O PROBLEMA DE DIRICHLET N-DIMENSIONAL PARA A EQUAÇÃO DE SUPERFÍCIE MÍNIMA EM DOMÍNIOS PSEUDO-CONVEXOS COM FRONTEIRA LIPSCHITZIANA

OLIVIO AUGUSTO WEBER

Dissertação apresentada

ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação

da Universidade Estadual de Campinas

como requisito parcial para obtenção do título de

Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Campinas

1977

AGRADECIMENTO:

Apresentamos os nossos agradecimentos a todas as pessoas que contribuiram, de alguma forma, para a realização deste trabalho, em especial ao Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi, nosso orientador, pela sua valiosa colaboração.

À minha família

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O problema clássico de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas consiste em:

" Dado um aberto $\Omega \subset R^n$ e uma função g contínua sobre a fronteira $\partial\Omega$ de Ω, encontrar uma função $u = u(x)$ satisfazendo

a) $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$

b) $Lu = \sum_{h,k=1}^{n} \left[(1 + |Du|^2)\delta_{hk} - D_h u \, D_k u\right] D_{hk} u = 0$ em Ω

c) $u(x) = g(x), \ \forall \ x \in \partial\Omega$

onde, $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ são pontos de R^n

$$Du = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = (D_1 u, \ldots\ldots, D_n u)$$

$$|Du|^2 = D_1^2 u + D_2^2 u + \ldots\ldots + D_n^2 u \qquad \text{e}$$

$$D_{hk} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}$$

Para $n = 2$, a solução do problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas foi obtida em 1930, por Radó, que demonstrou que o problema *está bem posto*, isto é, tem solução única para toda $g \in C^0(\partial\Omega)$ desde que Ω seja convexo.

A generalização da situação bidimensional foi obtida por Jenkins e Serrin, em 1968. Contrariamente ao que se cogitava, concluiram que a convexidade do domínio não é o ponto fundamental, mas sim a curvatura média; mais especificamente: " Se Ω é um domínio limitado de R^n e $\partial\Omega \in C^2$, então o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas é bem posto para dados g na classe $C^2(\partial\Omega)$ se, e somente se, a curvatura média de $\partial\Omega$ é não negativa para todo $x \in \partial\Omega$ ".

O problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas ganhou novo enfoque em 1971, quando M. Miranda introduziu a Teoria dos Perímetros na sua solução. Esta nova técnica de solução do problema permitiu a Miranda enfraquecer a hipótese da regularidade sobre $\partial\Omega$, mostrando que o problema tem solução única com $\partial\Omega$ lipschitziana e Ω localmente pseudo-convexo. Esta hipótese é uma generalização da curvatura média não negativa, no caso em que a fronteira é apenas lipschitziana.

O objetivo desse nosso trabalho foi fazer uma formulação da Teoria dos Perímetros e apresentar uma aplicação na solução do problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas, conforme o trabalho de M. Miranda.(cf [8])

CAPÍTULO I

NOÇÕES GERAIS SOBRE TEORIA DA MEDIDA

Neste capítulo introdutório apresentamos os conceitos e resultados da Teoria da Medida que usaremos com mais frequência. Um destaque especial é dado para a medida exterior gerada por uma função positiva. Um exemplo de medida exterior, particularmente importante, que provém de uma medida exterior gerada, é a medida Geométrica de Hausdorff.

Definição 1.1 - Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de um fixado conjunto E, tal que $\emptyset \in \mathcal{F}$. Uma função

$$\alpha : \mathcal{F} \to [0 , +\infty]$$

se diz *numeravelmente subaditiva* (*NSA*) se:

a) $\alpha(\emptyset) = 0$

b) para todo $F \in \mathcal{F}$ e toda sequência $\{F_h\}_{h \in N} \subset \mathcal{F}$, com $F \subseteq \bigcup_{h=1}^{\infty} F_h$ vale

$$\alpha(F) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(F_h)$$

Proposição 1.1 - "Seja α NSA sobre $\mathcal{F}$, então se F', $F'' \in \mathcal{F}$ e $F' \subseteq F''$, temos que $\alpha(F') \leq \alpha(F'')$."

Demonstração: Basta tomar $F_1 = F''$ e $F_h = \emptyset$ para $h \geq 2$. Então $F' \subseteq \bigcup_{h=1}^{\infty} F_h$ e como α é NSA, segue-se que

$$\alpha(F') \leq \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(F_h) = \alpha(F'')$$

Definição 1.2- Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de um fixado conjunto E. A função

$$\alpha: \mathcal{F} \to [0 , +\infty]$$

é completamente aditiva sobre $\mathcal{F}$ se α é NSA sobre $\mathcal{F}$ e vale a seguinte propriedade

Se $F_h \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{h=1}^{\infty} F_h \in \mathcal{F}$, $F_i \cap F_j = \emptyset$ para $i \neq j$ então

$$\alpha\Big(\bigcup_{h\geq 1} F_h\Big) = \sum_{h\geq 1} \alpha(F_h)$$

Definição 1.3- Dado um conjunto E, diz-se que α é uma *medida exterior sobre* E, se α for numeravelmente subaditiva sobre $\mathcal{F} = P(E)$, onde P(E) é a família das partes de E.

Definição 1.4- Sejam $\mathcal{F} \subseteq P(E)$ e $\alpha: \mathcal{F} \to [0 , +\infty]$ Um conjunto $G \subseteq E$ é *α-mensurável (ou mensurável segundo Caratheodory)* se para todo $F \in \mathcal{F}$ com $(F \cap G) \in \mathcal{F}$ e $(F-G) \in \mathcal{F}$, vale a relação

$$\alpha(F) = \alpha(F \cap G) + \alpha(F-G)$$

Evidentemente, E e $\emptyset$ são α-mensuráveis.

Proposição 1.2- " Seja $\{\alpha_j\}_{j \in J}$ uma família qualquer de funções NSA sobre $\mathcal{F}$. Para todo $F \in \mathcal{F}$ definimos

$$\alpha(F) = \sup_j \alpha_j(F)$$

Então, α também é NSA sobre .

Demonstração: É claro que $\alpha(\emptyset) = 0$.

Suponhamos agora, que exista $F \in \mathcal{F}$ e uma sequência $\{F_h\}_{h\in N} \subset \mathcal{F}$ tal que

$$F \subseteq \cup F_h \quad \text{e}$$

$$\alpha(F) > \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(F_h) \text{ , ou seja}$$

$$\sup_j \alpha_j(F) > \sum_{h=1}^{\infty} \sup_j \alpha_j(F_h).$$

Então existiria, pelo menos um índice j_o, tal que

$$\alpha_{j_o}(F) > \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_{j_o}(F_h) \quad ,$$ o que é absurdo, pois α_{j_o} é NSA.

Teorema 1.3 - "Seja $\alpha: \mathcal{F} \subset P(E) \to [0\ ,\ +\infty]$ tal que $\alpha(\emptyset) = 0$. Para todo $F \in P(E)$ seja:

(1.3.1) $\beta_\alpha(F) = \inf\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(F_i)\ ,\ F_i \in \mathcal{F}\ ,\ \cup F_i \supseteq F \}$ se existe, pelo menos uma sucessão $\{F_i\}$ tal que $F_i \in \mathcal{F}$, $\cup F_i \supseteq F$;

$\beta_\alpha(F) = +\infty$, em caso contrário.

Então,

a) β_α é uma medida exterior (denominada *medida exterior gerada por* α)

b) Se α é NSA sobre , então $\beta_\alpha/\mathcal{F} = \alpha$

Demonstração: a) Pela definição

$$\beta_\alpha : P(E) \to [0\ ,\ +\infty]\ ;$$

É claro que $\beta_\alpha(\emptyset) = 0$.

Seja $F \in P(E)$ e $\{F_i\}$ tal que $F_i \in \mathcal{F}$ e $\cup F_i \supseteq F$

Suponhamos que $\beta_\alpha(F_i) < +\infty$ para todo i, pois, caso contrário, a asserção seria óbvia. Portanto, para todo i e todo $\varepsilon > 0$, existe uma sucessão $\{F_{ij}\}$ tal que $F_{ij} \in \mathcal{F}$ e

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} F_{ij} \supseteq F_i \quad \text{e}$$

$$(1.3.2) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(F_{ij}) < \beta_\alpha(F_i) + \varepsilon . 2^{-i} \ .$$

Temos $\bigcup_{i,j=1} F_{ij} \supseteq F$; portanto, por (1.3.1) e (1.3.2) resulta que

$$\beta_\alpha(F) \leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha(F_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(F_{ij}) <$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\ \beta_\alpha(F_i) + \varepsilon . 2^{-i}\ ] = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_\alpha(F_i) + \varepsilon$$

$$\beta_\alpha(F) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \beta_\alpha(F_i).$$

Logo, β_α é uma medida exterior sobre E.

b) Suponhamos α NSA sobre $\mathcal{F}$. Então para todo $F \in \mathcal{F}$ e toda sucessão $\{F_i\} \subset \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq \cup F_i \implies$

$$\alpha(F) \leqslant \sum^{\infty} \alpha(F_i) \implies$$

$$\alpha(F) \leqslant \inf \{ \sum \alpha(F_i) : F_i \in \mathcal{F}, \cup F_i \supseteq F\} = \beta_\alpha(F)$$

Por outro lado, se $F \in \mathcal{F} \implies$

$$\beta_\alpha(F) \leq \alpha(F)$$

Basta tomar $F = F_1$ e $F_i = \emptyset$ para $i \geq 2$.

Logo: $\beta_\alpha(F) = \alpha(F)$ para todo $F \in \mathcal{F} \iff$

$$\beta_\alpha / \mathcal{F} = \alpha$$

Veremos a seguir a medida de Hausdorff, gerada por

$$\alpha : \mathcal{F} \to [0\ ,\ +\infty]$$

Seja $\mathcal{F} \subset P(R^n)$ e $\alpha(F) = (\text{diam } F)^k$, $k > 0$, $k \in R$.

Para todo $r > 0$, indiquemos com

$\mathcal{F}_r = \{ F \in \mathcal{F} : \text{diam } F < r \}$

$\alpha_r = \alpha / \mathcal{F}_r$

B_{α_r} = medida exterior sobre R^n gerada por α_r. Assim.

$$B_{\alpha_r}(F) = \inf \{ \sum_{h=1}^{\infty} (\text{diam } F_h)^k : F_h \in \mathcal{F}_r,\ \cup F_h \supseteq F \}$$

Pela proposição 1.2 , $H_k^n = \sup\limits_{r>0} B_{\alpha_r}$ também é uma medida exterior.

