{I \in \Theta} I$ e suponhamos que $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / M) \neq 0$. Nesse caso existe um ideal J em $\mathcal{H}(S_\ell)$ tal que $M \subsetneq J$ e $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / M) = J / M$. Portanto existe um ideal $I_0 \in \Theta$ tal que $J / M \not\subset I_0 / M$.

Não é difícil provar que $(J / M) / K \cong J / (J \cap I_0)$, onde K é um kernel do epimorfismo $\pi : J / M \longrightarrow J / (J \cap I_0)$. Sendo $\hat{\alpha}_\ell(J / M) = \hat{\alpha}_\ell\big(\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / M)\big) = \hat{\alpha}_\ell(S_\ell / M)$ $= J / M$, temos $\hat{\alpha}_\ell\big(J / (J \cap I_0)\big) = J / (J \cap I_0)$.

Como conseqüência disso, uma vez que $(J + I_0)/I_0 \cong J/(J \cap I_0)$, temos

$$\begin{aligned}(J + I_0)/I_0 &\cong \hat{\alpha}_\ell((J + I_0)/I_0)\\ &= \alpha\Big(((J + I_0)/I_0)[X,\mathcal{A}]\Big) \cap ((J + I_0)/I_0)\\ &\subseteq \alpha((S_\ell/I_0)[X,\mathcal{A}]) \cap (S_\ell/I_0)\\ &= \hat{\alpha}_\ell(S_\ell/I_0)\\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Portanto $J \subseteq I_0$ e segue que $J/M \subseteq I_0/M$, que é uma contradição.

O resultado seguinte mostra que, quando o radical α é hereditário, as funções $\hat{\alpha}_\ell$ comportam-se como radicais.

PROPOSIÇÃO 5.2 – Seja $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. Se α é um radical hereditário, então

$$\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) = \cap\,\{J \in \mathcal{H}(S_\ell) : \hat{\alpha}_\ell(S_\ell/J) = 0\}\ .$$

PROVA – Denotemos com D o ideal intersecção $\cap\{J \in \mathcal{H}(S_\ell) : \hat{\alpha}_\ell(S_\ell/J) = 0\}$.

Como $\hat{\alpha}_\ell\big(S_\ell/\hat{\alpha}_\ell(S_\ell)\big) = 0$, temos $D \subseteq \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\alpha_\ell(S_\ell)/D &= \Big(\alpha(S_\ell[X,\mathcal{A}]) \cap S_\ell\Big)\Big/ D\\ &= \Big(\alpha(S_\ell[X,\mathcal{A}])/D[X,\mathcal{A}]\Big) \cap (S_\ell/D)\\ &= \alpha(S_\ell[X,\mathcal{A}]/D[X,\mathcal{A}]) \cap (S_\ell/D)\\ &\cong \alpha((S_\ell/D)[X,\mathcal{A}]) \cap (S_\ell/D)\\ &= \hat{\alpha}_\ell(S_\ell/D)\ .\end{aligned}$$

Mas pela Proposição 5.1, $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell/D) = 0$. Logo $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \subseteq D$ e a igualdade $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) = D$ segue.

Conforme foi feito nos parágrafos 2 e 3, podemos provar os seguintes resultados.

Seja α um radical e suponhamos que R é uma C-álgebra. Se $\gamma(C) = 0$ e $\alpha \leq \gamma$, então $\hat{\alpha}_\ell\big((S_{\ell-1} \times C)[X_\ell, \sigma_\ell]\big) = \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$, $\forall\, \ell$ com $1 \leq \ell \leq n$. Também, se B é uma extensão Galoissiana finita de C, H é o isomorfismo do anel $S_\ell \otimes_c B$ sobre o anel $(S_{\ell-1} \otimes_c B)[X_\ell, \sigma_\ell]$, e o radical α é admissível, então $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \otimes_c B \overset{H}{\cong} \hat{\alpha}_\ell\big((S_{\ell-1} \otimes_c B)[X_\ell, \sigma_\ell]\big)$ e $\hat{\alpha}_\ell\big((S_{\ell-1} \otimes_c B)[X_\ell, \sigma_\ell]\big) \cap S_\ell = \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$, $\forall\, \ell$ com $1 \leq \ell \leq n$.

Usamos esses resultados para provar a seguinte

PROPOSIÇÃO 5.3 – Seja α um radical hereditário, admissível tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ satisfaz $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \neq 0$, então existem m, s nas condições $0 \neq s \in S_{\ell-1}$, $m \geq 1$ e $s x_\ell^m \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$.

PROVA – Dado que $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \neq 0$, existe um elemento não nulo $f = \sum_{i=0}^{m} s_i X_\ell^i \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$, com $s_i \in S_{\ell-i}$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$.

Se $m = 0$, então $f = s_0 \neq 0$, $s_0 X_\ell \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$ e o resultado segue. Noutro caso podemos escolher $m \geq 1$ minimal.

Caso 1: existe um $u \in \mathbb{Z}$ não nulo tal que $us_m = 0$. Se $0 \neq u \in \mathbb{Z}$ verifica $us_m = 0$, então podemos escolher um primo p tal que $pf = 0$. Assim $ps_i = 0$, $\forall\, i$ com $0 \leq i \leq m$, isto é, $f \in (S_{\ell-1})_p[X_\ell, \sigma_\ell]$, e por ser α hereditário podemos supor $f \in \hat{\alpha}_\ell\big((S_{\ell-1})_p[X_\ell, \sigma_\ell]\big)$. Logo podemos supor que o anel R é uma $\mathbb{Z}_p$-álgebra.

Usando as observações anteriores a esta Proposição, temos que f pertence ao ideal $\tilde{\alpha}_\ell\big((S_{\ell-1} \times \mathbb{Z}_p)[X_\ell, \sigma_\ell]\big)$ e podemos considerar que R contém o corpo $\mathbb{Z}_p$. Também, se F_q denota o corpo com $q = p^{m+1}$ elementos e $g = H(f \otimes 1)$, então $g \in \hat{\alpha}_\ell\big((S_{\ell-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X_\ell, \sigma_\ell]\big)$ com $g = \sum_{i=0}^{m} (s_i \otimes 1) X_\ell^i$.

Sejam $\eta_0, \ldots, \eta_m$ $m+1$ unidades diferentes em F_q e $\zeta_j (0 \leq j \leq m)$ os automorfismos de $(S_{\ell-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X_\ell, \sigma_\ell]$, definidos pelas condições $\zeta_j(a) = a$,

$\forall\ a \in S_{\ell-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$ e $\zeta_j(X_\ell) = (1 \otimes \eta_j) X_\ell$. Procedendo como na prova da Proposição 3.2, pode-se verificar que $(s_m \otimes 1) X_\ell^m \in \big((S_{\ell-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X_\ell, \sigma_\ell]\big)$, e portanto $s_m X_\ell^m \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$ com $0 \neq s_m \in S_{\ell-1}$.

Caso 2: $u\, s_m \neq 0$, $\forall\ u \in \mathbb{Z}$ não nulo. Nesse caso podemos supor que R contém o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$. Se ζ é uma raiz $(m+1)$-ésima primtiva complexa da unidade, então, pelas observações prévias, $f \in \hat{\alpha}_\ell\Big(\big(S_{\ell-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]\big)[X_\ell, \sigma_\ell]\Big)$.

Se $\eta_0, \ldots, \eta_m$ são $m+1$ unidades diferentes em $\mathbb{Z}[\zeta]$, então, como no caso 1, podemos provar que $(s_m \otimes 1) X_\ell^m \in \hat{\alpha}_\ell\Big(\big(S_{\ell-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]\big)[X_\ell, \sigma_\ell]\Big)$, e portanto $s_m X_\ell^m \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$ com $0 \neq s_m \in S_{\ell-1}$, e a prova está completa.

Seja α um radical. Se, para cada $\ell \in \{0,1, \ldots, n-1\}$, definimos o conjunto

$$B_\ell = \left\{ s \in S_\ell \,:\, s X_{\ell+1} \in \hat{\alpha}_{\ell+1}(S_{\ell+1}) \right\},$$

então não é difícil provar que $B_\ell \in \mathcal{H}(S_\ell)$, $\forall\ \ell$ com $0 \leq \ell \leq n-1$.

A seguinte definição é devida a Stewart e Watters ([21], sec. 3).

Uma classe de anéis primos $\mathcal{P}$ é dita *rígida* se for satisfeito o seguinte: se S é uma extensão prima normalizante do anel R e P é um ideal primo minimal de R, então $R/P \in \mathcal{P}$ se, e somente se, $S \in \mathcal{P}$. Os radicais definidos por classes de anéis primos rígidos são ditos *rígidos*.

Em conseqüência, um radical rígido α está definido por uma certa classe de anéis primos $\mathcal{P}$, i.e., $\alpha(R) = \cap\{P \lhd R : R/P \in \mathcal{P}\}$.

Prova-se que os radicais rígidos são admissíveis ([21], Proposição 3.3), e que os radicais L, J, $\mathcal{G}$, e $\mathcal{L}$ são rigídos ([21], Exemplo 3.4).

No que segue usaremos o fato de que $R[X,\mathcal{A}]X_\ell = X_\ell R[X,\mathcal{A}]$, $\forall\ \ell$ com $1 \leq \ell \leq n$ (Proposição I.2.2).

LEMA 5.4 – Seja α um radical hereditário rígido tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\ell \in \{1, \ldots, n\}$

é tal que $B_{\ell-1} = 0$, então $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) = 0$.

PROVA – Suponhamos que $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \neq 0$. Devido à Proposição 5.3, existe um elemento não nulo $s \in S_{\ell-1}$ e um $m \geq 1$ tais que $s X_\ell^m \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$. Já que $B_{\ell-1} = 0$, podemos escolher um $m \geq 2$ tal que $s X_\ell^m \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$ e $s X_\ell^{m-1} \notin \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$.

Seja $\mathcal{P}$ a classe dos anéis primos que define o radical rígido α. Como $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) = \alpha(R[X,\mathcal{A}]) \cap S_\ell$, existe um ideal primo P do anel $R[X,\mathcal{A}]$ tal que $R[X,\mathcal{A}]/P \in \mathcal{P}$ e $s X_\ell^{m-1} \notin P$. Mas $s X_\ell^{m-1} R[X,\mathcal{A}] X_\ell = s X_\ell^m R[X,\mathcal{A}] \subseteq P$ (pois $s X_\ell^m \in P$). Logo $X_\ell \in P$ e $B_{\ell-1} \neq 0$, o que é uma contradição.

TEOREMA 5.5 – Se α é um radical hereditário rígido tal que $\alpha \leq \gamma$, então

$$\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) = \left(\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \cap S_{\ell-1}\right) \oplus B_{\ell-1}[X_\ell, \sigma_\ell] X_\ell , \qquad \forall\ \ell \text{ com } 1 \leq \ell \leq n .$$

PROVA – Seja $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ e definamos $N = \left(\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \cap S_{\ell-1}\right) \oplus B_{\ell-1}[X_\ell, \sigma_\ell] X_\ell$.

É claro que a soma em N é direta, e não é difícil provar que N é um ideal de S_ℓ contido em $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$.

Provaremos que $\hat{\alpha}_\ell\left(S_\ell / B_{\ell-1}[X_\ell, \sigma_\ell]\right) = 0$. Com isso, e usando a Proposição 5.2, obtemos que $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \subseteq B_{\ell-1}[X_\ell, \sigma_\ell]$. Assim, se $f \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$, então podemos escrever $f = \sum_{i=0}^{u} b_i X_\ell^i$ com $b_i \in B_{\ell-1}$ $\forall$ i com $0 \leq i \leq u$. Seja $g = \sum_{i=1}^{u} b_i X_\ell^i$. Como $g \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$, $b_0 = f - g \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \cap B_{\ell-1}$. Mas $g \in B_{\ell-1}[X_\ell, \sigma_\ell] X_\ell$. Logo $f = b_0 + g \in N$, como queríamos provar.

Agora, sabemos que $S_\ell / B_{\ell-1}[X_\ell, \sigma_\ell] \cong (S_{\ell-1} / B_{\ell-1})[X_\ell, \overline{\sigma}_\ell]$ (Proposição I.2.6). Então, para provar que $\hat{\alpha}_\ell\left(S_\ell / B_{\ell-1}[X_\ell, \sigma_\ell]\right) = 0$, é suficente provar que o conjunto

$$W = \left\{ r + B_{\ell-1} \in S_{\ell-1} / B_{\ell-1} : (r + B_{\ell-1}) X_\ell \in \hat{\alpha}_\ell\left((S_{\ell-1} / B_{\ell-1})[X_\ell, \sigma_\ell]\right) \right\}$$

é nulo (Lema 5.4).

Seja $r + B_{\ell-1}$ um elemento de W. Então

$$(r + B_{\ell-1})\,X_\ell \in \hat{\alpha}_\ell\big((S_{\ell-1} / B_{\ell-1})\,[X_\ell, \sigma_\ell]\big) \subseteq \alpha\big((S_{\ell-1} / B_{\ell-1})\,[X,\mathcal{A}]\big)\ .$$

Se $\mathcal{P}$ é a classe de anéis primos que define α, e P é um ideal primo do anel $R[X,\mathcal{A}]$ tal que $R[X,\mathcal{A}] / P \in \mathcal{P}$, então

$$\begin{aligned} B_{\ell-1}\,R[X,\mathcal{A}]\,X_\ell &= B_{\ell-1}\,X_\ell\,R[X,\mathcal{A}] \\ &\subseteq \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)\,R[X,\mathcal{A}] \\ &\subseteq \alpha\big(R[X,\mathcal{A}]\big) \\ &\subseteq P\ . \end{aligned}$$

Logo $B_{\ell-1} \subset P$ ou $X_\ell \in P$.

Se $B_{\ell-1} \subset P$ então $B_{\ell-1}\,[X_\ell, \sigma_\ell] \subset P$ e temos que

$$\begin{aligned} &\big((S_{\ell-1} / B_{\ell-1})\,[X,\mathcal{A}]\big) \,/\, \big(P / B_{\ell-1}\,[X,\mathcal{A}]\big) \\ &\qquad \cong \big(S_{\ell-1}\,[X,\mathcal{A}] / B_{\ell-1}\,[X,\mathcal{A}]\big) \,/\, \big(P / B_{\ell-1}\,[X,\mathcal{A}]\big) \\ &\qquad = S_{\ell-1}\,[X,\mathcal{A}] / P \\ &\qquad = R[X,\mathcal{A}] / P \in \mathcal{P}\ . \end{aligned}$$

Logo $\alpha\big((S_{\ell-1} / B_{\ell-1})\,[X,\mathcal{A}]\big) \subseteq P / B_{\ell-1}\,[X,\mathcal{A}]$. Assim $(r + B_{\ell-1})\,X_\ell \in P / B_{\ell-1}\,[X,\mathcal{A}]$, isto é, $r\,X_\ell \in P$.

