

Francielle Santo Pedro Simões

Modelos matemáticos para dinâmica de doenças de transmissão direta e de presa-predador considerando parâmetros interativos e t-normas

CAMPINAS
2013



Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Francielle Santo Pedro Simões

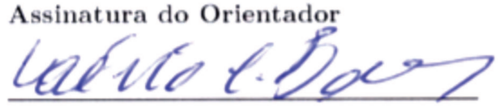
Modelos matemáticos para dinâmica de doenças de transmissão direta e de presa-predador considerando parâmetros interativos e t-normas

Orientador: Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de Mestra em matemática aplicada.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna Francielle Santo Pedro Simões, e orientada pelo Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros.

Assinatura do Orientador



Campinas
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si45m

Simões, Francielle Santo Pedro, 1989-
Modelos matemáticos para dinâmica de doenças de transmissão direta e de presa-predador considerando parâmetros interativos e t-normas / Francielle Santo Pedro Simões. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Laécio Carvalho de Barros.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais fuzzy. 2. Números fuzzy. 3. Doenças transmissíveis - Modelos matemáticos. I. Barros, Laécio Carvalho de,1954-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Mathematical models for dynamics of direct transmission disease and for predator-prey considering interactive parameters and t-norms
Palavras-chave em inglês:
Fuzzy differential equations
Fuzzy numbers
Communicable diseases - Mathematical models
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Mestra em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
Laécio Carvalho de Barros [Orientador]
Fernando Antonio Campos Gomide
Wilson Castro Ferreira Junior
Data de defesa: 17-05-2013
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 17 de maio de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). LAÉCIO CARVALHO DE BARROS

Prof.(a). Dr(a). FERNANDO ANTONIO CAMPOS GOMIDE

Prof.(a). Dr(a). WILSON CASTRO FERREIRA JUNIOR

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ser sempre presente em minha vida, pois sem Ele nada disso seria possível. Agradeço também aos meus pais, Beto e Vera, e a minha irmã Eduarda, que sempre me incentivaram a lutar pelos meus sonhos mesmo quando pareciam impossíveis. Ao meu lindo companheiro, Lucas, por me dar suporte e força para seguir em frente em meio as adversidades. Ao meu orientador, Laécio, que foi indispensável durante esta jornada e no qual eu me inspiro e a minha amiga Luciana que compartilhou suas experiências comigo durante esse período. Agradeço também aos meus tios Oseias, Joana, Nenê, Cidinha, a minha vó Francisca e a todos meus familiares e amigos por todo apoio e torcida concedidos a mim.

Agradeço também o apoio financeiro da agência de fomento Capes.

“A mente que se abre a uma
nova ideia jamais voltará ao
seu tamanho original."
Albert Einstein

Resumo

Neste trabalho estudamos sistemas de equações diferencias com parâmetros incertos e modelados por números fuzzy interativos através de duas abordagens distintas: a primeira via inclusão diferencial e a segunda via fuzzificação da solução determinística. Em ambos os casos a solução é fuzzy. Em seguida, a título de comparação, defuzzificamos a solução e a comparamos com a solução determinística. Notando que a operação produto é uma particular t-norma, propomos que a interação entre espécies (e/ou indivíduos) seja modelada por t-normas mais gerais. Neste caso, apesar da modelagem do sistema ser feita através de teoria de conjuntos fuzzy, as soluções dessas equações são determinísticas. A primeira abordagem é aplicada em um modelo para evolução de HIV positivo para populações em doença plenamente manifesta, enquanto a segunda é utilizada em modelos do tipo presa-predador de Lotka-Volterra e epidemiológico de transmissão direta.

Abstract

We study systems of differential equations with uncertain parameters modelled by interactive fuzzy numbers. Two approaches are considered: differential inclusion and fuzzification of the deterministic solution. In both cases the result is a fuzzy solution. Next, we defuzzify the solution and compare with the deterministic one. Since the product operation is a t-norm, we propose interaction between species be modelled by more general t-norms. In this case, although modelling of the system is done using fuzzy set theory, the solutions of the equations are deterministic. The first approach was used to model the evolution of the positive HIV for populations with fully manifested disease, while the second was used in predator-prey models of Lotka-Volterra predator-prey type and in epidemiological models of direct transmission.

Sumário

1 Conceitos de normas triangulares e conjuntos fuzzy **1**
1.1 Introdução . . . 1
1.2 Normas e conormas triangulares . . . 2
1.3 Conjuntos fuzzy . . . 9
1.4 O conceito de α-nível . . . 12
1.5 Números fuzzy . . . 13
1.6 Resumo . . . 15

2 Princípio de extensão e aritmética fuzzy **16**
2.1 O princípio de extensão de Zadeh . . . 16
2.2 Operações aritméticas . . . 19
2.2.1 Aritmética intervalar . . . 19
2.2.2 Operações aritméticas para números fuzzy . . . 20
2.3 Resumo . . . 23

3 Conjuntos fuzzy interativos **24**
3.1 Distribuição de possibilidade . . . 24
3.2 Interatividade entre números fuzzy . . . 25
3.2.1 Operações aritméticas com números fuzzy interativos baseado em t-normas . 25
3.2.2 O princípio de extensão para números fuzzy interativos . . . 27
3.2.3 Números fuzzy linearmente correlacionados . . . 27
3.2.4 Operação aritmética de números fuzzy linearmente correlacionados . . . 28
3.3 Resumo . . . 34

4 Equações diferenciais fuzzy: aplicações em modelos de biomatemática **35**
4.1 Introdução . . . 35
4.2 Inclusão diferencial . . . 37
4.3 Equação diferencial fuzzy via inclusão diferencial . . . 39
4.4 Equação diferencial fuzzy via extensão da solução determinística . . . 39
4.5 Modelo de tranferência de assintomático para sintomático com condições iniciais fuzzy linearmente correlacionadas . . . 41
4.5.1 Solução do modelo fuzzy de transferência de assintomáticos para sintomáticos via inclusão diferencial . . . 41

4.5.2 Solução do modelo fuzzy de tranferência de assintomáticos para sintomáticos via extensão da solução determinística . . . 42
4.5.3 Solução determinística × Solução fuzzy . . . 42
4.6 Modelo de tranferência de assintomático para sintomático com condição inicial e taxa de conversão linearmente correlacionadas . . . 46
4.6.1 Solução do modelo fuzzy de tranferência de assintomáticos para sintomáticos via inclusão diferencial . . . 47
4.6.2 Solução do modelo fuzzy de tranferência de assintomáticos para sintomáticos via extensão da solução determinística . . . 47
4.6.3 Solução determinística × Solução fuzzy . . . 48
4.7 Condição inicial e taxa de transferência dependentes do $CD4+$ . . . 50
4.8 Resumo . . . 52

5 O Uso de t-normas em modelos matemáticos presa-predador e epidemiológicos 53
5.1 Introdução . . . 53
5.2 Um modelo presa-predador . . . 54
5.2.1 Presa-predador de Lotka-Volterra com a t-norma do mínimo . . . 58
5.2.2 Presa-predador de Lotka-Volterra com a t-norma de Hamacher . . . 59
5.3 Modelo epidemiológico . . . 64
5.3.1 O modelo SI com a t-norma do mínimo . . . 66
5.3.2 O Modelo SI com a t-norma de Hamacher. . . . 68
5.4 Resumo . . . 72

6 Conclusão 73

Referência Bibliográfica 75

Capítulo 1

Conceitos de normas triangulares e conjuntos fuzzy

1.1 Introdução

Uma característica da modelagem matemática de processos variacionais é sua exatidão nas previsões de um fenômeno estudado. As previsões são obtidas através de um conjunto sob hipóteses relacionadas à precisão das variáveis de estado e de parâmetros que são inseridos no modelo por meio de valores médios de um conjunto de dados. Modelos de dinâmica populacional e epidemiologia estão fundamentados no modelo de ação de massas, proveniente da físico-química. Isto é, a interação é dada pelo produto das variáveis envolvidas enquanto seus parâmetros são obtidos através de valores médios simulados ou dados empiricamente. Em modelos de dinâmica populacional o objetivo é estudar o número de descendentes dos indivíduos de uma população, e este, possivelmente é incerto e pode sofrer alterações devido às perturbações no ambiente, por exemplo. Além disso, se no modelo, pretendemos quantificar suas variáveis e também levar em conta algumas características dos individuos como, habitat, habilidades individuais, idade, entre outros, o modelo deve ser reavaliado.

Tradicionalmente, o tratamento matemático de incertezas tem sido feito por meio da teoria probabilística que, num modelo de população, sugere que num dado momento o valor desta assume determinado número com certa probabilidade. Aqui trabalharemos mais com a teoria dos conjuntos fuzzy que também lida com incertezas. Porém sua interpretação está mais ligada à "pertinência"de determinado elemente está ou não numa determinada classe. A teoria de conjuntos fuzzy foi introduzida pelo matemático Lotfi A. Zadeh em 1965 com a finalidade de dar tratamento matemático a termos linguísticos, como por exemplo "aproximadamente", "em torno de", "por volta de", entre outros. Através dessa teoria, hoje podemos armazenar e programar conceitos vagos em comptadores. Assim, em modelos de biomatemática (modelos populacionais e epidemiológicos) essa teoria tem boa aceitação e vem crescendo a cada dia, uma vez que "taxa de infecção", "taxa de predação", entre outros parâmetros são incertos (subjetivos) [3, 6, 19, 25].

Portanto, a necessidade da teoria de conjuntos fuzzy em problemas de biomatemática, já que este trata destas subjetividades (incertezas). As incertezas são expressas através de funções que indicam a pertinência com que o indivíduo se encaixa em um determinado grupo. Assim, os

modelos variacionais fuzzy podem possuir muitos tipos de incertezas contidas em seus parâmetros, condições inicias ou até mesmo nas variáveis de estado [3].

Em problemas de epidemiologia e dinâmica populacional normalmente modelamos a interação entre indivíduos através da operação produto, neste trabalho utilizaremos t-normas para uma abordagem alternativa à esses problemas de modelagem, já que t-norma é uma generalização da operação produto e possui as mesmas propriedades qualitativas. Esta será a principal contribuição deste trabalho no que se refere à dinâmica de populações e epidemiologia. No capítulo seguinte trataremos de alguns conceitos básicos, entre eles a definição de t-normas.

1.2 Normas e conormas triangulares

As ideias de normas triangulares têm origem com os trabalhos de Karl Menger em 1942. Elas eram utilizadas para generalizar a desigualdade triangular de espaços métricos clássicos para espaços métricos estatísticos (hoje chamados espaços métricos probabilísticos) e esse era seu ponto chave de interesse. Hoje em dia, um conjunto diferente de axiomas é usado: t-normas são considerados um semigrupo especial de operações sobre $[0,1]$ com elemento neutro igual a 1 [16].

O conceito de t-norma é importante para interpretação de conjunções e também para operações entre conjuntos fuzzy [16, 18, 24]. Por exemplo, essa operação modela o conectivo **e**.

Definição 1.2.1. Uma t-norma T é uma operação binária $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que satisfaz:

1. elemento neutro: $1Tx = x$;
2. comutativa: $xTy = yTx$;
3. associativa: $xT(yTz) = (xTy)Tz$;
4. monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $xTy \leq uTv$.

Uma consequência interessante da Definição 1.2.1 é que para todo $x \in [0,1]$, cada $t-$norma T satisfaz a seguinte condição de fronteira:

$$T(0,x) = T(x,0) = 0, \quad T(1,x) = T(x,1) = x.$$

Portanto todas as t-normas coincidem na fronteira do quadrado unitário $[0,1] \times [0,1]$.

Exemplo 1.2.2. Exemplos de t-normas:

1. t- norma do minímo: $T_M(x,y) = \min\{x,y\}$.
2. t- norma do produto: $T_P(x,y) = xy$.
3. t- norma de Lukasiewicz: $T_L(x,y) = \max\{0, x+y-1\}$.
4. t- norma Drástica:

$$T_D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \neq 1 \ \text{ e } \ y \neq 1 \\ x & \text{se} \quad y = 1 \\ y & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}.$$

5. t- norma de Hamacher: $T_H(x,y) = \dfrac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)}, \quad p \geq 0.$

6. t- norma de Frank: $T_F(x,y) = \log_a \left[1 + \dfrac{(a^x-1)(a^y-1)}{a-1}\right], \quad a \geq 0 \text{ e } a \neq 1.$

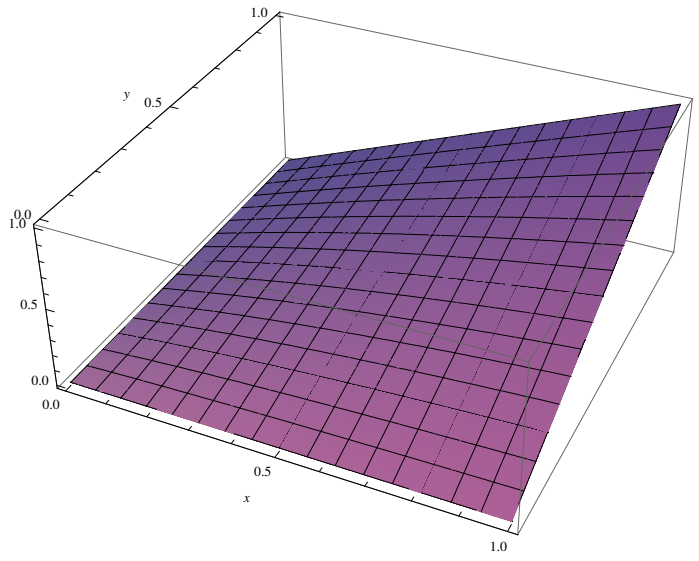


Figura 1.1: t-norma de Hamacher com $p = 0.5$.

Proposição 1.2.3. Para todo $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ vale $T_L(x,y) \leq T_P(x,y) \leq T_M(x,y)$.

Demonstração. Primeiramente mostremos que $T_L(x,y) = \max\{0, x+y-1\} \leq T_P(x,y) = xy$.

i. Suponhamos que $\max\{0, x+y-1\} = 0$, logo para qualquer $x, y \in [0,1]$ temos $xy \geq 0$.

ii. Agora, suponhamos que $\max\{0, x+y-1\} = x+y-1 > 0$. Para $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$, faremos $x = 1-a$, $0 < a < 1$ e $y = 1-b$, $0 < b < 1$. Assim, $T_P(x,y) = xy = (1-a)(1-b) = (x+y-1) + ab \geq x+y-1 = T_L(x,y)$. Portanto, $T_L(x,y) \leq T_P(x,y)$.

De *i.* e *ii.* temos $T_L(x,y) \leq T_P(x,y)$.

Agora mostremos $T_P(x,y) = xy \leq T_M(x,y) = \min\{x,y\}$.

Suponha sem perda de generalidade que $\min\{x,y\} = x$. Logo, para qualquer $x, y \in [0,1]$ temos $x \geq xy$. Analogamente pra $\min\{x,y\} = y$. Portanto, $T_P(x,y) \leq T_M(x,y)$. □

As s-normas foram introduzidas como operação dual de t-normas. Assim como a t-norma, a s-norma é muito importante para operações entre conjuntos fuzzy. Por exemplo, esse operador modela o conectivo **ou**.

Definição 1.2.4. Uma s-norma S é uma operação binária $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que satisfaz:

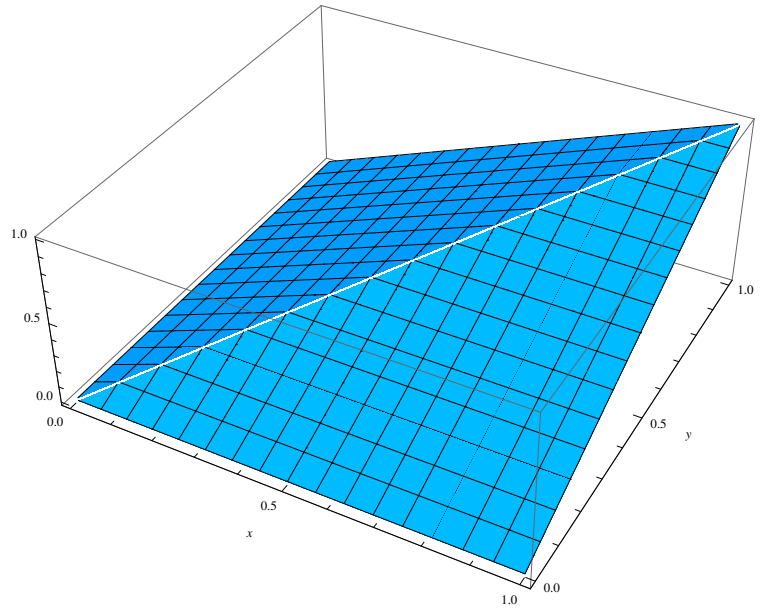


Figura 1.2: t-norma do minímo

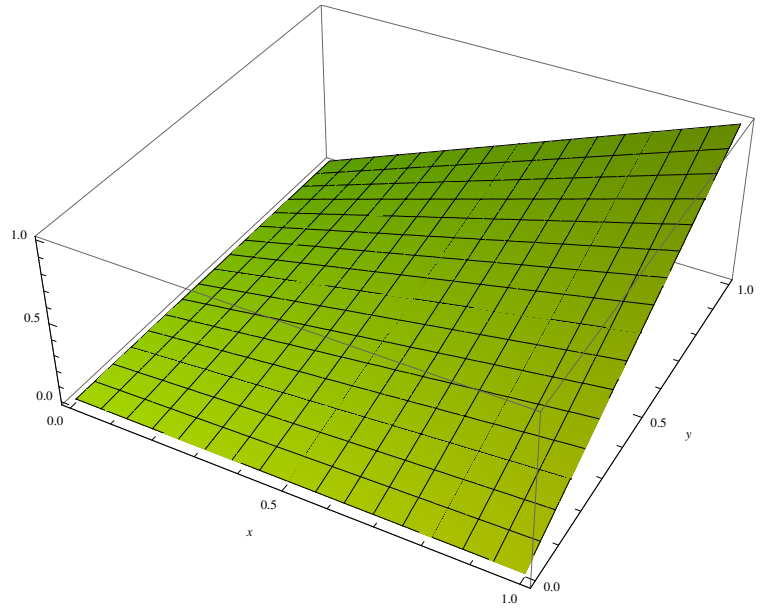


Figura 1.3: t-norma do produto

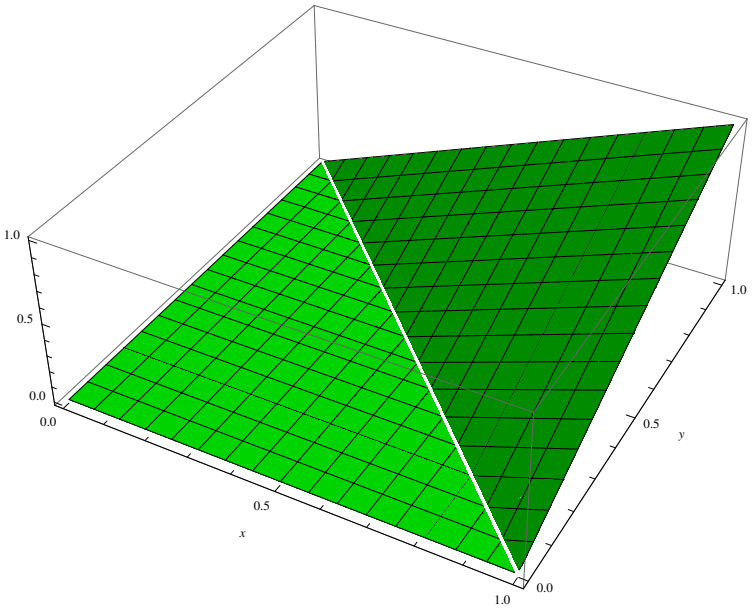


Figura 1.4: t-norma de Lukasiewicz

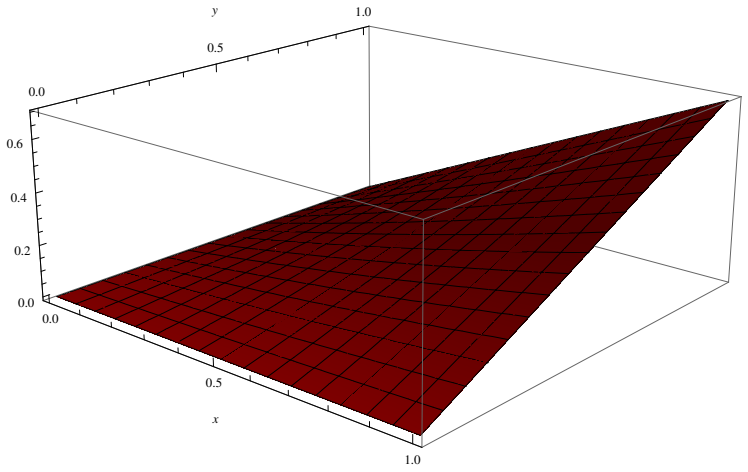


Figura 1.5: t-norma de Frank

1. elemento neutro: $0Sx = x$;
2. comutativa: $xSy = ySx$;
3. associativa: $xS(ySz) = (xSy)Sz$;
4. monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $xSy \leq uSv$.

Exemplo 1.2.5. Exemplos de s-normas:

1. s- norma do máximo: $S_M(x, y) = \max\{x, y\}$.
2. s- norma do produto: $S_P(x, y) = x + y - xy$.
3. s- norma de Lukasiewicz: $S_L(x, y) = \min\{1, x + y\}$.
4. s- norma Drástica:

$$S_D(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ \max\{x, y\} & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

5. s- norma de Hamacher: $S_H(x, y) = \dfrac{(p-2)xy + x + y}{1 + (p-1)xy}, \quad p \geq 0.$
6. s- norma de Frank: $S_F(x, y) = 1 - \log_a \left[1 + \dfrac{(a^{1-x} - 1)(a^{1-y} - 1)}{a - 1}\right], \quad a \geq 0 \ \text{ e } \ a \neq 1.$

Proposição 1.2.6. Para todo $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ vale $S_L(x, y) \geq S_P(x, y) \geq S_M(x, y)$.

Demonstração. Primeiramente mostremos que $S_L(x, y) = \min\{1, x + y\} \geq S_P(x, y) = x + y - xy$.

i. Suponhamos que $\min\{1, x + y\} = x+y$, logo para qualquer $x, y \in [0, 1]$ temos $x+y \geq x+y-xy$.

ii. Agora, suponhamos que $\min\{1, x + y\} = 1$. Para $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$, faremos $x = 1 - a$, $0 < a < 1$ e $y = 1-b$, $0 < b < 1$. Assim, $S_P(x, y) = x+y-xy = (1-a)+(1-b)-(1-a)(1-b) = 1 - ab \leq 1 = S_L(x, y)$. Portanto, $S_L(x, y) \geq S_P(x, y)$.

Portanto, de *i.* e *ii.* temos $S_L(x, y) \geq S_P(x, y)$.

Agora mostremos $S_P(x, y) = x + y - xy \geq S_M(x, y) = \max\{x, y\}$.

Suponha sem perda de generalidade que $\max\{x, y\} = x$. Logo, para qualquer $x, y \in [0, 1]$ temos $0 \leq xy \leq 1$ logo $x + y - xy \geq x$. Analogamente pra $\max\{x, y\} = y$. Portanto, $S_P(x, y) \leq S_M(x, y)$. □

Observação 1.2.7. A $S_M(x, y) = \max\{x, y\}$ é uma s-norma que produz a tabela verdade do conectivo $\vee$.

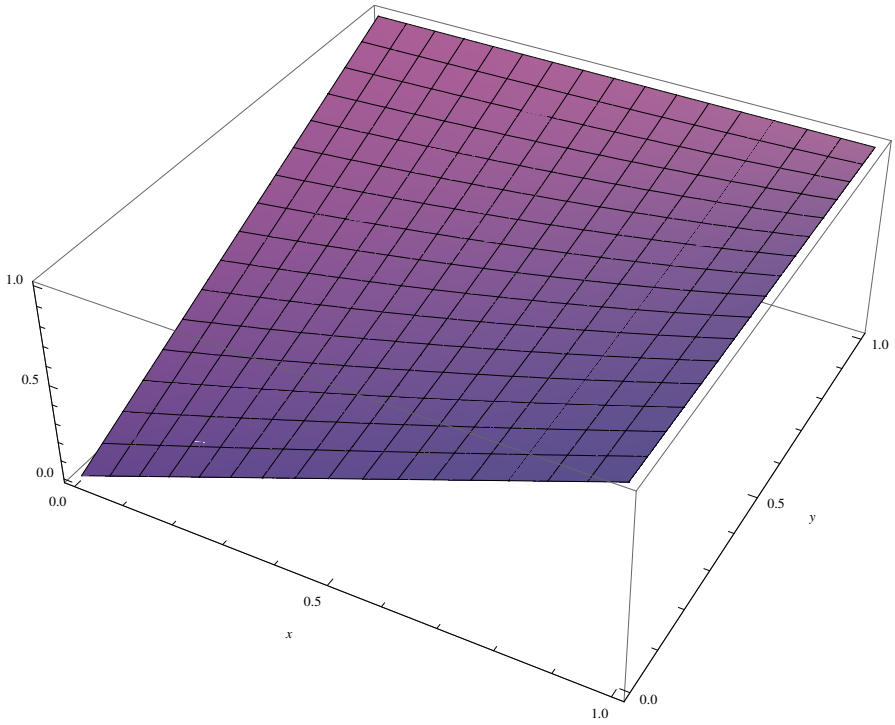


Figura 1.6: s-norma de Hamacher com $p = 0.5$.