Como, para r_1 e r_2 com $0 < r_1 < r_2$ vale $B_{\alpha_{r_1}} \geq B_{\alpha_{r_2}}$, podemos escrever

$$H_k^n(F) = \sup_{r>0} B_{\alpha_r}(F) = \lim_{r \downarrow 0} B_{\alpha_r}(F) \text{ para todo } F \subset R^n.$$

<u>Observação 1</u> : $H_{n+\varepsilon}^n(R^n) = 0, \forall\ \varepsilon > 0$

Demonstração: Basta provar que $H^n_{n+\varepsilon}(C_L) = 0$ para todo $L > 0$, onde

$$C_L = \{ x \in R^n : |x_i| < L \ , \ i = 1,\ldots,n \}$$

$$H^n_{n+\varepsilon}(C_L) = \sup_{r>0} (\inf \{ \sum_{h=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_h)^{n+\varepsilon} : F_h \in \mathcal{F}_r \ , \cup F_h \supseteq C_L \}$$

$$= \lim_{r \downarrow 0} (\inf \{ \sum_{h=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_h)^{n+\varepsilon} : F_h \in \mathcal{F}_r \ , \ \cup F_h \supseteq C_L \}$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty} (\inf \{ \sum_{h=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_h)^{n+\varepsilon} : \cup F_h \supseteq C_L \ ,$$

$$\operatorname{diam} F_h \leqslant \frac{2L\sqrt{n}}{N} \}$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \frac{N^n (2L\sqrt{n})^{n+\varepsilon}}{N^{n+\varepsilon}} = \lim_{N\to\infty} \frac{(2L\ n)^{n+\varepsilon}}{N^{\varepsilon}} = 0$$

Observação 2 : Se $X \subset R^n$ e $0 < H^n_k(X) < +\infty$, então $H^n_{k+\varepsilon}(X) = 0$ e $H^n_{k-\varepsilon}(X) = +\infty$, $\forall \ \varepsilon > 0$

Demonstração:

$$H^n_{k+\varepsilon}(X) = \lim_{r\downarrow 0} \inf \{ \sum_{h=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_h)^{k+\varepsilon} : \cup F_h \supseteq X, \operatorname{diam} F_h < r \}$$

Como $\sum_{h=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_h)^{k+\varepsilon} \leqslant \sum_{h=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_h)^{k} . \ r^{\varepsilon}$, então

$\inf \{ \sum_{h=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_h)^{k+\varepsilon} : \cup F_h \supseteq X \ , \ \operatorname{diam} F_h < r \} \leqslant$

$r^{\varepsilon} \inf \{ \sum_{h=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_h)^{k} : \cup F_h \supseteq X, \ \operatorname{diam} F_h < r \} \leqslant$

$r^{\varepsilon} H^n_k(X)$

e portanto

$$H^n_{k+\varepsilon}(X) \leqslant \lim_{r\to 0} r^{\varepsilon} H^n_k(X) = 0$$

Para provar que $H^n_{k-\varepsilon}(X) = +\infty$, fazemos o mesmo tipo de raciocínio e encontramos

$$H^n_{k-\varepsilon}(X) \geqslant \lim_{r\to 0^+} r^{-\varepsilon} H^n_k(X) = +\infty$$

A *dimensão de Hausdorff* de um conjunto $X \subset R^n$ é o número real definido por:

$$\dim_H X = \inf_{(H^n_k(X)\neq 0)} k = \sup_{(H^n_k(X)\neq +\infty)} k$$

<u>Observação 3</u>: Se $k = 0$, definimos $H^n_0(X)$ = número de pontos de X. E se $k < 0$, definimos $H^n_k(X) = +\infty$, para todo $X \neq \emptyset$

Logo as H^n_k são significativas para $0 \leqslant k \leqslant n$.

<u>Observação 4</u>: Para todo $k_1 < k_2$ vale $H^n_{k_1} \geqslant H^n_{k_2}$

<u>Definição 1.5</u>: Para todo $X \subset R^n$ e todo $k > 0$, definimos a *medida de Hausdorff, k-dimensional de X,* por

$$H_k(X) = 2^{-k}\omega_k H^n_k(X),$$

onde ω_k é a medida da esfera unitária em R^k, isto é

$$\omega_k = \mathcal{L}^k(\{x\in R^k : |x| < 1\}) = \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)},$$

de modo que para todo conjunto X mensurável de R^k se tenha

$H_k(X) = \mathcal{L}^k(X)$.

A seguir, veremos algumas considerações sobre a medida exterior num espaço métrico M.

Definição 1.6: Uma família de conjuntos $, \mathcal{B} \subset P(M)$, é uma *família de Borel*, se e somente se, $\emptyset \in \mathcal{B}$ e valem as condições:

a) $\forall A,\ A \in \mathcal{B} \implies M-A \in \mathcal{B}$

b) $\forall A_i,\ A_i \in \mathcal{B} \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{B}$

c) $\forall A_i,\ A_i \in \mathcal{B} \implies \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{B}$

Para toda família $S \subseteq P(M)$ existe uma família de Borel mínima, contendo S, denominada *família de Borel gerada por S* e que denotaremos por $\mathcal{B}(S)$.

Se X é um espaço topológico, denotaremos por $\mathcal{B}(X)$ a família de Borel gerada pelos abertos de X. Os elementos de $\mathcal{B}(X)$ serão denominados conjuntos de Borel ou *borelianos* de X

Definição 1,7: Seja M um espaço métrico dotado de uma distância d. Para E, F $\in P(M)$ definimos

$$\operatorname{dist}(E,F) = \inf \{ d(x,y) : x \in E,\ y \in F \}$$

Teorema 1.4: (1) "Seja α NSA sobre $\mathcal{F} \subset P(M)$ com $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{B}(M)$. Suponhamos que:

$$B \in \mathcal{B}(M),\ F \in \mathcal{F} \Rightarrow (B \cap F) \in \mathcal{F} \quad \text{e } (F-B) \in \mathcal{F}$$

(1) cf [3] - Teorema 2.3, p. 102

e que α seja aditiva sobre os conjuntos de distância positiva, isto é,

$$\forall\ F,G,\quad F,G \in \mathcal{F}\ ,\ \text{dist}(F,G) > 0 \implies$$

$$\alpha(F \cup G) = \alpha(F) + \alpha(G)$$

Então, os conjuntos de Borel de M são α-mensuráveis e a restrição de α a $\mathcal{B}(M)$, é completamente aditiva.

Observação: Toda medida de Hausdorff é aditiva sobre todos os conjuntos com distância positiva. Logo, concluimos do teorema 1.4 que:

"Todo Boreliano é mensurável segundo Hausdorff e $H_k/\mathcal{B}(M)$ é aditiva".

Definição 1.8: *Medida de Radon* sobre um espaço métrico M é uma função

$$\alpha:\ B_o(M) \to [0\ ,\ +\infty]\quad \text{aditiva, onde}$$

$$B_o(M) = \{\ B \subset M\ ,\ B \text{ de Borel},\ \overline{B}\ \text{ compacto}\ \}$$

Proposição 1.5:(2) " Se α é uma medida de Radon sobre M então vale

$$\alpha(B) = \inf_{B \subseteq A \in B_o(M)} \alpha(A) = \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C \text{ compacto}}} \alpha(C)$$

para todo $B \in B_o(M)$.

---

(2) cf [3] - pp. 104 - 105

O conhecimento dos valores de uma medida de Radom sobre os abertos relativamente compactos, determina o valor da mesma sobre os borelianos relativamente compactos. Este fato é particularmente interessante em R^n, onde todo aberto pode ser escrito como união enumerável de cubos do tipo:

$$\{ x \in R^n : \frac{m_i}{2^k} < x_i < \frac{m_i + 1}{2^k} \} \text{ , onde } k \in N$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ e } m_i \in Z \text{ , } i = 1, \ldots, n \text{ ,}$$

CAPÍTULO II

CONJUNTO DE PERÍMETRO LOCALMENTE FINITO

Introduziremos, nesta seção, os conceitos de perímetro de um conjunto e conjunto de perímetro localmente finito. Apresentamos alguns resultados clássicos da Teoria dos Perímetros, como a equivalência entre perímetro de um conjunto e variação total de de uma determinada medida vetorial, duas desigualdades básicas, o teorema da compacidade e o teorema da semicontinuidade.

Considerações gerais:

- Indicaremos com $A \Delta B$ a diferença simétrica entre dois conjuntos A e B, isto é:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

- B é relativamente compacto em A, se $B \subset A$, B é aberto em R^n e $\overline{B}$ é compacto com $\text{dist}(B, \partial A) > 0$, onde ∂A é a fronteira topológica de A. Denotaremos por $B \subset\subset A$.

- Se $\{B_h\}$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis, diremos que $\{B_h\}$ converge a um conjunto B em $L^1(A)$, e escreveremos $B_h \to B$ em $L^1(A)$ se

$$\lim_{h\to\infty} \text{med}\left[(B_h \Delta B) \cap A\right] = 0, \text{ ou seja, se}$$

$$\lim_{h\to\infty} \int_A |\phi_{B_h}(x) - \phi_B(x)|dx = 0$$, onde ϕ_B é a função característica do conjunto B

- (B_h) converge a B em $L^1_{loc}(A)$ se para todo $K \subset\subset A$,

$B_h \to B$ em $L^1(K)$.

- se $\lim_h \phi_{E_h}(x) = \phi_B(x)$, indicaremos simplesmente por $B_h \to B$.

- O suporte de uma função real f em R^k, que denotaremos por supp f, é a aderência do conjunto de todos os pontos $x \in R^k$ nos quais $f(x) \neq 0$.

-Por C_o^1 (A) indicaremos o conjunto das funções contínuas com derivadas primeiras contínuas sobre A, cujo suporte é um compacto contido em A.

- Por $g \in [C_o^1(A)]^n$ entenderemos que g é uma função vetorial com n componentes, onde cada componente é contínua, com derivadas primeiras contínuas em A e com suporte compacto em A.

Seja A um conjunto de R^n, com fronteira bastante regular para que valha o teorema de Green.

$$(1) \qquad \int_A \operatorname{div} g(x)dx = \int_{\partial A} g.\nu(x)dH_{n-1} \ , \ \forall \ g \in [C_o^1(A)]^n$$

onde $\nu(x)$ é o vetor normal exterior, e $g.\nu(x)$ é g na direção da normal exterior.