Se $X_\ell \in P$, então também $r\,X_\ell \in P$. Em conseqüência $r\,X_\ell \in \alpha\big(R[X,\mathcal{A}]\big)$ e daí $r\,X_\ell \in \alpha\big(R[X,\mathcal{A}]\big) \cap S_\ell = \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$. Assim $r \in B_{\ell-1}$ e $r + B_{\ell-1} = 0$.

Seja α um radical. Para $\ell_1, \ldots, \ell_t \in \{1, \ldots, n\}$ com $\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_t$, definimos o conjunto $A_{\ell_1,\ldots,\ell_t} = \Big\{r \in R : r\,X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_t} \in \alpha\big(R[X,\mathcal{A}]\big)\Big\}$. Segue facilmente que $A_{\ell_1,\ldots,\ell_t} \in \mathcal{H}(R)$.

LEMA 5.6 – Seja α um radical hereditário rígido tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\alpha\big(R[X,\mathcal{A}]\big) \neq 0$ então existem $\ell_1, \ldots, \ell_t \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $\ell_1 < \cdots < \ell_t$ e $A_{\ell_1,\ldots,\ell_t} \neq 0$.

PROVA - Temos que $R[X,\mathcal{A}] = S_n$. Logo da hipótese $\hat{\alpha}_n(S_n) \neq 0$. Pelo Lema 5.4 $B_{n-1} \neq 0$, i.e., existe $s \in S_{n-1}$ não nulo tal que $s X_n \in \hat{\alpha}_n(S_n)$.

Se $s \in R$, então $s \in A_n$ e temos que $A_n \neq 0$. Noutro caso podemos escolher $s = \sum_{i=0}^{m} s_i X_{\ell_{t-1}}^i \in S_{\ell_{t-1}}$ com $\ell_{t-1} \leq n-1$, $s_i \in S_{\ell_{t-1}-1}$ $\forall\, i$ com $0 \leq i \leq m$, e $m \geq 1$ minimal.

Procedendo como na prova da Proposição 5.3, obtemos que $s_m X_{\ell_{t-1}}^m X_n$ pertence à $\alpha(R[X,\mathcal{A}])$, e, semelhantemente à prova do Lema 5.4, provamos que $s_m X_{\ell_{t-1}} X_n \in \alpha(R[X,\mathcal{A}])$.

Se $\ell_{t-1} = 1$, então $s_m \in R$ e $s_m \in A_{1,n}$, i.e., $A_{1,n} \neq 0$. Caso contrário podemos escolher $s_m = \sum_{i=0}^{v} h_i X_{\ell_{t-2}}^i$ com $\ell_{t-2} < \ell_{t-1}$, $h_i \in S_{\ell_{t-2}-1}$ $\forall\, i$ com $0 \leq i \leq v$, e $v \geq 1$ minimal, e repetimos o procedimento anterior. Esse procedimento termina depois de um número finito de passos, i.e., existem $r \in R$ e $\ell_1 < \cdots < \ell_t = n$ tais que $r X_{\ell_1} \ldots X_{\ell_t} \in \alpha(R[X,\mathcal{A}])$. Portanto $A_{\ell_1,\ldots,\ell_t} \neq 0$ e a prova está completa.

O resultado a seguir é muito importante para a prova do teorema central destre parágrafo.

LEMA 5.7 - Se α é um radical hereditário rígido tal que $\alpha \leq \gamma$, então

$$\alpha(S_n) \subseteq A_{1,2,\ldots,n} S_n .$$

PROVA - Seja $r \in R$ tal que

$$(r + A_{1,\ldots,n}) X_1 \cdots X_n \in \alpha\big((R/A_{1,\ldots,n})[X_1,\sigma_1] \ldots [X_n,\sigma_n]\big) .$$

Seja $\mathcal{P}$ a classe dos anéis primos que definem o radical α. Se P é um ideal primo de S_n tal que $S_n/P \in \mathcal{P}$, mostremos que $r X_1 \cdots X_n \in P$

Se algum $X_i \in P$, então é claro que $r X_1 \cdots X_n \in P$. Assim suponhamos

que $X_i \notin P$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq n$. Como

$$\begin{aligned} A_{1,\,\ldots,n}\, S_n\, X_1\, S_n \cdots S_n\, X_n &= A_{1,\,\ldots,n}\, X_1 \cdots X_n\, S_n \\ &\subseteq \alpha(S_n) \\ &\subseteq P\,, \end{aligned}$$

temos $A_{1,\,\ldots,n} \subseteq P$. Logo $A_{1,\,\ldots,n}\, S_n \subseteq P$. Mas

$$(R/A_{1,\,\ldots,n})\,[X_1,\sigma_1] \cdots [X_n,\sigma_n]\,/\,(P/A_{1,\,\ldots,n}\,S_n) \cong S_n/P \in \mathcal{P}\,.$$

Então $\alpha\big((R/A_{1,\,\ldots,n})\,[X_1,\sigma_1] \cdots [X_n,\sigma_n]\big) \subseteq P/A_{1,\,\ldots,n}\,S_n$. Por isso e porque $r\,X_1 \ldots X_n + A_{1,\,\ldots,n}\,S_n \in \alpha\big((R/A_{1,\,\ldots,n})\,[X_1,\sigma_1] \cdots [X_n,\sigma_n]\big)$, temos que $r\,X_1 \cdots X_n \in P$.

Sendo P arbitrário, $r\,X_1 \cdots X_n \in \alpha(S_n)$, i.e., $r \in A_{1,\,\ldots,n}$, e temos $r + A_{1,\,\ldots,n} = 0$.

Deste modo está provado que

$$\Big\{ r + A_{1,\,\ldots,n} \in R/A_{1,\,\ldots,n} : (r + A_{1,\,\ldots,n})\,X_1 \cdots X_n \in \alpha\big((R/A_{1,\,\ldots,n})\,[X_1,\sigma_1] \cdots [X_n,\sigma_n]\big) \Big\} = 0\,.$$

Segue do Lema 5.6 que $\alpha(S_n/A_{1,\,\ldots\,n}\,S_n) = 0$, e, em conseqüência, $\alpha(S_n) \subseteq A_{1,\,\ldots\,n}\,S_n$.

LEMA 5.8 – Sejam α um radical hereditário rígido tal que $\alpha \leq \gamma$, e $h \in \alpha(S_2)$.

(i) Se $h = r_0 + \sum_{i=1}^{u} a_i\, X_1^i$ (com $r_0, a_i \in R$), então $r_0 \in \alpha(S_2) \cap R$ e $a_i \in A_1$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq u$.

(ii) Se $h = r_0 + \sum_{i=1}^{u} a_i\, X_1^i + \sum_{j=1}^{v} b_j\, X_2^j$ (com $r_0, a_i, b_j \in R$), então $r_0 \in \alpha(S_2) \cap R$, $a_i \in A_1$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq u$, e $b_j \in A_2$, $\forall\, j$ com $1 \leq j \leq v$.

PROVA – (i) É conseqüência do fato $h \in \hat{\alpha}_1(S_1)$ e do Teorema 5.5.

(ii) Como $S_2 = S_1[X_2, \sigma_2]$, podemos escrever

$$\alpha(S_2) = (\alpha(S_2) \cap S_1) \oplus C[X_2, \sigma_2]\, X_2 \ ,$$

onde $C = \{f \in S_1 : fX_2 \in \alpha(S_2)\}$ ([9], Teorema 2.5). Por isso $\{b_1, \ldots, b_v\} \subset C$, e então $b_j \in A_2$, $\forall\, j$ com $1 \leq j \leq v$. Como $\sum_{j=1}^{v} b_j X_2^j \in \alpha(S_2)$, $h - \sum_{j=1}^{v} b_j X_2^j = r_0 + \sum_{i=1}^{u} a_i X_1^i \in \alpha(S_2)$. A prova completa-se usando a parte (i) já provada.

O seguinte Lema pode ser provado sem muita dificuldade.

LEMA 5.9 – $R + \sum_{t=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq n} R[X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}]\, X_{i_1}, \cdots X_{i_t}$ é uma soma direta.

Agora vamos provar o resultado central deste parágrafo. Esse resultado generaliza o Teorema 2.5 de [9] e, em particular, vale para os radicais L, J, $\mathcal{G}$, e $\mathcal{L}$.

TEOREMA 5.10 – Seja $n \geq 2$. Se α é um radical hereditário rígido tal que $\alpha \leq \gamma$, então

$$\alpha(S_n) = (\alpha(S_n) \cap R) \bigoplus_{t=1}^{n} \bigoplus_{1 \leq i_1 < \ldots < i_t \leq n} A_{i_1 \ldots i_t} [X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}]\, X_{i_1} \cdots X_{i_t}.$$

PROVA – Definamos

$$M_n = (\alpha(S_n) \cap R) \bigoplus_{t=1}^{n} \bigoplus_{1 \leq i_1 < \ldots < i_t \leq n} A_{i_1 \ldots i_t} [X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{t_1}, \sigma_{i_1}]\, X_{i_1} \cdots X_{i_t} \ .$$

Pelo lema anterior M_n é uma soma direta. Também é claro que $M_n \subseteq \alpha(S_n)$.

Agora procedemos por indução sobre $n \geq 2$ para provar que $\alpha(S_n) \subseteq M_n$.

Caso n = 2 – Seja $f \in \alpha(S_2)$ com $f = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} r_{ij} X_1^i X_2^j$ (onde $r_{ij} \in R$, $\forall\, i,j$). Pelo Lema 5.7, $r_{ij} \in A_{1,2}$, $\forall\, i,j$. Logo o elemento $g = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} r_{ij} X_1^i X_2^j$ está em

$\alpha(S_2)$. Assim $h = f - g \in \alpha(S_2)$ com h da forma $h = r_0 + \sum_{i=1}^{u} a_i X_1^i + \sum_{j=1}^{v} b_j X_2^j$, onde $r_0, a_i, b_j \in R$.

A prova se completa aplicando o Lema 5.8 (ii) para esse elemento $h \in \alpha(S_2)$.

Seja $m > 2$ e suponhamos que o resultado vale para todo n tal que $2 \leq n \leq m-1$.

Caso n = m – Usando o fato de que $S_m = S_1[X_2, \sigma_2] \cdots [X_m, \sigma_m]$ e a hipótese de indução, podemos escrever

$$\alpha(S_m) = (\alpha(S_m) \cap S_1) \bigoplus_{t=1}^{m-1} \bigoplus_{2 \leq i_1 < \ldots < i_t \leq m} D_{i_1 \ldots i_t} [X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}] X_{i_1} \cdots X_{i_t},$$

onde $D_{i_1 \ldots i_t} = \{g \in S_1 : g X_{i_1} \cdots X_{i_t} \in \alpha(S_m)\}$.

Como $\alpha(S_m) \cap S_1 = \hat{\alpha}_1(S_1)$, segue do Teorema 5.5 que $\alpha(S_m) \cap S_1 \subseteq M_m$.

Completamos a prova verificando que $D_{i_1 \ldots i_t}[X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}] X_{i_1} \cdots X_{i_t} \subseteq M_m$, para quaisquer $i_1, \ldots, i_t$ com $2 \leq i_1 < \ldots < i_t \leq m$ e todo t com $1 \leq t \leq m-1$.

Caso 1: t = m – 1. Nesse caso $i_j = j+1 \quad \forall\, j$ com $1 \leq j \leq m-1$. Se $f \in D_{2 \ldots m}[X_2, \sigma_2] \cdots [X_m, \sigma_m] X_2 \cdots X_m$, então é-nos permitido escrever $f = \left(\sum_{\overline{\nu}} f_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}}\right) X_2 \cdots X_m$, onde $f_{\overline{\nu}} \in D_{2 \ldots m}$, $\forall\, \overline{\nu}$, e os elementos $\overline{\nu} \in \mathbb{N}^m$ são da forma $\overline{\nu} = (0, \nu_2, \ldots, \nu_m)$.

Seja $f_{\overline{\nu}}$ da forma $f_{\overline{\nu}} = \sum_{i=0}^{v} r_i X_1^i$ (com $r_i \in R$), e u a unidade de R tal que $X^{\overline{\nu}} X_2 \cdots X_m = u X_2 \cdots X_m X^{\overline{\nu}}$ (Corolário I.2.3.). Já que $f_{\overline{\nu}} \in D_{2 \ldots m}$, então $f_{\overline{\nu}} u \in D_{2 \ldots m}$, logo $f_{\overline{\nu}} u X_2 \cdots X_m \in \alpha(S_m)$. Segue que $r_0 u X_2 \cdots X_m \in \alpha(S_m)$, pois $r_i \sigma_1^i(u) \in A_{1 \ldots m} \quad \forall\, i$ com $0 \leq i \leq v$ (Lema 5.7). Daí se deduz que $f_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}} X_2 \cdots X_m \in M_m$, $\forall\, \overline{\nu}$, e, usando a aditividade em M_m, obtemos que $f \in M_m$.

Caso 2: $t < m - 1$. Nesse caso temos que existe um elemento p no conjunto $\{2, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_t\}$.

Tomemos o elemento $f \in D_{i_1,\ldots,i_t}[X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}] X_{i_1}, \cdots X_{i_t}$ com $f = \Big(\sum_{\overline{\mu}} f_{\overline{\mu}} X^{\overline{\mu}}\Big) X_{i_1} \cdots X_{i_t}$, onde $f_{\overline{\mu}} \in D_{i_1 \ldots i_t} \quad \forall\, \overline{\mu}$, e os elementos $\overline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{N}^m$ são tais que $\mu_j = 0$ para todo $j \notin \{i_1, \ldots, i_t\}$.

Consideremos um dos $f_{\overline{\mu}}$ e suponhamos que se escreve na forma $f_{\overline{\mu}} = \sum_{i=0}^{v} s_i X_1^i$, onde $s_i \in R \quad \forall\, i$ com $0 \leq i \leq v$. Como $f_{\overline{\mu}} \in D_{i_1,\ldots,i_t}$ e $D_{i_1,\ldots,i_t}$ é um ideal de S_1, temos $f_{\overline{\mu}} u \in D_{i_1,\ldots,i_t}$. Assim $g = f_{\overline{\mu}} u X_{i_1} \cdots X_{i_t} \in \alpha(S_m)$ com

$$g = s_0 u X_{i_1} \cdots X_{i_t} + \Big(\sum_{\ell=0}^{v-1} s_{\ell+1} \sigma_1^{\ell+1}(u) X_1^{\ell}\Big) X_1 X_{i_1} \cdots X_{i_t} .$$

Mas também temos

$$S_m = R[X_p, \sigma_p][X_1, \sigma_2][X_2, \sigma_2] \cdots [X_{p-1}, \sigma_{p-1}][X_{p+1}, \sigma_{p+1}] \cdots [X_m, \sigma_m] .$$

Então, usando mais uma vez a hipótese de indução, podemos escrever

$$\alpha(S_m) = (\alpha(S_m) \bigcap R[X_p, \sigma_p]) \oplus \bigoplus_{s=1}^{m-1} \bigoplus_{\substack{1 \leq \ell_1 < \cdots < \ell_s \leq m \\ \ell_j \neq p,\, \forall j}} E_{\ell_1 \ldots \ell_s}[X_{\ell_1}, \sigma_{\ell_1}] \cdots [X_{\ell_s}, \sigma_{\ell_s}] X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s} ,$$

onde $E_{\ell_1 \ldots \ell_s} = \{h \in R[X_p, \sigma_p] : h X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s} \in \alpha(S_m)\}$.