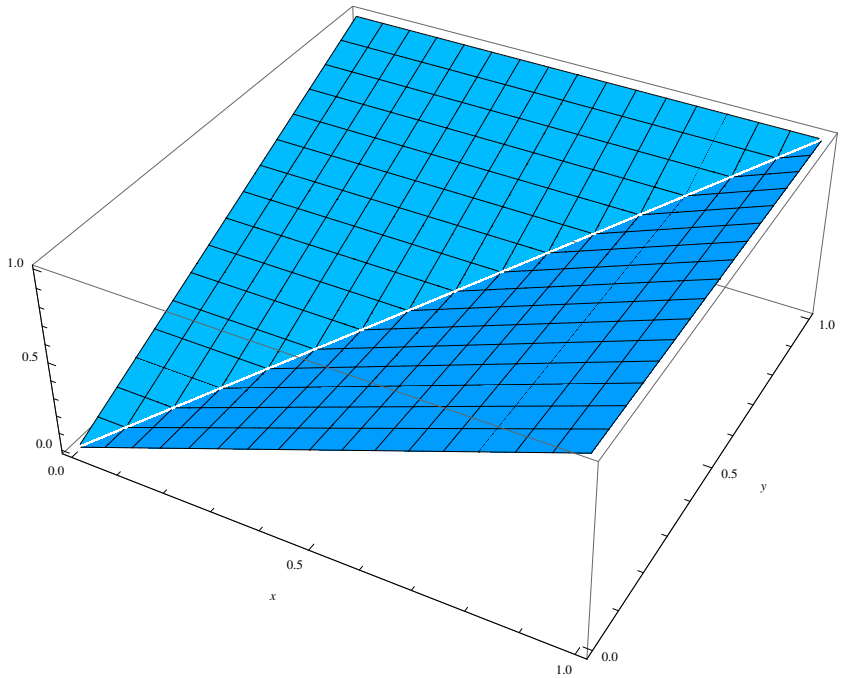


Figura 1.7: s-norma do máximo

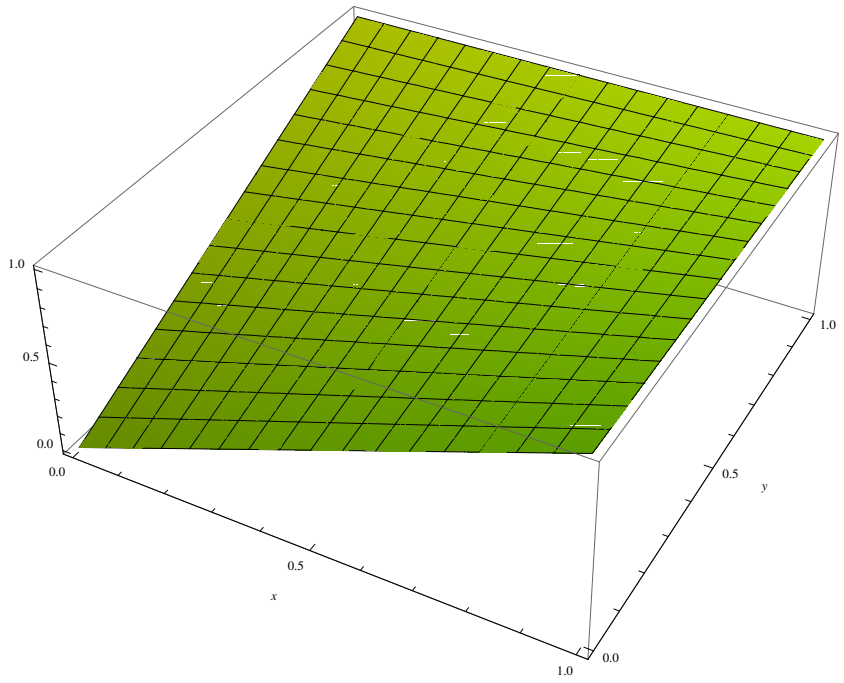


Figura 1.8: s-norma do produto

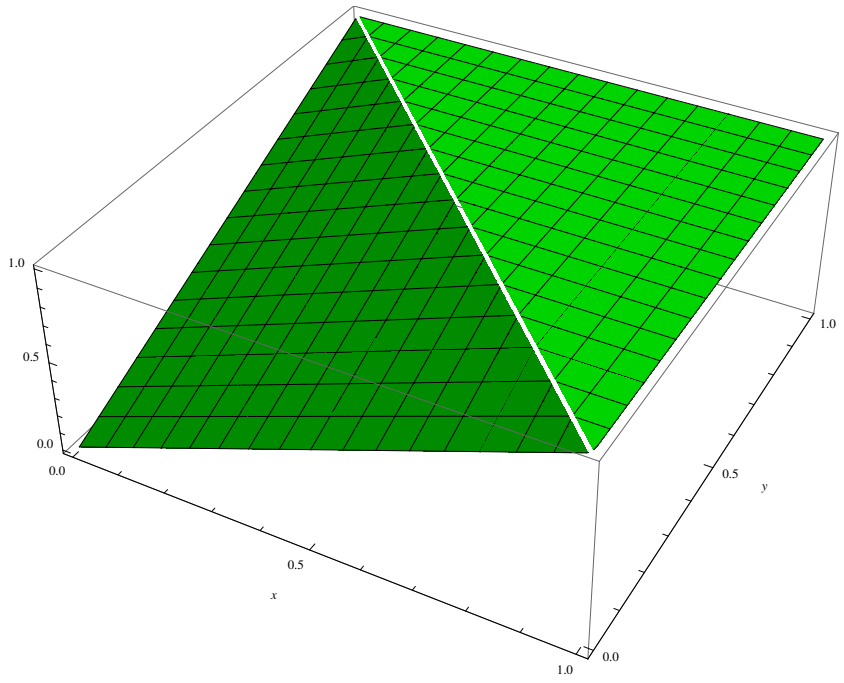


Figura 1.9: s-norma de Lukasiewicz

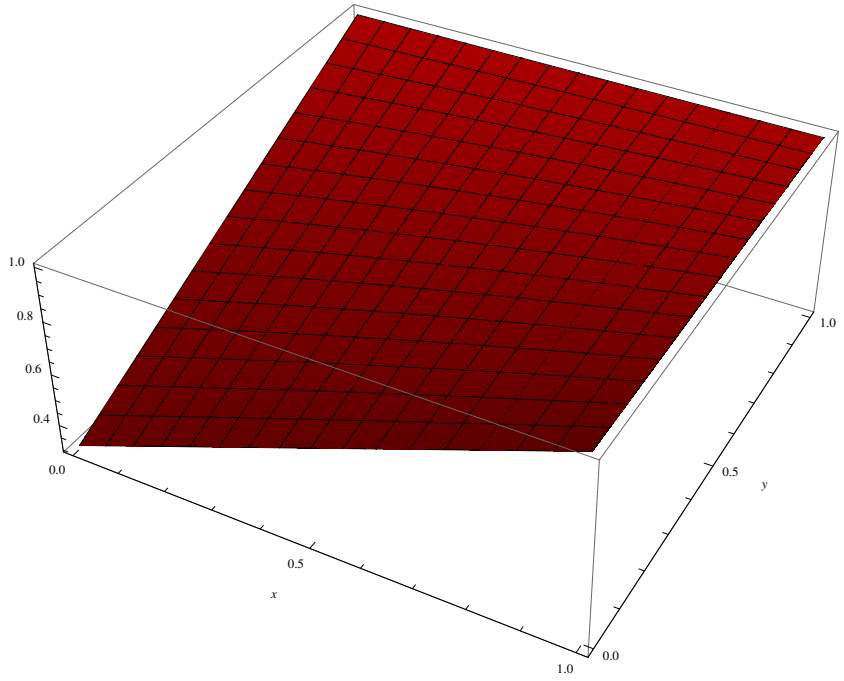


Figura 1.10: s-norma de Frank

1.3 Conjuntos fuzzy

Definição 1.3.1. Seja U um conjunto e A um subconjunto de U. A função característica de A é dada por

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in A \\ 0 & \text{se} \quad x \notin A \end{cases}.$$

Dessa forma, $\mathcal{X}_A$ é uma função cujo domínio é U e a imagem está contida no conjunto $\{0, 1\}$, descrevendo completamente o conjunto A.

Definição 1.3.2. Um subconjunto fuzzy A de U é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A : U \longrightarrow [0, 1]$.

Do ponto de vista formal, a definição de subconjunto fuzzy foi apenas uma ampliação do contradomínio de $\mathcal{X}_A$, o conjunto $\{0, 1\}$, para o intervalo $[0, 1]$. Podemos dizer então, que um conjunto clássico é um caso particular de um conjunto fuzzy. Um conjunto fuzzy A de U pode ser dado por um conjunto clássico de pares ordenados: $A = \{(x, \mu_A(x)), \text{com} \quad x \in U)$, que nada mais é que o gráfico da função μ_A.

Observação 1.3.3. Iremos sempre nos referir a subconjunto clássico de U por conjunto e subconjunto fuzzy por conjunto fuzzy.

Exemplo 1.3.4. Seja U o conjunto de números reais que indicam a altura de uma criança de 12 anos em centímetros. E seja A o conjunto das crianças altas com 12 anos. Assim, podemos definir

o conjunto A pela seguinte função de pertinência

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 < x < 136 \\ \frac{x-136}{18} & \text{se} \quad 136 \leq x \leq 154 \\ 1 & \text{se} \quad x > 154 \end{cases}.$$

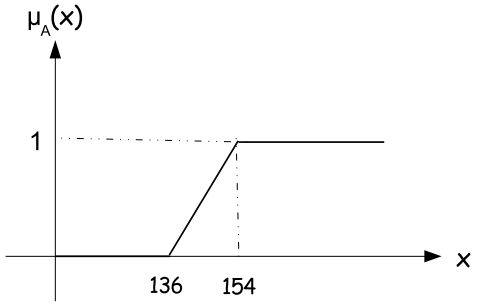


Figura 1.11: Representação gráfica do conjunto de crianças altas de 12 anos.

Definição 1.3.5. Um conjunto fuzzy A de U é dito *normal* se existir $x \in U$ tal que

$$\mu_A(x) = 1.$$

Definição 1.3.6. Um conjunto fuzzy A de U é vazio se sua função de pertinência é identicamente nula, isto é,

$$\mu_A(x) = 0, \quad \forall x \in U.$$

A seguir, algumas operações típicas de conjuntos como união, intersecção e complementação.

Definição 1.3.7. A intersecção entre A e B com respeito a t-norma T é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{A \cap_T B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in U.$$

A definição mais utilizada para intersecção entre conjuntos fuzzy é dada pela t-norma do mínimo, pois é uma extensão do caso clássico. De fato,

$$\begin{aligned} \min\{\mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_B(x)\} &= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ 1 & \text{se} \quad x \in A \text{ e } x \in B \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \notin A \cap B \\ 1 & \text{se} \quad x \in A \cap B \end{cases} \\ &= \mathcal{X}_{A \cap B}(x). \end{aligned}$$

Definição 1.3.8. A união entre A e B, com respeito a s-norma S, é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{A\cup_S B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in U.$$

A definição mais utilizada para união entre conjuntos fuzzy é dada pela s-norma do máximo, pois é uma extensão do caso clássico.

Definição 1.3.9. Uma aplicação $\eta : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ é uma negação se satisfaz

i. $\eta(0) = 1 \;\; e \;\; \eta(1) = 0$ (fronteiras);

ii. $\eta(\eta(x)) = x$ (involução);

iii. η é decrescente (monotocidade).

Definição 1.3.10. O complementar de A com respeito a uma função negação C é o conjunto fuzzy A'_C de U cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{A'_C}(x) = C(\mu_A(x)), \quad x \in U.$$

Quando a função de negação é dada por $\overline{C}(a) = 1 - a$, a função de pertinência do conjunto fuzzy $A'_{\overline{C}}$ fica

$$\mu_{A'_{\overline{C}}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

é importante salientar que as operações entre conjuntos fuzzy de U não satisfazem necessariamente as mesmas propriedades que os conjuntos U. Por exemplo, nem sempre vale

$$A \cap_T A'_C = \phi \;\; \text{e} \;\; A \cup_S A'_C = U.$$

Definição 1.3.11. Um conjunto fuzzy B esta contido no conjunto fuzzy A se

$$\mu_B(x) \leq \mu_A(x), \quad \forall x \in U.$$

Definição 1.3.12. Dois conjuntos fuzzy A e B são iguais se $A \subset B$ e $B \subset A$, isto é,

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \forall x \in U.$$

Ao contrário da teoria clássica de conjuntos, onde essas operações são unicamente definidas, na teoria de conjuntos fuzzy elas dependem da escolha da t-norma, da s-norma e da função complemento que serão utilizadas. Essa escolha é feita baseada no contexto do problema a se estudar.

Observação 1.3.13. é comum descrever o subconjunto fuzzy A com a seguinte notação

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \frac{\mu_A(x_3)}{x_3} + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}.$$

Exemplo 1.3.14. Seja os conjuntos fuzzy $A = \frac{0.1}{1} + \frac{0.2}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.5}{5}$, $B = \frac{0.4}{1} + \frac{0.6}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.1}{5}$, e as normas T_M e S_M. Então

$$A \cap B = \frac{0.1}{1} + \frac{0.2}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.1}{5}$$

e

$$A \cup B = \frac{0.4}{1} + \frac{0.6}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.5}{5}.$$

1.4 O conceito de α-nível

Um subconjunto fuzzy A de U é formado por elementos de U com uma determinada pertinência. Um elemento x de U está em uma classe se seu grau de pertinência é maior do que um determinado limiar $\alpha \in [0,1]$ que define aquela classe.

Definição 1.4.1. O suporte de A é o subconjunto clássico de U definido por $supp(A) = \{x \in U : \mu_{_A}(x) > 0\}$.

Definição 1.4.2. Seja A um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in [0,1]$. O α-nível de A é o subconjunto clássico de U definido por

$$[A]^{\alpha} = \{x \in U : \mu_{_A}(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

O nível zero de um conjunto fuzzy A de U é definido como o menor conjunto fechado que contém o suporte do conjunto fuzzy A, ou seja,

$$[A]^0 = \overline{supp(A)} = \overline{\{x \in U : \mu_{_A}(x) > 0\}} \text{ para } \alpha = 0.$$

Teorema 1.4.3. Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U. Uma condição necessária e suficiente para que $A = B$ é que $[A]^{\alpha} = [B]^{\alpha}$, para todo $\alpha \in [0,1]$.

A demostração é encontrada em [3].

O próximo teorema indica uma condição suficiente para que uma família de subconjuntos clássicos de U seja formada por α-níveis de subconjuntos fuzzy de U.

Teorema 1.4.4. (Teorema de representação de Negoita e Ralescu) Sejam A_{α}, $\alpha \in [0,1]$, uma família de subconjuntos clássicos de U que verifiquem

i. $\bigcup A_{\alpha} \subset A_0$ com $\alpha \in [0,1]$;

ii. $A_{\alpha} \subset A_{\beta}$ se $\beta \leq \alpha$;

iii. $A_{\alpha} = \bigcap_{k \geq 0} A_{\alpha_k}$ se α_k convergir para α com $\alpha_k \leq \alpha$.

Nestas condições temos que existe um único subconjunto fuzzy A de U cujos α-níveis são exatamente os conjuntos clássicos A_{α}, isto é,

$$[A]^{\alpha} = A_{\alpha}.$$

A demonstração completa está em [22].

1.5 Números fuzzy

Em problemas concretos, muitas vezes, precisamos a partir de informações incertas assumir uma valor numérico. Por exemplo frases como *"em torno de"*. Dessa forma, conjuntos fuzzy cujo domínio é o conjunto dos números reais desempenham um importante papel, pois os possíveis valores para esse tipo de estrutura são números reais. A seguir definiremos número fuzzy.

Definição 1.5.1. Um subconjunto fuzzy A é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo no qual μ_A esta definida, é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e satisfaz:

i. todos os α-níveis de A são intervalos fechados e não vazios de $\mathbb{R}$;

ii. $supp(A)$ é um conjunto limitado.

Denotaremos o α-nível do conjunto fuzzy A por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$. Notemos que todo número real é um número fuzzy cuja função de pertinência é sua função característica.

Definição 1.5.2. Um número fuzzy A é dito triangular se sua função de pertinência é da forma

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a} & \text{se} \quad a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b} & \text{se} \quad u < x \leq b \\ 0 & \text{se} \quad x > b \end{cases} . \tag{1.5.1}$$

Os números fuzzy triangulares serão definidos pela terna $(a; u; b)$.

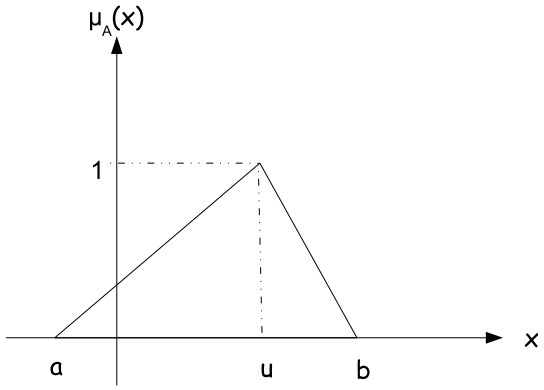


Figura 1.12: Número fuzzy triangular

Os α-níveis desse conjunto fuzzy são os intervalos $[(u-a)\alpha+a, (u-b)\alpha+b]$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 1.5.3. Um número fuzzy A é dito trapezoidal se sua função de pertinência é da forma

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se} \quad a \leq x < b \\ 1 & \text{se} \quad b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se} \quad c < x \leq d \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} . \tag{1.5.2}$$

Os números fuzzy trapezoidais serão definidos pela quadra $(a; b; c; d)$.

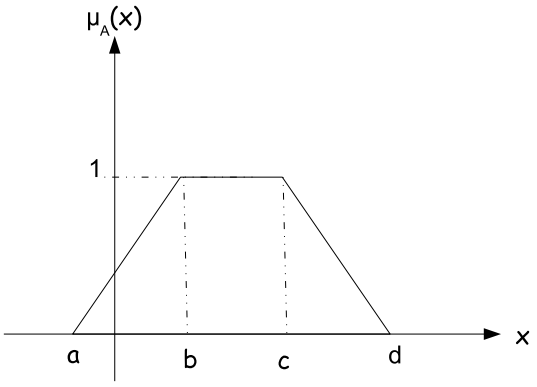


Figura 1.13: Número fuzzy trapezoidal

Os α-níveis desse conjunto fuzzy são os intervalos $[(b-a)\alpha+a, (c-d)\alpha+d]$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 1.5.4. Um número fuzzy tem forma de sino se sua função de pertinência for suave e simétrica em relação a um número real. Uma formúla genérica é

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \exp\left(-(\frac{x-u}{a})^2\right) & \text{se} \quad u-\delta \leq x \leq u+\delta \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} . \tag{1.5.3}$$

Os α-níveis desse conjunto fuzzy são os intervalos

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = \begin{cases} [u - \sqrt{\ln \frac{1}{\alpha^{a^2}}}, u + \sqrt{\ln \frac{1}{\alpha^{a^2}}}] & \text{se} \quad \alpha \geq e^{-(\frac{\delta}{a})^2} \\ [u-\delta, u+\delta] & \text{se} \quad \alpha < e^{-(\frac{\delta}{a})^2} \end{cases} .$$

A família dos subconjuntos fuzzy do $\mathbb{R}^n$ é denotada por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, enquanto a dos números fuzzy é denotada por $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

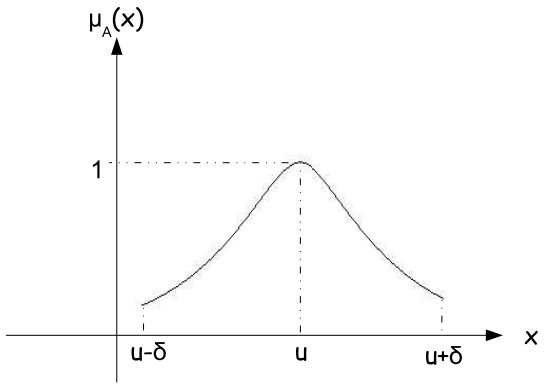


Figura 1.14: Número fuzzy em forma de sino

1.6 Resumo

Foi apresentado neste primeiro capítulo resultados que serão muito importantes para o desenvolvimento do trabalho adiante. Vimos a teoria de normas triangulares que serão usadas principalmente no Capítulo 5 , a caracterização de conjuntos fuzzy e algumas operações típicas entre conjuntos, α-nível e números fuzzy.

Capítulo 2

Princípio de extensão e aritmética fuzzy

Estender operações típicas dos conjuntos clássicos não-fuzzy em fuzzy é uma necessidade constante em lógica fuzzy. Assim, Zadeh propôs um método chamado Princípio de Extensão [27]. Nós vamos utilizar muito essa ferramenta para resolver equações diferenciais com parâmetros fuzzy no decorrer do trabalho.

2.1 O princípio de extensão de Zadeh

O objetivo do Princípio de Extensão de Zadeh para uma função $f : U \longrightarrow Z$ é indicar como deve ser a imagem de um subconjunto fuzzy A de U por meio da f. E se espera que esta seja um subconjunto fuzzy de Z.

Definição 2.1.1. Sejam f uma função tal que $f : U \to Z$ e A um subconjunto fuzzy de U. O princípio de extensão de Zadeh de f defini uma função $\widehat{f}$ que, aplicada a A, fornece o subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$ de Z, cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{\widehat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{f^{-1}(z)} \mu_A(u) & \text{se} \quad f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se} \quad f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases},$$

sendo $f^{-1}(z) = \{u, f(u) = z\}$ denomina-se pré-imagem de z.

Podemos notar que se f for uma função bijetora teremos que f^{-1} é a função inversa de f. E que se f for injetora teremos que o grau de pertinência de $z_i = f(x_i)$ em $\widehat{f}(A)$ é o mesmo de x_i em A.

O teorema a seguir tem grande importância neste trabalho. Ele diz que o α-nível do conjunto $\widehat{f}(A)$ é o mesmo que a imagem pela f do conjunto α-nível de A.

Teorema 2.1.2. [2] Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função contínua, $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ a extensão de Zadeh da função f. Então

$$[\widehat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

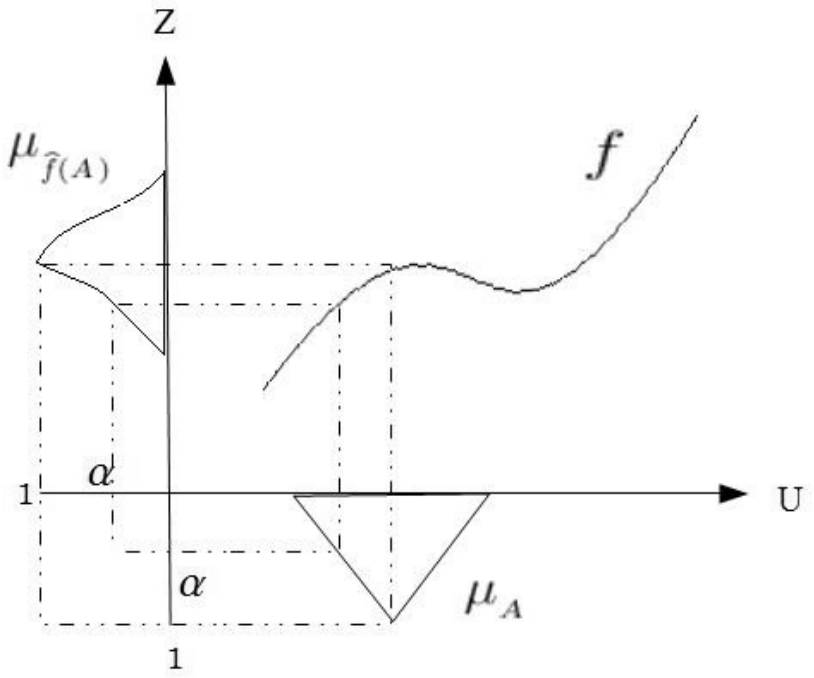


Figura 2.1: Imagem de um subconjunto fuzzy através da Extensão de Zadeh para uma função f.

O corolário a seguir é uma consequência imediata do Teorema 2.1.2.

Corolário 2.1.3. [2] Se f é contínua, então $\widehat{f}$ é monótona no seguinte sentido

$$\text{se} \quad A \leq B, \quad \text{então} \quad \widehat{f}(A) \leq \widehat{f}(B)$$

sendo que $A \leq B$ significa que $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

O princípio de extensão baseado em t-norma

Para funções como $f : U \times V \longrightarrow Z$ o Princípio de Extensão indica como deve ser a imagem de um par de conjuntos fuzzy $(A, B) \in U \times V$ através da f. Espera-se que esta seja um subconjunto fuzzy de Z. Assim, é necessário sabermos como fazer o produto cartesiano de dois conjuntos fuzzy e da mesma forma que a união, a intersecção e o complementar a fazemos através de uma t-norma.

A família dos subconjuntos fuzzy do $\mathbb{R}^n$ é denotada por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.1.4. Sejam os conjuntos fuzzy A, B e uma t-norma T. O produto cartesiano fuzzy, com respeito a t-norma T, é o subconjunto fuzzy $A \times_T B$ de $U \times V$ cuja função de pertinência é

$$\mu_{A \times_T B}(u, v) = T(\mu_A(u), \mu_B(v)).$$

A proposição a seguir mostra a relação entre o α-nível do produto cartesiano $A \times_T B$ e os α-níveis de A e B.

Proposição 2.1.5. Para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ tem-se que $[A \times_T B]^\alpha = [A]^\alpha \times [B]^\alpha$ se, e somente se, T é a t-norma do minímo (T_M).

Definição 2.1.6. (Princípio de extensão sup-T) Sejam f uma função tal que $f : U \times V \to Z$ e, A e B subconjuntos fuzzy de U e V, respectivamente. Uma extensão de f via T é a função $\widehat{f}$ que, aplicada a A e B, fornece o subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A, B)$ de Z, cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{\widehat{f}(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{f^{-1}(z)} T(\mu_A(u), \mu_B(v)) & \text{se} \quad f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ \\ 0 & \text{se} \quad f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases},$$

sendo $f^{-1}(z) = \{(u, v) : f(u, v) = z\}$ denomina-se pré-imagem de z.

Antes de enunciarmos um resultado sobre a continuidade de $\widehat{f}$, é necessário a seguinte definição.

Definição 2.1.7. Sejam U e V elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, a distância de Hausdorff fuzzy entre U e V é definida por

$$D(U, V) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([U]^\alpha, [V]^\alpha),$$

sendo h é usual métrica de Hausdorff

$$h([U]^\alpha, [V]^\alpha) = \max\left[\rho([U]^\alpha, [V]^\alpha), \rho([V]^\alpha, [U]^\alpha)\right]$$

e

$$\rho([U]^\alpha, [V]^\alpha) = \sup_{x \in [U]^\alpha} \inf_{y \in [V]^\alpha} ||x - y||.$$

Teorema 2.1.8. [2] Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Então as seguintes condições são equivalentes

i. f é contína (na métrica usual);

ii. $\widehat{f} : (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D) \longrightarrow (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$, é contínua.