Observemos que, se tomarmos $g \in [C_o^1(A)]^n$, $|g(x)| \leq 1$ $\forall$ x, então teremos:

$$H_{n-1}(\partial A) = \sup \{ \int_{\partial A} g(x).\nu(x)dH_{n-1} : g \in [C_o^1(A)]^n, |g| \leq 1\}$$

Logo, usando a (1), podemos escrever

$$H_{n-1}(\partial A) = \sup\{ \int_A \operatorname{div} g(x)dx : g\in[C_0^1(A)]^n , |g|\leq 1 \}$$

que sugere a seguinte definição.

<u>Definição 2.1</u>: Se $E \subset R^n$ é um conjunto mensurável, então o *perímetro de* E é o valor (talvez $+\infty$) dado por :

$$P(E) = \sup \{ \int_E \operatorname{div} g(x)dx : g \in [C_0^1(R^n)]^n \quad |g|\leq 1 \}$$

<u>Proposição 2.1</u>: (De Giorgi) " Se $P(E) < +\infty$, então existe um conjunto de Borel $\partial^* E \subset \partial E$ e para todo $x \in \partial^* E$ existe $\nu(x)\in R^n$ com $|\nu(x)| = 1$ tal que

$$\int_E \operatorname{div} g(x)dx = \int_{\partial^* E} g(x)\nu(x)dH_{n-1} ,\forall \; g \in[C_0^1(R^n)]^n$$

e portanto

$$H_{n-1}(\partial^* E) = P(E) .$$

<u>Observação</u>: O conjunto $\partial^* E$ é chamado *fronteira reduzida* de E.

Da proposição (2.1) concluimos que

$H_{n-1}(\partial E) \geq P(E)$

Logo: se $H_{n-1}(\partial E) < +\infty \implies P(E) < +\infty$.

A recíproca, no entanto não vale, pois, se $\{B_{\rho_i}(x^{(i)})\}$ é uma sequência de bolas com centros em $\{x^{(i)}\}$, densa em R^n e com $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{n-1} < +\infty$, então o conjunto $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\rho_i}(x^{(i)})$ tem as seguintes propriedades:

a) $P(E) \leq n\omega_n \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{n-1} < +\infty$ onde

$n\omega_n = H_{n-1}\{x \in R^n : |x| = 1\}$

b) $H_n(\partial E) = +\infty$

isto é, $P(E) < +\infty$ não implica que $H_{n-1}(\partial E) < +\infty$

De fato: Se $E_N = \bigcup_{i=1}^{N} B_{\rho_i}(x^{(i)})$, então

$$P(E_N) \leq \sum_{i=1}^{N} P(B_{\rho_i}(x^{(i)})) = \sum_{i=1}^{N} H_{n-1}(\partial B_{\rho_i}(x^{(i)}))$$

$$= \sum_{i=1}^{N} n\omega_n \rho_i^{n-1} \qquad \text{para todo inteiro } N$$

Por outro lado, para toda $g \in [C_o^1(R^n)]^n$ com $|g| \leq 1$ temos que

$$\int_E \operatorname{div} g(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_{E_N} \operatorname{div} g(x)dx \leq \lim_{N\to\infty} P(E_N)$$

Logo: $P(E) \leq n\omega_n \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{n-1} < +\infty$

Agora, como $R^n = E \cup \partial E$ e

$$H_n(E) < \omega_n \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^n < +\infty \quad \text{e} \quad H_n(R^n) = +\infty$$

temos que $H_n(\partial E) = +\infty$ e portanto $H_{n-1}(\partial E) = +\infty$

Definição 2.2: Seja A um aberto de R^n e B um boreliano de R^n. O *perímetro de* B *em relação a* A é definido por:

$$P(B;A) = \sup_g \left\{ \int_A \phi_B(x) \operatorname{div} g(x)\,dx \;:\; g \in [C_o^1(A)]^n \text{ e } |g(x)| \leq 1, \forall\; x \in A \right\}$$

Se $A = R^n$, esta definição coincide com a definição 2.1.

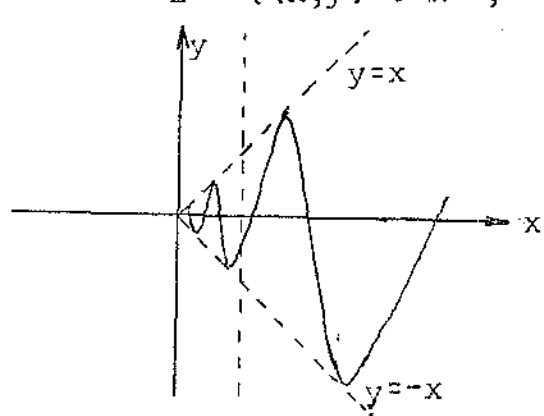
Se $P(B,A) < +\infty$, dizemos que B tem *perímetro finito relativamente a* A

Definição 2.3: Se $P(E,K) < +\infty$, para todo $K \subset\subset A$, dizemos que B tem *perímetro localmente finito em* A.

Observação: Um conjunto pode não ter perímetro finito em A, mas ter perímetro localmente finito em A, onde $\text{med}(A) < +\infty$

Exemplo: Seja $A = \{(x,y) \in R^2,\ 0 < x < 1 \text{ e } |y| < x\}$

$E = \{(x,y) \in R^2,\ -x < y < x.\text{sen}\,\frac{1}{x}\}$



Temos: $P(E,A) = +\infty$

$P(E,K) < +\infty,\ \forall\ K \subset\subset A$

Definição 2.4: Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ uma medida vetorial. Então a variação total de α, é a função de conjunto $|\alpha|$ definida por

$$|\alpha|(B) = \sup \{ \sum_{h=1}^{\infty} |\alpha(B_h)| ; B = \bigcup_{h=1}^{\infty} B_h ; B_j \cap B_k = \emptyset$$

$$\text{se } k = j, \forall B \subset R^n \}.$$

Observação: A função $|\alpha|$ é uma medida.

Teorema 2.2: " Se B é um boreliano de R^n e A é um aberto em R^n, então a condição $P(B,A) < +\infty$ equivale à existência de n medidas de Radon $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sobre A, tais que:

$$\int_A \phi_B(x) \operatorname{div} g(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_A g_i d\alpha_i = \int_A g d\alpha$$

$$g \in [C_o^1(A)]^n \quad , \quad |g| \leq 1$$

Ainda, $P(B,A) = \int_A d|\alpha| = |\alpha|(A)$

Demonstração: (1ª parte)

Seja $\psi_i = (0,0,\dots,\frac{g_i}{|g|}, 0 \dots, 0)$

ψ_i tem suporte compacto em A e $|\psi_i| \leq 1$

$$\int_A \phi_B(x) \operatorname{div} \psi_i dx = \frac{1}{|g|} \int_A \phi_B(x) \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx \leq P(B,A)$$

$$\Rightarrow \int_A \phi_B(x) \frac{\partial g_i}{\partial x_i}\, dx \leqslant P(B,A)|g| < P(B,A) < +\infty$$

$$\Rightarrow F(g_i) = \int_A \phi_B(x) \frac{\partial g_i}{\partial x_i}\, dx$$ é um funcional linear limitado.

Logo, pelo teorema de representação de Riesz, existe uma medida de Radon α_i tal que

$$F(g_i) = \int g_i d\alpha_i \quad , \text{ para todo } i = 1,\ldots,n$$

Portanto:

$$\sum_{i=1}^{n} F(g_i) = \int_A \sum_{i=1}^{n} \phi_B(x) \frac{\partial g_i}{\partial x_i}\, dx$$

$$= \int_A \phi_B(x) \operatorname{div} g(x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_A g_i d\alpha_i = \int_A g d\alpha$$

($2^{\underline{a}}$ parte) Mostraremos agora, que $P(B,A) = |\alpha|(A)$

a) $P(B,A) \leqslant |\alpha|(A)$

$\forall\ \varepsilon > 0$, existe uma partição de A , $\{A_h\}$, $h=1,\ldots$ de conjuntos de Borel e existem pontos $x_h \in A_h$ tal que

$$\int_A g_i d\alpha_i < \sum_{h=1}^{\mu} g_i(x_h)\alpha_i(A_h) + \varepsilon/n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_A g_i d\alpha_i < \sum_{h=1}^{\mu} \sum_{i=1}^{n} g_i(x_h)\alpha_i(A_h) + \varepsilon$$

$$= \sum_{h=1}^{\mu} g(x_h)\alpha(A_h) + \varepsilon$$

$$\leqslant \sum_{h=1}^{\mu} |g(x_h)||\alpha(A_h)| + \varepsilon$$

$$\leqslant \sum_{h=1}^{\mu} |\alpha(A_h)| + \varepsilon$$

$$\leqslant |\alpha|(A) + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \sup \int_A \phi_B(x) \operatorname{div} g(x)dx < |\alpha|(A)\ , \quad g \in [C_o^1(A)]^n \quad |g| \leqslant 1$$

b) $P(B,A) \geqslant |\alpha|(A)$

$\forall\ \varepsilon > 0$, existe uma partição finita A_h, $h=1,\ldots,\mu$ de A, tal que:

$$|\alpha|(A) < \sum_{h=1}^{\mu} |\alpha(B_h)| + \varepsilon$$

$$\text{Seja} \quad \xi_h^i = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i(B_h)}{|\alpha(B_h)|} & \text{se} \quad \alpha(B_h) \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha(B_h) = 0 \end{cases}$$

Observemos que:

$$|\alpha(B_h)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2(B_h) = \sum_{i=1}^{n} \xi_h^i \alpha_i(B_h)\ |\alpha(B_h)|$$

$$= |\alpha\ (B_h)| \sum_{i=1}^{n} \xi_h^i \alpha_i(B_h)$$

$$\Longrightarrow |\alpha(B_h)| = \sum_{i=1}^{n} \xi_h^i \alpha_i(B_h)$$

Então resulta que

$$|\alpha|\ (A) < \sum_{h=1}^{\mu} |\alpha(B_h)| + \varepsilon = \sum_{h=1}^{\mu} \sum_{i=1}^{n} \xi_h^i \alpha_i(B_h) + \varepsilon$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{\mu} \xi_h^i \alpha_i(B_h)\right) + \varepsilon$$

Seja $\quad \psi_i(x) = \sum_{h=1}^{\mu} \xi_h^i \phi_{B_h}(x)$

Essa é uma função escada que verifica a relação

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i^2(x) \leqslant 1$$

Então existem funções $g_i \in C_o^1\ (A)$, verificando a mesma relação, e tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \int \psi_i(x) d\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int g_i(x) d\alpha_i + \varepsilon$$

Portanto,

$$|\alpha|(A) < \sum_{i=1}^{n} \int \psi_i d\alpha_i + \varepsilon \leqslant \int \sum_{i=1}^{n} g_i d\alpha + 2\varepsilon$$

$$\leqslant \sup \int_A \phi_B(x) \operatorname{div} g(x) dx + 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow |\alpha|(A) \leqslant P(B,A)$$

Logo: $|\alpha|(A) = P(B,A)$

Observação: Na 1ª parte da proposição 2.2 demonstramos que: se $P(B,A) < +\infty$, então existem n medidas de Radon $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ tais que

$$\int_A \phi_B(x) \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx = \int g_i d\alpha_i$$

É também frequente o uso da notação $d\alpha_i = D_i\phi_B$, onde $D_i\phi_B$ é a medida derivada de ϕ_B no sentido de distribuição.