Por isso, tendo em conta que $g \in \alpha(S_m)$, existem elementos

$$h_0 \in \alpha(S_m) \cap R[X_p, \sigma_p]$$

e $\quad h^{(\ell_1,\ldots,\ell_s)} \in E_{\ell_1 \ldots \ell_s}[X_{\ell_1}, \sigma_{\ell_1}] \cdots [X_{\ell_s}, \sigma_{\ell_s}]$

$$(1 \leq s \leq m-1, \;\; 1 \leq \ell_1 < \cdots < \ell_s \leq m, \;\; e \;\; \ell_j \neq p, \;\; \forall\, j)$$

tais que $g = h_0 + \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{\substack{1 \leq \ell_1 < \cdots < \ell_s \leq m \\ \ell_j \neq p,\, \forall j}} h^{(\ell_1,\ldots,\ell_s)} X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s}$.

Comparando as duas expressões obtidas para g e aplicando o Lema 5.9, obtemos que

$$h_0 = 0$$

$$s_0\, u\, X_{i_1} \cdots X_{i_t} = h^{(i_1, \ldots, i_t)}\, X_{i_1} \cdots X_{i_t}$$

$$\Big(\sum_{\ell=0}^{v-1} s_{\ell+1}\, \sigma_1^{\ell+1}(u)\, X_1^{\ell} \Big) X_1\, X_{i_1} \cdots X_{i_t} = h^{(1, i_1, \ldots, i_t)}\, X_1\, X_{i_1} \cdots X_{i_t}\ ,$$

isto é

$$s_0\, u = h^{(i_1, \ldots, i_t)} \in E_{i_1, \ldots, i_t}\, [X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}]$$

e $$\sum_{\ell=0}^{v-1} s_{\ell+1}\, \sigma_1^{\ell+1}(u)\, X_1^{\ell} = h^{(1, i_1, \ldots, i_t)} \in E_{1, i_1, \ldots, i_t}\, [X_1, \sigma_1]\, [X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}]\ .$$

Daí $s_0\, u \in E_{i_1 \ldots i_t}$ e $s_{\ell+1}\, \sigma_1^{\ell+1}(u) \in E_{1, i_1 \ldots i_t}$, $\forall\, \ell$ com $0 \leq \ell \leq v-1$, e, em conseqüência, $s_0 \in E_{i_1 \ldots i_t} \cap R = A_{i_1 \ldots i_t}$, e $s_\ell \in E_{1, i_1 \ldots i_t} \cap R = A_{1, i_1 \ldots i_t}$ $\forall\, \ell$ com $1 \leq \ell \leq v$.

Assim $f_{\overline{\mu}}\, X^{\overline{\mu}}\, X_{i_1} \cdots X_{i_t} = f_{\overline{\mu}}\, u\, X_{i_1} \cdots X_{i_t}\, X^{\overline{\mu}} \in M_m$, $\forall\, \overline{\mu}$. Por isso, usando a aditividade em M_m, obtemos que $f \in M_m$, e a prova está completa.

6 – O Nil Radical Generalizado dos Anéis $R * \mathcal{L}$ e $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$.

Um anel R é dito *completamente primo* se R não tem divisores de zero não nulos. Um ideal P de R é chamado *completamente primo* se o anel quociente R / P é completamente primo.

O *nil radical generalizado* N é o radical definido pela classe dos anéis completamente primos ([7]). Assim, para um anel associativo R, se tem

$$N(R) = \cap \{ P \lhd R \ :\ P \text{ é completamente primo} \}\ .$$

N é um radical hereditário que satisfaz $N \leq \gamma$, mas N não é um radical admissível ([9], Sec. 4). Em conseqüência disso os resultados dos parágrafos 2,3 e

5 não podem ser utilizados para calcular o nil radical generalizado das extensões $R[X,\mathcal{D}]$, $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ e $R[X,\mathcal{A}]$. Mesmo assim vamos provar neste parágrafo que o nil radical generalizado dos anéis $R*\mathcal{L}$ e $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ é um ideal estendido do anel R.

Seja S qualquer anel extensão de R. Se $P \lhd S$ é completamente primo, então é claro que o ideal $P \cap R$ de R é completamente primo. Esse resultado é usado na prova dos Lemas 6.1 e 6.4 seguintes.

Consideremos o anel de operadores diferenciais $R*\mathcal{L}$. Para o anel R definimos

$$N_{\mathcal{L}}(R) = \cap \{P \lhd R : P \text{ é um } \mathcal{L}\text{-ideal completamente primo } \} .$$

É claro que $N_{\mathcal{L}}(R)$ é um $\mathcal{L}$-ideal de R. Sendo que todo ideal I do anel de operadores diferenciais $R*\mathcal{L}$ se contrai num $\mathcal{L}$-ideal $I \cap R$ do anel R, prova-se facilmente o seguinte resultado.

LEMA 6.1 – Se $R*\mathcal{L}$ é um anel de operadores diferenciais, então

$$N_{\mathcal{L}}(R) \subseteq N(R*\mathcal{L}) \cap R .$$

LEMA 6.2 – Se Q é um $\mathcal{L}$-ideal completamente primo do anel R, então o ideal estendido $Q*\mathcal{L}$ de $R*\mathcal{L}$ também é completamente primo.

PROVA – Suponhamos que $Q*\mathcal{L}$ não é completamente primo. Nesse caso existem elementos $f, g \in R*\mathcal{L} \setminus Q*\mathcal{L}$ tais que $fg \in Q*\mathcal{L}$.

Sejam $f = \sum_{\overline{\nu} \leq \overline{\nu}_0} a_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}}$ e $g = \sum_{\overline{\mu} \leq \overline{\mu}_0} b_{\overline{\mu}} X^{\overline{\mu}}$. Como

$$Q*\mathcal{L} = \left\{ h = \sum_{\overline{\rho}} c_{\overline{\rho}} X^{\overline{\rho}} \in R*\mathcal{L} : c_{\overline{\rho}} \in Q, \quad \forall\ \overline{\rho} \right\},$$

existem $\nu_1 = \text{máx}\ \{\overline{\nu} \leq \overline{\nu}_0 : a_{\overline{\nu}} \notin Q\}$ e $\mu_1 = \text{máx}\ \{\overline{\mu} \leq \overline{\mu}_0 : b_{\overline{\mu}} \notin Q\}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\overline{\nu}_1 = \overline{\nu}_0$ e $\overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_0$.

As regras de multiplicação em $R*\mathcal{L}$ e a Proposição I.1.1 permitem escrever $fg = a_{\overline{\nu}_0} b_{\overline{\mu}_0} X^{\overline{\nu}_0+\overline{\mu}_0} + \sum_{\overline{p}<\overline{\nu}_0+\overline{\mu}_0} d_{\overline{p}} X^{\overline{p}}$, para certos elementos $d_{\overline{p}}$ do anel R..

Do fato $fg \in Q*\mathcal{L}$ obtém-se $a_{\overline{\nu}_0} b_{\overline{\mu}_0} \in Q$. Logo $a_{\overline{\nu}_0} \in Q$ ou $b_{\overline{\mu}_0} \in Q$ (pois Q é completamente primo), o que é uma contradição.

Se Θ é uma família de $\mathcal{L}$-ideais do anel R, então é rotineiro provar que $\left(\cap\{I:I\in\Theta\}\right)*\mathcal{L} = \cap\{I*\mathcal{L}:I\in\Theta\}$. Esse resultado é usado no seguinte

TEOREMA 6.3 – Se $R*\mathcal{L}$ é um anel de operadores diferenciais, então

$$N(R*\mathcal{L}) = N_{\mathcal{L}}(R)*\mathcal{L}\,.$$

PROVA – Como conseqüência do Lema 6.1, temos

$$N_{\mathcal{L}}(R)*\mathcal{L} \subseteq \left(N(R*\mathcal{L})\cap R\right)*\mathcal{L} \subseteq N(R*\mathcal{L})\,.$$

Por outro lado, o Lema 6.2 garante que $N(R*\mathcal{L}) \subseteq P*\mathcal{L}$, para todo $\mathcal{L}$-ideal completamente primo P de R. Por isso

$$\begin{aligned} N(R*\mathcal{L}) &\subseteq \cap\{P*\mathcal{L}: P \lhd R \text{ é um } \mathcal{L}\text{-ideal completamente primo}\} \\ &= \left(\cap\{P\lhd R: P \text{ é um } \mathcal{L}\text{-ideal completamente primo}\}\right)*\mathcal{L} \\ &= N_{\mathcal{L}}(R)*\mathcal{L}\,, \end{aligned}$$

e temos o resultado desejado.

Agora consideremos um anel com automorfismos $(R,\mathcal{A},\mathcal{U})$ e definamos o conjunto

$$N_{\mathcal{A}}(R) = \cap\{P\lhd_{\mathcal{A}} R:\ P \text{ é completamente primo}\}\,.$$

É fácil provar que $N_{\mathcal{A}}(R)$ é um ideal $\mathcal{A}$-invariante do anel R. Pela razão de todo ideal I do anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ se contrair num ideal $\mathcal{A}$-invariante $I\cap R$ de R, temos o seguinte

LEMA 6.4 – Para cada skew anel $R(X,\mathcal{A})$ se tem $N_{\mathcal{A}}(R) \subseteq N(R(X,\mathcal{A})) \cap R$.

Procedendo como na prova do Lema 6.2 e utilizando as regras de multiplicação em $R(X,\mathcal{A})$ junto com o Corolário I.2.3, podemos provar o

LEMA 6.5 – Se P é um ideal $\mathcal{A}$-invariante e completamente primo do anel R, então o ideal $P(X,\mathcal{A})$ de $R(X,\mathcal{A})$ também é completamente primo.

Se Θ é qualquer família de ideais $\mathcal{A}$-invariantes do anel R, então

$$\left(\cap \{J : J \in \Theta\}\right)(X,\mathcal{A}) = \cap \left\{J(X,\mathcal{A}) : J \in \Theta\right\} .$$

Usando esse resultado e os Lemas 6.4 e 6.5, prova-se o

TEOREMA 6.6 – Para cada skew anel $R(X,\mathcal{A})$ se tem

$$N(R(X,\mathcal{A})) = N_{\mathcal{A}}(R)\,(X,\mathcal{A}) .$$

CAPÍTULO III

IDEAIS PRIMOS, FORTEMENTE PRIMOS E NÃO SINGULARES DO SKEW ANEL R⟨X,$\mathcal{A}$⟩

Neste Capítulo vamos estudar os ideais fechados do anel R⟨X,$\mathcal{A}$⟩. Depois, com esta noção, estudaremos os ideais primos, fortemente primos e não singulares do anel R⟨X,$\mathcal{A}$⟩, quando os automorfismos de $\mathcal{A}$ comutam entre si.

1 – O Anel Completo de $\mathcal{A}$-quocientes à Esquerda Q de R.

Como em [17], vamos construir um anel de quocientes Q. Como Q herda as propriedades básicas da construção do anel clássico de Martindale, as demonstrações destas propriedades vão ser omitidas.

Consideremos um anel com automorfismo (R,$\mathcal{A}$,U), onde R é $\mathcal{A}$-primo.

Se I e J são ideais $\mathcal{A}$-invariantes não nulos do anel R, então I+J, IJ, e I∩J também são ideais $\mathcal{A}$-invariantes não nulos de R. Trivialmente R é um ideal $\mathcal{A}$-invariante não nulo de R. Assim consideremos o filtro dos ideais de R $\{I \lhd_{\mathcal{A}} R : I \neq 0\}$ que, a partir de agora, denotaremos com $\Im$(R).

Seja I um ideal de R. Se $f: I \longrightarrow R$ é um R-homomorfismo à esquerda, então denotaremos isto com $f : {}_RI \longrightarrow {}_RR$. Alem disso, a imagem de um elemento $a \in I$ por f será escrita af.

Se no conjunto $\Lambda = \{(f,I) : f: {}_RI \longrightarrow {}_RR,\ I \in \Im(R)\}$ definimos a relação: $(f,I) \sim (g,J)$ se, e somente se, existe $H \in \Im(R)$ tal que $H \subseteq I \cap J$ e $af = ag$, $\forall\, a \in H$, então é fácil provar que "$\sim$" á uma relação de equivalência.

Denotemos com Q o conjunto quociente $\Lambda/\sim$ e com [f,I] a classe de equivalência em Q do elemento (f,I) de Λ.

É rotineiro provar o seguinte. Se em Q definimos

$$[f,I] + [g,J] = [f + g,\ I \cap J]$$

$$[f,I][g,J] = [f \circ g,\ JI]$$

para todo $[f,I], [g,J] \in Q$, então essas operações estão bem definidas e Q é um anel com unidade [id,R]. Esse anel Q será chamado o *anel completo de $\mathcal{A}$-quocientes à esquerda de R.*

Cada automorfismo $\sigma \in \mathcal{A}$ pode ser estendido para um único automorfismo de Q, que também será denotado com σ.

Denotemos com C o centro do anel Q e com $C_{\mathcal{A}}$ o conjunto

$$C_{\mathcal{A}} = \{c \in C : \sigma(c) = c,\quad \forall\ \sigma \in \mathcal{A}\}\ .$$

O seguinte resultado pode ser provado como o Lema 1.2 em [5]

LEMA 1.1 – Se o anel $(R, \mathcal{A}, U)$ é $\mathcal{A}$-primo, então

(i) $R \subseteq Q$;

(ii) se $(f,I) \in \Lambda$, então existe $q \in Q$ tal que $af = aq$, $\forall\, a \in I$; além disso, $q \in C$ se, e somente se, f é um homomorfismo de R-bimódulos;

(iii) se $q_1, \ldots, q_n \in Q$ então existe $I \in \Im(R)$ tal que $I q_i \subseteq R$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq n$;

(iv) seja $I \in \Im(R)$. Se $q \in Q$ é tal que $Iq = 0$, ou $qI = 0$, então $q = 0$;

(v) Q é $\mathcal{A}$-primo e $(Q, \mathcal{A}, \mathcal{U})$ satisfaz a condição (K) (ver pág. 14).

Assim, como uma das conseqüências desse Lema, podemos construir o skew anel $Q(X,\mathcal{A})$. Prova-se sem dificuldade que $R(X,\mathcal{A})$ é um subanel de $Q(X,\mathcal{A})$.