A seguir um importante teorema para o estudo de modelos com condição inicial fuzzy.

Teorema 2.1.9. Suponha que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ seja uma função contínua, $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$. Nestas condições é válida a igualdade

$$[\widehat{f}(A, B)]^\alpha = f([A]^\alpha, [B]^\alpha),$$

sendo $f([A]^\alpha, [B]^\alpha) = \{f(x_1, x_2)/x_1 \in [A]^\alpha, x_2 \in [B]^\alpha\}$.

A prova está em [12].
Quando a t- norma utilizada é a do minímo obtemos o seguinte teorema.

Teorema 2.1.10. (Teorema de Nguyen) Suponha que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ seja uma função contínua, $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$. Nestas condições é válida a igualdade

$$[\widehat{f}(A, B)]^\alpha = f([A]^\alpha \times [B]^\alpha).$$

A demonstração pode ser vista em [2, 23].

2.2 Operações aritméticas

As operações aritméticas com números fuzzy estão intimamente ligadas com a aritmética intervalar. Apresentaremos aqui algumas operações para intervalos fechados da reta real.

2.2.1 Aritmética intervalar

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e A, B dois intervalos fechados da reta dados por

$$A = [a_1, a_2] \text{ e } B = [b_1, b_2].$$

Definição 2.2.1. Operações entre intervalos de reta são definidos por

a. A soma entre A e B é o intervalo

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2].$$

b. A diferença entre A e B é o intervalo

$$A - B = [a_1 + b_2, a_2 + b_1].$$

c. A multiplicação entre o escalar λ e A é o intervalo

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2] & \text{se} \quad \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2, \lambda a_1] & \text{se} \quad \lambda < 0 \end{cases}. \tag{2.2.1}$$

d. A mutiplicação de A por B é o intervalo

$$A.B = [\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}, \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}].$$

e. A divisão de A por $B \neq 0$ é o intervalo

$$A/B = [a_1, a_2].\left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}\right].$$

é relevante notar que as operações aritméticas para intervalos estendem se para números reias, basta considerarmos no intervalo as extremidades iguais.

Teorema 2.2.2. [3](Princípio de extensão para intervalos da reta). Sejam A e B dois intervalos fechados de $\mathbb{R}$, e $\otimes$ uma das operações aritméticas entre números reais. Então

$$\chi_{A\otimes B}(x) = \sup_{\{(y,z):y\otimes z=x\}} \min[\chi_A(y), \chi_B(z)].$$

Uma eminente consequência do Teorema 2.2.2 é o seguinte corolário.

Corolário 2.2.3. Os α-nivéis do conjunto crisp $A + B$, com função característica $\chi_{(A+B)}$, são dados por

$$[A + B]^\alpha = A + B,$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

2.2.2 Operações aritméticas para números fuzzy

As operações aritméticas para números fuzzy são casos particulares do Princípio de Extensão em que as funções a serem estendidas são as operações tradicionais para números reais. Essa subseção será baseada em [3, 11].

Definição 2.2.4. Suponha A e B dois subconjuntos fuzzy de X e λ um número real.

a. Seja $f : X \times X \to X$ definido como $f(x, y) = x + y$, isto é o operador adição. A soma de dois números fuzzy é o número fuzzy $f(A, B) = A + B$, cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(A+B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] & \text{se} \quad \phi(z) \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad \phi(z) = 0 \end{cases}, \tag{2.2.2}$$

sendo $\phi(z) = \{(x, y) : x + y = z\}$.

b. Seja $f : X \times X \to X$ definido como $f(x, y) = x - y$, isto é o operador subtração. A diferença de dois números fuzzy é o número fuzzy $f(A, B) = A - B$, cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(A-B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} \min\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right] & \text{se} \quad \phi(z) \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad \phi(z) = 0 \end{cases}, \tag{2.2.3}$$

sendo $\phi(z) = \{(x, y) : x - y = z\}$.

c. Seja $f : X \to X$ definido como $f(x) = \lambda x$. A multiplicação do escalar λ por A é o número fuzzy λA, cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(\lambda A)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\{x:\lambda x=z\}} \left[\mu_A(x)\right] & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(z) & \text{se} \quad \lambda = 0 \end{cases}, \tag{2.2.4}$$

sendo $\chi_{\{0\}}(z)$ é a função característica de $\{0\}$ e $\sup\limits_{\{x:\lambda x=z\}} \left[\mu_A(x)\right] = \mu_A(\lambda^{-1}z)$.

d. Seja $f : X \times X \to X$ definido como $f(x, y) = xy$, isto é o operador multiplicação. A multiplicação de dois números fuzzy é o número fuzzy $f(A, B) = A.B$, cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(A.B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} \min\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right] & \text{se} \quad \phi(z) \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad \phi(z) = 0 \end{cases}, \tag{2.2.5}$$

sendo $\phi(z) = \{(x, y) : x.y = z\}$.

e. Seja $f : X \times X \to X$ definido como $f(x, y) = x/y$, isto é o operador divisão. A divisão de dois números fuzzy é o número fuzzy $f(A, B) = A/B$, cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(A/B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} \min\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right] & \text{se} \quad \phi(z) \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad \phi(z) = 0 \end{cases}, \tag{2.2.6}$$

sendo $\phi(z) = \{(x, y) : x/y = z\}$.

Notemos que da igualdade $\sup\limits_{\{x-y=z\}} \min\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right] = \sup\limits_{\{x+y=z\}} \min\left[\mu_A(x), \mu_B(-y)\right]$, segue que $A + B = A + (-B)$ é sempre verdade. Entretanto quando A é um número fuzzy, temos que

$$\mu_{(A-A)}(z) = \sup_{\{x-y=z\}} \min\left[\mu_A(x), \mu_A(y)\right], \quad z \in \mathbb{R}$$

nem sempre é igual a $\widehat{0}$, sendo

$$\widehat{0} = \mu_{\{0\}}(z) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad z = 0 \\ 0 & \text{se} \quad z \neq 0 \end{cases}.$$

Exemplo 2.2.5. Seja $f : X \times X \to X$ definido como $f(x, y) = \lambda_1 x + \lambda_2 y$. Suponha A, B suconjuntos fuzzy de X. Assim, pelo príncipio de extensão obtemos $f(A, B)$ com a seguinte função de pertinência

$$\mu_{(\lambda_1 A+\lambda_2 B)}(z) = \sup_{\{\lambda_1 x+\lambda_2 y=z\}} \min\left[\mu_A(x), \mu_A(y)\right]. \tag{2.2.7}$$

O teorema a seguir garante que a operação entre dois números fuzzy é um número fuzzy e generaliza as operações aritméticas intervalares para números fuzzy.

Teorema 2.2.6. Os α-níveis do conjunto fuzzy $A \otimes B$ são dados por

$$[A \otimes B]^\alpha = [A]^\alpha \otimes [B]^\alpha$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, sendo $\otimes$ qualquer uma das operações aritméticas mencionadas anteriormente.

Os α-níveis de números fuzzy sempre são intervalos fechado de $\mathbb{R}$. Deste modo uma forma "prática" para fazer esses cálculos será dada a seguir através da proposição.

Proposição 2.2.7. Sejam A, B números fuzzy com α-nívies dados, respectivamente, por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então são válidas as seguintes propriedades

a. A soma de dois números fuzzy A e B é o número fuzzy $A + B$ cujos α-níveis são

$$A + B = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha].$$

b. A diferença de dois números fuzzy A e B é o número fuzzy $A - B$ cujos α-níveis são

$$A - B = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha].$$

c. A multiplicação de $\lambda \in \mathbb{R}$ por A é o número fuzzy λA cujos α-níveis são

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha] & \text{se} \quad \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha] & \text{se} \quad \lambda < 0 \end{cases}.$$

d. O produto de dois números fuzzy A e B é o número fuzzy $A.B$ cujos α-níveis são

$$A.B = [\min\{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}, \max\{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}].$$

e. A divisão de dois números fuzzy A e B é o número fuzzy A/B cujos α-níveis são

$$\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]\left[\frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{b_1^\alpha}\right].$$

Exemplo 2.2.8. Considere os números fuzzy triangulares simétricos $A = (1; 2; 3)$ e $B = (4; 5; 6)$. Seus α-níveis são dados, respectivamente, por $[1+\alpha, 3-\alpha]$ e $[4+\alpha, 6-\alpha]$. Assim, pela Proposição 2.2.7 temos:

- $[A+B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [5+2\alpha, 9-2\alpha]$. Daí, $A+B = (5;7;9)$ é um número fuzzy triangular.
- $[A-B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [-5+2\alpha, -1-2\alpha]$. Daí, $A-B = (-5;-3;-1)$ é um número fuzzy triangular.
- $3[A]^\alpha = [3+3\alpha, 9-3\alpha]$. Daí, $A = (3;6;9)$ é um número fuzzy triangular.

Através destes resultados, vamos generalizar uma combinação linear de números fuzzy.

Lema 2.2.9. Sejam $A_i = (a_i - \epsilon_i; a_i; a_i + \epsilon_i)$ números fuzzy triangulares simétricos e $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$. Então a combinação linear $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$ pode ser representada como

$$A = (ł_1 a_1 + ... + ł_n a_n - ł_i^{\vee}\epsilon_1 + ... - ł_i^{\vee}\epsilon_n, ł_1 a_1 + ... + ł_n a_n, ł_1 a_1 + ... + ł_n a_n + ł_i^{\vee}\epsilon_1 + ... + ł_i^{\vee}\epsilon_n)$$

sendo $ł_i^{\vee} = ([ł_i]_+ - [ł_i]_-)$, $[ł_i]_- = \min\{0, ł_i\}$ e $[ł_i]_+ = \max\{0, ł_i\}$.

Demonstração. Basta verificar que é válido para $A = A_1 + A_2$ e usar o princípio da indução finita. □

2.3 Resumo

Neste capítulo vimos o Princípio de Extensão de Zadeh de diferentes formas, operações aritméticas com números fuzzy e alguns teoremas importantes na teoria de conjuntos fuzzy.

Capítulo 3

Conjuntos fuzzy interativos

Introduziremos agora alguns conceitos relacionados a conjuntos fuzzy interativos segundo a t-norma, pois no próximo capítulo propomos utilizar equações diferenciais com parâmetros interativos na modelagem de alguns problemas.

3.1 Distribuição de possibilidade

Trataremos aqui apenas de distribuições de possibilidades relacionadas a números fuzzy.

Definição 3.1.1. Uma distribuição de possibilidade sobre $\Omega \neq \phi$ é uma função $\mu : \Omega \longrightarrow [0,1]$ satisfazendo $\sup_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) = 1$.

é interessante notar que qualquer subconjunto fuzzy normal de Ω define uma distribuição de possibilidade sobre Ω. A família de distribuição de possibilidade de $\mathbb{R}^n$ será denotada por $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$.

Definição 3.1.2. Sejam $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ números fuzzy e $C \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$, então μ_C é uma distribuição de possibilidade conjunta de $A_1, ..., A_n$ se

$$\max_{x_j \in \mathbb{R}, j \neq i} \mu_C(x_1, x_2, ..., x_n) = \mu_{A_i}(x_i).$$

Além disso, μ_{A_i} é chamada a i-éssima distribuição marginal de C.

Exemplo 3.1.3. Se C denota a distribuição de possibilidade conjunta de $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, então

$$\max_y \mu_c(x,y) = \mu_{_A}(x) \quad \text{e} \quad \max_x \mu_c(x,y) = \mu_{_B}(y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Observação 3.1.4. Se C é uma distribuição de possibilidade de $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$, então a seguinte relação é satisfeita

$$\mu_C(x_1, ..., x_n) \leq \min \mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_2}(x_n)$$

e

$$[C]^\alpha \subseteq [A_1]^\alpha \times [A_2]^\alpha \times ... \times [A_n]^\alpha,$$

para todos $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in [0,1]$.

3.2 Interatividade entre números fuzzy

Definição 3.2.1. Os números fuzzy $A_1, A_2, ...A_n$ são ditos não interativos se, e somente se, sua distribuição de possibilidade conjunta C satisfazer

$$\mu_{_C}(x_1, ..., x_n) = \min\{\mu_{_{A_1}}(x_1), ..., \mu_{_{A_n}}(x_n)\},$$

ou equivalentemente,

$$[C]^\alpha = [A_1]^\alpha \times ... \times [A_n]^\alpha, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in [0, 1].$$

Caso contrário, são ditos interativos.

Na Figura 3.1, A e B são conjuntos fuzzy não interativos, então μ_A e μ_B tomam seus valores independentemente um do outro.

A seguir definiremos interatividade de conjuntos fuzzy via t-norma.

Definição 3.2.2. Dois conjuntos fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ são interativos segundo a t-norma T se a distribuição de possibilidade conjunta C de A e B é definida pela t-norma T, isto é, $\mu_C : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow [0, 1]$ é dado por

$$\mu_C(x, y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y)).$$

Note que se a t-norma T for a do minímo então $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ serão não interativos. E a distribuição de possibilidade conjunta C satisfaz as propriedades do Exemplo 3.1.3 e da Observação 3.2.4.

3.2.1 Operações aritméticas com números fuzzy interativos baseado em t-normas

Se $\otimes$ é uma operação binária sobre $\mathbb{R}$ podemos extentendê-la para quantidades fuzzy através da Definição 2.1.6.

$$\mu_{A\otimes B}(z) = \sup_{x\otimes y} T(\mu_A(x), \mu_B(y)), z \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.2.3. Sejam A e B números fuzzy, $T_L = \max\{0, x + y - 1\}$ e $f(x, y) = x+y$ o operador adição, então a extensão $\sup -T$ do número fuzzy $A+B$ é dada pela seguinte função de pertinência

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{x+y=z} \{\max(0, \mu_A(x) + \mu_B(y) - 1)\}.$$

Exemplo 3.2.4. Sejam A e B números fuzzy, $T_H = \frac{xy}{a+(1+a)(x+y-xy)}$ e $f(x, y) = xy$ o operador multiplicação, então a extensão $\sup -T$ do número fuzzy $A.B$ é dada pela seguinte função de pertinência

$$\mu_{A.B}(z) = \sup_{xy=z} \left\{ \frac{\mu_A(x)\mu_B(y)}{a + (1 + a)(\mu_A(x) + \mu_B(y) - \mu_A(x)\mu_B(y))} \right\}$$

sendo $a \geq 0$.

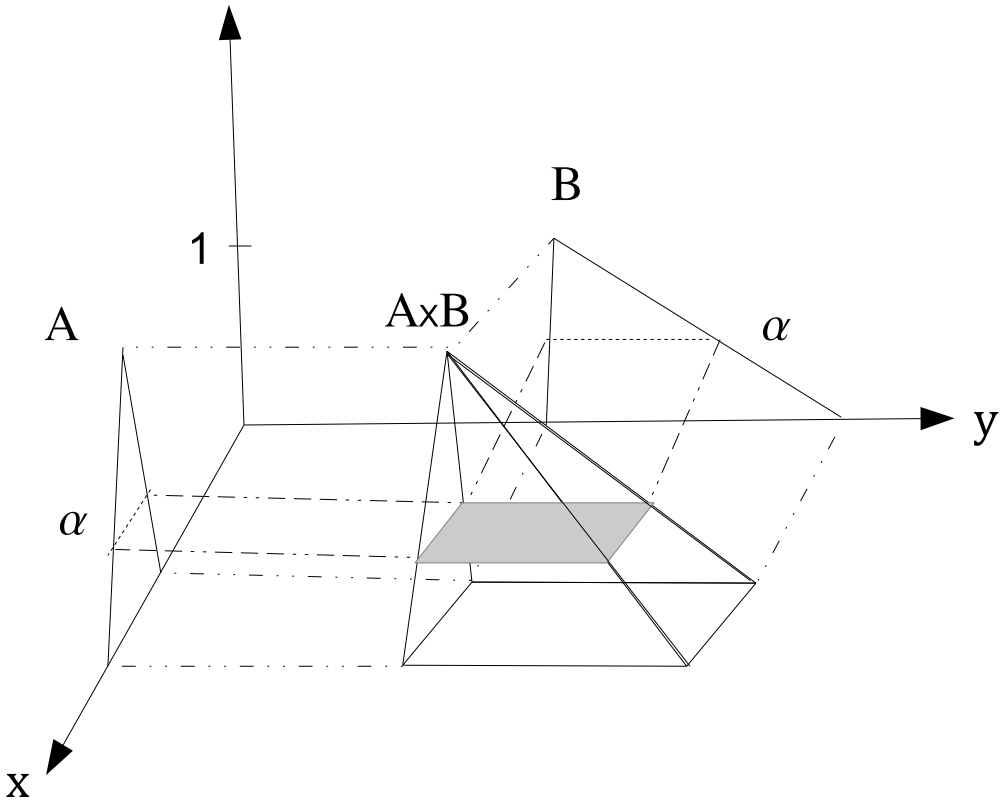


Figura 3.1: Números fuzzy não interativos.

Exemplo 3.2.5. Sejam A e B números fuzzy, $T_P = xy$ e $f(x,y) = x/y$ o operador divisão, então a extensão $\sup -T$ do número fuzzy A/B é dada pela seguinte função de pertinência

$$\mu_{A/B}(z) = \sup_{x/y=z} \{\mu_A(x)\mu_B(y)\}.$$

3.2.2 O princípio de extensão para números fuzzy interativos

Introduziremos através do conceito de distribuição de possibilidade o seguinte princípio de extensão.

Definição 3.2.6. Seja C uma distribuição de possibilidade conjunta com distribuições de possibilidades marginais $\mu_{A_1}, ..., \mu_{A_n}$, e seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função contínua. Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são números fuzzy linearmente correlacionados, então a extensão de f via C é a função $f_{_C}$ cuja função de pertinência é definida por

$$\mu_{f_{_C}(A_1,...,A_n)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y=f(x_1,...,x_n)} \mu_{_C}(x_1, ..., x_n) & \text{se} \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \\ 0 & \text{se} \quad f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

sendo $f^{-1}(y) = \{(x_1, ..., x_n) : f(x_1, ..., x_n) = y\}$.

A seguinte proposição pode ser vista como uma generalização do Teorema 2.1.10.

Proposição 3.2.7. [9] Sejam $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ números fuzzy, C sua distribuição de possibilidade conjunta e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então,

$$[f_{_C}(A_1, A_2, ..., A_n)]^\alpha = f([C]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Note que $\mu_{f_{_C}}(A_1, A_2, ..., A_n)$ é sempre um número fuzzy [6]. A seguir apresentaremos um teorema cuja prova se encontra em [7, 6], o qual será útil na solução de (4.1.1), via fuzzificação da solução determinística, supondo incertezas nas condições iniciais.

Teorema 3.2.8. [6] Sejam $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ números fuzzy linearmente correlacionados, seja C sua distribuição de possibilidade conjunta e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função contínua. Então,

$$[f_{_C}(A, B)]^\alpha = f([C]^\alpha).$$

3.2.3 Números fuzzy linearmente correlacionados

Definiremos agora uma importante classe de números fuzzy interativos denominada por números fuzzy completamente correlacionados, esse nome é devido a Carlsson, Fúller e Majlender [9, 8].

Definição 3.2.9. Dois números fuzzy A e B são ditos linearmente correlacionados se existem $q, r \in \mathbb{R}$, com $q \neq 0$, tais que sua distribuição de possibilidade conjunta é dada por

$$\mu_{C}(x,y) = \mu_{A}(x)\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y) = \mu_{B}(y)\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y) \tag{3.2.1}$$

sendo

$$\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad qx+r=y \\ 0 & \text{se} \quad qx+r \neq y \end{cases}$$

é a função característica da reta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : qx + r = y\}$.

Neste caso, se $[A]^{\alpha} = [a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}]$ então $[B]^{\alpha} = q[A]^{\alpha} + r$,
$[C]^{\alpha} = \{(x, qx+r) \in \mathbb{R}^2 : x = (1-s)a_1^{\alpha} + sa_2^{\alpha}, s \in [0,1]\}$, para $\alpha \in [0,1]$
e $\mu_{B}(x) = \mu_{A}(\frac{x-r}{q})$, $q \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A relação de interatividade entre dois números fuzzy é definido exclusivamente por sua distribuição de possibilidade conjunta. Portanto, números fuzzy com função de pertinência iguais, por exemplo $\mu_A(x) = \mu_B(y)$, podem não ser correlacionados.

Definição 3.2.10. Números fuzzy A e B são ditos linearmente positivamente (negativamente) correlacionados se q é positivo (negativo) em (3.2.1).

No caso de linearmente positivamente correlacionados se o coeficiente de correlação q for igual a um temos que se $\mu_A(x) \geq \alpha$ para algum $x \in \mathbb{R}$ então existe um único $y \in \mathbb{R}$ que B pode tomar, isto é, se x é movido para direita (esquerda) então o valor correspondente em B também se moverá para a direita (esquerda). Já no caso negativamente correlacionados, com coeficiente de correlação q igual a menos um, temos o mesmo resultado exceto que se x é movido para direita (esquerda) então o valor correspondente em B se moverá para a esquerda (direita).

Dessa forma segue a observação:

Observação 3.2.11. Dados q e r, a primeira distribuição marginal determina completamente a segunda, e vice e versa.

3.2.4 Operação aritmética de números fuzzy linearmente correlacionados

Faremos operações aritméticas básicas, como por exemplo, soma e subtração de números fuzzy linearmente correlacionados. E vamos comparar com a soma não interativa. Esta subseção é baseada em [9].

Pela definição 3.2.6, temos que se C é uma distribuição de possibilidade conjunta com distribuições marginais $\mu_{A_1}, ..., \mu_{A_n}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua então

$$\mu_{f_C}(A_1, ..., A_n)(y) = \sup_{y=f(x_1,...x_n)} \mu_C(x_1, ..., x_n).$$

Soma

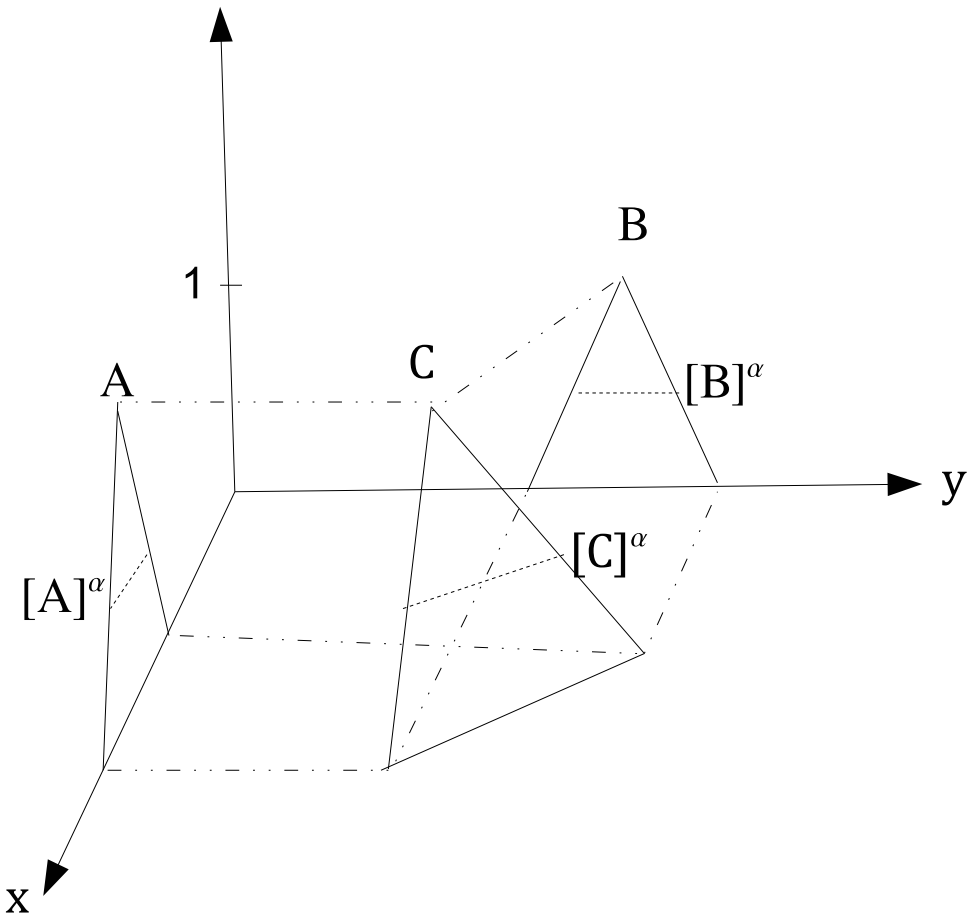


Figura 3.2: Números fuzzy linearmente negativamente correlacionados.

Vamos considerar a soma de dois números fuzzy linearmente correlacionados A e B,

$$\mu_{A+_C B}(y) = \sup_{y=x_1+x_2} \mu_C(x_1, x_2)$$

Isto é, $\mu_{A+_C B}(y) = \sup_{y=x_1+x_2} \mu_{_A}(x_1)\mathcal{X}_{\{qx_1+r=x_2\}}(x_1, x_2)$.

Assim, da Definição 3.2.6 e 3.2.9, temos para todo $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
[A +_C B]^\alpha &= \overline{\{x_1 + x_2 \in \mathbb{R}/\mu_A(x_1) > \alpha,\ qx_1 + r = x_2\}} \\
&= \overline{\{(q+1)x_1 + r \in \mathbb{R}/\mu_A(x_1) > \alpha\}} \\
&= (q+1)\overline{\{x_1 \in \mathbb{R}/\mu_A(x_1) > \alpha\}} + r \\
&= (q+1)[A]^\alpha + r. \qquad (3.2.2)
\end{aligned}$$

Quando $q = -1$, isto é, A e B são linearmente negativamente correlacionados, por (3.2.2) temos, para todo $\alpha \in [0, 1]$

$$[A +_C B]^\alpha = 0[A]^\alpha + r$$

é um número real.

