



JORDAN LAMBERT SILVA

DECOMPOSIÇÕES CELULARES DE ESPAÇOS HOMOGÊNEOS

**CAMPINAS
2013**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

JORDAN LAMBERT SILVA

DECOMPOSIÇÕES CELULARES DE ESPAÇOS HOMOGÊNEOS

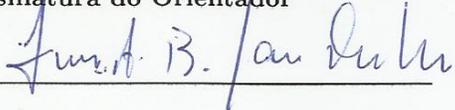
Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Coorientador: Prof. Dr. Lonardo Rabelo

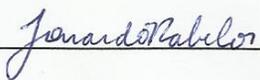
Dissertação de mestrado apresentada do Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para
obtenção do título de Mestre em matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO JORDAN LAMBERT SILVA,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN.

Assinatura do Orientador



Assinatura do Coorientador



CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38d Silva, Jordan Lambert, 1989-
Decomposições celulares de espaços homogêneos / Jordan Lambert Silva. –
Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Luiz Antonio Barrera San Martin.

Coorientador: Lonardo Rabelo.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Variedades flag. 2. Topologia algébrica. I. San Martin, Luiz Antonio
Barrera, 1955-. II. Rabelo, Lonardo, 1983-. III. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Cellular decompositions of homogeneous spaces

Palavras-chave em inglês:

Flag manifolds

Algebraic topology

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Luiz Antonio Barrera San Martin [Orientador]

Elizabeth Terezinha Gasparim

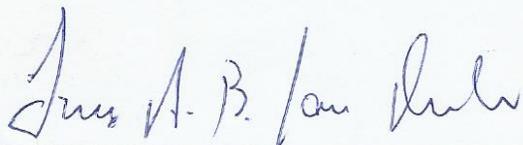
Daniel Victor Tausk

Data de defesa: 02-05-2013

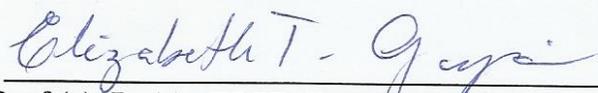
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 02 de maio de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



Prof.(a). Dr(a). ELIZABETH TEREZINHA GASPARIM



Prof.(a). Dr(a). DANIEL VICTOR TAUSK

*“Enraizados e edificados em Cristo,
Firmes na fé.”*
Colossenses 2,7.

Tema da Jornada Mundial da
Juventude de 2011 em Madrid.

Agradecimentos

Durante os últimos anos, muitas pessoas participaram de minha vida e este é um breve espaço a qual posso agradecê-las.

- Primeiramente, agradeço a Deus por todas graças que Ele me concede a cada momento de minha vida, à Ele eterna gratidão;
- Agradeço à FAPESP pela oportunidade e apoio no financiamento deste projeto de mestrado;
- Ao meu orientado prof. San Martin por toda a ajuda necessária neste projeto e por aceitar continuar a me orientar durante o doutorado. Ao meu coorientador Lonardo, pelas conversas, apoio e sugestões ao projeto. Aos professores da banca: Elizabeth e Daniel Tausk;
- Aos meus pais Celso e Ana Lúcia, por toda a dedicação e incentivo que recebi, base fundamental de toda minha vida. Aos meus irmãos Johann, Johnny e Jonathan;
- Aos meus avós Delfina e Geraldo, Dita e Vavá. Aos meus tios, primos e à toda a família;
- À minha amada esposa Juliana, que me fez perceber que a vida não é feita apenas de estudo e trabalho, mas também de amor, amizade, companheirismo, aventuras e orações. E também por toda sua família que me acolhe;
- Aos amigos da UNICAMP, em especial, ao Lucas (vulgo Ceará), à Déborah, à Ana Cláudia e ao Rodrigo, presentes desde o início da graduação;
- Aos vários amigos da igreja, em especial, àqueles que convivi rumo à peregrinação para a Jornada Mundial da Juventude de 2011: Rafão, Igor, Natália, Guilherme, Jéssica, Fernando Albratoz, Fernando Madrid e às Irmãs Missionárias de Cristo. Também agradeço aos sacerdotes amigos Pe. Milton, Pe. Anderson e Pe. Paulo Eduardo pelas orações e pelo exemplo de humildade;
- Aos professores do IMECC que me forneceram os fundamentos matemáticos necessários para minha formação. Aos funcionários da UNICAMP: Tânia, Livia e Edivaldo da secretaria de pós-graduação, além da D. Zefa pelos cafezinhos;
- À Enir, minha professora dos tempos de escola, à qual me despertou um profundo interesse no estudo da matemática, além do desejo de ensinar esta bela ciência.

Resumo

Nesta dissertação, realizamos um estudo topológico das variedades flag reais. Encontrada a decomposição em células de Schubert de uma variedade flag, apresentamos dois invariantes topológicos sobre estas variedades: a homologia, obtida a partir do cálculo do operador fronteira da homologia celular, e a característica de Euler, cujo cálculo foi realizado para as variedades flag maximais e para as variedades grassmanianas simpléticas $L_p(\mathbb{R}^{2l})$.

Palavras-chave: Variedades flag, Topologia Algébrica.

Abstract

In this dissertation, we conduct a topological study of real flag manifolds. Found the Schubert cell decomposition of a flag manifold, we present two topological invariants for these manifolds: the homology, obtained from the calculation of the boundary operator of cellular homology, and the Euler characteristic, which was determined for maximal flag manifolds and for symplectic grassmannians manifolds $L_p(\mathbb{R}^{2l})$.

Keywords: Flag manifolds, Algebraic topology.

Sumário

Resumo	viii
Abstract	ix
Introdução	1
1 Variedades flag reais	3
1.1 Teoria semissimples real	3
1.1.1 Decomposição de Cartan e de Iwasawa	5
1.1.2 Sistema de raízes e o Grupo de Weyl	10
1.1.3 Subgrupo e subálgebra parabólica	13
1.2 Variedades flag reais	15
1.2.1 Órbitas em \mathfrak{s}	15
1.2.2 Fibrção	16
1.2.3 Decomposição de Bruhat	17
1.2.4 Células de Schubert	22
1.3 Exemplo: O grupo $Sl(3, \mathbb{R})$	23
1.3.1 Grupo de Weyl	25
1.3.2 Subálgebras parabólicas	29
1.3.3 Variedade flag maximal	31
1.3.4 Variedade flag parcial do tipo $\Theta = \{\alpha_1\}$	33
1.3.5 Variedade flag parcial do tipo $\Theta = \{\alpha_2\}$	34
2 Estrutura CW-complexo em variedades flag	36
2.1 Variedades flag	36
2.1.1 Descrevendo a célula de Bruhat na célula de Schubert	38
2.1.2 Parametrização de subconjuntos de subgrupos compactos	39
2.1.3 Estrutura CW-complexo para variedades flag maximais	42
2.1.4 Variedades flag parciais	43
2.2 Variedades Grassmanianas Simpléticas	44
2.2.1 Decomposição de Cartan	44
2.2.2 Grupo de Weyl	45
2.2.3 Subálgebras parabólicas maximais	46

2.2.4	As variedades flag minimais	47
3	Homologia das variedades flag	52
3.1	Noções básicas sobre homologia celular	52
3.2	Homologia celular de variedades flag maximais	53
3.2.1	Expressões algébricas para os graus	56
3.3	Continuação do exemplo $Sl(3, \mathbb{R})$	57
4	Característica de Euler das variedades flag	64
4.1	Fibrações de variedades flag	64
4.2	Característica de Euler de variedades flag maximais	66
4.3	Característica de Euler das grassmanianas simpléticas $L_p(\mathbb{R}^{2l})$	72
4.3.1	Paridade	74
	Referências Bibliográficas	85

Introdução

A presente dissertação tem como objetivo central estudar conceitos topológicos em variedades flag reais. No âmbito da Topologia Algébrica, quando desejamos entender algumas características topológicas de determinados espaços, recorreremos a alguns invariantes topológicos. Podemos citar como principais invariantes topológicos: a Característica de Euler, o Grupo Fundamental, os Grupos Homologia e, por fim, os Grupos de Cohomologia.

Uma abordagem sobre o grupo fundamental das variedades flag reais foi apresentado no artigo de Wiggerman [15], definindo explicitamente o grupo fundamental das variedades flag, cujos geradores são indexados por raízes de multiplicidade 1 e condicionada a algumas relações específicas.

Neste texto, apresentaremos o estudo de dois invariantes topológicos aplicados nas variedades flag reais. Em um primeiro momento analisaremos como caracterizar a homologia (celular) destes espaços e, em seguida, calcularemos a característica de Euler de certas variedades flag. A busca de algum resultado sobre a característica de Euler destas variedades foi motivada pela simplicidade da definição deste invariante topológico em termo de uma decomposição celular da variedade flag, quando conhecida a dimensão das células. Quanto ao estudo da cohomologia das variedades flag, há alguns resultados presentes na tese de Rabelo [8], mas não cabe a esta dissertação apresentá-los.

A estrutura de uma variedade flag é definida da seguinte maneira: Dados um grupo de Lie G semissimples, real e não-compacto e um subgrupo parabólico P_Θ , define-se uma *variedade flag real de tipo Θ* como o espaço homogêneo $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$. Um importante fato sobre variedades flag reais é que podemos realizar uma decomposição de \mathbb{F}_Θ como a união disjunta de N -órbitas

$$\mathbb{F}_\Theta = \coprod_{w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta} N \cdot wb_\Theta$$

onde N é a componente nilpotente da decomposição de Iwasawa $G = KAN$, \mathcal{W} é o grupo de Weyl e b_Θ é a origem do flag \mathbb{F}_Θ . A esta decomposição damos o nome de decomposição de Bruhat. O fecho de uma célula de Bruhat é dito uma célula de Schubert e denotada por \mathcal{S}_w^Θ , com $w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$.

Deste modo, no Capítulo 1 procuramos iniciar com a construção da Teoria semissimples real e toda parte elementar da teoria de variedades flag reais, com o intuito de deixar o leitor confortável com todo o texto que se segue. Além disso, adotamos como exemplo prático o grupo de Lie $Sl(3, \mathbb{R})$, o qual será de grande auxílio na compreensão tanto para o desenvolvimento básico da teoria, quanto para entender como se dará o cálculo da homologia da variedade flag maximal $Sl(3, \mathbb{R})/P$.

No Capítulo 2, vemos que o conjunto das células de Schubert fornece uma estrutura CW-complexo, ou seja, uma decomposição celular à variedade flag e que será de importante valor para o desenvolvimento do cálculo da homologia e da característica de Euler das variedades flags.

O modo que se desenvolve o estudo da homologia apresentado no Capítulo 3 não é uma novidade, ele está presente na tese [8] e no artigo de Rabelo e San Martin [9]. Basicamente, obteve-se uma maneira de definir parametrizações explícitas para as funções de colagem entre as células de Schubert \mathcal{S}_w^Θ , estabelecendo-se uma estrutura celular na variedade flag. Assim, é possível calcular o operador fronteira ∂ da homologia celular. Um fato a respeito deste operador fronteira é que os coeficientes que relacionam duas células de Schubert são 0 ou ± 2 . A partir desta caracterização, definem-se os grupos de homologia com coeficientes inteiros associados à variedade flag \mathbb{F}_Θ .

Por fim, o Capítulo 4 contempla o estudo da característica de Euler de variedades flag reais, contendo duas contribuições originais para a teoria. A característica de Euler $\chi(\mathbb{F}_\Theta)$ de uma variedade flag é definida pela soma

$$\chi(\mathbb{F}_\Theta) = \sum_{w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta} (-1)^{\dim \mathcal{S}_w^\Theta}$$

que é vista como generalização da clássica fórmula de Euler

$$\chi = V - A + F$$

para poliedros da geometria clássica. Tomando a fibração canônica $\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1} : \mathbb{F}_{\Theta_1} \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta_2}$, cuja fibra é f_{Θ_1, Θ_2} , apresenta-se em [9] a seguinte relação entre a característica de Euler destas duas variedades flag:

$$\chi(\mathbb{F}_{\Theta_1}) = \chi(f_{\Theta_1, \Theta_2})\chi(\mathbb{F}_{\Theta_2}).$$

Com base neste resultado, a Proposição 4.2.8 nos diz que para uma dada variedade flag maximal, sua característica de Euler é sempre zero quando existe ao menos uma raiz simples α tal que ou \mathfrak{g}_α ou $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ tem multiplicidade ímpar e, caso todas as raízes tenham multiplicidade par, então $\chi(\mathbb{F})$ assume como resultado a cardinalidade do grupo de Weyl \mathcal{W} . Ou seja, conhecendo-se as raízes de uma variedade flag maximal, podemos dizer se sua característica de Euler é 0 ou $|\mathcal{W}|$.

Neste mesmo capítulo, também efetuamos o cálculo da característica de Euler para uma classe específica de variedades flag. Diz-se que um subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^{2l}$ é isotrópico em relação à uma forma bilinear antissimétrica não-degenerada ω se para todo $u, v \in V$, obtemos $\omega(u, v) = 0$. Chamaremos de variedade Grassmaniana Simplética a grassmaniana dos subespaços isotrópicos de dimensão p em \mathbb{R}^{2l} , para $0 < p \leq l$. Este espaço, que será denotado por $L_p(\mathbb{R}^{2l})$, é uma variedade flag minimal do grupo simplético $\text{Sp}(l, \mathbb{R})$. É importante salientar que, no caso de $p = l$, o espaço $L_n(\mathbb{R}^{2n})$ é mais conhecido como Grassmaniana Lagrangeana. Utilizando conceitos combinatórios, apresentamos no Corolário 4.3.14 que a característica de Euler de toda grassmaniana simplética $L_p(\mathbb{R}^{2l})$ é igual à zero.

Para a leitura desta dissertação, pressupomos que o leitor tenha familiaridade com conceitos e fundamentos de Teoria de Lie. Para tal, as notas de aula de Grupos de Lie [10] e o livro de Álgebras de Lie [12] de San Martin, e também o livro de Knapp [6] podem servir de referência básica para o estudo desta estruturas. Além disso, faz-se necessário conhecer o básico da construção dos grupos de homologia singular e celular, a qual o livro de Hatcher [2] é uma boa referência de consulta.

Capítulo 1

Variedades flag reais

Neste capítulo faremos uma introdução no estudo de grupos e álgebras de Lie semissimples reais, desenvolvendo as decomposições de Cartan e Iwasawa, essenciais para a construção das variedades flag reais. Para auxiliar na compreensão deste processo construtivo apresentamos, no fim do capítulo, o exemplo de todo este processo no grupo $Sl(3, \mathbb{R})$.

Este estudo introdutório pode ser encontrado nos livros de Knapp [6] e de Helgason [3], além da tese de Patrão [7], que é uma excelente referência redigida em língua portuguesa.

1.1 Teoria semissimples real

Uma álgebra de Lie real é um espaço vetorial real \mathfrak{g} munido de um produto $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisfaz

1. é bilinear;
2. é antissimétrico, ou seja, $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$;
3. respeita a identidade de Jacobi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

Este produto é chamado de comutador ou colchete de Lie. Dizemos que um subespaço \mathfrak{h} de \mathfrak{g} é uma subálgebra de Lie se ele é fechado pelo colchete.

Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é uma derivação da álgebra de Lie \mathfrak{g} se satisfaz

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \quad , \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Definimos a representação adjunta como uma aplicação $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ tal que dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$. Através da identidade de Jacobi, $\text{ad}(X)$ é um tipo particular de derivação e é chamada de derivação interna. O conjunto destas derivações internas é a imagem da aplicação adjunta da álgebra de Lie.

Um ideal \mathfrak{h} de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é uma subálgebra de Lie que satisfaz $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$. Daí, dado um ideal \mathfrak{h} podemos obter a álgebra quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ das classes laterais de \mathfrak{h} .

Queremos definir a álgebra de Lie semissimples, objeto de estudo a partir de então. Primeiramente, dados duas subálgebras de Lie \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 de \mathfrak{g} , denotamos $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ como a subálgebra gerada pelo conjunto

$$\{[X, Y] \mid X \in \mathfrak{h}_1, Y \in \mathfrak{h}_2\}.$$

Define-se a série derivada de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} como o conjunto de subespaços encaixados

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \dots \supset \mathfrak{g}^{(k)} \supset \dots$$

definidos indutivamente como

$$\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}].$$

A cada um destes elementos da série derivada damos o nome de álgebra derivada. Dizemos que \mathfrak{g} é solúvel se alguma de suas álgebras derivadas é nula, ou seja, existe $k_0 > 0$ inteiro tal que $\mathfrak{h}^{(k_0)} = 0$.

Definição 1.1.1. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é semissimples se \mathfrak{g} não contém ideais solúveis além do 0.*

A forma de Cartan-Killing de uma álgebra de Lie é uma aplicação $\langle, \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)).$$

Um resultado básico da teoria de álgebras de Lie diz que uma álgebra de Lie é semissimples se, e somente se, sua forma de Cartan-Killing é não-degenerada.

Um homomorfismo entre álgebras de Lie é uma aplicação $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ que satisfaz $\phi[X, Y] = [\phi(X), \phi(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Quando ϕ é um homomorfismo inversível que opera em \mathfrak{g} , dizemos que ϕ é um automorfismo. O conjunto dos automorfismos $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ da álgebra de Lie é um subgrupo fechado do grupo $\text{Gl}(\mathfrak{g})$ das transformações inversíveis. Sabendo que a exponencial de uma derivação é um automorfismo, então o conjunto $\text{Int}(\mathfrak{g})$ das exponenciais das representações $\text{ad}(X)$ é denominado automorfismo interno da álgebra. Quando a álgebra é semissimples, então todo automorfismo é automorfismo interno [12, Proposição 3.14], ou seja, $\text{Int}(\mathfrak{g})$ é a componente da identidade de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.

Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie semissimples real \mathfrak{g} . Tomando $g \in G$, a conjugação C_g é um automorfismo de G dado por $C_g(x) = gxg^{-1}$, para todo $x \in G$. Definimos a representação adjunta no grupo G como $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$ tal que $\text{Ad}(g) = d(C_g)_1$. Sabendo que $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ é a aplicação exponencial de \mathfrak{g} e $e : \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$ é a exponencial de transformações lineares, seguem as seguintes equações:

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(\text{Ad}(g)X) \tag{1.1.1}$$

$$\text{Ad}(\exp(X)) = e^{\text{ad}(X)}. \tag{1.1.2}$$

1.1.1 Decomposição de Cartan e de Iwasawa

A partir de agora, nosso estudo se restringirá às álgebras de Lie \mathfrak{g} semissimples reais e não-compactas. Uma álgebra de Lie é dita não-compacta se sua forma de Cartan-Killing não é negativa semi-definida (nesse caso, quando a álgebra é não-compacta, seu grupo de Lie conexo G também é não-compacto).

Um automorfismo $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é dita uma involução quando $\theta^2 = 1$. Podemos associá-la a uma forma bilinear não-degenerada

$$\langle X, Y \rangle_\theta = -\langle X, \theta Y \rangle$$

definida para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Observe que toda involução admite apenas autovalores 1 e -1 . Denote por \mathfrak{k} e \mathfrak{s} os autoespaços associados aos autovalores 1 e -1 , respectivamente. Estes conjuntos possuem as seguintes relações:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}, \quad [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k}.$$

A álgebra \mathfrak{g} pode ser escrita como a soma direta $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, porém note que \mathfrak{s} não é subálgebra de \mathfrak{g} , pois caso contrário, deveríamos ter que $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{s} = 0$ e \mathfrak{s} seria um ideal abeliano (solúvel), contradizendo o fato de \mathfrak{g} ser semissimples. Temos também que \mathfrak{k} não é ideal de \mathfrak{g} , pois $[\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$. A subálgebra de Lie \mathfrak{k} é chamada de componente compacta da decomposição de Cartan, uma vez que \mathfrak{k} é compacta em diversos casos.

Uma involução θ é chamada de involução de Cartan se sua forma bilinear associada é um produto interno em \mathfrak{g} . Neste caso, a decomposição de \mathfrak{g} como soma direta de \mathfrak{k} e \mathfrak{s} é dita uma decomposição de Cartan para \mathfrak{g} .

Proposição 1.1.2. *Se $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{s}$, então $\text{ad}(X)$ é antissimétrica e $\text{ad}(Y)$ é simétrica em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$. Deste modo, \mathfrak{k} e \mathfrak{s} são ortogonais em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ e em relação à forma de Cartan-Killing.*

Demonstração. Sejam $Z, Z' \in \mathfrak{g}$. Daí, através da definição

$$\langle \text{ad}(X)Z, Z' \rangle_\theta = -\langle \text{ad}(X)Z, \theta Z' \rangle = \langle Z, \text{ad}(X)\theta Z' \rangle.$$

Como θ é involutivo e $X \in \mathfrak{k}$, então $\text{ad}(X)\theta Z' = [X, \theta Z'] = \theta[X, Z'] = \theta \text{ad}(X)Z'$. Logo,

$$\langle \text{ad}(X)Z, Z' \rangle_\theta = \langle Z, \theta \text{ad}(X)Z' \rangle = -\langle Z, \text{ad}(X)Z' \rangle_\theta$$

mostrando que $\text{ad}(X)$ é antissimétrico. Analogamente, $\text{ad}(Y)$ é simétrico.

Como θ é automorfismo, dados $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{s}$

$$\langle X, Y \rangle = \langle \theta X, \theta Y \rangle = \langle X, -Y \rangle = -\langle X, Y \rangle$$

implicando que $\langle X, Y \rangle = 0$. Do mesmo modo, em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ temos

$$\langle X, Y \rangle_\theta = -\langle X, \theta Y \rangle = \langle X, Y \rangle = 0.$$

■

Esta proposição nos diz que, para uma a decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, então a forma de Cartan-Killing é negativa semi-definida em \mathfrak{k} e positiva semi-definida em \mathfrak{s} . De fato, se $X, X' \in \mathfrak{k}$ então

$$\langle X, X' \rangle = \langle X, \theta X' \rangle = -\langle X, X' \rangle_{\theta} \leq 0$$

pois $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta}$ é produto interno, implicando que a forma de Cartan-Killing é negativa semi-definida em \mathfrak{k} . Um cálculo análogo mostra que a forma de Cartan-Killing é positiva semi-definida em \mathfrak{s} .

As decomposições de Cartan não são únicas. Veja que dado uma involução de Cartan θ e um automorfismo ϕ de \mathfrak{g} , a aplicação $\phi\theta\phi^{-1}$ também é uma involução de Cartan, pois $(\phi\theta\phi^{-1})^2 = 1$ e

$$\langle X, Y \rangle_{\theta} = -\langle X, \theta Y \rangle = -\langle \phi X, \phi \theta Y \rangle = -\langle \phi X, \phi \theta \phi^{-1}(\phi Y) \rangle = \langle \phi X, \phi Y \rangle_{\phi \theta \phi^{-1}}$$

e, portanto, temos a decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \phi\mathfrak{k} \oplus \phi\mathfrak{s}$.

Podemos tomar K como o subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie \mathfrak{k} e S como o conjunto obtido da exponencial de \mathfrak{s} , isto é, $S = \{\exp X \mid X \in \mathfrak{s}\}$, lembrando que como \mathfrak{s} não é uma subálgebra de Lie, não podemos afirmar que S é subgrupo de Lie.

Proposição 1.1.3. *O mapa $K \times \mathfrak{s} \rightarrow G$ dado por $(k, X) \mapsto k \exp(X)$ é um difeomorfismo. Assim, em nível de grupo, a decomposição de Cartan de G é $G = KS$.*

Demonstração. Teorema 6.31(c) de [6]. ■

Proposição 1.1.4. *Dado $k \in K$, então \mathfrak{k} e \mathfrak{s} são invariantes por $\text{Ad}(k)$. Além disso, $\text{Ad}(k)$ é uma isometria em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta}$ associada a uma involução de Cartan.*

Demonstração. Primeiramente, como K é conexo, $\text{Ad}(k)$ é um produto de exponenciais de adjuntas de elementos de \mathfrak{k} e podemos considerar, sem perda de generalidade, que $k = \exp(X)$ com $X \in \mathfrak{k}$. Assim, se $Y \in \mathfrak{g}$

$$\text{Ad}(\exp X)Y = e^{\text{ad}(X)}Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{ad}(X)^n Y}{n!} \quad (1.1.3)$$

e como $\text{ad}(X)$ é invariante por \mathfrak{k} e \mathfrak{s} , segue o $\text{Ad}(k)$ também é invariante.

Agora, sabemos que $\text{Ad}(k)$ é um automorfismo interno. Assim, se $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\langle \text{Ad}(k)X, \text{Ad}(k)Y \rangle_{\theta} = -\langle \text{Ad}(k)X, \theta \text{Ad}(k)Y \rangle = -\langle \text{Ad}(k)X, \text{Ad}(k)\theta Y \rangle = -\langle X, \theta Y \rangle = \langle X, Y \rangle_{\theta}$$

pois $\text{Ad}(k)$, que é um automorfismo, é isometria em relação a forma de Cartan-Killing e, a partir da soma da equação (1.1.3), $\text{Ad}(k)\theta Y = \theta \text{Ad}(k)Y$, mostrando que $\text{Ad}(k)$ é isometria em relação ao produto interno associando a involução de Cartan. ■

Proposição 1.1.5. *$\text{Ad}(K)$ é um subgrupo compacto de $\text{Gl}(\mathfrak{g})$ de transformações lineares ortogonais em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta}$.*

Demonstração. Observe que o subgrupo $\text{Ad}(K)$ é gerado pelas exponenciais $e^{\text{ad}(\mathfrak{k})}$. Define-se

$$O_{\theta} = \{T \in \text{Gl}(\mathfrak{g}) \mid \langle TX, TY \rangle_{\theta} = \langle X, Y \rangle_{\theta}, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

o conjunto das transformações lineares $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonais, que é um subgrupo compacto de $\text{Gl}(\mathfrak{g})$. A proposição 1.1.4 diz que $\text{Ad}(K) \subset O_\theta$, assim, basta mostrar que $\text{Ad}(K)$ é um subgrupo fechado em $\text{Gl}(\mathfrak{g})$. Definindo-se a aplicação $\Theta : \text{Gl}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$ por $\Theta(T) = \theta T \theta$, então a diferencial $d\Theta_1 : \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dada por $d\Theta_1(D) = \theta D \theta$ é tal que $d\Theta_1(\text{ad}(X)) = \theta \text{ad}(X) \theta = \text{ad}(\theta X)$. Pelo fato de ad ser injetora, $\text{ad}(\mathfrak{k})$ é a interseção do conjunto de pontos fixos da diferencial $d\Theta_1$ com $\text{ad}(\mathfrak{g})$. O conjunto dos pontos fixos de Θ é um subgrupo fechado cuja álgebra de Lie é o conjunto dos pontos fixos de $d\Theta_1$. Portanto, $\text{Ad}(K)$ é a componente conexa da interseção do subgrupo dos pontos fixos de Θ com $\text{Ad}(G)$. Logo, $\text{Ad}(K)$ é fechado. ■

Corolário 1.1.6. *O subgrupo K é compacto se, e somente se, o centro de G é finito. Além disso, K é sempre fechado.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.1 do Capítulo VI de [3], o centro de G está contido no subgrupo K . Assim, o isomorfismo $G/Z(G) \cong \text{Ad}(G)$, obtido a partir do Teorema do Isomorfismo para o homomorfismo Ad , induz um isomorfismo $K/Z(G) \cong \text{Ad}(K)$. Logo, K é compacto se o centro de G for finito, pois $\text{Ad}(K)$ é compacto. Porém, como G é semissimples, $Z(G)$ é discreto (pois sua álgebra de Lie tem dimensão zero) e, portanto, é finito quando K for compacto.

O subgrupo K é fechado a partir do fato de $\text{Ad}(K)$ ser compacto. ■

Este último corolário mostra porque geralmente chama-se o subgrupo K de subgrupo compacto de G .

Na teoria de álgebra de Lie complexa, podemos decompor um espaço através dos espaços de pesos associados à uma subálgebra de Cartan, que resultará em elementos complexos. Aqui, queremos proceder de modo que obtenhamos uma decomposição análoga, porém com valores reais. Para tal, considere uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, ou seja, que não está contida propriamente em nenhuma outra subálgebra abeliana de \mathfrak{s} . A existência de \mathfrak{a} está garantida pelo fato de \mathfrak{s} conter subálgebras de dimensão 1, que são abelianas, e pelo fato de \mathfrak{s} ter dimensão finita.

Seja $\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear de \mathfrak{a} e considere o subespaço

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}(H)X = \alpha(H)X, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Quando $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ para $\alpha \neq 0$ então dizemos que α é uma raiz (restrita) de \mathfrak{g} em relação à \mathfrak{a} . Observe que a existência destes funcionais reais ocorre devido ao fato de que $\text{ad}(H)$, para $H \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, é uma matriz simétrica em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ e, portanto, todos os seus autovalores são reais. Denote por Π o conjunto de todas as raízes de \mathfrak{g} . Tomando $\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}(H)X = 0 \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$ como o subespaço de peso associado à raiz nula, então a álgebra \mathfrak{g} se decompõe como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (1.1.4)$$

Veja que dada duas raízes $\alpha, \beta \in \Pi$, então $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Isto segue da identidade de Jacobi, pois se $H \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_\beta$

$$\text{ad}(H)[X, Y] = [\text{ad}(H)X, Y] + [X, \text{ad}(H)Y] = (\alpha(H) + \beta(H))[X, Y].$$

Lema 1.1.7. *O centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{g} é $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, onde \mathfrak{m} é o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} .*

Demonstração. Veja que $\theta(\mathfrak{z}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, pois se $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ e $Y \in \mathfrak{a}$

$$[\theta X, Y] = \theta[X, \theta Y] = -\theta[X, Y] = 0.$$

Daí, como este centralizador é invariante por θ , então $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{s})$. Assim, pela maximalidade de \mathfrak{a} e como $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{s}$ então $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{s}$. Logo, pela definição, $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{k}$. ■

Pela definição, o subespaço do peso nulo é $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. Portanto, a partir da fórmula (1.1.4), tem-se que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (1.1.5)$$

Proposição 1.1.8. *Sejam \mathfrak{a} e \mathfrak{a}' duas subálgebras abelianas maximais de \mathfrak{s} . Então, existe ϕ um automorfismo interno de \mathfrak{k} em \mathfrak{g} , ou seja, $\phi = e^{\text{ad}(X_1)} \dots e^{\text{ad}(X_i)}$ com $X_i \in \mathfrak{k}$ para todo i , tal que $\phi\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$.*

Demonstração. Proposição 12.26 de [12]. ■

A partir desta última proposição, definimos o posto real de uma álgebra de Lie como a dimensão comum das subálgebras abelianas maximais em \mathfrak{s} .

As câmaras de Weyl associadas ao par (θ, \mathfrak{a}) são as componentes conexas do conjunto

$$\bar{\mathfrak{a}} = \{H \in \mathfrak{a} \mid \alpha(H) \neq 0, \text{ para toda raiz } \alpha \in \Pi\}$$

que é um conjunto aberto e denso. Os elementos de $\bar{\mathfrak{a}}$ são chamados elementos regulares. Escolhendo uma das câmaras de Weyl como a câmara positiva \mathfrak{a}^+ , definimos o conjunto das raízes positivas como $\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi \mid \alpha(H) > 0 \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}^+\}$.

Considere os seguintes subespaços:

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ e } \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}. \quad (1.1.6)$$

Observe que o subespaço \mathfrak{n} é uma subálgebra de Lie, pois se $\alpha, \beta \in \Pi^+$ então pode-se ocorrer duas possibilidades

- Se $\alpha + \beta$ é raiz positiva então sabe-se que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{n}$;
- Se $\alpha + \beta$ não é raiz então $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 0$, implicando que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0 \in \mathfrak{n}$.

Do mesmo modo, vale que \mathfrak{n}^- é álgebra de Lie. Estas subálgebras se relacionam pela equação $\theta\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^-$, pois se $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $H \in \mathfrak{a}$, então

$$\text{ad}(H)(\theta X) = [H, \theta X] = \theta[\theta H, X] = -\theta[H, X] = -\theta\text{ad}(H)X = -\alpha(H)(\theta X)$$

logo, como θ é um automorfismo, $\theta\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$, implicando que $\theta\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^-$. Note que $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}^- = 0$.

Proposição 1.1.9. *Sejam $\kappa(X) = \frac{X+\theta X}{2}$ e $\sigma(X) = \frac{X-\theta X}{2}$ as projeções de $X \in \mathfrak{g}$ em \mathfrak{k} e \mathfrak{s} , respectivamente. Então as restrições de $\kappa|_{\mathfrak{n}}$ e $\sigma|_{\mathfrak{n}}$ são injetoras sobre suas imagens. Mais ainda, temos que $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \kappa(\mathfrak{n})$ e $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \sigma(\mathfrak{n})$ são somas ortogonais em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$.*

Demonstração. Veja que se $X \in \mathfrak{n}$ então $2\sigma(X) = X - \theta X \in \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^-$, ou seja, se $\sigma(X) = 0$ então $X = 0$, mostrando que $\sigma|_{\mathfrak{n}}$ é injetora.

Vamos mostrar que $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \sigma(\mathfrak{n})$. Através da decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^-$ obtida pela equação (1.1.5), dado $X \in \mathfrak{s}$, existem $L \in \mathfrak{m}$, $H \in \mathfrak{a}$, $Y \in \mathfrak{n}$ e $Z \in \mathfrak{n}^-$ tal que $X = L + H + Y + Z$. Daí

$$L + H + Y + Z = X = -\theta X = -L + H - \theta Y - \theta Z$$

isto é, como $\theta\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^-$,

$$L = 0 \text{ e } Z = -\theta Y.$$

Assim, $X = H + Y - \theta Y \in \mathfrak{a} \oplus \sigma(\mathfrak{n})$, o que mostra que $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{a} \oplus \sigma(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{s}$, pois σ é uma projeção em \mathfrak{s} .

O resultado é análogo para a projeção κ e $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \kappa(\mathfrak{n})$. ■

Podemos então construir a decomposição de Iwasawa da álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Teorema 1.1.10. *Considere o terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ associado à \mathfrak{g} . Então, a decomposição de Iwasawa da álgebra de Lie \mathfrak{g} é dada por*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

onde \mathfrak{n} é uma subálgebra nilpotente e $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é uma subálgebra solúvel.