Outra conseqüência do Lema 1.1 é o seguinte

LEMA 1.2 - Se $q \in Q$ é tal que $qR = Rq$ e $\sigma(q) = q$, $\forall\, \sigma \in \mathcal{A}$, então o elemento q é inversível em Q. Em particular $C_{\mathcal{A}}$ é um corpo.

É facil provar que, se $I \in \Im(Q)$, então $I \cap R \in \Im(R)$.

Usando o Lema 1.1 e as observações anteriores, podemos provar o

LEMA 1.3 - Se α é um elemento de $Q(X,\mathcal{A})$, então

(i) existe $I \in \Im(R)$ tal que $I\alpha \subseteq R(X,\mathcal{A})$,

(ii) se $H \in \Im(R)$ é tal que $H\alpha = 0$, ou $\alpha H = 0$, então $\alpha = 0$.

No parágrafo 2 do Capítulo I definimos, para cada elemento não nulo $\alpha = \sum_{\overline{\nu}} r_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}}$ de $R(X,\mathcal{A})$, o $\overline{\nu}$-ésimo coeficiente (à esquerda) de α que daqui em diante denotaremos com $c^{E}_{\overline{\nu}}(\alpha)$, o coeficente principal (à esquerda) de α, $\ell c_E(\alpha)$, e o suporte (à esquerda) de α, $\mathrm{Supp}_E(\alpha)$.

Dado que o elemento α pode escrever-se na forma $\alpha = \sum_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}} s_{\overline{\nu}}$ (com coeficiêntes à direita $s_{\overline{\nu}} = \sigma^{-\overline{\nu}}(r_{\overline{\nu}})$, $\forall\, \overline{\nu}$), é-nos facultado definir os respectivos conceitos anteriores também "á direita". Com isso fica claro que $c^{D}_{\overline{\nu}}(\alpha) = \sigma^{-\overline{\nu}}(c^{E}_{\overline{\nu}}(\alpha))$, $\forall\, \overline{\nu}$, $\ell c_D(\alpha) = \sigma^{-\partial\alpha}(\ell c_E(\alpha))$, e $\mathrm{Supp}_D(\alpha) = \mathrm{Supp}_E(\alpha)$.

Assim o suporte de α, $\mathrm{Supp}(\alpha)$, e o grau de α, $\partial\alpha$, estão bem definidos, independentemente de considerar a representação de α com coeficientes à esquerda ou à direita.

Um ideal I do anel $R(X,\mathcal{A})$ será chamado *R-disjunto* se $I \cap R = 0$.

Seja I um ideal R-disjunto não nulo do anel $R(X,\mathcal{A})$. Diz-se que um elemento não nulo α de I é *de suporte minimal em I* se para todo $\beta \in I$ com $\mathrm{Supp}(\beta) \subsetneq \mathrm{Supp}(\alpha)$ se tem $\beta = 0$.

Para cada ideal R-disjunto não nulo I de $R(X,\mathcal{A})$, definimos os conjuntos

$$M(I) = \{\alpha \in I : \alpha \text{ é de suporte minimal em I } \},$$
$$\mathrm{Min}(I) = \{\mathrm{Supp}(\alpha) : \alpha \in M(I)\}.$$

O seguinte resultado pode ser provado sem dificuldade.

LEMA 1.4 – Seja I um ideal R-disjunto não nulo do anel $R(X,\mathcal{A})$. Se, para cada $\Gamma \in \mathrm{Min}(I)$ e cada $\overline{\nu} \in \Gamma$, definimos o conjunto

$$\Theta_{\Gamma,\overline{\nu}}(I) = \{r \in R : \text{ Existe } \alpha \in I \text{ com } \mathrm{Supp}(\alpha) = \Gamma \text{ e } c^{E}_{\overline{\nu}}(\alpha) = r\} \cup \{0\},$$

então $\Theta_{\Gamma,\overline{\nu}}(I)$ pertence à $\Im(R)$ e coincide com o conjunto

$$\{r \in R : \text{ Existe } \beta \in I \text{ com } \mathrm{Supp}(\beta) = \Gamma \text{ e } c^{D}_{\overline{\nu}}(\beta) = r\} \cup \{0\}.$$

2 – Ideais Fechados do Skew Anel $R(X,\mathcal{A})$.

Neste parágrafo definimos os ideais fechados do skew anel $R(X,\mathcal{A})$ de forma análoga à da definição dada em [8], parágrafo 1, e vamos provar resultados que generalizam resultados anteriores, e portanto os resultados de [6] para ideais fechados de $R(X,\mathcal{A})$.

Para cada ideal R-disjunto não nulo I de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ definimos o *fecho* de I por

$$[I]_R = \{\alpha \in R\langle X,\mathcal{A}\rangle : \text{ Existe } H \in \mathcal{F}(R) \text{ tal que } H\alpha \subseteq I\}$$

Procedendo como na prova do Lema 1.1 em [8] pode-se provar o

LEMA 2.1 – Se I é um ideal R-disjunto não nulo de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$, então $[I]_R$ é um ideal R-disjunto não nulo de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ que safistaz $I \subseteq [I]_R$ e $\mathrm{Min}(I) = \mathrm{Min}([I]_R)$.

Um ideal R-disjunto I de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ é chamado *fechado* se $I = 0$ ou $[I]_R = I$.

Cada automorfismo extensão do automorfismo $\sigma \in \mathcal{A}$ a todo o anel $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ será denotado outra vez com σ.

Se $\overline{\rho}$ e $\overline{\nu}$ são dois elementos de Ω_1^*, então segue da definição de $\sigma^{\overline{\rho}}$ e das propriedades do produto em $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ que existe um elemento inversivel $v^{(\overline{\rho},\overline{\nu})}$ de R tal que $\sigma^{\overline{\rho}}(X^{\overline{\nu}}) = v^{(\overline{\rho},\overline{\nu})} X^{\overline{\nu}}$. Esse fato e as notações

$$(\mu_1, \ldots, \mu_n)^T = (\mu_n, \ldots, \mu_1) \qquad \text{e} \qquad -(\mu_1, \ldots, \mu_n) = (-\mu_1, \ldots, -\mu_n)$$

são usados no seguinte resultado.

TEOREMA 2.2 – Se I é um ideal R-disjunto não nulo do anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$, então $[I]_R$ é o maior ideal R-disjunto não nulo J de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ tal que $I \subseteq J$ e $\mathrm{Min}(I) = \mathrm{Min}(J)$.

PROVA – Por causa do Lema 2.1 é suficiente provar que, se J é um ideal R-disjunto não nulo de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ tal que $I \subseteq J$ e $\mathrm{Min}(I) = \mathrm{Min}(J)$, então $J \subseteq [I]_R$.

Seja agora J um tal ideal. Vejamos primeiro que $M(J) \subseteq [I]_R$.

Tomemos $\alpha \in M(J)$ com $\Gamma = \mathrm{Supp}(\alpha)$. Uma vez que $\Gamma \in \mathrm{Min}(J) = \mathrm{Min}(I)$, existe $\beta \in M(I)$ tal que $\mathrm{Supp}(\beta) = \Gamma$.

Sejam $\alpha = \sum_{\overline{\nu} \in \Gamma} a_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}}$, $\beta = \sum_{\overline{\nu} \in \Gamma} b_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}}$ e $\overline{\nu}_0 \in \Gamma$. Se, para cada $\overline{\rho} \in \Omega_1^*$ e cada $r \in R$, definimos $u = (v^{(\overline{\rho},\overline{\nu}_0)})^{-1}$ e

$$\epsilon(r,\overline{\rho}) = \sigma^{\overline{\rho}}(b_{\overline{\nu}_0})\, r\, \alpha - \sigma^{\overline{\rho}}(\beta)\, \sigma^{-\overline{\nu}_0^T}(u\, r\, a_{\overline{\nu}_0}),$$

então $\epsilon(r,\overline{\rho}) \in J$ e $\mathrm{Supp}\,(\epsilon(r,\overline{\rho})) \subsetneq \Gamma$. Assim $\epsilon(r,\overline{\rho}) = 0$ e, em conseqüência, $\sigma^{\overline{\rho}}(b_{\overline{\nu}_0})\, r\, \alpha = \sigma^{\overline{\rho}}(\beta)\, \sigma^{-\overline{\nu}_0^T}(u\, r\, a_{\overline{\nu}_0}) \in I$, $\forall\, r \in R$, $\forall\, \overline{\rho} \in \Omega_1^*$. Daí obtemos que $H\alpha \subseteq I$ com $H = \sum_{\overline{\rho} \in \Omega_1^*} R\, \sigma^{\overline{\rho}}(b_{\overline{\nu}_0})\, R \in \Im(R)$, isto é, $\alpha \in [I]_R$.

Agora sejam $\alpha \in J$, $\Gamma = \mathrm{Supp}\,(\alpha)$ e $n = |\Gamma|$. Nós vamos provar, por indução sobre $n \geq 1$, que existe $H \in \Im(R)$ tal que

$$H\,\alpha \subseteq I\,, \qquad \text{para todo } \gamma \in J \text{ com } \mathrm{Supp}\,(\gamma) \subseteq \Gamma\,.$$

Caso n = 1: Neste caso $\alpha \in M(J)$ e todo $\gamma \in J$ com $\mathrm{Supp}\,(\gamma) \subseteq \Gamma$ também pertence a $M(J)$ e $\mathrm{Supp}\,(\gamma) = \Gamma$. Pelo que foi provado antes o ideal de $\Im(R)$, $H = \sum_{\overline{\rho} \in \Omega_1^*} R\, \sigma^{\overline{\rho}}(b_{\overline{\nu}_0})\, R$, independe do elemento α e portanto satisfaz

$$H\,\gamma \subseteq I\,, \qquad \text{para todo } \gamma \in I \text{ com } \mathrm{Supp}\,(\gamma) = \Gamma\,.$$

Seja $m > 1$ e suponhamos que a afirmação vale para todo $n < m$.

Caso n = m: Seja $\gamma \in J$ com $\gamma = \sum_{\overline{\nu} \in \mathrm{Supp}(\gamma)} c_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}}$ e $\mathrm{Supp}\,(\gamma) \subseteq \Gamma$.

Se $\mathrm{Supp}\,(\gamma) \subsetneq \Gamma$ então segue da hipótese de indução que existe $H_1 \in \Im(R)$ tal que $H_1\, \gamma_1 \subseteq I$ para todo $\gamma_1 \in J$ com $\mathrm{Supp}\,(\gamma_1) \subseteq \mathrm{Supp}\,(\gamma)$.

Se $\mathrm{Supp}\,(\gamma) = \Gamma$, consideramos um $\alpha_1 \in M(J)$ tal que $\mathrm{Supp}\,(\alpha_1) \subseteq \Gamma$.

Como $\mathrm{Min}(I) = \mathrm{Min}(J)$ existe $\beta \in M(I)$ tal que $\mathrm{Supp}\,(\beta) = \mathrm{Supp}\,(\alpha_1)$.

Seja $\beta = \sum_{\overline{\nu} \in \mathrm{Supp}(\alpha_1)} b_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}}$. Se $\overline{\nu}_0 \in \mathrm{Supp}(\alpha_1)$ então, como antes, o elemento $\epsilon\,(r,\overline{\rho}) = \sigma^{\overline{\rho}}(b_{\overline{\nu}_0})\, r\, \gamma - \sigma^{\overline{\rho}}(\beta)\, \sigma^{-\overline{\nu}_0^T}(u r c_{\overline{\nu}_0})$ pertence a J e $\mathrm{Supp}\,(\epsilon(r,\overline{\rho})) \subseteq \Gamma \setminus \{\overline{\nu}_0\}$, $\forall\, r \in R$, $\forall\, \overline{\rho} \in \Omega_1^*$. Sendo $|\Gamma \setminus \{\overline{\nu}_0\}| < m$, obtemos, usando mais uma vez a hipótese de indução, que existe um ideal $L \in \Im(R)$ tal que $L\, \epsilon(r,\overline{\rho}) \subseteq I$, $\forall\, r \in R$, $\forall\, \overline{\rho} \in \Omega_1^*$. Como $\beta \in I$, é fácil provar que $H_2\, \gamma \subseteq I$ com $H_2 = \sum_{\overline{\rho} \in \Omega_1^*} L\, \sigma^{\overline{\rho}}(b_{\overline{\nu}_0})\, R \in \Im(R)$.

Se definimos $H = H_1 \cap H_2$ então $H \in \Im(R)$, e H satisfaz

$$H\gamma \subseteq I\,, \qquad \text{para todo } \gamma \in J \text{ com } \mathrm{Supp}(\gamma) \subseteq \Gamma\,.$$

Como conseqüência de tudo, temos que, dado $\alpha \in J$, existe $H \in \Im(R)$ tal que $H\alpha \subseteq I$, isto é $\alpha \in [I]_\Gamma$, e a prova do Teorema está completa.

Com uma prova semelhante à do Teorema 1.3 em [8] conseguimos o seguinte resultado

COROLÁRIO 2.3 – Se I é um ideal R-disjunto não nulo de $R(X,\mathcal{A})$, então $[I]_R$ é o menor ideal fechado de $R(X,\mathcal{A})$ que contém I. Mais ainda, $[I]_R$ é o único ideal fechado do anel $R(X,\mathcal{A})$ que contem I e safisfaz

$$\mathrm{Min}\big([I]_R\big) = \mathrm{Min}(I)\,.$$

Seja P um ideal R-disjunto, não nulo e primo do anel $R(X,\mathcal{A})$. Se $\alpha \in [P]_R$, então existe $H \in \Im(R)$ tal que $H\alpha \subseteq P$. Com isso pode-se provar que $H\,R(X,\mathcal{A})\alpha \subseteq P$. Sendo P primo R-disjunto, obtemos que $\alpha \in P$.

Acabamos de provar a

PROPOSIÇÃO 2.4 – Seja P um ideal R-disjunto não nulo de $R(X,\mathcal{A})$. Se P é primo, então P é fechado.

Finalizamos este prágrafo com o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 2.5 – Seja I um ideal Q-disjunto não nulo do anel $Q(X,\mathcal{A})$. Se definimos $I_0 = I \cap R(X,\mathcal{A})$, então I_0 é um ideal R-disjunto não nulo do anel $R(X,\mathcal{A})$ tal que $\mathrm{Min}(I_0) = \mathrm{Min}(I)$.

PROVA – É claro que I_0 é um ideal R-disjunto não nulo de $R(X,\mathcal{A})$. Seja $\Gamma \in \mathrm{Min}(I_0)$. Nesse caso existe um $\alpha \in M(I_0)$ tal que $\Gamma = \mathrm{Supp}(\alpha)$. Suponhamos que exista $\beta \in I$ não nulo tal que $\mathrm{Supp}(\beta) \subsetneq \Gamma$. Se $H \in \Im(R)$ é tal que $H\beta$

$\subseteq R(X,\mathcal{A})$ (Lema 1.3), então existe um $h \in H$ tal que $0 \neq h\beta \in I_0$ com $\mathrm{Supp}(h\beta) \subsetneq \Gamma$, o que contradiz o fato de que $\alpha \in M(I_0)$.