Poderíamos então reescrever a proposição 2.2 da seguinte forma:

" Se um conjunto de Borel B tem perímetro finito em A então a função característica $\phi_B(x)$ admite derivada medida e se tem ainda que:

$$P(B,A) = \int_A |D\phi_B| = |D\phi_B|(A)$$

Definição 2.5: Uma sucessão $\{ \tau_h \}$ é dita regularizante se:

a) $\tau_h \in C_o^1 (R^n)$

b) $\tau_h(x) \geq 0$, $\forall$ x

c) $\tau_h(x) = 0$,$\forall$ $|x| > h^{-1}$

d) $\displaystyle\int_{R^n} \tau_h(x)dx = 1$

Definição 2.6: Sejam f uma função seccionalmente contínua em R^n e $g \in C_o^1(R^n)$. Então *o produto de convolução* de f com g , que denotaremos f*g, é a função definida em R^n por:

$$(f*g)(x) = \int_{R^n} f(x-y)g(y)dy$$

Observação: Uma mudança de variáveis mostra imediatamente que:

$$\int_{R^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{R^n} f(y)g(x-y)dy \quad , \quad \text{e portanto}$$

$(f*g)(x) = (g*f)(x)$, $\forall$ x.

Proposição 2.3: " Sejam $f \in L^1_{loc}(R^n)$ e $g \in C_o^1(R^n)$ então:

$(f*g) \in C^1(R^n)$ e

supp $(f*g) \subset$ supp f + supp g ,onde

$A + B = \{ x + y : x \in A$ e $y \in B \}$."

Proposição 2.4: " Se E é de Borel em R^n, se $\{\psi_h\}$ é uma sucessão limitada de funções em $C^1(R^n)$, se $\psi_h(x) \to \phi_E(x)$ para quase todo $x \in R^n$, então

$$(2.4.1) \quad P(E,A) \leq \liminf_{h \to \infty} \int_A |D\psi_h(x)|dx$$

Se $\psi_h = \tau_h * \phi_E$, onde $\{\tau_h\}$ é uma sucessão regularizante, então vale também

$$\lim_{h\to\infty} \sup \int_{A_{-\delta}} |D\psi_h(x)|dx \leq P(E,A) \quad , \forall\ \delta > 0 \tag{2.4.2}$$

onde $A_{-\delta} = \{ x \in A : \text{dist}\,(x,\partial A)\}$."

Demonstração:a) $\forall\ \zeta \in [C_o^1(R^n)]^n$,

$$\int_E \text{div}\ \zeta(x)dx = \lim_{h\to\infty} \int_{R^n} \psi_h(x)\text{div}\ \zeta(x)dx$$

Usando integração por partes, obtemos que

$$\int \psi_h(x)\text{div}\ \zeta(x)dx = - \int D\psi_h(x)\zeta(x)dx$$

Portanto:

$$\int_E \text{div}\ \zeta(x)dx = \lim_{h\to\infty} \left(-\int_{R^n} D\psi_h(x)\zeta(x)dx\right)$$

$$= \lim_{h\to\infty} \left(-\int_A D\psi_h(x)\zeta(x)dx\right), \text{ se}$$

$$\text{supp}\ \zeta \subsetneq A\ , \implies$$

$$\int_E \text{div}\ \zeta(x)dx \leq \lim_{h\to\infty} \inf \left|-\int_A D\psi_h(x)\zeta(x)dx\right|$$

$$\leq \lim_{h\to\infty} \inf \int_A |D\psi_h(x)\zeta(x)|dx$$

Se $|\zeta(x)| \leq 1$, $\forall\ x$, então

$$\int_E \operatorname{div} \zeta(x)dx \leq \liminf_{h\to\infty} \int_A |D\psi_h(x)|dx,$$

Logo: $$P(E,A) = \sup_\zeta\{ \int_A \operatorname{div} \zeta(x)dx : \zeta \in [C_o^1(R^n)]^n, |\zeta|<1\}$$

$$\leq \liminf_{h\to\infty} \int_A |D\psi_h(x)|dx$$

b) Observemos antes de tudo que:

$$\int_{A_{-\delta}} |D\psi_h(x)|\ dx = \sup_\zeta \{ \int \zeta(x)\ D\psi_h(x)dx\ ,$$

$$\zeta \in [C_o^1(A_{-\delta})]^n, |\zeta(x)| \leq 1, \forall\ x\}$$

Portanto para provar (2.4.2) é suficiente estimar a integral

$\int \zeta(x)\ D\psi_h(x)dx$ na hipótese de que $\zeta \in [C_o^1(A_{-\delta})]^n$,

$|\zeta(x)| \leq 1, \forall\ x.$

Observando que $\psi_h = \tau_h * \phi_E$ temos que a integral a estimar pode ser escrita

$$\int \zeta(x)(\int_E D\tau_h(x-y)dy\ )dx =$$

$$\int_E (\int D\tau_h(x-y)\zeta(x)dx\ )dy =$$

$$\int_E \operatorname{div}\left(-\int \tau_h(x-y)\zeta(x)dx \right)dy$$

Se $h < \frac{1}{\delta} \Longrightarrow \frac{1}{h} > \delta$. Portanto $|x| > \frac{1}{h} > \delta \Longrightarrow \tau_h(x) = 0$

Logo, para $\tau_h(x) > 0 \Longrightarrow h > \frac{1}{\delta}$

Vemos então que a função

$-\int \tau_h(x-y)\zeta(x)dx$ tem módulo não superior a 1, é de classe C^1 e, se $h > \frac{1}{\delta}$, tem suporte contido em A. Podemos então escrever que

$$\begin{aligned}
\int \zeta(x)\, D\psi_h(x)dx &= \int_E \operatorname{div}\left(-\int \tau_h(x-y)\zeta(x)dx \right)dy \\
&= \int_{E\cap A} \operatorname{div}\left(-\int \tau_h(x-y)\zeta(x)dx \right)dy \\
&< \sup_g \left\{ \int_{E\cap A} \operatorname{div} g(x)dx : g \in \left[C_o^1(A)\right]^n \right. \\
&\qquad\qquad \left. |g| \leqslant 1 \right\} \\
&= P(E,A) \quad , \forall \; h > \frac{1}{\delta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{A_{-\delta}} |D\psi_h(x)|\, dx &= \sup_\zeta \left\{ \int \zeta(x)\, D\psi_h(x)dx \right. : \\
&\qquad \left. \zeta \in \left[C_o^1(A_{-\delta})\right]^n \; , \; |\zeta(x)| \leqslant 1, \forall \; x \right\} \\
&\leqslant P(E,A) \; , \quad \forall \; h > \frac{1}{\delta}
\end{aligned}$$

Logo: $\limsup_{h\to\infty} \int |D\psi_h(x)|dx < P(E,A)$, $\forall\ \delta > 0$

c.q.d.

<u>Observação</u>: Da definição de perímetro segue que

$$P(E,A) = \sup_{\delta>0} P(E,A_{-\delta})$$

Podemos agora provar a seguinte

<u>Proposição 2.5</u> (<u>Desigualdade I</u>) " Se E_1 e E_2 são conjuntos de Borel de R^n e se A é aberto em R^n, então:

$$P(E_1 \cup E_2, A) + P(E_1 \cap E_2 , A) \leq P(E_1,A) + P(E_2,A)$$

<u>Demonstração</u>: Sejam $\psi_h = \tau_h * \phi_{E_1}$

$\eta_h = \tau_h * \phi_{E_2}$, onde $\{\tau_h\}$ é uma sucessão regularizante.

Coloquemos $\xi_h = \psi_h \cdot \eta_h$

$\zeta_h = \psi_h + \eta_h - \psi_h \cdot \eta_h$

Então: $\xi_h(x) \to \phi_{E_1} \cdot \phi_{E_2}(x) = \phi_{E_1 \cap E_2}(x)$ para quase todo x.