Observação 3.2.12. Notemos que se $q = -1$ e $r = 0$ e $\mu_A(x) = \mu_B(-x)$ temos que a soma interativa, $A +_C B$, de dois números fuzzy linearmente negativamente correlacionados será zero (crisp). Por outro lado, a soma não interativa é dada por

$$[A + B]^\alpha = [a_1^\alpha - a_2^\alpha, a_2^\alpha - a_1^\alpha]$$

que é um número fuzzy. Isto significa que para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ (3.2.4),

$$[C]^\alpha \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}/x_1 + x_2 = r\}.$$

Por outro lado se $q \neq -1$, $A +_C B$ é um número fuzzy e para qualquer $\alpha \in [0, 1]$, o conjunto $\{(x_1, x_2) \in [C]^\alpha/x_1 + x_2 = y\}$ consiste em no máximo de um único ponto (3.2.4).

Agora sejam A e B números fuzzy, onde a função de pertinência de B é dada, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, por

$$\mu_{_B}(x) = \mu_{_A}(\frac{x - r}{q}).$$

Então para qualquer $q > 0$, temos

$$\begin{aligned}
[A + B]^\alpha &= [A]^\alpha + [B]^\alpha \\
&= [A]^\alpha + q[A]^\alpha + r \\
&= (q+1)[A]^\alpha + r \\
&= [A +_C B]^\alpha.
\end{aligned}$$

Portanto, $[A +_C B]^\alpha = [A + B]^\alpha$, para qualquer $q > 0$. Note que essa afirmação só é válida para números fuzzy linearmente positivamente correlacionados, pois se $q < 0$, isto é, linearmente negativamente correlacionados, temos $[A]^\alpha + q[A]^\alpha \neq (q+1)[A]^\alpha$.

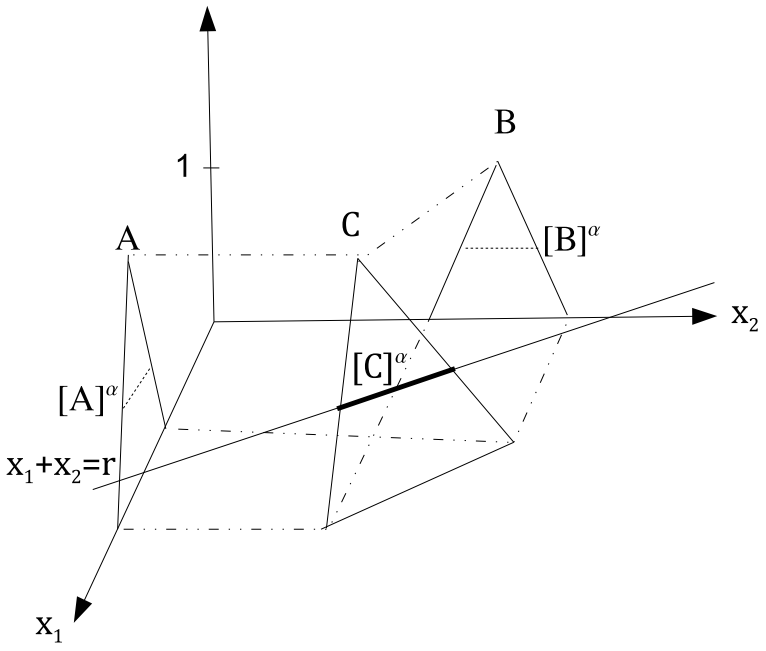


Figura 3.3: Números fuzzy linearmente negativamente correlacionados com $q = -1$.

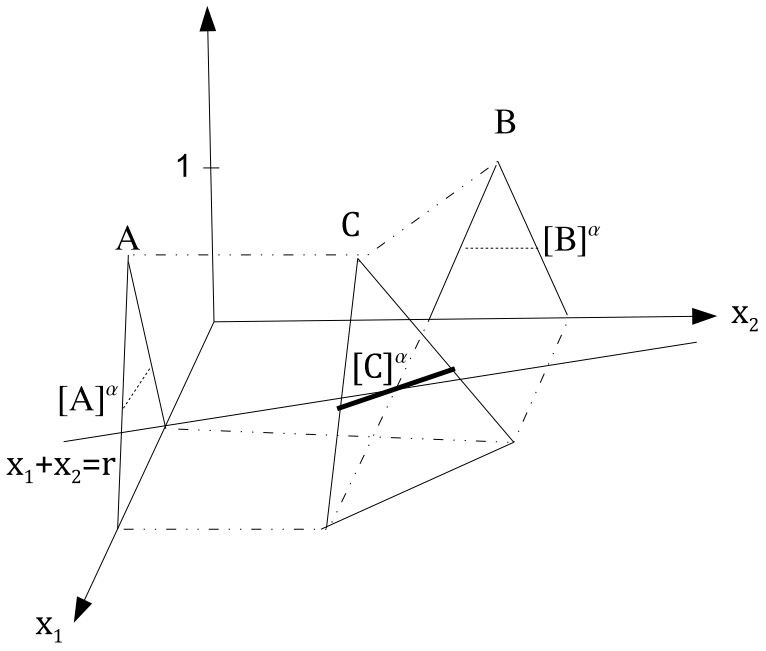


Figura 3.4: Números fuzzy linearmente negativamente correlacionados com $q \neq -1$.

Concluímos que a soma interativa

$$\mu_{A+_C B}(y) = \sup_{y=x_1+x_2} \mu_C(x_1, x_2)$$

pode ser bem diferente da soma não interativa

$$\mu_{A+B}(y) = \sup_{y=x_1+x_2} \min\{\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)\}.$$

Entretanto, qualquer que seja a distribuição conjunta C, temos

$$A +_C B \subseteq A + B,$$

e se dois números são linearmente positivamente correlacionados então

$$[A +_C B]^\alpha = [A + B]^\alpha.$$

Subtração

Analogamente ao que fizemos anteriormente, considere a subtração de dois números fuzzy linearmente correlacionados A e B,

$$\mu_{A-_C B}(y) = \sup_{y=x_1-x_2} \mu_C(x_1, x_2)$$

Isto é, $\mu_{A-_C B}(y) = \sup_{y=x_1-x_2} \mu_{_A}(x_1)\mathcal{X}_{\{qx_1+r=x_2\}}(x_1, x_2)$.

Assim, da Definição 3.2.6 e 3.2.9, temos para todo $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
[A -_C B]^\alpha &= \overline{\{x_1 - x_2 \in \mathbb{R}/\mu_A(x_1) > \alpha,\ qx_1 + r = x_2\}} \\
&= \overline{\{(1-q)x_1 - r \in \mathbb{R}/\mu_A(x_1) > \alpha\}} \\
&= (1-q)\overline{\{x_1 \in \mathbb{R}/\mu_A(x_1) > \alpha\}} - r \\
&= (1-q)[A]^\alpha - r. \qquad (3.2.3)
\end{aligned}$$

Quando $q = 1$, isto é, A e B são linearmente positivamente correlacionados, por (3.2.3) temos, para todo $\alpha \in [0, 1]$

$$[A -_C B]^\alpha = 0[A]^\alpha - r$$

é um número real.

Observação 3.2.13. Notemos que se $q = 1$ e $r = 0$ e $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ temos que a subtração interativa, $A -_C B$, de dois números fuzzy linearmente positivamente correlacionados será zero (crisp).

Agora sejam A e B números fuzzy, onde a função de pertinência de B é dada, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, por

$$\mu_{_B}(x) = \mu_{_A}(\frac{x-r}{q}).$$

Então para qualquer $q < 0$, temos

$$\begin{aligned}[A-B]^\alpha &= [A]^\alpha - [B]^\alpha \\ &= [A]^\alpha - q[A]^\alpha - r \\ &= (1-q)[A]^\alpha - r \\ &= [A -_C B]^\alpha.\end{aligned}$$

Portanto, $[A -_C B]^\alpha = [A - B]^\alpha$, para qualquer $q < 0$. Note que essa afirmação só é válida para números fuzzy linearmente negativamente correlacionados, pois se $q > 0$, isto é, linearmente positivamente correlacionados, temos $[A]^\alpha - q[A]^\alpha \neq (1-q)[A]^\alpha$.

Concluímos que a subtração interativa

$$\mu_{A-_C B}(y) = \sup_{y=x_1-x_2} \mu_C(x_1, x_2)$$

pode ser bem diferente da subtração não interativa

$$\mu_{A-B}(y) = \sup_{y=x_1-x_2} \min\{\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)\}.$$

Entretanto, qualquer que seja a distribuição conjunta C, temos

$$A -_C B \subseteq A - B,$$

e se dois números são linearmente negativamente correlacionados então

$$[A -_C B]^\alpha = [A - B]^\alpha.$$

Exemplo 3.2.14. Sejam os números fuzzy A e B com pertinências

$$\mu_A(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1+2}{3} & \text{se} \quad -2 \leq x_1 \leq 1 \\ \frac{4-x_1}{3} & \text{se} \quad 1 \leq x_1 \leq 4 \end{cases}$$

e

$$\mu_B(x_2) = \begin{cases} \frac{x_2+7}{6} & \text{se} \quad -7 \leq x_2 \leq -1 \\ \frac{5-x_2}{6} & \text{se} \quad -1 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}.$$

A e B são linearmente correlacionados se tomarmos a distribuição conjunta C com pertinência $\mu_C(x_1, x_2) = \mu_A(x_1)\mathcal{X}_{\{2x_1=x_2\}}(x_1, x_2)$. Daí teremos, $[A]^\alpha = [3\alpha - 2, 4 - 3\alpha]$, $[B]^\alpha = [6\alpha - 4, 8 - 6\alpha]$ e

$$[C]^\alpha = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 : x = (1-s)(3\alpha - 2) + s(4 - 3\alpha), s \in [0,1]\}, \quad \text{para} \quad \alpha \in [0,1].$$

Assim,

$$[A +_C B]^\alpha = 3[A]^\alpha = [9\alpha - 6, 12 - 9\alpha] = [A + B].$$

3.3 Resumo

Apresentamos conceitos de distribuição de possibilidade, distribuição de possibilidade conjunta e interatividade. Também vimos o que são números fuzzy linearmente correlacionados e fizemos algumas operações artiméticas entre eles. Concluímos para quais casos a soma/subtração interativa de números fuzzy linearmente correlacionados são iguais a soma/subtração não interativa.

Capítulo 4

Equações diferenciais fuzzy: aplicações em modelos de biomatemática

Neste capítulo introduziremos um estudo sobre equações diferenciais fuzzy. Basicamente, o que difere cada caso é o tratamento dada a derivada (taxa de variação) [3]. Baseamos nos resultados obtidos por Mizukoshi [19] que traz um estudo de equações diferenciais fuzzy com parâmetros não interativos e por Cabral [6] que traz um estudo de equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos.

4.1 Introdução

HIV é a sigla em inglês do vírus da imunodeficiência humana. Causador da AIDS, ataca o sistema imunológico, responsável por defender o organismo de doenças. As células mais atingidas são os linfócitos $TCD4+$. é alterando o DNA dessa célula que o HIV faz cópias de si mesmo. Depois de se multiplicar, rompe os linfócitos em busca de outros para continuar a infecção (www.aids.gov.br).

Ter o HIV não significa ter AIDS. Após a exposição e infecção do vírus, indíviduos podem viver anos sem apresentar sintomas e sem desenvolver qualquer doença. Este período de tempo entre a infecção e a manifestação de doenças, que varia de indivíduo para indivíduo, é um valor impreciso, sendo essa, uma dificuldade no estudo desta síndrome, pois o indíviduo pode transmitir o vírus sem saber que está infectado. Outra dificuldade nesse estudo é a falta de dados concretos sobre o número da população soropositiva. Como ainda não existe cura para a AIDS, a principal forma de combate são medidas preventivas [14]. Alguns estudos mostram que a contagem de células $CD4+$ é o principal indicativo para a resposta terapêutica, ou seja, sugere que quanto menor for a quantidade dessas celúlas no organismo, mais progredida esta a doença (www.aids.gov.br).

Um modelo simples de transferência do número de indivíduos assintomáticos para sintomáticos, porém de grande importância pedagógica, foi proposto por Anderson et. al (1986) [21]. O modelo é dado pelo sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -\lambda x; \quad x(0) = x_0 > 0 \\ \dfrac{dy}{dt} &= \lambda x; \quad y(0) = y_0 > 0, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

onde λ é a taxa de tranferência da fase assintomática para a sintomática (AIDS), $x(t)$ e $y(t)$ são, respectivamente, a fração dos indivíduos infectados que não desenvolveram AIDS e os que já desenvolveram os sintomas em cada instante t.

De acordo com (4.1.1) o modelo considera que

$$x(t) + y(t) = 1, \qquad \forall t \geq 0. \tag{4.1.2}$$

Resolvendo a primeira equação do sistema (4.1.1), temos

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t}. \tag{4.1.3}$$

Logo, de (5.3.2), $y(t)$ é dado por

$$y(t) = 1 - x_0 e^{-\lambda t}. \tag{4.1.4}$$

Note que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ e $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$.

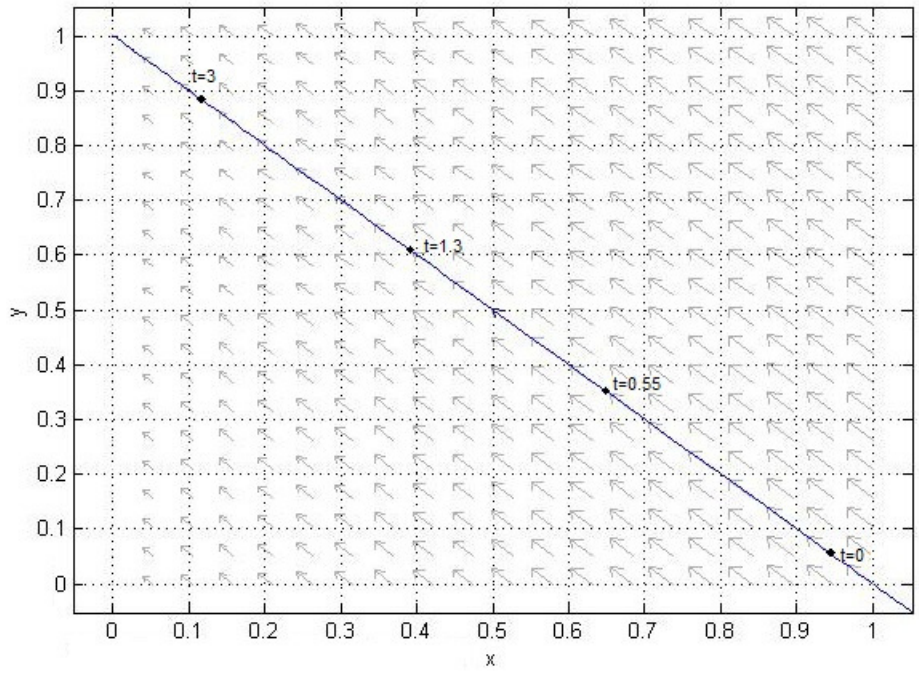


Figura 4.1: Retrato de fase para (4.1.1). A seta na reta $x + y = 1$ indica que a população tende ao ponto $(0, 1)$ e as outras setas mostram o campo de direções.

A Figura 4.1 representa o retrato de fase de (4.1.1), supondo $x + y = 1$ com condição inicial $x_0 = 0.95$ e $\lambda = 0.7$. Os pontos em destaque representam os valores do fluxo de (4.1.1), dado pelo operador

$$L_t(x_0, y_0) = \left(x_0 e^{-\lambda t}, 1 - x_0 e^{-\lambda t}\right), \tag{4.1.5}$$

para cada t.

Em epidemiologia, uma mesma doença pode se manifestar de diversas formas em distintos indivíduos, e com diferentes graus de gravidade. Doenças são geralmente descritas por termos linguísticos, que são muitas vezes vagos.

No caso do HIV, apesar da alta sensibilidade dos testes usados na detecção do vírus, indíviduos recém-infectados podem permanecer soronegativos nas primeiras seis semanas [14]. Dificultando a precisão do número de indivíduos soropositivos e, consequentemente, o número de indivíduos assintomáticos e sintomáticos nesta população. Assim, estudamos esse modelo, supondo incertezas nas condições iniciais através da teoria de conjuntos fuzzy, uma vez que os modelos determínisticos (tradicionais) não atendem a subjetividade presente em alguns fenômenos epidemiológicos.

Vamos considerar o operador dado em (4.1.5), que é solução de (4.1.1) em t, como função da condição inicial. Consideraremos então que as condições iniciais de (4.1.1) sejam incertas, modeladas por números fuzzy. O fato de $x + y = 1$, sugere que x_0 e y_0 sejam linearmente correlacionados (ou completamente correlacionados) [7, 6]. Faremos a abordagem da solução de (4.1.1), com incertezas, por duas técnicas: via inclusão diferencial e via extensão (fuzzificação) da solução determinística [7, 20] (para outras abordagens ver [3]).

Para essas abordagens, se fazem necessários alguns conceitos e resultados, próprios da teoria de equações diferenciais fuzzy. Na próxima seção apresentaremos alguns desses conceitos para um melhor entendimento do trabalho feito.

4.2 Inclusão diferencial

Nesta seção iremos introduzir conceitos relacionados a multifunção e inclusão diferencial baseados em [6, 19] para a seguir apresentar o conceito de inclusão diferencial fuzzy.

Definição 4.2.1. Sejam X e Y conjuntos não-vazios. Uma aplicação $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ é dita ser uma multifunção, sendo $\mathcal{P}(Y)$ o conjunto das partes de Y.

Assim, a multifunção F é uma função que associa cada elemento $x \in X$ um subconjunto não-vazio $F(x) \in \mathcal{P}(Y)$.

Exemplo 4.2.2. A função $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{N}$, talque

$$F(x) = \{0, 1, ..., \lfloor x \rfloor\},$$

sendo $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor que x é uma multifunção.

Definição 4.2.3. Seja $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ uma multifunção. A imagem de F, denotada por $Im(F)$, é definida por

$$Im(F) = F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x).$$

Definição 4.2.4. Seja $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ uma multifunção. O gráfico de F, denotado por $graf(F)$, é definido por

$$graf(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

Definição 4.2.5. Seja $M \subset Y$ um subconjunto e $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ uma multifunção. A pré imagem de M é definida por

$$F^{-1}(M) = \{x \in X : F(x) \bigcap M \neq \emptyset\}.$$

Definição 4.2.6. Seja $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ uma multifunção, diremos que F possui valores unitários se

$$F(x) = \{f(x)\},$$

sendo $f : X \longrightarrow Y$ uma função.

Ou seja, $F(x)$ é um conjunto unitário.

Definição 4.2.7. Seja $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ uma multifunção. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ que satisfaz

$$f(x) \in F(x), \ \forall x \in X$$

é dita ser uma seleção da multifunção F.

Agora estudaremos Inclusão diferencial que será útil para resolução de equações diferenciais fuzzy.

Definição 4.2.8. Seja $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ uma multifunção. Uma Inclusão Diferencial é o problema dado por

$$\begin{cases} x'(t) & \in & F(x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}, \tag{4.2.1}$$

sendo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Uma solução para Inclusão Diferencial (4.2.1) é uma trajetória

$$x : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

absolutamente contínua que satisfaz (4.2.1) em quase todo $t \in [t_0, T_0]$.

Diferentemente da equação diferencial ordinária que especifica em cada ponto do domínio uma direção tangente ao gráfico da solução, a inclusão diferencial (4.2.1) especifica em cada ponto, um cone de direções cuja solução pode ser tangente a qualquer direção do cone [19].

Observação 4.2.9. Se $F(x)$ for um conjunto unitário, isto é, $F(x) = \{f(x)/f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ então a inclusão diferencial (4.2.1) torna-se o problema de valor inicial.

A seguir definiremos conjuntos atingíveis.

Definição 4.2.10. O conjunto atingível no tempo $t \in [t_0, T]$ associado ao problema

$$\begin{cases} x'(t) & \in & F(x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}, \tag{4.2.2}$$

é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathcal{A}_t(x_0) = \{x(t) : x(.) \text{ é solução do problema (4.2.2)}\}.$$

4.3 Equação diferencial fuzzy via inclusão diferencial

Na seção anterior vimos um resumo sobre Inclusão Diferencial. Agora iremos estudar solução de equação diferencial fuzzy através da Inclusão Diferencial.

Estudaremos o problema de valor inicial fuzzy (PVI) dado por

$$\begin{cases} x^{'}(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &\in X_0 \end{cases}, \tag{4.3.1}$$

sendo $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um conjunto fuzzy e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Segundo Hüllermeier [13] a solução do problema (4.3.1) está associado a família de soluções do problema

$$\begin{cases} x^{'}(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &\in [X_0]^{\alpha} \end{cases}, \tag{4.3.2}$$

sendo $[X_0]^{\alpha}$ o α-nível do conjunto fuzzy X_0. Assim, para cada $\alpha \in [0,1]$ a curva $x_{\alpha} : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma α-solução do problema de valor inicial fuzzy (4.3.1) se for solução do problema (4.3.2) [6].

O conjunto atingível de (4.3.1) é dado por

$$\mathcal{A}_t([X_0]^{\alpha}) = \{x(t, x_0) : x(., x_0) \text{ é solução do problema (4.3.1) com } x_0 \in [X_0]^{\alpha}\}.$$

Exemplo 4.3.1. Considere o problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} x^{'}(t) &= \lambda x(t) \\ x(0) &\in X_0 \end{cases}, \tag{4.3.3}$$

sendo $X_0 = (a - \delta, a, a + \delta)$ um número fuzzy triangular e $\lambda > 0$.

Assim, a solução de (4.3.3) está associado a família de soluções do problema

$$\begin{cases} x^{'}(t) &= \lambda x(t) \\ x(0) &\in [X_0]^{\alpha} \end{cases}, \tag{4.3.4}$$

sendo $[X_0]^{\alpha} = [(\alpha - 1)\delta + a, (1 - \alpha)\delta + a]$.

Portanto, seu conjnto atingível é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t([X_0]^{\alpha}) &= \{x(t, x_0) : x(., x_0) \text{ é solução do problema (4.3.3) com } x_0 \in [X_0]^{\alpha}\} \\ &= \{x_0 e^{\lambda t} : x_0 \in [X_0]^{\alpha}\} \\ &= \{x_0 e^{\lambda t} : x_0 \in [(\alpha - 1)\delta + a, (1 - \alpha)\delta + a]\} \\ &= a x_0 e^{\lambda t} + (1 - \alpha) e^{\lambda t}[-\delta, \delta]. \end{aligned}$$

4.4 Equação diferencial fuzzy via extensão da solução determinística

Estudaremos a solução do PVI fuzzy dado por

$$\begin{cases} x^{'}(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &\in X_0 \end{cases}, \tag{4.4.1}$$

sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e supondo que para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ o PVI determinístico

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}, \tag{4.4.2}$$

possui única solução $x(t, x_0)$. Assim, definimos o operador

$$L_t : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

dado por $L_t(x_0) = x(t, x_0)$. Sendo que L_t é a única solução de (4.4.2) e é contínuo em relação a x_0 [6]. Dessa forma, aplicando o princípio de extensão de zadeh no operador L_t, obtemos

$$\widehat{L}_t : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n).$$

Definição 4.4.1. O operador $\widehat{L}_t$ é definido com a solução de (4.4.1) via princípio de extensão de Zadeh.

Exemplo 4.4.2. Considere o problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} x'(t) &= \lambda x(t) \\ x(0) &\in X_0 \end{cases}, \tag{4.4.3}$$

sendo $X_0 = (a - \delta, a, a + \delta)$ um número fuzzy triangular e $\lambda > 0$.

O operador da solução do PVI determinístico

$$\begin{cases} x'(t) &= \lambda x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases},$$

é dado por $L_t(x_0) = x_0 e^{\lambda t}$.

Assim, aplicando o princípio de extensão de Zadeh no operador L_t e usando o Teorema 3.2.8, obtemos

$$\begin{aligned} [\widehat{L}_t]^\alpha &= L_t([X_0]^\alpha) \\ &= L_t([(\alpha - 1)\delta + a, (1 - \alpha)\delta + a]) \\ &= [L_t((\alpha - 1)\delta + a), L_t((1 - \alpha)\delta + a)] \\ &= a x_0 e^{\lambda t} + (1 - \alpha) x_0 e^{\lambda t}[-\delta, \delta]. \end{aligned}$$

Notemos, neste caso, que $[\widehat{L}_t]^\alpha = \mathcal{A}_t([X_0]^\alpha)$ porém isso nem sempre acontece. Em [19], encontramos o seguinte teorema

Teorema 4.4.3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Suponha que f seja uma função contínua, que para todo $x_0 \in U$ exista solução única $x(., x_0)$ para (4.4.2) e que $x(t, .)$ seja contínua em U. Então, existe $\widehat{L}_t(X_0)$ e é válida a igualdade

$$\widehat{L}_t(X_0) = \mathcal{A}_t(X_0)$$

para todo $t \in [t_0, T]$.

4.5 Modelo de tranferência de assintomático para sintomático com condições iniciais fuzzy linearmente correlacionadas

Voltando ao modelo (4.1.1), as condições iniciais são tais que $x_0 + y_0 = 1$. Como dito anteriormente, vamos supor que as condições iniciais sejam números fuzzy x_0 e y_0 linearmente correlacionados, com distribuição conjunta C. Assim sua função de distribuição de possibilidade conjunta é dada por

$$\mu_C(x_0, y_0) = \mu_{X_0}(x_0)\mathcal{X}_{\{x_0+y_0=1\}}(x_0, y_0), \tag{4.5.1}$$

onde $\mathcal{X}_{\{x_0+y_0=1\}}(x_0, y_0)$ é a função característica da reta $\{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : x_0 + y_0 = 1\}$.

Se $[X_0]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, vem que

$$[C]^\alpha = (x_0, 1 - x_0) \in \mathbb{R}^2 : x_0 = (1 - \gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0, 1]. \tag{4.5.2}$$

Na abordagem aqui proposta, (4.1.1) deve ser substituído pelo seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right) & = & \Big(-\lambda x, \lambda(1 - x)\Big) \\ (x_0, y_0) & \in & C \end{array} \right. . \tag{4.5.3}$$

O significado de (4.5.3) será dado na seção seguinte uma vez que C é fuzzy e o sentido de $(x_0, y_0) \in C$ deve ser dado. Outra forma de resolver o problema (4.5.3) é a fuzzificação do operador $L_t(x_0, y_0) = \Big(x_0 e^{-\lambda t}, 1 - x_0 e^{-\lambda t}\Big)$ (4.1.5) baseada no princípio de extensão de Zadeh Definição 3.2.6. Do ponto de vista teórico, esse método é bem mais simples e a solução produzida por ele será comparada com aquela dada por (4.5.5). Mizuthoshi [20] mostra que através da Definição 3.2.6, sob certas hipóteses, ambas as metodologias produzem a mesma solução.