Assim $\alpha \in M(I)$ e $\Gamma \in \mathrm{Min}(I)$. Isso prova que $\mathrm{Min}(I_0) \subseteq \mathrm{Min}(I)$. Agora seja $\Gamma \in \mathrm{Min}(I)$. Se $\gamma \in M(I)$ é tal que $\mathrm{Supp}(\gamma) = \Gamma$, então, usando mais uma vez o Lema 1.3, prova-se que existe um elemento $h \in R$ tal que $0 \neq h\gamma \in I_0$. É fácil provar que $h\gamma \in M(I_0)$ com $\mathrm{Supp}(h\gamma) = \Gamma$, isto é, $\Gamma \in \mathrm{Min}(I_0)$. Logo obtemos a igualdade $\mathrm{Min}(I_0) = \mathrm{Min}(I)$.

3 – Correspondência entre os Ideais Fechados de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ e $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ Quando os Automorfismos de $\mathcal{A}$ Comutam entre Si.

Seja R um anel com automorfismos $\mathcal{A}$ que comutam entre si. Neste parágrafo vamos mostrar que existe uma correspondência um a um entre os ideais fechados dos anéis $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ e $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ que preserva ideais primos.

No resto deste capítulo vamos admitir que R é um anel com automorfismos $\mathcal{A}$ que comutam entre si. Se o anel R é $\mathcal{A}$-primo, então não é difícil provar que os automorfismos, que estendem os automorfismos de R a todo Q, também comutam entre si. Como conseqüência disso temos que $\sigma_\lambda(X_\iota) = X_\iota$, $\forall\, \lambda, \iota \in \Lambda^*$, e portanto $X_\lambda X_\iota = X_\iota X_\lambda$, $\forall\, \lambda, \iota \in \Lambda^*$.

Iniciamos com o seguinte

LEMA 3.1 – Seja I um ideal R-disjunto não nulo do skew anel $R(X,\mathcal{A})$. Para cada $\Gamma \in \mathrm{Min}(I)$ e cada elemento $\overline{\nu}_0 \in \Gamma$ existe um único elemento $\mu = \mu_{\Gamma,\overline{\nu}_0}$ de $Q(X,\mathcal{A})$ com $\mathrm{Supp}(\mu) = \Gamma$, $c^E_{\overline{\nu}_0}(\mu) = 1$, e tal que

$$\alpha = c^E_{\overline{\nu}_0}(\alpha)\,\mu = \mu\, c^D_{\overline{\nu}_0}(\alpha)\,, \qquad \forall\ \alpha \in I \text{ com } \mathrm{Supp}(\alpha) = \Gamma\,.$$

Além disso $q\mu = \mu\,\sigma^{-\overline{\nu}_0}(q)$, $\forall\, q \in Q$, e $X^{\overline{\rho}}\mu = \mu X^{\overline{\rho}}$, $\forall\, \overline{\rho} \in \Omega_1^*$.

PROVA – Consideremos o ideal $J = \Theta_{\Gamma,\overline{\nu}_0} \in \Im(R)$ do Lema 1.4. Para cada $r \in J$

existe um único elemento $\alpha \in M(I)$ tal que $\mathrm{Supp}(\alpha) = \Gamma$ e $c^{E}_{\overline{\nu}_0}(\alpha) = r$, pois $\Gamma \in \mathrm{Min}(I)$. Logo podemos definir, para cada $\overline{\nu} \in \Gamma$, a função $f_{\overline{\nu}} : J \longrightarrow R$ por $c^{E}_{\overline{\nu}_0}(\alpha) f_{\overline{\nu}} = c^{E}_{\overline{\nu}}(\alpha)$.

É fácil provar que cada $f_{\overline{\nu}}$ é um R-homomorfimso à esquerda, e pelo Lema 1.1 (ii) para cada $\overline{\nu} \in \Gamma$ existe um elemento $q_{\overline{\nu}} \in Q$ tal que $a f_{\overline{\nu}} = a q_{\overline{\nu}}$, $\forall\, a \in J$.

Se definimos $\mu = \sum_{\overline{\nu} \in \Gamma} q_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}}$, então $\mu \in Q(X,\mathcal{A})$, $\mathrm{Supp}(\mu) = \Gamma$ e $c^{E}_{\overline{\nu}_0}(\mu) = q_{\overline{\nu}_0} = 1$, pois $a f_{\overline{\nu}_0} = a$, $\forall\, a \in J$.

Agora seja α um elemento de I tal que $\mathrm{Supp}(\alpha) = \Gamma$ e $\alpha = \sum_{\overline{\nu} \in \Gamma} a_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}}$. Como $a_{\overline{\nu}_0} f_{\overline{\nu}} = a_{\overline{\nu}}$, $\forall\, \overline{\nu} \in \Gamma$, temos

$$\alpha = \sum_{\overline{\nu} \in \Gamma} a_{\overline{\nu}_0} f_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}} = \sum_{\overline{\nu} \in \Gamma} a_{\overline{\nu}_0} q_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}} = a_{\overline{\nu}_0} \sum_{\overline{\nu} \in \Gamma} a_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}} = a_{\overline{\nu}_0}\, \mu\,.$$

Se $\eta \in Q(X,\mathcal{A})$ é tal que $\alpha = c^{E}_{\overline{\nu}_0}(\alpha)\,\eta$ para todo $\alpha \in I$ com $\mathrm{Supp}(\alpha) = \Gamma$, então $c^{E}_{\overline{\nu}_0}(\alpha)(\mu - \eta) = 0$, $\forall\, \alpha \in I$ com $\mathrm{Supp}(\alpha) = \Gamma$. Por isso $J(\mu - \eta) = 0$, e usando o Lemma 1.1 (iv), concluímos que $\eta = \mu$, o que prova a unicidade do elemento μ.

Consideremos um automorfismo σ de A, $\overline{\nu} \in \Gamma$ e $c^{E}_{\overline{\nu}_0}(\alpha) \in J$. As igualdades

$$\begin{aligned} c^{E}_{\overline{\nu}_0}(\alpha)\,\sigma(q_{\overline{\nu}}) &= \sigma\Big(\sigma^{-1}\big(c^{E}_{\overline{\nu}_0}(\alpha)\big)\, q_{\overline{\nu}}\Big) = \sigma\Big(c^{E}_{\overline{\nu}_0}\big(\sigma^{-1}(\alpha)\big)\, q_{\overline{\nu}}\Big) = \sigma\Big(c^{E}_{\overline{\nu}_0}\big(\sigma^{-1}(\alpha)\big)\Big) \\ &= c^{E}_{\overline{\nu}}\Big(\sigma\big(\sigma^{-1}(\alpha)\big)\Big) = c^{E}_{\overline{\nu}}(\alpha) = c^{E}_{\overline{\nu}_0}(\alpha)\, q_{\overline{\nu}} \end{aligned}$$

permitem escrever $J\big(\sigma(q_{\overline{\nu}}) - q_{\overline{\nu}}\big) = 0$, $\forall\, \overline{\nu} \in \Gamma$. Usando mais uma vez o Lema 1.1 (iv), concluímos que $\sigma(q_{\overline{\nu}}) = q_{\overline{\nu}}$, $\forall\, \overline{\nu} \in \Gamma$, $\forall\, \sigma \in \mathcal{A}$, logo $\sigma(\mu) = \mu$, $\forall\, \sigma \in \mathcal{A}$. Por isso e pela Proposição I.2.2 (2) se tem que $X^{\overline{\rho}}\,\mu = \mu X^{\overline{\rho}}$, $\forall\, \overline{\rho} \in \Omega^{*}_{1}$.

Para a, b $\in J$ definamos o elemento $\beta(a,b) = b\big(a\,\mu - \mu\,\sigma^{-\overline{\nu}_0}(a)\big)$ de I. A inclusão $\mathrm{Supp}\big(\beta(a,b)\big) \subsetneq \Gamma$ conduz a $\beta(a,b) = 0$, $\forall\, a, b \in J$. Com isso se obtém $J\big(a\,\mu - \mu\,\sigma^{-\overline{\nu}_0}(a)\big) = 0$, $\forall\, a \in J$. Logo $a\,\mu = \mu\,\sigma^{-\overline{\nu}_0}(a)$, $\forall\, a \in J$.

Se $r \in R$ e $a \in J$, então

$$a\big(r\mu - \mu\sigma^{-\overline{\nu}_0}(r)\big) = ar\mu - a\mu\sigma^{-\overline{\nu}_0}(r) = ar\mu - \mu\sigma^{-\overline{\nu}_0}(ar) = 0 .$$

Assim $J\big(r\mu - \mu\sigma^{-\overline{\nu}_0}(r)\big) = 0$, $\forall\, r \in R$, e temos que

$$r\mu = \mu\sigma^{-\overline{\nu}_0}(r) , \quad \forall\, r \in R .$$

Agora seja $q \in Q$ com $H \in \Im(R)$ tal que $H_q \subseteq R$. Se $h \in H$, então

$$h\big(q\mu - \mu\sigma^{-\overline{\nu}_0}(q)\big) = hq\mu - h\mu\sigma^{-\overline{\nu}_0}(q) = hq\mu - \mu\sigma^{-\overline{\nu}_0}(hq) = 0 .$$

Em conseqüência $J\big(q\mu - \mu\sigma^{-\overline{\nu}_0}(q)\big) = 0$, $\forall\, q \in Q$, e vem

$$q\mu = \mu\sigma^{-\overline{\nu}_0}(q) , \quad \forall\, q \in Q .$$

Em particular $\alpha = c^E_{\overline{\nu}_0}(\alpha)\mu = \mu\sigma^{-\overline{\nu}_0}\big(c^E_{\overline{\nu}_0}(\alpha)\big) = \mu\, c^D_{\overline{\nu}_0}(\alpha)$ para todo $\alpha \in I$ com $\mathrm{Supp}(\alpha) = \Gamma$, e a prova está completa.

Para cada ideal R-disjunto não nulo I do anel $R(X,\mathcal{A})$ denotamos com $M_Q(I)$ o conjunto de todos os elementos da forma $\mu = \mu_{\Gamma,\overline{\nu}_0}$ (onde $\Gamma \in \mathrm{Min}(I)$ e $\overline{\nu}_0 \in \Gamma$) definidos no Lema 3.1.

Como conseqüência imediata do Lema 3.1 temos o seguinte

COROLÁRIO 3.2 – Se I é um ideal R-disjunto não nulo do anel $R(X,\mathcal{A})$, então, para cada $\mu \in M_Q(I)$, existe um idea $J \in \Im(R)$ tal que $J\mu = \mu J \subseteq I$.

Seja I um ideal R-disjunto não nulo do anel $R(X,\mathcal{A})$. Um elemento não nulo α de $Q(X,\mathcal{A})$ é chamado *resto módulo I* se para todo $\beta \in I$ com $\mathrm{Supp}(\beta) \subseteq \mathrm{Supp}(\alpha)$ se tem $\beta = 0$.

Se $\alpha \in Q(X,\mathcal{A})$ é um resto módulo I então é claro que $\alpha \notin [I]_Q$.

Agora estamos em condições de apresentar uma versão do algoritmo de divisão no anel $Q(X,\mathcal{A})$.

LEMA 3.3 – Sejam I um ideal Q-disjunto não nulo de $Q(X,\mathcal{A})$ e $I_0 = I \cap R(X,\mathcal{A})$. Se $\beta \in Q(X,\mathcal{A})$, então existem elementos $q_i \in Q$, $\mu_i \in M_Q(I_0)$, $(i \leq i \leq n)$, e $\gamma \in Q(X,\mathcal{A})$ tais que

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i + \gamma \,, \qquad \text{onde } \gamma = 0 \text{ ou } \gamma \text{ é um resto módulo I .}$$

PROVA – Seja β um elemento de $Q(X,\mathcal{A})$. Se $\beta = 0$ ou β é um resto módulo I, então o resultado é óbvio. Assim suponhamos que $\beta \neq 0$ não é um resto módulo I e $\Gamma = \mathrm{Supp}(\beta)$. Nesse caso existe um elemento não nulo α de I tal que $\mathrm{Supp}(\alpha) \subseteq \Gamma$. Sem perda de generalidade, podemos escolher $\alpha \in M(I)$. Então, se $\Gamma_1 = \mathrm{Supp}(\alpha)$, temos que $\Gamma_1 \in \mathrm{Min}(I) = \mathrm{Min}(I_0)$ (Proposição 2.8).

Agora procedemos por indução sobre $u = \left|\mathrm{Supp}(\beta)\right| \geq 1$.

Caso u = 1: Nesse caso α e β são da forma $\alpha = a X^{\overline{\nu}_0}$ e $\beta = b X^{\overline{\nu}_0}$ (com $a, b \in Q$).

Pelo Lema 1.1 temos que necessariamente $\mu_{\Gamma,\overline{\nu}_0} = X^{\overline{\nu}_0}$. Assim $\beta = b\,\mu_{\Gamma,\overline{\nu}_0}$ e o lema segue.

Seja $v > 1$ e suponhamos que o lema valha para todo u tal que $1 \leq u < v$.

Caso u = v: Consideremos um elemento arbitrário fixo $\overline{\nu}_1 \in \Gamma_1$ e $\mu_1 = \mu_{\Gamma_1,\overline{\nu}_1}$. Se $\beta_1 = \beta - c^{E}_{\overline{\nu}_1}(\beta)\,\mu_1$, então $c^{E}_{\overline{\nu}_1}(\beta_1) = 0$ (pois $c^{E}_{\overline{\nu}_1}(\mu_1) = 1$), logo $\mathrm{Supp}(\beta_1) \subsetneq \Gamma$.

Se β_1 é zero ou um resto módulo I, então de $\beta = c^{E}_{\overline{\nu}_1}(\beta)\,\mu_1 + \beta_1$ obtemos o resultado procurado. Noutro caso temos que $\beta_1 \in Q(X,\mathcal{A})$ com $\left|\mathrm{Supp}(\beta_1)\right| \leq v - 1$. Então, pela hipótese de indução, existem $q_i \in Q$, $\mu_i \in M_Q(I_0)$ $(2 \leq i \leq n)$ e $\gamma \in Q(X,\mathcal{A})$ tais que $\beta_1 = \sum_{i=2}^{n} q_i \mu_i + \gamma$ com $\gamma = 0$ ou γ igual a um resto módulo I. Assim obtemos $\beta = \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i + \gamma$ com esse γ.