$\zeta_h(x) \to \phi_{E_1}(x) + \phi_{E_2}(x) - \phi_{E_1} \cdot \phi_{E_2}(x) =$

$\phi_{E_1 \cup E_2}(x)$ para quase todo $x \in R^n$

Assim, pela parte a) da proposição 2.4 temos, $\forall\ \delta > 0$

$$P(E_1 \cap E_2, A_{-\delta}) \leqslant \liminf_{h\to\infty} \int_{A_{-\delta}} |D\xi_h(x)|\,dx \quad \text{e}$$

$$P(E_1 \cup E_2, A_{-\delta}) \leqslant \liminf_{h\to\infty} \int_{A_{-\delta}} |D\zeta_h(x)|\,dx$$

$$\Longrightarrow P(E_1 \cap E_2, A_{-\delta}) + P(E_1 \cup E_2, A_{-\delta}) \leqslant$$

$$\liminf_{h\to\infty} \int_{A_{-\delta}} |D\xi_h(x)|\,dx + \liminf_{h\to\infty} \int_{A_{-\delta}} |D\zeta_h(x)|\,dx$$

$$\leqslant \liminf_{h\to\infty} \int_{A_{-\delta}} (|D\xi_h(x)| + |D\zeta_h(x)|)\,dx$$

Como $\xi_h = \psi_h \cdot \eta_h \Longrightarrow D\xi_h = \psi_h . D\eta_h + \eta_h . D\psi_h$

$\zeta_h = \psi_h + \eta_h - \psi_h \cdot \eta_h \Longrightarrow$

$$D\zeta_h = D\psi_h + D\eta_h - \psi_h . D\eta_h - \eta_h . D\psi_h$$

$$= (1 - \eta_h) D\psi_h + (1 - \psi_h) D\eta_h$$

Desde que ψ_h e η_h tem valores compreendidos entre 0 e 1 temos:

$$|D\zeta_h| + |D\xi_h| \leqslant (1 - \psi_h)|D\psi_h| + (1 - \ _h)|D\eta_h|$$

$$+ \psi_h |\eta_h| + \eta_h |D\psi_h|$$

$$= |D\psi_h| + |D\eta_h|$$

Portanto: $P(E_1 \cup E_2, A_{-\delta}) + P(E_1 \cap E_2, A_{-\delta})$

$$\leqslant \liminf_{h\to\infty} \int_{A_{-\delta}} (|D\psi_h(x)| + |D\eta_h(x)|)\,dx$$

$$\leq \limsup_{h\to\infty} \int_{A_{-\delta}} (|D\psi_h(x)| + |D\eta_h(x)|)dx$$

$$= \limsup_{h\to\infty} \{\int_{A_{-\delta}} |D\psi_h(x)|\, dx + \int_{A_{-\delta}} |D\eta_h(x)|dx$$

$$\leq \limsup_{h\to\infty} \int_{A_{-\delta}} |D\psi_h(x)|dx + \limsup_{h\to\infty} \int_{A_{-\delta}} |D\eta_h(x)|dx$$

$\leq$ $P(E_1, A) + P(E_2, A)$ pela parte b) da proposição 2.4

Logo:

$$\sup_{\delta>0} P(E_1 \cap E_2, A_{-\delta}) + \sup_{\delta>0} P(E_1 \cup E_2, A_{-\delta}) =$$

$$P(E_1 \cap E_2, A) + P(E_1 \cup E_2, A) \leq P(E_1, A) + P(E_2, A)$$

c.q.d.

<u>Definição 2.7</u>: Um conjunto aberto $B \subset R^n$ é *pseudo-convexo em um ponto* $x_o \in \partial B$, se existe um aberto $A \subset R^n$ com $x_o \in A$ tal que:

$\forall\, E \subset\subset A$ vale a desigualdade

$|D\phi_B|(A) \leq |D\phi_{B \cup E}|(A)$ ou equivalentemente

$P(B, A) \leq P(B \cup E, A)$

<u>Observação</u>: B é *localmente pseudo-convexo em* A se for pseudo-convexo em todos os pontos de $\partial B \cap A$.

<u>Proposição 2.6</u>:(<u>Desigualdade II</u>) " Seja $B \subset R^n$ localmente pseudo-convexo no aberto $A \subset R^n$. Então para todo $E \subset\subset A$, temos

$$P(B \cap E) \leqslant P(E)$$

<u>Demonstração</u>: Da proposição 2.5 aplicada aos conjuntos B e E obtemos

(1) $P(E \cap B, A) + P(E \cup B, A) \leqslant P(B, A) + P(E, A)$

Como B é localmente pseudo-convexo em A

(2) $P(B, A) \leqslant P(B \cup E, A) \quad , \forall \quad E \subset\subset A.$

Logo usando este resultado (2) na desigualdade (1),obtemos

(3) $P(B \cap E, A) \leqslant P(E,A)$

Como $E \subset A$ e $B \cap E \subset A$, temos

$P(B \cap E, A) = P(B \cap E)$ e

$P(E, A) = P(E)$

Logo: $P(B \cap E) \leqslant P(E)$ c.q.d.

<u>Teorema 2.7</u>: (Compacidade) (3) " Seja $\{B_h\}$ uma família de conjuntos satisfazendo

$$\int_A |D\phi_{B_h}| \leqslant \sigma(K) < +\infty \ , \forall \quad K \subset\subset \Omega \ , \quad \Omega \text{ aberto de } R^n$$

(3) cf [1] - Teorema 2.10, p. 26

Então existe uma subfamília $\{B_{h_j}\}$ tal que

$$B_{h_j} \to B \text{ em } L^1_{loc}(\Omega) .$$

Teorema 2.8 : (Semicontinuidade) (4) " Seja $\Omega \subset R^n$ aberto e $\{B_h\}$ uma família de conjuntos tal que

$$B_h \to B \quad \text{em} \quad L^1_{loc}(\Omega)$$

Então:

$$\int_\Omega |D\phi_B| \leq \liminf_{h\to\infty} \int_\Omega |D\phi_{B_h}| \text{ ".}$$

(4) cf [1] - Teorema 2.11, p. 28

CAPÍTULO III

MEDIDA DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Seja $f:\Omega \subset R^{n-1} \to R$, então

$\mathrm{graf}_\Omega f = \{(x,y) \in R^n : x \in \Omega , y = f(x)\}$

Definição 3.1: Seja $f:\Omega \subset R^{n-1} \to R$, $f \in C^1(\Omega)$. Chamaremos *medida do gráfico de* f e indicaremos por $|\mathrm{graf}_\Omega f|$ ao valor da integral, isto é:

$$|\mathrm{graf}_\Omega f| = \int_\Omega \sqrt{1 + |Df|^2}\, dx \text{ onde } Df = \mathrm{grad}\, f$$

A definição 3.1 foi generalizada por Lebesgue no caso em que $f \in C^0(\Omega)$.

Definição 3.2: (Área de Lebesgue)

Seja $f: \Omega \subset R^{n-1} \to R$, $f \in C^0(\Omega)$,

$$|\mathrm{graf}_\Omega f| = \inf \{ \liminf_{h\to\infty} \int_\Omega \sqrt{1 + |Df_n|^2}\, dx ;$$
$$f_n \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega}) \text{ e } f_n \to f \text{ uniformemente em } \overline{\Omega} \}$$

Proposição 3.1 : Se $f \in \mathrm{Lip}\,(\overline{\Omega})$,

$$|\mathrm{graf}_\Omega f| = \int_\Omega \sqrt{1 + |Df|^2}\, dx$$

<u>Demonstração</u>: Se $f \in Lip(\Omega)$, vale a relação

$$(1) \quad \int_\Omega \sqrt{1+|Df(x)|^2}\,dx = \sup \{ \int_\Omega \left[a_o(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{f(x)}{x} \right] dx$$

$$a_i \in C_o^1(\Omega) \quad , \; i = 1,\ldots,n \quad , |a| \leq 1$$

De fato: Sejam $a = (a_o, \ldots, a_n) \in [C_o^1(\Omega)]^{n-1}$

$|a| \leq 1$ e

$$\psi = (1, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

Então, $\displaystyle\int_\Omega a(x)\psi(x)dx \leq \int_\Omega |a(x)| \sqrt{1+|Df(x)|^2}\,dx$

$$\leq \int_\Omega \sqrt{1+|Df(x)|^2}\,dx$$

Como $\displaystyle\int_\Omega a(x)\psi(x)dx = \int_\Omega \left[a_o(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right] dx$

Temos

$$(2) \quad \int_\Omega \left[a_o(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right] dx \leq \int_\Omega \sqrt{1+|Df(x)|^2}\,dx$$

Reciprocamente, consideremos $\psi = \dfrac{(1, Df)}{\sqrt{1 + Df^{\,2}}}$

Então $|\psi| \leq 1$ e

$$(3) \quad \int_\Omega \sqrt{1+|Df(x)|^2}\,dx = \int_\Omega \psi(x).(1, Df(x))dx$$

$$= \int_\Omega \left[\psi_o(x) + \sum_{i=1}^n \psi_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]dx$$

$$\leqslant \sup_a \left\{ \int_\Omega \left[a_o(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right] dx \right.$$

$$\left. a \in [C_o^1(\Omega)]^{n+1} \qquad , |a| \leqslant 1 \right\}$$

Se $\psi_i \notin C_o^1(\Omega)$ basta tomar uma regularizante para ψ.

De (2) e (3) resulta (1) .

Então se $f_h \to f$ uniformemente em Ω, $f_h \in \mathrm{Lip}\,(\Omega)$ e se $a_o, \ldots, a_n \in C_o^1(\Omega)$ com $|a| \leqslant 1$ resulta

$$\int_\Omega \left[a_o(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right] dx = \int_\Omega \left[a_o(x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} f(x)\right] dx$$

$$= \lim_{h\to\infty} \int_\Omega \left[a_o(x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} f_h(x) \right] dx$$

$$= \lim_{h\to\infty} \int_\Omega \left[a_o(x) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f_h(x)}{\partial x_i} \right] dx$$

$$\leqslant \liminf_{h\to\infty} \int_\Omega \sqrt{1 + |Df_h(x)|^2}\; dx$$

<u>Proposição 3.2</u>: " $|\mathrm{graf}_\Omega f|$ é semicontínuo inferiormente respeito à convergência uniforme, isto é, se

$f_h \to f$ uniformemente, então

$$|\text{graf}_\Omega f| \leqslant \liminf_{h\to\infty} |\text{graf}_\Omega f_h|$$

Demonstração: Para todo h fixado existe uma sucessão $f_k^{(h)} \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, $f_k^{(h)} \to f_h$ uniformemente tal que

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \sqrt{1 + |Df_k^{(h)}|^2}\, dx < |\text{graf}_\Omega\, f_h| + \frac{1}{h}$$

Por outra parte existe $\nu_h \in N$ tal que

$|f_k^{(h)} - f_h| < \frac{1}{h}$, $\forall\ k > \nu_h$ e existe $\bar{k}_h > \nu_h$ tal que

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |Df_{\bar{k}_h}^{(h)}|^2}\, dx < |\text{graf}_\Omega f_h| + \frac{1}{h}$$

Posto $\psi_h = f_{\bar{k}_h}^{(h)}$ resulta

$$|\psi_h - f| \leqslant |\psi_h - f_h| + |f_h - f| < \frac{1}{h} + |f_h - f| \underset{h\to\infty}{\to} 0$$

e

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |D\psi_h|^2}\, dx < |\text{graf}_\Omega f_h| + \frac{1}{h}$$

Definição 3.3: Medida do gráfico de uma função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, (cf [9])

Sejam $\Omega \subset R^n$ aberto e $a(x)$ uma função vetorial $a(x) = ($ $a_o(x), \ldots, a_n(x))$ contínua em Ω juntamente com suas derivads primeiras e com suporte compacto em Ω.