4.5.1 Solução do modelo fuzzy de transferência de assintomáticos para sintomáticos via inclusão diferencial

Resolver o problema (4.5.3) via inclusão diferencial significa resolver a família de problemas

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) & = & (-\lambda x, \lambda(1 - x)) \\ (x_0, y_0) & \in & [C]^\alpha, \end{array} \right. \tag{4.5.4}$$

para cada $\alpha \in [0, 1]$, onde $[C]^\alpha$ é dado por (4.5.2) [6].

A solução de (4.5.3) é um conjunto fuzzy de funções cujos α-níveis são formados pela família de soluções de (4.5.4). Os conjuntos atingíveis de (4.5.3) são conjuntos fuzzy de $\mathbb{R}$ cujos α-níveis são soluções de (4.5.4) e são dados por

$$\mathcal{A}_t([C]^\alpha) = \{z_\alpha(t, x_0, y_0) : z_\alpha(., x_0, y_0) \text{ é solução de (4.5.4)}\},$$

de maneira que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_t([C]^\alpha) &= \{z_\alpha(t,x_0,y_0) : z'_\alpha(t,x_0,y_0) = (-\lambda x, \lambda(1-x)), \quad (x_0,y_0) \in [C]^\alpha\} \\ &= \left\{\left(x_0e^{-\lambda t}, 1-x_0e^{-\lambda t}\right) : (x_0,y_0) \in [C]^\alpha\right\} \\ &= \left\{\left(x_0e^{-\lambda t}, 1-x_0e^{-\lambda t}\right) : x_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0,1]\right\}.\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

4.5.2 Solução do modelo fuzzy de tranferência de assintomáticos para sintomáticos via extensão da solução determinística

Nossa principal ferramenta será a fuzzificação do operador linear $L_t(.,.)$ dado em (4.1.5), onde $(L_t)_C$ é obtido pela aplicação do princípio de extensão via C na solução determinística do problema (4.1.1). De acordo com o Teorema 3.2.8 temos que $[(L_t)_C(x_0,y_0)]^\alpha = L_t([C]^\alpha)$. Assim, os α-níveis da solução do sistema (4.5.3), para cada $\alpha \in [0,1]$, são

$$\begin{aligned}[(L_t)_C(x_0,y_0)]^\alpha &= L_t([C]^\alpha) = \{L_t(x_0,y_0) : (x_0,y_0) \in [C]^\alpha\} \\ &= \left\{L_t(x_0,1-x_0) : x_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0,1]\right\} \\ &= \left\{\left(x_0e^{-\lambda t}, 1-x_0e^{-\lambda t}\right) : x_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0,1]\right\}.\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Podemos observar que neste caso que os conjuntos (4.5.5) e (4.5.6) são iguais. Portanto, tanto a solução do problema (4.5.3) por inclusões diferenciais, quanto a solução por extensão da solução determinística são iguais. Em [6], esse resultado é demonstrado de maneira geral, sob algumas hipóteses para um sistema mais geral que (4.1.1).

4.5.3 Solução determinística × Solução fuzzy

Até aqui encontramos, para cada t, soluções fuzzy para (4.5.3). A função de pertinência da solução fuzzy $X(t)$ é obtida por ([26])

$$\mu_{X_t}(x) = \sup_{0\le\alpha\le1}\{\alpha \in [0,1] : x \in \mathcal{A}_t([C]^\alpha)\}.$$

Assim, $\mu_{X_t}(x) = \frac{xe^{\lambda t}-b}{x_0-b}$. Para realizar uma correspondência entre a solução fuzzy e a solução determinística, é razoável defuzzificar a solução fuzzy já que assim, para cada t, tem-se um número real. Uma maneira é fazer isso pelo método do centro de gravidade.

Para cada $t \ge 0$, seja μ_{X_t} a função de pertinência da solução fuzzy de (4.5.4), que é dada por (4.5.6). Para simplificar a notação, chamemos de x_t os possíveis valores assumidos por X_t. A curva $\overline{x}(t)$, que é a defuzzificação de X_t, é dada por

$$\overline{x}(t) = \frac{\displaystyle\int_{supp(X_t)} x_t\mu_{X_t}(x_t)dx_t}{\displaystyle\int_{supp(X_t)} \mu_{X_t}(x_t)dx_t}. \tag{4.5.7}$$

Observemos que como $\int_{supp(X_t)} \frac{\mu_{X_t}(x_t)}{\int_{supp(X_t)} \mu_{X_t}(x_t)dx_t} dx_t = 1$, então (4.5.7) pode ser vista como a média ponderada da solução fuzzy .

Exemplo 4.5.1. 1. Para o nosso problema, vamos denotar a solução fuzzy de (4.1.1) por $X_t(X_0) = X_0 e^{-\lambda t}$, e para o número de assintomáticos no instante t, X_0 um número fuzzy triangular cuja a função de pertinência de X_0 é dada por

$$\mu_{X_0}(x_0) = \begin{cases} \frac{x_0 - b}{a - b} & \text{se} \quad b \leq x_0 \leq a \\ \frac{c - x_0}{c - a} & \text{se} \quad a < x_0 \leq c, \\ 0 & \text{se} \quad x_0 \notin [b, c] \end{cases}$$

onde $a, b, c \in [0, 1]$, $a \neq b \neq c$ e $[X_0]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(a - b)\alpha + b, (a - c)\alpha + c]$.

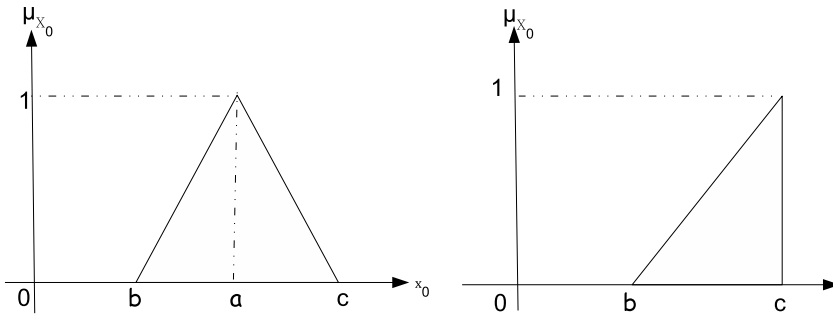


Figura 4.2: Em (a) X_0 como número fuzzy triângular com pertinência máxima em a e em (b) X_0 como número fuzzy triangular com pertinência máxima em c.

Daí,

$$\overline{x}(t) = \int_b^c x_0 e^{-\lambda t} \frac{\mu_{X_0}(x_0)}{\int_b^c \mu_{X_0}(x_0)dx_0} dx_0. \tag{4.5.8}$$

Como

$$\int_b^c \mu_{X_0}(x_0)dx_0 = \frac{c - b}{2}, \tag{4.5.9}$$

temos,

$$\overline{x}(t) = \frac{2}{c - b} \int_b^c x_0 e^{-\lambda t} \mu_{X_0}(x_0)dx_0 = \frac{1}{3}(a + b + c)e^{-\lambda t}. \tag{4.5.10}$$

A função de pertinência de X_t é

$$\mu_{X_t}(x) = \frac{xe^{\lambda t} - b}{x_0 - b}. \tag{4.5.11}$$

Calculando a pertinência da solução determinística na fuzzy em (4.5.11) obtemos $\mu_{X_t}(x) = \frac{x_0 e^{-\lambda t} e^{\lambda t} - b}{x_0 - b} = 1$.

Defuzzificação da solução fuzzy X_t. A Figura 4.3(a) representa a solução fuzzy de (4.5.3), em que x e y são linearmente correlacionadas, e estão sobre a reta $x+y=1$. A seguir, iremos comparar $\overline{x}(t)$ com a solução fuzzy $X_t = X_0 e^{-\lambda t}$, cujos α-níveis são dados por (4.5.6). Para isso, usaremos a desigualdade de Jensen mas antes definiremos função convexa:

Definição 4.5.2. Seja I um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa neste intervalo se para quaisquer x, y neste intevalo temos $f((1-\eta)x + \eta y) \leq (1-\eta)f(x) + \eta f(y)$, sendo $\eta \in [0,1]$.

A Definição 4.5.2 quer dizer que uma função é convexa se qualquer média ponderada entre pontos do domínio resulte em um valor que é no máximo igual à média ponderada dos pontos originais da imagem correspondentes aos pontos do domínio.

Teorema 4.5.3. "Seja f uma função convexa e Y uma variável aleatória, então $E(f(Y))) \geq f(E(Y))$".

Para cada $t > 0$, definimos

$$g_t(x) = xe^{-\lambda t}. \tag{4.5.12}$$

A função $g_t(x)$ é convexa e concâva para todo x. Portanto, a desigualdade de Jensen nos dá $E(g_t(X_0)) = g_t(E(X_0))$, ou seja,

$$E(X_0 e^{-\lambda t}) = \overline{X_0} e^{-\lambda t} \tag{4.5.13}$$

onde $\overline{X_0} = \int \frac{\mu_{X_0}(x_0)}{\int \mu_{X_0}(x_0) dx_0} dx_0$.

Quando defuzzificamos a solução fuzzy, tratada na Figura 4.3(a), encontramos a curva real $\overline{x}(t) = 0.95e^{-0.7t}$, que é solução determinística do sistema (4.1.1). Essa mesma solução tem grau de pertinência 1 na fuzzy e esta encontra-se no centro de cada "segmento fuzzy"para cada $t > 0$.

2. Agora façamos o mesmo estudo para um caso particular de quando $a = c$.

   Seja X_0 o número fuzzy triangular dado como na Figura 4.2(b). Assim,

$$\mu_{X_0}(x_0) = \begin{cases} \frac{x_0 - b}{c - b} & \text{se} \quad b \leq x_0 \leq c \\ 0 & \text{se} \quad x_0 \notin [b, c] \end{cases}$$

   onde $b, c \in [0,1]$, $b \neq c$ e $[X_0]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(c-b)\alpha + b, c]$.

   Daí,

$$\overline{x}(t) = \int_b^c x_0 e^{-\lambda t} \frac{\mu_{X_0}(x_0)}{\int_b^c \mu_{X_0}(x_0) dx_0} dx_0. \tag{4.5.14}$$

Como

$$\int_b^c \mu_{X_0}(x_0)dx_0 = \frac{c-b}{2}, \tag{4.5.15}$$

temos,

$$\overline{x}(t) = \frac{c-b}{2}\int_b^c x_0 e^{-\lambda t}\mu_{X_0}(x_0)dx_0 = \frac{1}{3}(b+2c)e^{-\lambda t}. \tag{4.5.16}$$

Percebemos que para $c = 1$ temos $\frac{2}{3} \leq \frac{1}{3}(b+2c) < 1$, uma vez que o menor valor que b pode assumir é zero.

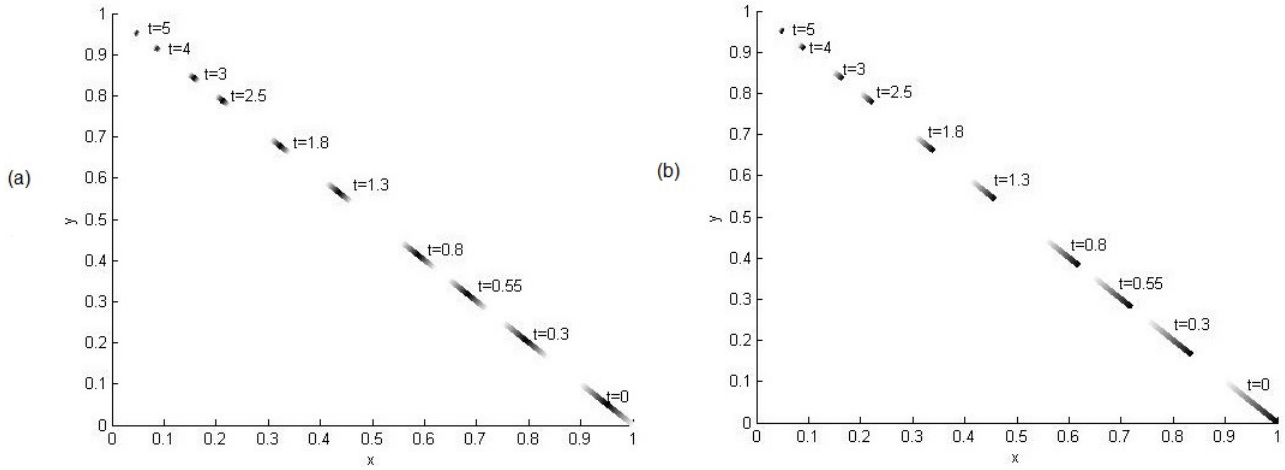


Figura 4.3: (a) Retrato de fase para a solução fuzzy de (4.5.3) quando tomamos $a = 0.95$, $b = 0.9$, $c = 1$ e taxa de transmissão $\lambda = 0.7$. (b)Retrato de fase para a solução fuzzy de (4.5.3) quando tomamos $b = 0.9$, $c = 1$ e taxa de transmissão $\lambda = 0.7$. Para cada $t \geq 0$, em ambas as figuras, regiões mais escuras significam que maior é sua possibilidade (pertinência) à solução do problema, isto é, maior a confiabilidade dos números de assintomático e de sintomático.

Quando defuzzificamos a solução fuzzy tratada na Figura 4.3(b) encontramos a curva real $\overline{x}(t) = 0.96e^{-0.7t}$ que possui grau de pertinência 1 na solução fuzzy. E se notarmos a Figura 4.3(b) vemos que, de fato, as regiões mais escuras, que indicam maior pertinência, se encontram à direita do "segmento fuzzy".

é interessante notar que a adoção de X_0 simétrico produz as "distribuições centradas" para cada t como representada na Figura 4.3(a). Por outro lado, supondo X_0 uma distribuição não simétrica (Figura 4.2(b)) produz "distribuições não simétricas" das soluções, como pode ser visto na 4.3(b).

4.6 Modelo de tranferência de assintomático para sintomático com condição inicial e taxa de conversão linearmente correlacionadas

Do ponto de vista biológico é razoável supor que λ e x_0 estão correlacionados, pois esses dois parâmetros estão intimamente dependentes da carga viral (v) e do nível de $CD4_+$ de cada indivíduo (ver [14]). O parâmetro $CD4_+$ é o mais importante do ponto de vista médico, pois estudos mostram que a contagem da célula de $CD4+$ é o melhor indicador para a resposta terapêutica, uma vez que, quanto maior a quatidade de célula melhor o estado de saúde do paciente [14]. Assim faremos $\lambda = \lambda(CD4)$ e $x_0 = x_0(CD4)$.

Em nosso modelo, consideraremos x_0 e λ números fuzzy (Λ, X_0) correlacionados. Mais especificamente, que são linearmente correlacionados com correlação linear negativa: $\Lambda = qX_0 + r$ em que q é negativo. Assim, o problema (4.1.1) associaremos o sistema aumentado

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{d\lambda}{dt}\right) & = & \Big(-\lambda x, 0\Big) \\ (x(0), \lambda(0)) & = & (x_0, \lambda) \end{array} \right. , \tag{4.6.1}$$

cuja solução é dada por $x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$ e $\lambda(t) = \lambda$, $\forall t \geq 0$.

De maneira análoga ao que foi feito na seção 3, considere o operador para cada t fixo

$$L_t(x_0, \lambda) = \Big(x_0 e^{-\lambda t}, \lambda\Big), \tag{4.6.2}$$

para cada t fixo.

Supondo que x_0 e λ são incertos e modelados por números fuzzy linearmente correlacionadas, X_0 e Λ, então existem $q, r \in \mathbb{R}$ tais que a distribuição de possibilidade conjunta C de X_0 e Λ é dada por

$$\mu_{_C}(x_0, \lambda) = \mu_{X_0}(x_0)\mathcal{X}_{\{qx_0+r=\lambda\}}(x_0, \lambda) = \mu_\Lambda(\lambda)\mathcal{X}_{\{qx_0+r=\lambda\}}(x_0, \lambda), \tag{4.6.3}$$

onde $\mathcal{X}_{\{qx_0+r=\lambda\}}(x_0, \lambda)$ é a função característica da reta $\{(x_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : qx_0 + r = \lambda\}$.

Se $[X_0]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, vem que

$$[C]^\alpha = (x_0, qx_0 + r) \in \mathbb{R}^2 : x_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0, 1]. \tag{4.6.4}$$

Dessa forma o sistema (4.1.1) lida com parâmetros incertos. Nesta abordagem devemos ter (4.6.1) substituído por

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{d\lambda}{dt}\right) & = & \Big(-\lambda x, 0\Big) \\ (x_0, \lambda) & \in & C \end{array} \right. . \tag{4.6.5}$$

4.6.1 Solução do modelo fuzzy de tranferência de assintomáticos para sintomáticos via inclusão diferencial

Resolver o problema (4.6.5) via inclusão diferencial significa resolver o problema

$$\begin{cases} (\frac{dx}{dt}, \frac{d\lambda}{dt}) & = & (-\lambda x, 0) \\ (x_0, \lambda) & \in & [C]^\alpha, \end{cases} \tag{4.6.6}$$

onde $[C]^\alpha$ é dado por (4.6.4).

Os conjuntos atingíveis de (4.6.6) são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t([C]^\alpha) &= \{z_\alpha(t, x_0, \lambda) : z'_\alpha(t, x_0, \lambda) = (-\lambda x, 0), \quad (x_0, \lambda) \in [C]^\alpha\} \\ &= \left\{\left(x_0 e^{-\lambda t}, \lambda\right) : (x_0, \lambda) \in [C]^\alpha\right\} \\ &= \left\{\left(x_0 e^{-(qx_0+r)t}, qx_0 + r\right) : x_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0,1]\right\}. \end{aligned} \tag{4.6.7}$$

4.6.2 Solução do modelo fuzzy de tranferência de assintomáticos para sintomáticos via extensão da solução determinística

Estudaremos o modelo fuzzy (4.6.5) de tranferência de assintomáticos para sintomáticos, onde nós fuzzificaremos o operador linear $L_t(.,.)$ dado em (4.6.2). Como sabemos, para os α-níveis da solução, é válido $[(L_t)_C(X_0, \Lambda)]^\alpha = L_t([C]^\alpha)$. Assim, os α-níveis da solução (4.6.6) são

$$\begin{aligned} [(L_t)_C(X_0, \Lambda)]^\alpha &= L_t([C]^\alpha) = \{L_t(x_0, \lambda) : (x_0, \lambda) \in [C]^\alpha\} \\ &= \left\{L_t(x_0, qx_0 + r) : x_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0,1]\right\} \\ &= \left\{\left(x_0 e^{-(qx_0+r)t}, qx_0 + r\right) : x_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0,1]\right\}. \end{aligned} \tag{4.6.8}$$

Portanto, temos que tanto a solução do problema (4.6.5) por inclusão diferencial quanto por extensão da solução determinística são as mesmas. Como já dito antes, em [6], esse resultado é demonstrado de maneira geral, sob algumas hipóteses para o sistema (4.1.1).

Representando $A = X_0 e^{-\Lambda t}$ como número fuzzy em que $[A]^\alpha = \{x_0 e^{-\lambda t}$ tal que $x_0 \in [X_0]^\alpha$ e $\lambda = qx_0 + r\}$, é interessante lembrar que, para cada $t \geq 0$, as quantidades $\mathcal{A}_t([C]^\alpha)$ são α-níveis dos conjuntos fuzzy $\mathcal{A}_t(A)$ com distribuições de possibilidades conjunta dos números fuzzy $X_0 e^{-\Lambda t}$ e Λ são claramente correlacionados, uma vez que, X_0 e Λ o são. No entanto, tal correlação não é do tipo linear, pois suas distribuições estão sobre a curva parametrizada $\gamma(s) = (se^{-(qs+r)t}, qs + r)$, onde $0 \leq s \leq 1$ para cada t. Na Figura 4.4 estão representadas $\mathcal{A}_t(C)$, que como vimos coincide com $(L_t)_C$, para alguns valores de t.

4.6.3 Solução determinística × Solução fuzzy

Para encontrar uma curva real é necessário fazer a defuzzificação das soluções fuzzy para (4.6.5). Uma maneira é fazer isso pelo método do centro de gravidade. Para cada $t \geq 0$, seja μ_{X_t} a função de pertinência da solução fuzzy de (4.6.5), que é dada por (4.6.8). Para simplificar a notação, chamemos de x_t os possíveis valores assumidos por X_t. A curva $\overline{x}(t)$, que é a defuzzificação de X_t, é dada por

$$\overline{x}(t) = \frac{\displaystyle\int_{supp(X_t)} x_t \mu_{X_t}(x_t) dx_t}{\displaystyle\int_{supp(X_t)} \mu_{X_t}(x_t) dx_t}. \tag{4.6.9}$$

Observemos que como $\displaystyle\int_{supp(X_t)} \frac{\mu_{X_t}(x_t)}{\int_{supp(X_t)} \mu_{X_t}(x_t) dx_t} dx_t = 1$, então (4.6.9) pode ser vista como a média ponderada da solução fuzzy.

Neste problema, temos $X_t = X_0 e^{-(qX_0+r)t}$ em que X_0 é um número fuzzy. Assim,

$$\overline{x}(t) = E(X_t) = \int x_0 e^{-(qx_0+r)t} \frac{\mu_{X_0}(x_0)}{\int_b^c \mu_{X_0}(x_0) dx_0} dx_0, \tag{4.6.10}$$

pois $\int \frac{\mu_{X_0}(x_0)}{\int \mu_{X_0}(x_0) dx_0} dx_0$ é a densidade de X_0.

A seguir, iremos comparar $\overline{x}(t)$ com a solução fuzzy $X_t = X_0 e^{-(qX_0+r)t}$. Para isso, usaremos o Teorema 4.5.3. Deste modo, para cada $t > 0$, definamos a função

$$g_t(x) = x e^{-(qx+r)t}. \tag{4.6.11}$$

Pela desigualdade de Jensen (Teorema 4.5.3), como $g_t(x)$ é convexa para todo x, temos

$$\overline{x}(t) = E(X_t) = E(g_t(X_0)) \geq g_t(E(X_0)) = g_t(\overline{X_0}). \tag{4.6.12}$$

sendo $\overline{X_0} = \int \frac{x_0 \mu_{X_0}(x_0)}{\int \mu_{X_0}(x_0) dx_0} dx_0$. Note que $g_t(\overline{X_0}) = \overline{X_0} e^{-(q\overline{X_0}+r)t}$ é a solução determinística.

Concluímos dessa forma que a solução determinística sub-avalia o número médio de indivíduos assintomáticos.

Exemplo 4.6.1. Para o nosso problema, temos $X_t(X_0) = X_0 e^{-(qX_0+r)t}$, e X_0 um número fuzzy triangular cuja a função de pertinência de X_0 é dada como na Figura 4.2(a). Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{x}(t) &= \int_b^c \frac{x_0 e^{-(qX_0+r)t} \mu_{X_0}(x_0)}{\int_b^c \mu_{X_0}(x_0)} dx_0 = \frac{2}{c-b} \int_b^c x_0 e^{-(qx_0+r)t} \mu_{X_0}(x_0) dx_0 \\
&= \frac{2e^{-((a+b)q+r)t}(e^{aqt}(2+bqt) + e^{bqt}(-2+qt(-2a+b+a(b-a)qt)))}{(c-b)(a-b)(qt)^3} \\
&+ \frac{2e^{-((a+c)q+r)t}(-e^{aqt}(2+cqt) + e^{cqt}(2+qt(2a-c+a(a-c)qt)))}{(c-b)(a-c)(qt)^3}.
\end{aligned} \tag{4.6.13}$$

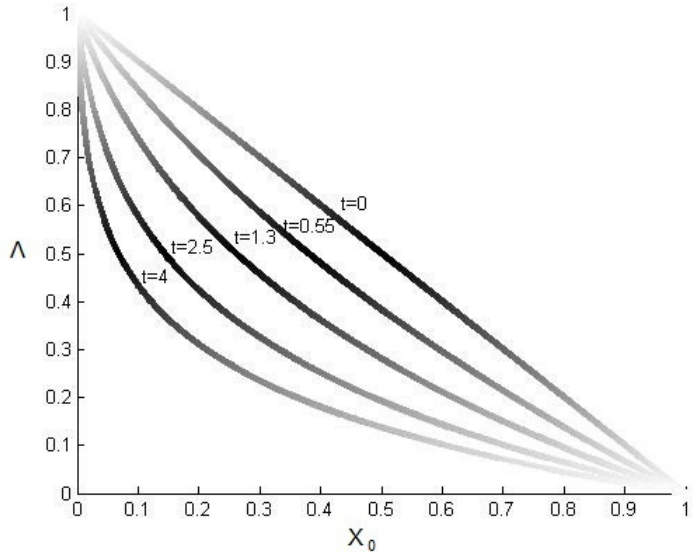


Figura 4.4: O gráfico de $[(L_t)_C(X_0, \Lambda)]^\alpha$ para diferentes valores do tempo. Em $X_t = X_0 e^{-(qX_0+r)t}$ admitimos X_0 como na Figura 4.2(a) onde $a = 0.5$, $b = 0$ e $c = 1$ e tomamos $q = -1$ e $r = 1$.

Fazendo $\lim_{a\to c} \overline{x}(t)$ e depois de $\lim_{b\to c} \overline{x}(t)$ obtemos $ce^{-(cq+r)t}$ que é a solução determinística de (4.1.1) para o caso em que λ e x_0 estão sobre a reta $\lambda = qx_0 + r$.

O fato dos conjuntos X_0 e Λ serem completamente correlacionados faz com que o gráfico seja unidimensional para cada $\alpha \in [0, 1]$.