OBSERVAÇÃO 3.4 – Procedendo como na prova do Lema anterior, podemos provar sem dificuldade a seguinte afirmação: sejam I um ideal Q-disjunto não nulo de

$Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ e $I_0 = I \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle$. Se J é um subconjunto de Q, então, para cada $\beta \in J\,Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ (respectivamente $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle J$), existem elementos $b_i \in J\,Q$ (respectivamente $Q\,J$), $\mu_i \in M_Q(I_0)$ $(1 \leq i \leq n)$, e $\gamma \in J\,Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ (respectimente $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle J$) tais que

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i\,\mu_i + \gamma\,, \qquad \text{com } \gamma = 0 \text{ ou } \gamma \text{ igual a um resto módulo I}\,.$$

Seja I um ideal R-disjunto não nulo de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$. Se $\mu = \mu_{\Gamma,\overline{\nu}_0} \in M_Q(I)$, então segue do Lema 3.1 que $\big(\sum_{\overline{\nu}} q_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}}\big)\mu = \mu\big(\sum_{\overline{\nu}} \sigma^{-\overline{\nu}_0}(q_{\overline{\nu}})\,X^{\overline{\nu}}\big)$, $\forall \sum_{\overline{\nu}} q_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}} \in Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$. Por isso é claro que $Q\,M_Q(I) = M_Q(I)\,Q$ e $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle\,M_Q(I) = M_Q(I)\,Q\,\langle X,\mathcal{A}\rangle$.

As provas dos seguintes resultados são semelhantes às provas dos resultados correspondentes em [8], e por isso não serão muito detalhadas.

PROPOSIÇÃO 3.5 – Sejam I um Ideal Q-disjunto não nulo de $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ e $I_0 = I \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle$. Seja β um elemento do anel $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$. Então $\beta \in Q\,M_Q(I_0) = M_Q(I_0)\,Q$ se, e somente se, existe um ideal $H \in \Im(R)$ tal que $H\beta \subseteq I_0$.

PROVA – Seja $\beta \in M_Q(I_0)Q$ com $\beta = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\,q_i$ $(\mu_i \in M_Q(I_0)$ e $q_i \in Q$ $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq n)$

Para cada μ_i existe um $H_i \in \Im(R)$ tal que $H_i\,\mu_i \subseteq I_0$ (Corolário 3.2). Se $H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$, então $H \in \Im(R)$ e $H\beta \subseteq I_0$.

Reciprocamente, suponhamos que $H_1 \in \Im(R)$ é tal que $H_1\,\beta \subseteq I_0$. Se $q_i \in Q$, $\mu_i \in M_Q(I_0)$ $(1 \leq i \leq m)$ e $\gamma \in Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ são tais que $\beta = \sum_{i=1}^{m} \mu_i\,q_i + \gamma$, com $\gamma = 0$ ou γ igual a um resto módulo I (Lema 3.3), e $H_2 \in \Im(R)$ é tal que $H_2\Big(\sum_{i=1}^{m} \mu_i\,q_i\Big) \subseteq I_0$ (pela parte já provada), então $H = H_1 \cap H_2$ pertence a $\Im(R)$ e satisfaz $H\,\gamma \subseteq I_0$. Se γ é um resto módulo I então necessariamente $H\,\gamma = 0$. Daí γ

$\neq 0$ e temos uma contradição. Assim $\gamma = 0$ e daí $\beta \in M_Q(I)\,Q$.

COROLÁRIO 3.6 – Se I é um ideal Q-disjunto não nulo do anel $Q(X,\mathcal{A})$ e $I_0 = I \cap Q(X,\mathcal{A})$, então $[I]_Q = Q(X,\mathcal{A})\,M_Q(I_0)$.

PROVA – Se $\alpha \in [I]_Q$, existe $L \in \Im(Q)$ tal que $L\alpha \subseteq I$. Se $H_1 = L \cap R$, segue que $H_1 \in \Im(R)$ e $H_1\alpha \subseteq I$. Sejam $q_i \in Q$, $\mu_i \in M_Q(I_0)$ $(1 \leq i \leq m)$ e $\gamma \in Q(X,\mathcal{A})$ tais que $\alpha = \sum_{i=1}^{m} q_i\,\mu_i + \gamma$, com $\gamma = 0$ ou γ igual a um resto módulo I. Pela Proposição 3.5 existe $H_2 \in \Im(R)$ tal que

$$H_2\Big(\sum_{i=1}^{m} q_i\,\mu_i\Big) \subseteq I_0\,.$$

Se $H = H_1\,H_2$, temos $H \in \Im(R)$ e $H\gamma \subseteq I$. Por causa disso γ não pode ser um resto módulo I. Logo $\gamma = 0$ e, portanto, $\alpha = \sum_{i=1}^{m} q_i\,\mu_i \in Q(X,\mathcal{A})\,M_Q(I_0)$.

Agora seja $\beta \in Q(X,\mathcal{A})\,M_Q(I_0)$ com $\beta = \sum_{i=1}^{m} f_i\,\mu_i$,

$$\text{onde } f_i = \sum_{\overline{\nu} \in \text{Supp}(f_i)} X^{\overline{\nu}}\,q_{\overline{\nu}}^{(i)} \text{ pertence a } Q(X,\mathcal{A})$$

e $\mu_i = \mu_{\Gamma_i,\overline{\nu}_i} \in M_Q(I_0)$. Se $L \in \Im(R)$ é tal que $L\,\mu_i \subseteq I_0$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq n$, então $H = Q\,L\,Q \in \Im(Q)$. É fácil provar que $H\beta \subseteq I$. Então $\beta \in [I]_Q$ e temos a igualdade $[I]_Q = Q(X,\mathcal{A})\,M_Q(I_0)$.

COROLÁRIO 3.7 – Se I é um ideal R-disjunto não nulo de $R(X,\mathcal{A})$, então $[I]_R = Q(X,\mathcal{A})\,M_Q(I) \cap R(X,\mathcal{A})$.

PROVA – Se $\alpha \in [I]_R$, existe $H \in \Im(R)$ tal que $H\alpha \subseteq I$. Por isso e pela Proposição 3.5 temos $\alpha \in Q\,M_Q(I)$. Logo $\alpha \in Q(X,\mathcal{A})\,M_Q(I) \cap R(X,\mathcal{A})$.

Reciprocamente, se $\beta \in Q(X,\mathcal{A})\,M_Q(I) \cap R(X,\mathcal{A})$, esse β é da forma $\beta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\overline{\nu} \in \Gamma_i} X^{\overline{\nu}}\,q_{\overline{\nu}}^{(i)}\,\mu_i$ com $q_{\overline{\nu}}^{(i)} \in Q$ e $\mu_i \in M_Q(I)$. Pela Proposição 3.5

existe $H \in \Im(R)$ tal que $H q_{\overline{\nu}}^{(i)} \mu_i \subseteq I$, $\forall\, \overline{\nu} \in \Gamma_i$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq n$. Por isso $H\beta \subseteq I$ e temos $\beta \in [I]_R$.

Agora apresentamos o resultado principal deste parágrafo.

TEOREMA 3.8 – Se R é um anel $\mathcal{A}$-primo, então existe uma correspondência um a um entre os conjuntos

(i) $\mathcal{C}(R\langle X,\mathcal{A}\rangle) = \{I \lhd R\langle X,\mathcal{A}\rangle : I \text{ é R-disjunto e } [I]_R = I\}$,

(ii) $\mathcal{C}(Q\langle X,\mathcal{A}\rangle) = \{I^* \lhd Q\langle X,\mathcal{A}\rangle : I^* \text{ é Q-disjunto e } [I^*]_Q = I^*\}$.

Essa correspondência associa o ideal $I \in \mathcal{C}(R\langle X,\mathcal{A}\rangle)$ com o ideal $I^* \in \mathcal{C}(Q\langle X,\mathcal{A}\rangle)$ se $I^* \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle = I$ e $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle M_Q(I) = I^*$.

PROVA – Seja $J \in \mathcal{C}(Q\langle X,\mathcal{A}\rangle)$. Se $J_0 = J \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle$, pelo Corolário 3.6 temos que $J = Q\langle X,\mathcal{A}\rangle M_Q(J_0)$. Com isso, $J_0 = Q\langle X,\mathcal{A}\rangle M_Q(J_0) \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle = [J_0]_R$ (Corolário 3.7), isto é, $J_0 \in \mathcal{C}(R\langle X,\mathcal{A}\rangle)$.

Se $J' \in \mathcal{C}(Q\langle X,\mathcal{A}\rangle)$ também satisfaz $J' \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle = J_0$, então, usando mais uma vez o Corolário 3.6, temos $J' = [J']_Q = Q\langle X,\mathcal{A}\rangle M_Q(J_0) = J$.

Agora seja $I \in \mathcal{C}(R\langle X,\mathcal{A}\rangle)$. A igualdade $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle M_Q(I) = M_Q(I) Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ leva a afirmar que $I' = Q\langle X,\mathcal{A}\rangle M_Q(I)$ é um ideal Q-disjunto de $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$, que satisfaz $I' \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle = Q\langle X,\mathcal{A}\rangle M_Q(I) \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle = [I]_R = I$ (Corolário 3.7) e $[I']_Q = Q\langle X,\mathcal{A}\rangle M_Q(I) = I'$, isto é, $I' \in \mathcal{C}(R\langle X,\mathcal{A}\rangle)$ com $I' \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle = I$. A prova está completa.

LEMA 3.9 – Se o anel R é $\mathcal{A}$-primo, então o anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ é primo. Mais ainda, o anel $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ é primo.

PROVA – Suponhamos que existam ideais não nulos A e B de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ tais que $AB = 0$. Nesse caso $(A \cap R)(B \cap R) = 0$ e temos $A \cap R = 0$ ou $B \cap R = 0$.

Vamos provar que $A \cap R = 0$ e $B \cap R = 0$. Para isso consideramos $\Gamma_1 \in \mathrm{Min}(A)$ e $\Gamma_2 \in \mathrm{Min}(B)$. Sejam $\overline{\nu}_1 = \max \Gamma_1$ e $\overline{\nu}_2 = \max \Gamma_2$. Sendo Ω_1^* totalmente ordenado, não é difícil provar que $\Theta_{\Gamma_1,\overline{\nu}_1}(A)\,\Theta_{\Gamma_2,\overline{\nu}_2}(B) = 0$, o que é contraditório.

Se $A \cap R = 0$, consideremos $\Gamma \in \min(A)$ e $\overline{\nu}_0 \in \Gamma$. Sejam $a \in \Theta_{\Gamma,\overline{\nu}_1}(A)$ e $b \in B \cap R$. Pelo Lema 1.4 existe $\alpha \in A$ com $\mathrm{supp}(\alpha) = \Gamma$ e $c^D_{\overline{\nu}_0}(\alpha) = a$. A igualdade $\alpha b = 0$ implica $c^D_{\overline{\nu}}(\alpha)\, b = 0$, $\forall\, \overline{\nu} \in \Gamma$. Em particular, $a\, b = 0$. Assim $\Theta_{\Gamma,\overline{\nu}_0}(A)(B \cap R) = 0$ e chegamos a $B \cap R = 0$.

Reciprocamente, se $B \cap R = 0$, consideramos $\Gamma \in \min(B)$ e $\overline{\nu}_0 \in \Gamma$. Com isso prova-se, como acima, que $(A \cap R)\,\Theta_{\Gamma,\overline{\nu}_0}(B) = 0$, e temos $A \cap R = 0$.

Terminamos de provar que o anel $R(X,\mathcal{A})$ é primo.

Seja I um ideal não nulo de $Q(X,\mathcal{A})$. Se $0 \neq \alpha \in I$ e $H \in \Im(R)$ é tal que $H\alpha \subseteq R(X,\mathcal{A})$, então $0 \neq H\alpha \subseteq I \cap R(X,\mathcal{A})$. Com isso é fácil provar que o anel $Q(X,\mathcal{A})$ é primo, o que completa a prova do lema.

A seguir apresentamos o nosso segundo resultado importante deste parágrafo. Esse resultado, conforme foi dito antes, mostra que a correspondência descrita no Teorema 3.8 preserva ideais primos.

TEOREMA 3.10 – Se R é um anel $\mathcal{A}$-primo, então a correspondência descrita no Teorema 3.8 é uma correspondência um a um entre os conjuntos

(i) $\mathcal{P}(R(X,\mathcal{A})) = \{P \lhd R(X,\mathcal{A}) : P \text{ é R-disjunto}\}$,

(ii) $\mathcal{P}(Q(X,\mathcal{A})) = \{P^* \lhd Q(X,\mathcal{A}) : P^* \text{ é Q-disjunto}\}$.

PROVA – Temos $\mathcal{P}(R(X,\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{C}(R(X,\mathcal{A}))$ e $\mathcal{P}(Q(X,\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{C}(Q(X,\mathcal{A}))$ (Proposição 2.4) e, pelo Lema 3.9, podemos considerar só ideais primos não nulos. Assim é suficiente provar que, se $0 \neq P \in \mathcal{C}(R(X,\mathcal{A}))$ e $0 \neq P^* \in \mathcal{C}(Q(X,\mathcal{A}))$ são tais

que $P^* \cap R(X,\mathcal{A}) = P$, então P é primo se, e somente se, P^* é primo.

Suponhamos que P seja primo. Se A e B são ideais de $T(X,\mathcal{A})$ tais que $P^* \subseteq A$, $P^* \subseteq B$ e $AB \subseteq P^*$, então

$$(A \cap R(X,\mathcal{A}))\,(B \cap R(X,\mathcal{A})) \subseteq AB \cap R(X,\mathcal{A}) \subseteq P^* \cap R(X,\mathcal{A}) = P\,.$$

Logo $A \cap R(X,\mathcal{A}) \subseteq P$ ou $B \cap R(X,\mathcal{A}) \subseteq P$, i.e., $A \cap R(X,\mathcal{A}) = P$ ou $B \cap R(X,\mathcal{A}) = P$.

Se $A \cap R(X,\mathcal{A}) = P$, então $\min(A \cap R(X,\mathcal{A})) = \min(P)$. Com isso $\min(P^*) = \min(A)$ (Proposição 2.5). Segue do Teorema 2.2 que $A = [P^*]_Q = P^*$. Se $B \cap R(X,\mathcal{A}) = P$, então prova-se de modo igual que $B = P^*$. Está provado então que P^* é primo.

Reciprocamente, seja P^* primo. Se A e B são ideais de $R(X,\mathcal{A})$ tais que $AB \subseteq P$, então temos que $(A \cap R)(B \cap R) \subseteq P \cap R = 0$. Sendo R $\mathcal{A}$-primo e os ideais $A \cap R$ e $B \cap R$ de R $\mathcal{A}$-invariantes, então $A \cap R = 0$ ou $B \cap R = 0$.

Suponhamos que $A \cap R = 0$. Nesse caso consideramos $\alpha \in [A]_R$ e $\beta \in B$. Se $H \in \Im(R)$ é tal que $H\alpha \subseteq A$, então $H\alpha\beta \subseteq AB \subseteq P$. Assim $\alpha\beta \in [P]_R = P$ e está provado que $[A]_R\, B \subseteq P$.

Seja $A^* \in C(Q(X,\mathcal{A}))$ tal que $A^* \cap R(X,\mathcal{A}) = [A]_R$, e seja $\gamma \in A^*$. Se $L \in \Im(R)$ é tal que $L\gamma \subseteq R(X,\mathcal{A})$, então $L\gamma \subseteq [A]_R$.