Demonstração. A partir da equação (1.1.5) e como $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{k}$ temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{\alpha} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n} + \mathfrak{n}^-.$$

Para $X \in \mathfrak{n}^-$ temos

$$X = X + \theta X - \theta X \in \mathfrak{k} + \mathfrak{n}$$

pois $\theta X \in \mathfrak{n}$ e $\theta(X + \theta X) = \theta X + X$, implicando que $X + \theta X \in \mathfrak{k}$. Assim, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$. Pela proposição 1.1.9 segue que $\dim(\mathfrak{s}) = \dim(\mathfrak{a} \oplus \sigma(\mathfrak{n})) = \dim(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) = \dim(\mathfrak{a} + \mathfrak{n})$ e, pela decomposição de Cartan, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.

A subálgebra \mathfrak{n} é claramente nilpotente pois o conjunto das raízes positiva Π^+ é um conjunto finito.

Agora, a subálgebra $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é solúvel pois $[\mathfrak{n}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{n}$ e

$$[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] + [\mathfrak{n}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$$

implicando que $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] = (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})'$ é nilpotente. Logo, $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é solúvel. ■

Ao contrário da decomposição de Cartan, a decomposição de Iwasawa se escreve como soma direta de subálgebras de \mathfrak{g} . Definindo K , A e N como os subgrupos conexos gerados por \mathfrak{k} , \mathfrak{a} e \mathfrak{n} , respectivamente, o seguinte teorema dá a decomposição de Iwasawa a nível do grupo de Lie.

Teorema 1.1.11. *O mapa $K \times A \times N \rightarrow G$ dado por $(k, h, l) \mapsto khl$ é um difeomorfismo. Logo, a decomposição de Iwasawa do grupo G é definido como $G = KAN$.*

Demonstração. Teorema 6.46 de [6]. ■

1.1.2 Sistema de raízes e o Grupo de Weyl

Seja Π o conjunto das raízes (restritas) de \mathfrak{g} . Então, o conjunto Π gera o dual \mathfrak{a}^* . De fato, observe que o aniquilador do gerado de Π é gerado pelo seguinte conjunto

$$\langle \Pi \rangle^0 = \langle \{H \in \mathfrak{a} \mid \alpha(H) = 0, \text{ para toda raiz } \alpha \in \Pi\} \rangle.$$

Logo, pela decomposição (1.1.4), $\langle \Pi \rangle^0 = 0$, pois a única possibilidade de $\alpha(H) = 0$ para todo $\alpha \in \Pi$ é tomando $H = 0$.

Lema 1.1.12. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e W um subespaço vetorial de V . Então*

$$\dim W + \dim W^0 = \dim V$$

onde $W^0 = \{f \in V^* \mid f(w) = 0 \text{ para todo } w \in W\}$ é o aniquilador de W .

Este lema é um resultado de álgebra linear presente em Hoffman [4]. A partir dele, tem-se que o subespaço gerado por Π é exatamente \mathfrak{a}^* .

A forma de Cartan-Killing, quando restrita a \mathfrak{a} , é um produto interno. Assim, para cada raiz $\alpha \in \Pi$, existe um elemento $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ tal que

$$\alpha(\cdot) = \langle H_\alpha, \cdot \rangle.$$

Como Π gera \mathfrak{a}^* , esta expressão define um isomorfismo entre \mathfrak{a} e \mathfrak{a}^* que associa cada $H \in \mathfrak{a}$ com $\langle H, \cdot \rangle = \alpha \in \mathfrak{a}^*$. Definiremos um produto interno no dual \mathfrak{a}^* por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha).$$

A reflexão de um elemento $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ é uma aplicação $r_\alpha : \mathfrak{a}^* \rightarrow \mathfrak{a}^*$ tal que

$$r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha.$$

Definição 1.1.13. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} . Um sistema de raízes do espaço vetorial E é um conjunto $\Pi \subset E$ que satisfaz*

1. Π é finito, gera E e não contém 0;
2. Para todo $\alpha \in \Pi$ existe uma reflexão r_α em relação a α tal que $r_\alpha(\Pi) = \Pi$;
3. Para todos $\alpha, \beta \in \Pi$, $r_\alpha(\beta) - \beta$ é um múltiplo inteiro de α .

Proposição 1.1.14. *O conjunto $\Pi \subset \mathfrak{a}^*$ é um sistema de raízes.*

Demonstração. Apêndice B de [7]. ■

Temos a seguinte propriedade sobre o conjunto Π das raízes:

Proposição 1.1.15. *Se $\alpha \in \Pi$, então $t\alpha$ também é raiz somente quando t é ± 1 , $\pm \frac{1}{2}$ ou ± 2 .*

Demonstração. Como Π é um sistema de raízes, pelo terceiro item da definição de sistema de raízes, tem-se que

$$\begin{aligned} r_\alpha(t\alpha) - t\alpha &= -\frac{2\langle\alpha, t\alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\alpha = -2t\alpha \\ r_{t\alpha}(\alpha) - \alpha &= -\frac{2\langle t\alpha, \alpha\rangle}{\langle t\alpha, t\alpha\rangle}t\alpha = \frac{-2}{t}(t\alpha) \end{aligned}$$

são múltiplos inteiros, respectivamente, de α e $t\alpha$. Ou seja, $2t$ e $\frac{2}{t}$ são inteiros, implicando que t é $\pm 1, \pm 2$ ou $\pm \frac{1}{2}$. ■

Dada uma escolha do par (θ, \mathfrak{a}) , definimos o grupo de Weyl como o grupo \mathcal{W} gerado pelas reflexões r_α para toda raiz $\alpha \in \Pi$.

Proposição 1.1.16. *O grupo de Weyl \mathcal{W} obtido do par (θ, \mathfrak{a}) é finito.*

Demonstração. Primeiro, veja que quando tomamos um elemento $w \in \mathcal{W}$, ele é invariante por Π , isto é, $w(\Pi) = \Pi$. Isto decorre do fato de que a reflexão $r_\alpha(\beta) \in \Pi$ quanto $\alpha, \beta \in \Pi$. Assim, podemos associar cada elemento $w \in \mathcal{W}$ com uma permutação do conjunto Π :

$$(w \in \mathcal{W}) \longleftrightarrow (w|_\Pi : \Pi \rightarrow \Pi).$$

Esta associação é injetora, pois para que $w|_\Pi$ seja a identidade, devemos ter $w = e \in \mathcal{W}$. Deste modo, temos um isomorfismo entre o grupo de Weyl e as permutações de Π . Este último é finito. Portanto, \mathcal{W} é finito. ■

Defina os seguintes subgrupos de Lie:

$$\begin{aligned} M^* &= \text{Norm}_K(\mathfrak{a}) = \{g \in K \mid \text{Ad}(g)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}, \\ M &= \text{Centr}_K(\mathfrak{a}) = \{g \in K \mid \text{Ad}(g)|_\mathfrak{a} = \text{Id}_\mathfrak{a}\}. \end{aligned}$$

A partir destes subgrupos, o seguinte teorema fornece uma maneira equivalente de se definir o grupo de Weyl.

Teorema 1.1.17. *O grupo de Weyl \mathcal{W} é isomorfo à M^*/M .*

A demonstração desse fato, que está em [6], vem do Teorema do Isomorfismo aplicado a representação

$$\begin{aligned} M^* &\longrightarrow \text{Gl}(\mathfrak{a}) \\ g &\longmapsto \text{Ad}(g)|_\mathfrak{a} \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Ou seja, para todo $w \in \mathcal{W}$ existe $g \in M^*$ tal que $w = \text{Ad}(g)|_\mathfrak{a}$ e se $w = \text{Ad}(g_1)|_\mathfrak{a} = \text{Ad}(g_2)|_\mathfrak{a}$ então $g_1M = g_2M$.

Este teorema relaciona duas construções para o grupo de Weyl de origens diferentes. Quando definido através das reflexões, ele depende de um sistema de raízes Π sem fazer nenhuma menção ao grupo, enquanto que quando definido pelo quociente M^*/M , é necessário conhecer o grupo G .

Um subconjunto das raízes positivas $\Sigma \subset \Pi^+$ é um dito sistema simples de raízes associado à câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ se:

1. Σ gera \mathfrak{a}^* ;
2. Toda raiz positiva é uma combinação linear de raízes de Σ , tal que os coeficientes desta combinação são não-negativos.

Proposição 1.1.18. *Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ o terno associado à \mathfrak{g} . Então,*

1. *Toda câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ admite uma escolha Σ de sistema de raízes simples;*
2. *O grupo de Weyl \mathcal{W} é transitivo no conjunto dos sistemas simples de raízes, isto é, se Σ e Σ' são sistemas de raízes, então existe único $w \in \mathcal{W}$ tal que $w(\Sigma) = \Sigma'$;*
3. *O grupo de Weyl é gerado pelo conjunto $\{r_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\}$ das reflexões simples em torno das raízes de Σ .*

Demonstração. Proposições 9.10, 9.11 e 9.12 e Teorema 9.14 de [12]. ■

O terceiro item desta proposição diz que dado um elemento $w \in \mathcal{W}$, podemos escrevê-lo como o produto $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k}$, onde cada um dos r_{α_i} são reflexões em torno de raízes simples $\alpha_i \in \Sigma$. Quando escrevemos w desta forma, dizemos que esta é uma decomposição em termo de reflexões de raízes simples de w . As decomposição em raízes simples de w não são únicas, mas podemos escolher decomposições que contenham o menor número possível de reflexões. Para tal, seja $w \in \mathcal{W}$ e considere o conjunto

$$\Pi_w = w(\Pi^-) \cap \Pi^+$$

das raízes positivas que são levadas em negativas pelo elemento w^{-1} . Denote por $l(w)$ o número de elementos do conjunto Π_w . Uma decomposição em raízes simples de w é dita minimal se a quantidade de reflexões simples de w é a menor possível dentre todas decomposições existentes. Quando escrevemos $w = r_1 \cdots r_k$ numa decomposição minimal, onde $r_i = r_{\alpha_i}$ para $\alpha_i \in \Sigma$, tem-se que $k = l(w)$.

Explicitamente, dada a decomposição minimal $w = r_1 \cdots r_{l(w)}$, o conjunto Π_w é formado pelas seguintes raízes

$$\Pi_w = \{\alpha_1, r_1\alpha_2, \dots, r_1 \cdots r_{l(w)-1}\alpha_{l(w)}\}.$$

Também temos que, se $w \in \mathcal{W}$ e $\alpha \in \Sigma$ então

$$l(wr_\alpha) = \begin{cases} l(w) + 1 & , \text{ se } w\alpha > 0 \\ l(w) - 1 & , \text{ se } w\alpha < 0 \end{cases} .$$

Agora, seja $\Theta \subset \Sigma$ um subconjunto qualquer. Será a partir da escolha deste subconjunto que definiremos as subálgebras parabólicas e, conseqüentemente, as variedades flag. Definimos $\langle \Theta \rangle \subset \Pi$ como o conjunto gerado por Θ , ou seja, se $\alpha, \beta \in \langle \Theta \rangle$ são raízes tais que $k_\alpha\alpha + k_\beta\beta \in \Pi$ para $k_\alpha, k_\beta \in \mathbb{Z}$, então $k_\alpha\alpha + k_\beta\beta \in \langle \Theta \rangle$. Seja também $\langle \Theta \rangle^+ = \langle \Theta \rangle \cap \Pi^+$, o conjunto das raízes positivas gerado por Θ .

Vamos definir alguns subgrupos que posteriormente serão úteis. Seja $\Theta \subset \Sigma$, então definimos \mathcal{W}_Θ como o subgrupo de \mathcal{W} gerado pelas reflexões em torno de raízes $\alpha \in \Theta$, isto é,

$$\mathcal{W}_\Theta = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Theta \rangle$$

e definimos \mathcal{W}^Θ como o subconjunto de \mathcal{W} dado por

$$\mathcal{W}^\Theta = \{w \in \mathcal{W} \mid l(wr_\alpha) = l(w) + 1, \text{ para todo } \alpha \in \Theta\} \quad (1.1.8)$$

que também pode ser definida como

$$\mathcal{W}^\Theta = \{w \in \mathcal{W} \mid w(\Theta) \subset \Pi^+\}.$$

O conjunto \mathcal{W}^Θ é denominado de conjuntos dos representantes minimais das classes laterais $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$, pois cada classe $w\mathcal{W}_\Theta$ possui apenas um único elemento de \mathcal{W}^Θ de comprimento minimal, como pode ser observado a partir da definição.

É possível descrever uma relação de ordem parcial no grupo de Weyl \mathcal{W} da seguinte maneira:

Definição 1.1.19. *Sejam $w, w' \in \mathcal{W}$. Dizemos que $w' \leq w$ se, e somente se, dada decomposição minimal $w = r_1 \cdots r_n$, então w' possui uma decomposição minimal $w' = r_{i_1} \cdots r_{i_l}$, com $1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n$. Tal relação de ordem é chamada ordem de Bruhat-Chevalley. Em particular, denota-se por $w' < w$ quando $w' \leq w$ e $w' \neq w$.*

Seja Σ um sistema simples relacionado à câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ . Assim, $-\Sigma$ é um sistema simples de raízes relacionado à câmara negativa $-\mathfrak{a}^+$. Pela Proposição 1.1.18, existe apenas um elemento $w_0 \in \mathcal{W}$ tal que $w_0\Sigma = -\Sigma$. Este elemento w_0 é chamado de involução principal e satisfaz $w_0^2 = 1$, ou seja, é involutivo. É importante notar que a involução principal w_0 é o elemento maximal de \mathcal{W} em relação a ordem de Bruhat-Chevalley.

1.1.3 Subgrupo e subálgebra parabólica

Considere a escolha $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ sobre a álgebra de Lie \mathfrak{g} . A subálgebra semissimples $\mathfrak{g}(\Theta)$ de tipo Θ associada à escolha de $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ é a subálgebra definida por

$$\mathfrak{g}(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_\alpha$$

e as subálgebras nilpotentes $\mathfrak{n}(\Theta)$ e $\mathfrak{n}(\Theta)^-$ são dadas por

$$\mathfrak{n}(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \mathfrak{n}(\Theta)^- = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

O fato de $\mathfrak{g}(\Theta)$ ser semissimples esta demonstrado em [14, Lema 1.2.3.14]. As subálgebras $\mathfrak{n}(\Theta)$ e $\mathfrak{n}(\Theta)^-$ são nilpotentes, pois $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Denota-se por $\mathfrak{a}(\Theta)$ a subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}(\Theta)$ gerado por $\{H_\alpha \mid \alpha \in \langle \Theta \rangle\}$, onde $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ é o elemento que se associa com a raiz α no dual \mathfrak{a}^* , isto é, $\alpha = \langle H_\alpha, \cdot \rangle$. O complemento ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em \mathfrak{a} pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ será denotada como a subálgebra \mathfrak{a}_Θ , ou seja, $\mathfrak{a}_\Theta = \mathfrak{a} \ominus \mathfrak{a}(\Theta)$.

Define-se a subálgebra parabólica minimal como escrita pela seguinte soma direta

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

e a subálgebra parabólica de tipo Θ como

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta).$$

Observe que as subálgebras parabólicas são de fato subálgebras de \mathfrak{g} , decorrendo da propriedade $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. A subálgebra parabólica minimal pode ser escrita como $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\emptyset$, ou seja, é a subálgebra parabólica do tipo $\Theta = \emptyset$.

No nível de grupo, definimos o subgrupo parabólico P_Θ do tipo Θ como o normalizador de \mathfrak{p}_Θ em G , isto é,

$$P_\Theta = \{g \in G \mid \text{Ad}(g)\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p}_\Theta\}.$$

Lema 1.1.20. *A álgebra de Lie de P_Θ é \mathfrak{p}_Θ .*

Demonstração. A subálgebra \mathfrak{p}_Θ é auto-normalizadora, ou seja, se $[X, \mathfrak{p}_\Theta] \subset \mathfrak{p}_\Theta$ então $X \in \mathfrak{p}_\Theta$. De fato, pela decomposição (1.1.5) temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_\Theta \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Basta ver o que ocorre quando $X \notin \mathfrak{p}_\Theta$. Nesse caso, existe $\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+$ tal que $X \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Dado algum $H \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ então $[H, X] = -\alpha(H)X$, implicando que $[X, H] = -[H, X] = \alpha(H)X \notin \mathfrak{p}_\Theta$.

Agora, como $\mathfrak{p}_\Theta = \text{Norm}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}_\Theta)$, ela deve ser a álgebra de Lie de P_Θ , pois é a álgebra da componente conexa da identidade de P_Θ . ■

Definimos como subgrupo parabólico minimal o subgrupo $P = P_\emptyset$, que é o normalizador de \mathfrak{p} em G . A seguinte proposição dá um decomposição para este subgrupo.

Proposição 1.1.21. *Dados $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ escolhidos sobre uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , o subgrupo parabólico de tipo Θ é descrito pelo produto $P = MAN$, onde $M = \text{Centr}_K(\mathfrak{a})$.*

Demonstração. Primeiramente, vejamos que $MAN \subset P$. A álgebra de Lie de M é \mathfrak{m} . Assim, o gerado por \mathfrak{m} é o subgrupo conexo da identidade de M , isto é, $M_0 = \langle \exp \mathfrak{m} \rangle$. O subgrupo $M_0AN \subset P$ pois ele é conexo e tem álgebra de Lie $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Dado $m \in M$, se $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ para alguma raiz α e $H \in \mathfrak{a}$, então

$$\text{ad}(H)\text{Ad}(m)X = [H, \text{Ad}(m)X] = [\text{Ad}(m)H, \text{Ad}(m)X] = \text{Ad}(m)[H, X] = \alpha(H)\text{Ad}(m)X.$$

Deste modo, $\text{Ad}(m)X \in \mathfrak{g}_\alpha$, implicando que $\text{Ad}(m)\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ e assim, $m \in P$. Precisamos provar a recíproca. Verifiquemos que $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{a}$. Seja $A + H + X \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$,

$$\theta(A + H + X) = A - H + \theta X$$

com $\theta X \in \mathfrak{n}^-$. Se $A + H + X \in \mathfrak{s}$, então $A - H + \theta X = -A - H - X$, ou seja, $2A = -X - \theta X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{a} = 0$. Logo $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{s} \subset \mathfrak{a}$.

Agora, seja $g \in P$ tal que $g = uhn \in KAN$. Como $AN \subset P$, então $u \in P$, isto é, $\text{Ad}(u)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. Em particular $\text{Ad}(u)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ e $\text{Ad}(u)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, segue que $\text{Ad}(u)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, mostrando $u \in M^*$. Daí,

$w = \text{Ad}(u)|_{\mathfrak{a}} \in \mathcal{W}$ pois $u \in M^*$. Através de alguns cálculos, temos que $w\alpha = \alpha \circ \text{Ad}(u^{-1}|_{\mathfrak{a}})$ é raiz com $\text{Ad}(u)\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{w\alpha}$.

Como podemos escrever $w \neq 0$ através de reflexões de raízes, por [12, Corolário 9.20], existe raiz $\alpha > 0$ tal que $w\alpha < 0$. Mas, $\text{Ad}(u)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, então $\text{Ad}(u)\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{w\alpha} \subset \mathfrak{p}$, com $w\alpha < 0$. Isso só é possível se $w = \text{Ad}(u)|_{\mathfrak{a}} = \text{Id}$, o que significa que $u \in M$ e, portanto, $MAN \supset P$. ■

Podemos generalizar a proposição anterior para um subgrupo parabólico do tipo Θ .

Teorema 1.1.22. *Dados $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ escolhidos sobre uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , então a subálgebra e o subgrupo parabólico de tipo Θ se decompõem como*

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \quad e \quad P_\Theta = K_\Theta AN$$

onde, $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}_\Theta)$ é o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta = \mathfrak{a} \ominus \mathfrak{a}(\Theta)$ em \mathfrak{k} e

$$K_\Theta = \text{Centr}_K(\mathfrak{a}_\Theta) = \{k \in K \mid \text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}_\Theta} = \text{Id}|_{\mathfrak{a}_\Theta}\}$$

é o centralizador de \mathfrak{a}_Θ no subgrupo K .

Demonstração. Teoremas A.36 e A.45 de [7]. ■

1.2 Variedades flag reais

Seja G um grupo de Lie conexo não-compacto e semissimples com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Dado uma escolha de $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$, uma variedade flag do tipo Θ é o espaço homogêneo de G sobre um subgrupo parabólico do tipo Θ , ou seja, é $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$. A origem b_Θ da variedade flag é a classe lateral $1 \cdot P_\Theta$. No caso de $\Theta = \emptyset$, denotamos por esta variedade por \mathbb{F} e a chamamos de variedade flag maximal, e sua origem será b_0 .

Proposição 1.2.1. *O subgrupo K age transitivamente na variedade flag \mathbb{F}_Θ .*

Demonstração. Pela decomposição de Iwasawa, temos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}_\Theta$. Como a álgebra de Lie da órbita $K \cdot b_\Theta$ é $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{g}$, então a órbita tem dimensão máxima, implicando que é aberta. Mas, pelo Corolário 1.1.6, K é fechado e assim, $K \cdot b_\Theta = KP_\Theta$ é fechado. Logo, $K \cdot b_\Theta$ é uma componente conexa de \mathbb{F}_Θ . Porém, G é conexo, implicando que \mathbb{F}_Θ é conexo. Portanto, $\mathbb{F}_\Theta = K \cdot b_\Theta$. ■

1.2.1 Órbitas em \mathfrak{s}

Podemos realizar a variedade flag dentro do subespaço (euclidiano) \mathfrak{s} . Seja $\Theta \subset \Sigma$, então existe H_Θ no fecho da câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ tal que

$$\Theta = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(H_\Theta) = 0\}.$$

A existência de H_Θ , que não é única, se baseia no fato de Σ ser uma base para \mathfrak{a}^* . Então, tem-se uma base dual $\{H_\alpha \in \mathfrak{a}^+ \mid \alpha \in \Sigma\}$ de \mathfrak{a}^+ com $\alpha = \langle H_\alpha, \cdot \rangle_\theta$, bastando tomar $H_\Theta = \sum_{\beta \in \Sigma \setminus \Theta} H_\beta$.

Pela decomposição de Iwasawa e pelo Teorema 1.1.22, a variedade flag pode ser descrita como

$$\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta = KAN/K_\Theta AN \cong K/K_\Theta.$$

Agora, lembrando que a adjunta de K é invariante por \mathfrak{s} , a órbita $\text{Ad}(K)H_\Theta$ está contida em \mathfrak{s} , uma vez que $H_\Theta \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$. A isotropia desta ação é K_{H_Θ} e coincide com K_Θ . Logo,

$$\text{Ad}(K)H_\Theta \cong K/K_\Theta \cong \mathbb{F}_\Theta.$$

Portanto, a variedade flag pode ser imersa em \mathfrak{s} como uma órbita por $\text{Ad}(K)$ de H_Θ . A variedade flag maximal \mathbb{F} é órbita por $\text{Ad}(K)$ de um elemento regular $H \in \mathfrak{a}$, pois todo elemento regular satisfaz $\{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(H) = 0\} = \emptyset = \Theta$. A partir desta realização, uma variedade flag também pode ser denotada como \mathbb{F}_{H_Θ} .

Observação: Para todo $X \in \mathfrak{s}$, X pertence a órbita por $\text{Ad}(K)$ de algum $H \in \mathfrak{a}$. De fato, todo $X \in \mathfrak{s}$ está contido numa subálgebra abeliana maximal \mathfrak{a}' e, pela Proposição 1.1.8, existe $k \in K$ e $H \in \mathfrak{a}$ tal que $\text{Ad}(k)H = X$. Assim, toda órbita de $\text{Ad}(K)$ que passa por $X \in \mathfrak{s}$ se identifica como a variedade flag \mathbb{F}_Θ , particionando o espaço \mathfrak{s} .

Proposição 1.2.2. *Toda variedade flag é compacta.*

Demonstração. Como K age transitivamente em \mathbb{F}_Θ , então \mathbb{F}_Θ é fechada. Pela discussão anterior, para todo $b \in \mathbb{F}_\Theta$ existe $k \in K$ tal que $b \leftrightarrow \text{Ad}(k)H_\Theta \in \mathfrak{s}$. Considerando a norma em \mathfrak{s} obtida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$, temos que $\|\text{Ad}(k)H_\Theta\| = \|H_\Theta\|$ pois a adjunta é uma isometria sobre este produto interno. Assim, a variedade flag \mathbb{F}_Θ está imersa dentro da esfera de raio $\|H_\Theta\|$ no espaço \mathfrak{s} . Como toda esfera é compacta e o flag é fechado, então a variedade flag é compacta. ■

Se um grupo de Lie G tem posto 1, então $\dim \mathfrak{a} = 1$ e existe somente uma raiz simples α , com a possibilidade de 2α ser raiz positiva. Só existe uma possibilidade não trivial de variedade flag, justamente a flag maximal. Então, esta variedade flag é isomorfa a esfera S^n com $n = \dim \mathfrak{s} - 1 = \dim(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha})$. De fato, as câmaras de Weyl \mathfrak{a}^+ são semirretas iniciadas na origem. Sabendo que o espaço \mathfrak{s} é particionado por $\text{Ad}(K)$ -órbitas, dado $X \in \mathfrak{s}$, existe $H \in \mathfrak{a}^+$ tal que $\text{Ad}(K)H = X$. Fixando $H \in \mathfrak{a}^+$, seja $Y \in \mathfrak{s}$ na esfera de raio $\|H\|$. Então $Y \in \text{Ad}(K)H$, pois, caso contrário, pelo fato que \mathfrak{s} ser particionado por $\text{Ad}(K)$ -órbitas, deveria existir $H' \in \mathfrak{a}^+ \setminus \{H\}$ tal que $Y \in \text{Ad}(K)H'$ e $\|H\| = \|H'\|$, mas como \mathfrak{a}^+ é uma semirreta, isto é impossível. Isto é, $S^{\dim \mathfrak{s} - 1} \subset \text{Ad}(K)H$ e, portando, $\mathbb{F}_\Theta \cong S^{\dim \mathfrak{s} - 1}$.

1.2.2 Fibrção

Dados $\Theta_1 \subset \Theta_2 \subset \Sigma$, tem-se que

$$\mathfrak{p}_{\Theta_1} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta_1) \subset \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta_2) = \mathfrak{p}_{\Theta_2}$$

implicando que $P_{\Theta_1} \subset P_{\Theta_2}$. Assim, podemos definir uma aplicação natural

$$\begin{aligned} \pi_{\Theta_2}^{\Theta_1} : \mathbb{F}_{\Theta_1} &\longrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_2} \\ gP_{\Theta_1} &\longmapsto gP_{\Theta_2} \end{aligned}$$

que será chamada de fibração sobre as variedades flag parciais. Sua fibra típica é denotada por $f_{\Theta_1, \Theta_2} = P_{\Theta_2}/P_{\Theta_1}$.

Sejam $\Theta \in \Sigma$ e L_Θ o centralizador de \mathfrak{a}_Θ em G . Assim, o subgrupo K_Θ , que é o centralizador de \mathfrak{a}_Θ em K , também se escreve como $K_\Theta = L_\Theta \cap K$. A álgebra de Lie \mathfrak{l}_Θ de L_Θ é redutível (ou seja, a representação adjunta de \mathfrak{l}_Θ em \mathfrak{g} é semissimples) e decompõe-se como $\mathfrak{l}_\Theta = \mathfrak{m}_\Theta \oplus \mathfrak{a}_\Theta$, com \mathfrak{m}_Θ semissimples. Tomando o subgrupo conexo $M_\Theta^0 = \langle \exp \mathfrak{m}_\Theta \rangle$ e o subgrupo $M_\Theta = K_\Theta M_\Theta^0$, segue que M_Θ^0 é a componente da identidade de M_Θ . Pela decomposição do Teorema 1.1.22, $P_\Theta = K_\Theta AN$. Logo,

$$P_\Theta/P \cong K_\Theta/M \cong M_\Theta/(M_\Theta \cap P)$$

é uma variedade flag maximal.

Deste modo, para uma fibração partindo de uma variedade flag maximal $\pi_\Theta : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ a fibra P_Θ/P é uma variedade flag maximal do grupo de Lie M_Θ , cujo posto é dado por $|\Theta|$. O grupo de Weyl de M_Θ é \mathcal{W}_Θ .

Em particular, no caso de $\Theta = \{\alpha\}$, então M_Θ tem posto 1. A fibração $\pi_{\{\alpha\}} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_{\{\alpha\}}$ tem fibra $P_{\{\alpha\}}/P$ que coincide com a única variedade flag do grupo $G(\alpha)$ cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{g}(\{\alpha\}) = \sum_{\beta \in \langle \alpha \rangle} \mathfrak{g}_\beta$. Isto é, esta fibra é uma esfera de dimensão $\dim(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha})$.

No caso geral, a fibra f_{Θ_1, Θ_2} de $\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}$ é uma variedade flag.

A ação de G na variedade flag \mathbb{F}_Θ é a aplicação $G \times \mathbb{F}_\Theta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ tal que $g \cdot (hP) = (gh)P$, onde $g \in G$ e $hP \in \mathbb{F}_\Theta$. Note que esta ação é equivariante na fibração $\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}$, ou seja, se $g \in G$ e $X \in \mathbb{F}_{\Theta_1}$ então

$$\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}(g \cdot X) = g \cdot \pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}(X).$$

1.2.3 Decomposição de Bruhat

A decomposição de Bruhat de uma variedade flag parcial \mathbb{F}_Θ é uma decomposição em órbitas do subgrupo nilpotente N agindo sobre $\tilde{w}b_\Theta$, onde $\tilde{w} \in M^*$ é um representante da classe lateral $w\mathcal{W}_\Theta \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$ e b_Θ é a origem do flag \mathbb{F}_Θ . Isto é,

$$\mathbb{F}_\Theta = \coprod_{w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta} N \cdot \tilde{w}b_\Theta$$

com $N \cdot \tilde{w}_1 b_\Theta = N \cdot \tilde{w}_2 b_\Theta$ se $w_1 \mathcal{W}_\Theta = w_2 \mathcal{W}_\Theta$. Em geral, suprimimos o til de $\tilde{w} \in M^*$ e denotamos apenas $N \cdot wb_\Theta$.

Cada N -órbita é homeomorfa à um espaço euclidiano. Diremos então que $N \cdot wb_\Theta$ é uma célula de Bruhat. A dimensão desta célula é dada por

$$\dim(N \cdot wb_\Theta) = \sum_{\alpha \in \Pi_w \setminus \langle \Theta \rangle} m_\alpha$$

onde $m_\alpha = \dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ é a multiplicidade da raiz α .

No caso da variedade flag maximal, sua decomposição de Bruhat se escreve como

$$\mathbb{F} = \coprod_{w \in \mathcal{W}} N \cdot wb_0$$

onde b_0 é a origem de \mathbb{F} .

Iremos apresentar a demonstração da decomposição de Bruhat apenas para o caso das variedades flag maximais.

Observação: Um resultado demonstrado por Lucas Seco [13] diz que podemos obter o caso geral da decomposição de Bruhat para variedades flag parciais a partir da decomposição das variedades flag maximais, feito via argumentos de dinâmica. Este método difere do que é usualmente apresentado nos textos tradicionais sobre teoria semissimples real, que utilizam ferramentas algébricas para demonstrá-lo.

Demonstração da decomposição de Bruhat para variedades flag maximais

Lema 1.2.3. *Dados $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$ então $\mathfrak{z}(\text{Ad}(g)X) = \text{Ad}(g)\mathfrak{z}(X)$. Em particular, $\text{Ad}(g)(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$*

Demonstração. A primeira parte é imediata da definição.

Seja $H \in \mathfrak{a}$ um elemento regular, ou seja, $\alpha(H) \neq 0$ para toda raiz $\alpha \in \Pi$. Assim $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{z}(H)$. Reciprocamente, se $X \in \mathfrak{z}(H)$ então $X \notin \mathfrak{g}_\alpha$ para toda raiz, pois $\alpha(H) \neq 0$ e $[H, X] = 0$. Pela decomposição (1.1.5), temos que $X \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. Logo, $\mathfrak{z}(H) = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$.

Agora, temos a seguinte fórmula

$$\text{ad}(\text{Ad}(g)H) = \text{Ad}(g) \circ \text{ad}(H) \circ \text{Ad}(g)^{-1}$$

isto é, todos autovalores $\alpha(H)$ de $\text{ad}(H)$ também são autovalores de $\text{ad}(\text{Ad}(g)H)$ e, pelo fato de H ser regular, então todos estes autovalores são não nulos, implicando que $\text{Ad}(g)H$ é regular. Portanto, $\mathfrak{z}(X) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{z}(\text{Ad}(g)X) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$. ■

Lema 1.2.4. *Seja $H \in \bar{\mathfrak{a}}$, isto é, $H \in \mathfrak{a}$ é um elemento regular. Então, a aplicação $\phi_H : N \rightarrow \mathfrak{n}$ definida por $\phi_H(n) = \text{Ad}(n)H - H$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Primeiramente, verifiquemos a bijetividade de ϕ .

- ϕ é injetora: Suponha que $\phi_H(n_1) = \phi_H(n_2)$, ou seja, $\text{Ad}(n_1)H = \text{Ad}(n_2)H$, ou então, $\text{Ad}(n)H = H$, com $n = n_2^{-1}n_1$. Daí,

$$\exp H = \exp(\text{Ad}(n)H) = n \exp H n^{-1}.$$

Assim, tomando $\exp H = h$, temos que $hnh^{-1} = n$. O Corolário 4.4 do Capítulo IV de Helgason [3] diz que temos um difeomorfismo entre $\exp(\mathfrak{n})$ e N , ou seja, é possível escolher $X \in \mathfrak{n}$ tal que $n = \exp X$. Isto implica que $\text{Ad}(h)X = X$. Pela definição, H é regular, ou seja, $\text{ad}(H)$ não tem autovalores nulos, implicando que $\text{Ad}(h) = \exp(\text{ad}(H))$ não tem autovalores 1. Portanto $X = 0$, pois $\text{Ad}(h)X = X$, e assim $n_2^{-1}n_1 = \exp 0 = e$.

