UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

SOBRE EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO
E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Valdair Bonfim

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Valdair Bonfim e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 07 de agosto de 1992.

Prof. Dr. Aloisio ~~J~~.F. Neves

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE em Matemática.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Aloísio J.F. Neves, pela orientação segura, estímulo e amizade.

Aos meus pais, pela orientação e princípios que guiaram minha vida.

Aos meus amigos da pós-graduação pela amizade e companheirismo, em especial à Sebastian L. Pizarro por valiosas sugestões neste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro.

Aos professores do IMECC pela minha formação.

A Lúcia e ao Mariano, e a todos os que se cansaram de ouvir: "no próximo mês, sai!".

A Benê pela paciência que teve comigo no trabalho de datilografia.

A Deus, pela vida.

Dedico a:

Meus pais: Vicente e Maria Dalva

Meus irmãos: Vilmar
Valmir
Valdir
Vera Lúcia

INTRODUÇÃO

Na presente dissertação, estudamos questões relacionadas ao comportamento assintótico das soluções de determinados tipos de equações diferenciais, a saber, equações diferenciais ordinárias, alguns tipos de equações à derivadas parciais e também equações diferenciais funcionais. O trabalho se desenvolveu em torno do seguinte objetivo: explorar, em casos particulares, alguns resultados gerais sobre comportamento assintótico das órbitas de um determinado sistema dinâmico. Mais precisamente, alguns resultados que dão informações a respeito do conjunto ω-limite de soluções, o qual é importante neste estudo, pois o conhecimento deste conjunto determina o comportamento assintótico das soluções.

Passamos agora a detalhar o que foi feito em cada capítulo. Iniciamos o capítulo zero com uma apresentação dos resultados básicos e fundamentais da análise funcional, e nos restringimos apenas aos resultados que foram utilizados na dissertação. No parágrafo 2 do mesmo capítulo, introduzimos algumas topologias no espaço $\mathcal{F}(X,M)$ das funções definidas em X e tomando valores no espaço métrico M. O objetivo neste ponto foi introduzir a topologia compacto-aberta, a qual veremos ser a topologia natural de se considerar quando tratarmos de um fluxo associado à equação diferencial ordinária não-autônoma $\dot{x}=f(t,x)$.

Um outro tópico, imprescindível ao se estudar equações a derivadas parciais, são os espaços de Sobolev, o qual incluímos no parágrafo 3. Neste ponto, decidimos não apenas apresentar os resultados principais, como também mostrar o quão natural é a consideração destes espaços.

Já nos parágrafos 4 e 5 do capítulo zero, colocamos alguns resultados sobre a teoria de semigrupos, os quais serão utilizados para justificar, no capítulo 1, existência e unicidade de soluções para uma classe de equações diferenciais.

No capítulo 2, começamos introduzindo o conceito de sistemas dinâmicos e colocamos resumidamente os assim chamados "princípios de invariância", mais precisamente, as proposições 1.5, 1.7 e 1.10. No parágrafo 2 do mesmo capítulo, estudamos sistemas dinâmicos gerados por equações autônomas. Aqui, basicamente ilustramos algumas dificuldades com respeito à hipótese de compacidade do fluxo na proposição 1.5. Fazemos isto para a equação do calor, tanto o caso linear quanto o não-linear. Também fazemos este estudo para a equação da onda com atrito, sendo que aqui aprofundamos um pouco mais e obtemos decaimento a zero das soluções usando técnicas do parágrafo 2.1. No final da dissertação, damos um exemplo que ilustra muito bem a relevância do caráter autônomo da equação. Finalizamos o parágrafo 2 analisando o caso das equações diferenciais funcionais.

No parágrafo 3 tratamos das equações diferenciais ordinárias não-autônomas utilizando ainda os princípios de invariância do parágrafo 1. O principal resultado nessa parte é o teorema 25, o qual dá informações a respeito das soluções de $x' = f(t,x)$ via informações a respeito das <u>equações limites</u> $x' = f^*(t,x)$ associadas à f.