Para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos

$$|graf_\Omega f| = \sup_a \left\{ \int_\Omega \left[a_o(x) + f.\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i} \right] dx \right.$$

$$\left. a \in [C^1_o(\Omega)]^{n+1} \quad , \ |a| \leq 1 \ , \ \forall \quad x \in \Omega \right\}.$$

Esta definição de medida do gráfico de uma função generaliza as demais (5) ,isto é, a definição 3.3 coincide com as definições 3.1 e 3.2 quando $f \in C^1(\Omega)$ ou $f \in C^o(\Omega)$ respectivamente.

A medida do gráfico de uma função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ pode ser calculada através do perímetro de um conjunto associado, mais precisamente, temos

Proposição 3.3: (6) " Seja $\Omega \subset R^n$ um aberto e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que:

$|graf_\Omega f| < +\infty$. Se

$E = \{ (x,y) \in R^{n+1} : x \in \Omega \ , \ y < f(x) \}$, então vale

$$|graf_K f| = \int_{K \times R} |D\phi_E| \ , \qquad K \subset\subset \Omega \text{ "}$$

Definição 3.4: Uma função f *tem gráfico de medida míni-*

---

(5) cf [9] - Teorema 1.8, pp. 522 - 524

(6) cf [9] - Teorema 1.10, p. 525

ma sobre Ω se

$$|\mathrm{graf}_\Omega f| \leq |\mathrm{graf}_\Omega (f+g)|, \forall \; g \in C_o^1(\Omega)$$

Proposição 3.4: " Se $f \in C^2(\Omega)$, f tem gráfico de medida mínima em Ω se, e somente se,

$$\mathrm{div}\left(\frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}} \right) = 0$$

Demonstração: $(\Longrightarrow)$ Para todo $t \in R$, seja

$$\psi(t) = \int_\Omega \sqrt{1+|D(f+tg)|^2}\, dx \quad , \; g \in C_o^1(\Omega)$$

Como f tem gráfico de medida mínima, $\psi(t)$ tem mínimo para $t = 0$ e portanto $\psi'(0) = 0$

$$\psi'(t) = \int_\Omega \frac{D(f+tg)Dg}{\sqrt{1+|D(f+tg)|^2}}\, dx$$

$$\psi'(0) = \int_\Omega \frac{Df \, . \, Dg}{\sqrt{1+|Df|^2}}\, dx = 0$$

Como $f \in C^2(\Omega)$ e $g \in C_o^1(\Omega)$ obtemos, integrando por partes, que

$$\psi'(0) = -\int_\Omega g(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=1} (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2}} \right) dx = 0 \quad ,$$

$\forall \; g \in C_o^1(\Omega)$, e portanto ,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}} \right) = \operatorname{div} \left(\frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}} \right) = 0$$

$$\forall\ x \in \Omega$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que

$$\operatorname{div} \left(\frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right) = 0 \quad \text{em } \Omega$$

É claro que $\psi'(0) = 0$

$$\psi''(t) = \int_\Omega \frac{(1 + |D(f+tg)|^2)|Dg|^2 - [D(f+tg).Dg]^2}{(1 + |D(f+tg)|^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

$$\geq \int_\Omega \frac{(1 + |D(f+tg)|^2 |Dg|^2 - |D(f+tg)|^2.|Dg|^2}{(1 + |D(f+tg)|^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

$$= \int_\Omega \frac{|Dg|^2}{(1 + |D(f+tg)|^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx \geq 0$$

Como $\psi'(0) = 0$ e $\psi''(t) \geq 0$, $\forall\ t \in R$ (isto é, ψ é estritamente convexa) , temos que

$\psi(0) = \min\limits_t \psi(t)$ e, em particular, temos

$$\psi(1) - \psi(0) = \int_\Omega \sqrt{1 + |D(f+g)|^2}\, dx - \int_\Omega \sqrt{1+ |Df|^2}\, dx \geq 0$$

$\Longrightarrow$ f tem gráfico de medida mínima sobre Ω c.q.d.

<u>*Observação*</u>: A equação

$$\operatorname{div}\left(\frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}} \right) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega$$

é denominada equação das superfícies mínimas ou equação de Euler.

<u>Definição 3.5:</u> A fronteira de um conjunto aberto $B \subset R^n$ *é Lipschitziana em um ponto* $x_o \in \partial B$, se existe um aberto $A \subset R^n$ com $x_o \in A$ tal que $\partial B \cap A$ é gráfico de uma função Lipschitziana a (n-1) variáveis.

<u>*Observação 1*</u>: Diz-se simplesmente que um conjunto aberte $B \subset R^n$ possui fronteira Lipschitziana, se ela for Lipschitziana em todos os pontos.

<u>*Observação 2*</u>: Os conjuntos localmente pseudo-convexos com fronteira Lipschitziana podem ser considerados uma generalização dos conjuntos com curvatura média não-negativa.

De fato, suponhamos que Ω seja pseudo-convexo em $x_o \in \partial\Omega$ e exista um aberto $B \subset R^{n-1}$ e uma função lipschitziana

$$f : B \to R$$

tal que o conjunto

$$\operatorname{graf}_B f = \{ (x,y) \in R^n : x \in B \,,\ y = f(x) \} \subset A$$

(A aberto que contém x_o) , onde

$$\Omega \cap A = \{ (x,y) \in A \cap (B\times R) \,,\ x \in B \,,\ y > f(x) \}$$

Temos que

$$\int_A |D\phi_\Omega| \leq \int_A |\phi_{\Omega \cup E}| \quad , \ \forall\, E \subset\subset A \ ,$$

pois, Ω é pseudo-convexo em x_o .

Por outro lado, (cf Proposição 3.3)

$$\int_A |D\phi_\Omega| = \int_B \sqrt{1 + |Df|^2}\, dx = |graf_B f|$$

Logo, $\forall\ \psi \in C_o^1(B)$, $\psi \leqslant 0$ e"suficientemente pequena" , temos

$$\int_B \sqrt{1 + |Df|^2}\, dx \leqslant \int_B \sqrt{1 + |D(f + \psi)|^2}\, dx$$, e portanto

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \int \frac{D_i f . D_i}{\sqrt{1 + |Df|^2}}\, dx \geqslant 0 \ , \ \forall\ \psi \in C_o^1(B) \ ,$$

$\psi \leqslant 0$ e " suficientemente pequena "

Agora, no caco de $f \in C^2(B)$ então (1) implica que

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n-1} D_i \frac{D_i f(x)}{\sqrt{1 + |Df(x)|^2}} \geqslant 0 \ , \ \forall\ x \in B \ ,$$ conforme demonstração da proposição 3.4.

A relação (2) exprime a não-negatividade da curvatura média de $\partial\Omega \cap A$

CAPÍTULO IV

PRINCÍPIO DO MÁXIMO FORTE

Apresentaremos agora o princípio do máximo forte para as fronteiras mínimas, que pode ser visto como uma generalização do princípio do máximo para funções analíticas. Uma das aplicações deste princípio se verifica na unicidade da solução do Problema de Dirichlet para Equação das Superfícies Mínimas.

Definição 4.1: Um conjunto E tem fronteira de medida mínima em ΩxR, Ω aberto de R^n, se valem

a) $\int_K |D\phi_E| < +\infty$, $\forall$ $K \subset\subset \Omega \times R$

b) $\int_K |D\phi_E| \leq \int_K |D\phi_M|$, $\forall$ $K \subset\subset \Omega \times R$, $\forall$ M com

$M \Delta E \subset\subset K$

Definição 4.2: Uma função $f:\Omega \to [-\infty , +\infty]$ é chamada *solução generalizada da equação das superfícies mínimas sobre um aberto* Ω , se f for mensurável segundo Lebesgue e o conjunto

$$E = \{ (x,y) \in R^{n+1} : x \in \Omega , y < f(x) \}$$

tiver fronteira de medida mínima em ΩxR

Observação: Os valores de uma tal função f podem ser modificados sobre um conjunto de medida nula sem que isto tenha influência na validade de a) e b) da definição 4.1. Portanto, as soluções generalizadas da equação das superfícies mínimas são consideradas definidas a menos de um conjunto de medida nula.

Assim, graças à possibilidade de se poder redefinir f, podemos supor que

1) Se $\rho > 0$, med $[B_\rho(x,y) \cap E] = \text{med } B_\rho(x,y) \Rightarrow (x,y) \in E$

2) Se $\rho > 0$, med $[B_\rho(x,y) \cap E] = 0 \Rightarrow (x,y) \notin E$,

ou equivalentemente

$$(2)' \quad (x,y) \in \partial E \Longleftrightarrow \forall \rho > 0 , \quad 0 < \text{med } [B_\rho(x,y) \cap E] < \text{med } B_\rho(x,y)$$

Em relação à regularidade da fronteira de medida mínima, De Giorgi demonstrou em 1960, o seguinte

<u>Teorema 4.1</u>: (7) " Se E é um conjunto de fronteira de medida mínima em um aberto $A \subset R^n$ e vale (2)' para E, então existe um aberto $A_o \subset A$ tal que, $\partial E \cap A_o$ é localmente gráfico de uma função analítica de $(n-1)$ variáveis, solução da equação das superfícies mínimas e

$$H_{n-1}(A - A_o) = 0$$

<u>Lema 4.2</u>: Seja $B_\rho = \{ x \in R^{n-1} : |x| < \rho \}$

Se $f: B_\rho \to (-\delta, \delta)$ é lipschitziana

Se $E \subset R^n$ tem fronteira de medida mínima em

$A = B_\rho x(-\delta , \delta)$ e verifica

$E \subset \{x \in B_\rho xR , \delta > x_n \geq f(x_1, \ldots, x_{n-1}) \}$

---

(7) cf [4] - Teorema 4, p. 17

Então: $\forall\ \sigma < \rho$, dada a função f_σ, contínua em B_ρ, coincidente com f em $(B_\rho - B_\sigma)$ e, solução da equação das superfícies mínimas em B_σ, tem-se também que:

$$E \subset \{x \in B_\rho xR : x_n \geq f_\sigma(x_1,\ldots, x_{n-1})\}$$

Demonstração: Fixado $\sigma < \rho$, seja

$$L_\sigma = \{x \in B_\rho xR : \delta > x_n \geq f_\sigma(x_1,\ldots, x_{n-1})\}$$