- ϕ é sobrejetora: sabendo que $\exp : \mathfrak{n} \rightarrow N$ é um difeomorfismo, então dado $X \in \mathfrak{n}$, precisamos resolver a seguinte equação

$$\phi_H(\exp Y) = X$$

que pode ser reescrita como

$$(\exp(\operatorname{ad}(Y)) - 1)H = X$$

com $Y \in \mathfrak{n}$ dependendo de X . A série logaritmo

$$\log(1 + x) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

inverte a exponencial desde que tenha convergência. Tomando $x = \operatorname{ad}(Y)$ obtemos $\log(1 + (e^{\operatorname{ad}(Y)} - 1)) = \operatorname{ad}(Y)$. Como $\operatorname{ad}(Y)$ é nilpotente, então $e^{\operatorname{ad}(Y)} - 1$ é nilpotente, garantindo a convergência da série. Escrevendo $T = e^{\operatorname{ad}(Y)} - 1$ temos

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}(Y)H = \log(1 + T)H &= -TH + \frac{1}{2}T^2H - \frac{1}{3}T^3H + \dots \\ &= -X + \frac{1}{2}TX - \frac{1}{3}T^2X + \dots = F(X). \end{aligned}$$

Veja que T é invariante por \mathfrak{n} , logo, $F(X) \in \mathfrak{n}$. Daí,

$$F(X) = \operatorname{ad}(Y)H = -\operatorname{ad}(H)Y.$$

Portanto,

$$Y = \operatorname{ad}(H)^{-1}F(X)$$

pois, $\operatorname{ad}(H)$ é inversível já que H é regular.

Vejam agora a diferenciabilidade de ϕ_H : Seja $X \in \mathfrak{n}$ e considere como campo invariante a esquerda de N . Então,

$$\begin{aligned} d(\phi_H)_n(X) &= \frac{d}{dt}(\operatorname{Ad}(ne^{tX})H - H)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\operatorname{Ad}(n)\operatorname{Ad}(e^{tX})H - H)|_{t=0} \\ &= \operatorname{Ad}(n) \frac{d}{dt}(e^{t\operatorname{ad}(X)}H)|_{t=0} = \operatorname{Ad}(n) \circ \operatorname{ad}(X)H = -\operatorname{Ad}(n) \circ \operatorname{ad}(H)X. \end{aligned}$$

Assim, $d(\phi_H)_n = -\operatorname{Ad}(n) \circ \operatorname{ad}(H)$ é composto por funções invertíveis, portanto é um isomorfismo. ■

Proposição 1.2.5. *O normalizador de \mathfrak{a} em G é M^*A .*

Demonstração. Temos que $M^*A \subset N_G(\mathfrak{a})$, pois se $xh \in M^*A$ então, $\operatorname{Ad}(xh)\mathfrak{a} = \operatorname{Ad}(x)\operatorname{Ad}(h)\mathfrak{a} = \operatorname{Ad}(x)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$.

Agora, considere $g \in N_G(\mathfrak{a})$. A princípio, quero provar que existe $\tilde{w} \in M^*$ tal que $\tilde{w}g \in MAN = P$. Considere $u = \operatorname{Ad}(g)|_{\mathfrak{a}}$, então $u\alpha := \alpha \circ u$ é raiz, para todo $\alpha \in \Sigma$, já que $\operatorname{Ad}(g)$ toma autovalores de $\operatorname{ad}(H)$, com $H \in \mathfrak{a}$, e leva em autovalores de $\operatorname{ad}(uH)$. Assim, $u\Sigma \subset \Pi$ é um sistema simples de raízes e, portanto, existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $w(u\Sigma) = \Sigma$, implicando que $w(u\Pi^+) = \Pi^+$. Tome $\tilde{w} \in M^*$ um representante de w . Daí, teremos $\operatorname{Ad}(\tilde{w}g)\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$.

Pelo lema anterior, $\operatorname{Ad}(\tilde{w}g)(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$. Logo, $\operatorname{Ad}(\tilde{w}g)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, ou seja, $\tilde{w}g \in P = MAN$. Escreva $\tilde{w}g = mhn$, então $n = m^{-1}h^{-1}\tilde{w}g$ e, portanto, $n \in N_G(\mathfrak{a})$.

Veremos que $n = e$. Tomando $H \in \mathfrak{a}$ um elemento regular, a função $\phi_H(n) = \operatorname{Ad}(n)H - H \in \mathfrak{n}$ é um difeomorfismo. Como $n \in N_G(\mathfrak{a})$, então $\operatorname{Ad}(n)H - H$ pertence à \mathfrak{a} . Sabendo que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n} = \{0\}$ então $\operatorname{Ad}(n)H = H$, ou seja, $n = e$.

Portanto $\tilde{w}g = mh \in MA$, isto é, $g = \tilde{w}^{-1}mh \in M^*A$. ■

Lema 1.2.6. *São válidos os seguintes resultados*

- Dado $Y \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, então $Y \in \mathfrak{a}$ se, e somente se, os autovalores de $\text{ad}(Y)$ são reais.
- Dado $X \in \mathfrak{p}$, então $X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ se, e somente se, os autovalores de $\text{ad}(X)$ são reais.

Demonstração. Primeiramente, considere o elemento $X+H \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$. Como $\text{ad}(X)$ é antissimétrica e $\text{ad}(H)$ é simétrica, então elas comutam entre si e suas complexificações são diagonalizáveis. Portanto, as complexificadas são simultaneamente diagonalizáveis, e os autovalores de $\text{ad}(X+H)$ são as somas dos autovalores de $\text{ad}(X)$ e $\text{ad}(H)$. Como os autovalores de $\text{ad}(X)$ são imaginários e os de $\text{ad}(H)$ são reais, logo, os autovalores de $\text{ad}(X+H)$ são reais se, e somente se, $X=0$. Observe que os autovalores de $\text{ad}(X+H)$ serão imaginários se, e só se, $H=0$.

Agora, no caso geral, se $X+H+Y \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, a componente $Y \in \mathfrak{n}$ não influi nos autovalores, uma vez que é possível encontrar uma base de \mathfrak{g} tal que $X+H$ é diagonal em blocos e Y é triangular superior. Como os autovalores dependem apenas da diagonal da matriz, teremos que eles são reais se, e somente se, $X=0$. Veja que $\text{ad}(X+H+Y)$ é nilpotente apenas quando $X+H=0$. ■

Lema 1.2.7. *Sejam $g \in G$ e $H_1, H_2 \in \mathfrak{a}$ elementos regulares. Se $\text{Ad}(g)H_1 = H_2$ então $g \in N_G(\mathfrak{a}) = M^*A$.*

Demonstração. Se $\text{Ad}(g)H_1 = H_2$ então $\text{Ad}(g)$ leva o centralizador de H_1 no centralizador de H_2 , que são ambos iguais a $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, pois são elementos regulares. Logo, $\text{Ad}(g)(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$. Se $H \in \mathfrak{a}$ então,

$$\text{ad}(\text{Ad}(g)H) = \text{Ad}(g) \circ \text{ad}(H) \circ \text{Ad}(g)^{-1}$$

e, portanto, $\text{ad}(H)$ e $\text{ad}(\text{Ad}(g)H)$ têm autovalores iguais. Pelo lema anterior, como os autovalores de $\text{ad}(H) \in \mathfrak{a}$ são reais e $\text{Ad}(g)H \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ então $\text{Ad}(g)H \in \mathfrak{a}$. Assim, g pertence ao normalizador de \mathfrak{a} em G , isto é, $g \in M^*A$. ■

Qualquer subálgebra parabólica minimal \mathfrak{q} pode ser obtida por aplicação de um automorfismo interno em \mathfrak{p} , isto é, $\mathfrak{q} = \text{Ad}(g)\mathfrak{p}$, para algum $g \in G$. É possível ver que basta tomar $k \in K$ para ter $\mathfrak{q} = \text{Ad}(k)\mathfrak{p}$. De fato, dado $g \in G$, pela decomposição de Iwasawa tem-se que $g = kan \in KAN$ e também que $\text{Ad}(an)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. Assim,

$$\text{Ad}(g)\mathfrak{p} = \text{Ad}(k)\text{Ad}(an)\mathfrak{p} = \text{Ad}(k)\mathfrak{p}.$$

Lema 1.2.8. *Seja $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ uma subálgebra parabólica minimal e $\mathfrak{q} = \text{Ad}(g)\mathfrak{p}$ uma outra subálgebra parabólica minimal. Então, $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ complementa \mathfrak{n} em \mathfrak{p} , ou seja,*

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) + \mathfrak{n}$$

com a soma não necessariamente direta.

Demonstração. Primeiramente, tem-se que $\mathfrak{p} \supset (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) + \mathfrak{n}$, uma vez que $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ e $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}$.

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ o produto interno associado a involução de Cartan θ , que era definida por $\langle X, Y \rangle_\theta = -\langle X, \theta Y \rangle$. O ortogonal de \mathfrak{p} em relação a este produto interno é a união dos espaços associados as raízes negativas, $\mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha < 0} \mathfrak{g}_\alpha$.

Veja que $(\mathfrak{p} + \mathfrak{q})^\perp = \mathfrak{p}^\perp \cap \mathfrak{q}^\perp$, que é um resultado básico de álgebra linear. Porém, $\mathfrak{q}^\perp = (\text{Ad}(k)\mathfrak{p})^\perp = \text{Ad}(k)\mathfrak{p}^\perp = \text{Ad}(k)\mathfrak{n}^-$, pois $\text{Ad}(k)$ é isometria. Definimos $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^- = \theta\mathfrak{p}$. Daí,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{p} + \mathfrak{q})^\perp &= \mathfrak{p}^\perp \cap \text{Ad}(k)\mathfrak{n}^- = \mathfrak{n}^- \cap \text{Ad}(k)\mathfrak{n}^- = \mathfrak{n}^- \cap (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \text{Ad}(k)\mathfrak{n}^-) \\ &= \mathfrak{n}^- \cap \text{Ad}(k)(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^-) = \mathfrak{n}^- \cap \text{Ad}(k)\mathfrak{p}^- = \theta(\mathfrak{n} \cap \text{Ad}(k)\mathfrak{p}) \\ &= \theta(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{q}) = \theta(\mathfrak{n} \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})) \end{aligned}$$

onde a última igualdade se estabelece pelo fato de $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}$.

Assim, $\dim(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) = \dim(\mathfrak{n} \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}))$.

Sabendo que $\dim \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{q}$, então

$$\dim(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) = \dim \mathfrak{p} + \dim \mathfrak{q} - \dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) = 2 \dim \mathfrak{p} - \dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}).$$

Por outro lado,

$$\dim(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) = \dim \mathfrak{g} - \dim(\mathfrak{p} + \mathfrak{q})^\perp = \dim \mathfrak{g} - \dim(\mathfrak{n} \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})).$$

Porém, $\dim(\mathfrak{n} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})) = \dim \mathfrak{n} + \dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) - \dim(\mathfrak{n} \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}))$, então

$$\dim(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) = \dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{n} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})) - \dim \mathfrak{n} - \dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$$

ou seja,

$$2 \dim \mathfrak{p} - \dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) = \dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{n} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})) - \dim \mathfrak{n} - \dim(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$$

implicando que

$$2 \dim \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{n} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})) - \dim \mathfrak{n}.$$

Sabendo que $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{n}^- = \dim \mathfrak{p}$ e $\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{n}^-$ então

$$\dim \mathfrak{p} = \dim(\mathfrak{n} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}))$$

demonstrando que os espaços são iguais. ■

Teorema 1.2.9. *Dado uma variedade flag maximal \mathbb{F} , ela se decompõe como*

$$\mathbb{F} = \coprod_{w \in \mathcal{W}} N \cdot wb_0.$$

Demonstração. Dado $g \in G$, queremos mostrar que existe $n \in N$ e $w \in \mathcal{W}$ tal que $n\tilde{w}P = gP$, ou seja, existem $n \in N$, $w \in \mathcal{W}$ e $x \in P$ tal que $g = n\tilde{w}x$.

Tome a subálgebra parabólica minimal $\mathfrak{q} = \text{Ad}(g)\mathfrak{p}$ e seja H um elemento regular de $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) + \mathfrak{n}$ então existe $X \in \mathfrak{n}$ tal que $H + X \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Usando o Lema 1.2.4, a função $\phi_H(y) = \text{Ad}(y)H - H$ é um difeomorfismo. Segue que existe $n \in N$ tal que $\text{Ad}(n)H - H = X$, ou seja, $\text{Ad}(n)H = H + X \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Assim,

$$\text{Ad}(g^{-1}n)H = \text{Ad}(g^{-1})(\text{Ad}(n)H) = \text{Ad}(g^{-1})(H + X) \in \mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

pois $H + X \in \mathfrak{q} = \text{Ad}(g)\mathfrak{p}$.

Veja que os autovalores da adjunta de $\text{Ad}(g^{-1}n)H$ são iguais aos autovalores de $\text{ad}(H)$. Então, os autovalores são todos reais. Assim, pelo Lema 1.2.6 teremos $\text{Ad}(g^{-1}n)H \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, ou seja,

$$\text{Ad}(g^{-1}n)H = H' + Y \tag{1.2.1}$$

com $H' \in \mathfrak{a}$ e $Y \in \mathfrak{n}$. Como H é regular e $\text{ad}(\text{Ad}(g^{-1}n)H)$ tem os mesmos autovalores de $\text{ad}(H')$, uma vez que os autovalores de $\text{ad}(Y)$ são todos nulos, então H' regular.

Usando o difeomorfismo $\phi_{H'}(z) = \text{Ad}(z)H' - H'$, temos que existe $z \in N$ tal que $\text{Ad}(zg^{-1}n)H = H'$. De fato, existe $\tilde{z} \in N$ tal que

$$\text{Ad}(\tilde{z})H' - H' = Y \in \mathfrak{n}$$

isto é,

$$H' - \text{Ad}(\tilde{z}^{-1})H' = \text{Ad}(\tilde{z}^{-1})Y$$

tomando $z = \tilde{z}^{-1}$ e usando a equação (1.2.1),

$$H' - \text{Ad}(z)(\text{Ad}(g^{-1}n)H - Y) = \text{Ad}(z)Y$$

logo,

$$\text{Ad}(zg^{-1}n)H = H'.$$

Deste modo, como o normalizador de \mathfrak{a} em G é M^*A , então $zg^{-1}n \in M^*A$, isto é, $zg^{-1}n = \tilde{w}^{-1}h$. Assim, $g = nh^{-1}\tilde{w}z = n\tilde{w}\bar{h}z$, com $\bar{h} = \tilde{w}^{-1}h^{-1}\tilde{w} \in A$. Portanto, para $x = \bar{h}z \in AN \subset P$, tem-se que $g = n\tilde{w}x$, provando a decomposição de Bruhat. ■

1.2.4 Células de Schubert

Dada uma decomposição de Bruhat de uma variedade flag \mathbb{F}_Θ , uma célula de Schubert associada à classe $w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$ é o fecho da célula de Bruhat, isto é, $\mathcal{S}_w^\Theta = \text{fe}(N \cdot wb_\Theta)$. A partir da célula de Schubert, será possível construir a uma decomposição celular para a variedade flag.

Para a variedade flag maximal \mathbb{F} , denotamos uma célula de Schubert como \mathcal{S}_w , com $w \in \mathcal{W}$, omitindo $\Theta = \emptyset$.

Proposição 1.2.10. *São propriedades da célula de Schubert:*

- $\mathcal{S}_{w_1}^\Theta \subset \mathcal{S}_{w_2}^\Theta$ se, e somente se, $w_1 \leq w_2$ pela ordem de Bruhat-Chevalley;
- $\mathcal{S}_w^\Theta = \bigcup_{u \leq w} N \cdot ub_\Theta$.

Note que, pelo segundo item desta proposição e pelo fato de todas as células de Bruhat serem disjuntas, para todo $v < w$, uma célula de Bruhat $N \cdot vb_\Theta$ deve pertencer à fronteira da célula de Schubert \mathcal{S}_w^Θ .

A partir da definição, notemos que $\mathcal{S}_w^\Theta = \mathcal{S}_{w'}^\Theta$ se, e somente se, $w\mathcal{W}_\Theta = w'\mathcal{W}_\Theta$. Logo, qualquer célula $\mathcal{S}_{w'}$ de \mathbb{F} , com $w' \in w\mathcal{W}_\Theta$, se projeta na célula \mathcal{S}_w^Θ através da projeção canônica π_Θ , ou seja, a pré-imagem de \mathcal{S}_w^Θ via π_Θ é o conjunto de todas as célula $\mathcal{S}_{w'}$ tal que $w' \in w\mathcal{W}$.

Lema 1.2.11. *Existe um elemento $w' = wu$ da classe lateral $w\mathcal{W}_\Theta$ tal que*

$$\dim \mathcal{S}_w^\Theta = \dim \mathcal{S}_{w'}.$$

Este elemento é único e minimal com respeito à ordem de Bruhat-Chevalley.

Demonstração. Lema 2.2.1 da tese de Rabelo [8]. ■

Para cada classe lateral $w\mathcal{W}_\Theta$, com $w \in \mathcal{W}$, este lema diz que existe um único representante minimal $w' \in \mathcal{W}^\Theta$ com relação a ordem de Bruhat-Chevalley tal que a célula de Schubert $\mathcal{S}_{w'}$ se projeta em \mathcal{S}_w^Θ . Se este elemento possui decomposição minimal $w' = r_1 \cdots r_n$, com $r_i = r_{\alpha_i}$ para $\alpha_i \in \Sigma$, então a dimensão da célula de Schubert será

$$\dim(\mathcal{S}_w^\Theta) = \dim(N \cdot w'b_\Theta) = \sum_{i=1}^n m_{\alpha_i} + m_{2\alpha_i} \quad (1.2.2)$$

onde $m_\alpha = \dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ é a multiplicidade da raiz α .

1.3 Exemplo: O grupo $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$

Considere o grupo $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$ formado pelas matrizes 3×3 reais e inversíveis com determinante 1. Sua álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ é o espaço vetorial das matrizes 3×3 reais de traço zero, cujo comutador é dado por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Uma involução associada a esta álgebra é dada por

$$\theta(X) = -X^t, \text{ para todo } X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}).$$

Sua forma bilinear associada

$$\langle X, Y \rangle_\theta = -\langle X, \theta(Y) \rangle = \langle X, Y^t \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)^t)$$

é um produto interno em $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, ou seja, θ é uma involução de Cartan. Os autoespaços associados aos autovalores 1 e -1 fornecem uma decomposição de Cartan da álgebra de Lie e são dados por

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \{X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \mid X = \theta(X) = -X^t\} = \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \\ \mathfrak{s} &= \{X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \mid X = -\theta(X) = X^t\} \end{aligned}$$

isto é, \mathfrak{k} é o subconjunto das matrizes antissimétricas e \mathfrak{s} é o subconjunto das matrizes simétricas. Lembremos que toda matriz $X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ pode escrita como soma de uma matriz simétrica com uma antissimétrica, à saber

- Parte simétrica: $\frac{1}{2}(X + X^t)$;
- Parte antissimétrica: $\frac{1}{2}(X - X^t)$.

Logo, a decomposição de Cartan de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ é a soma direta $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{s}$. Em nível de grupo, o grupo de Lie conexo gerado por $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ é

$$\mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Sl}(3, \mathbb{R}) \mid g^t g = g g^t = \mathrm{Id} \text{ e } \det(g) = 1\}.$$

Por sua vez, se $X \in \mathfrak{s}$ temos dois fatos à observar:

1. e^X é simétrico. De fato,

$$(e^X)^t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{X^n}{n!} \right)^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(X^t)^n}{n!} = e^{(X^t)} = e^X.$$

2. Todos os autovalores de e^X são positivos. Para tal, suponha que λ é autovalor de X com autovetor $v \neq 0$, isto é, $Xv = \lambda v$. Daí,

$$e^X v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n v}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} v = e^\lambda v$$

ou seja, e^λ é autovalor de e^X . Pelo fato de X e e^X serem simétricos, então ambos possuem 3 autovalores reais. Logo, todos os autovalores de e^X são positivos.

Deste modo, o conjunto $S = \exp \mathfrak{s}$ é o conjunto das matrizes simétricas positivas definidas de determinante 1. É importante salientar que S não é um grupo de Lie. Portanto, a decomposição de Cartan do grupo é dada por $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R}) = \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})S$.

O conjunto das matrizes diagonais em \mathfrak{s} formam uma subálgebra abeliana maximal, e assim, definiremos \mathfrak{a} como tal conjunto. Para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ seja E_{ij} a matriz 3×3 cuja única entrada não nula é $a_{ij} = 1$, e considere a base de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ formada pelas matrizes E_{ij} e $E_{ii} - E_{jj}$ com $i \neq j$. Dado $H \in \mathfrak{a}$, podemos escrever este elemento como $H = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$ a matriz diagonal com $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Assim, temos a seguinte equação

$$\mathrm{ad}(H)(E_{ij}) = (a_i - a_j)E_{ij}. \tag{1.3.1}$$

Esta igualdade mostra que as raízes de \mathfrak{a} são os funcionais lineares $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ para $i \neq j$, onde λ_i é a função que satisfaz $\lambda_i(\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)) = a_i$, e que o subespaço associado a cada raiz α_{ij} , com $i \neq j$, é $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = \langle E_{ij} \rangle$. Defina a câmara de Weyl positiva de \mathfrak{a} como o conjunto

$$\mathfrak{a}^+ = \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{a} \mid a_1 > a_2 > a_3\}.$$

Neste caso, o conjunto das raízes positivas é dado por

$$\Pi^+ = \{\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}\}.$$

Note que a raiz positiva α_{13} é combinação das outras duas raízes positivas, isto é, $\alpha_{13} = \lambda_1 - \lambda_3 = (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_3) = \alpha_{12} + \alpha_{23}$. Isto implica que o conjunto das raízes simples é $\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$.

Sabemos que \mathfrak{n} é formado pela soma dos espaços associados às raízes positivas. Assim, pela equação (1.3.1), temos que,

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\alpha_{12}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{23}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{13}} = \langle E_{12} \rangle \oplus \langle E_{23} \rangle \oplus \langle E_{13} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ou seja, \mathfrak{n} é o conjunto das matrizes triangulares superiores com diagonal nula.

Portanto, a decomposição de Iwasawa da álgebra de Lie é

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

Agora, vejamos a decomposição de Iwasawa do grupo $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$. Primeiramente, dado $H = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{a}$ arbitrário, então

$$e^H = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_3} \end{pmatrix}$$

e assim, o grupo de Lie A , cuja álgebra de Lie é \mathfrak{a} , é formado pelas matrizes diagonais com entradas positivas. Do mesmo modo, para $X \in \mathfrak{n}$ arbitrário

$$\begin{aligned} e^X &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = \mathrm{Id} + \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 + \dots \\ &= \mathrm{Id} + \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ou seja, N é o grupo das matrizes diagonais superiores com entradas na diagonal iguais a 1. Portanto, a decomposição de Iwasawa do grupo é $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R}) = \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})AN$.

1.3.1 Grupo de Weyl

Primeiramente, queremos encontrar uma fórmula explícita para a forma de Cartan-Killing, quando restrita à álgebra de Lie \mathfrak{a} . Dados $H_1 = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{a}$ e $H_2 = \mathrm{diag}(b_1, b_2, b_3) \in \mathfrak{a}$, como $\alpha_{ij}(H_1)\alpha_{ij}(H_2)$, para $i \neq j$, são os autovalores de $\mathrm{ad}(H_1)\mathrm{ad}(H_2)$, então o traço de $\mathrm{ad}(H_1)\mathrm{ad}(H_2)$ é a soma deste autovalores. Assim,

$$\begin{aligned} \langle H_1, H_2 \rangle &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(H_1)\mathrm{ad}(H_2)) = 2(\alpha_{12}(H_1)\alpha_{12}(H_2) + \alpha_{13}(H_1)\alpha_{13}(H_2) + \alpha_{23}(H_1)\alpha_{23}(H_2)) \\ &= 4(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) - 2(a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2) \\ &= 4(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) - 2\left((a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\right) \\ &= 6(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{aligned}$$

pois $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Logo,

$$\langle H_1, H_2 \rangle = 6 \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ é o produto interno canônico de \mathbb{R}^3 .

Seja $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^3}$ o subespaço de \mathbb{R}^3 dada por

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^3} = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0\}.$$

Os subespaços \mathfrak{a} e $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}^3}$ se identificam pela relação

$$\text{diag}(a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{a} \longleftrightarrow 6(a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}^3}.$$

Com tal identificação $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}_{\mathbb{R}^3}$, simplificaremos a notação que aparecerá no decorrer deste exemplo. A câmara de Weyl será reescrita como

$$\mathfrak{a}^+ = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{a} \mid a_1 > a_2 > a_3\}.$$

Para a raiz simples α_{12} , podemos escolher um elemento $H_{12} \in \mathfrak{a}$ dual a este funcional linear, isto é, $\alpha_{12}(\cdot) = \langle H_{12}, \cdot \rangle$. Observe que se $H = (a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{a}$, então

$$\alpha_{12}(H) = a_1 - a_2 = \langle (1, -1, 0), (a_1, a_2, a_3) \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \frac{1}{6}(1, -1, 0), H \rangle.$$

Deste modo, identificaremos a raiz simples α_{12} com o seu vetor dual

$$\alpha_1 = (1, -1, 0) \cong \alpha_{12}.$$

Analogamente, denotemos a raiz simples α_{23} como o seu dual

$$\alpha_2 = (0, 1, -1) \cong \alpha_{23}.$$

De modo geral, qualquer raiz $\beta \in \Pi$ se identifica com o seu vetor dual (x, y, z) . As reflexões em torno de uma raiz α são dadas por

$$r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$$

isto é, para α_1 , escolhendo-se uma raiz $\beta = (x, y, z)$ temos

$$r_{\alpha_1}(x, y, z) = (x, y, z) - (x - y)(1, -1, 0) = (y, x, z).$$

Do mesmo modo, $r_{\alpha_2}(x, y, z) = (x, z, y)$, ou seja, as reflexões em torno das raízes são permutações. Logo, o grupo de Weyl é gerado pelas permutações $r_1 = (12)$ e $r_2 = (23)$ e, portanto, $\mathcal{W} = S_3$ é o grupo de permutação de 3 elementos. Considerando a ordem de Bruhat-Chevalley, podemos classificar os elementos do grupo de Weyl de acordo com a quantidade de reflexões simples que formam cada elemento:

Ordem 0: $1(x, y, z) = (x, y, z)$;

Ordem 1: $r_1(x, y, z) = (y, x, z)$;

$r_2(x, y, z) = (x, z, y)$;

Ordem 2: $r_2r_1(x, y, z) = (y, z, x)$;

$r_1r_2(x, y, z) = (z, x, y)$;

Ordem 3: $r_1r_2r_1(x, y, z) = (z, y, x)$.

Veja que o elemento de tamanho 3 corresponde à involução principal w_0 , pois é a de tamanho máximo, e que w_0 também admite como decomposição minimal $r_2r_1r_2$, além de ser a reflexão $r_{\alpha_{13}}$ em torno da raiz $\alpha_{13} \cong \alpha_1 + \alpha_2 = (1, 0, -1)$.

Agora queremos uma descrição do grupo de Weyl da forma $\mathcal{W} \cong M^*/M$, onde $M^* = \text{Norm}_K(\mathfrak{a})$ e $M = \text{Centr}_K(\mathfrak{a})$. Seja, $k \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ e $H \in \mathfrak{a}$ tal que

$$k = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H = \text{diag}(x, y, z).$$

Inicialmente, determinaremos o conjunto M^* a partir do grupo de Weyl visto como o grupo de permutação $\mathcal{W} = S_3$. Dado um elemento $w \in \mathcal{W} = S_3$, a equação (1.1.7) diz que $w = \text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}}$ com $k \in M^* \subset \text{SO}(3, \mathbb{R})$. Assim, para todo $H \in \mathfrak{a}$, tem-se que $\text{Ad}(k)H = w(H)$ e, como $\text{Ad}(k)H = k^{-1}Hk$, segue que

$$kH = w(H)k.$$

Como exemplo do cálculo, consideremos o elemento r_1 . Assim,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} ax & by & cz \\ dx & ey & fz \\ gx & hy & iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay & by & cy \\ dx & ex & fx \\ gz & hz & iz \end{pmatrix}.$$

Tomando $H \in \mathfrak{a}$ arbitrário, devemos ter que $a = c = d = e = g = h = 0$. Daí, pelo fato de k ser uma matriz ortogonal, então

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}^t = \text{Id}$$

implicando que

$$k = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$$

cujos sinais de k são escolhidos de modo que $\det(k) = 1$, ou seja, são as matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Logo, obtem-se os representantes k para cada $w \in \mathcal{W}$:

- $1(x, y, z) = (x, y, z)$;

$$k = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in \text{SO}(3, \mathbb{R});$$

- $r_1(x, y, z) = (y, x, z)$:

$$k = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in \text{SO}(3, \mathbb{R});$$

- $r_2(x, y, z) = (x, z, y)$:

$$k = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SO}(3, \mathbb{R});$$

- $r_2r_1(x, y, z) = (y, z, x)$:

$$k = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SO}(3, \mathbb{R});$$

- $r_1r_2(x, y, z) = (z, x, y)$:

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SO}(3, \mathbb{R});$$

- $r_1r_2r_1(x, y, z) = (y, x, z)$:

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SO}(3, \mathbb{R}).$$

Assim, o conjunto M^* possui 24 elementos, pois temos 6 grupos com 4 matrizes cada. Observemos que o conjunto M é dado pelos elementos k que fixam \mathfrak{a} , ou seja, estão relacionados à reflexão identidade 1. Logo,

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.3.2)$$

Portanto, o grupo de Weyl $\mathcal{W} = M^*/M$ possui 6 classes de equivalência. Escolhendo um representante em cada classe, obtemos a tabela 1.1.

Grupo de Weyl			
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$r_1 = (12)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$r_2 = (23)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$r_2 r_1 = (132)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r_1 r_2 = (123)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$r_1 r_2 r_1 = (13)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tabela 1.1: Grupo de Weyl de $Sl(3, \mathbb{R})$.

1.3.2 Subálgebras parabólicas

Sabemos que a escolha de um subconjunto Θ do sistema simples de raízes $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ determina a subálgebra parabólica \mathfrak{p}_Θ . Inicialmente, a subálgebra parabólica minimal \mathfrak{p} , correspondente a tomar $\Theta = \emptyset$, é dada pela soma direta $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Observe que a álgebra \mathfrak{m} é nula, pois definimos $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} , ou seja, \mathfrak{m} é o conjunto das matrizes antissimétricas e diagonais, portanto é nula (outra maneira de obter $\mathfrak{m} = 0$ é ver que o grupo M é discreto, implicando que sua álgebra de Lie é nula). Assim, $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é formado pelo conjunto das matrizes triangulares superiores em $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, isto é,

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

O subgrupo parabólico P é dado pela decomposição $P = MAN$. Como AN é formado pelas matrizes triangulares superiores com diagonal positiva e M é descrito pelas matrizes da equação (1.3.2), então

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in Sl(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

é o conjunto de todas as matrizes triangulares superiores em $Sl(3, \mathbb{R})$.

As subálgebras parabólicas do tipo Θ são dadas pela equação $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, onde $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}_\Theta)$, onde recordamos que $\mathfrak{a}_\Theta = \mathfrak{a} \ominus \mathfrak{a}(\Theta)$, com $\mathfrak{a}(\Theta) = \langle H_\alpha \mid \alpha \in \Theta \rangle$.

Calcularemos apenas para $\Theta = \{\alpha_1\}$. Neste caso, $\mathfrak{a}(\Theta) = \langle (1, -1, 0) \rangle$ e que \mathfrak{a}_Θ é seu complementar ortogonal, ou seja, é definido pelo conjunto gerado pelo vetor $(1, 1, -2)$, onde pode ser incluído na álgebra das matrizes como

$$\mathfrak{a}_\Theta = \left\langle H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Seja $X \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) = \mathfrak{k}$ tal que

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Então $X \in \mathfrak{k}_\Theta$ se, e somente se, $HX - XH = 0$. Assim,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ 2b & 2c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & -2b \\ -a & 0 & -2c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

implicando que $b = c = 0$. Portanto, \mathfrak{p}_Θ para $\Theta = \{\alpha_1\}$ é dado por

$$\mathfrak{p}_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

Seu grupo de Lie P_Θ é obtido por $P_\Theta = K_\Theta AN$, onde $K_\Theta = \text{Centr}_K(\mathfrak{a}_\Theta)$. Para calcular K_Θ , considere $k \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ tal que

$$k = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Note que $k \in K_\Theta$ se, e somente se, $kH = Hk$. Com esta condição, temos que k se restringe à

$$k = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Com o fato de k ser ortogonal (isto é, $k^{-1} = k^t$) obtemos $i = \pm 1$ e que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SO}(2, \mathbb{R}) \cdot \left\{ \text{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Logo, para $\Theta = \{\alpha_1\}$, segue que

$$K_\Theta = M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid R_2 \in \text{SO}(2, \mathbb{R}) \right\}.$$

De maneira análoga, se $\Theta = \{\alpha_2\}$ então

$$\mathfrak{p}_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \right\} \quad \text{e} \quad K_\Theta = M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \mid R_2 \in \text{SO}(2, \mathbb{R}) \right\}.$$

1.3.3 Variedade flag maximal

A variedade flag maximal \mathbb{F} de $\text{Sl}(3, \mathbb{R})$, cujo $\Theta = \emptyset$, pode ser realizada como a variedade $\mathbb{F}_{1,2}^3$ composta de espaços vetoriais encaixados $V_1 \subset V_2$ de \mathbb{R}^3 tais que $\dim V_1 = 1$ e $\dim V_2 = 2$, isto é,

$$\mathbb{F}_{1,2}^3 = \{(V_1, V_2) \mid \dim(V_i) = i \text{ e } V_1 \subset V_2 \subset \mathbb{R}^3\}.$$

Para verificar tal fato, considere a ação $\text{Sl}(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{F}_{1,2}^3 \rightarrow \mathbb{F}_{1,2}^3$ definida por

$$g \cdot (V_1, V_2) = (gV_1, gV_2).$$

Esta ação é transitiva, ou seja, para qualquer dois pares de espaços encaixados (V_1, V_2) e (U_1, U_2) de \mathbb{R}^3 existe $g \in \text{Sl}(3, \mathbb{R})$ tal que $g \cdot (V_1, V_2) = (U_1, U_2)$. De fato, basta escolher bases $(\{b_1\}, \{b_1, b_2\})$ de (V_1, V_2) e $(\{c_1\}, \{c_1, c_2\})$ de (U_1, U_2) e tomar g como a matriz que realiza a mudança de base.