Terminamos essa introdução com alguns comentários a respeito da extensão mais ou menos natural das idéias contidas na dissertação. Por exemplo, no final do parágrafo 2 tínhamos inicialmente colocado apenas um resultado que garantia compacidade do fluxo $\pi(t,\varphi) = x_t(\cdot,\varphi)$ associado à equação diferencial retardada $x'(t) = f(x_t)$ com $x_0 = \varphi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Mas decidimos colocar um resultado um pouco mais geral, a saber que, sob certas condições, o semigrupo $T(t)$ gerado por tal equação se decompõe em $T(t) = S(t) + U(t)$, onde $S(t)$ é uma contração e $U(t)$ é compacta. Isto dá exemplo de uma <u>α-contração</u>, conforme terminologia usada em [13], e essas aplicações são casos particulares de uma classe mais geral, as aplicações <u>assintóticamente suaves</u>, para as quais se tem uma série de resultados. Por exemplo, em [13] mostra-se que para certos semigrupos $T(t)$ assintóticamente suaves existe um <u>atrator global</u>, isto é, um conjunto compacto, invariante e maximal com respeito a essas duas propriedades. O atrator global é relevante porque contém muitas das informações importantes sobre o fluxo. Além disso, o atrator global tem a vantagem de mudar pouco sob perturbações de $T(t)$. Com essas observações, percebe-se que pode ser muito frutífero, no estudo de sistemas dinâmicos em espaços não localmente compactos, entender primeiro o fluxo restrito ao atrator global.

Í N D I C E

CAPÍTULO ZERO

PRELIMINARES

1. ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS DA ANÁLISE FUNCIONAL

TEOREMA 1.1 (Hahn-Banach)

Sejam X um espaço vetorial real e $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$\begin{cases} (1) & p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, \lambda > 0 . \\ (2) & p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad \forall\, x, y \in X . \end{cases}$$

Seja ainda $G \subset X$ um subespaço vetorial e $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que $g(x) \le p(x) \quad \forall\, x \in G$.

Então existe uma forma linear $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que prolonga g, isto é, tal que $f|_G = g$, e mais ainda, $f(x) \le p(x) \ \forall\, x \in X$.

Demonstração: Veja Brezis [1].

Sejam $\left(X, \|\cdot\|_X\right)$ e $\left(Y, \|\cdot\|_Y\right)$ espaços vetoriais normados. Denotaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ o conjunto de todas as aplicações lineares contínuas de X em Y, munido da norma usual, isto é, $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y$, para $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Escreveremos simplesmente $\|\cdot\|$ para qualquer uma das normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$.

Usaremos $\mathcal{L}(X)$ para denotar $\mathcal{L}(X,X)$, e X^* para $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, o dual topológico de X. Também, dadas $f \in X^*$ e $x \in X$, escreveremos $\langle f,x \rangle$ para designar $f(x)$.

Corolário 1.2: Seja X um espaço vetorial normado (e.v.n), $G \subset X$ um subespaço e $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ linear e contínua.

Então existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ linear e contínua tal que $f|_G = g$ e $\|f\|_{X^*} = \|g\|_{G^*}$.

Demonstração: É só aplicar Hahn-Banach com $p(x) = \|g\|_{G^*} . \|x\|$. ■

Corolário 1.3: Para todo x_0 no e.v.n. X existe $f_0 \in X^*$ tal que

$$<f_0, x_0> = \|x_0\|^2 \quad e \quad \|f_0\|_{X^*} = \|x_0\| \quad .$$

Demonstração: É só aplicar o corolário 1.2 com $G = \mathbb{R}x_0$ e $g(tx_0) = = t.\|x_0\|^2$

TEOREMA 1.4 (Banach-Steinhauss, ou da limitação uniforme)

Sejam X e Y dois espaços de Banach e $\{T_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

Se $\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty \ \forall \ x \in X$ então $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$.

Demonstração: Ver [1], pág. 16.

TEOREMA 1.5 (da aplicação aberta)

Sejam X e Y dois espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ sobrejetor. Então T é aberta, isto é, leva abertos de X em abertos de Y.

Demonstração: Ver [1], pág. 18.

Corolário 1.6: Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ bijetor. Então $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Demonstração: É imediato, pois T^{-1} (que existe por T ser bijetor) é contínua se e só se T é aberta, e esse é o caso já que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ é sobrejetor.