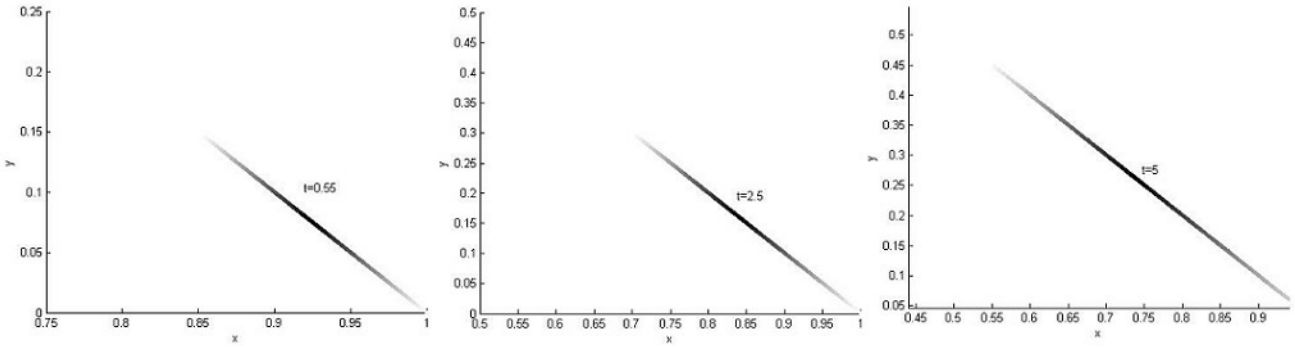


Figura 4.5: Retrato de fase para a solução fuzzy (4.1.1) quando tomamos $a = 0.95$, $b = 0.9$, $c = 1$, $q = -1$ e $r = 1$. Para cada $t \geq 0$, regiões mais escuras significa que maior é sua possibilidade (pertinência) à solução do problema, isto é, maior a confiabilidade dos números de assintomático e de sintomático.

Quando defuzzificamos a solução fuzzy tratada na Figura 4.5 encontramos a curva real $\overline{x}(t) = \frac{1}{t^3}e^{-0.2t}(7.1\times10^{-14}e^{0.15t}(-1.07\times10^{16}+t)(-2.1+t)+e^{0.1t}(-800+360t)+e^{0.2t}(400t-800))$ e para os valores de t dados na Figura 4.5 temos, $\overline{x}(0.55) = 0.92$, $\overline{x}(2.5) = 0.84$ e $\overline{x}(5) = 0.74$. é importante

notar que as regiões mais escuras encontram-se na parte central de cada “segmento fuzzy", onde também escontram os valores de $\overline{x}(t)$, devido à escolha da distribuição de X_0.

Na Figura 4.5, é importante observar que à medida que t aumenta, as distribuições do número de assintomático (x) diminui enquanto o de sintomático (y) aumenta, e ambos estão sobre a reta $x + y = 1$. Isto está em concordância com o fato observado inicialmente (Ver Figura 4.1).

4.7 Condição inicial e taxa de transferência dependentes do $CD4+$

Como dito antes, a contagem das células $CD4+$ é o principal indicativo para a resposta terapêutica. Em [14], vemos que o $CD4+$ por mililitro do sangue periférico pode ser divido, didaticamente, em quatro faixas

- $CD4+ > 0.5$ cél/ml: Estágio de infecção com HIV é de baixo risco.
- $CD4+$ entre 0.2 e 0.5 cél/ml: Estágio com risco moderado.
- $CD4+ < 0.05$ cél/ml: Estágio com alto risco.

Assim, denotaremos a quantidade de $CD4+$ no sangue no instante t por C, onde C pode ser vista como uma variável linguística. Cada classificação é modelada por um número fuzzy cuja função de pertinência e dada por

- Para C Baixo:

$$\mu_C(c) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad c = 0 \\ \frac{c_{min} - c}{c_{min}} & \text{se} \quad 0 < c \leq c_{min} \end{cases}$$

- Para C Médio:

$$\mu_C(c) = \begin{cases} \frac{c - c_{min}}{\overline{c} - c_{min}} & \text{se} \quad c_{min} \leq c \leq \overline{c} \\ \frac{c_M - c}{c_M - \overline{c}} & \text{se} \quad \overline{c} \leq c \leq c_M \end{cases}$$

  onde $\overline{c}$ é o valor central.

- Para C Alto:

$$\mu_C(c) = \begin{cases} \frac{c - c_M}{c_{max} - c_M} & \text{se} \quad c_M \leq c \leq c_{max}, \\ 1 & \text{se} \quad c > c_{max} \end{cases}$$

Dessa forma faremos $\lambda = \lambda(C)$ e $x_0 = x_0(C)$. Assim, sejam as funções de pertinência de λ e x_0 dadas, respectivamente, por

$$\mu_\lambda(c) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad c < c_{min} \\ \frac{c_M - c}{c_M - c_{min}} & \text{se} \quad c_{min} \leq c \leq c_M, \\ 0 & \text{se} \quad c_M < c \leq c_{max} \end{cases}$$

$$\mu_{X_0}(c) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad c < c_{min} \\ \frac{c - c_{min}}{c_M - c_{min}} & \text{se} \quad c_{min} \leq c \leq c_M, \\ 1 & \text{se} \quad c_M < c \leq c_{max} \end{cases}$$

onde c_{min} representa o menor nível de C na qual a chance do indivíduo se tornar sintomático é máxima, c_M representa o nível de C na qual a chance de se tornar sintomático é minima e c_{max} é o maior nível de C possível.

Para podermos comparar a solução fuzzy e a solução determinística é necessário fazermos a defuzzificação da solução fuzzy. Usaremos então (4.6.9) que é exatamente a esperança matemática da variável aleatória X_t. Desde que λ e x_0 correlacionados e dependentes do nível de $CD4+$, temos

Para C Baixo:

$$\overline{x}(t) \quad = \quad \frac{2}{c_{min}} \int_{c_{min}}^{0} 0e^{-t}\mu_{C_t}(c)dc = 0. \tag{4.7.1}$$

Para C Alto:

$$\overline{x}(t) \quad = \quad \frac{2}{(c_{max} - c_M)} \int_{c_{max}}^{c_M} 1e^{-0t}\mu_{C_t}(c)dc = 1. \tag{4.7.2}$$

Para C Médio:

$$\begin{aligned} \overline{x}(t) \quad &= \quad \int_{c_{min}}^{c_M} \left(\frac{c - c_{min}}{c_M - c_{min}}\right) e^{-(\frac{c_M - c}{c_M - c_{min}})t} \frac{\mu_{C_t}(c)}{\int_{c_{min}}^{c_M} \mu_{C_t}(c)dc} dc \\ &= \quad \frac{2}{t^3}\Big[\frac{-2(c_{min} - c_M)^2 e^{-t}}{(c_{min} - c_M)^2} \\ &- \quad \frac{e^{(\frac{c_M - \overline{c}}{c_{min} - c_M})t}(2(c_{min} - c_M)^2 - 2(c_{min} - \overline{c})(c_{min} - c_M)t + (c_{min} - \overline{c})^2 t^2)}{(c_{min} - c_M)^2} \\ &- \quad \frac{-(c_{min} - c_M)^2(t-2)}{(\overline{c} - c_M)^2} \\ &+ \quad \frac{e^{(\frac{c_M - \overline{c}}{c_{min} - c_M})t}(-2(c_{min} - c_M)^2 + (c_{min} - c_M)(c_{min} - 2\overline{c} + c_M)t + (c_{min} - \overline{c})(\overline{c} - c_M)t^2)}{(\overline{c} - c_M)^2}\Big]. \end{aligned} \tag{4.7.3}$$

A seguir iremos comparar $\overline{x}(t)$ com a solução fuzzy $X_t = \left(\frac{c - c_{min}}{c_M - c_{min}}\right) e^{-(\frac{c_M - c}{c_M - c_{min}})t}$. Para isso usaremos o Teorema 4.5.3. Para cada $t > 0$, definamos a função $g_t(c) = \left(\frac{c - c_{min}}{c_M - c_{min}}\right) e^{-(\frac{c_M - c}{c_M - c_{min}})t}$. Como $g_t(c)$ é convexa para todo $c > \frac{-2c_M + c_{min}(2+t)}{t}$, pela desigualdade de Jensen, temos

$$\overline{x}(t) = E(X_t) = E(g_t(c)) \geq g_t(E(c)) = g_t(\overline{C}) \tag{4.7.4}$$

onde $\overline{C} = \int \frac{\mu_{C_t}(c)}{\int \mu_{C_t}(c)dc} dc$. Chegamos a conclusão de que a solução determinística sub-avalia o número médio de indivíduos assintomáticos.

4.8 Resumo

Neste capítulo tratamos de equações diferenciais fuzzy com duas aboradagens : Inclusão diferencial e fuzzificação da solução determinística (para outras abordagens ver [3]). Estudamos o modelo de tranferência de indivíduos assintomáticos para sintomáticos com interatividade nas condições iniciais fuzzy e também com interatividade na taxa λ e na condição incial fuzzy. Consideramos que as condições iniciais das populações envolvidas são linearmente correlacionadas. Assim, resolvemos um sistema de equações diferenciais fuzzy através de dois métodos distintos, teoria de inclusão diferencial e "fuzzificação" ou extensão da solução determinística. Concluímos que ambos os métodos nos dão o mesmo conjunto solução e dessa forma, a solução determinística é um caso particular da solução fuzzy, uma vez que, no caso clássico para todo $t \geq 0$ o par de solução $(x(t), y(t))$ encontra se na reta $x + y = 1$ e, no caso fuzzy, para todo $t \geq 0$ as distribuições de possibilidades para x e y também se encontram sobre a reta $x + y = 1$. Analisamos a esperança matemática da variável aleatória X_t e comparamos com a solução determinística, no primeiro caso, onde as condições iniciais são fuzzy linearmente correlacionadas percebemos que são iguais. Já no segundo caso, onde a taxa λ e a condição inicial são fuzzy e correlacionadas notamos que a solução determinística sub-avalia o número médio de indivíduos assintomáticos.

Capítulo 5

O Uso de t-normas em modelos matemáticos presa-predador e epidemiológicos

Vamos apresentar neste capítulo alternativas para modelar a interação presa-predador e evolução de doenças entre indivíduos. Estamos habituados a fazê-lo de acordo com a lei de ação de massas, que diz que o encontro entre duas substâncias é proporcional ao produto de suas concentrações. Dessa forma, lembrando que o produto é um tipo particular de t-norma, vamos investigar o uso de outras t-normas para modelar problemas de dinâmica de populações e evolução de doenças, já que as t-normas possuem o mesmo comportamento qualitativo em relação à operação produto. A seção 5.2, trata de modelos do tipo presa predador de Lotka-Volterra enquanto na seção 5.3 trata de modelos de evolução de doenças (modelos de epidemiologia).

5.1 Introdução

O modelo clássico de dinâmica de iteração entre duas espécies de Lotka-Volterra utiliza a hipótese de que a taxa de predação está relacionada com a probabilidade de um predador encontrar uma presa. Abaixo segue o modelo [5, 10, 21];

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy \end{cases}, \tag{5.1.1}$$

sendo x, y o número (ou densidade) de presas e predadores, respectivamente; $a > 0$ a taxa de crescimento de presas, $c > 0$ a taxa de mortalidade de predadores, $b > 0$ a proporção de sucesso dos ataques dos predadores e $d > 0$ a taxa de conversão de biomassa das presas em predadores.

Neste modelo está implícito (em bxy e dxy) que o produto entre as quantidades x e y é proporcional à probabilidade da realização de um encontro entre uma presa e um predador, supondo que ambas as espécies estão uniformemente distribuídas em seu habitat. De outra forma: a taxa de encontros é devida a modelo de ação de massas, que no contexto original da fisico-química, afirma

que a taxa de colisões moleculares de duas substâncias químicas é proporcional ao produto das suas concentrações [10].

Por outro lado, em [17], vemos que se o habitat onde as presas e predadores convivem é pequeno, a predação acontece rapidamente desde que haja presas suficiente. Assim, se o número de presas é maior do que o de predadores, a taxa de predação será predominantemente, determinada pelo número de predadores. Em situação contrária, se houver mais predadores do que presas essa taxa será proporcional ao número de presas. Em ambos os casos, a taxa de predação é proporcional ao mínimo entre presas e predadores. Essas observações servirão de base para sugerir t-normas, diferentes do produto, a qual é a inicialmente usada para designar matematicamente a interação entre indivíduos.

5.2 Um modelo presa-predador

Para um sistema ser considerado interação do tipo presa-predador, ele deve satisfazer as seguintes hipóteses [10]:

h1. Para sobreviver, os predadores dependem da presença de presas;

h2. A taxa de predação depende da probabilidade em que uma presa interage com um predador;

h3. A taxa de crescimento da população de predadores é proporcional a ingestão de alimentos (taxa de predação).

Ou seja, a interação entre a presa e o predador é favorável para o predador e prejudicial para a presa.

é fácil ver que o modelo clássico do tipo presa-predador entre duas espécies de Lotka-Volterra, dado pelo sistema (5.1.1), satisfaz as hipóteses acima. A seguir apresentaremos um estudo da dinâmica desse modelo.

Estudo do modelo presa-predador de Lotka-Volterra.

Os pontos de equilíbrio de (5.1.1) são dados em $(x, y) = (0, 0)$ e $(x, y) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. O que faremos a seguir é a linearização sobre os pontos singulares, pois assim determinamos o tipo de singularidade e a estabilidade dos estados estacionários. Na vizinhança do ponto $P = (0, 0)$, obtemos o sistema linearizado

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= au \\ \frac{dv}{dt} &= -cv \end{cases} . \tag{5.2.1}$$

A partir dos autovalores do Jacobiano no ponto P, concluímos que P é um ponto de sela instável, pois seus autovalores tem sinais opostos.

Já na vizinhança do ponto $Q = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ pela mudança de variável

$$\begin{cases} x &= u + \frac{c}{d} \\ y &= v + \frac{a}{b} \end{cases} , \tag{5.2.2}$$

obtemos o seguinte sistema linearizado

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{du}{dt} & = & \frac{-bc}{d}v \\ \frac{dv}{dt} & = & \frac{ad}{b}u \end{array} \right. , \tag{5.2.3}$$

e, a partir do estudo dos autovalores do Jacobiano, concluímos que Q é um ponto de centro, pois seus autovalores são números imaginários puros.

Assim, obtemos que suas curvas-soluções no plano uv são dadas por

$$\frac{dv}{du} = \frac{ad}{b}u^2 + \frac{bc}{d}v^2 = K \tag{5.2.4}$$

sendo K uma constante arbitrária. As curvas são elipses concêntricas de centro Q para cada valor de K.

Como os autovalores de (5.2.3) são imaginários puros nada poderíamos afirmar sobre a estabilidade do ponto Q no sistema não linear, porém este empecilho pode ser resolvido, uma vez que a equação do plano de fase do modelo (5.1.1) é separável ($(x, y) \neq (0, 0)$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - dy)}$$

e as soluções são dadas implicitamente por

$$a \ln y - by = -c \ln x + dx + \ln k_1 \tag{5.2.5}$$

sendo $k_1 > 0$.

Como o gráfico da função que satisfaz a equação (5.2.5) é uma curva fechada, quando o desvio do ponto crítico $Q = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ é pequeno, as órbitas são famílias de elipses dadas por (5.2.4). As soluções analíticas de (5.2.3) são obtidas por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d^2u}{dt^2} & = & \frac{-bc}{d}\frac{ad}{b}u \\ \frac{d^2v}{dt^2} & = & \frac{ad}{b}\frac{-bc}{d}v \end{array} \right. . \tag{5.2.6}$$

As soluções de (5.2.6) são

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(t) & = & k\frac{c}{d}\cos\left(\sqrt{ac}t + \theta\right) \\ v(t) & = & k\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c}{a}}\sin\left(\sqrt{ac}t + \theta\right) \end{array} \right. , \tag{5.2.7}$$

sendo k e θ determinadas pelas condições iniciais.

Reescrevendo as soluções nas variáveis x e y

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \frac{c}{d} + k\frac{c}{d}\cos\left(\sqrt{ac}t + \theta\right) \\ y(t) & = & \frac{a}{b} + k\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c}{a}}\sin\left(\sqrt{ac}t + \theta\right) \end{array} \right. . \tag{5.2.8}$$

Para pequenas variações na vizinhança do ponto $Q = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$, concluímos que o tamanho das populações de presas e predadores varia periodicamente com período $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}$ (independente da

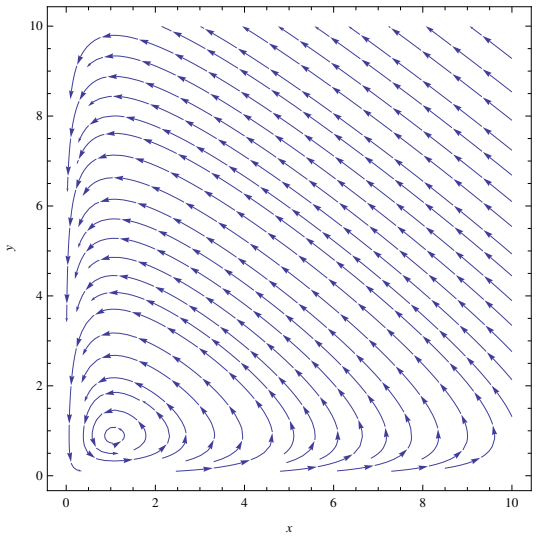


Figura 5.1: Plano de fase do modelo (5.1.1) sendo $a = 0.08$, $b = 0.09$, $c = 0.075$ e $d = 0.07$.

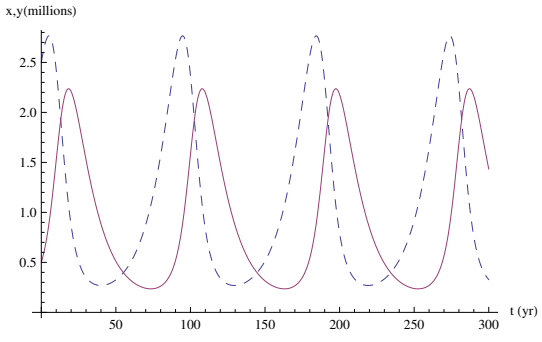


Figura 5.2: Solução x, y (milhões) por tempo t (anos), sendo a curva x em tracejado as presas.

condição inicial). As populações estão defasadas em $\frac{1}{4}$ de ciclo e a amplitude das oscilações para as presas é $k\frac{c}{d}$ e para os predadores é $k\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c}{a}}$ (dependendo das condições iniciais e parâmetros) [5].

Percebemos esses resultados nas Figuras 5.1 e 5.2.

O modelo Lotka-Volterra é muito útil para testar um conjunto de hipóteses e assim identificar estabilidade e instabilidade. Porém, as soluções não são estruturalmente estáveis, ou seja, dada uma condição inicial teremos uma trajetória fechada passando por esse ponto. Daí qualquer pertubação pequena neste ponto terá uma solução sobre outra trajetória que não se aproxima em todos os pontos da trajetória original. Assim, uma pequena perturbação pode ter um efeito muito marcado, pelo menos sobre a amplitude da oscilação, vindo de encontro com observações empíricas nestes ecossistemas.Há muitas aplicações úteis, todavia, as tentativas de aplicar o modelo de Lotka-Volterra a fenômenos oscilatórios realísticos falharam em virtude da instabilidade estrutural do sistema.

A seguir apresentaremos outro modelo interação do tipo presa-predador.

Modelo Holling Tunner.

Outro modelo de interação presa-predador é o apresentado por Holling Tunner, cujo sistema é dado por [25]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{mxy}{D+x} \\ \frac{dy}{dt} &= sy\left(1-\frac{yh}{x}\right) \end{cases}, \tag{5.2.9}$$

sendo:

- a capacidade de suporte da população de presas na ausência de predadores dada por K;

- que a taxa de ataque ($\frac{mxy}{D+x}$) cresce em relação a quantidade de presas, se aproximando de um limiar estacionário;
- a capacidade suporte da população de predadores é proporcional ao tamanho da população de presas ($\frac{x}{h}$);
- o número máximo de presas que podem ser capturadas por um predador em cada unidade de tempo é m;
- o número necessário de presas para se atingir metade da taxa máxima m é D;
- a medida da qualidade alimentícia proporcionada pela presa para conversão em nascimento de predadores é h;
- a população de presas cresce a uma taxa intrínseca r e a população de predadores a uma taxa intrínseca s.

O modelo (5.2.9) satisfaz todas as hipóteses para ser considerado interação presa-predador, pois em $\frac{dy}{dt}$ não podemos ter $x = 0$, ou seja, os predadores precisam das presas para sobreviver, valendo $h1$. As hipóteses $h2$ e $h3$ seguem trivialmente.

A seguir, faremos um breve resumo sobre a estabilidade de (5.2.9).

Estabilidade e equilíbrio do modelo de Holling-Tunner.

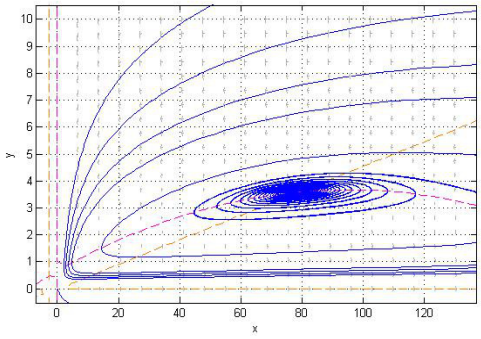


Figura 5.3: Plano de fase do modelo (5.2.9), sendo $r = 2$, $K = 200$, $m = 30$, $D = 10$, $s = 0.3$, $h = 22$.

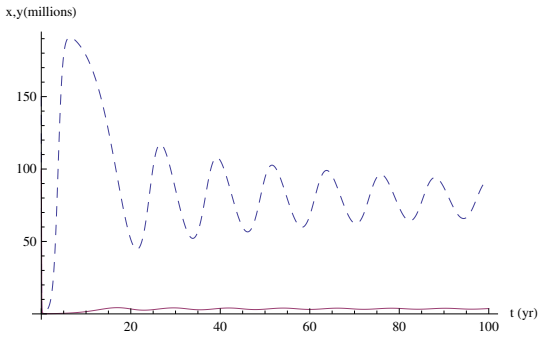


Figura 5.4: Solução x, y (milhões) por tempo t (anos), sendo $r = 2$, $K = 200$, $m = 30$, $D = 10$, $s = 0.3$, $h = 22$ e a curva em tracejado as presas.

O resumo do estudo da estabilidade do modelo (5.2.9) pode ser dado através das isóclinas

$$y = \frac{r}{m}(D + x)(1 - \frac{x}{K}) \quad \text{e} \quad y = \frac{x}{h},$$

que são obtidas por

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ e } \frac{dy}{dt} = 0.$$

Para simplificar as contas vamos dividir as variáveis x e y e as constantes K e D pelo valor de x no ponto critíco. Assim, obtemos o seguinte ponto de equilíbrio $(\overline{x}, \overline{y}) = (1, rm^{-1}(1 - K^{-1})(1 + D))$ [25]. Na Figura 5.3, vemos que o ponto critíco é foco de um ciclo limite.

Note que o modelo (5.2.9) faz considerações sobre o efeito de predação diferentemente do modelo (5.1.1). Isso se reflete nas Figuras 5.3 e 5.4. Como vemos na Figura 5.3 a solução de (5.2.9) se aproxima do ponto crítico diferente do que vemos na Figura 5.1 onde as soluções de (5.1.1) são elípses concêntricas. Notamos também que o (5.2.9) favorece as presas e no modelo (5.1.1) os indíviduos estão em harmonia.

Como vimos até agora, há diversas formas de modelar a interação entre duas espécies. No modelo (5.1.1) temos a interação modelada pelo produto entre x e y, já no modelo (5.2.9) a interação é dada pelas parcelas $\frac{mxy}{D+x}$ e $\frac{sy^2h}{x}$. O mais habitual é modelarmos interações com o produto. Essa ideia vem da modelo de ação de massas, que nos diz que a taxa de encontro entre duas substâncias é proporcional ao produto de suas concentrações. Queremos aqui chamar atenção para o uso de t-normas na modelagem de interação entre espécies, uma vez que, o produto é um tipo de t-norma e o comportamento qualitativo entre as t-normas são os mesmos. Veremos essa nova abordagem na seção a seguir, onde consideraremos a intereção entre espécies dada pela t-norma do mínimo.

5.2.1 Presa-predador de Lotka-Volterra com a t-norma do mínimo

Lembrando que a operação produto é um caso particular de t-normas, neste trabalho faremos uso destas para modelar a interação entre as espécies envolvidas. Além da t-norma do produto ($T_1(x, y) = xy$), faremos uso de outras como por exemplo, $T_2(x, y) = \min\{x, y\}$ e $T_3(x, y) = \frac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)}$. Inicialmente vamos adotar a $t-$norma do mínimo $T_2(x, y)$, que denotaremos por $\wedge$, na interação entre as espécies ao invés do produto como visto em (5.1.1).

Em [17], é sugerido que se o habitat onde as presas e predadores convivem é pequeno, a predação acontece rapidamente desde que haja presas suficiente. Assim, se o número de presas é maior do que o de predadores, a taxa de predação será predominantemente, determinada pelo número de predadores. Em situação contrária, se houver mais predadores do que presas essa taxa será proporcional ao número de presas. Em ambos os casos, a taxa de predação é proporcional ao mínimo entre presas e predadores. Assim,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= ax - b(x \wedge y) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + d(x \wedge y) \end{cases}. \tag{5.2.10}$$

O modelo (5.2.10) satisfaz as hipóteses $h1$, $h2$ e $h3$, pois os predadores precisam das presas para sobreviver e a taxa de predação depende da interação entre eles (que nesse caso é dado pelo minímo). O ponto $(x, y) = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio do sistema, analizando a matriz do Jacobiano de (5.2.10), obtemos que:

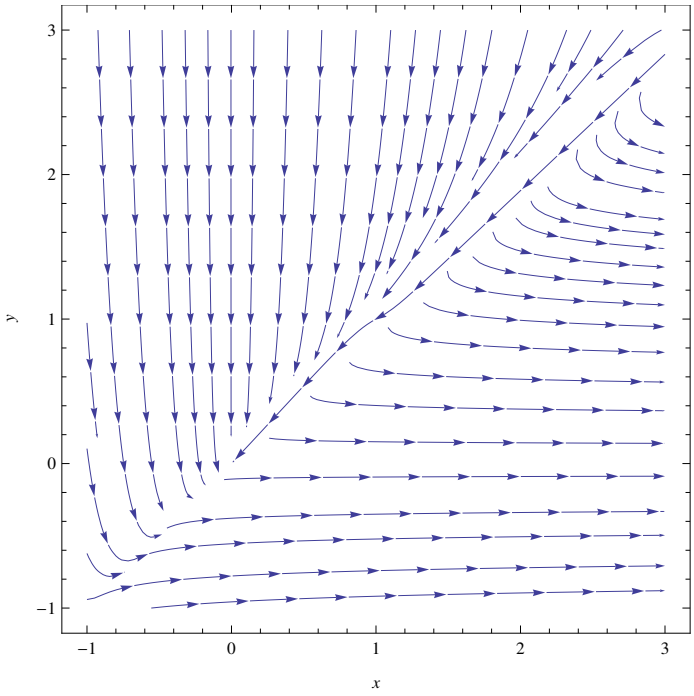


Figura 5.5: Plano de fase do modelo 5.2.10, sendo $a = 0.08,\ b = 0.09,\ c = 0.075$ e $d = 0.07$.