Seja $b_0 = (\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle)$ o elemento canônico de $\mathbb{F}_{1,2}^3$. A seguinte proposição, presente nos textos básico da teoria de grupos de Lie, será útil para estabelecer a relação entre as variedades \mathbb{F} e $\mathbb{F}_{1,2}^3$.

Proposição 1.3.1. *Seja G um grupo agindo em X . Dado $x \in X$ fixo, então existe uma estrutura diferenciável em X tal que a aplicação $\phi_x : G/G_x \rightarrow G \cdot x$ dada por*

$$\phi_x(gG_x) = g \cdot x$$

é um difeomorfismo, onde G_x é a isotropia de G em x .

Como a ação que definimos é transitiva, então $\text{Sl}(3, \mathbb{R}) \cdot b_0 = \mathbb{F}_{1,2}^3$, pois todo ponto de $\mathbb{F}_{1,2}^3$ pode ser transladado de b_0 . Além disso, se g pertence a isotropia $\text{Sl}(3, \mathbb{R})_{b_0}$ então $g \cdot b_0 = b_0$, isto é,

- $g \cdot \langle e_1 \rangle = \langle e_1 \rangle$ implica que a primeira coluna de g é da forma $\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $g \cdot \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$ diz que a segunda coluna de g é da forma $\begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$.

Assim, todo $g \in \text{Sl}(3, \mathbb{R})_{b_0}$ é da forma

$$g = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

implicando que a isotropia $\text{Sl}(3, \mathbb{R})_{b_0}$ coincide com o subgrupo parabólico minimal P que é o conjunto de todas matrizes triangulares superiores. Portanto, aplicando a proposição anterior, obtemos

$$\mathbb{F}_{1,2}^3 = \text{Sl}(3, \mathbb{R}) \cdot b_0 \cong \text{Sl}(3, \mathbb{R})/\text{Sl}(3, \mathbb{R})_{b_0} = \text{Sl}(3, \mathbb{R})/P = \mathbb{F}.$$

Estabelecido este difeomorfismo, pode-se estudar apenas a estrutura da variedade $\mathbb{F}_{1,2}^3$.

Iremos determinar a decomposição de Bruhat para a variedade $\mathbb{F}_{1,2}^3$. De acordo com a tabela 1.1, cada elemento do grupo de Weyl \mathcal{W} pode ser representado por uma matriz, permitindo calcular o ponto $wb_0 \in \mathbb{F}_{1,2}^3$ para cada $w \in \mathcal{W}$. Tome, por exemplo, o elemento $r_1 \in \mathcal{W}$:

$$r_1 b_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot (\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle) = (\langle e_2 \rangle, \langle e_2, e_1 \rangle).$$

Deste modo, temos os seguintes pontos na variedade flag:

$$\begin{aligned} 1b_0 &= (\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle); \\ r_1 b_0 &= (\langle e_2 \rangle, \langle e_2, e_1 \rangle); \\ r_2 b_0 &= (\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_3 \rangle); \\ r_2 r_1 b_0 &= (\langle e_3 \rangle, \langle e_3, e_1 \rangle); \\ r_1 r_2 b_0 &= (\langle e_2 \rangle, \langle e_2, e_3 \rangle); \\ r_1 r_2 r_1 b_0 &= (\langle e_3 \rangle, \langle e_3, e_2 \rangle). \end{aligned}$$

A decomposição de Bruhat se finaliza como a ação do grupo N sobre cada um destes pontos. Como N é o grupo das matrizes triangulares superiores com diagonal unitária, podemos representar a ação de N na base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ por

$$\begin{aligned} N(e_1) &= e_1; \\ N(e_2) &= e_2 + *e_1 = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} (e_2 + ae_1); \\ N(e_3) &= e_3 + *e_2 + *e_1 = \bigcup_{b, c \in \mathbb{R}} (e_3 + be_2 + ce_1). \end{aligned}$$

Assim, segue a decomposição de Bruhat:

0-célula:

$$N \cdot 1b_0 = N(\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle) = (\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle).$$

A célula $N \cdot 1b_0$ é o conjunto formado apenas pela origem b_0 ;

1-células:

- $N \cdot r_1 b_0 = N(\langle e_2 \rangle, \langle e_2, e_1 \rangle) = (\langle e_2 + *e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle).$

A célula $N \cdot r_1 b_0$ é conjunto formado pelo espaço gerado por um vetor v do plano $\langle e_1, e_2 \rangle$ tal que $v \notin \langle e_1 \rangle$, encaixado no plano $\langle e_1, e_2 \rangle$, isto é,

$$N \cdot r_1 b_0 = \bigcup_{v \in \langle e_1, e_2 \rangle \setminus \langle e_1 \rangle} (\langle v \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle).$$

- $N \cdot r_2 b_0 = N(\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_3 \rangle) = (\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_3 + *e_2 \rangle).$

A célula $N \cdot r_2 b_0$ é conjunto formado pelo espaço $\langle e_1 \rangle$, encaixado em algum plano que contém e_1 e é diferente de $\langle e_1, e_2 \rangle$, isto é,

$$N \cdot r_2 b_0 = \bigcup_{u \in \mathbb{R}^3 \setminus \langle e_1, e_2 \rangle} (\langle e_1 \rangle, \langle e_1, u \rangle).$$

2-células:

- $N \cdot (r_2 r_1) b_0 = N(\langle e_3 \rangle, \langle e_3, e_1 \rangle) = (\langle e_3 + *e_2 + *e_1 \rangle, \langle e_1, e_3 + *e_2 \rangle).$

A célula $N \cdot r_2 r_1 b_0$ é conjunto formado pelo espaço gerado por um vetor v qualquer tal que $v \notin \langle e_1, e_2 \rangle$, encaixado no plano $\langle e_1, v \rangle$, isto é,

$$N \cdot r_2 r_1 b_0 = \bigcup_{v \in \mathbb{R}^3 \setminus \langle e_1, e_2 \rangle} (\langle v \rangle, \langle e_1, v \rangle).$$

- $N \cdot (r_1 r_2) b_0 = N(\langle e_2 \rangle, \langle e_2, e_3 \rangle) = (\langle e_2 + *e_1 \rangle, \langle e_2 + *e_1, e_3 + *e_1 \rangle).$

A célula $N \cdot r_1 r_2 b_0$ é conjunto formado pelo espaço gerado por um vetor v do plano $\langle e_1, e_2 \rangle$ tal que $v \notin \langle e_1 \rangle$, encaixado em algum plano que contém v e é diferente de $\langle e_1, e_2 \rangle$, isto é,

$$N \cdot r_1 r_2 b_0 = \bigcup_{\substack{v \in \langle e_1, e_2 \rangle \setminus \langle e_1 \rangle \\ u \in \mathbb{R}^3 \setminus \langle e_1, e_2 \rangle}} (\langle v \rangle, \langle v, u \rangle).$$

3-célula:

$$N \cdot (r_1 r_2 r_1) b_0 = N(\langle e_3 \rangle, \langle e_3, e_2 \rangle) = (\langle e_3 + *e_2 + *e_1 \rangle, \langle e_2 + *e_1, e_3 + *e_1 \rangle).$$

A célula $N \cdot r_1 r_2 r_1 b_0$ é conjunto formado pelo espaço gerado por um vetor v qualquer tal que $v \notin \langle e_1, e_2 \rangle$, encaixado em algum plano que contém v e é diferente de $\langle e_1, e_2 \rangle$, isto é,

$$N \cdot r_1 r_2 r_1 b_0 = \bigcup_{\substack{v \in \mathbb{R}^3 \setminus \langle e_1, e_2 \rangle \\ u \in \langle e_1, e_2 \rangle \setminus \langle e_1 \rangle}} (\langle v \rangle, \langle v, u \rangle).$$

1.3.4 Variedade flag parcial do tipo $\Theta = \{\alpha_1\}$

Podemos realizar a variedade flag parcial de tipo $\Theta = \{\alpha_1\}$ como a variedade grassmaniana $\text{Gr}_2(\mathbb{R}^3)$, que é o conjunto de todos subespaços de dimensão 2 em \mathbb{R}^3 .

Para tal, considere a ação transitiva de $\text{Sl}(3, \mathbb{R})$ em $\text{Gr}_2(\mathbb{R}^3)$ definida como $g \cdot \langle f_1, f_2 \rangle = \langle g f_1, g f_2 \rangle$. Considerando $b_\Theta = \langle e_1, e_2 \rangle \in \text{Gr}_2(\mathbb{R}^3)$, observe que $g \in \text{Sl}(3, \mathbb{R})_{b_\Theta}$ se, e somente se, $g \in P_\Theta$, onde P_Θ é o normalizador de \mathfrak{p}_Θ , que é dado em blocos por

$$P_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \text{Sl}(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

Portanto, tem-se que

$$\text{Gr}_2(\mathbb{R}^3) = \text{Sl}(3, \mathbb{R}) \cdot b_\Theta \cong \text{Sl}(3, \mathbb{R}) / \text{Sl}(3, \mathbb{R})_{b_\Theta} = \text{Sl}(3, \mathbb{R}) / P_\Theta = \mathbb{F}_\Theta.$$

Como $\mathcal{W}_\Theta = \{1, r_1\}$, então segue que

$$\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta = \{1, r_1\} \cup \{r_2, r_2r_1\} \cup \{r_1r_2, r_1r_2r_1\}.$$

Assim, o conjunto dos representantes minimais é $\mathcal{W}^\Theta = \{1, r_2, r_1r_2\}$, a qual fornecem os seguintes pontos na variedade flag

$$1b_\Theta = \langle e_1, e_2 \rangle; \quad r_2b_\Theta = \langle e_1, e_3 \rangle; \quad r_1r_2b_\Theta = \langle e_2, e_3 \rangle.$$

Deste modo, temos a seguinte decomposição de Bruhat:

0-célula: $N \cdot 1b_\Theta = N(\langle e_1, e_2 \rangle) = \langle e_1, e_2 \rangle$.

A célula $N \cdot 1b_\Theta$ é o conjunto formado apenas pela origem b_Θ ;

1-célula: $N \cdot r_2b_\Theta = N(\langle e_1, e_3 \rangle) = \langle e_1, e_3 + *e_2 + *e_1 \rangle$.

A célula $N \cdot r_2b_\Theta$ é formado pelos planos que contém e_1 e são diferentes de $\langle e_1, e_2 \rangle$, isto é,

$$N \cdot r_2b_\Theta = \bigcup_{u \in \mathbb{R}^3 \setminus \langle e_1, e_2 \rangle} \langle e_1, u \rangle.$$

2-célula: $N \cdot (r_1r_2)b_\Theta = N(\langle e_2, e_3 \rangle) = \langle e_2 + *e_1, e_3 + *e_1 \rangle$.

A célula $N \cdot r_1r_2b_\Theta$ é conjunto formado pelos planos que não contém e_1 , isto é,

$$N \cdot r_1r_2b_\Theta = \bigcup_{\substack{v \in \langle e_1, e_2 \rangle \setminus \langle e_1 \rangle \\ u \in \mathbb{R}^3 \setminus \langle e_1, e_2 \rangle}} \langle v, u \rangle.$$

1.3.5 Variedade flag parcial do tipo $\Theta = \{\alpha_2\}$

Como feito na seção anterior, podemos realizar a variedade flag parcial de tipo $\Theta = \{\alpha_2\}$ como o espaço projetivo \mathbb{RP}^2 , que é o conjunto de todos subespaços de dimensão 1 em \mathbb{R}^3 .

Para tal, considere a ação transitiva de $\text{Sl}(3, \mathbb{R})$ em \mathbb{RP}^2 definida como $g \cdot \langle f_1 \rangle = \langle gf_1 \rangle$. Considerando $b_\Theta = \langle e_1 \rangle \in \mathbb{RP}^2$, observe que $g \in \text{Sl}(3, \mathbb{R})_{b_\Theta}$ se, e somente se, $g \in P_\Theta$, onde P_Θ é o normalizador de \mathfrak{p}_Θ , que é dado em blocos por

$$P_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \text{Sl}(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

Portanto, tem-se que

$$\mathbb{RP}^2 = \text{Sl}(3, \mathbb{R}) \cdot b_\Theta \cong \text{Sl}(3, \mathbb{R})/\text{Sl}(3, \mathbb{R})_{b_\Theta} = \text{Sl}(3, \mathbb{R})/P_\Theta = \mathbb{F}_\Theta.$$

Como $\mathcal{W}_\Theta = \{1, r_2\}$, então segue que

$$\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta = \{1, r_2\} \cup \{r_1, r_1r_2\} \cup \{r_2r_1, r_1r_2r_1\}.$$

Assim, o conjunto dos representantes minimais é $\mathcal{W}^\Theta = \{1, r_1, r_2 r_1\}$, a qual fornecem os seguintes pontos na variedade flag

$$1b_\Theta = \langle e_1 \rangle; \quad r_1 b_\Theta = \langle e_2 \rangle; \quad r_2 r_1 b_\Theta = \langle e_3 \rangle.$$

Deste modo, temos a seguinte decomposição de Bruhat:

0-célula: $N \cdot 1b_\Theta = N(\langle e_1, e_2 \rangle) = \langle e_1, e_2 \rangle$.

A célula $N \cdot 1b_\Theta$ é o conjunto formado apenas pela origem b_Θ ;

1-célula: $N \cdot r_1 b_\Theta = N(\langle e_2 \rangle) = \langle e_2 + *e_1 \rangle$.

A célula $N \cdot r_1 b_\Theta$ é conjunto formado pelas retas geradas por um vetor v do plano $\langle e_1, e_2 \rangle$ tal que $v \notin \langle e_1 \rangle$, isto é,

$$N \cdot r_1 b_\Theta = \bigcup_{v \in \langle e_1, e_2 \rangle \setminus \langle e_1 \rangle} \langle v \rangle.$$

2-célula: $N \cdot (r_2 r_1) b_\Theta = N(\langle e_3 \rangle) = \langle e_3 + *e_2 + *e_1 \rangle$.

A célula $N \cdot r_2 r_1 b_\Theta$ é formado pelas retas que não pertencem ao plano $\langle e_1, e_2 \rangle$, isto é,

$$N \cdot r_2 r_1 b_\Theta = \bigcup_{v \in \mathbb{R}^3 \setminus \langle e_1, e_2 \rangle} \langle v \rangle.$$

Capítulo 2

Estrutura CW-complexo em variedades flag

O objetivo deste capítulo é demonstrar que a decomposição das variedades flag reais em células de Schubert fornecem uma estrutura CW-complexo à ela. O ponto principal aqui é definir explicitamente as funções características, que fornecem a colagem de tais células. Construiremos também neste capítulo uma classe de variedades flag, denominadas grassmanianas simpléticas, que serão usadas no Capítulo 4 para o cálculo de sua característica de Euler.

Definição 2.0.2. *Um espaço topológico X é um CW-complexo quando é possível obtê-lo a partir da seguinte construção:*

1. *Seja X^0 um conjunto discreto de pontos, que são considerados como 0-células;*
2. *Indutivamente, um conjunto X^n é um n -esqueleto definido a partir de X^{n-1} colando-se uma coleção de n -células B_w^n (que são bolas fechadas de dimensão n) via funções $\phi_w : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ que colam a fronteira da n -célula no $(n-1)$ -esqueleto. Isto é, X^n é o quociente da união disjunta $X^{n-1} \cup_w B_w^n$ pela identificação $x \sim \phi_w(x)$ para $x \in S^{n-1}$ em cada célula B_w^n ;*
3. *Podemos parar o processo em $X = X^n$ para algum n finito ou continuar indefinidamente, tomando $X = \cup_{n=0}^{\infty} X^n$. No último caso, consideramos X com a topologia fraca, ou seja, um conjunto $A \subset X$ é aberto se, e somente se, $A \cap X^n$ é aberto em X^n para todo n .*

O espaço X também é chamado de complexo celular e as funções ϕ_w serão denominadas funções de colagem. Para cada célula B_w^n no complexo celular X , o mapa característico dela é uma função $\Phi_w : B_w^n \rightarrow X$ que estende o função de colagem ϕ_w de modo que temos um homeomorfismo quando restrito no interior de B_w^n .

2.1 Variedades flag

Inicialmente, iremos ver que a decomposição em células de Schubert de uma variedade flag maximal \mathbb{F} fornece uma estrutura CW-complexo desta variedade flag maximal.

Denote por $\mathbb{F}_i = G/P_i$ a variedade flag parcial com $P_i = P_{\{\alpha_i\}}$ com α_i uma raiz simples. Sua fibração canônica é $\pi_i : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_i$.

Agora, considere a função γ_i sobre um subconjunto $X \subset \mathbb{F}$ que toma todas as fibras pela projeção π_i que passam pelo conjunto X , ou seja, $\gamma_i(X) = \pi_i^{-1} \circ \pi_i(X)$. A função γ_i é equivariante pelo fato de π_i ser equivariante (ou seja, $g\gamma_i(X) = \gamma_i(gX)$). Defina também $N^w = wNw^{-1}$, com $w \in \mathcal{W}$.

O seguinte teorema foi demonstrado por San Martin [11].

Teorema 2.1.1. *Seja $w = r_1 \cdots r_n$ uma decomposição em raízes simples de $w \in \mathcal{W}$. Então, para todo $k = 1, \dots, n$, temos que*

$$\text{fe}(N^w b_0) = \gamma_1 \cdots \gamma_k(\text{fe}(N^w r_1 \cdots r_k b_0)).$$

Em particular, para $k = n$ temos

$$\text{fe}(N^w b_0) = \gamma_1 \cdots \gamma_n(\text{fe}(wNw^{-1}wb_0)) = \gamma_1 \cdots \gamma_n\{wb_0\}$$

uma vez que $Nb_0 = b_0$ é fechado.

É possível então obter uma expressão para a célula de Schubert \mathcal{S}_w .

Corolário 2.1.2. *Seja $w = r_1 \cdots r_n$ uma decomposição em raízes simples de $w \in \mathcal{W}$. Então*

$$\mathcal{S}_w = \gamma_n \cdots \gamma_1\{b_0\}.$$

Observe que os índices aparecem invertidos quando comparados com os índices da decomposição em raízes simples de w .

Demonstração. Note que $\text{fe}(Nwb_0) = w(\text{fe}(N^{w^{-1}}b_0))$. Como $w^{-1} = r_n \cdots r_1$, pelo teorema anterior

$$\mathcal{S}_w = \text{fe}(Nwb_0) = w(\text{fe}(N^{w^{-1}}b_0)) = w\gamma_n \cdots \gamma_1\{w^{-1}b_0\} = \gamma_n \cdots \gamma_1\{b_0\}.$$

■

Deste modo, podemos descrever a célula de Schubert \mathcal{S}_w como órbita dos conjuntos compactos $K_i = K \cap P_i$.

Proposição 2.1.3. *Seja $w = r_1 \cdots r_n$ uma decomposição em termo de raízes simples de $w \in \mathcal{W}$. Assim,*

$$\mathcal{S}_w = K_1 \cdots K_n \cdot b_0$$

onde observa-se que a sequência de índices dos K_i 's respeitam a sequência da decomposição de w .

Demonstração. A fibra canônica em relação à projeção π_i pode ser dada a partir função γ_i aplicada na origem b_0 , isto é,

$$\gamma_i\{b_0\} = \pi_i^{-1}\pi_i(b_0) = P_i \cdot b_0.$$

Pelo Teorema 1.1.22, o subgrupo parabólico P_i é escrito como o produto $P_i = K_i AN$. Como $AN \cdot b_0 = b_0$, segue que

$$\gamma_i\{b_0\} = P_i \cdot b_0 = K_i AN \cdot b_0 = K_i \cdot b_0.$$

Agora, sabendo que γ_i é equivariante (pelo fato de π_i ser equivariante), se H é um subconjunto qualquer de G , então

$$\gamma_i(H \cdot b_0) = \gamma_i\left(\bigcup_{g \in H} g \cdot b_0\right) = \left(\bigcup_{g \in H} g \cdot \gamma_i(b_0)\right) = \left(\bigcup_{g \in H} gK_i \cdot b_0\right) = HK_i \cdot b_0.$$

Daí, como $\mathcal{S}_w = \gamma_n \cdots \gamma_1\{b_0\}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_w &= \gamma_n \cdots \gamma_4 \gamma_3 \gamma_2(K_1 \cdot b_0) \\ &= \gamma_n \cdots \gamma_4 \gamma_3(K_1 K_2 \cdot b_0) \\ &= \gamma_n \cdots \gamma_4(K_1 K_2 K_3 \cdot b_0) \\ &\quad \dots \\ &= K_1 \cdots K_n \cdot b_0. \end{aligned}$$

■

Observe que pelo fato da decomposição em termo de raízes simples não ser única, temos várias maneiras de descrever uma célula de Schubert como produto de conjuntos compactos K_i .

2.1.1 Descrevendo a célula de Bruhat na célula de Schubert

Queremos obter uma condição de quando um elemento da célula de Schubert \mathcal{S}_w também é um elemento da respectiva célula de Bruhat.

Lema 2.1.4. *Seja $w = r_1 \cdots r_{n-1} r_n$ uma decomposição em raízes simples e tome $v = wr_n = r_1 \cdots r_{n-1}$. Denote por α_n a raiz associada à reflexão r_n e por $b_n = 1 \cdot P_n$ a origem do flag \mathbb{F}_n . Então, a pré-imagem da célula de Bruhat $N \cdot wb_n \subset \mathbb{F}_n$ pela projeção canônica π_n é a união disjunta das células $N \cdot wb_0$ e $N \cdot vb_0$, ou seja,*

$$\pi_n^{-1}(N \cdot wb_n) = (N \cdot wb_0) \dot{\cup} (N \cdot vb_0).$$

Demonstração. Inicialmente, veja que a fibra $\pi_n^{-1}(wb_n) = v\pi_n^{-1}(b_n)$ é uma translação da fibra canônica. A fibra canônica coincide com a única variedade flag do grupo $G(\alpha_n)$, e assim, sua única raiz simples é α_n , o que define o grupo de Weyl de $G(\alpha)$ como $\overline{W} = \{\text{Id}, r_n\}$. Por outro lado, a fibra pode ser escrita como P_n/P , onde o grupo P_n tem a decomposição de Iwasawa $P_n = K_n AN$, e além disso, P_n tem por subgrupo parabólico o próprio P . Logo, a fibra canônica tem a decomposição de Bruhat dada por

$$\pi_n^{-1}(b_n) = \bigcup_{u \in \overline{W}} N \cdot ub_0 = \{b_0\} \cup (N \cdot r_n b_0).$$

Portando, segue que a fibra em wb_0 é

$$\pi_n^{-1}(wb_n) = v\pi_n^{-1}(b_n) = \{vb_0\} \cup v(N \cdot r_n b_0). \quad (2.1.1)$$

Vejamus que $v(N \cdot r_n b_0)$ está contida na célula $N \cdot w b_0$. De fato, como $\dim(N \cdot r_n b_0) = 1$ então, para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se que $\exp(tX) \cdot r_n b_0 = N \cdot r_n b_0$, com $X \in \mathfrak{g}_{\alpha_n}$. Assim,

$$v(N \cdot r_n b_0) = v \exp(tX) \cdot r_n b_0 = \exp(t \operatorname{Ad}(v)X) \cdot v r_n b_0 = \exp(t \operatorname{Ad}(v)X) \cdot w b_0.$$

Agora, $v\alpha_n > 0$ pois $l(w) = l(v r_n) = l(v) + 1$. Logo, $\operatorname{Ad}(v)X \in \mathfrak{g}_{v\alpha_n} \subset \mathfrak{n}$, implicando que $v(N \cdot r_n b_0) \subset N \cdot w b_0$.

Deste modo, a equação (2.1.1) reescreve-se como

$$\pi_n^{-1}(w b_n) = \{v b_0\} \cup (\pi_n^{-1}(w b_n) \cap (N \cdot w b_0)).$$

Agora, como $w b_0 \in \pi_n^{-1}(w b_n) \cap (N \cdot w b_0)$ então $N(\pi_n^{-1}(w b_0) \cap (N \cdot w b_0)) = N \cdot w b_0$ pois $N \cdot w b_0 \subset N(\pi_n^{-1}(w b_n) \cap (N \cdot w b_0)) \subset N \cdot w b_0$. Portanto,

$$\pi_n^{-1}(N \cdot w b_0) = N(\pi_n^{-1}(w b_n)) = N(\{v b_0\} \cup (\pi_n^{-1}(w b_n) \cap (N \cdot w b_0))) = (N \cdot v b_0) \cup (N \cdot w b_0).$$

■

Proposição 2.1.5. *Considere $\mathcal{S}_w = K_1 \cdots K_n \cdot b_0$ e seja $b = u_1 \cdots u_n \cdot b_0$, com $u_i \in K_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Então $b \in \mathcal{S}_w \setminus N \cdot w b_0$ se, e somente se, $u_i \in M$ para algum $i = 1, \dots, n$. Isto é, um elemento $b \in \mathcal{S}_w$ está na célula de Bruhat $N \cdot w b_0$ se, e somente se, $u_i \notin M$ para todo i .*

Demonstração. Suponha que $u = u_i \in M$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Assim $u \in K_j$ para todo j pois $MAN = P \subset P_n = K_n AN$, ou seja, $M \subset K_n$. Tomando o elemento $v_j = u u_j u^{-1} \in K_j$, podemos reescrever b como $b = u_1 \cdots u_{i-1} v_{i+1} \cdots v_n u \cdot b_0$. Tendo que $u \in M$, então $u b_0 = b_0$, implicando que $b \in \mathcal{S}_v$ com $v = r_1 \cdots \hat{r}_i \cdots r_n$. Como $v < w$ e pelo fato que $\mathcal{S}_w \setminus N \cdot w b_0 = \cup_{v < w} \mathcal{S}_v$, então $b \notin N \cdot w b_0$.

A recíproca segue por indução.

Para $n = 1$, segue que $w = r_1$ e pela Proposição 1.2.10, a célula de Schubert \mathcal{S}_{r_1} pode ser escrito como a união disjunta $\mathcal{S}_{r_1} = b_0 \cup (N \cdot u_1 b_0)$, onde $u_1 \in M^*$ é um representante da reflexão simples $r_1 \in \mathcal{W} = M^*/M$. Se $u_1 \notin M$ então $u_1 b_0 \neq b_0$, implicando que $u_1 \cdot b_0 \in N \cdot u_1 b_0$.

Para $n > 1$, tome $b = u_1 \cdots u_n \cdot b_0$ com $u_i \notin M$ para todo i . Devemos mostrar que b está na célula de Bruhat $N \cdot w b_0$. Defina $x = u_1 \cdots u_{n-1} \cdot b_0$. Assim, $b \neq x$ pois caso contrário, $u_n b_0 = b_0$, ou seja, $u_n \in M$.

Por indução $x \in N \cdot v b_0$ com $v = u_1 \cdots u_{n-1}$. Além disso, $\pi_n(b) = \pi_n(v u_n \cdot b_0) = \pi_n(v \cdot b_0) = \pi_n(x)$, pois $u_n b_0$ e b_0 estão na mesma fibra. Assim, $\pi_n(b) \in \pi_n(N \cdot v b_0) = N \cdot v b_n = N \cdot v u_n b_n = N \cdot w b_n$ e pelo lema anterior, $b \in N \cdot w b_0 \cup N \cdot v b_0$.

Porém, $b \notin N \cdot v b_0$. Pois, caso contrário, sabemos que $\pi_n(b) = \pi_n(x) = z b_n$, para algum $z \in G$. Daí, b está na interseção da fibra $\pi_n^{-1}(z b_n)$ com a célula $N \cdot v b_0$, e esta interseção é um único ponto. Logo, $x = b$, uma contradição. Portanto $b \in N \cdot w b_0$. ■

2.1.2 Parametrização de subconjuntos de subgrupos compactos

Necessitamos agora encontrar subconjuntos de K_i em $\mathcal{S}_w = K_1 \cdots K_n \cdot b_0$ que sejam suficientes para cobrir toda célula de Schubert para então parametrizar estas células de Schubert.

Denote $\alpha = \alpha_i$ e consideremos a fibra canônica P_α/P da projeção $\pi_\alpha : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_\alpha$. O grupo de Lie da variedade flag P_α/P é $G(\alpha)$ cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}(\alpha) = \sum_{\beta \in \langle \alpha \rangle} \mathfrak{g}_\beta$. Esta fibra é uma esfera de dimensão $m = \dim(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha})$.

Lema 2.1.6. *Seja B^m uma bola fechada de \mathbb{R}^m e seja S^{m-1} esfera que é o bordo da bola B^m . Então existe uma função contínua $\psi : B^m \rightarrow K_\alpha$ tal que*

- $\psi(S^{m-1}) \subset M$ e, assim, $\psi(S^{m-1}) \cdot b_0 = b_0$;
- Se $x \in B^m \setminus S^{m-1}$ então $\psi(x) \cdot r_\alpha b_0$ é difeomorfo à célula de Bruhat $N \cdot r_\alpha b_0$.

Demonstração. Demonstraremos apenas o caso onde $m = 1$, pois tal construção será usada posteriormente.

Tome θ a involução de Cartan. Primeiramente, vamos descrever um isomorfismo entre $\mathfrak{g}(\alpha)$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Seja $h_\alpha \in \mathfrak{a}$ o elemento que define a raiz α como um funcional linear utilizando a forma de Cartan-Killing (que é um produto interno quando restrito à \mathfrak{a}), ou seja, $\langle h_\alpha, \cdot \rangle = \alpha(\cdot) \in \mathfrak{a}^*$.

Considere $H_\alpha = \frac{2h_\alpha}{\langle h_\alpha, h_\alpha \rangle}$ e escolha $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tal que $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$, onde $Y_\alpha = \theta(X_\alpha) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Tomando a base $\{H, X, Y\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ tal que

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos escrever o isomorfismo $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{g}(\alpha)$ tomando a associação $\rho(H) = H_\alpha$, $\rho(X) = X_\alpha$ e $\rho(Y) = Y_\alpha$, e estendendo por linearidade.

Seja $\mathfrak{g}_\mathbb{C}(\alpha)$ a complexificação de $\mathfrak{g}(\alpha)$. O isomorfismo ρ se estende a um homomorfismo $\phi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{g}_\mathbb{C}(\alpha)$ sobre o corpo dos complexos. Observe que $\text{ad} \circ \phi$ é uma representação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ em $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Como o grupo de Lie $\text{Sl}(2, \mathbb{C})$ é conexo e simplesmente conexo, pelas notas de Grupos de Lie de San Martin [10, Teorema 6.15], existe única extensão Φ de $\text{Sl}(2, \mathbb{C})$ em $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, relacionada por $e^{\text{ad} \circ \phi(X)} = \Phi(\exp(X))$ para qualquer $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Defina $A_\alpha = X_\alpha + Y_\alpha$ e $A = X + Y$ e considere a fórmula para exponencial de matrizes

$$\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a \cdot \begin{pmatrix} \cos b & -\text{sen } b \\ \text{sen } b & \cos b \end{pmatrix}.$$

Segue que em $\text{Sl}(2, \mathbb{C})$ tem-se

$$\exp(\pi A) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix} = \exp(i\pi H)$$

onde $e^{i\pi} = e^{-i\pi}$ pois a exponencial complexa é periódica de período $2i\pi$. Daí,

$$\begin{aligned} e^{\text{ad}(\pi A_\alpha)} &= e^{\text{ad} \circ \phi(\pi A)} \\ &= \Phi(\exp(\pi A)) \\ &= \Phi(\exp(i\pi H)) \\ &= e^{\text{ad} \circ \phi(i\pi H)} \\ &= e^{\text{ad}(i\pi H_\alpha)}. \end{aligned}$$

Considere, sem perda de generalidade, que G é o grupo de automorfismo internos de \mathfrak{g} . Tomemos

$$m_\alpha = \exp(i\pi H_\alpha) = \exp(\pi A_\alpha).$$

Veja que $A_\alpha \in \mathfrak{k}$ pois $\theta A_\alpha = A_\alpha$, logo $m_\alpha = \exp(\pi A_\alpha) \in K$. Também temos que $m_\alpha \in M = \text{Centr}_K(A)$. De fato, dado $Z \in \mathfrak{a}$, sabendo que $[H_\alpha, Z] = 0$, então $m_\alpha = \exp(i\pi H_\alpha)$ e $\exp(Z)$ comutam e, como A é conexo, devemos ter que m_α comuta com A .

Como $A_\alpha = X_\alpha + Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \mathfrak{p}_\alpha$ e \mathfrak{p}_α é álgebra de Lie de P_α , então $\exp(tA_\alpha) \in P_\alpha$ onde $t \in \mathbb{R}$. Assim, podemos definir a curva $\gamma(t) = \exp(tA_\alpha) \cdot b_0$ na fibra que passa pela origem da projeção canônica $\pi_\alpha : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_\alpha$. Como $m_\alpha \in M$ então $\gamma(\pi) = m_\alpha \cdot b_0 = b_0$, ou seja, tal curva é um laço na fibra.

Vejamus que o período de γ é π . Em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \text{Ad}(e^{tA})H &= \begin{pmatrix} \cos t & -\text{sen } t \\ \text{sen } t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t & \text{sen } 2t \\ \text{sen } 2t & -\cos 2t \end{pmatrix} = -\text{sen } 2tX + \cos 2tH + \text{sen } 2tY. \end{aligned}$$

Assim,

$$\text{Ad}(\exp(tA_\alpha))H_\alpha = \rho(\text{Ad}(e^{tA})H) = -\text{sen } 2tX_\alpha + \cos 2tH_\alpha + \text{sen } 2tY_\alpha.$$

Veja que $\text{Ad}(\exp(tA_\alpha))H_\alpha = H_\alpha$ se, e somente se, $t = n\pi$ com n inteiro. Como $\exp(tA_\alpha) \in K$, então $\exp(tA_\alpha) \in M = \text{Centr}_K(\mathfrak{a})$ se, e somente se, $t = n\pi$. Logo, $\gamma(t) = b_0$ apenas para $t = n\pi$.