TEOREMA 1.7: (do gráfico fechado)

Sejam X e Y como antes e $T : X \longrightarrow Y$ linear. Se o gráfico $G(T)$ de T é fechado em $X \times Y$ então T é contínua.

Demonstração: Ver [1], página 20.

Vejamos mais algumas definições.

Definição 1.8 (Operador Linear Não-Limitado):

Sejam X e Y espaços de Banach. Chamamos <u>operador linear não-limitado</u> a toda aplicação linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow Y$ definido sobre um subespaço vetorial $\mathcal{D}(A)$ de X com valores em Y. $\mathcal{D}(A)$ é o domínio de A.

Se existe constante $c \geq 0$ tal que $\|Au\| \leq c\|u\|$ $\forall$ $u \in \mathcal{D}A)$ dizemos que A é limitado.

Às vezes diz-se simplesmente <u>operador linear</u>, sem o adjetivo <u>não-limitado</u>.

Definição 1.9 (operador fechado): Dizemos que o operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow Y$ é <u>fechado</u> se $G(A)$ (o gráfico de A) é fechado em $X \times Y$.

Definição 1.10 (Noção de Adjunto)

Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear e densamente definido, isto é, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Vamos definir um operador linear $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset Y^* \longrightarrow X^*$ como segue. Colocamos

$$\mathcal{D}(A^*) = \{y' \in Y^* : \exists\ c \geq 0 \text{ tal que } |\langle y', Ax\rangle| \leq c.\|x\| \ ,\ \forall\ x \in \mathcal{D}(A)\} .$$

Lógico que $\mathcal{D}(A^*)$ é um subespaço vetorial de Y^*.

Definamos agora A^*y' para $y' \in \mathcal{D}(A^*)$. Para isso consideremos a aplicação $\varphi = \varphi_{y'} : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = \langle y', Ax\rangle$. Como $y' \in \mathcal{D}(A^*)$ obtemos que $|\varphi(x)| \leq c.\|x\|\ \forall\ x \in \mathcal{D}(A)$, ou seja $\varphi : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Assim podemos considerar a (única) extensão contínua $\tilde{\varphi}$ de φ ao fecho $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Colocamos $A^*y' = \tilde{\varphi}$. É claro que A^* resulta linear. O operador $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset Y^* \longrightarrow X^*$ é chamado <u>adjunto de A</u>.

Temos a relação fundamental abaixo que liga A e A^* :

$$\boxed{\langle A^*y', x\rangle_{X^*,X} = \langle y', Ax\rangle_{Y^*,Y} \quad \forall\ x \in \mathcal{D}(A),\ \forall\ y' \in Y^* .}$$

TEOREMA 1.11 (Lax-Milgram)

Seja H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva (i.é, existe constante $\alpha > 0$ tal que $a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2,\ \forall\ v \in H$).

Então, dado $\varphi \in H^*$, existe um único $u = u(\varphi) \in H$ tal que $a(u,v) = \varphi(v)\ \forall\ v \in H$.

Mais ainda, se <u>a</u> é simétrica (i.é, $a(u,v) = a(v,u)\ \forall\ u,v \in H$) então u é caracterizado por

$$\frac{1}{2}\, a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v\in H} \left\{ \frac{1}{2}\, a(v,v) - \varphi(v) \right\} .$$

Demonstração: Brezis [1], página 84.

Notação: Dado $1 \leq p \leq \infty$, denotamos p' o número real estendido tal que $1/_p + 1/_{p'} = 1$. Chamamos p' o <u>conjugado</u> de p.

TEOREMA 1.12: (da Representação de Riesz)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $1 < p < \infty$. Então, dado $T \in L^p(\Omega)^*$, existe uma única $f = f_T \in L^{p'}(\Omega)$ tal que $Tv = \int_\Omega fv$, $\forall\, v \in L^p(\Omega)$. Mais ainda $\|T\|_{L^p(\Omega)^*} = \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}$.

Demonstração: Ver [1], página 61.