Se $B \not\subseteq P$ então existe $\beta \in B$ tal que $\beta \notin P$. Assim $L\gamma\beta \subseteq [A]_R B \subseteq P$, e, usando a Proposição 3.5, temos $\gamma\beta \in Q\,M_Q(P) = P^*$. Em conseqüência $A^*\beta \subseteq P^*$. Mas P^* é primo e $\beta \notin P^*$. Logo $A^* \subseteq P$ e daí $A \subseteq P$.

Agora suponhamos que $A \cap P \neq 0$. Sendo $(BA)^2 \subseteq P$, vem, como acima, que $BA \cap R = 0$. Se procedemos como antes, obtemos $BA \subseteq P$ com $B \cap R = 0$. Assim estamos em condições de repetir o procedimento anterior e mostrar que $B \subseteq P$, o que completa a prova.

4 – Ideais Fortemente Primos do Anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$

Neste parágrafo vamos generalizar o Teorema 3.3 de [8] para ideais fortemente primos (à esquerda) do skew anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$, quando os automorfismos de $\mathcal{A}$ comutam entre si.

Iniciamos com o seguinte

LEMA 4.1 – Se P é um ideal R-disjunto e fortemente primo do anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$, então o anel R é $\mathcal{A}$-fortemente primo

PROVA – Seja $I \in \Im(R)$. Como P é R-disjunto, então $I\langle X,\mathcal{A}\rangle \not\subset P$, logo $I\langle X,\mathcal{A}\rangle$ tem um insulador F módulo P.

Se $F = \left\{ f_i = \sum_{\overline{\nu} \in \Gamma_i} a_{\overline{\nu}}^{(i)} X^{\overline{\nu}} : a_{\overline{\nu}}^{(i)} \in I, \quad \forall\, \overline{\nu} \in \Gamma_i = \mathrm{supp}(f_i), \quad \forall\, i \text{ com } 1 \leq i \leq n \right\}$, então $F_0 = \{a_{\overline{\nu}}^{(i)} : \overline{\nu} \in \Gamma_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ é um subconjunto finito de I.

Se $r \in R$ é tal que $rF_0 = 0$, então é claro que $rF = 0$. Por isso $r \in P \cap R = 0$ e assim F_0 é um insulador para I. Logo o anel R é $\mathcal{A}$-fortemente primo.

LEMA 4.2 – Sejam R um anel $\mathcal{A}$-primo e J um ideal fechado de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$. Se I é um ideal à esquerda R-disjunto de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ tal que $J \subsetneq I$, então existe um elemento $\alpha \in M(I)$ que é um resto módulo J.

PROVA – Seja $J^* \in \mathcal{C}(Q\langle X,\mathcal{A}\rangle)$ tal que $J^* \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle = J$, e consideremos um elemento $\beta \in I \setminus J$. Sejam $q_i \in Q$, $\mu_i \in M_Q(J)$ $(1 \leq i \leq m)$ e $\gamma \in Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ tais que $\beta = \sum_{i=1}^{m} q_i \mu_i + \gamma$, com $\gamma = 0$ ou γ igual a um resto módulo J^*.

Se $\gamma = 0$, obtemos, usando o Corolário 3.7, que $\beta \in [J]_R = J$, uma contradição. Assim γ é um resto módulo J^*.

Se $H \in \Im(R)$ é tal que $H\Big(\sum_{i=1}^{m} q_i \mu_i\Big) \subseteq J$, então $H\gamma \subseteq I$. Consideremos então um $\alpha_1 \in H\gamma$ não nulo. Nesse caso $\alpha_1 \in I$ é um resto módulo J.

Se $\alpha \in M(I)$ é tal que $\mathrm{supp}(\alpha) \subseteq \mathrm{supp}(\alpha_1)$, então α é também um resto módulo J.

LEMA 4.3 – Seja R um anel $\mathcal{A}$-fortemente primo. Se P é um ideal primo R-disjunto do anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$, então P é fortemente primo.

PROVA – Analisemos primeiro o caso $P = 0$. Seja I um ideal não nulo do anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$.

Caso 1.1: $I \cap R \neq 0$. Nesse caso $I \cap R \in \Im(R)$ e $I \cap R$ tem um insulador F_0. Como no Caso 1 do Teorema 5.1, provamos que F_0 é um insulador para I.

Caso 1.2: $I \cap R = 0$. Aqui consideramos $\Gamma \in \min(I)$, $\overline{\nu}_0 \in \Gamma$ e $H = \Theta_{\Gamma,\overline{\nu}_0}(I)$. Como $H \in \Im(R)$ (Lema 1.4), existe um insulador $F_0 = \{a_1, \ldots, a_t\}$ para H. Para cada a_i existe $\alpha_i \in I$ tal que $\mathrm{supp}(\alpha_i) = \Gamma$ e $c^{E}_{\overline{\nu}_0}(\alpha_i) = a_i$. Seja $F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$ e suponhamos que $\beta = \sum_{\overline{\nu}} b_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}} \in R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ é tal que $\beta F = 0$.

Pelo Lema 3.1 o elemento $\mu = \mu_{\Gamma,\overline{\nu}_0} \in M_Q(I)$ satisfaz $\alpha_i = a_i \mu$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq t$. Logo $\beta a_i Q\langle X,\mathcal{A}\rangle \mu = \beta_i a_i \mu Q\langle X,\mathcal{A}\rangle = \beta_i \alpha_i Q\langle X,\mathcal{A}\rangle = 0$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq t$. Mas $Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ é primo (Lema 3.9). Então $\beta a_i = 0$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq t$, isto é, $\sum_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}} \sigma^{-\overline{\nu}}(b_{\overline{\nu}}) a_i = 0$, $\forall\, i$. Daí se deduz facilmente que $\beta = 0$ e F é um insulador para I.

Agora vejamos o caso quando o ideal P é não nulo.

Seja $P^* \in \mathcal{P}(Q\langle X,\mathcal{A}\rangle)$ tal que $P^* \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle = P$ e seja I um ideal do anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ tal que $P \subsetneq I$.

Caso 2.1: $I \cap R \neq 0$. Nesse caso $I \cap R \in \Im(R)$ tem um insulador F_0.

Seja $\alpha \in R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ tal que $\alpha F_0 \subseteq P$ e consideremos os elementos $q_i \in Q$, $\mu_i \in M_Q(P)$ $(1 \leq i \leq n)$ e $\gamma \in Q\langle X,\mathcal{A}\rangle$ tais que $\alpha = \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i + \gamma$, com $\gamma = 0$ ou γ igual a um resto módulo P^*.

Se $a \in F_0$, então $\gamma a = \alpha a - \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i a \in P^*$, logo $\gamma a = 0$. Assim $\gamma F_0 = 0$. Se $H \in \Im(R)$ é tal que $H\gamma \subseteq R\langle X,\mathcal{A}\rangle$, vem $H\gamma F_0 = 0$. Daí se deduz que $H\gamma = 0$ e portanto $\gamma = 0$. Assim $\alpha \in P^* \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle = P$ e F_0 é também um insulador módulo P para I.

Caso 2.2: $I \cap R = 0$. Como $P \subsetneq I$, existe $\alpha \in M(I)$ que é um resto módulo P. (Lema 4.2). Sejam $\Gamma = \mathrm{supp}(\alpha)$, $\overline{r}_0 \in \Gamma$ e consideremos o ideal $L = \Theta_{\Gamma,\overline{r}_0}(I)$.

Se $F_0 = \{a_1, \ldots, a_t\}$ é um insulador para L, então, como no Caso 1.2, existem $\alpha_i \in I$ $(1 \leq i \leq t)$ e $\mu \in M_Q(I)$ tais que $\alpha_i = a_i \mu$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq t$. Sendo $\mathrm{supp}(\mu) = \mathrm{supp}(\alpha_i) = \Gamma$, então μ é um resto módulo P.

Seja $F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$. Se $\beta = \sum q_i \mu_i + \gamma \in R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ (onde γ é um resto módulo P^*) é tal que $\beta F \subseteq P$, então provamos como antes que $\gamma \alpha_i = \gamma a_i \mu \in P^*$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq t$. Com isso $\gamma \alpha_i Q\langle X,\mathcal{A}\rangle \mu \subseteq P^*$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq t$. Mas P^* é primo e μ é um resto módulo P. Logo $\gamma a_i \in P^*$, $\forall\, i$ com $1 \leq i \leq t$. Por γ ser um resto módulo P^*, $\gamma F_0 = 0$. Como no Caso 2.1, obtemos $\gamma = 0$. Assim $\beta \in P^* \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle = P$ e provamos que F é um insulador módulo P para I.

Assim, em qualquer caso, P é fortemente primo e o lema está provado.

Agora estamos em condições de provar o resultado central deste parágrafo.

TEOREMA 4.4 – Seja R um anel com automorfismos $\mathcal{A}$ que comutam entre si. As seguintes condições são equivalentes:

(i) todo ideal $\mathcal{A}$-primo de R é $\mathcal{A}$-fortemente primo;

(ii) todo ideal primo de $R(X,\mathcal{A})$ é fortemente primo.

PROVA – (i) $\Longrightarrow$ (ii). Seja P um ideal primo de $R(X,\mathcal{A})$. Como o ideal $P \cap R$ de R é $\mathcal{A}$-primo, segue da hipótese (i) que $P \cap R$ é $\mathcal{A}$-fortemente primo.

Se P' é o ideal do anel $(R / P \cap R)(X,\mathcal{A})$ que é imagem homeomorfa do ideal $P/(P \cap R)(X,\mathcal{A})$ de $R(X,\mathcal{A})/(P \cap R)(X,\mathcal{A})$, então P' é primo, pois

$$\begin{aligned} R(X,\mathcal{A})/P &= \left(R(X,\mathcal{A})/(P \cap R)(X,\mathcal{A})\right)/\left(P/(P \cap R)(X,\mathcal{A})\right) \\ &\cong \left((R/P \cap R)(X,\mathcal{A})\right)/P' , \end{aligned}$$

e P' é $(R/P \cap R)$-disjunto. Mas o anel $R/(P \cap R)$ é $\mathcal{A}$-fortemente primo. Logo P', e portanto P também, é ideal fortemente primo (Lema 4.3).

– (ii) $\Longrightarrow$ (i). Se P é um ideal $\mathcal{A}$-primo de R, então R/P é $\mathcal{A}$-primo. Logo o anel $R(X,\mathcal{A})/P(X,\mathcal{A}) \cong (R/P)(X,\mathcal{A})$ é primo (Lema 3.9). Segue da hipótese (ii) que o anel $(R/P)(X,\mathcal{A})$ é fortemente primo. Concluímos do Lema 4.1 que o anel R/P é $\mathcal{A}$-fortemente primo e está provado que o ideal P é $\mathcal{A}$-fortemente primo.

5 – Ideais Primos Não Singulares do Anel $R(X,\mathcal{A})$.

Consideremos o skew anel $R(X,\mathcal{A})$, onde os automorfismos de $\mathcal{A}$ comutam entre si. O objetivo deste parágrafo é estender os resultados sobre ideais primos não singulares provados em [8] para esses anéis $R(X,\mathcal{A})$ em consideração.

Seja R um anel. O *anulador* (à esquerda) de um elemento $a \in R$ é definido como sendo o ideal à esquerda de R, $\ell_R(a) = \{r \in R : ra = 0\}$.

Um ideal à esquerda I de R é dito *essencial* se $I \cap J \neq 0$ para todo $J \lhd_\ell R$ não nulo.

O *ideal singular* (à esquerda) do anel R é definido por

$$Z_\ell(R) = \left\{a \in R : \ell_R(a) \text{ é essencial } \right\} .$$

O ideal $Z_\ell(R)$ é realmente um ideal bilátero do anel R [11] e daqui em diante será denotado simplesmente com Z(R).

Um anel R é chamado *não singular* se $Z(R) = 0$. Um ideal J de R é dito *não singular* se o anel quociente R / J é não singular ([11]).

No que segue supomos que R é um anel com automorfismos $\mathcal{A}$ que comutam entre si.

LEMA 5.1 – Seja R um anel $\mathcal{A}$-primo. Se P é um ideal primo não singular R-disjunto do anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$, então R é não singular

PROVA – Suponhamos que R é não singular. Nesse caso existe $a \in Z(R)$ não nulo.

Caso 1: $P \neq 0$. Vamos mostrar que $a + P \in Z(R\langle X,\mathcal{A}\rangle / P)$. Com isso teremos que $a + P = 0$ (pois P é não singular) e, então, $0 \neq a \in P \cap R$, uma contradição.

Seja $0 \neq J \lhd_\ell R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ tal que $P \subsetneq J$.

Caso 1.1: $J \cap R = 0$. Pelo Lema 4.2 existe um elemento $\alpha \in M(J)$ que é um resto módulo P.

Sejam $\Gamma = \mathrm{supp}(\alpha)$ e $\overline{\nu}_0 \in \Gamma$. O conjunto

$$H = \{b \in R : \text{existe } \beta \in J \text{ com } \mathrm{supp}(\beta) = \Gamma \text{ e } c^D_{\overline{\nu}_0}(\beta) = b\} \cup \{0\}$$

é um ideal à esquerda não nulo de R. Então $H \cap \ell_R(a) \neq 0$ e portanto existe $\beta = \sum_{\overline{\nu} \in \Gamma} X^{\overline{\nu}} b_{\overline{\nu}} \in J$ (com $\Gamma = \mathrm{supp}(\beta)$) tal que $b_{\overline{\nu}_0} a = 0$.

Se $\beta a = 0$, então $(\beta + P)(a + P) = 0$ com $\beta \notin P$ (pois α é um resto módulo P), i.e., $0 \neq \beta + P \in (J / P) \cap \ell_{R\langle X,\mathcal{A}\rangle / P}(a + P)$. Assim $a + P \in Z(R\langle X,\mathcal{A}\rangle / P)$.

Se $\beta a \neq 0$, podemos escolher um elemento $\gamma = \sum_{\overline{\nu} \in \Gamma} X^{\overline{\nu}} c_{\overline{\nu}} \in J$ (com $\Gamma = \mathrm{supp}(\gamma)$) tal que $\gamma a \neq 0$, $\mathrm{supp}(\gamma a) \subsetneq \Gamma \setminus \{\overline{\nu}_0\}$ e $|\mathrm{supp}(\gamma a)|$ é mínimo.

Se $\overline{\nu}_1 \in \mathrm{supp}(\gamma\,\mathrm{a})$, então $0 \neq \mathrm{R}\,c_{\overline{\nu}_1} \lhd_\ell \mathrm{R}$, logo $\mathrm{R}\,c_{\overline{\nu}_1} \cap \ell_{\mathrm{R}}(\mathrm{a}) \neq 0$. Assim existe um $\mathrm{r} \in \mathrm{R}$ tal que $\mathrm{t} = \mathrm{r}\,c_{\overline{\nu}_1}$ é não nulo e $\mathrm{ta} = 0$. Se consideramos o elemento $\gamma_0 = \sigma^{-\overline{\nu}_0}(\mathrm{r})\,\gamma$, então $0 \neq \gamma_0 \in \mathrm{J}$, $\mathrm{supp}(\gamma_0) = \Gamma$ e $\mathrm{supp}(\gamma_0\,\mathrm{a}) \subsetneq \mathrm{supp}(\gamma\,\mathrm{a})$.