Daí,

$$\gamma(t + \pi) = \exp(tA_\alpha + \pi A_\alpha) \cdot b_0 = \exp(tA_\alpha) \exp(\pi A_\alpha) \cdot b_0 = \exp(tA_\alpha) \cdot b_0 = \gamma(t)$$

obtendo que γ é periódica de período π . Deste modo, temos um difeomorfismo no intervalo $(0, \pi)$.

Portanto, a função $\psi : [0, \pi] \rightarrow K_\alpha$ que associa $t \mapsto \exp(tA_\alpha)$ está bem definida (isto é, $\exp(tA_\alpha) \in K \cap P_\alpha = K_\alpha$) e $\psi(0) = 1 \in M$, $\psi(\pi) = m_\alpha = \exp(\pi A_\alpha) \in M$. ■

Lema 2.1.7. *Os auto-espacos \mathfrak{g}_β são invariantes pela ação de $\text{Ad}(m_\alpha)$ e vale*

$$\text{Ad}(m_\alpha)|_{\mathfrak{g}_\beta} = (-1)^{\epsilon(\alpha, \beta)} \text{Id}$$

onde $\epsilon(\alpha, \beta) = \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ é o número de Killing.

Demonstração. De fato, tomando $X \in \mathfrak{g}_\beta$ e sabendo que

$$\text{ad}(H_\alpha)X = \beta(H_\alpha)X = \beta \left(\frac{2h_\alpha}{\langle h_\alpha, h_\alpha \rangle} \right) X = \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} X = \epsilon(\alpha, \beta)X$$

temos que

$$\begin{aligned} \text{Ad}(m_\alpha)X &= e^{\text{ad}(\pi A_\alpha)}X = e^{\text{ad}(i\pi H_\alpha)}X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\text{ad}(i\pi H_\alpha))^n}{n!} X \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi \epsilon(\alpha, \beta))^n}{n!} X = e^{i\pi \epsilon(\alpha, \beta)} X = (-1)^{\epsilon(\alpha, \beta)} X. \end{aligned}$$

■

2.1.3 Estrutura CW-complexo para variedades flag maximais

Para cada célula de Schubert \mathcal{S}_w , sabemos que ela é formada pela seguinte união

$$\mathcal{S}_w = N \cdot wb_0 \cup \bigcup_{v < w} \mathcal{S}_v.$$

Deste modo, para verificar que a decomposição em células de Schubert fornece a estrutura CW-complexo, basta ver que cada célula \mathcal{S}_w possui uma função característica que efetua a colagem de \mathcal{S}_w em células de dimensões menores.

Primeiramente, fixemos uma decomposição minimal $w = r_1 \cdots r_{l(w)}$ para todo elemento $w \in \mathcal{W}$. Já sabemos que $\mathcal{S}_w = K_1 \cdots K_{l(w)} \cdot b_0$ e para cada $i = 1, \dots, l(w)$, existe uma função $\psi : B^{d_i} \rightarrow K_i$, onde d_i é a dimensão da fibra da projeção canônica $\pi_i : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_i$.

Considere a bola $B_w = B^{d_1} \times \cdots \times B^{d_{l(w)}}$ de dimensão $d = d_1 + \cdots + d_{l(w)}$. Definiremos como função característica a aplicação $\Phi_w : B_w \rightarrow \mathbb{F}$ tal que para $(t_1, \dots, t_{l(w)}) \in B_w$ temos que

$$\Phi_w(t_1, \dots, t_{l(w)}) = \psi_1(t_1) \cdots \psi_{l(w)}(t_{l(w)}) \cdot b_0.$$

Veja que para cada decomposição minimal de w temos uma função característica diferente. Usaremos $\Phi_w = \Phi_{r_1 \cdots r_{l(w)}}$ a fim de simplificar a notação.

Proposição 2.1.8. *Sejam $w = r_1 \cdots r_n$ uma decomposição minimal e Φ_w a função definida anteriormente. Então Φ_w é de fato uma função característica para a célula de Schubert \mathcal{S}_w , isto é,*

1. $\Phi_w(B_w) \subset \mathcal{S}_w$;
2. $\Phi_w(t) \in \mathcal{S}_w \setminus N \cdot wb_0$ se, e somente se, $t \in \partial B_w = S^{d-1}$, onde $t = (t_1, \dots, t_{l(w)})$;
3. $\Phi_w|_{B_w^\circ} : B_w^\circ \rightarrow N \cdot wb_0$ é um difeomorfismo, onde B_w° é o interior da bola B_w .

Demonstração. Por definição, como $t_i \in K_i$ para todo i , então

$$\Phi_w(t_1, \dots, t_{l(w)}) = \psi_1(t_1) \cdots \psi_{l(w)}(t_{l(w)}) \cdot b_0 \in K_1 \cdots K_{l(w)} \cdot b_0 = \mathcal{S}_w$$

demonstrando o primeiro item.

Pela Proposição 2.1.5, temos que $\Phi_w(t) \in \mathcal{S}_w \setminus N \cdot wb_0$ se, e somente se, $\psi_i(t_i) \in M$ para algum $i = 1, \dots, l(w)$. Pelo Lema 2.1.6, segue que $t_i \in \partial B^{d_i} = S^{d_i-1}$ e, portanto $t \in \partial B_w$, provando a segunda afirmação.

Resta a demonstração do terceiro item. Pelo segundo item, temos que a função $\Phi_w|_{B_w^\circ}$ deve ser sobrejetora. Mostraremos a injetividade por indução.

Para $l(w) = 1$, ele segue pelo Lema 2.1.6 para o caso demonstrado, ou seja, de dimensão 1.

Se $l(w) = n > 1$, suponha que $\Phi_w(t) = \Phi_w(s)$, com $t = (t_1, \dots, t_n)$ e $s = (s_1, \dots, s_n)$ em B_w° . Dados os elementos

$$\begin{aligned} x &= \psi_1(t_1) \cdots \psi_{n-1}(t_{n-1}) \cdot b_0 \\ y &= \psi_1(s_1) \cdots \psi_{n-1}(s_{n-1}) \cdot b_0 \end{aligned}$$

observe que os elementos $\psi_i(t_i)$ e $\psi_i(s_i)$ não estão em M . Denotando $v = r_1 \cdots r_{n-1}$, pela Proposição 2.1.5, $x, y \in N \cdot vb_0$. Além disso,

$$\pi_n(x) = \pi_n(\Phi_w(t)) = \pi_n(\Phi_w(s)) = \pi_n(y)$$

ou seja, x e y pertencem à mesma fibra da projeção canônica $\pi_n : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_n$. Pelo Lema 2.1.4, a fibra de π_n intercepta a célula $N \cdot vb_0$ apenas em um único elemento, implicando que $x = y$. Utilizando a hipótese de indução, temos que $t_i = s_i$ para $i = 1, \dots, n-1$ e assim, $\psi_1(t_1) \cdots \psi_{n-1}(t_{n-1}) = \psi_1(s_1) \cdots \psi_{n-1}(s_{n-1})$. Deste modo, como $\Phi_w(t) = \Phi_w(s)$, então $\psi_n(t_n) \cdot b_0 = \psi_n(s_n) \cdot b_0$. Logo, $t_n = s_n$ pois é o caso em que $l(r_n) = 1$.

Portanto, $\Phi_w|_{B_w^\circ}$ é um homeomorfismo. A diferenciabilidade vem das funções ψ_i que são difeomorfismos. ■

Com esta proposição, temos que o n -esqueleto X^n é a união das células de Schubert com dimensão menor ou igual a n . Podemos notar que o 0-esqueleto é formado apenas pelo ponto $\{b_0\}$.

Sendo $d = \dim \mathcal{S}_w = \dim N \cdot wb_0$, quando colapsamos a fronteira da bola B_w a um ponto, ou seja, $B_w/\partial(B_w)$, obtemos uma esfera S^d . Da mesma forma, podemos identificar a fronteira da célula de Schubert a um ponto e definir como

$$\sigma_w = \mathcal{S}_w / (\mathcal{S}_w \setminus N \cdot wb_0).$$

Pelo fato de que $\Phi_w(\partial(B_w)) = \mathcal{S}_w \setminus N \cdot wb_0$, podemos induzir o homeomorfismo $\Phi_w : S^d \rightarrow \sigma_w$ tal que $\Phi_w(t \cdot \partial(B_w)) = \Phi_w(t) \cdot (\mathcal{S}_w \setminus N \cdot wb_0)$. Sua inversa será denotada por $\Phi_w^{-1} : \sigma_w \rightarrow S^d$. Veja que esta função Φ_w^{-1} não é a inversa da função $\Phi_w : B_w \rightarrow \mathcal{S}_w$, mas da função induzida pelo quociente $B_w/\partial(B_w) \rightarrow \sigma_w$.

2.1.4 Variedades flag parciais

Agora, iremos construir uma decomposição celular da variedade flag parcial \mathbb{F}_Θ com a utilização dos elementos minimais $w \in \mathcal{W}^\Theta$ e suas classes laterais $w\mathcal{W}_\Theta$, que satisfazem $\dim(\mathcal{S}_w^\Theta) = \dim(\mathcal{S}_w)$.

Dadas decomposições minimais de elementos minimais w em \mathcal{W}^Θ , podemos definir funções $\Phi_w^\Theta : B_w \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ tais que

$$\Phi_w^\Theta(t_1, \dots, t_n) = \phi_1(t_1) \cdots \phi_n(t_n) \cdot b_\Theta$$

que serão as funções características da decomposição celular de \mathbb{F}_Θ . Observe que, pela equivariância de π_Θ , temos $\Phi_w^\Theta = \pi_\Theta \circ \Phi_w$.

Proposição 2.1.9. *Seja $w \in \mathcal{W}^\Theta$, a qual satisfaz $\dim(\mathcal{S}_w^\Theta) = \dim(\mathcal{S}_w)$, e tome uma decomposição minimal $w = r_1 \cdots r_n$ em termos de reflexões simples. Então, a função $\Phi_w^\Theta : B_w \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ definida por $\Phi_w^\Theta = \pi_\Theta \circ \Phi_w$ é um mapa característico para a célula de Schubert \mathcal{S}_w^Θ , ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\Phi_w^\Theta(B_w) \subset \mathcal{S}_w^\Theta$;
2. $\Phi_w^\Theta(t) \in \mathcal{S}_w^\Theta \setminus N \cdot wb_\Theta$ se, e somente se, $t \in \partial B_w = S^{d-1}$, onde $t = (t_1, \dots, t_{l(w)})$;
3. $\Phi_w^\Theta|_{B_w^\circ} : B_w^\circ \rightarrow N \cdot wb_\Theta$ é um difeomorfismo, onde B_w° é o interior da bola B_w .

Demonstração. Para o primeiro item, veja que

$$\Phi_w^\Theta(B_w) = \pi_\Theta \circ \Phi_w(B_w) \subset \pi_\Theta(\mathcal{S}_w) = \mathcal{S}_w^\Theta.$$

Para o segundo item, utiliza-se o fato de que $\pi_\Theta(\mathcal{S}_w \setminus N \cdot wb_0) = \mathcal{S}_w^\Theta \setminus N \cdot wb_\Theta$ e $\Phi_w^\Theta = \pi_\Theta \circ \Phi_w$. O último item é consequência da igualdade de dimensões da célula de Bruhat $N \cdot wb_0$ com $N \cdot wb_\Theta$ ■

2.2 Variedades Grassmanianas Simpléticas

Nosso objetivo será estudar a construção da estrutura CW-complexo nas variedades flag minimais do grupo simplético, ou seja, as grassmanianas simpléticas. Este desenvolvimento será útil no Capítulo 4, onde determinaremos o valor da característica de Euler destas variedades flag.

O grupo simplético é definido como

$$\mathrm{Sp}(l, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Gl}(2l, \mathbb{R}) \mid g^t J g = J\}$$

onde J é uma matriz em $\mathrm{Gl}(2l, \mathbb{R})$ escrita em blocos como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_l \\ \mathrm{Id}_l & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz pode ser representada como uma forma bilinear anti-simétrica não-degenerada, ou seja, é a matriz de uma forma simplética ω em \mathbb{R}^{2l} em uma base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_l, f_1, \dots, f_l\}$. A matriz dos elementos de $\mathrm{Sp}(l, \mathbb{R})$ pode ser escrita em bloco $l \times l$ como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que $ba^t = ab^t$, $dc^t = cd^t$ e $da^t - bc^t = \mathrm{Id}$.

A álgebra de Lie do grupo simplético é $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$, definida como

$$\mathfrak{sp}(l, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbb{R}) \mid XJ + JX^t = 0\}$$

e cada elemento $X \in \mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$ pode ser descrito explicitamente como uma matriz

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

tais que A, B, C são matrizes reais $l \times l$ e B, C são matrizes simétricas.

2.2.1 Decomposição de Cartan

Tomemos $\theta(X) = JXJ^{-1}$ uma involução de Cartan, a qual decompõe o espaço o grupo simplético em $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ tal que:

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \mid A \text{ é anti-simétrica e } B \text{ é simétrica} \right\};$$

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \mid A \text{ e } B \text{ são matrizes simétricas} \right\}.$$

A subálgebra \mathfrak{k} é isomorfa a álgebra das matrizes unitárias $\mathfrak{u}(l) = \{X \in \mathfrak{gl}(l, \mathbb{C}) \mid X + \overline{X}^t = 0\}$, onde o isomorfismo é dado por

$$X = A + iB \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

A decomposição de Cartan para o grupo de Lie será $\mathrm{Sp}(l, \mathbb{R}) = KS$, onde $K = U(l) = \{g \in \mathrm{Gl}(l, \mathbb{C}) \mid \overline{g}^t g = \mathrm{Id}\}$ é o grupo das matrizes unitárias e S é o conjunto das matrizes simétricas positivas definidas. O subgrupo K pode ser descrito por blocos de tamanho $l \times l$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid aa^t + bb^t = \mathrm{Id} \text{ e } ab^t = ba^t \right\}. \quad (2.2.1)$$

2.2.2 Grupo de Weyl

A subálgebra abeliana maximal \mathfrak{a} de \mathfrak{s} é descrita por

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \mid D \text{ é uma matriz diagonal } l \times l \right\}$$

e uma câmara de Weyl positiva é

$$\mathfrak{a}^+ = \{\mathrm{diag}(a_1 \cdots, a_l, -a_1, \cdots, -a_l) \mid a_1 > \cdots > a_l\}.$$

Dado uma matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(a_1 \cdots, a_l)$ e definindo o funcional linear $\lambda_i(D) = a_i$ para todo $i \in \{1, \dots, l\}$, o sistema de raízes positivas é

$$\Pi^+ = \{\lambda_i - \lambda_j \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\lambda_i + \lambda_j \mid 1 \leq i \leq j \leq l\}$$

a qual é gerado pelo sistema simples de raízes

$$\Sigma = \{\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \alpha_{l-1} = \lambda_{l-1} - \lambda_l, \alpha_l = \lambda_{2l}\}.$$

O grupo de Weyl \mathcal{W} é gerado pelas seguintes reflexões em torno das raízes:

- Para $i \in \{1, \dots, l-1\}$, a reflexão será a permutação das posições i e $i+1$, isto é,

$$(\dots, a_i, a_{i+1}, \dots, -a_i, -a_{i+1}, \dots) \longmapsto (\dots, a_{i+1}, a_i, \dots, -a_{i+1}, -a_i, \dots);$$

- Para α_l , a reflexão será a troca de sinal da posição l , isto é,

$$(\dots, a_l, \dots, -a_l) \longmapsto (\dots, -a_l, \dots, a_l).$$

Observe que cada elemento w deste grupo de Weyl é a combinação de uma permutação de l elementos com uma operação que muda ou não o sinal de cada coordenada do elemento. Assim, sua ordem é $|\mathcal{W}| = 2^l l!$.

2.2.3 Subálgebras parabólicas maximais

Os subespaços associados às raízes são:

- Para uma raiz do tipo $\lambda_i - \lambda_j$, com $i < j$, $\mathfrak{g}_{\lambda_i - \lambda_j}$ é gerado por $e_{i,j} - e_{l+i,l+j}$, ou seja, possui entradas não nula apenas em i, j e $l+i, l+j$ que aparecem nos blocos diagonais A e $-A^t$;
- Para uma raiz do tipo $\lambda_i + \lambda_j$, $\mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$ é gerado por $e_{i,l+j} + e_{j,l+i}$, se $i < j$, e por $e_{i,l+i}$, se $i = j$, cujas únicas entradas não nulas são $i, l+j$ e $j, l+i$ que aparecem no bloco superior direito B .

Assim, a subálgebra nilpotente \mathfrak{n} é dada por

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^t \end{pmatrix} \mid \text{a diagonal de } A \text{ é nula e } B \text{ é simétrica} \right\}.$$

A subálgebra parabólica minimal é $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, uma vez que \mathfrak{a} é uma subálgebra de Cartan, implicando em $\mathfrak{m} = 0$. Temos também que

$$\mathfrak{n}^- = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & -A^t \end{pmatrix} \mid \text{a diagonal de } A \text{ é nula e } C \text{ é simétrica} \right\}.$$

Considere o conjunto $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_i\}$, com $i \in \{1, \dots, l\}$. Neste caso, chamaremos a subálgebra \mathfrak{p}_Θ de subálgebra parabólica maximal pela raiz α_i . Podemos escrever estas subálgebras parabólicas maximais como blocos de tamanho $l \times l$ da seguinte maneira:

- Se $1 \leq i \leq l-1$ então as matrizes da subálgebra \mathfrak{p}_Θ são da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

com B simétrica e

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \mid A_1 \text{ é uma matriz } i \times i \text{ arbitrária} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \mid C_1 \text{ é uma matriz } l-i \times l-i \text{ simétrica} \right\};$$

- Se $i = l$ então a subálgebra \mathfrak{p}_Θ é

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^t \end{pmatrix} \mid A \text{ é uma matriz qualquer e } B \text{ é simétrica} \right\}.$$

2.2.4 As variedades flag minimais

Dada uma forma simplética ω num espaço euclidiano \mathbb{R}^{2l} , diremos que um subespaço $V \subset \mathbb{R}^{2l}$ é isotrópico em relação a ω se $\omega(u, v) = 0$, para todo $u, v \in V$. Temos que a dimensão deste subespaço é no máximo l , pois por ser isotrópico, $V \subset V^\perp$, onde $V^\perp = \{u \in \mathbb{R}^{2l} \mid \omega(u, v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}$ é o perpendicular de V , e assim

$$2 \dim V \leq \dim V + \dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^{2l} = 2l.$$

Denotaremos por $L_p(\mathbb{R}^{2l})$ o conjunto dos subespaços isotrópicos de dimensão p em \mathbb{R}^{2l} , para $p \leq l$, isto é,

$$L_p(\mathbb{R}^{2l}) = \{V \subset \mathbb{R}^{2l} \mid \omega(u, v) = 0 \text{ para todo } u, v \in V \text{ e } \dim(V) = p\}.$$

Este conjunto será chamada de Grassmaniana Simplética. No caso de $p = l$, $L_l(\mathbb{R}^{2l})$ é conhecido como Grassmaniana Lagrangeana, pois os subespaços isotrópicos de dimensão máxima são usualmente chamados Lagrangeanos.

Nosso objetivo será mostrar que as variedades flag minimais de $\text{Sp}(l, \mathbb{R})$ são exatamente estas grassmanianas simpléticas.

Existe uma maneira algébrica de se representar as grassmanianas simpléticas $L_p(\mathbb{R}^{2l})$. Seja \mathcal{B} uma base de \mathbb{R}^{2l} . Um conjunto de p vetores linearmente independentes $\{v_1, \dots, v_p\}$ pode ser descrito como uma matriz $2l \times p$ com colunas representando os coeficientes de cada vetor v_i na base \mathcal{B} , e esta matriz terá posto p pois é formado por vetores linearmente independentes. Denote por $B_p(l)$ o conjunto de todas as matrizes $2l \times p$ de posto p . Dois elementos $x, y \in B_p(l)$ representam o mesmo subespaço p dimensional se, e somente se, temos uma combinação linear das colunas de cada uma das matrizes x e y , ou seja, existe uma matriz $p \times p$ inversível a tal que $x = ya$.

Agora, dado uma forma simplética ω , podemos tomar a base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_l, f_1, \dots, f_l\}$ tal que $[\omega]_{\mathcal{B}} = J$. Deste modo, dois elementos $x, y \in B_p(l)$ representam subespaços isotrópicos se, e somente se, existe uma matriz $p \times p$ inversível tal que $x = ya$ e $x^t J x = 0$. Isto se deve ao fato de $\omega(u, v) = 0$ para todo $u, v \in V$, com V subespaço isotrópico representado por x , implicar que $[u]_{\mathcal{B}}^t J [v]_{\mathcal{B}} = [\omega(u, v)]_{\mathcal{B}} = 0$. Considere uma base $\{v_1, \dots, v_p\}$ de V e seja x a matriz desta base em relação a base \mathcal{B} . Então, $x^t J x = 0$.

Definindo a relação de equivalência \sim em $B_p(l)$ por $x \sim y$ se, e somente se, existe uma matriz a de tamanho $p \times p$ inversível tal que $x = ya$ e $x^t J x = 0$, temos então que as classes de equivalência $B_p(l) / \sim$ definem um isomorfismo com $L_p(\mathbb{R}^{2l})$.

Lema 2.2.1. $L_p(\mathbb{R}^{2l})$ é um espaço homogêneo de $\text{Sp}(l, \mathbb{R})$.

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_l, f_1, \dots, f_l\}$ a base de \mathbb{R}^{2l} tal que $[\omega]_{\mathcal{B}} = J$ e V um subespaço isotrópico de \mathbb{R}^{2l} . Então, para todo $u, v \in V$ e $g \in \text{Sp}(l, \mathbb{R})$,

$$\omega(gu, gv) = (gu)^t J (gv) = u^t (g^t J g) v = u^t J v = \omega(u, v) = 0.$$

Assim, gV também é um subespaço isotrópico e, portanto, temos uma ação invariante de $\text{Sp}(l, \mathbb{R})$ em $L_p(\mathbb{R}^{2l}) \cong B_p(l) / \sim$ dada por

$$\begin{array}{ccc} \text{Sp}(l, \mathbb{R}) & \times & L_p(\mathbb{R}^{2l}) & \rightarrow & L_p(\mathbb{R}^{2l}) \\ g & , & x & \mapsto & gx \end{array}$$

onde g é uma matriz $2l \times 2l$ e x é uma matriz $2l \times p$. Precisamos ver que tal ação é transitiva.

Considere primeiro o caso $p = l$. Seja V um subespaço isotrópico e $\{v_1, \dots, v_l\}$ uma base ortonormal de V . Assim, podemos escrever matriz destes vetores na base \mathcal{B} que será uma matriz x de tamanho $2l \times l$, que satisfaz $x^t x = \text{Id}$ pelo fato de x ser a matriz de uma base ortonormal. Como V é isotrópico, tem-se $x^t J x = 0$. Deste modo, a matriz x pode ser escrita em blocos como

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ matrizes } l \times l$$

e considerando as condições $x^t x = \text{Id}$ e $x^t J x = 0$ temos as relações

$$a^t a + b^t b = \text{Id} \quad \text{e} \quad a^t b = b^t a.$$

Daí, tomando o elemento $g \in \text{Sp}(l, \mathbb{R})$ dado por

$$g = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

pela equação (2.2.1), devemos ter que $g \in K$.

Seja V_0 o subespaço gerado pelos vetores $\{e_1, \dots, e_l\}$ de \mathcal{B} . O subespaço V_0 é, na verdade, isotrópico pois $\omega(e_i, e_j) = 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, l\}$. Observe que a matriz de V_0 na base \mathcal{B} é

$$y = \begin{pmatrix} \text{Id} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, pela forma que foi construída a matriz g , temos $x = gy$, concluindo que K é transitivo em $B_l(l)/ \sim \cong L_l(\mathbb{R}^{2l})$. Daí, sabendo que $\text{Sp}(l, \mathbb{R}) = KS$ é sua decomposição de Cartan, se tomarmos $h \in S$, teremos que hV_0 é isotrópico e, pela transitividade de K , $V = g(hV_0)$ para algum $g \in K$, concluindo que a ação é transitivo para $\text{Sp}(l, \mathbb{R})$.

Precisamos ver que a ação também é transitiva para $p < l$. Considere V um subespaço isotrópico de dimensão p e seja x a matriz de tamanho $2l \times p$ que tem por colunas os coeficientes de uma base ortonormal de V em relação a base \mathcal{B} .

Um subespaço é isotrópico se $V \subset V^\perp$, e nesse caso, como $p < l$ então

$$\dim V^\perp = 2l - p > 2l - l = l.$$

Assim, V está contido propriamente em ser perpendicular V^\perp . Seja $v \in V^\perp \setminus V$ e considere o subespaço gerado $V_1 = \langle v, V \rangle$ com dimensão $p + 1$ que é isotrópico, pois $V_1 \subset V^\perp$. Procedendo deste modo finitas de vezes, podemos construir um subespaço \bar{V} isotrópico de dimensão l tal que $V \subset \bar{V}$.

Estendendo uma base ortonormal de V em uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_l\}$ de \bar{V} , a qual também estenderá a matriz x de V em uma matriz \bar{x} de \bar{V} , existe $g \in K$ tal que $\bar{V} = g\bar{V}_0$, onde $\bar{V}_0 = \langle e_1, \dots, e_l \rangle$. Logo, se V_0 é gerado pelos p primeiros vetores $\{e_1, \dots, e_p\}$ de \mathcal{B} , então $V = gV_0$ com $g \in K$. Portanto, a ação é transitiva no subgrupo K , e usando o mesmo argumento anterior, a ação é transitiva em todo $\text{Sp}(l, \mathbb{R})$. ■

Proposição 2.2.2. *A variedade flag minimal \mathbb{F}_Θ , com $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_p\}$, é a variedade grassmaniana simplética $L_p(\mathbb{R}^{2l})$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_l, f_1, \dots, f_l\}$ a base de \mathbb{R}^{2l} tal que $[\omega]_{\mathcal{B}} = J$ e V_0 o subespaço isotrópico gerado pelos p primeiros vetores de \mathcal{B} , isto é, $V_0 = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \rangle$. Queremos que o subgrupo de isotropia seja $(\mathrm{Sp}(l, \mathbb{R}))_{V_0} = P_\Theta$, onde $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_p\}$.

Observe que a subálgebra de Lie desta isotropia é dada por

$$(\mathfrak{sp}(l, \mathbb{R}))_{V_0} = \{X \in \mathfrak{sp}(l, \mathbb{R}) \mid \exp(tX)V_0 = V_0, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Tal subálgebra coincide exatamente com a subálgebra parabólica \mathfrak{p}_Θ . Deste modo, a componente conexa da identidade de P_Θ é igual a componente conexa da identidade da isotropia em V_0 .

Vamos mostrar que cada componente conexa de P_Θ contém um elemento da isotropia. Como os elementos de A , que é o grupo de Lie cuja álgebra Lie é o abeliano maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, são matrizes diagonais, então $A \subset (\mathrm{Sp}(l, \mathbb{R}))_{V_0}$. Sabendo que cada componente conexa de P_Θ contém um elemento de A , então cada componente conexa de P_Θ contém um elemento da isotropia.

Cada componente conexa de P_Θ e $(\mathrm{Sp}(l, \mathbb{R}))_{V_0}$ são classes laterais das respectivas componentes conexas na identidade [10, Proposição 2.13] e como elas coincidem na identidade, então elas devem coincidir também em cada componente conexa. Logo $(\mathrm{Sp}(l, \mathbb{R}))_{V_0} = P_\Theta$. ■

Assim, toda decomposição realizada na variedade flag minimal \mathbb{F}_Θ pode ser transportada para a grassmaniana simplética $L_p(l)$. A decomposição de Bruhat de $\mathbb{F}_\Theta = L_p(\mathbb{R}^{2l})$, para $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_p\}$, é dada por

$$L_p(\mathbb{R}^{2l}) = \coprod_{w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta} N \cdot wb_\Theta.$$

Cada célula de Schubert $\mathcal{S}_w^\Theta = \mathrm{fe}(N \cdot wb_\Theta)$ de $L_p(\mathbb{R}^{2l})$ pode ser determinada por um único representante minimal $w^\Theta \in \mathcal{W}^\Theta$. O seguinte teorema, demonstrado na tese de Rabelo [8] descreve como devem ser estes elementos minimais.

Teorema 2.2.3. *Os elementos minimais \mathcal{W}^Θ , com $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_p\}$, admitem uma relação biunívoca com o conjunto \mathcal{A}_p^l de l -uplas da forma $(\underline{i}, m, \underline{a}) \in \mathbb{N}^l$, tal que*

$$\underline{i} = (i_1, \dots, i_p), \quad m \in \{0, \dots, p\}, \quad \underline{a} = (a_{p+2}, \dots, a_l)$$

satisfazendo as seguintes regras:

- Em relação à \underline{a} :

$$0 \leq m \leq a_{p+2} \leq a_{p+3} \leq \dots \leq a_l \leq p.$$

Isto é, os elementos de \underline{a} formam uma sequência crescente de números inteiro limitada ao intervalo $[m, p]$;

- Em relação à \underline{i} :

$$- i_t \in 0, \dots, l, \text{ para todo } t = 1, \dots, p;$$

- Admite uma sequência de repetição de zeros até o primeiro elemento não nulo;
- A partir do primeiro elemento não nulo, passa a ser uma sequência estritamente crescente;
- Só permite ter elementos não nulos nas m últimas posições de \underline{i} , isto é, $i_1 = \dots = i_{p-m} = 0$.

A célula associada à $(\underline{i}, m, \underline{a})$ será chamada de uma *célula do tipo m* . Observe que para $m = 0$, todos os valores de \underline{i} serão nulos.

Tipo	$(\underline{i}, m, \underline{a})$	Tipo	$(\underline{i}, m, \underline{a})$	Tipo	$(\underline{i}, m, \underline{a})$
0	$(0, 0, \mathbf{0}, 0)$	1	$(0, 0, \mathbf{1}, 1)$	2	$(0, 0, \mathbf{2}, 2)$
0	$(0, 0, \mathbf{0}, 1)$	1	$(0, 1, \mathbf{1}, 1)$	2	$(0, 1, \mathbf{2}, 2)$
0	$(0, 0, \mathbf{0}, 2)$	1	$(0, 2, \mathbf{1}, 1)$	2	$(0, 2, \mathbf{2}, 2)$
		1	$(0, 3, \mathbf{1}, 1)$	2	$(0, 3, \mathbf{2}, 2)$
		1	$(0, 4, \mathbf{1}, 1)$	2	$(0, 4, \mathbf{2}, 2)$
		1	$(0, 0, \mathbf{1}, 2)$	2	$(1, 2, \mathbf{2}, 2)$
		1	$(0, 1, \mathbf{1}, 2)$	2	$(1, 3, \mathbf{2}, 2)$
		1	$(0, 2, \mathbf{1}, 2)$	2	$(1, 4, \mathbf{2}, 2)$
		1	$(0, 3, \mathbf{1}, 2)$	2	$(2, 3, \mathbf{2}, 2)$
		1	$(0, 4, \mathbf{1}, 2)$	2	$(2, 4, \mathbf{2}, 2)$
				2	$(3, 4, \mathbf{2}, 2)$

Tabela 2.1: Exemplo de \mathcal{A}_p^l para $p = 2$ e $l = 4$.

A relação entre os conjunto \mathcal{W}^Θ e \mathcal{A}_p^l é obtida através da função $\eta : \mathcal{A}_p^l \rightarrow \mathcal{W}^\Theta$ que é construída pelos seguintes passos:

1. Denote por $r_i = r_{\alpha_i}$ a reflexão associada a raiz simples $\alpha_i \in \Sigma$;
2. Para qualquer $1 \leq k \leq n \leq l$ definimos

$$\pi(n, k) = r_{n-k+1}r_{n-k+2} \cdots r_{n-1}r_n$$

e $\pi(n, 0) = 1$. Veja que o tamanho do elemento $\pi(n, k)$ é k ;

3. Definimos η_1 a função que associa para cada \underline{i} um elemento do grupo de Weyl da seguinte forma:

$$\eta_1(i_1, \dots, i_p) = \pi(l, i_1)\pi(l, i_2) \cdots \pi(l, i_p);$$

4. Definimos também a função η_2 que associa a cada \underline{a} um elemento do grupo de Weyl da seguinte forma:

$$\eta_2(a_{p+2}, \dots, a_l) = \pi(l-2, a_{p+2})\pi(l-3, a_{p+3}) \cdots \pi(p, a_l);$$

5. Finalmente, η é uma função que leva cada elemento $(\underline{i}, m, \underline{a}) \in \mathcal{A}_p^l$ em um elemento de \mathcal{W}^\ominus da seguinte forma

$$\eta(\underline{i}, m, \underline{a}) = \eta_1(\underline{i})\pi(l-1, m)\eta_2(\underline{a}).$$

A seguinte proposição mostra a importância da escolha do conjunto \mathcal{A}_p^l quando necessitarmos saber a dimensão de cada célula de Schubert.