Definição 1.13 (Operador Compacto)

Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dizemos que T é <u>compacto</u> se T(B) é relativamente compacto em Y, onde $B=\{x \in X: \|x\| \leq 1\}$.

Quando $\left(X_1, \|\cdot\|_1\right)$ e $\left(X_2, \|\cdot\|_2\right)$ são espaços de Banach e $X_1 \subset X_2$, dizemos que a inclusão $X_1 \subset X_2$ é compacta se a aplicação $i: X_1 \longrightarrow X_2$ dada por $i(x) = x$ é compacta.

Definição 1.14: Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ linear. O <u>conjunto resolvente</u> de A é denotado e definido por $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} :$ existe $(\lambda I - A)^{-1}: X \longrightarrow X$ e este resulta limitado$\}$. Denotaremos $R(\lambda: A) = (\lambda I - A)^{-1}$ para $\lambda \in \rho(A)$. Definimos também o <u>espectro de A</u> por $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

2: TOPOLOGIAS EM $\mathcal{F}(X,M)$

2.1: Topologia da Convergência Simples

Sejam X um conjunto e (M,d) um espaço métrico. Denotemos por $\mathcal{F}(X,M)$ o conjunto das funções de X em M. Vamos introduzir em $\mathcal{F}(X,M)$ a topologia da convergência simples, a qual será denotada por $\mathcal{F}_s(X,M)$. $\mathcal{F}(X,M)$ pode ser visto como o produto $\prod_{x\in X} M_x$, onde $M_x = M$ para todo $x \in X$.

Definição 2.1.1: $\mathcal{F}_s(X,M)$ é o conjunto $\prod_{x\in X} M_x$ munido da topologia produto. A topologia de $\mathcal{F}_s(X,M)$ é chamada topologia da convergência simples pelo seguinte motivo.

Proposição 2.1.2: Seja $\left\{f_n\right\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}_s(X,M)$. Então $f_n \longrightarrow f$ em $\mathcal{F}_s(X,M)$ se e somente se $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, $\forall\ x \in X$.

Demonstração: Imediata . ∎

2.2: Topologia da Convergência Uniforme

Vamos agora introduzir a topologia $\mathcal{F}_u(X;M)$. Para isso, dadas f, $g \in \mathcal{F}(X;M)$ coloquemos $\rho(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x));\ x \in X\}$. Definamos, para f e g em $\mathcal{F}(X,M)$, a relação $f \sim g \Leftrightarrow \rho(f,g) < \infty$. É claro que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}(X;M)$. Vamos denotar por $\mathcal{B}_f(X;M)$ a classe de equivalência do elemento $f \in \mathcal{F}(X;M)$. É lógico que se $c : X \longrightarrow M$ é uma aplicação constante qualquer então $\mathcal{B}_c(X;M) = \mathcal{B}(X;M)$, onde $\mathcal{B}(X;M) = \{f : X \longrightarrow M;\ f \text{ é limitada}\}$.

Seja A um sistema de representantes para as classes de equivalência. Então temos $\mathcal{F}(X;M) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in A} \mathcal{B}_\alpha(X;M)$, onde $\dot{\bigcup}$ indica união disjunta. É lógico que $(\mathcal{B}_\alpha(X;M), \rho)$ é métrico $\forall\ \alpha \in A$, e portanto faz sentido definirmos a seguinte topologia em $\mathcal{F}(X,M)$, a qual será chamada <u>topologia da convergência uniforme</u>:

"$U \subset \mathcal{F}(X,M)$ é aberto $\Longleftrightarrow U \bigcap \mathcal{B}_\alpha(X,M)$ é aberto, $\forall\ \alpha \in A$" .