Pela desigualdade I (cf Proposição 2.5.) temos

(1) $$|D\phi_{E \cup L_\sigma}|(A) + |D\phi_{E \cap L_\sigma}|(A) \leq |D\phi_E|(A) + |D\phi_{L_\sigma}|(A)$$

Por outro lado, pela propriedade de mínimo de E e L_σ temos

(2) $$|D\phi_E|(A) \leq |D\phi_{E \cap L_\sigma}|(A)$$

(3) $$|D\phi_{L_\sigma}|(A) \leq |D\phi_{E \cup L_\sigma}|(A)$$

Portanto, em (1) ,(2) e (3) deve valer o sinal de igualdade. A igualdade em (3) implica que $E \cup L_\sigma = L_\sigma$. Logo $E \subset L_\sigma$

Teorema 4.3: (Princípio do máximo forte)

" Seja $\Omega \subset R^n$ pseudo-convexo com fronteira Lipschitziana em $x_o \in \partial\Omega$. Seja E um conjunto com fronteira mínima em um aberto $A \ni x_o$ e seja

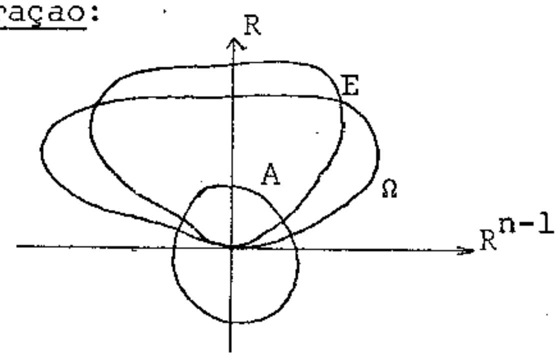
$$E \cap A \subset \Omega \cap A\ , \quad x_o \in \partial\Omega \cap \partial E$$

Então, existe um aberto A' , $x_o \in A' \subset A$, tal que

$\partial E \cap A' = \partial\Omega \cap A'$ e

$\partial E \cap A'$ é gráfico de uma função analítica de (n-1) variáveis, solução da equação das superfícies de área mínima.

Demonstração:



Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_o = 0$

Como Ω é pseudo-convexo em $x_o \in \partial\Omega$, com fronteira Lipschitziana, existe $\rho \in R$, $\rho > 0$ e uma função

$$f: B_\rho = \{ x \in R^{n-1} : |x| < \rho \} \to (-\delta , \delta) \text{ lipschitziana}$$

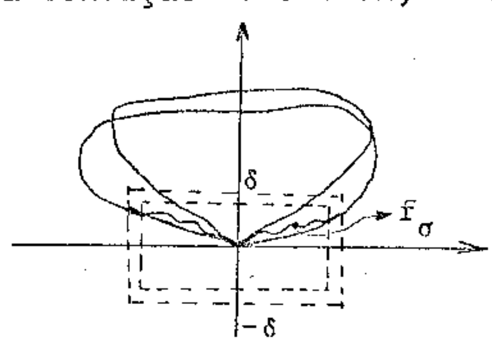
com $\Omega \cap [B_\rho x(-\delta , \delta)] = \{ x \in B_\rho xR : \delta > x_n \geqslant f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$

Podemos ainda supor que ρ seja tal que E tenha fronteira mínima em $B_\rho x(-\delta , \delta)$

Fixado $\sigma < \rho$, seja f_σ como no lema 4.2, isto é, f_σ função contínua, coincidente com f em $(B_\rho - B_\sigma)$ e solução da equação das superfícies mínimas em B_σ.

Como Ω é pseudo-convexo em x_o, devemos ter $f_\sigma \geqslant f$. Além disto, pelo Lema 4.2 e pela condição de $0 \in \partial E$, temos

$f_\sigma(0) = f(0) = 0$



Pelo fato de E ter fronteira mínima em $B_\rho x(-\delta,\delta)$ segue do teorema 4.1 que, existe $\sigma_o \leq \rho$, $\delta_o \leq \delta$ tal que

$$E \cap [B_{\sigma_o} x(-\delta_o,\delta_o)] =$$

$$\{ x \in B_{\sigma_o} x(-\delta_o,\delta_o) : x_n \geq u(x_1, \ldots, x_{n-1}) \} \quad \text{onde}$$

$u: B_{\sigma_o} \to (-\delta_o,\delta_o)$ função analítica, solução da equação das superfícies mínimas em B_{σ_o}

Temos ainda que:

$$u(x) \geq f\ (x) \quad \forall \ x \in B_{\sigma_o} \quad \text{e } u(0) = f_\sigma(0) = 0$$

Então, pelo princípio do máximo para funções analíticas, $\forall \ \sigma \leq \sigma_0$, $u(x) = f_\sigma(x)$, $\forall \ |x| \leq \sigma \leq \sigma_o$.

Pela arbitrariedade de σ temos que

$$u(x) = f(x) \quad \forall \ |x| \leq \sigma_o \qquad \text{c.q.d.}$$

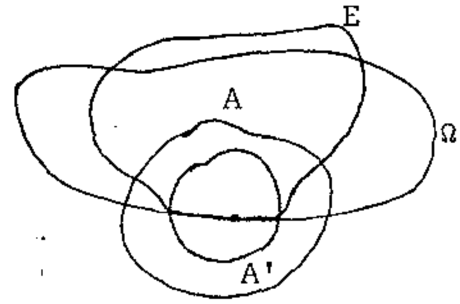
Assim, o princípio do máximo forte garante que, se $\Omega \subseteq R^n$ e $E \subset R^n$ são tais que:

- Ω é pseudo-convexo com fronteira Lipschitziana em x_o pertencente à fronteira de Ω
- E tem fronteira mínima em um aberto $A \ni x_o$
- $E \cap A \subset \Omega \cap A$ e $x_o \in \partial\Omega \cap \partial E$

Então,

- as fronteiras de Ω e de E coincidem em uma vizinhança aberta A' de x_o, contida em A

- Em A, a fronteira de Ω (de E) é gráfico de uma função analítica de (n-1) variáveis.



Teorema 4.4: [8] " Seja $\Omega \subset R^n$ aberto, limitado e $f \in L^1(\Omega)$ tendo derivada primeira medida finita em Ω . Se o conjunto

$$E = \{ x \in \Omega x R : x_{n+1} < f(x_1, \ldots\ldots, x_n)\}$$

tem fronteira de medida mínima em ΩxR, então f é uma função analítica real".

Este resultado garante a regularidade da fronteira dos conjuntos que tem perímetro mínimo. Embora seja este seja um resultado muito importante, não fazemos a demonstração por fugir do objetivo deste trabalho.

Aplicaremos agora o princípio do máximo forte na resolução do problema de contorno, com dado contínuo, para a equação das superfícies mínimas sobre abertos limitados e localmente pseudo-convexos com fronteira Lipschitziana.

Teorema 4.5: " Seja $\Omega \subset R^n$ aberto, limitado e local -

(8) cf[B] - Teorema 3, p. 364

mente pseudo-convexo com fronteira lipschitziana e seja

$$g:\partial\Omega \to R \quad \text{contínua}$$

Então, existe uma única $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{\omega}(\Omega)$, solução da equação das superfícies mínimas em Ω e igual a g em $\partial\Omega$".

Demonstração: Seja B uma bola aberta, limitada de R^n tal que $\Omega \subset\subset B$.

Pelo teorema de extensão de Gagliardo, (9) podemos definir uma função $g^*:B \to R$ contínua tal que $g^*/\partial\Omega = g$ e com sua derivada primeira localmente integrável. Ainda,

$$\sup \{ |g^*(x)|, x \in B\} = \sup \{ |g(x)|, x \in \partial\Omega \}$$

Seja $\mathcal{F}$ a classe das funções mensuráveis em B e tendo derivada primeira medida finita em B e coincidentes com g^* em $B - \bar{\Omega}$.

Em $\mathcal{F}$ consideremos o funcional

$$F(f) = |\mathrm{graf}_B f| \;, \; f \in \mathcal{F}.$$

Queremos mostrar que este funcional assume um mínimo na classe $\mathcal{F}$.

Observemos antes que:

- $F(f) = |\mathrm{graf}_B f| \geqslant 0$

- $g^* \in \mathcal{F}$ e $F(g^*) < +\infty \implies \exists \inf\limits_{f \in \mathcal{F}} F(F)$

Seja f_h uma sequência de funções minimizantes, ou

---

(9) cf |6| - p. 304

seja: $f_h \in \mathcal{F}$, $f_h = g^*$ em $B - \bar{\Omega}$ $\forall h$ e

$$\lim_{h\to\infty} |\mathrm{graf}_B f_h| = \inf_{f \in \mathcal{F}} F(f)$$

Desde que g^* é limitada sobre $\partial\Omega$, podemos supor que cada f_h seja limitada por

$$\min_{x \in \partial\Omega} g^*(x) \leqslant f_h(x) \leqslant \max_{x \in \partial\Omega} g^*(x) \quad , \forall h$$

Portanto, existe uma subsequência (f_{h_j}) que converge uniformemente a $u \in \mathcal{F}$.

Como:

$$|\mathrm{graf}_B u| \leqslant \liminf_{j\to\infty} |\mathrm{graf}_B f_{h_j}| = \inf_{f \in \mathcal{F}} F(f)$$

Segue-se que u é o mínimo para o funcional F. Logo, pelo teorema 4.4, $u = u(x)$ é uma função real analítica em Ω, solução da equação das superfícies mínimas e $u = g^*$ em $B - \bar{\Omega}$.