Proposição 2.2.4. *Dada uma célula \mathcal{S}_w^\ominus associada a um elemento $(\underline{i}, m, \underline{a})$, sua dimensão será a soma dos elementos da sequência $(\underline{i}, m, \underline{a})$, isto é,*

$$\dim(\mathcal{S}_w^\ominus) = (i_1 + \cdots + i_p) + m + (a_{p+2} + \cdots + a_l).$$

Demonstração. O Lema 1.2.11 diz que existe único w' tal que

$$\dim \mathcal{S}_w^\ominus = \dim \mathcal{S}_{w'}.$$

Pelo fato de todas as raízes terem multiplicidade 1, segue da equação (1.2.2) que

$$\dim(\mathcal{S}_w^\ominus) = \sum_{i=1}^{l(w')} m_\alpha + m_{2\alpha} = \sum_{i=1}^{l(w')} 1 = l(w').$$

Daí, pela construção acima, existe $(\underline{i}, m, \underline{a}) \in \mathcal{A}_p^l$ tal que $\eta(\underline{i}, m, \underline{a}) = w'$. Logo, sabendo que $l(\pi(n, k)) = k$, para $1 \leq k \leq n \leq l$, e $l(\pi(n, 0)) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} l(w) &= l(\eta_1(\underline{i})\pi(l-1, m)\eta_2(\underline{a})) = l(\eta_1(\underline{i})) + l(\pi(l-1, m)) + l(\eta_2(\underline{a})) \\ &= (l(\pi(l, i_1)) + \cdots + l(\pi(l, i_p))) + m + (l(\pi(l-2, a_{p+2})) + \cdots + l(\pi(p, a_l))) \\ &= (i_1 + \cdots + i_p) + m + (a_{p+2} + \cdots + a_l). \end{aligned}$$

■

Corolário 2.2.5. $\dim(L_p(\mathbb{R}^{2l})) = \frac{p}{2}(4l - 3p + 1)$.

Demonstração. Basta calcular a dimensão da maior célula de Schubert da grassmaniana simplética, ou seja, deve-se tomar a l -upla $(\underline{i}, m, \underline{a}) \in \mathcal{A}_p^l$ tal que a soma dos seus elementos é a maior possível. Este elemento pode ser escolhido da seguinte maneira:

- $m = p$;
- $a_{p+2} = \cdots = a_l = p$;
- $i_1 = l - p + 1$; $i_2 = l - p + 2$; \cdots ; $i_p = l$.

Logo,

$$\begin{aligned} \dim(L_p(\mathbb{R}^{2l})) &= \left(\sum_{t=1}^p l - p + t \right) + p + \left(\sum_{t=1}^{l-p+1} p \right) = \frac{p}{2}(2l - p + 1) + p(l - p) \\ &= \frac{p}{2}(4l - 3p + 1). \end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Homologia das variedades flag

Neste capítulo, apresentamos o cálculo da homologia celular das variedades flag maximais. Primeiramente, descrevemos um breve resumo sobre alguns conceitos fundamentais da homologia celular de um espaço CW-complexo. Em seguida, faz-se o cálculo do operador fronteira da homologia celular, que dará origem a homologia. Por fim, continuamos o exemplo $Sl(3, \mathbb{R})$ de modo a deixar claro todo este processo.

3.1 Noções básicas sobre homologia celular

A homologia celular é uma eficiente ferramenta para calcular os grupos de homologia (singular) de CW-complexos, utilizando para tal, o cálculo do grau de algumas funções específicas. Daremos uma breve introdução sobre homologia celular e como efetuar seu cálculo, presente no Hatcher [2]. Seja X um espaço topológico e H_k o k -ésimo grupo de homologia singular de X . Vamos começar com o seguinte lema.

Lema 3.1.1. *Seja X um CW-complexo, formado por um conjunto de células B_w^n , onde n é a dimensão da célula e w é uma indexação das células. Então:*

1. $H_k(X^n, X^{n-1})$ é zero para $k \neq n$ e abeliano livre para $k = n$, cuja base está em bijeção com o número de n -células de X ;
2. $H_k(X^n) = 0$ para $k > n$. Em particular, se X tem dimensão finita então $H_k(X) = 0$ para $k > \dim X$;
3. A inclusão $i : X^n \hookrightarrow X$ induz um isomorfismo $i_* : H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ para $k < n$.

Dado X um CW-complexo, o lema anterior garante uma construção natural a partir da sequência exata longa associada à homologia singular

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \longrightarrow \dots$$

onde as funções ∂_n serão definidas logo mais. Ou seja, tomando por j_n o número de n -células do CW-complexo X , temos a seguinte sequência exata longa

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z}^{j_{n+1}} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbb{Z}^{j_n} \xrightarrow{\partial_n} \mathbb{Z}^{j_{n-1}} \longrightarrow \dots$$

A homologia associada a esta sequência, que será chamada de homologia celular, será temporariamente denotada por

$$H_n^{CW}(X) = \frac{\text{Ker}(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$$

Teorema 3.1.2. $H_n^{CW}(X) = H_n(X)$ para todo n .

Com este teorema, podemos calcular a homologia de X conhecendo sua estrutura CW-complexo. Mas para isso, faz-se necessário conhecer os operadores fronteira ∂_n , a qual daremos uma descrição de como calculá-los. Primeiramente, o mapa ∂_n opera em $\mathbb{Z}^j \rightarrow \mathbb{Z}^{j-1}$, onde cada \mathbb{Z}^k , com $k \geq 0$, é o grupo abeliano gerado por todas as células de dimensão k . Logo, é necessário apenas definir o valor de ∂_n em cada célula B_w^n de dimensão n . Assim, em cada célula B_w^n de X , a função ∂_n será dada por

$$\partial_n(B_w^n) = \sum_{w'} c(w, w') B_{w'}^{n-1}$$

onde o número $c(w, w') \in \mathbb{R}$ é o grau da aplicação $\phi_{w, w'} : S_w^{n-1} \rightarrow S_{w'}^{n-1}$ dada pela composição das seguintes funções:

1. $\Phi_w^\circ = \Phi_w|_{\partial(B_w^n)} : S_w^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ é a função de colagem;
2. $q : X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2}$ é o mapa quociente;
3. $q_{w'} : X^{n-1}/X^{n-2} \rightarrow S_{w'}^{n-1}$ colapsa o complemento da célula $B_{w'}^{n-1}$ em um único ponto, a qual é identificado com o quociente $S_{w'}^{n-1} = B_{w'}^{n-1}/\partial(B_{w'}^{n-1})$ usando o mapa característico $\Phi_{w'}$.

$$\begin{array}{ccc} \partial(B_w^n) \cong & S_w^{n-1} & \xrightarrow{\phi_{w, w'}} & S_{w'}^{n-1} \\ & \Phi_w^\circ \downarrow & & \uparrow q_{w'} \\ & X^{n-1} & \xrightarrow{q} & X^{n-1}/X^{n-2} \end{array}$$

A fim de simplificar a notação, considere o grupo abeliano \mathcal{C} livremente gerado por todas as células de X . Denotaremos o operador fronteira $\partial : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ como a extensão de todos os operadores ∂_n .

3.2 Homologia celular de variedades flag maximais

Primeiramente, fixemos uma decomposição minimal $w = r_1 \cdots r_{l(w)}$ para todo $w \in \mathcal{W}$. A Proposição 2.1.8 nos diz que para cada $w \in \mathcal{W}$, as funções Φ_w são funções características que colam, pela fronteira, a célula de Schubert \mathcal{S}_w em células menores \mathcal{S}_v .

Em relação a notação adotada daqui em diante, a bola B_w^n (ou simplesmente B_w) poderá ser denotada diretamente como a célula de Schubert \mathcal{S}_w , a fim que de tornar evidente o fato do operador fronteira atuar sobre a célula \mathcal{S}_w .

Para o cálculo da homologia, é necessário definir o operador fronteira, que atua no grupo abeliano livremente gerado pelas células \mathcal{S}_w , $w \in \mathcal{W}$, ou seja, $\partial : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que

$$\partial \mathcal{S}_w = \sum_{w'} c(w, w') \mathcal{S}_{w'}$$

onde os coeficientes $c(w, w') \in \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes propriedades

1. Se $\dim \mathcal{S}_w - \dim \mathcal{S}_{w'} \neq 1$ então $c(w, w') = 0$;
2. Se $\dim \mathcal{S}_w - \dim \mathcal{S}_{w'} = 1$ então $c(w, w') = \deg(\phi_{w, w'} : S_w^{d-1} \rightarrow S_{w'}^{d-1})$, onde $\phi_{w, w'}$ segue o seguinte esquema de composição:

$$\partial(B_w) \cong \begin{array}{ccc} S_w^{d-1} & \xrightarrow{\phi_{w, w'}} & S_{w'}^{d-1} \\ \Phi_w^\circ \downarrow & & \uparrow \Phi_{w'}^{-1} \\ X^{d-1} & \xrightarrow{\tilde{q}} & \sigma_{w'} \end{array}$$

- (a) O mapa de colagem $\Phi_w^\circ = \Phi_w|_{\partial(B_w)} : S_w^{d-1} \rightarrow \mathcal{S}_w \setminus N \cdot w b_0 = \cup_{v < w} \mathcal{S}_v = X^{d-1}$;
- (b) Para formar $\tilde{q} : X^{d-1} \rightarrow \sigma_{w'}$ pegamos o mapa quociente que identifica o complementar da célula $\mathcal{S}_{w'}$ dentro de X^{d-1} à um ponto e compomos com a identificação $X^{d-1}/(X^{d-1} \setminus \mathcal{S}_{w'}) \cong \mathcal{S}_{w'}/(\mathcal{S}_{w'} \setminus N \cdot w' b_0) = \sigma_{w'}$;
- (c) $\Phi_{w'}^{-1} : \sigma_{w'} \rightarrow S_{w'}^{d-1}$ foi definido no capítulo anterior.

Primeiramente, para calcular o operador fronteira, precisamos analisar em qual situação tem-se que a diferença das dimensões de duas células é igual a 1.

Proposição 3.2.1. *Sejam $w, w' \in \mathcal{W}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\mathcal{S}_{w'} \subset \mathcal{S}_w$ e $\dim \mathcal{S}_w - \dim \mathcal{S}_{w'} = 1$;
2. Se $w = r_1 \cdots r_n \in \mathcal{W}$ é uma decomposição minimal, então uma decomposição minimal de w' é $w' = r_1 \cdots \hat{r}_i \cdots r_n$, onde $r_i = r_{\alpha_i}$ para $\alpha_i \in \Sigma$ e a fibra canônica de $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_{\{\alpha_i\}}$ tem dimensão 1, ou seja, esta fibra é $\mathfrak{g}(\alpha_i) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Além disso, este índice i é único, isto é, não existe outro $j \neq i$ tal que $w' = r_1 \cdots \hat{r}_j \cdots r_n$.

Demonstração. Veja que $\mathcal{S}_{w'} \subset \mathcal{S}_w$ se, e somente se, $w' < w$ na ordem de Bruhat-Chevalley. Assim, se $w = r_1 \cdots r_n$, então $w' = r_{i_1} \cdots r_{i_l}$, com $1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n$. Como $\dim \mathcal{S}_w - \dim \mathcal{S}_{w'} = 1$ e sabendo que a dimensão de cada célula de Schubert é dada pela soma (com multiplicidade) das raízes simples de w , segue que devemos remover apenas uma raiz, de multiplicidade 1, da célula w para obter w' .

Agora, suponha que existam $i < j$ tais que

$$w' = r_1 \cdots \hat{r}_i \cdots r_j \cdots r_n = r_1 \cdots r_i \cdots \hat{r}_j \cdots r_n.$$

Assim, temos que $r_i \cdots r_{j-1} = r_{i+1} \cdots r_j$. Substituindo em w obtemos

$$w = r_1 \cdots r_{i-1} (r_i \cdots r_{j-1}) r_j \cdots r_n = r_1 \cdots r_{i-1} (r_{i+1} \cdots r_j) r_j \cdots r_n = r_1 \cdots \hat{r}_i \cdots \hat{r}_j \cdots r_n$$

implicando que $w < w'$, o que contradiz o fato de $w' < w$. ■

Deste modo, para calcular o grau $c(w, w') = \deg(S_w^{d-1} \rightarrow S_{w'}^{d-1})$, onde $w = r_1 \cdots r_n$ e $w' = r_1 \cdots \hat{r}_i \cdots r_n$, devemos proceder com as seguintes etapas:

Cálculo do domínio e do contradomínio

Como r_i está associado a uma raiz de multiplicidade 1, então pelo Lema 2.1.6, B^{d_i} é uma bola fechada de dimensão 1, ou seja, é o intervalo $[0, \pi]$. A dimensão da bola $B_w = B^{d_1} \times \dots \times B^{d_n}$ é $d = d_1 + \dots + d_n$. O domínio da função $\phi_{w,w'}$ é o bordo desta bola, ou seja,

$$S_w^{d-1} = \partial(B_w) = \{(t_1, \dots, t_n) \mid \exists j, t_j \in \partial(B^{d_j})\}$$

é a união das faces de B_w .

Por outro lado, temos que $B_{w'} = B^{d_1} \times \dots \times \hat{B}^{d_i} \times \dots \times B^{d_n}$. Então o contradomínio $S_{w'}^{d-1}$ de $\phi_{w,w'}$ é obtido de colapsar a fronteira de $B_{w'}$ em um ponto.

Inclusão de $\sigma_{w'}$ na imagem $\Phi_w(S_w^{d-1})$

Agora, devemos ver como $\sigma_{w'}$ está dentro da imagem $\Phi_w(S_w^{d-1})$.

Lema 3.2.2. $\Phi_w(t_1, \dots, t_n) \in N \cdot w'b_0$ se, e somente se, temos os seguintes fatos abaixo

- $t_j \in (B^{d_j})^\circ$, se $j \neq i$;
- $t_i \in \partial(B^{d_i}) = \{0, \pi\}$.

Ou seja, a pré-imagem $\Phi_w^{-1}(N \cdot w'b_0)$ é a união disjunta das duas faces relacionadas à coordenada i .

Demonstração. Se $t_i \in \partial(B^{d_i})$ então $t_i \in M$ pelo Lema 2.1.6. Como $M \subset K_l$ para todo l , temos que

$$\Phi(t_1, \dots, t_n) = \psi_1(t_1) \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0 \in K_1 \cdots \hat{K}_i \cdots K_n \cdot b_0 = \mathcal{S}_{w'}.$$

Daí, pela Proposição 2.1.5, $\Phi(t_1, \dots, t_n) \in N \cdot w'b_0$ se, e somente se, $\psi_j(t_j) \notin M$, para todo $j \neq i$, isto é, t_j está no interior da bola B^{d_j} . ■

Uma consequência importante deste lema é que no quociente $\sigma_{w'} = \mathcal{S}_{w'}/(\mathcal{S}_{w'} \setminus N \cdot w'b_0)$, colapsamos em um ponto todas as faces que não correspondem à coordenada i . Logo, é suficiente definir a função $\phi_{w,w'}$ nestas duas faces relacionadas à i .

Cálculo dos graus

Consideres as seguintes faces da bola B_w :

$$\mathcal{F}_0^i = \{(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n)\} \text{ e } \mathcal{F}_\pi^i = \{(t_1, \dots, t_{i-1}, \pi, t_{i+1}, \dots, t_n)\}.$$

Elas são as faces de B_w que correspondem a coordenada i . É suficiente calcular o grau de $\phi_{w,w'}$ apenas restringindo à estas faces, uma vez que nas outras faces, a função $\phi_{w,w'}$ se trivializa. Os valores de $\phi_{w,w'}$ nestas faces são dadas por

$$\begin{aligned} f_i^0(t_1, \dots, 0, \dots, t_n) &= \Phi_{w'}^{-1}(\psi_1(t_1) \cdots \psi_i(0) \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0) \\ &= \Phi_{w'}^{-1}(\psi_1(t_1) \cdots 1 \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0) \\ f_i^\pi(t_1, \dots, \pi, \dots, t_n) &= \Phi_{w'}^{-1}(\psi_1(t_1) \cdots \psi_i(\pi) \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0) \\ &= \Phi_{w'}^{-1}(\psi_1(t_1) \cdots m_{\alpha_i} \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0) \end{aligned}$$

onde a função $\Phi_{w'}$ é dada pela escolha previamente fixada $w' = s_1 \cdots s_l$, que não necessariamente coincide com $w' = r_1 \cdots \hat{r}_i \cdots r_n$.

O grau de $\phi_{w,w'}$ é a soma dos graus de f_i^0 e f_i^π , que podem ser consideradas como funções de $S^{d-1} \rightarrow S^{d-1}$, pois basta colapsar as fronteiras das faces em pontos.

De fato, a Proposição 2.30 de [2] nos auxilia neste cálculo.

Proposição 3.2.3. *Suponha que $f : S^n \rightarrow S^n$ tenha a propriedade de que, para algum ponto $y \in S^n$, a pré-imagem $f^{-1}(y)$ consiste de uma quantidade finita de pontos x_1, \dots, x_m . Então o grau de f é a soma dos graus locais em cada x_i , $i = 1, \dots, m$, ou seja,*

$$\deg f = \sum_{i=1}^m \deg f|_{x_i}.$$

Observe que para qualquer ponto $y \in S^{d-1}$, temos que $\phi_{w,w'}^{-1}(y)$ são dois pontos, a qual um ponto x_1 pertence à face \mathcal{F}_0^i e o outro ponto x_2 está na face \mathcal{F}_π^i . Como f_i^0 é um homeomorfismo, segue que o grau local de x_1 é o grau da função f_i^0 , que por sua vez é $\deg(f_i^0) = \pm 1$. Do mesmo modo, o grau local de x_2 é $\deg(f_i^\pi) = \pm 1$. Logo, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.2.4. *O coeficiente $c(w, w')$ é 0 ou ± 2 , para todo $w, w' \in \mathcal{W}$.*

Este teorema permite dizer que os coeficientes da \mathbb{Z}_2 -homologia da variedade flag maximal são todos nulos.

3.2.1 Expressões algébricas para os graus

Seja $w = r_1 \cdots r_n$ e $w' = r_1 \cdots \hat{r}_i \cdots r_n$ duas decomposições minimais com $r_i = r_{\alpha_i}$, assumindo que a raiz simples α_i tem multiplicidade $d_i = 1$.

A decomposição minimal $w' = s_1 \cdots s_l$ previamente fixada (que pode ser diferente da decomposição $w' = r_1 \cdots \hat{r}_i \cdots r_n$) está associada a função característica $\Phi_{w'}$. A partir dela, pode-se calcular o grau de $\phi_{w,w'}$ utilizando as funções

$$\begin{aligned} f_i^0(t_1, \dots, 0, \dots, t_n) &= \Phi_{w'}^{-1}(\psi_1(t_1) \cdots 1 \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0); \\ f_i^\pi(t_1, \dots, \pi, \dots, t_n) &= \Phi_{w'}^{-1}(\psi_1(t_1) \cdots m_{\alpha_i} \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0). \end{aligned}$$

Da mesma forma, pode-se associar a decomposição $w' = r_1 \cdots \hat{r}_i \cdots r_n$ uma função característica $\Psi_{w'}$, dando origem as funções

$$\begin{aligned} h_i^0(t_1, \dots, 0, \dots, t_n) &= \Psi_{w'}^{-1}(\psi_1(t_1) \cdots 1 \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0); \\ h_i^\pi(t_1, \dots, \pi, \dots, t_n) &= \Psi_{w'}^{-1}(\psi_1(t_1) \cdots m_{\alpha_i} \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0). \end{aligned}$$

Veja que estas funções estão relacionadas por

$$\begin{aligned} f_i^0 &= (\Phi_{w'}^{-1} \circ \Psi_{w'}) \circ h_i^0; \\ f_i^\pi &= (\Phi_{w'}^{-1} \circ \Psi_{w'}) \circ h_i^\pi. \end{aligned}$$

Como a função $\Phi_{w'}^{-1} \circ \Psi_{w'}$ é um homeomorfismo entre esferas (quando colapsamos a fronteira em pontos), tem-se que

$$\deg f_i^0 = \deg(\Phi_{w'}^{-1} \circ \Psi_{w'}) \cdot \deg h_i^0 = \pm \deg h_i^0.$$

Analogamente, temos $\deg f_i^\pi = \pm \deg h_i^\pi$.

Para $w \in \mathcal{W}$, defina a função

$$\phi(w) = \sum_{\beta \in \Pi_w} \dim \mathfrak{g}_\beta \cdot \beta$$

como a soma das raízes em $\Pi_w = \Pi^+ \cap w\Pi^-$ contando-se suas multiplicidades.

A fórmula para o coeficiente $c(w, w')$ é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 3.2.5. *Considere k o inteiro dado por $\phi(w) - \phi(w') = k \cdot \beta$, onde β é a única raiz tal que $w = r_\beta w'$, e $I = \sum_{j \leq i} \dim \mathfrak{g}_j$ é a soma das multiplicidade das raízes α_j , para $j \leq i$. Então*

$$c(w, w') = \deg(\Phi_{w'}^{-1} \circ \Psi_{w'}) (-1)^I (1 + (-1)^k).$$

A demonstração deste teorema encontra-se em [8].

3.3 Continuação do exemplo $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$

Aplicaremos o cálculo da homologia para o exemplo iniciado no capítulo 1. Considere o grupo de Lie $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$. Fixemos a seguinte decomposição minimal para o seu grupo de Weyl $\mathcal{W} = S_3$:

$$1, (12), (23), (123) = (12)(23), (132) = (23)(12), (13) = (12)(23)(12).$$

A partir do Lema 2.1.6, podemos parametrizar os conjuntos $K_1 = K_{\{\alpha_{(12)}\}}$ e $K_2 = K_{\{\alpha_{(23)}\}}$ pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

através das funções

$$\psi_1 : \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \rightarrow & K_1 \\ t & \mapsto & e^{tA} \end{array} \quad \text{e} \quad \psi_2 : \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \rightarrow & K_2 \\ t & \mapsto & e^{tB} \end{array} .$$

Assim, pode-se escrever as células de Schubert de acordo com a decomposição pré-fixada de \mathcal{W} , em termo dos subgrupos K_i , como

Ordem 0: $\mathcal{S}_1 = b_0$;

Ordem 1: $\mathcal{S}_{(12)} = K_1 \cdot b_0$;

$$\mathcal{S}_{(23)} = K_2 \cdot b_0;$$

Ordem 2: $\mathcal{S}_{(123)} = K_1 K_2 \cdot b_0$;

$$\mathcal{S}_{(132)} = K_2 K_1 \cdot b_0;$$

Ordem 3: $\mathcal{S}_{(13)} = K_1 K_2 K_1 \cdot b_0$.

As respectivas funções características são dadas por

- Ordem 0:** $\Phi_1(t) = b_0$;
Ordem 1: $\Phi_{(12)}(t) = e^{tA} \cdot b_0, t \in [0, \pi]$;
 $\Phi_{(23)}(t) = e^{tB} \cdot b_0, t \in [0, \pi]$;
Ordem 2: $\Phi_{(123)}(t, s) = e^{tA}e^{sB} \cdot b_0, (t, s) \in [0, \pi]^2$;
 $\Phi_{(132)}(t, s) = e^{tB}e^{sA} \cdot b_0, (t, s) \in [0, \pi]^2$;
Ordem 3: $\Phi_{(13)}(t, s, r) = e^{tA}e^{sB}e^{rA} \cdot b_0, (t, s, r) \in [0, \pi]^3$.

Para determinar a homologia, precisamos calcular o operador fronteira ∂ , que é obtido a partir dos coeficientes $c(w, w')$, com $w, w' \in \mathcal{W}$. Para isto, precisamos verificar cada combinação cuja ordem dos elementos diferem em 1, pois em todos os outros casos, os coeficientes são nulos.

1. $c((12), 1) = 0$. A célula $\mathcal{S}_{(12)}$ tem como fronteira a única célula de dimensão 0, ou seja, o ponto b_0 . Assim, as funções $f_1^0, f_1^\pi : S^0 \rightarrow S^0$ são triviais, pois o domínio e contradomínio são iguais ao ponto b_0 . Para determinar o grau destas funções, basta observar que temos uma orientação no intervalo $[0, \pi]$, segundo a figura:

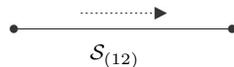


Figura 3.1: Célula $\mathcal{S}_{(12)}$.

Daí, se considerarmos a orientação padrão do ponto como aquela que aponta para “fora” do ponto, quando pegamos os pontos do extremo do intervalo, temos que a orientação herdada do intervalo $[0, \pi]$ aponta para “fora” do ponto $\{0\}$ e para “dentro” do ponto $\{\pi\}$, ou seja, $\deg(f_1^0) = 1$ e $\deg(f_1^\pi) = -1$. Logo, $c((12), 1) = 1 + (-1) = 0$.

2. $c((23), 1) = 0$. Análogo ao caso anterior.

3. $c((123), (12)) = 0$.

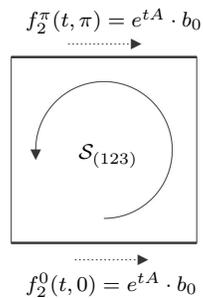
- Veja que $(12) = (12)\widehat{(23)}$, ou seja, é retirado o 2^o fator da decomposição minimal de (123) ;
- $f_2^0, f_2^\pi : S^1 \rightarrow S^1$ são dadas por

$$f_2^0(t, 0) = e^{tA}e^{0B} \cdot b_0 = e^{tA} \cdot b_0$$

$$f_2^\pi(t, \pi) = e^{tA}e^{\pi B} \cdot b_0 = e^{tA} \cdot b_0$$

pois sabemos que $e^{\pi B} \in M$. Observe que na definição acima, é necessário ter em mente que falta colapsar as fronteira em pontos para que tenhamos $S^1 \rightarrow S^1$.

- O grau de cada função f_2^0 e f_2^π pode ser obtido comparando-se a orientação da face correspondente na fronteira do cubo $[0, \pi]^2$, que é orientada no sentido anti-horário, com a orientação dada, respectivamente, pelas funções f_2^0 e f_2^π , de acordo com a figura 3.2.


 Figura 3.2: Célula $\mathcal{S}_{(123)}$ em $\mathcal{S}_{(12)}$.

Assim, observamos que a curva $f_2^0(t, 0)$ segue na mesma direção da orientação da fronteira no sentido anti-horário, implicando que $\deg(f_2^0) = 1$. Por sua vez, a curva $f_2^\pi(t, \pi)$ segue na direção contrária da orientação anti-horária, ou seja, $\deg(f_2^\pi) = -1$. Logo, $c((123), (12)) = 1 + (-1) = 0$.

4. $c((123), (23)) = -2$.

- Veja que $(23) = \widehat{(12)}(23)$, ou seja, é retirado o primeiro fator da decomposição minimal de (123) ;
- $f_1^0, f_1^\pi : S^1 \rightarrow S^1$ são dadas por

$$f_1^0(0, s) = e^{0A} e^{sB} \cdot b_0 = e^{sB} \cdot b_0$$

$$\begin{aligned} f_1^\pi(t, \pi) &= e^{\pi A} e^{sB} \cdot b_0 = e^{\pi A} e^{sB} e^{-\pi A} \cdot b_0 \\ &= e^{\text{Ad}(e^{\pi A})sB} \cdot b_0 = e^{s(e^{\pi A} B e^{-\pi A})} \cdot b_0. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} e^{\pi A} B e^{-\pi A} &= \exp \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \pi & 0 \\ -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \exp \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\pi & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -B. \end{aligned}$$

Logo,

$$f_1^\pi(\pi, s) = e^{-sB} \cdot b_0 = e^{-sB} e^{\pi B} \cdot b_0 = e^{(\pi-s)B} \cdot b_0.$$

- O grau de cada função f_1^0 e f_1^π pode ser obtido de modo análogo ao feito anteriormente, comparando-se a orientação das faces correspondente na fronteira do cubo $[0, \pi]^2$.

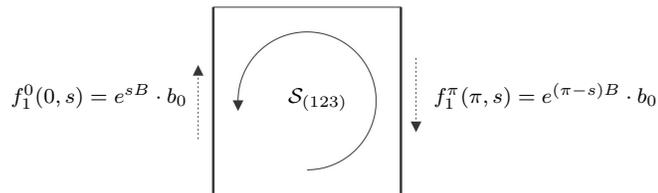


Figura 3.3: Célula $\mathcal{S}_{(123)}$ em $\mathcal{S}_{(23)}$.

Logo, observamos que a curva $f_1^0(0, s)$ segue na direção oposta da orientação da fronteira no sentido anti-horário, implicando que $\deg(f_1^0) = -1$. A curva $f_1^\pi(\pi, s)$ também segue na direção contrária da orientação anti-horária, ou seja, $\deg(f_1^\pi) = -1$. Logo, $c((123), (12)) = (-1) + (-1) = -2$.

5. $c((132), (12)) = -2$ e $c((132), (23)) = 0$ são obtidos de modo semelhante ao dois últimos caso, a qual pode ser observado na figura a seguir:

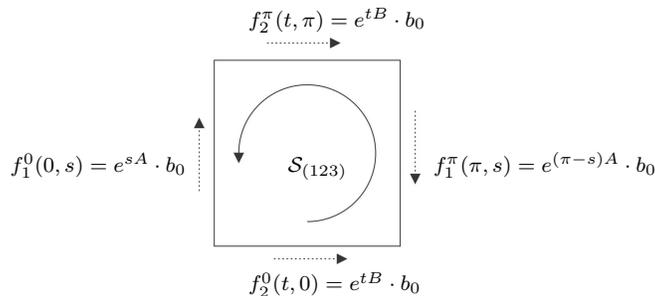


Figura 3.4: Célula $\mathcal{S}_{(132)}$.

6. $c((13), (123)) = 0$.

- Veja que $(123) = (12)(23) = (12)(23)\widehat{(12)}$, ou seja, é retirado o terceiro fator da decomposição minimal de (13) ;
- $f_3^0, f_3^\pi : S^2 \rightarrow S^2$ são dadas por

$$f_3^0(t, s, 0) = e^{tA} e^{sB} e^{0A} \cdot b_0 = e^{tA} e^{sB} \cdot b_0$$

$$f_3^\pi(t, s, \pi) = e^{tA} e^{sB} e^{\pi A} \cdot b_0 = e^{tA} e^{sB} \cdot b_0.$$

- O grau de cada função f_3^0 e f_3^π pode ser obtido comparando-se a orientação da face correspondente na fronteira do cubo $[0, \pi]^3$, que é orientada de forma que o vetor normal aponte para fora do cubo, com a orientação dada, respectivamente, pelas funções f_3^0 e f_3^π . Isto pode ser visto na figura a seguir:

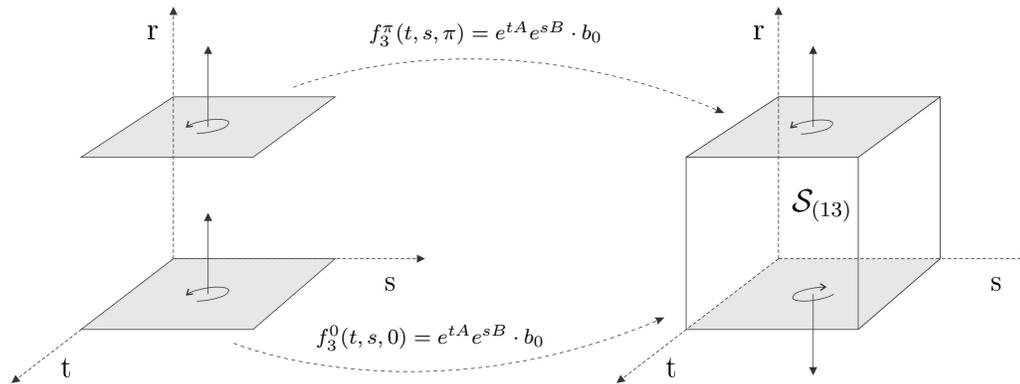


Figura 3.5: Célula $\mathcal{S}_{(13)}$ em $\mathcal{S}_{(123)}$.

Observe que fixando a orientação da face $(t, s, 0)$ como o vetor normal que aponta para cima (queremos respeitar aqui a “regra da mão direita”), a função $f_3(0)$ deve inverter a orientação pois deve levar uma orientação cujo vetor normal aponta para dentro do cubo para uma orientação que aponta para fora, implicando que $\deg(f_3^0) = -1$.

Do mesmo modo, tomando a orientação da face (t, s, π) cujo vetor normal que aponta para cima (a mesma orientação da face $(t, s, 0)$), a função f_3^π preserva a orientação pois tanto o domínio quanto o contradomínio têm orientações cujos vetores normais apontam para fora do cubo. Logo, $c((13), (123)) = 1 + (-1) = 0$.

7. $c((13), (132)) = 0$.

- Veja que $(132) = (23)(12) = \widehat{(12)}(23)(12)$, ou seja, é retirado o primeiro fator da decomposição minimal de (13) ;
- $f_1^0, f_1^\pi : S^2 \rightarrow S^2$ são dadas por

$$f_1^0(0, s, r) = e^{0A} e^{sB} e^{rA} \cdot b_0 = e^{sB} e^{rA} \cdot b_0$$

$$\begin{aligned} f_1^\pi(\pi, s, r) &= e^{\pi A} e^{sB} e^{rA} \cdot b_0 = e^{\pi A} e^{sB} e^{rA} e^{-\pi A} \cdot b_0 \\ &= e^{\pi A} e^{sB} e^{-\pi A} e^{rA} \cdot b_0 = e^{\text{Ad}(e^{\pi A})sB} e^{rA} \cdot b_0 \\ &= e^{-sB} e^{rA} \cdot b_0 \end{aligned}$$

pois e^{rA} e $e^{-\pi A}$ comutam e $\text{Ad}(e^{\pi A})B = -B$. Para descrever esta função com o domínio $[0, \pi]^2$, considere a equação $\text{Ad}(e^{-\pi B})A = -A$ (que pode ser calculado de modo análogo

à equação $\text{Ad}(e^{\pi A})B = -B$). Daí,

$$\begin{aligned} f_1^\pi(\pi, s, r) &= e^{-sB} e^{rA} \cdot b_0 = (e^{-sB} e^{\pi B}) (e^{-\pi B} e^{rA} e^{\pi B}) \cdot b_0 \\ &= e^{(\pi-s)B} e^{r \text{Ad}(e^{-\pi B})A} \cdot b_0 = e^{(\pi-s)B} e^{-rA} \cdot b_0 \\ &= e^{(\pi-s)B} e^{-rA} e^{\pi A} \cdot b_0 = e^{(\pi-s)B} e^{(\pi-r)A} \cdot b_0. \end{aligned}$$

- O grau das funções f_3^0 e f_3^π podem ser obtidos de acordo com a figura:

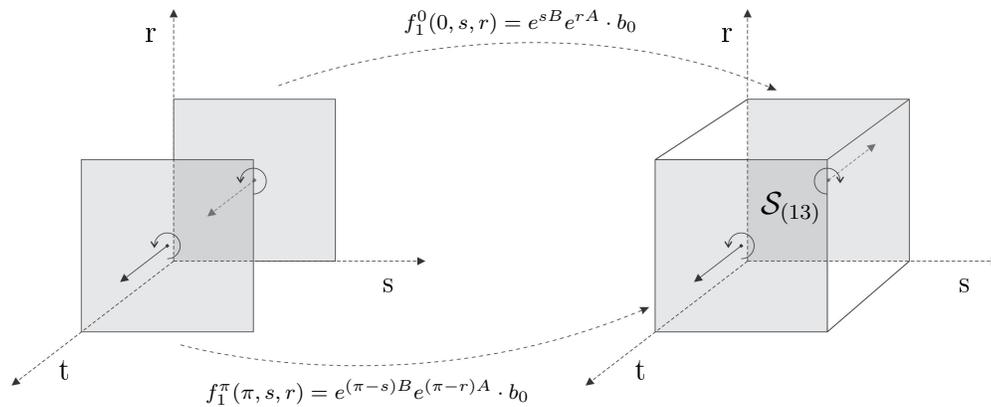


Figura 3.6: Célula $\mathcal{S}_{(13)}$ em $\mathcal{S}_{(132)}$.