- para $x > y$ os autovalores são $a > 0$ e $d - c$, ou seja, o ponto $(0, 0)$ é nó instável se $d - c > 0$ e ponto de sela se $d - c < 0$.
- para $x < y$ os autovalores são $c > 0$ e $a - b$, ou seja, o ponto $(0, 0)$ é nó instável se $a - b > 0$ e ponto de sela se $a - b < 0$.

Na Figura 5.5 o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela para (5.2.10), assim como é em (5.1.1). O modelo (5.2.10) é baseado na t-norma do mínimo, pois diferentemente da t-norma nossa população não está apenas entre zero e um.

A seguir faremos uso da t-norma de Hamacher para modelarmos a interação entre as espécies.

5.2.2 Presa-predador de Lotka-Volterra com a t-norma de Hamacher

A t- norma de Hamacher é dada por

$$T_3(x, y) = \frac{xy}{p + (1 - p)(x + y - xy)}, \tag{5.2.11}$$

[16, 24], para $p \neq 0$ temos $x, y \in [0, 1]$ (se $p = 0$, $x, y \neq 0$).

Dessa forma, substituindo o produto entre xy por (5.2.11) em (5.1.1), obtemos o seguinte modelo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= ax - \frac{bxy}{p+(1-p)(x+y-xy)} \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \frac{dxy}{p+(1-p)(x+y-xy)} \end{cases}, \tag{5.2.12}$$

sendo a, b, c e d como em (5.1.1).

O modelo (5.2.12) é baseado na t-norma de Hamacher. Dizemos baseado na t-norma, pois x e y podem assumir valores maiores que 1 no modelo (5.2.12). Assim, x e y não estão somente entre zero e um, fazendo com que a população varie (consideramos morte e nascimento), ou seja, $x(t) + y(t) \neq 1$. O modelo (5.2.12) satisfaz todas as hipóteses $(h1 - h3)$ de um sistema presa-predador, os predadores precisam das presas para sobreviver, a taxa de predação é proporcional à interação (aqui dado por (5.2.11)) entre os indivíduos e o crescimento dos predadores é proporcional a taxa de predação.

Note que quando $p = 0$ em (5.2.11), temos o quociente $\frac{T_P}{S_P}$, sendo S_P dual de T_P.

Análise do modelo

Para alguns valores de p, obtemos as soluções ilustradas nas Figuras 5.6 a 5.9.

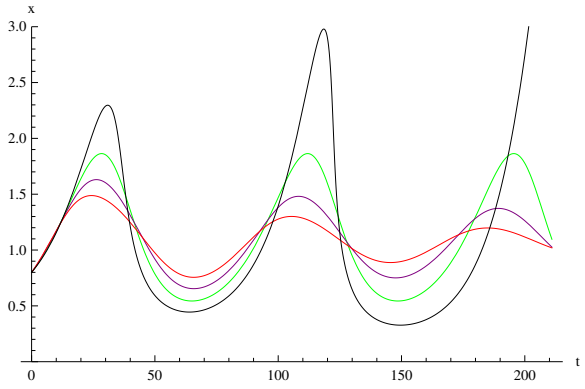


Figura 5.6: Solução x por tempo t, sendo $a = 0.08$, $b = 0.09$, $c = 0.075$ e $d = 0.07$. A curva em preto $(p = 0.5)$, verde$(p = 1)$, roxo $(p = 1.5)$ e vermelho $(p = 2)$.

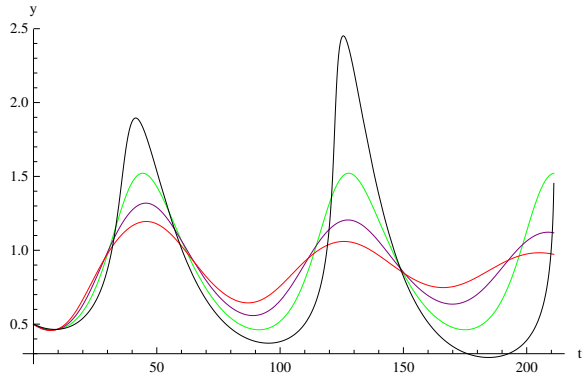


Figura 5.7: Solução y por tempo t, sendo $a = 0.08$, $b = 0.09$, $c = 0.075$ e $d = 0.07$. A curva em preto $(p = 0.5)$, verde$(p = 1)$, roxo $(p = 1.5)$ e vermelho $(p = 2)$.

Fazendo $\frac{dx}{dt} = 0$ e $\frac{dy}{dt} = 0$, obtemos, para $(x, y) \neq (0, 0)$, as isóclinas

$$y_1 = \frac{a(p(x-1) - x)}{-b + a(1 + p(x-1) - x)}$$

e

$$y_2 = \frac{c(p(x-1) - x) + dx}{c(p-1)(x-1)}.$$

Dessa forma, para os parâmetros $a = 0.08$, $b = 0.09$, $c = 0.075$ e $d = 0.07$, temos os seguintes pontos de equilíbrios

$$\overline{x}_{1,2} = \frac{-0.54 + 1.1p}{p-1} \pm 0.004\sqrt{\frac{14641 + 706p + 529p^2}{(p-1)^2}}$$

e

$$(\overline{x}_3, \overline{y}_3) = (0, 0).$$

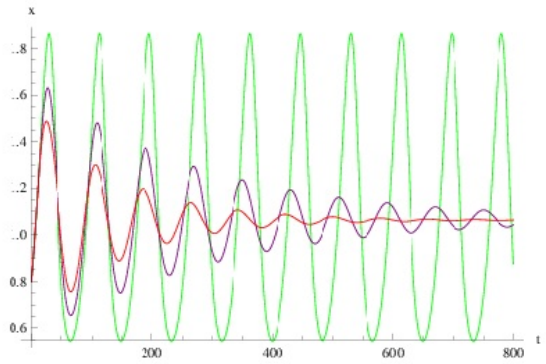


Figura 5.8: Solução x por tempo t, sendo $a = 0.08$, $b = 0.09$, $c = 0.075$ e $d = 0.07$. A curva em verde($p = 1$), roxo ($p = 1.5$) e vermelho ($p = 2$).

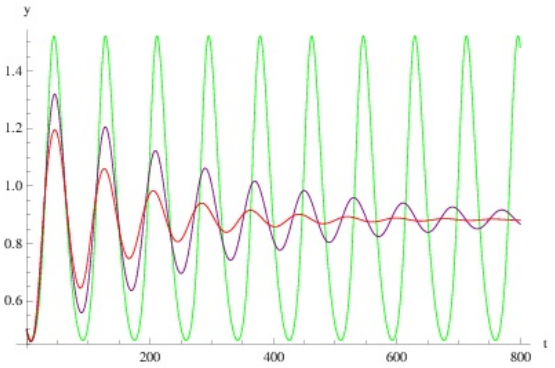


Figura 5.9: Solução y por tempo t, sendo $a = 0.08$, $b = 0.09$, $c = 0.075$ e $d = 0.07$. A curva em verde($p = 1$), roxo ($p = 1.5$) e vermelho ($p = 2$).

p	$(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$	$(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$	$(\overline{x}_3, \overline{y}_3)$
0	(1.08,0.896)		
0.3	(-0.479,-0.397)	(0,0)	(1.077,0.894)
0.5	(-1.12,0.942)	(0,0)	(1.075,0.892)
0.7	(-2.618,-2.172)	(0,0)	(1.074,0.891)
1	(0,0)	(1.071,0.889)	
1.5	(0,0)	(1.067,0.885)	(3.38,2.81)
2	(0,0)	(1.063,0.882)	(2.266,1.88)
100	(0,0)	(1.003,0.832)	(1.212,1.006)
1000	(0,0)	(1.000,0.829)	(1.206,1.000)

Tabela 5.1: Pontos de equilíbrio de (5.2.12) para diversos valores de p, sendo $a = 0.08$, $b = 0.09$, $c = 0.075$ e $d = 0.07$.

A matriz Jacobiana é dada por

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{b(1-p)x(1-y)y}{(p+(1-p)(x+y-xy))^2} & \dfrac{b(1-p)(1-x)xy}{(p+(1-p)(x+y-xy))^2} - \dfrac{bc}{d} \\ -\dfrac{d(1-p)x(1-y)y}{(p+(1-p)(x+y-xy))^2} + \dfrac{ad}{b} & -\dfrac{d(1-p)(1-x)xy}{(p+(1-p)(x+y-xy))^2} \end{pmatrix} \tag{5.2.13}$$

Na Tabela 5.1 estão os pontos de equilíbrio para diversos valores de p.

Percebemos que para $p = 0.5$, conforme o tempo aumenta os picos das soluções também aumentam em relação as demais, isso tanto para as presas quanto para os predadores, seguido pelos picos das soluções com $p = 1$, (t-norma do produto), $p = 1.5$ e $p = 2$. Entre um pico e outro a ordem das curvas invertem, ou seja, quanto mais as presas crescem, maior será a sua oferta para os predadores. Nas Figuras 5.8 e 5.9, para $p > 1$, conforme o tempo avança a diferença entre os

picos da soluções diminuem caminhando para um ponto de equilíbrio, diferente do caso com $p = 1$ onde temos uma curva periódica.

As Tabelas 5.2 e 5.3 nos dá ideia melhor do comportamento de cada solução para diversos valores de p.

$p = 0$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 1.5$	$p = 2$
x(30)=2.87378	x(30)=2.28914	x(30)= 1.85256	x(30)=1.60247	x(30)= 1.44909
	x(70)=0.464343	x(70)= 0.562907	x(70)=0.669699	x(70)=0.77085
	x(110)=2.26686	x(110)= 1.84857	x(110)=1.47647	x(110)=1.28541
	x(150)=0.327305	x(150)= 0.545304	x(150)=0.754869	x(150)=0.898082

Tabela 5.2: Valores de presas por $T_3(x, y)$, sendo $a = 0.08$, $b = 0.09$, $c = 0.075$ e $d = 0.07$.

As Figuras 5.10 à 5.14 ilustram o plano de fase para diversos valores de p.

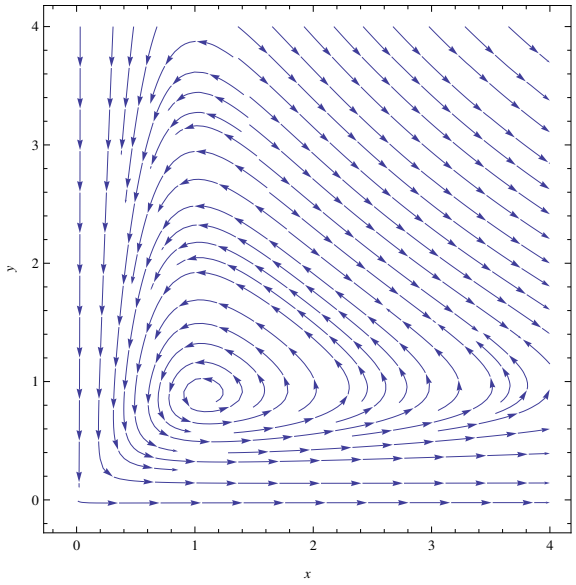


Figura 5.10: Plano de fase da solução com $p = 0$.

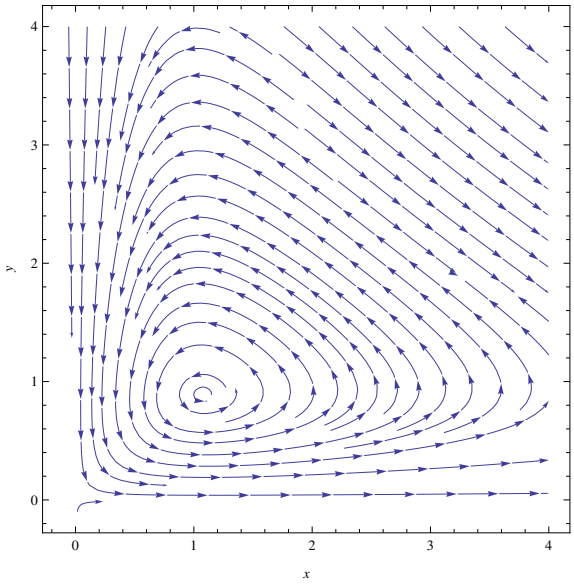


Figura 5.11: Plano de fase da solução com $p = 0.5$.

$p = 0$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 1.5$	$p = 2$
y(30)=0.663905	y(30)=0.870877	y(30)= 0.971869	y(30)=0.98695	y(30)= 0.975691
	y(70)=0.665809	y(70)= 0.740133	y(70)=0.795562	y(70)=0.822076
	y(110)=0.502088	y(110)= 0.798305	y(110)=0.907037	y(110)=0.92492
	y(150)=0.823247	y(150)= 0.842533	y(150)=0.851904	y(150)=0.84663

Tabela 5.3: Valores de predadores por $T_3(x, y)$, sendo $a = 0.08$, $b = 0.09$, $c = 0.075$ e $d = 0.07$.

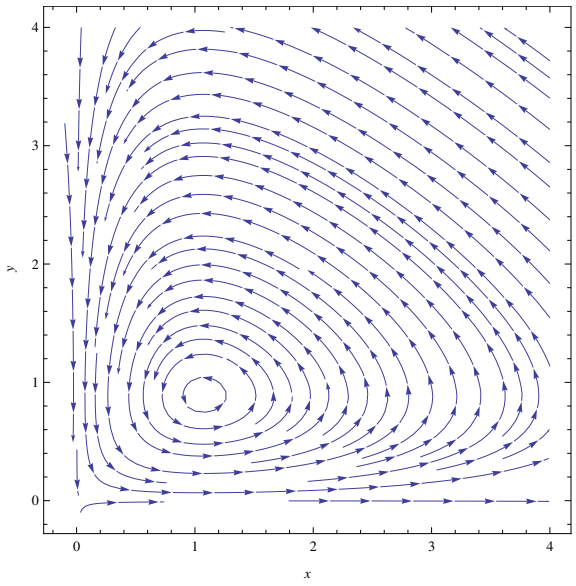


Figura 5.12: Plano de fase da solução com $p = 1$.

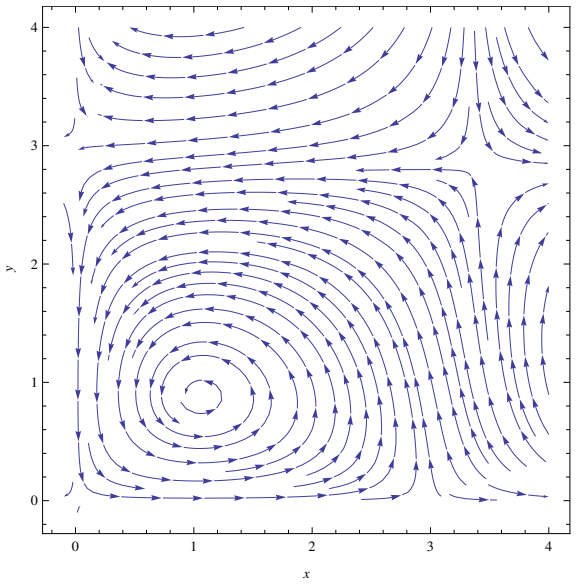


Figura 5.13: Plano de fase da solução com $p = 1.5$.

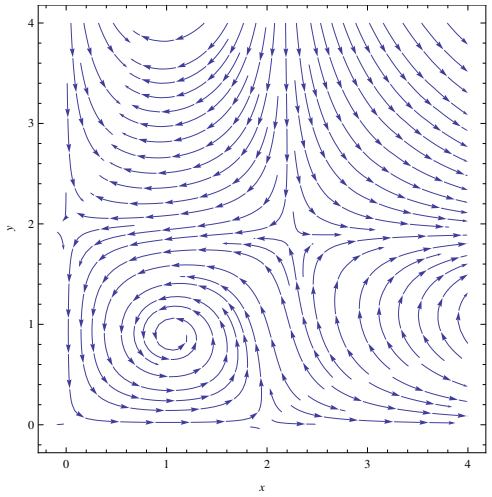


Figura 5.14: Plano de fase da solução com $p = 2$.

Analizando os autovalores da matriz do Jacobiano (5.2.13) do problema linearizado de cada caso descrito nas Figuras 5.10 à 5.14, obtemos que :

- Para $p = 0$, o ponto de equilíbrio $P = (1.08, 0.896)$ é centro instável.
- Para $p = 0.5$, os pontos de equilíbrio $P = (0, 0)$ é ponto de sela e $Q = (1.075, 0.892)$ é centro instável.
- Para $p = 1$ (Figura 5.12), temos que o modelo (5.2.12) é o próprio modelo de Lotka-Volterra

e ele é analizado na primeira seção desde capítulo.

- Para $p = 1.5$, os ponto de equilíbrio $P = (1.067, 0.885)$ é centro estável, $P = (0, 0)$ e $Q = (3.38, 2.81)$ são pontos de sela.
- Para $p = 2$, os pontos de equilíbrio $P = (1.063, 0.882)$ é centro estável, $Q = (2.266, 1.88)$ e $R = (0, 0)$ são pontos de sela.

Assim sendo, notamos que para $p < 1$ temos pontos de equílibrios repulsores, para $p = 1$ temos órbitas fechadas em torno do ponto de equilíbrio e para $p > 1$ temos pontos de equilíbrio atratores e pontos de sela.

O parâmetro p pode ser interpretado como sendo a dificuldade da interação entre os indivíduos envolvidos, como podemos ver nas Figuras 5.6-5.9, isto é, quando temos $p = 1$ (Figura 5.12) o modelo (5.2.12) é o próprio Lotka Volterra, onde a interação é dada pela modelo de ação de massas que supõe que a taxa de predação está relacionada com a probabilidade de um predador encontrar uma presa. Conforme o parâmetro p cresce (Figuras 5.13 e 5.14), temos que a dificuldade de interação aumenta, ou seja, a interação não depende apenas do encontro entres as espécies envolvidas e existem outros fatores que dificultam a interação entre eles. Essas dificuldades podem ser devidas ao habitat em que vivem, falta de habilidade do predador, habilidade da presa, mudanças de hábitos entre outras. Já para o caso do parâmetro p entre zero e um (Figuras 5.10 e 5.11), existe uma facilidade na interação entres os indíviduos, dessa forma há um favorecimento das presas e predadores que crecem com o passar do tempo.

Vimos então que a escolha do parâmetro p é quem determinará a estabilidade dos equilíbrios do sistema (5.2.12). Dessa forma, devemos escolher p de acordo com o problema proposto. Essa escolha vai depender do tipo de interação entre as espécies, lembrando é claro que interação não necessariamente precisa ser o mesmo que o encontro físico entre os indivíduos, e deve ser entendido no sentido de qual influência uma espécie fará na outra.

5.3 Modelo epidemiológico

Os modelos para doenças infecciosas, a primeira vista assemelham-se aos modelos do tipo presa-predador, se fizermos analogia de que os agentes patogênicos (virus, bactérias, protozoários e etc) são organismos parasitas (predatórios) procurando por hospedeiros. Entretanto, esta analogia é um pouco enganosa em vários aspectos. Entre as principais críticas está o fato de não podermos medir (ou estimar) a população viral total e o fato de supormos que os vírus circulam livremente no ambiente encontrando aleatoriamente novos hospedeiros. Isso ocorre raramente em epidemiologia, uma vez que, as doenças são transmitidas por contato ou proximidade entre indivíduos infectados e suscetíveis. Portanto, uma questão importante no modelo é como a doença é transmitida [10].

Nesse contexto, uma nova abordagem é necessária e faz sentido distinguirmos entre os indíviduos doentes (os que abrigam a doença) daqueles que ainda são saudáveis. A passagem de indivíduos suscetíveis para a classe de infectados ocorre como resultado do contato entre indivíduos com agentes patogênicos infecciosos e indíviduos saudáveis. Dessa forma, no modelo proposto a taxa de transmissão é proporcional à taxa de encontro de indivíduos suscetíveis e infectados,

tradicionalmente modelado pelo produto entre suas densidades (quantidades). Exemplos típicos são, os modelos matematicos SI (suscetível-infectado), SIS (suscetível-infectado-suscetível) e SIR (suscetível-infectado-recuperado)[4, 10, 18].

O modelo SI sem dinâmica vital.

O modelo clássico mais simples, que descreve dinâmica de doenças transmitidas por contato direto sem dinâmica vital (i.é., sem morte/nascimento) é descrita pelo sistemas de equações abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -\lambda xy; \quad x(0) = x_0 > 0 \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda xy; \quad y(0) = y_0 > 0, \end{cases} \tag{5.3.1}$$

sendo $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, as frações de indivíduos suscetíveis e infectados no instante t e o parâmetro $\lambda > 0$ a taxa de transmissão da doença.

De (5.3.1) vem

$$x(t) + y(t) = 1, \qquad \forall t \geq 0. \tag{5.3.2}$$

Assim, a solução de (5.3.1) é dada por

$$y(t) = \frac{y_0 e^{mt}}{x_0 + y_0 e^{mt}}. \tag{5.3.3}$$

e, de (5.3.2) vem

$$x(t) = 1 - y(t) = \frac{x_0}{x_0 + y_0 e^{mt}}. \tag{5.3.4}$$

Do ponto de visto epidemiológico, no modelo SI, uma vez infectado o indivíduo permanecerá infeccioso. Um caso típico para o modelo SI é o HIV (sigla em inglês do vírus da imunodeficiência humana). Causador da AIDS, o HIV ataca o sistema imunológico, responsável por defender o organismo de doenças. Dessa forma, uma vez contraído o vírus o indíviduo não se recupera. Um estudo mais detalhado sobre modelo para evolução do HIV o leitor pode consultar [15].

Modelo de Anderson

O modelo de Anderson não é um modelo de transmisão direta, pois toda a população já está contaminada. Ele modela a transferência do número de indivíduos assintomáticos para sintomáticos e foi proposto por Anderson et. al (1986) [21]. O modelo (4.1.1) é dado pelo sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -\lambda x; \quad x(0) = x_0 > 0 \\ \dfrac{dy}{dt} &= \lambda x; \quad y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

onde λ é a taxa de transferência da fase assintomática para a sintomática (AIDS), $x(t)$ e $y(t)$ são, respectivamente, as frações dos indivíduos infectados que não desenvolveram AIDS e os que já desenvolveram os sintomas.

De acordo com o modelo acima

$$x(t) + y(t) = 1, \qquad \forall t \geq 0.$$

A solução de (4.1.1) é dada por

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$$

e

$$y(t) = 1 - x_0 e^{-\lambda t}.$$

Em (4.1.1), o fato de Anderson et. al (1985) não utilizar o produto para modelar a dinâmica entre a população assintomática e sintomática está na circunstância de que toda a população é portadora do HIV. Assim, o encontro (físico) entre eles não determinará a dinâmica do modelo.

Muitas vezes, em problemas de epidemiologia, a interação entre os indivíduos não é dada diretamente pelo contato físico entre eles, há um agente patológico implícito neste processo até a infecção. Esse processo de contaminação é geralmente modelado pelo produto entre os indivíduos envolvidos. Novamente, lembramos que o produto usado geralmente nesse tipo de modelagem, também é um tipo de t-norma e dessa forma possui o mesmo comportamento qualitativo que outras t-normas. Dessa forma, sugerimos o uso de t-normas diferentes do produto para modelar interações epidemiológicas.

Aparentemente (4.1.1) nada tem a ver com a abordagem do tipo SI feita inicialmente. No entanto, como veremos a seguir, (4.1.1) se enquadrará neste tipo, devido a nossa abordagem para uma t-norma "geral"apropriada que modela a interação entre os indivíduos envolvidos.

5.3.1 O modelo SI com a t-norma do mínimo

Nesta seção, diferentemente de como trabalhamos no capítulo anterior, consideramos as condições inicias e os parâmetros determinísticos, dessa forma nosso modelo será feito via teoria de conjuntos fuzzy mas sua solução será determinística. Como na seção anterior vamos, inicialmente, adotar a $t-$norma do mínimo $T_2(x, y)$, que denotaremos por $\wedge$, para modelar a interação entre os indivíduos no modelo (5.3.1) ao invés do produto. A acepção dessa abordagem, para o caso suscetível-infectado se dá, baseado em [1, 17], da seguinte forma: quando a fração de indivíduos suscetíveis é muito pequena, a variação da população de suscetíveis cai proporcional a essa população, ou seja, quanto menor o número de indivíduos suscetíveis menor será o decaimento desta. Por outro lado, quando a fração de infectados for muito pequena a variação desses indivíduos também é pequena. Em ambos os casos, a taxa de transmissão é proporcional ao mínimo entre suscetíveis e infectados. Assim obtemos,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -\lambda(x \wedge y) \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda(x \wedge y) \end{cases}. \tag{5.3.5}$$

Enquanto $y \leq x$, i.e. $(x \wedge y) = y$, o sistema (5.3.5) é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda y \end{cases} \tag{5.3.6}$$

e tem solução $x(t) = 1 - y_0 e^{\lambda t}$ e $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ com $y_0 < 0.5$.

Apartir de $y \geq x$, i.e. $(x \wedge y) = x$, o sistema (5.3.5) coincide com

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -\lambda x \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x \end{cases},$$

de solução $x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$ e $y(t) = 1 - x_0 e^{-\lambda t}$ sendo $x_0 \leq 0.5$.

A solução de (5.3.5) é dada por (5.3.7) e (5.3.8) com ilustrações vistas nas Figuras 5.15 e 5.16.