Como $g \in C^0(\partial\Omega)$, resta demonstrar que $u = g$ em $\partial\Omega$

Para isto observemos, antes de tudo, que o conjunto

$$E = \{(x,y) \in R^{n+1} \ , \ x \in B \text{ e } y < u(x)\}$$

tem fronteira mínima em $\bar{\Omega}xR$, mais precisamente, temos:

$$\int_{\bar{\Omega}xR} |D\phi_E| \leqslant \int_{\bar{\Omega}xR} |D\phi_M| \ , \ \forall\, M \subset R^{n+1} \quad \text{com } M \,\Delta\, E \subset\subset \bar{\Omega}xR$$

Agora, para cada $x_o \in \partial\Omega$, consideremos uma sequência (x_h) de Ω de modo que

$$\lim_{h\to\infty} x_h = x_o$$

Como u é limitada em $\overline{\Omega}$, existe uma subsequência (x_{h_j}) tal que

$$\lim_{j\to\infty} u(x_{h_j}) = y_o \text{ e portanto } (x_o,y_o) \in \partial E$$

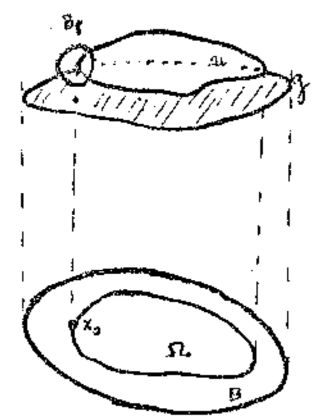
Queremos agora mostrar que $y_o = g(x_o)$.

Suponhamos que $y_o > g(x_o)$ e consideremos o ponto $(x_o,y_o) \in \partial\Omega x R$.

Existe uma bola $B_\rho(x_o,y_o) \subset R^{n+1}$ tal que $\Omega x R$ é pseudo - convexo em $B_\rho(x_o,y_o)$ e

$$E \cap B_\rho(x_o,y_o) \subset \overline{\Omega} x R \text{ , com}$$

$$\int_{B_\rho \cap (\overline{\Omega}xR)} |D\phi_E| \leq \int_{B_\rho \cap (\overline{\Omega}xR)} |D\phi_M| \quad \forall\ M \subset R^{n+1} \text{ , } M \Delta E \subset\subset (\overline{\Omega}xR) \cap B_\rho$$



Como,

- $(\Omega x R) \cap B_\rho(x_o,y_o)$ é pseudo-convexo em (x_o,y_o)
- $(x_o,y_o) \in (\partial\Omega x R) \cap \partial E$

Se mostrarmos que E tem fronteira de medida mínima em $B_\rho(x_o,y_o)$, isto é,

$$\int_{B_\rho} |D\phi_E| \leq \int_{B_\rho} |D\phi_M| \quad \forall\ M \text{ , } M \Delta E \subset\subset B_\rho(x_o,y_o)$$

podemos aplicar o Princípio do Máximo Forte (Teor. 4.3) e afirmar que existe $0 < r < \rho$, tal que

$$\partial E \cap B_\rho(x_o,y_o) = (\partial\Omega x R) \cap B_r(x_o,y_o)$$

Logo, existe j_o tal que $j \geq j_o$, então

$(x_{h_j}, u(x_{h_j})) \in \partial\Omega x R$ - absurdo, uma vez que $x_{h_j} \notin \partial\Omega$ para todo h_j.

Mostremos então que

$$\int_{B_\rho} |D\phi_E| \leq \int_{B_\rho} |D\phi_M| \quad \forall\ M,\ M \Delta E \subset\subset B_\rho(x_o,y_o)$$

De fato:

a) $$\int_{B_\rho} |D\phi_E| = \int_{B_\rho-(\bar{\Omega}xR)} |D\phi_E| + \int_{B_\rho \cap (\bar{\Omega}xR)} |D\phi_E| = \int_{B_\rho \cap (\bar{\Omega}xR)} |D\phi_E|$$

$$\Longrightarrow \int_{B_\rho} |D\phi_E| \leq \int_{B_\rho \cap (\bar{\Omega}xR)} |D\phi_M| \quad \forall\ M \subset R^{n+1},\quad M \Delta E \subset\subset B_\rho \cap (\bar{\Omega}xR)$$

b) $$\int_{B_\rho} |D\phi_M| = \int_{B_\rho-(\bar{\Omega}xR)} |D\phi_M| + \int_{B_\rho \cap (\bar{\Omega}xR)} |D\phi_M| =$$

$$= \int_{B_\rho-(\bar{\Omega}xR)} |D\phi_M| + \int_{B_\rho \cap (\bar{\Omega}xR)} |D\phi_{M \cap \Omega xR}| + \int_{(\partial\Omega xR) \cap B_\rho} |D\phi_M|$$

Usando a) em b), temos

c) $$\int_{B_\rho} |D\phi_M| \geq \int_{B_\rho-(\bar{\Omega}xR)} |D\phi_M| + \int_{B_\rho} |D\phi_E| + \int_{(\partial\Omega xR)\cap B_\rho} D\phi_M| - \int_{(\partial\Omega xR)\cap B_\rho} |D\phi_{M\cap\ \Omega xR}|$$

Por outro lado, como $(\Omega xR) \cap B_\rho$ é localmente pseudo - convexo, vem

$$\int_{B_\rho} |D\phi_{\Omega xR}| \leq \int_{B_\rho} |D\phi_{(\Omega xR)\ \cup\ M}| \quad \forall\ M,\ M \subset\subset B_\rho$$

Usando a proposição 2.5 (Desigualdade I) segue-se

$$\int_{B_\rho} |D\phi_{(\Omega xR)\ \cup\ M}| \leq -\int_{B_\rho} |D\phi_{(\Omega xR)\cap\ M}| + \int_{B_\rho} |D\phi_{\Omega xR}| + \int_{B_\rho} |D\phi_M|$$

$$= -\int_{B_\rho \cap (\partial\Omega xR)} |D\phi_{(\Omega xR)\cap\ M}| - \int_{(\Omega xR)\cap B_\rho} |D\phi_M| +$$

$$\int_{B_\rho} |D\phi_{\Omega xR}| + \int_{B_\rho-(\bar{\Omega}xR)} |D\phi_M| + \int_{(\partial\Omega xR)\cap B_\rho} |D\phi_M| +$$

$$\int_{(\Omega xR)\cap B_\rho} |D\phi_M|$$

d) $$0 \leq -\int_{B_\rho \cap \partial\Omega xR} |D\phi_{(\Omega xR)\cap M}| + \int_{B_\rho-(\bar{\Omega}xR)} |D\phi_M| + \int_{(\partial\Omega xR)\cap B_\rho} |D\phi_M|$$

Substituindo (d) em (c) vem

$$\int_{B_\rho} |D\phi_E| \leqslant \int_{B_\rho} |D\phi_M| \quad \forall\, M \subset R^{n+1} \quad , \; M \,\Delta\, E \subset\subset B_\rho(x_o, y_o)$$

- Para $y_o < g(x_o)$ a demonstração, por contradição, é análoga. Assim, $y_o = g(x_o)$.

Resumindo:

(1) - Para todo $x_o \in \partial\Omega$ e toda sequência (x_h) de $B - \overline{\Omega}$, com $\lim\limits_{h\to\infty} x_h = x_o$ temos que

$$\lim_{h\to\infty} u(x_h) = \lim_{h\to\infty} g^*(x_h) = g^*(x_o) = g(x_o)$$

(2) - Para todo $x_o \in \partial\Omega$ e toda sequência (x_h) de Ω, com $\lim\limits_{h\to\infty} x_h = x_o$, existe uma subsequência (x_{h_j}) satisfazendo

$$\lim_{j\to\infty} u(x_{h_j}) = g(x_o)$$

Observamos que (2) também vale se tomarmos (x_h) em $\partial\Omega$, *Com efeito:*

Seja $\{x_h\} \subset \partial\Omega$, $x_h \to x_o$ e

Seja $\{x_k^h\} \subset \Omega$, com $x_k^h \to x_k$ e $u(x_k^h) \longrightarrow u(x_k)$.

Então , $|x_k^h - x_o| = |x_k^h - x_k + x_k - x_o|$

$$\leqslant |x_k^h - x_k| + |x_k - x_o| \underset{h,k\to\infty}{\to} 0$$

Além disso, tomando uma subsequência de (x_k), se necessário, temos:

$$|u(x_k) - g(x_o)| = |u(x_k) - u(x_k^h) + u(x_k^h) - g(x_o)|$$

$$\leqslant |u(x_k) - u(x_k^h)| + |u(x_k^h) - g(x_o)| \underset{h,k \to \infty}{\to} 0$$

Em vista dos resultados (1), (2) e (3), definimos

$u(x) = g(x), \ \forall\, x \in \partial\Omega$, o que conclui a demonstração do teorema.

Observação: Este teorema contém os resultados demonstrados por M.Miranda (1965) e Jenkins e Serrin (1968), os quais consideravam os casos de abertos uniformemente convexos e localmente pseudo-convexos de classe C^2, respectivamente. Mas, segundo as palavras do próprio M. Miranda, o interesse do teorema não se situa tanto na generalização obtida quanto no método de demonstração, que é completamente novo respeito a aquele de M. Miranda e Jenkins e Serrin.

Este resultado foi generalizado (1977) por Rodney C.Bassanezi (cf [2]), que não leva em conta o fato da fronteira $\partial\Omega$ ser lipschitziana.

B I B L I O G R A F I A

[1] Bacci, Ricardo Apparício- "Perímetros de Medida Mínima com obstáculos sutís".
Tese de Mestrado - Campinas - 1976

[2] Bassanezi, Rodney Carlos- " Sobre o Problema de Dirichlet n-Dimensional para equação das superfícies mínimas em domínios com fronteira singular".
Tese de Doutoramento - Campinas - 1977

[3] De Giorgi, E.- Colombini, F- Piccinini, LC.- *Frontiere Orientate di Misura Minima e Questioni Colegate* - Pubbl. cl. Scienze, S. N. Sup - Pisa, 1972

[4] De Giorgi, E.- " Complementi alla teoria della misura (n-1) dimensionale in uno spazio n- dimensionale" , in Sem. Mat. Sc. Norm. Sup., Pisa 1960-1961.

[5] ———" Su una teoria generale della misura (r-1) dimensionale in uno spazio ad r dimensioni" , im Ann. di Mat. Appl. vol 36, serie IV, 1954

[6] Gagliardo, E. " Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzione in n variabili" , Rend. Mat Padova, vol.27 - 1957.

[7] Halmos, P. - *Measure Theory* , Van Nostrand. N:Y - 1950

[8] Miranda, M. - " Um Principio di Massimo forte per le frontiere minimali e una sua applicazione alla risoluzione dele superfici di area mínima" , in Rend. Sem. Mat Univ. Padova, 1971

[9] ——— " Superfici Cartesiane generalizzate ed insiemi di Perimetro finito sui Prodotti cartesiani " in Ann. Sc. Normal Sup. Pisa, 1964.

[10] ——— " Superfici Minime" . - Publ. IMPA - 1976

Campinas, setembro de 1977