Fixando a orientação da face $(0, s, r)$ como o vetor normal que aponta na direção do vetor canônico $(1, 0, 0)$, a função $f_1(0)$ deve inverter a orientação pois deve levar uma orientação cujo vetor normal aponta para dentro do cubo para uma orientação que aponta para fora, implicando que $\deg(f_1^0) = -1$.

Analogamente, considerando a orientação da face (π, s, r) cujo vetor normal também aponta na direção do vetor $(1, 0, 0)$, observe que a aplicação $(s, r) \mapsto (\pi - s, \pi - r)$ preserva a orientação e, portanto, a função f_1^π preserva a orientação pois tanto o domínio quanto o contradomínio têm orientações cujos vetores normais apontam para fora do cubo. Logo, $c((13), (132)) = 1 + (-1) = 0$.

Assim, o operador fronteira é dado por:

Ordem 1: $\partial \mathcal{S}_{(12)} = 0;$

$\partial \mathcal{S}_{(23)} = 0;$

Ordem 2: $\partial \mathcal{S}_{(123)} = -2\mathcal{S}_{(23)};$

$\partial \mathcal{S}_{(132)} = -2\mathcal{S}_{(12)};$

Ordem 3: $\partial \mathcal{S}_{(13)} = 0.$

Portanto, a sequência exata da homologia celular é

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_3 \equiv 0} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1 \equiv 0} \mathbb{Z}.$$

$(a, b) \mapsto (-2b, -2a)$

Logo, temos os seguintes grupos de homologia:

- $H_k(\mathbb{F}_{1,2}^3) \cong 0$, para todo $k > \dim(\mathbb{F}_{1,2}^3) = 3$;
- $H_3(\mathbb{F}_{1,2}^3) \cong \text{Ker}(\partial_3) = \mathbb{Z}$;
- $H_2(\mathbb{F}_{1,2}^3) \cong \frac{\text{Ker}(\partial_2)}{\text{Im}(\partial_3)} = 0$;
- $H_1(\mathbb{F}_{1,2}^3) \cong \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$;
- $H_0(\mathbb{F}_{1,2}^3) \cong \mathbb{Z}$, pois $\mathbb{F}_{1,2}^3$ é conexo.

Capítulo 4

Característica de Euler das variedades flag

Este capítulo apresenta os principais resultados obtidos nesta dissertação. Em termos de definição, a característica de Euler é um dos mais simples invariantes topológicos presentes na topologia algébrica. Em um primeiro momento, obtemos a característica de Euler para variedades flag máximas em termo da multiplicidade das raízes simples da álgebra de Lie associada. Depois, partiremos para um caso particular onde atribuiremos o valor da característica de Euler das grassmanianas simpléticas.

Definição 4.0.1. *A característica de Euler $\chi(X)$ de um espaço X com uma estrutura CW-complexo finita é dada por*

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n c_n$$

onde c_n é a quantidade de células de dimensão n . Observe que uma definição análoga para a característica de Euler é tomá-la como a diferença entre o total de células de dimensão par e o total de células de dimensão ímpar. Este operador é um invariante topológico.

4.1 Fibrações de variedades flag

Considere a variedade flag parcial \mathbb{F}_Θ com a decomposição celular dada pelas células de Schubert \mathcal{S}_w^Θ . Temos uma associação biunívoca entre os elementos minimais \mathcal{W}^Θ das classes laterais $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$ e o conjunto das células de Schubert. Assim,

$$\chi(\mathbb{F}_\Theta) = \sum_{w \in \mathcal{W}^\Theta} (-1)^{\dim \mathcal{S}_w}$$

pois como foi visto na seção 1.2.4, se $w \in \mathcal{W}^\Theta$ então $\dim \mathcal{S}_w^\Theta = \dim \mathcal{S}_w$.

Se $w = r_1 \cdots r_k$ é uma decomposição minimal deste elemento do grupo de Weyl, com r_i uma reflexão em torno da raiz α_i , então

$$\dim \mathcal{S}_w = \sum_{i=1}^k \dim(\mathfrak{g}_{\alpha_i} + \mathfrak{g}_{2\alpha_i}).$$

Temos como objetivo uma fórmula que relacione a característica de Euler para diferentes variedades flag parciais. Seja $\Theta_1 \subset \Theta_2 \subset \Sigma$ e tome a fibração canônica $\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1} : \mathbb{F}_{\Theta_1} \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta_2}$. Denote sua fibra por f_{Θ_1, Θ_2} . Para duas células de Schubert $\mathcal{S}_w^{\Theta_1}$ e $\mathcal{S}_u^{\Theta_1}$ de \mathbb{F}_{Θ_1} , com $w, u \in \mathcal{W}^{\Theta_1}$, então $\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}(\mathcal{S}_w^{\Theta_1}) = \pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}(\mathcal{S}_u^{\Theta_1})$ se, e somente se, $w\mathcal{W}^{\Theta_2} = u\mathcal{W}^{\Theta_2}$. Daí, se w também pertence a \mathcal{W}^{Θ_2} então as células de Schubert em \mathbb{F}_{Θ_1} que são projetadas em $\mathcal{S}_w^{\Theta_2}$ são células $\mathcal{S}_u^{\Theta_1}$ tais que $u \in \mathcal{W}^{\Theta_1} \cup w\mathcal{W}^{\Theta_2}$.

Lema 4.1.1. *Se $w \in \mathcal{W}^{\Theta}$ e $u \in \mathcal{W}_{\Theta}$ então $l(wu) = l(w) + l(u)$. Além disso, se escrevermos $w = r_1 \cdots r_{l(w)}$ e $u = s_1 \cdots s_{l(u)}$ em termo de reflexões simples, tem-se que*

$$wu = r_1 \cdots r_{l(w)} s_1 \cdots s_{l(u)}.$$

é uma decomposição simples.

Demonstração. Indução sobre $l(u)$.

Se $l(u) = 1$ então $u = s_{\alpha}$ com $\alpha \in \Theta$. Assim, $l(wu) = l(w) \pm 1$. Pela definição de \mathcal{W}^{Θ} da equação (1.1.8), como $\alpha \in \Theta$ e $w \in \mathcal{W}^{\Theta}$ então $l(wu) = l(w) + 1$.

Suponha que vale para $l(v) < l(u)$, com $v \in \mathcal{W}_{\Theta}$. Considere $v = us_{l(u)}$, ou seja, $v = s_1 \cdots s_{l(u)-1}$. Pela hipótese de indução, $l(wv) = l(w) + l(v) = l(w) + l(u) - 1$. Veja que $v\alpha_{l(u)}$ é um raiz positiva em $\langle \Theta \rangle$ pois pertence à Π_w e, portanto, $wv(\alpha_{l(u)}) = w(v\alpha_{l(u)}) > 0$. Logo, $l(wu) = l(wvs_{l(u)}) = l(w) + l(u)$. ■

Corolário 4.1.2. *Seja $w \in \mathcal{W}^{\Theta_2}$ e $u = wv \in \mathcal{W}^{\Theta_1} \cap w\mathcal{W}_{\Theta_2}$, com $v \in \mathcal{W}_{\Theta_2}$. Então*

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{S}_u^{\Theta_1} &= \dim \mathcal{S}_w^{\Theta_2} + \dim \mathcal{S}_v \\ &= \dim \mathcal{S}_w^{\Theta_1} + \dim \mathcal{S}_v. \end{aligned}$$

Demonstração. Pelo lema anterior, se $w = r_1 \cdots r_{l(w)}$ e $v = s_1 \cdots s_{l(v)}$ são decomposições simples, então

$$u = r_1 \cdots r_{l(w)} s_1 \cdots s_{l(v)}$$

é uma decomposição simples, ou seja, $\dim \mathcal{S}_u = \dim \mathcal{S}_w + \dim \mathcal{S}_v$. Como $u \in \mathcal{W}^{\Theta_1}$ e $w \in \mathcal{W}^{\Theta_2}$, então $\dim \mathcal{S}_u^{\Theta_1} = \dim \mathcal{S}_w^{\Theta_2} + \dim \mathcal{S}_v$.

Para a segunda equação, temos que $\dim \mathcal{S}_w \geq \dim \mathcal{S}_w^{\Theta_1} \geq \dim \mathcal{S}_w^{\Theta_2} = \dim \mathcal{S}_w$, ou seja, $\dim \mathcal{S}_w^{\Theta_1} = \dim \mathcal{S}_w$. ■

Lema 4.1.3. *Seja $w \in \mathcal{W}^{\Theta_2}$ e $u = wv \in \mathcal{W}^{\Theta_1} \cap w\mathcal{W}_{\Theta_2}$, com $v \in \mathcal{W}_{\Theta_2}$. Então $v \in \mathcal{W}^{\Theta_1}$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos provar que v é minimal na classe lateral $v\mathcal{W}_{\Theta_1}$ quando restrito ao conjunto $\mathcal{W}_{\Theta_2}/\mathcal{W}_{\Theta_1}$. Seja $v_{min} \in \mathcal{W}_{\Theta_2}$ o elemento minimal da classe lateral $v\mathcal{W}_{\Theta_1}$. Pelo Lema 4.1.1

$$l(wv_{min}) = l(w) + l(v_{min}) \leq l(w) + l(v) = l(wv).$$

Como $u = wv \in \mathcal{W}^{\Theta_1}$ é o único elemento minimal em $w\mathcal{W}_{\Theta_2}$ e que $wv_{min} \in w\mathcal{W}_{\Theta_2}$ então $wv_{min} = wv$, isto é, $v_{min} = v$.

Agora, vejamos que v é minimal na classe lateral $v\mathcal{W}_{\Theta_1}$ de $\mathcal{W}/\mathcal{W}_{\Theta_1}$. Como $v \in \mathcal{W}_{\Theta_2}$, então $\mathcal{S}_v^{\Theta_2} = b_{\Theta_2}$ é trivial. Daí, tomando a fibração $\pi_{\Theta_2} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta_2}$, temos que a célula \mathcal{S}_v está contida na fibra f_{Θ_2} , pois $\pi_{\Theta_2}(\mathcal{S}_v) = \mathcal{S}_v^{\Theta_2} = b_{\Theta_2}$. Do mesmo modo, $\mathcal{S}_v^{\Theta_1} \subset f_{\Theta_1, \Theta_2}$ relacionada a fibração

$\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1} : \mathbb{F}_{\Theta_1} \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta_2}$. Como a fibra f_{Θ_2} é a variedade flag maximal do grupo $G(\Theta_2)$ gerado por \mathfrak{g}_α , com $\alpha \in \langle \Theta_2 \rangle$, e f_{Θ_1, Θ_2} é a variedade flag parcial de $G(\Theta_2)$ para $\Theta_1 \subset \Theta_2$, então \mathcal{S}_v e $\mathcal{S}_v^{\Theta_1}$, onde $v \in \mathcal{W}_{\Theta_2}$, são células de Schubert para f_{Θ_2} e f_{Θ_1, Θ_2} , respectivamente.

Pela primeira parte da demonstração, v é o elemento minimal da classe lateral $v\mathcal{W}_{\Theta_1}$, quando o grupo de Weyl é \mathcal{W}_{Θ_2} . Logo, $\dim \mathcal{S}_v = \dim \mathcal{S}_v^{\Theta_1}$ e, portanto, $v \in \mathcal{W}^{\Theta_1}$. ■

Deste modo, tem-se que

$$\dim \mathcal{S}_u^{\Theta_1} = \dim \mathcal{S}_w^{\Theta_2} + \dim \mathcal{S}_v^{\Theta_1} \quad (4.1.1)$$

quando $u = wv \in \mathcal{W}^{\Theta_1}$ e $w \in \mathcal{W}^{\Theta_2}$, no caso que $v \in \mathcal{W}_{\Theta_2} \cap \mathcal{W}^{\Theta_1}$.

Proposição 4.1.4. *Sejam $\Theta_1 \subset \Theta_2 \subset \Sigma$ e a fibração canônica $\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1} : \mathbb{F}_{\Theta_1} \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta_2}$ com fibra f_{Θ_1, Θ_2} . Então*

$$\chi(\mathbb{F}_{\Theta_1}) = \chi(\mathbb{F}_{\Theta_2})\chi(f_{\Theta_1, \Theta_2}).$$

Demonstração. Pela equação (4.1.1), temos

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{F}_{\Theta_1}) &= \sum_{u \in \mathcal{W}^{\Theta_1}} (-1)^{\dim \mathcal{S}_u^{\Theta_1}} = \sum_{w \in \mathcal{W}^{\Theta_2}} \sum_{v \in \mathcal{W}^{\Theta_1} \cap \mathcal{W}_{\Theta_2}} \{(-1)^{\dim \mathcal{S}_w^{\Theta_2}} | wv \in \mathcal{W}^{\Theta_1}\} \\ &= \sum_{w \in \mathcal{W}^{\Theta_2}} (-1)^{\dim \mathcal{S}_w^{\Theta_2}} \sum_{v \in \mathcal{W}^{\Theta_1} \cap \mathcal{W}_{\Theta_2}} (-1)^{\dim \mathcal{S}_v^{\Theta_1}} = \chi(\mathbb{F}_{\Theta_2})\chi(f_{\Theta_1, \Theta_2}). \end{aligned}$$

■

4.2 Característica de Euler de variedades flag maximais

Para descrevermos como é a característica de Euler de variedades flag maximais precisamos conhecer a multiplicidade das raízes restritas. Para tal, primeiramente realizaremos um breve estudo sobre a complexificação da álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Seja \mathfrak{g} um álgebra de Lie semissimples real. A complexificação $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de \mathfrak{g} pode ser descrita como

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \{X + iY \mid X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

cujos colchete de Lie é definido por

$$[X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] = [X_1, X_2] - [Y_1, Y_2] + i([X_1, Y_2] + [Y_1, X_2]).$$

Proposição 4.2.1. *A álgebra de Lie \mathfrak{g} é semissimples se, e somente se, sua complexificação $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ também é semissimples.*

Esta proposição dá pelo fato da forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} ser a restrição da forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, e assim, uma delas é não-degenerada se, e somente se, a outra também é não-degenerada.

Uma subálgebra \mathfrak{h} de \mathfrak{g} (assumindo que a álgebra de Lie atua em um corpo \mathbb{K} qualquer) é dita uma subálgebra de Cartan se satisfaz:

1. \mathfrak{h} é nilpotente;
2. O normalizador de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} coincide com \mathfrak{h} . Esta condição é equivalente a: se $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ então $X \in \mathfrak{h}$.

Dada um subálgebra de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , quando complexificamos \mathfrak{h} obtemos que $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ é uma subálgebra de Cartan do complexificado $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, uma vez que a extensão de uma álgebra nilpotente é nilpotente e também porque a propriedade do normalizador não depende de quais escalares que se tome.

Proposição 4.2.2. *Seja \mathfrak{a} uma subálgebra abeliana maximal em \mathfrak{s} . Então, existe uma subálgebra abeliana maximal \mathfrak{h} de \mathfrak{g} que contém \mathfrak{a} . A subálgebra \mathfrak{h} é de Cartan e se decompõe em soma direta como*

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}.$$

Demonstração. Esta demonstração pode ser encontrada em [12]. ■

Definição 4.2.3. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita uma forma real normal de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ se a subálgebra abeliana $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ também é subálgebra de Cartan, ou seja, $\mathfrak{t} = 0$, implicando que $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$.*

Se $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}$ é uma subálgebra de Cartan, é útil definir o conjunto $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ das raízes de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ com respeito a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Podemos decompor o espaço $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ em relação as raízes de Δ , isto é,

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\gamma \in \Delta} (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\gamma}.$$

Temos que o espaço associado à uma raiz restrita $\alpha \in \Pi$ de \mathfrak{g} é dado por

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \mathfrak{g} \cap \sum_{\substack{\gamma \in \Delta \\ \gamma|_{\mathfrak{a}} = \alpha}} (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\gamma} \quad (4.2.1)$$

ou seja, as raízes restritas são restrições por \mathfrak{a} das raízes de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Lembremos que na construção do sistema simples de raízes (com respeito a subálgebra de Cartan), queremos que as raízes de uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ sejam escritas com coordenadas inteiras. Neste caso, onde atuamos no corpo dos complexos, podemos relacionar a subálgebra $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ com o seu realificado $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$. Denotaremos $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$ por $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Deste modo, é conveniente trabalhar com as raízes em $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ ao invés $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, ou seja, pode-se escrever uma raiz $\alpha \in \Delta$ como $\alpha : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$.

A decomposição da subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}$ permite escrever o complexificado $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ de \mathfrak{h} como

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}.$$

Assim, os dois primeiros termos da decomposição de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ formam o subespaço real na qual as raízes de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ são reais. De fato, tem-se a seguinte proposição:

Proposição 4.2.4. *Dada a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}$, o subespaço real $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ é dado por $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{t}$. Deste modo, as raízes $\alpha \in \Delta$ aplicadas em $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ resultam em valores reais, isto é, pode-se tomar $\alpha : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Demonstração. O subconjunto de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ em que as raízes de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ assumem valores reais é exatamente $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. De fato, as raízes de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ assumem valores reais em $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Além disso, $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ e para $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ existe uma raiz α tal que $\alpha(H) \neq 0$. Desta forma, se $H' = H_1 + iH_2 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ não pertence a $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, então $\alpha(H')$ não é real para alguma raiz α .

Uma raiz de Δ aplicada em elemento $H \in \mathfrak{h}$ será sempre autovalor de $\text{ad}(H)$, uma vez que \mathfrak{h} pode ser visto como subconjunto de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Pela Proposição 1.1.2, se $H \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, então $\text{ad}(H)$ é uma matriz simétrica e assim todos seus autovalores são reais, implicando que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Caso contrário, se $H \in \mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$, então matriz $\text{ad}(H)$ é antissimétrica, implicando que seus autovalores são todos puramente imaginários, logo $i\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Assim, $\mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Pelo fato da dimensão real de $\mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{t}$ coincidir com a dimensão de $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}$, que por sua vez coincide com a dimensão de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, ou seja,

$$\dim(\mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{t}) = \dim(\mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})$$

segue que $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{t}$. ■

As raízes restritas são restrições a \mathfrak{a} das raízes de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Para ver tais restrições, consideraremos a inclusão do dual de \mathfrak{a} no dual \mathfrak{h} tomando a extensão de \mathfrak{a}^* tal que restrita a \mathfrak{t} vale 0.

Um funcional linear γ de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ se associa ao funcional linear de conjugação $\bar{\gamma}$ definido por

$$\bar{\gamma}(H) = \overline{\gamma(\bar{H})}$$

onde \bar{H} é a conjugação em $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (isto é, se $H = H_1 + iH_2$, então $\bar{H} = H_1 - iH_2$) e a outra é a conjugação usual dos complexos.

Dada uma raiz $\gamma \in \Delta$, pela proposição anterior, podemos escrever γ como a soma de funcionais $\gamma = \gamma_R + \gamma_I$, onde γ_R é o funcional que se anula em $i\mathfrak{t}$ e γ_I o funcional que se anula em \mathfrak{a} (sempre lembrando que podemos escrever $\gamma : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$).

Dizemos que γ é real quando $\gamma_I = 0$, imaginário quando $\gamma_R = 0$, e complexo quando não é nenhum dos anteriores. Deste modo, a raiz conjugada $\bar{\gamma}$ pode ser denotada por $\bar{\gamma} = \gamma_R - \gamma_I$. Observe que o funcional linear

$$\frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma}) = \gamma_R \tag{4.2.2}$$

é a restrição de γ em \mathfrak{a} .

Uma maneira alternativa de se descrever as restrições das raízes a \mathfrak{a} é através da involução de Cartan θ associada à decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$. Esta involução é um automorfismo de \mathfrak{g} e se estende a um automorfismo de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, que também será denotado por θ . Como $\theta|_{\mathfrak{k}} = 1$ e $\theta|_{\mathfrak{s}} = -1$ temos que sua restrição a $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ é dada por

$$\theta(H) = -\bar{H}.$$

Considerando o fato da raiz γ ser real em $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, tem-se que nesse espaço,

$$\bar{\gamma}(H) = \gamma(\bar{H}) = -\gamma(\theta(H)) = -\gamma(\theta^{-1}(H)) = (-\theta^*\gamma)(H) \tag{4.2.3}$$

onde θ^* é o dual da involução θ , isto é, $\theta^*\gamma = \gamma \circ \theta^{-1}$.

Como θ é automorfismo, isso mostra que $\bar{\gamma}$ é uma raiz. Utilizando a equação (4.2.2), temos que a restrição de γ a \mathfrak{a} também pode ser descrita como

$$\gamma_R = \frac{1}{2}(1 - \theta^*)\gamma.$$

Lema 4.2.5. *Seja θ a involução de Cartan de uma forma real não-compacta que deixa invariante a subálgebra de Cartan. Se γ é uma raiz tal que $\theta^*\gamma = \gamma$, então o espaço de raízes \mathfrak{g}_γ está contido em $\mathfrak{k} + i\mathfrak{k}$. Mais ainda, se β é uma raiz arbitrária, então $\beta + \theta^*\beta$ não é raiz. Portanto, $\beta - \bar{\beta}$ não é raiz.*

Demonstração. Para automorfismos em geral, $\theta\mathfrak{g}_\gamma = \mathfrak{g}_{\theta^*\gamma}$. Pela hipótese $\theta^*\gamma = \gamma$, temos que tal relação se reduz à $\theta\mathfrak{g}_\gamma = \mathfrak{g}_\gamma$. Daí, se $X \in \mathfrak{g}_\gamma$ então $\theta(X) = cX$ e como θ é involução, $c^2 = 1$, ou seja, $c = \pm 1$. Veja que podemos descrever $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ como

$$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s} \oplus i\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{s}.$$

Se $c = 1$, então devemos ter que $X \in \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$. Agora, supondo que $c = -1$ então $X \in \mathfrak{s} \oplus i\mathfrak{s}$. Porém, a condição de que $\theta^*\gamma = \gamma$ e a equação (4.2.3) implicam que $\gamma + \bar{\gamma} = 0$. Logo, para $H \in \mathfrak{a}$, $\gamma(H) = 0$ e assim, $[H, X] = 0$, o que viola a maximalidade de \mathfrak{a} . Portanto $c = 1$ e $X \in \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$.

Para a segunda afirmação, seja $\gamma = \beta + \theta^*\beta$. Então $\theta^*\gamma = \gamma$ e assim, \mathfrak{g}_γ está contido em $\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$. Por outro lado,

$$\mathfrak{g}_\gamma = [\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{\theta^*\beta}]$$

e como $\mathfrak{g}_{\theta^*\beta} = \theta\mathfrak{g}_\beta$, se $Y \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0\}$, então

$$X = [Y, \theta Y]$$

gera \mathfrak{g}_γ (pois \mathfrak{g}_γ tem dimensão 1). Mas

$$\theta X = \theta[Y, \theta Y] = -X$$

implicando que $X \in \mathfrak{s} \oplus i\mathfrak{s}$. Portanto, $\mathfrak{g}_\gamma = \{0\}$ e γ não é raiz. ■

Observemos que se γ é uma raiz em Δ então $\langle \gamma_R, \gamma_I \rangle = 0$. De fato, podemos escrever $\gamma_R = \langle H_R, \cdot \rangle$ com $H_R \in \mathfrak{a}$. Assim,

$$\langle \gamma_R, \gamma_I \rangle = \gamma_I(H_R) = 0$$

pois $\gamma_I|_{\mathfrak{a}} \equiv 0$. Logo, $|\gamma| = |\bar{\gamma}|$, onde denotamos $|\gamma|^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle$.

Lema 4.2.6. *Suponha que γ seja uma raiz complexa. Então o seguinte número de Killing $\frac{2\langle \gamma, \bar{\gamma} \rangle}{|\gamma|^2}$ admite apenas os valores 0 e -1 . Além disso,*

- Se $\frac{2\langle \gamma, \bar{\gamma} \rangle}{|\gamma|^2} = 0$ então $|\gamma|^2 = \frac{1}{2}|2\gamma_R|^2$;
- Se $\frac{2\langle \gamma, \bar{\gamma} \rangle}{|\gamma|^2} = -1$ então $|\gamma|^2 = |2\gamma_R|^2$.

Demonstração. Sendo γ complexo, então $\gamma_I \neq 0$. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no número de Killing

$$\left| \frac{2\langle \gamma, \bar{\gamma} \rangle}{|\gamma|^2} \right| < \left| \frac{2|\gamma||\bar{\gamma}|}{|\gamma|^2} \right| = 2$$

uma vez que a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz ocorreria apenas se $\gamma = \bar{\gamma}$. Como todo número de Killing admite apenas números inteiros, segue que as únicas possibilidades nesse caso serão 0, -1 e 1 .

Suponha que $\frac{2\langle \gamma, \bar{\gamma} \rangle}{|\gamma|^2} = 1$. Então teríamos que $\gamma - \bar{\gamma}$ é raiz, pois faz parte da $\bar{\gamma}$ -sequência iniciada em γ (este fato corresponde ao Teorema 6.10 de [12]). Por outro lado, \mathfrak{h} é invariante pela involução de Cartan θ pois se $X \in \mathfrak{a}$ então $\theta(X) = -X \in \mathfrak{a}$ e, analogamente, $\theta(\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{t}$. Daí, utilizando o Lema 4.2.5, $\gamma - \bar{\gamma}$ não pode ser raiz, o que é um absurdo.

Agora, sabendo que $\gamma + \bar{\gamma} = 2\gamma_R$ e que $|\gamma|^2 = |\bar{\gamma}|^2$, se $\frac{2\langle \gamma, \bar{\gamma} \rangle}{|\gamma|^2} = 0$ então $\langle \gamma, \bar{\gamma} \rangle = 0$. Daí,

$$|2\gamma_R|^2 = \langle \gamma + \bar{\gamma}, \gamma + \bar{\gamma} \rangle = |\gamma|^2 + 2\langle \gamma, \bar{\gamma} \rangle + |\bar{\gamma}|^2 = 2|\gamma|^2.$$

Se $\frac{2\langle \gamma, \bar{\gamma} \rangle}{|\gamma|^2} = -1$ então $\langle \gamma, \bar{\gamma} \rangle = -\frac{1}{2}|\gamma|^2$. Assim,

$$|2\gamma_R|^2 = |\gamma|^2 + 2\langle \gamma, \bar{\gamma} \rangle + |\bar{\gamma}|^2 = |\gamma|^2 - |\gamma|^2 + |\bar{\gamma}|^2 = |\gamma|^2.$$

■

Lema 4.2.7. *Se $m_\alpha = \dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ e $m_{2\alpha} = \dim(\mathfrak{g}_{2\alpha})$ são ambos não nulos, então a raiz restrita 2α pode ser estendida à uma única raiz de Δ tal que assume valor 0 quando restrita a \mathfrak{t} . Além disso, m_α é par e $m_{2\alpha}$ é ímpar.*

Demonstração. Sejam $\gamma, \delta \in \Delta$ raízes tais que $\gamma_R = \alpha$ e $\delta_R = 2\alpha$.

Primeiramente, suponha que γ é real, ou seja, $\gamma_I = 0$. Então,

$$4|\gamma|^2 = \langle 2\gamma, 2\gamma \rangle = \langle 2\alpha, 2\alpha \rangle \leq \langle \delta, \delta \rangle = |\delta|^2.$$

Ou seja, o comprimento relativo $\frac{|\delta|^2}{|\gamma|^2}$ das duas raízes é maior ou igual à 4. Além disso,

$$\langle \gamma, \delta \rangle = 2|\alpha|^2 + \langle \alpha, \delta_I \rangle = 2|\alpha|^2 > 0.$$

Como γ e δ são raízes de um sistema irredutível de raízes que não são perpendiculares, então o comprimento relativo entre esta duas raízes deve ser no máximo 3, resultando em uma contradição. Portanto, γ é complexo.

Se $\frac{2\langle \gamma, \bar{\gamma} \rangle}{|\gamma|^2} = -1$, então $\gamma + \bar{\gamma} = 2\alpha$ é raiz de Δ pois é uma $\bar{\gamma}$ -sequência iniciada em γ . Assim, $\gamma + \bar{\gamma}$ é a única extensão de 2α tal que restrita a \mathfrak{t} é 0 (observe que nesse caso 2α também pode possuir extensões complexas). Esta unicidade se deve ao fato de que toda raiz de Δ pode ser visto como um funcional de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Agora, pelo lema anterior, a única outra possibilidade é que $\frac{2\langle\gamma, \bar{\gamma}\rangle}{|\gamma|^2} = 0$, implicando em $|\gamma|^2 = \frac{1}{2}|2\alpha|^2$. Nesse caso, suponha que δ não é real.

Veja que se $\frac{2\langle\delta, \bar{\delta}\rangle}{|\delta|^2} = -1$ então $\delta + \bar{\delta} = 4\alpha$ seria uma raiz real, o que é um absurdo pois 4α não é raiz restrita. Logo, devemos ter $\frac{2\langle\delta, \bar{\delta}\rangle}{|\delta|^2} = 0$, que pelo lema anterior, implica em

$$|\delta|^2 = \frac{1}{2}|2\delta_R|^2 = \frac{1}{2}|4\alpha|^2 = 2|2\alpha|^2 = 4|\gamma|^2. \quad (4.2.4)$$

Se $\langle\gamma, \delta\rangle \neq 0$ então o tamanho relativo entre duas raízes não perpendiculares deve ser menor que 3, o que contradiz a equação (4.2.4).

Por outro lado, se $\langle\gamma, \delta\rangle = 0$ então $\langle\gamma_I, \delta_I\rangle = -2|\alpha|^2$. Assim, sabendo que $\bar{\gamma}$ também é raiz, tem-se que

$$\langle\bar{\gamma}, \delta\rangle = 2|\alpha|^2 - \langle\gamma_I, \delta_I\rangle = 4|\alpha|^2 > 0.$$

A equação (4.2.4) implica que $|\delta|^2 = 4|\bar{\gamma}|^2$, que também resulta numa contradição. Logo, temos que δ é real, isto é, 2α pode ser estendido de modo que vale 0 na restrição em \mathfrak{t} .

Dada uma raiz complexa em Δ , sua multiplicidade real é 2. Como toda extensão γ da raiz restrita α sempre é complexo, então m_α é par pois é a soma das dimensões dos espaço da equação (4.2.1).

Sabendo que existe apenas uma extensão real da raiz 2α , então $m_{2\alpha}$ é ímpar pois qualquer outra extensão de 2α é complexa (como dito anteriormente, só poderá existir extensões complexas quando $\frac{2\langle\gamma, \bar{\gamma}\rangle}{|\gamma|^2} = -1$). ■

Este lema diz que, para uma raiz $\alpha \in \Sigma$, admite-se apenas as seguintes possibilidades para a dimensão dos subespaços de raízes \mathfrak{g}_α e $\mathfrak{g}_{2\alpha}$:

- $\dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ é ímpar e $\dim(\mathfrak{g}_{2\alpha}) = 0$;
- $\dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ é par e $\dim(\mathfrak{g}_{2\alpha}) = 0$;
- $\dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ é par e $\dim(\mathfrak{g}_{2\alpha})$ é ímpar.

Logo, a seguinte proposição determina como deve ser a característica de Euler para variedades flag maximais:

Proposição 4.2.8. *A característica de Euler de todas as variedades flag maximais são dadas da seguinte maneira:*

1. $\chi(\mathbb{F}) = 0$ quando existe uma raiz simples $\alpha \in \Sigma$ tal que
 - ou $\dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ é ímpar;
 - ou $\dim(\mathfrak{g}_{2\alpha}) \neq 0$.
2. $\chi(\mathbb{F}) = |\mathcal{W}|$ quando para toda raiz simples $\alpha \in \Sigma$, tem-se que $\dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ é par e $\dim(\mathfrak{g}_{2\alpha}) = 0$.

Demonstração. Dado $\alpha \in \Sigma$, considere a fibra $f_{\{\alpha\}}$ da projeção canônica $\pi_{\{\alpha\}} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_{\{\alpha\}}$, isto é, a variedade flag de $G(\alpha)$ de posto 1. Então essa fibra é uma esfera de dimensão $m = \dim(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha})$.

Suponha primeiro que $\dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ é ímpar e $\dim(\mathfrak{g}_{2\alpha}) = 0$, para algum $\alpha \in \Sigma$. Temos que a fibra $f_{\{\alpha\}}$ é uma esfera de dimensão $m = \dim \mathfrak{g}_\alpha$ ímpar. Logo, a característica de Euler desta fibra é 0 pois esferas de dimensão ímpar têm característica de Euler nulo. Assim, pela Proposição 4.1.4, $\chi(\mathbb{F}) = \chi(\mathbb{F}_{\{\alpha\}})\chi(f_{\{\alpha\}}) = 0$.

Se $\dim(\mathfrak{g}_{2\alpha}) \neq 0$ para alguma $\alpha \in \Sigma$, utilizando o lema anterior, temos que $\dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ é par e $\dim(\mathfrak{g}_{2\alpha})$ é ímpar, implicando que m é ímpar. Pelo mesmo argumento que o anterior, $\chi(\mathbb{F}) = 0$.