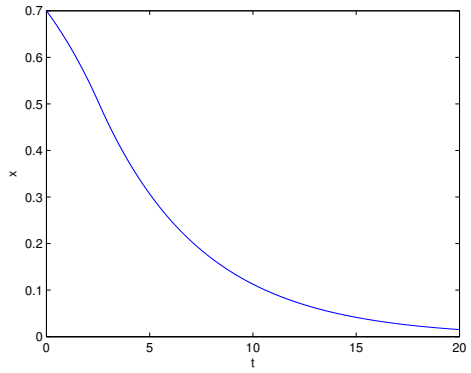


Figura 5.15: Número de suscetíveis em função do tempo para (5.3.5), sendo $\lambda = 0.2$ e $x(0) = 0.7$.

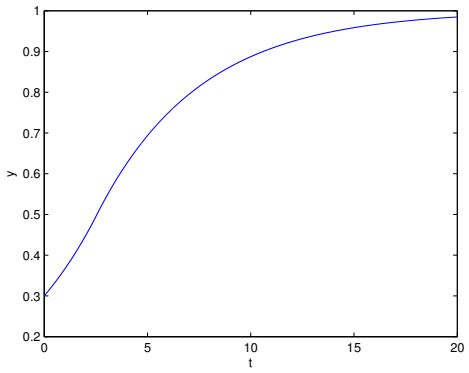


Figura 5.16: Número de infectados em função do tempo para (5.3.5), sendo $\lambda = 0.2$ e $y(0) = 0.3$.

Assim, a solução de (5.3.5) torna-se:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - y_0 e^{\lambda t} & \text{se} \quad t \leq \bar{t} \\ 0.5 e^{-\lambda(t-\bar{t})} & \text{se} \quad t > \bar{t} \end{cases} \tag{5.3.7}$$

e

$$y(t) = \begin{cases} y_0 e^{\lambda t} & \text{se} \quad t \leq \bar{t} \\ 1 - 0.5 e^{-\lambda(t-\bar{t})} & \text{se} \quad t > \bar{t} \end{cases}, \tag{5.3.8}$$

sendo $\bar{t} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{0.5}{y_0}$. Vemos através das Figuras 5.15 e 5.16 que as soluções obtidas por esse modelo possuem o mesmo comportamento qualitativo das soluções obtidas por (5.3.1), $x(t) + y(t) = 1$ e $x(\bar{t}) = y(\bar{t}) = 0.5$. O modelo de Anderson (4.1.1) corresponde ao (5.3.5) para o caso em que a população interaje mas a maioria já é sintomática. Os pontos de equilíbrio do modelo (5.3.5), são os pontos $(0, 1)$ um nó estável e $(1, 0)$ um nó instável.

A título de comparação, se voltarmos ao Capítulo 4 e tomarmos a solução defuzzificada (4.6.13) em (4.5.3), sendo $X_0 = (0.35, 0.4, 0.45)$ um número fuzzy triangular e $\lambda = 0.2$ e compararmos com a solução de (5.3.5), sendo $(x_0, y_0) = (0.4, 0.6)$, obtemos as Figuras 5.17 e 5.18. Dessa forma, a solução defuzzificada (4.6.13) sub-avalia a população de suscetíveis em relação a solução obtida por (5.3.5).

Nota-se, portanto, que apesar de nosso problema ser modelado via teoria dos conjuntos fuzzy, nossas soluções obtidas são determinísticas. Isso difere com a solução que obtinhamos no capítulo anterior, onde as soluções encontradas eram fuzzy e depois defuzzificadas.

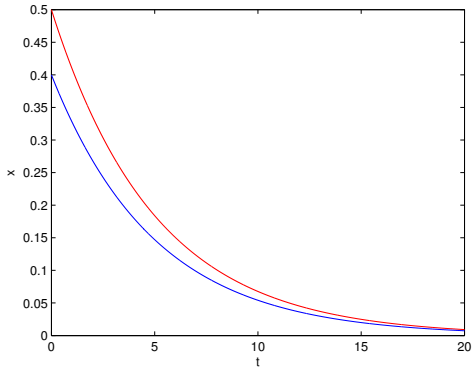


Figura 5.17: Número de suscetíveis em função do tempo: em vermelho solução de (5.3.5) e em azul solução defuzzificada de (4.5.3), sendo $\lambda = 0.2$ e $x(0) = 0.4$.

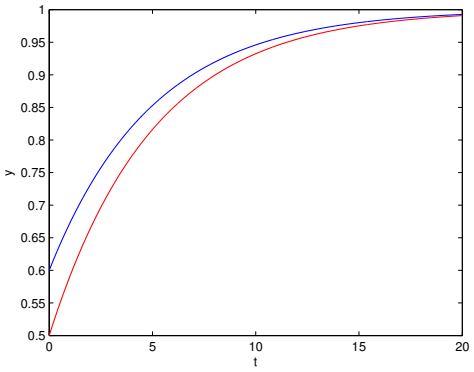


Figura 5.18: Número de infectados em função do tempo: em vermelho solução de (5.3.5) e em azul solução defuzzificada de (4.5.3), sendo $\lambda = 0.2$ e $y(0) = 0.6$.

5.3.2 O Modelo SI com a t-norma de Hamacher.

A $t-$norma de Hamacher [16, 24] é dada por

$$T_3(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}, \tag{5.3.9}$$

sendo $x, y \in [0,1]$.

Para fazer sentido biológico, todo estudo abaixo é para $(x,y) \neq (0,0)$. Adotaremos $T_3(x,y)$ para modelar a interação, (5.3.1) passa a ser

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= \frac{-\lambda xy}{p+(1-p)(x+y-xy)} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\lambda xy}{p+(1-p)(x+y-xy)} \end{cases}. \tag{5.3.10}$$

Levando em conta $x + y = 1$, isto é, sem dinâmica vital, tem-se $T_3(x, 1-x) = \frac{x(1-x)}{p+(1-p)(1-x(1-x))}$. A solução de (5.3.10) para os suscetíveis é dada implicitamente por

$$c_1 + \lambda t = (1-p)x(t) - \ln(1-x(t)) + \ln x(t)$$

enquanto que os infectados segue a equação

$$(p-1-c_1) + \lambda t = (p-1)y(t) - \ln(1-y(t)) + \ln y(t).$$

Os pontos de equilíbrio de (5.3.10), são $(0,1)$ um nó estável e $(1,0)$ um nó instável.

Para fazer um estudo comparativo entre (5.3.1) e (5.3.10), podemos ver (5.3.10) como uma caso mais geral que (5.3.1) em que a taxa de transferência é dependente das populações. Assim, em

(5.3.1) podemos interpretar $\beta = \frac{\lambda}{p+(1-p)(x+y-xy)}$ como a taxa de transferência do compartimento de suscetíveis para o de infectados. E, a taxa $\beta = \beta(x, y)$ depende das concentrações de x e y. A Figura 5.19 ilustra o comportamentode $\beta(x, y)$ para diversos valores de p, onde se vê que β decresce com o aumento de p.

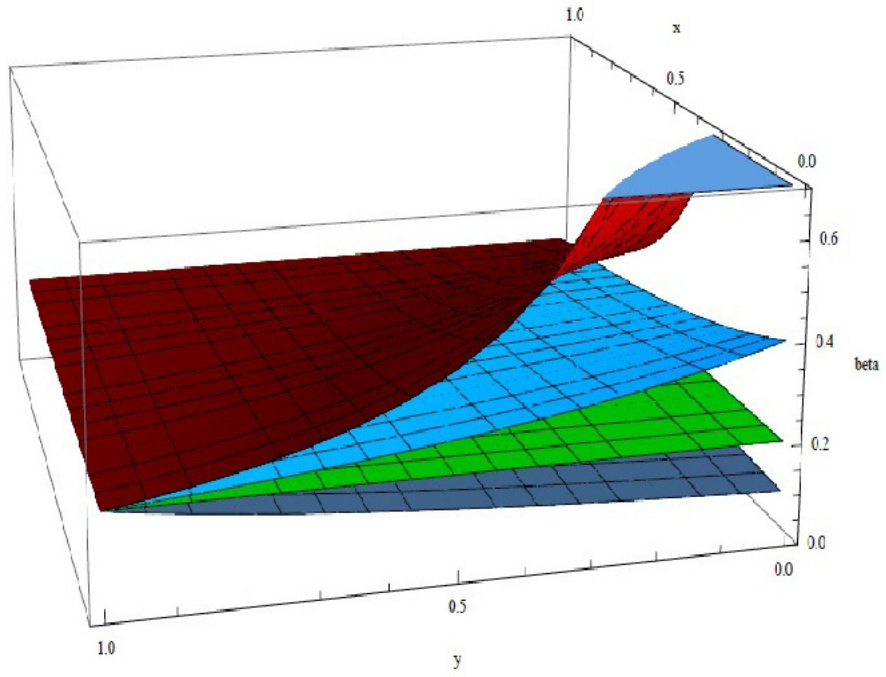


Figura 5.19: Taxa $\beta(x, y) = \frac{\lambda}{p+(1-p)(x+y-xy)}$ com $\lambda = 0.2$, sendo a surpefície vermelha $p = 0$, azul $p = 0.5$, verde $p = 1$ e cinza $p = 2$.

Note que com $p = 0$ a superfície vai para infinito quando x, y tendem a zero.

A seguir faremos alguns comentários a respeito dos modelos (5.3.1) e (5.3.10). Inicialmente é fácil ver que a taxa de transferência β para (5.3.10) (para $p = 0$) é superior à taxa λ ($p = 1$) para (5.3.1), já que para $p < 1$ temos $\beta = \frac{\lambda}{p+(1-p)(x+y-xy)} \geq \lambda$. Assim, o número de suscetíveis previsto por (5.3.10) é inferior ao previsto por (5.3.1) para $p < 1$ e superior para $p > 1$. As Tabelas 5.4 e 5.5 e a Figura 5.19 ilustram esse fato. Os gráficos da solução do modelo SI com $T_1(x, y) = xy$ e $T_3(x, y) = \frac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)}$ estão ilustrados nas Figuras 5.20–5.21.

Nas Tabelas 5.4 e 5.5 os valores representados nas curvas das Figura 5.20 e 5.21 para alguns valores de t.

Do ponto de vista qualitativo, tanto em dinâmica de populações como em epidemiologia a inflexão do modelo é de grande interesse, uma vez que este indica alteração no rítmo da curva de crescimento (decrescimento) das populações envolvidas. A seguir faremos estudo da inflexão para o modelo (5.3.1), com $T_1(x, y) = xy$, e para o modelo (5.3.10) com $T_3(x, y) = \frac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)}$.

Notemos que para $\lambda \neq 0$ o ponto de inflexão do modelo SI (5.3.1) com $T_1(x, y) = xy$ é dado

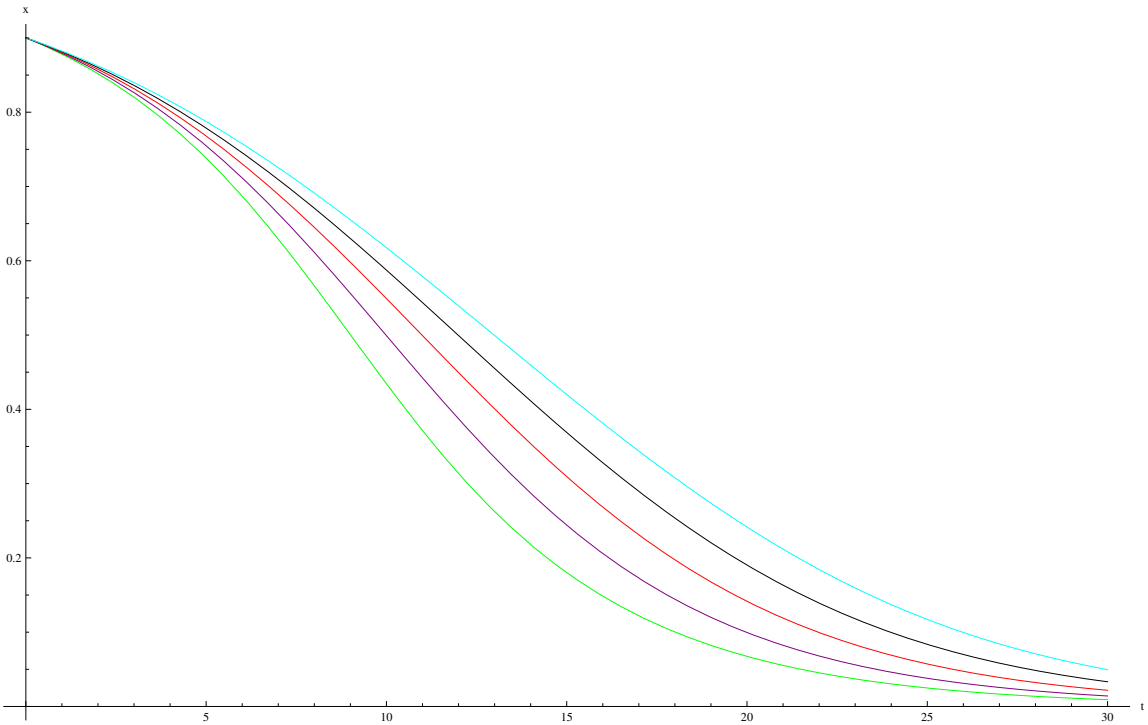


Figura 5.20: Número de suscetíveis em função do tempo do modelo (5.3.10) com $\lambda = 0.2$ e $x(0) = 0.9$, sendo a curva em verde $p = 0$, roxo $p = 0.5$, vermelho $p = 1$ (modelo clássico), preto $p = 1.5$ e azul $p = 2$.

t	x	y
0	0.1	0.9
1	0.0833846	0.916615
5	0.0392703	0.96073
10	0.0148145	0.985186
30	0.00027534	0.999725

Tabela 5.4: Valores de suscetíveis e infectados com $T_1(x, y)$ $(p = 1)$ para $\lambda = 0.2$ e $x(0) = 0.1$.

t	x	y
0	0.1	0.9
1	0.0820207	0.917979
5	0.0369598	0.96304
10	0.013605	0.986395
30	0.000249206	0.999751

Tabela 5.5: Valores de suscetíveis e infectados com $T_3(x, y)$ com $p = 0$ para $\lambda = 0.2$ e $x(0) = 0.1$.

por

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \lambda(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

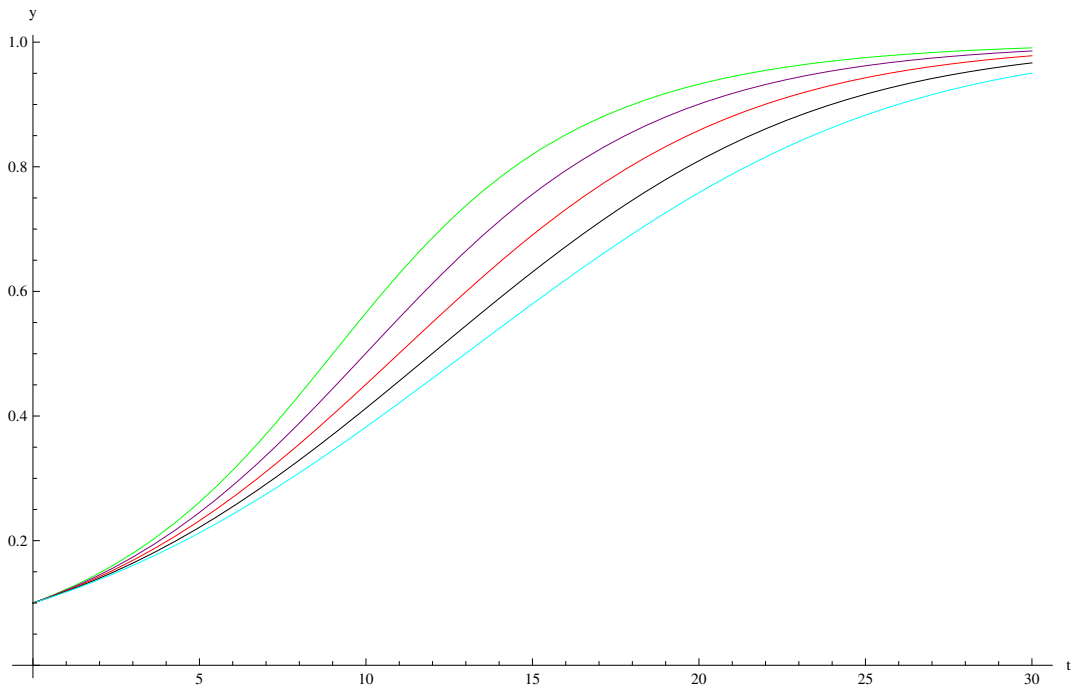


Figura 5.21: Número de infectados em função do tempo do modelo (5.3.10) com $\lambda = 0.2$ e $y(0) = 0.1$, sendo a curva em verde $p = 0$, roxo $p = 0.5$, vermelho $p = 1$ (modelo clássico), preto $p = 1.5$ e azul $p = 2$.

que coincide com o ponto de inflexão do modelo SI (5.3.1) com $T_3(x,y) = \frac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)}$, pois

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\lambda(2x-1)}{(x(1-p)-1+(p-1)x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad \forall p \geq 0$$

e

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\lambda(1-2x)}{(x(1-p)-1+(p-1)x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}, \quad \forall p \geq 0.$$

Assim, embora as populações previstas por cada modelo sejam diferentes em cada t, elas possuem a mesma inflexão. E indiferentemente do valor adotado para p temos os mesmos pontos de equilíbrios com os mesmo comportamentos.

5.4 Resumo

Neste capítulo tratamos a interação entre indivíduos por meio de t-normas diferentes da tradicional $T_1(x,y) = xy$. Para isso fizemos uso das seguintes t-normas: $T_2(x,y) = x \wedge y$ e $T_3(x,y) = \frac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)}$.

No modelo presa-predador (5.2.10) notamos que o uso da t-norma do mínimo apresentou resultados bem interessantes. Já o uso da t-norma de Hamacher na interação entre presa e predador mostrou resultados significantes. O parâmetro p ajusta os obstáculos que podem interferir a interação entre as espécies envolvidas e dependendo do valor adotado para p, nosso sistema tem comportamentos bem difernciados uns dos outros, por exemplo, para $p = 1$ temos o modelo de Lotka-Volterra, para $p < 1$ temos pontos de equilíbrios repulsivos e para $p > 1$ pontos de equilíbrio atrativos e de sela. Assim, ajustamos nosso modelo de acordo com o problema proposto.

No Modelo epidemiológico, observamos que o modelo proposto por Anderson et.al (1986) é um caso particular do modelo SI com a t-norma $T_2(x,y) = x \wedge y$ na modelagem da interação entre as populações. Comparamos as soluções de modelos matemáticos de epidemiologia com as t-normas $T_1(x,y) = xy$ e $T_3(x,y) = \frac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)}$ e concluímos que, apesar das soluções não serem as mesmas, elas possuem o mesmo comportamento qualitativo. Além disso, apesar do sistema ser obtido via teória de conjuntos fuzzy, diferente do capítulo anterior, onde nossas soluções eram fuzzy, temos soluções determinísticas.

Finalmente, acreditamos que em modelos de epidemiologia ou dinâmica de populações, dependendo das características da população envolvida, pode-se usar t-normas para modelar a interação entre as populações, principalmente no caso da t- norma de Hamacher, pois temos a vantagem de admitir a possibilidade de "ajustar" o parâmetro p para cada modelo. Reforçando a ideia que a interação não necessariamente precisa ser o encontro físico entre elas e sim a influência que uma causa na outra. Um exemplo é o caso do modelo SI para populações que já possuem o vírus HIV, onde adotamos $T_2(x,y) = x \wedge y$.

Capítulo 6

Conclusão

Os primeiros capítulos apresentam um resumo sobre normas triangulares, Princípio de Extensão de Zadeh, conjuntos fuzzy interativos e aritmética de números fuzzy (interativos ou não). Esses conceitos foram base de todo o trabalho feito.

Logo depois, no capítulo 4, trabalhamos com equações diferenciais fuzzy (EDF) atráves de duas abordagens distintas: via inclusão diferencial e via fuzzificação da solução determinística, aplicamos a um modelo pra evolução de HIV positivo com parâmetros fuzzy correlacionados e obtemos a mesma solução fuzzy para ambos os casos. Quando defuzzificamos a solução obtida para a equação com condição inicial e taxa de transferência modeladas por números fuzzy linearmente correlacionados, obtemos que a solução determinística sub-avalia o número médio de indivíduos assintomáticos.

Por último, no capítulo 5, trabalhamos primeiramente com modelos tipo presa-predador onde apresentamos uma alternativa para modelar a interação entre espécies. Essa alternativa surgiu da observação de que a operação produto, geralmente usada nesse tipo de modelagem , é uma particular t- norma e com isso investigamos t-normas mais gerais. Em particular, a t-norma de Hamacher nos proporcionou um parâmetro a mais para ajustar nosso modelo ao problema e esse parâmetro é que determina a estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo.

Depois trabalhamos com problemas de epidemiológia de transmisão direta, onde através da mesma observação feita anteriormente sobre a operação produto, investigamos t-normas mais gerais para modelar a transmissão de doenças. Em particular, a t-norma do mínimo, ofereceu uma resultado interessante, pois inclui o modelo de Anderson (não considerado de transmissão direta, uma vez que toda a população já está contaminada) na classe de problemas do tipo SI. Comparando a solução (determinística) obtida por esse modelo baseado na t-norma do mínimo com a solução fuzzy defuzzificada da EDF feita no capítulo anterior concluímos que a solução defuzzificada sub-avalia a população de assintomáticos em relação a solução deste último modelo.

Como trabalhos futuros pretendemos aprofundar o estudo de estabilidade tanto nos modelos vistos no Capitulo 4, cuja solução é fuzzy quanto nesses últimos modelos, baseado em t-normas mas com solução determinística.

Bibliografia

[1] Jan Baetens e Bernard De Baets. "Incorporating fuzziness in spatial susceptible-infected epidemic models". Em: *Joint 2009 International Fuzzy Systems Association world congress and European Society for Fuzzy Logic and Technology conference (IFSA/EUSFLAT 2009)*. European Society for Fuzzy Logic e Technology (EUSFLAT). 2009, pp. 201–206.

[2] Laécio Carvalho de Barros. "Sobre sistemas dinâmicos fuzzy". Tese de doutorado. IMECC-UNICAMP, 1997.

[3] LC. Barros e R.C. Bassanezi. "Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática". Em: *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática* (2010).

[4] L.C.D.E. Barros, MB Leite e RC Bassanezi. "The SI epidemiological models with a fuzzy transmission parameter". Em: *Computers & Mathematics with Applications* 45.10 (2003), pp. 1619–1628.

[5] Rodney Carlos Bassanezi e Wilson Castro Ferreira Junior. *Equações diferenciais: com aplicações*. Harbra, 1988.

[6] Valtemir Martins Cabral. "Equaçoes diferenciais fuzzy com parâmetros interativos". Tese de doutorado. IMECC-UNICAMP, 2011.

[7] VM Cabral e LC Barros. *Equaçao diferencial fuzzy com parâmetros completamente correlacionados*. 2010.

[8] C. Carlsson, R. Fullér e P. Majlender. "On possibilistic correlation". Em: *Fuzzy Sets and Systems* 155.3 (2005), pp. 425–445.

[9] C. Carlsson, R. Fullér et al. "Additions of completely correlated fuzzy numbers". Em: *Fuzzy Systems, 2004. Proceedings. 2004 IEEE International Conference on*. Vol. 1. IEEE. 2004, pp. 535–539.

[10] L. Edelstein-Keshet. *Mathematical models in biology*. McGraw-Hill Companies, 1988.

[11] R. Fullér. *Fuzzy reasoning and fuzzy optimization*. Turku Centre for Computer Science, 1998.

[12] R. Fullér e T. Keresztfalvi. "On generalization of Nguyen's theorem". Em: *Fuzzy Sets and Systems* 41.3 (1991), pp. 371–374.

[13] E. Hüllermeier. "An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems". Em: *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 5.02 (1997), pp. 117–137.

[14] RM Jafelice. “Modelagem fuzzy para dinâmica de transferência de soropositivos para HIV em doença plenamente manifesta”. Tese de doutorado. FEEC-UNICAMP, 2003.

[15] R.M. Jafelice et al. “Fuzzy modeling in symptomatic HIV virus infected population”. Em: *Bulletin of Mathematical Biology* 66.6 (2004), pp. 1597–1620.

[16] E.P. Klement et al. *Triangular norms*. Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 2000.

[17] V. Kreinovich e O. Fuentes. “High-Concentration Chemical Computing Techniques for Solving Hard-To-Solve Problems, and Their Relation to Numerical Optimization, Neural Computing, Reasoning Under Uncertainty, and Freedom Of Choice”. Em: (2011).

[18] E. Massad et al. *Fuzzy logic in action: Applications in epidemiology and beyond*. Vol. 232. springer, 2009.

[19] MT Mizukoshi. “Estabilidade de sistemas dinâmicos fuzzy”. Tese de doutorado. IMECC-UNICAMP, 2004.

[20] MT Mizukoshi et al. “Fuzzy differential equations and the extension principle”. Em: *Information Sciences* 177.17 (2007), pp. 3627–3635.

[21] J.D. Murray. *Mathematical biology: I. An introduction*. Vol. 2. Springer, 2002.

[22] C.V. Negoita e D.A. Ralescu. *Applications of fuzzy sets to systems analysis*. Birkhäuser, 1975.

[23] H.T. Nguyen. “A note on the extension principle for fuzzy sets”. Em: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 64.2 (1978), pp. 369–380.

[24] W. Pedrycz e F. Gomide. *Fuzzy systems engineering: toward human-centric computing*. Wiley-IEEE Press, 2007.

[25] MS Peixoto. “Sistemas dinâmicos e controladores fuzzy. Um estudo da dispersao da morte súbita dos citrus no estado de São Paulo”. Tese de doutorado. IMECC-UNICAMP, 2005.

[26] M.L. Puri e D.A. Ralescu. “Differentials of fuzzy functions”. Em: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 91.2 (1983), pp. 552–558.

[27] L.A. Zadeh. “Fuzzy Sets”. Em: *Information and Control* 8.4 (1965), pp. 338–353.