Pela minimalidade de $|\mathrm{supp}(\gamma\mathrm{a})|$ temos que $\gamma_0\mathrm{a} = 0$. Assim $(\gamma_0 + \mathrm{P})(\mathrm{a} + \mathrm{P}) = 0$ com $\gamma_0 \notin \mathrm{P}$ (pois α é um resto módulo P), i.e.,

$$0 \neq \gamma_0 + \mathrm{P} \in (\mathrm{J}/\mathrm{P}) \cap \ell_{\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathcal{A})/\mathrm{P}}(\mathrm{a} + \mathrm{P})\ ,$$

o que prova de fato que $\mathrm{a} + \mathrm{P} \in \mathrm{Z}(\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathcal{A})/\mathrm{P})$.

Caso 1.2: $J \cap R \neq 0$. Nesse caso $(\mathrm{J} \cap \mathrm{R}) \cap \ell_{\mathrm{R}}(\mathrm{a}) \neq 0$. Então existe $\mathrm{b} \in \mathrm{J} \cap \mathrm{R}$ não nulo tal que $\mathrm{b\,a} = 0$. Assim $(\mathrm{b} + \mathrm{P})(\mathrm{a} + \mathrm{P}) = 0$ com $\mathrm{b} \notin \mathrm{P}$ (pois P é R-disjunto), i.e., $0 \neq \mathrm{b} + \mathrm{P} \in (\mathrm{J}/\mathrm{P}) \cap \ell_{\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathcal{A})/\mathrm{P}}(\mathrm{a} + \mathrm{P})$, e temos que $\mathrm{a} + \mathrm{P} \in \mathrm{Z}(\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathcal{A})/\mathrm{P})$.

Caso 2: $P = 0$. Vamos mostrar que $\mathrm{a} \in \mathrm{Z}(\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathcal{A}))$. Seja $0 \neq \mathrm{J} \lhd_\ell \mathrm{R}(\mathrm{X},\mathcal{A})$.

Caso 2.1: $J \cap R \neq 0$. Nesse caso $(\mathrm{J} \cap \mathrm{R}) \cap \ell_{\mathrm{R}}(\mathrm{a}) \neq 0$. Se $0 \neq \mathrm{b} \in (\mathrm{J} \cap \mathrm{R}) \cap \ell_{\mathrm{R}}(\mathrm{a})$, então é claro que $\mathrm{b} \in \mathrm{J} \cap \ell_{\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathcal{A})}(\mathrm{a})$. Com isso se tem que $\mathrm{a} \in \mathrm{Z}(\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathcal{A}))$.

Caso 2.2: $J \cap R = 0$. Aqui escolhemos $\alpha \in \mathrm{M}(\mathrm{J})$. Se $\Gamma = \mathrm{supp}(\alpha)$ e $\overline{\nu}_0 \in \Gamma$, então definimos o ideal à esquerda não nulo H de R como no Caso 1.1. Assim existe um $\beta = \sum_{\overline{\nu} \in \Gamma} \mathrm{X}^{\overline{\nu}}\,\mathrm{b}_{\overline{\nu}} \in \mathrm{J}$ com $\mathrm{supp}(\beta) = \Gamma$ e $\mathrm{b}_{\overline{\nu}_0}\,\mathrm{a} = 0$.

Se $\beta\,\mathrm{a} = 0$, então $\beta \in \mathrm{J} \cap \ell_{\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathcal{A})}(\mathrm{a})$, logo $\mathrm{a} \in \mathrm{Z}(\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathcal{A}))$. Noutro caso podemos escolher um $\gamma = \sum_{\overline{\nu} \in \Gamma} \mathrm{X}^{\overline{\nu}}\,c_{\overline{\nu}} \in \mathrm{J}$ com $\mathrm{supp}\,\gamma = \Gamma$ tal que $\gamma\,\mathrm{a} \neq 0$, $\mathrm{supp}(\gamma\mathrm{a}) \subsetneq \Gamma \setminus \{\overline{\nu}_0\}$ e $|\mathrm{supp}(\gamma\mathrm{a})|$ é mínimo. Procedendo como no Caso 1.1, obtemos um elemento $\gamma_0 \in \mathrm{J}$ com $\mathrm{supp}(\gamma_0) = \Gamma$ tal que $\gamma\,\mathrm{a} = 0$. Assim $0 \neq \gamma_0 \in \mathrm{J} \cap \ell_{\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathcal{A})}(\mathrm{a})$ e $\mathrm{a} \in \mathrm{Z}(\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathcal{A}))$.

LEMA 5.2 – Seja R um anel $\mathcal{A}$-primo não singular. Se P é um ideal primo R-disjunto de $\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathcal{A})$, então P é não singular.

PROVA – Por redução ao absurdo, suponhamos que $Z(R\langle X,\mathcal{A}\rangle / P) \neq 0$. Nesse caso existe um ideal I de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ tal que $P \subsetneq I$ e $Z(R\langle X,\mathcal{A}\rangle / P) = I / P$.

Suponhamos que $P \neq 0$ e seja $P^* \in \mathcal{P}(Q\langle X,\mathcal{A}\rangle)$ tal que $P^* \cap R\langle X,\mathcal{A}\rangle = P$.

Caso 1.1: $I \cap R \neq 0$. Nesse caso existe $a \in I \cap R$ não nulo. Com isso vamos provar que $a \in Z(R)$, o que produz uma contradição, pois o anel R é não singular.

Se $0 \neq J \lhd_\ell R$, então é fácil provar que $L = R\langle X,\mathcal{A}\rangle J$ é um ideal à esquerda de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$, que coincide com o conjunto $\left\{ \sum_{\overline{\nu}} X^{\overline{\nu}} b_{\overline{\nu}} : b_{\overline{\nu}} \in J \right\}$ e satisfaz a condição $L \cap R = J$. Como L não é R-disjunto, se tem $L \not\subset P$. Logo $(L + P) / P$ é um ideal à esquerda não nulo do anel quociente $R\langle X,\mathcal{A}\rangle / P$.

O fato $a + P \in Z(R\langle X,\mathcal{A}\rangle / P)$ produz $((L + P) / P) \cap \ell_{R\langle X,\mathcal{A}\rangle / P}(a + P) \neq 0$, i.e., existe $\alpha \in L$ tal que $\alpha a \in P$ mas $\alpha \notin P$. Sejam $b_i \in Q J$, $\mu_i \in M_Q(P)$ $(1 \leq i \leq m)$ e $\gamma \in Q\langle X,\mathcal{A}\rangle J$ tais que $\alpha = \sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i + \gamma$ (Observação 3.4) onde $\gamma \neq 0$ é um resto módulo P^*, pois $\alpha \notin P$. A inclusão $\alpha a \in P$ implica esta $\gamma a \in P^*$.

Se $H \in \Im(R)$ é tal que $H \gamma a \subseteq R\langle X,\mathcal{A}\rangle$, então $H \gamma a \subseteq P$. Assim $H \gamma a = 0$ (pois γ é um resto módulo P) e portanto $\gamma a = 0$. Se $F \in \Im(R)$ é tal que $F \gamma \subseteq R\langle X,\mathcal{A}\rangle J$, então $F \gamma \neq 0$ e $F \gamma a = 0$. Daí obtemos que $J \cap \ell_R(a) \neq 0$ e se tem que $a \in Z(R)$.

Caso 1.2: $I \cap R = 0$. Por ser $P \subsetneq I$, existe $\alpha \in M(I)$ que é um resto módulo P (Lema 4.2). Se $\Gamma = \mathrm{supp}(\alpha)$ e $\overline{\nu}_0 \in \Gamma$, então existe $\mu \in M_Q(I)$ tal que $\alpha = c^E_{\overline{\nu}_0}(\alpha)\mu$. Se $0 \neq J \lhd_\ell R$, então, como no Caso 1.1, podemos provar que existe $\beta \in R\langle X,\mathcal{A}\rangle J$ tal que $\beta \alpha \in P$. Mas $\beta \notin P$ (pois $\alpha + P \in Z(R\langle X,\mathcal{A}\rangle / P)$. Pelo Lema 3.1, obtemos $\beta\, c^E_{\overline{\nu}_0}(\alpha)\, Q\langle X,\mathcal{A}\rangle \mu = \beta\, c^E_{\overline{\nu}_0}(\alpha)\, \mu\, Q\langle X,\mathcal{A}\rangle = \beta \alpha\, Q\langle X,\mathcal{A}\rangle \subseteq P^*$. Por isso e, supondo $\beta = \sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i + \gamma$ (com $b_i \in Q J$, $\mu_i \in M_Q(P)$, sendo $\gamma \in Q\langle X,\mathcal{A}\rangle J$ um resto módulo P^*), obtemos que $\beta\, c^E_{\overline{\nu}_0}(\alpha)\, Q\langle X,\mathcal{A}\rangle \mu \subseteq P^*$. Sendo α também um resto

módulo P^*, então $\mu \notin P^*$, logo $\beta c^E_{\overline{r}_0}(\alpha) \in P^*$, pois P^* é primo.

Procedendo como na parte final do Caso 1.1, obtemos que existe $F \in \Im(R)$ tal que $0 \neq F\gamma \subseteq R\langle X,\mathcal{A}\rangle J$ e $F\gamma c^E_{\overline{r}_0}(\alpha) = 0$. Assim $J \cap \ell_R(c^E_{\overline{r}_0}(\alpha)) \neq 0$ e conclui-se que $c_{\overline{r}_0}(\alpha) \in Z(R)$, o que é uma contradição pois R é não singular.

O caso $P = 0$ é completamente similar.

Agora apresentamos o resultado central deste parágrafo.

TEOREMA 5.3 – Seja R um anel. As afirmações seguintes são equivalentes:

(i) todo ideal $\mathcal{A}$-primo de R é não singular,

(ii) todo ideal primo de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$ é não singular.

PROVA – (i) $\Longrightarrow$ (ii). Seja P um ideal primo de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle$. Como o ideal $P \cap R$ de R é $\mathcal{A}$-primo, segue da hipótese (i) que o anel $R/P \cap R$ é não singular.

Se P' é o ideal do anel $(R/P \cap R)\langle X,\mathcal{A}\rangle$, imagem homeomorfa do ideal $P/(P \cap R)\langle X,\mathcal{A}\rangle$ de $R\langle X,\mathcal{A}\rangle/(P \cap R)\langle X,\mathcal{A}\rangle$, então P' é $(R/P \cap R)$-disjunto e primo, pois $R\langle X,\mathcal{A}\rangle/P = (R\langle X,\mathcal{A}\rangle/(P \cap R)\langle X,\mathcal{A}\rangle)/(P/(P \cap R)\langle X,\mathcal{A}\rangle) \cong ((R/P \cap R)\langle X,\mathcal{A}\rangle)/P'$.

Segue do Lema 5.2 que o ideal P', e portanto P, é não singular.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Se P é um ideal $\mathcal{A}$-primo de R então R/P é $\mathcal{A}$-primo, logo o anel $R\langle X,\mathcal{A}\rangle/P\langle X,\mathcal{A}\rangle \cong (R/P)\langle X,\mathcal{A}\rangle$ é primo (Lema 3.9). Segue da hipótese (ii) que o anel $(R/P)\langle X,\mathcal{A}\rangle$ é não singular. Concluímos do Lema 5.1 que o anel R/P é não singular, ficando provado que o ideal P é não singular.

REFERÊNCIAS

[1] S.A. Amitsur, *Radicals of polynomial rings*, Canad. J. Math. 8 (1956), 355-361.

[2] S.S. Bedi and J. Ram, *Jacobson radical of skew polynomial ring and skew group rings*, Israel J. Math. 35 (1980) 327-338.

[3] J. Bergen, S. Montgomery and D. S. Passman, *Radical of crossed products of enveloping algebra*, Israel J. Math, Vol. 59 N$^{\underline{o}}$ 2 (1987).

[4] S. Chase, D. K. Harrison and A. Rosenberg, *Galois theory and cohomology of commutative rings*, Mem. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 52 (1965) 15-33.

[5] W. Chin, *Prime ideals and differential operator ring and crossed products of infinite groups*, J. Algebra 106 (1987), 78-104.

[6] E. Cisneros, M. Ferrero and M. I. Gonzalez, *Prime ideals of skew polynomial rings ond skew Laurent polynomial rings*, Math. J. Okayama Univ 32 (1990), 61-72.

[7] N. J. Divinsky, *Rings and radicals*, Math. Exp. 14, Univ. of Toronto Press (1965).

[8] M. Ferrero, *Closed and prime ideals in free centred extensions*, J. Algebra, a ser publicado.

[9] M. Ferrero, *Radicals of skew polynomial rings and skew Laurent polynomial rings*, Math. J. of Okayama University, Vol. 29 (1987).

[10] M. Ferrero, K. Kishimoto and K. Motose, *On radicals of skew polynomial rings of derivation type*, J. London Math. Soc. (2), 28 (1983) 8-16.

[11] K. R. Goodearl, *Rings theory – Non singular and modules*, Marcel Dekker Inc., New York (1976).

[12] D. Handelman and J. Lawrence, *Strongly prime rings*, Trans. Amer. Math. Society 211 (1975) 209-223.

[13] N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience Publishers, London (1962).

[14] N. Jacobson, *Structure of rings*, Colloquium Publications 37, American Math. society, Providence (1968).

[15] K. Kishimoto, *On abelian extensions of rings I*, Math. J. Okayama Univ. Vol. 14 (1970) 159-174.

[16] K. Kishimoto, *On abelian extensions of rings II*, Math. J. Okayama Univ. Vol. 15 (1971) 57-70.

[17] W. S. Martindale, *Prime rings satisfying a generalized polynomial identity*, J. Algebra 12, N$^{\underline{o}}$ 4 (1969) 576-584.

[18] M. M. Parmenter, D. S. Passman and P. N. Stewart, *The strongly radical of crossed product*, Comm. Algebra 12 (1984) 1099-1113.

[19] K. R. Pearson and W. Stephenson, *A skew polynomial ring over a Jacobson ring need not be a Jacobson ring*, Comm. Algebra 5 (1977) 783-794.

[20] J. C. Robson and L. W. Small, *Liberal extensions*, Proc. London Math. Soc. (3) 42 (1981) 87-103.

[21] P. N. Stewart and J. F. Watters, *Properties of normalizing extensions and fixed rings*, Comm. in Algebra 12 (9) (1984) 1067-1098.

[22] F. A. Szász, *Radicals of rings*, John Wiley and sons, 1981.