Agora, nos resta o caso onde $\dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ é par e $\dim(\mathfrak{g}_{2\alpha}) = 0$, para toda raiz $\alpha \in \Sigma$. Seja $w \in \mathcal{W}$ e $w = r_1 \cdots r_l$ uma decomposição simples. A célula de Bruhat associada a w tem dimensão $\dim(N \cdot w b_0) = \sum_{n=1}^l \dim(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha})$ que é par, pois todas as raízes são pares. Logo, todas as células da variedade flag maximal são pares. Como o conjunto das células de Bruhat estão em bijeção com o grupo de Weyl, segue que $\chi(\mathbb{F}) = |\mathcal{W}|$. ■

Note que quando \mathfrak{g}_α tem dimensão par e $\dim(\mathfrak{g}_{2\alpha}) = 0$ para toda raiz simples $\alpha \in \Sigma$, também temos que todas as células de uma variedade flag parcial \mathbb{F}_Θ são pares, com $\Theta \subset \Sigma$. Nesse caso, a flag parcial deve ter característica de Euler $\chi(\mathbb{F}_\Theta) = |\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta|$.

Corolário 4.2.9. *Se o grupo de Lie é normal, ou seja, sua álgebra de Lie é uma forma real normal, tem-se que $\chi(\mathbb{F}) = 0$.*

Demonstração. Basta observar que todas as raízes têm multiplicidade 1. ■

4.3 Característica de Euler das grassmanianas simpléticas

$L_p(\mathbb{R}^{2l})$

No Capítulo 2, realizamos a decomposição celular das grassmanianas simpléticas $L_p(\mathbb{R}^{2l})$, que são variedades flag minimais com $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_p\}$ do grupo simplético $\mathrm{Sp}(l, \mathbb{R})$. O Teorema 2.2.3 relaciona cada célula de Schubert \mathcal{S}_w^Θ com uma l -upla da forma $(\underline{i}, m, \underline{a})$ e a Proposição 2.2.4 diz que a dimensão desta célula é a soma elementos desta mesma l -upla.

Um resultado conhecido de [2] é que para variedades quaisquer fechadas de dimensão ímpar, o valor de sua característica de Euler é zero. Porém, não podemos aplicar este fato para qualquer grassmanianas simpléticas $L_p(\mathbb{R}^{2l})$ pois sua dimensão, pelo Corolário 2.2.5, pode ser par. Assim, procederemos com um cálculo combinatório para obtê-lo.

Uma n -upla $I = (i_1, \dots, i_n)$ cujos coeficientes são naturais $i_k \in \mathbb{N}$, para $k = 1, \dots, n$, será chamada de um n -multi-índice. Em particular, se $i_k = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, dizemos que este é o n -multi-índice nulo e é denotado por $O(n)$.

Dados $I = (i_1, \dots, i_n)$ um n -multi-índice e $J = (j_1, \dots, j_l)$ um l -multi-índice, definiremos a *concatenação* deles como o $(n+l)$ -multi-índice definido por

$$I * J = (i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_l).$$

Agora, considere os conjuntos de multi-índices

$$\begin{aligned} A_n &\subset \{I \mid I \text{ é um } n\text{-multi-índice}\} \\ B_l &\subset \{J \mid J \text{ é um } l\text{-multi-índice}\} \end{aligned}$$

e defina a concatenação deste dois conjuntos como

$$A_n * B_l = \{I * J \mid I \in A_n \text{ e } J \in B_l\}.$$

Nosso objetivo é descrever o conjunto \mathcal{A}_p^l , que está em bijeção com o conjunto das células da grassmaniana simplética $L_p(\mathbb{R}^{2l})$, como união e concatenação de conjuntos de multi-índices. Vamos definir tais conjuntos.

Definição 4.3.1. *Sejam k, l números naturais não-negativos tais que $k \leq l$. Tome o seguinte conjunto de k -multi-índices $C_e^*(k, l)$, definido indutivamente para k como:*

$$C_e^*(0, l) = \emptyset;$$

$$C_e^*(k, l) = \bigcup_{t=k}^l C_e^*(k-1, t-1) * (t) \quad (4.3.1)$$

onde (t) é simplesmente um 1-multi-índice. Este será o conjunto estritamente crescente **sem** zeros.

Veja, por exemplo, que o conjunto $C_e^*(3, 5)$ pode ser descrito como:

$$\underbrace{\{(1, 2, 3)\}}_{C_e^*(2,2)*(3)} \cup \underbrace{\{(1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)\}}_{C_e^*(2,3)*(4)} \cup \underbrace{\{(1, 2, 5), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5)\}}_{C_e^*(2,4)*(5)}.$$

A fim de esclarecer sua nomenclatura, $C_e^*(k, l)$ é justamente o conjunto formado por todos k -multi-índices I tais que $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq l$, ou seja, são estritamente crescentes sem nenhum zero.

Definição 4.3.2. *Sejam k, l números inteiros não-negativos tais que $k \leq l$. Então, o conjunto de k -multi-índices*

$$C_e(k, l) = \bigcup_{m=0}^k O(k-m) * C_e^*(m, l) \quad (4.3.2)$$

será o conjunto estritamente crescente **com** zeros. É possível observar que esta união é disjunta e que $C_e(0, l) = \emptyset$.

O seguinte lema justifica o nome dado ao conjunto $C_e(k, l)$:

Lema 4.3.3. *Um elemento $I = (i_1, \dots, i_k)$ pertence ao conjunto $C_e(k, l)$ se, e somente se, satisfaz:*

1. $i_t \in 0, \dots, l$, para todo $t = 1, \dots, k$;

2. Admite uma sequência de repetição de zeros até o primeiro elemento não nulo;
3. A partir do primeiro elemento não nulo, passa a ser uma sequência estritamente crescente.

Demonstração. Segue diretamente da definição ■

A construção do conjunto $C_e(k, l)$ nos permitirá identificá-lo com a parcela \underline{i} das células de uma grassmaniana simplética. Construiremos outro conjunto que possa ser identificado ao \underline{a} .

Definição 4.3.4. *Sejam k, p, l números inteiros não-negativos tais que $p \leq l$. Então, define-se $C(k, p, l)$ como o seguinte conjunto de k -multi-índices definido indutivamente para k :*

$$C(0, p, l) = \emptyset;$$

$$C(k, p, l) = \bigcup_{t=p}^l C(k-1, p, t) * (t). \quad (4.3.3)$$

Este será o conjunto crescente de p até l , onde admite repetição de números na sequência.

Lema 4.3.5. *Um elemento qualquer $A = (a_1, \dots, a_k)$ do conjunto $C(k, p, l)$ satisfaz*

$$0 \leq p \leq a_1 \leq \dots \leq a_k \leq l.$$

Demonstração. Segue por indução sobre k . ■

Tendo em mãos estes conjuntos, então pode-se concluir que em uma variedade grassmaniana simplética $L_p(\mathbb{R}^{2l})$, o conjunto de todas as células de tipo m coincide com seguinte conjunto:

$$V_l(m) = \underbrace{O(p-m) * C_e(m, l) * (m)}_{\underline{i}} * \underbrace{C(l-p-1, m, p)}_{\underline{a}} \quad (4.3.4)$$

onde, concatenamos uma sequência de $p-m$ zeros na frente do conjunto para que todos os multi-índices de $V_l(m)$ tenham tamanho l .

Corolário 4.3.6. *A união disjunta $\bigcup_{m=0}^p V_l(m)$ é igual ao conjunto de multi-índices \mathcal{A}_p^l , que está em bijeção com o conjunto de todas as células da variedade grassmaniana simplética $L_p(\mathbb{R}^{2l})$.*

4.3.1 Paridade

Agora, vamos introduzir o conceito de paridade. Dado um n -multi-índice $I = (i_1, \dots, i_n)$, definiremos o operador *paridade* χ de I como sendo

$$\chi(I) = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n}$$

ou seja, é 1 se a soma das coordenadas de I são pares e -1 caso contrário. Assim, diremos que I é par se $\chi(I) = 1$ e ímpar se $\chi(I) = -1$. Observe que se I, J são dois multi-índices quaisquer, então $\chi(I * J) = \chi(I)\chi(J)$.

Definição 4.3.7. Dado um conjunto de n -multi-índices A_n , definiremos o operador paridade em A_n como sendo:

$$\chi(A_n) = \sum_{I \in A_n} \chi(I).$$

Veja que este operador realiza a diferença do total de elementos pares pelo total de elementos ímpares. Em particular, define-se também que $\chi(\emptyset) = 1$.

A proposição seguinte mostra algumas propriedades deste operador.

Proposição 4.3.8. Sejam A_n e B_n conjuntos de n -multi-índices disjuntos e C_l um conjunto de l -multi-índices. Então tem-se que:

1. $\chi(A_n \cup B_n) = \chi(A_n) + \chi(B_n)$;
2. $\chi(A_n * C_l) = \chi(A_n)\chi(C_l)$.

Demonstração. Para o primeiro item, basta ver que quando os conjuntos são disjuntos, o total de multi-índices pares da união é a soma do número de elementos pares em A_n com o número de elementos pares de B_n . O mesmo ocorre para os multi-índices ímpares, demonstrando o resultado.

No segundo caso temos que:

$$\chi(A_n * C_l) = \sum_{I \in A_n} \sum_{J \in C_l} \chi(I)\chi(J) = \left(\sum_{I \in A_n} \chi(I) \right) \left(\sum_{J \in C_l} \chi(J) \right) = \chi(A_n)\chi(C_l).$$

■

Observe que quando definimos $\chi(\emptyset) = 1$, ela respeita a paridade da concatenação, isto é,

$$\chi(\emptyset * A_n) = \chi(\emptyset)\chi(A_n) = \chi(A_n).$$

A partir destas propriedades, queremos então calcular a paridade do conjunto \mathcal{A}_p^l que descreve as células das grassmanianas simpléticas. Os seguintes lemas apresentam tal cálculo.

Abaixo apresentamos algumas fórmulas básicas de combinatória que serão úteis para o desenvolvimento dos cálculos:

Lema 4.3.9.

1. $\binom{j}{i} = 0$, para $j < 0$, $i < 0$ ou $j < i$;
2. $\sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{j}{k} = (-1)^i \binom{j-1}{i}$, para $i \leq j$. Nesse caso, se $i = j$ então $\sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} = 0$;
3. $\sum_{k=i}^j \binom{k}{i} = \binom{j+1}{i+1}$, para $i \leq j$;

$$4. \binom{j}{m} \cdot \binom{j-m}{j-q} = \binom{j}{q} \cdot \binom{q}{m}, \text{ para } m \leq q \leq j.$$

Lema 4.3.10. *Sejam k, l inteiros não negativos com $k \leq l$. Escreva $k = 2i$ se k é par ou $k = 2i + 1$ se k é ímpar e, analogamente para l , $l = 2j$ ou $l = 2j + 1$. Então temos a seguinte fórmula para a paridade do conjunto estritamente crescente **sem** zeros $C_e^*(k, l)$:*

$$\chi(C_e^*(k, l)) = \sigma(k, l) \cdot (-1)^i \binom{j}{i}$$

onde

$$\sigma(k, l) = \begin{cases} 1 & , k \text{ par e } l \text{ par} \\ 1 & , k \text{ par e } l \text{ ímpar} \\ 0 & , k \text{ ímpar e } l \text{ par} \\ -1 & , k \text{ ímpar e } l \text{ ímpar} \end{cases}$$

Em particular, σ pode ser descrita pela função $\sigma(k, l) = \frac{(-1)^k - (-1)^{kl+1}}{2}$.

Demonstração. Como o conjunto $C_e^*(k, l)$ é definido indutivamente sobre k , realizaremos a demonstração também por indução sobre k .

Para $k = 0$ (ou seja, $i = 0$) temos que $C_e^*(0, l) = \emptyset$ e assim $\chi(C_e^*(0, l)) = 1 = 1 \cdot (-1)^0 \binom{j}{0}$, uma vez que $j \geq 0$.

Agora, suponha que $k \geq 1$ e que a fórmula vale para $k-1$. Pela definição de $C_e^*(k, l)$ e utilizando o segundo item da Proposição 4.3.8, tem-se que

$$\chi(C_e^*(k, l)) = \sum_{t=k}^l \chi(C_e^*(k-1, t-1)) \chi(t).$$

Pela hipótese de indução, a fórmula vale para $k-1$. Porém, para executar o cálculo, precisamos separar os casos onde k é par ou ímpar e l é par ou ímpar, pois σ varia em cada caso.

- Para $k = 2i$ e $l = 2j$:

Neste caso, a paridade se escreve como a soma

$$\chi(C_e^*(k, l)) = \sum_{t=2i}^{2j} \chi(C_e^*(2i-1, t-1)) \chi(t).$$

Ainda não é conveniente aplicar a hipótese de indução para $\chi(C_e^*(2i-1, t-1))$ pois não sabemos se $t-1$ é par ou ímpar. Porém, basta observar que $t-1$ percorre o intervalo

$$2i-1 \leq t-1 \leq 2j-1.$$

Ou seja, podemos reorganizar a soma de modo a separar as parcelas onde $t-1$ é par ou ímpar:

$$\chi(C_e^*(k, l)) = \underbrace{\sum_{t=i}^{j-1} \chi(C_e^*(2i-1, 2t)) \chi(2t+1)}_{\text{parcelas pares de } t-1} + \underbrace{\sum_{t=i}^j \chi(C_e^*(2i-1, 2t-1)) \chi(2t)}_{\text{parcelas ímpares de } t-1}.$$

Como $2i - 1$ é ímpar e $2t$ é par, pela hipótese de indução, $\chi(C_e^*(2i - 1, 2t)) = 0$, implicando que as primeiras parcelas são todas nulas. Além disso, $\chi(2t) = (-1)^{2t} = 1$. Em contrapartida, para utilizar a hipótese de indução em $\chi(C_e^*(2i - 1, 2t - 1))$, é necessário reescrever $2i - 1 = 2(i - 1) + 1$ e $2t - 1 = 2(t - 1) + 1$, logo

$$\begin{aligned} \chi(C_e^*(k, l)) &= \sum_{t=i}^j \chi(C_e^*(2(i - 1) + 1, 2(t - 1) + 1)) = \sum_{t=i}^j (-1)(-1)^{i-1} \binom{t-1}{i-1} \\ &= (-1)^i \sum_{t=i}^j \binom{t-1}{i-1} = (-1)^i \binom{j}{i} \end{aligned}$$

cujo $\sigma(k, l) = 1$.

Pelo fato desta conta será realizada de modo repetitivo, não apenas na demonstração dos outros casos deste lema, como também nos lemas seguintes, daqui em diante iremos suprimir alguns detalhes deste processo.

- Para $k = 2i$ e $l = 2j + 1$:

$$\begin{aligned} \chi(C_e^*(k, l)) &= \sum_{t=2i}^{2j+1} \chi(C_e^*(2i - 1, t - 1))\chi(t) = \\ &= \sum_{t=i}^j \overbrace{\chi(C_e^*(2i - 1, 2t))}^{=0} \chi(2t + 1) + \sum_{t=i}^j \chi(C_e^*(2i - 1, 2t - 1)) \overbrace{\chi(2t)}^{=1} \\ &= (-1)^i \binom{j}{i} \end{aligned}$$

onde $\sigma(k, l) = 1$.

- Para $k = 2i + 1$ e $l = 2j$:

$$\begin{aligned} \chi(C_e^*(k, l)) &= \sum_{t=2i+1}^{2j} \chi(C_e^*(2i, t - 1))\chi(t) = \\ &= \sum_{t=i}^{j-1} \chi(C_e^*(2i, 2t)) \overbrace{\chi(2t + 1)}^{=-1} + \sum_{t=i}^{j-1} \chi(C_e^*(2i, 2t + 1)) \overbrace{\chi(2t + 2)}^{=1} \\ &= - \sum_{t=i}^j (-1)^i \binom{j}{i} + \sum_{t=i}^j (-1)^i \binom{j}{i} = 0 \end{aligned}$$

onde $\sigma(k, l) = 0$.

- Para $k = 2i + 1$ e $l = 2j + 1$:

$$\begin{aligned}
 \chi(C_e^*(k, l)) &= \sum_{t=2i+1}^{2j+1} \chi(C_e^*(2i, t-1))\chi(t) = \\
 &= \sum_{t=i}^j \chi(C_e^*(2i, 2t)) \overbrace{\chi(2t+1)}{=-1} + \sum_{t=i}^{j-1} \chi(C_e^*(2i, 2t+1)) \overbrace{\chi(2t+2)}{=1} \\
 &= - \sum_{t=i}^j (-1)^i \binom{j}{i} + \sum_{t=i}^{j-1} (-1)^i \binom{j}{i} = (-1)(-1)^i \binom{j}{i}
 \end{aligned}$$

onde $\sigma(k, l) = -1$. ■

Lema 4.3.11. *Sejam k, l inteiros não-negativos tais que $l \geq 1$ e $k \leq l$. Escreva $k = 2i$ se k é par ou $k = 2i + 1$ se k é ímpar e, analogamente para l , $l = 2j$ ou $l = 2j + 1$. Então temos a seguinte fórmula para a paridade do conjunto estritamente crescente **com** zeros $C_e(k, l)$:*

$$\chi(C_e(k, l)) = \begin{cases} (-1)^i \binom{j-1}{i} & , \text{ se } l \text{ par} \\ (-1)^i \binom{j}{i} & , \text{ se } l \text{ ímpar e } k \text{ par} \\ 0 & , \text{ se } l \text{ ímpar e } k \text{ ímpar} \end{cases}$$

Demonstração. Pela definição do conjunto $C_e(k, l)$,

$$\chi(C_e(k, l)) = \sum_{m=0}^k \chi(C_e^*(m, l))$$

pois $\chi(O(k-m)) = 1$. Então, o problema se divide nos seguintes casos:

- Para $k = 2i$ e $l = 2j$:

$$\begin{aligned}
 \chi(C_e(k, l)) &= \sum_{m=0}^{2i} \chi(C_e^*(m, l)) = \sum_{m=0}^i \chi(C_e^*(2m, 2j)) + \sum_{m=1}^i \overbrace{\chi(C_e^*(2m-1, 2j))}^{=0} \\
 &= \sum_{m=0}^i (-1)^m \binom{j}{m} = (-1)^i \binom{j-1}{i}.
 \end{aligned}$$

- Para $k = 2i + 1$ e $l = 2j$:

$$\begin{aligned}
 \chi(C_e(k, l)) &= \sum_{m=0}^{2i+1} \chi(C_e^*(m, l)) = \sum_{m=0}^i \chi(C_e^*(2m, 2j)) + \sum_{m=1}^{i+1} \overbrace{\chi(C_e^*(2m-1, 2j))}^{=0} \\
 &= (-1)^i \binom{j-1}{i}.
 \end{aligned}$$

- Para $k = 2i$ e $l = 2j + 1$:

$$\begin{aligned}
 \chi(C_e(k, l)) &= \sum_{m=0}^{2i} \chi(C_e^*(m, l)) = \sum_{m=0}^i \chi(C_e^*(2m, 2j + 1)) + \sum_{m=1}^i \chi(C_e^*(2m - 1, 2j + 1)) \\
 &= \sum_{m=0}^i (-1)^m \binom{j}{m} + \sum_{m=1}^i (-1)(-1)^{m-1} \binom{j}{m-1} = \sum_{m=0}^i (-1)^m \left(\binom{j}{m} + \binom{j}{m-1} \right) \\
 &= \sum_{m=0}^i (-1)^m \binom{j+1}{m} = (-1)^i \binom{j}{i}.
 \end{aligned}$$

- Para $k = 2i + 1$ e $l = 2j + 1$:

$$\begin{aligned}
 \chi(C_e(k, l)) &= \sum_{m=0}^{2i+1} \chi(C_e^*(m, l)) = \sum_{m=0}^i \chi(C_e^*(2m, 2j + 1)) + \sum_{m=0}^i \chi(C_e^*(2m + 1, 2j + 1)) \\
 &= \sum_{m=0}^i (-1)^m \binom{j}{m} + \sum_{m=0}^i (-1)(-1)^m \binom{j}{m} = 0.
 \end{aligned}$$

■

Lema 4.3.12. *Sejam k, p, l inteiros não-negativos com $p \leq l$, e escreva $k = 2i$ ou $k = 2i + 1$, $p = 2q$ ou $p = 2q + 1$ e $l = 2j$ ou $l = 2j + 1$. Então, a paridade do conjunto crescente $C(k, p, l)$ é*

$$\chi(C(k, p, l)) = \tilde{\sigma}(k, p, l) \cdot \binom{j - q + i + \varepsilon(k, p, l)}{i}$$

onde ε e $\tilde{\sigma}$ são dados por

$$\varepsilon(k, p, l) = \begin{cases} -1 & , \text{ se } k \text{ é par, } p \text{ é ímpar e } l \text{ é par} \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\tilde{\sigma}(k, p, l) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } k \text{ é ímpar, } p \text{ é par e } l \text{ é ímpar} \\ 0 & , \text{ se } k \text{ é ímpar, } p \text{ é ímpar e } l \text{ é par} \\ -1 & , \text{ se } k \text{ é ímpar, } p \text{ é ímpar e } l \text{ é ímpar} \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Demonstração. Indução sobre k .

Para $k = 0$ (ou seja, $i = 0$) temos que $C(0, p, l) = \emptyset$ e assim $\chi(C(0, p, l)) = 1$. Daí, lembrando que $p \leq l$,

- Se p é par e l é par então $\chi(C(0, p, l)) = 1 \cdot \binom{j-q}{0} = 1$;
- Se p é par e l é ímpar então $\chi(C(0, p, l)) = 1 \cdot \binom{j-q}{0} = 1$;
- Se p é ímpar e l é par então $\chi(C(0, p, l)) = 1 \cdot \binom{j-q-1}{0} = 1$;

- Se p é ímpar e l é ímpar então $\chi(C(0, p, l)) = 1 \cdot \binom{j-q}{0} = 1$;

Agora, suponhamos que $k \geq 1$ e vale para $k - 1$. Pela definição do conjunto $C(k, p, l)$, a paridade $\chi(C(k, p, l))$ é

$$\chi(C(k, p, l)) = \sum_{t=p}^l \chi(C(k-1, p, t))\chi(t).$$

Portanto, o problema se divide nos seguintes casos:

- Se k é par, p é par e l é par:

$$\begin{aligned} \chi(C(k, p, l)) &= \sum_{t=2q}^{2j} \chi(C(2i-1, 2q, t))\chi(t) = \sum_{t=q}^j \chi(C(2i-1, 2q, 2t))\chi(2t) \\ &+ \sum_{t=q}^{j-1} \overbrace{\chi(C(2i-1, 2q, 2t+1))}^{=0} \chi(2t+1) = \sum_{t=q}^j \binom{t-q+i-1}{i-1} = \binom{j-q+i}{i}. \end{aligned}$$

- Se k é par, p é par e l é ímpar:

$$\begin{aligned} \chi(C(k, p, l)) &= \sum_{t=2q}^{2j+1} \chi(C(2i-1, 2q, t))\chi(t) = \sum_{t=q}^j \chi(C(2i-1, 2q, 2t))\chi(2t) \\ &+ \sum_{t=q}^j \overbrace{\chi(C(2i-1, 2q, 2t+1))}^{=0} \chi(2t+1) = \binom{j-q+i}{i}. \end{aligned}$$

- Se k é par, p é ímpar e l é par:

$$\begin{aligned} \chi(C(k, p, l)) &= \sum_{t=2q+1}^{2j} \chi(C(2i-1, 2q+1, t))\chi(t) = \sum_{t=q+1}^j \overbrace{\chi(C(2i-1, 2q+1, 2t))}^{=0} \chi(2t) \\ &+ \sum_{t=q}^{j-1} \chi(C(2i-1, 2q+1, 2t+1))\chi(2t+1) = \sum_{t=q}^{j-1} (-1) \cdot \binom{t-q+i-1}{i-1} \cdot (-1) \\ &= \binom{j-q+i-1}{i}. \end{aligned}$$

- Se k é par, p é ímpar e l é ímpar:

$$\begin{aligned} \chi(C(k, p, l)) &= \sum_{t=2q+1}^{2j+1} \chi(C(2i-1, 2q+1, t))\chi(t) = \sum_{t=q+1}^j \overbrace{\chi(C(2i-1, 2q+1, 2t))}^{=0} \chi(2t) \\ &+ \sum_{t=q}^j \chi(C(2i-1, 2q+1, 2t+1))\chi(2t+1) \\ &= \sum_{t=q}^j \binom{t-q+i-1}{i-1} = \binom{j-q+i}{i}. \end{aligned}$$

- Se k é ímpar, p é par e l é par:

$$\begin{aligned}
 \chi(C(k, p, l)) &= \sum_{t=2q}^{2j} \chi(C(2i, 2q, t))\chi(t) \\
 &= \sum_{t=q}^j \chi(C(2i, 2q, 2t))\chi(2t) + \sum_{t=q}^{j-1} \chi(C(2i, 2q, 2t+1))\chi(2t+1) \\
 &= \sum_{t=q}^j \binom{t-q+i}{i} + \sum_{t=q}^{j-1} \binom{t-q+i}{i} \cdot (-1) \\
 &= \binom{j-q+i}{i}.
 \end{aligned}$$

- Se k é ímpar, p é par e l é ímpar:

$$\begin{aligned}
 \chi(C(k, p, l)) &= \sum_{t=2q}^{2j+1} \chi(C(2i, 2q, t))\chi(t) \\
 &= \sum_{t=q}^j \chi(C(2i, 2q, 2t))\chi(2t) + \sum_{t=q}^j \chi(C(2i, 2q, 2t+1))\chi(2t+1) \\
 &= \sum_{t=q}^j \binom{t-q+i}{i} + \sum_{t=q}^j \binom{t-q+i}{i} \cdot (-1) = 0.
 \end{aligned}$$

- Se k é ímpar, p é ímpar e l é par:

$$\begin{aligned}
 \chi(C(k, p, l)) &= \sum_{t=2q+1}^{2j} \chi(C(2i, 2q+1, t))\chi(t) \\
 &= \sum_{t=q+1}^j \chi(C(2i, 2q+1, 2t))\chi(2t) + \sum_{t=q+1}^j \chi(C(2i, 2q+1, 2t-1))\chi(2t-1) \\
 &= \sum_{t=q+1}^j \binom{t-q+i-1}{i} + \sum_{t=q+1}^j \binom{t-1-q+i}{i} \cdot (-1) = 0.
 \end{aligned}$$

- Se k é ímpar, p é ímpar e l é ímpar:

$$\begin{aligned}
 \chi(C(k, p, l)) &= \sum_{t=2q+1}^{2j+1} \chi(C(2i, 2q+1, t))\chi(t) \\
 &= \sum_{t=q+1}^j \chi(C(2i, 2q+1, 2t))\chi(2t) + \sum_{t=q+1}^{j+1} \chi(C(2i, 2q+1, 2t-1))\chi(2t-1) \\
 &= \sum_{t=q+1}^j \binom{t-q+i-1}{i} + \sum_{t=q+1}^{j+1} \binom{t-1-q+i}{i} \cdot (-1) = -\binom{j-q+i}{i}.
 \end{aligned}$$

Portanto, segue a fórmula. ■

Agora, tendo os valores das paridades destes conjuntos, segue o teorema principal.

Teorema 4.3.13. *Sejam p, l inteiros positivos com $p \leq l$. Então $\chi(\mathcal{A}_p^l) = 0$.*

Demonstração. Sabendo que

$$\mathcal{A}_p^l = \bigcup_{m=0}^p O(p-m) * C_e(m, l) * (m) * C(l-p-1, m, p)$$

implica que

$$\chi(\mathcal{A}_p^l) = \sum_{m=0}^p \chi(C_e(m, l)) \cdot \chi(m) \cdot \chi(C(l-p-1, m, p))$$

e podemos separar o problema nos seguintes casos:

- Se $p = 2q$ e $l = 2j$:

$$\begin{aligned}
 \chi(\mathcal{A}_p^l) &= \sum_{m=0}^{2q} \chi(C_e(m, 2j)) \cdot \chi(m) \cdot \chi(C(2j-2q-1, m, 2q)) \\
 &= \sum_{m=0}^q \chi(C_e(2m, 2j)) \cdot \chi(2m) \cdot \chi(C(2j-2q-1, 2m, 2q)) \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{q-1} \chi(C_e(2m+1, 2j)) \cdot \chi(2m+1) \cdot \overbrace{\chi(C(2j-2q-1, 2m+1, 2q))}^{=0} \\
 &= \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{j-1}{m} \binom{q-m+(j-q-1)}{j-q-1} \\
 &= \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{j-1}{m} \binom{j-1-m}{j-1-q} = \binom{j-1}{q} \cdot \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{q}{m} = 0.
 \end{aligned}$$

- Se $p = 2q$ e $l = 2j + 1$:

$$\begin{aligned}
 \chi(\mathcal{A}_p^l) &= \sum_{m=0}^{2q} \chi(C_e(m, 2j+1)) \cdot \chi(m) \cdot \chi(C(2j-2q, m, 2q)) \\
 &= \sum_{m=0}^q \chi(C_e(2m, 2j+1)) \cdot \chi(2m) \cdot \chi(C(2j-2q, 2m, 2q)) \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{q-1} \overbrace{\chi(C_e(2m+1, 2j+1))}^{=0} \cdot \chi(2m+1) \cdot \chi(C(2j-2q, 2m+1, 2q)) \\
 &= \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{j-1}{m} \binom{q-m+(j-q-1)}{j-q-1} = 0.
 \end{aligned}$$

- Se $p = 2q + 1$ e $l = 2j + 1$:

$$\begin{aligned}
 \chi(\mathcal{A}_p^l) &= \sum_{m=0}^{2q+1} \chi(C_e(m, 2j+1)) \cdot \chi(m) \cdot \chi(C(2j-2q-1, m, 2q+1)) \\
 &= \sum_{m=0}^q \chi(C_e(2m, 2j+1)) \cdot \chi(2m) \cdot \overbrace{\chi(C(2j-2q-1, 2m, 2q+1))}^{=0} \\
 &\quad + \sum_{m=0}^q \overbrace{\chi(C_e(2m+1, 2j+1))}^{=0} \cdot \chi(2m+1) \cdot \chi(C(2j-2q-1, 2m+1, 2q+1)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

- Se $p = 2q + 1$ e $l = 2j$:

$$\begin{aligned}
 \chi(\mathcal{A}_p^l) &= \sum_{m=0}^{2q+1} \chi(C_e(m, 2j)) \cdot \chi(m) \cdot \chi(C(2j-2q-2, m, 2q+1)) \\
 &= \sum_{m=0}^q \chi(C_e(2m, 2j)) \cdot \chi(2m) \cdot \chi(C(2j-2q-2, 2m, 2q+1)) \\
 &\quad + \sum_{m=0}^q \chi(C_e(2m+1, 2j)) \cdot \chi(2m+1) \cdot \chi(C(2j-2q-2, 2m+1, 2q+1)) \\
 &= \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{j-1}{m} \binom{q-m+(j-q-1)}{j-q-1} \\
 &\quad - \sum_{m=0}^q (-1)^m \binom{j-1}{m} \binom{q-m+(j-q-1)}{j-q-1} = 0.
 \end{aligned}$$

■

Corolário 4.3.14. *A característica de Euler da variedade grassmaniana simplética $L_p(\mathbb{R}^{2l})$ é igual à zero, para todo $0 \leq p \leq l$.*

Demonstração. Basta observar que a característica de Euler coincide com a paridade do conjunto, ou seja, $\chi(L_p(\mathbb{R}^{2l})) = \chi(\mathcal{A}_p^l)$. ■

Corolário 4.3.15. *Para qualquer subconjunto $\Theta \subsetneq \Sigma$, a variedade flag parcial \mathbb{F}_Θ do grupo simplético $\mathrm{Sp}(l, \mathbb{R})$ tem característica de Euler $\chi(\mathbb{F}_\Theta) = 0$.*

Demonstração. Escolha $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$ e defina $\Delta = \Sigma \setminus \{\alpha\}$. Assim, temos que $\Theta \subset \Delta$ define uma fibração $\mathbb{F}_\Theta \rightarrow \mathbb{F}_\Delta$ e sua característica de Euler será $\chi(\mathbb{F}_\Theta) = \chi(\mathbb{F}_\Delta)\chi(f_{\Theta, \Delta}) = 0$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] C. J. Braga Barros, *Conjuntos controláveis e conjuntos controláveis por cadeias para ações de semigrupo*, Ph.D. thesis, UNICAMP - Campinas, 1995.
- [2] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [3] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, INC, 1978.
- [4] K. Hoffman and R. Kunze, *Linear algebra*, 2nd ed., Prentice-Hall, 1971.
- [5] J. S. Jucá, *Sistemas dinâmicos que triangularizam matrizes e o método QR*, Master's thesis, UNB - Brasília, 2012.
- [6] A. W. Knap, *Lie groups beyond an introduction*, 2nd ed., Birkhäuser, 2004.
- [7] M. M. A. Patrão, *Semifluxos em fibrados flag e seus semigrupos de sombreamento*, Ph.D. thesis, UNICAMP - Campinas, 2006.
- [8] L. Rabelo, *Homologia e cohomologia de variedades flag reais*, Ph.D. thesis, UNICAMP - Campinas, 2012.
- [9] L. Rabelo and L. A. B. San Martin, *Cellular homology of real flag manifolds*, Submetido.
- [10] L. A. B. San Martin, *Grupos de Lie*, <http://www.ime.unicamp.br/~smartin/cursos/grupolie-2012/>.
- [11] ———, *Order and domains of attraction of control sets in flag manifolds*, *Journal of Lie Theory* **8** (1998), 335–350.
- [12] ———, *Álgebras de Lie*, 2^a ed., Editora da Unicamp, 2010.
- [13] Lucas Seco, *A note on the Bruhat decomposition of semisimple lie groups*, *Journal of Lie Theory* **18** (2008), 725–731.
- [14] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*, Springer-Verlag, 1972.
- [15] M. Wiggerman, *The fundamental group of a real flag manifold*, *Indag. Mathem.*,1 N.S **9(1)** (1998), 141–153.