Em suma, os abertos dessa topologia consistem dos abertos de cada $\mathcal{B}_\alpha(X;M)$ e suas uniões. Em particular, cada $\mathcal{B}_\alpha(X;M)$ é um aberto de $\mathcal{F}_u(X;M)$. Também, como $\mathcal{B}_\alpha(X;M) \cap \mathcal{B}_\sigma(X;M) = \phi$ quando $\alpha \neq \sigma$ então cada $\mathcal{B}_\alpha(X;M)$ é também fechado em $\mathcal{F}_u(X;M)$. É lógico também que a topologia que $\mathcal{F}_u(X;M)$ induz em $\mathcal{B}_\alpha(X;M)$ coincide com a topologia gerada pela métrica ρ em $\mathcal{B}_\alpha(X;M)$. Em geral, temos que $\phi \subsetneq \mathcal{B}(X;M) \subsetneq \mathcal{F}_u(X;M)$, a menos que X seja finito, ou então que a métrica de M seja limitada. Logo, em geral temos que $\mathcal{F}_u(X;M)$ é um espaço topológico desconexo, pois $\mathcal{B}(X;M)$ é um subconjunto próprio e não-vazio de $\mathcal{F}_u(X;M)$, o qual é aberto e fechado simultaneamente.

Em geral diz-se que um espaço topológico Y é a soma <u>topológica</u> de uma família de subespaços $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ quando $Y = \bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$, $Y_\alpha \bigcap Y_\beta = \phi$ se $\alpha \neq \beta$, cada Y_α é aberto (e consequentemente fechado). Logo, $\mathcal{F}_u(X;M)$ é a soma topológica dos $\mathcal{B}_\alpha(X;M)$, $\alpha \in A$, onde A é sistema de representantes, como dito acima. Numa soma topológica tudo se passa como se, em vez de subespaços do mesmo espaço Y, os subespaços Y_α fossem totalmente independentes um do outro. Por exemplo, nenhum ponto de $y \in Y_\alpha$ pode ser limite de pontos pertencentes aos demais Y_α .

2.3: Topologia da Convergência Uniforme Numa Família De Partes

Sejam X espaço topológico e Y espaço métrico.

Já conhecemos duas topologias em $\mathcal{F}(X;M)$, a saber $\mathcal{F}_s(X;M)$ e $\mathcal{F}_u(X;M)$. Seja agora dada uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X. Introduziremos uma topologia em $\mathcal{F}(X;M)$, denotada por $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(X;M)$, onde a convergência $f_n \longrightarrow f$ em tal topologia vai significar $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em cada $S \in \mathcal{S}$. Veremos ainda que $\mathcal{F}_s(X;M)$ e $\mathcal{F}_u(X;M)$, e outras, são casos particulares desta. Para isso introduzamos o conceito abaixo.

Dados X um conjunto, Y um espaço topológico e $\varphi : X \longrightarrow Y$, a <u>topologia induzida</u> por φ em X é a mais fraca (ou menos fina) topologia em X que contém a classe $\{\varphi^{-1}(A);\ A \subset Y \text{ aberto}\}$ de subconjuntos de X. Ou seja, essa topologia é a mais fraca topologia em X que torna $\varphi : X \longrightarrow Y$ contínua.

Consideremos agora a família de espaços topológicos $(\mathcal{F}_u(S;M))_{S\in\mathcal{S}}$. Seja $Y = \prod_{S\in\mathcal{S}} \mathcal{F}_u(S;M)$, munido da topologia produto. Seja $\varphi : \mathcal{F}(X\,M) \longrightarrow Y$ dada por $\varphi(f) = \left[f|_S\right]_{S\in\mathcal{S}}$, e considere em $\mathcal{F}(X;M)$ a topologia induzida por φ. Esta é, por definição, a topologia $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(X;M)$.

É imediato verificar que a convergência $f_n \longrightarrow f$ em $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(X;M)$ significa que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em cada $S \in \mathcal{S}$.

Vê-se em [7] que vale a:

Proposição 2.3.1: $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(X;M)$ é Hausdorff $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{S}$ cobre X.

Demonstração: [7], página 260.

Alguns casos particulares:

(a) <u>a topologia da convergência uniforme</u>: $\mathcal{F}_u(X;M) = \mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(X;M)$ quando $\mathfrak{S} = \{X\}$.

(b) <u>a topologia da convergência simples</u>: $\mathcal{F}_s(X;M) = \mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(X;M)$ quando $\mathfrak{S}$ é a coleção das partes de X que se reduzem a um ponto.

(c) <u>a topologia da convergência uniforme nas partes compactas de X</u>: quando $\mathfrak{S}$ é a coleção das partes compactas de X. Escreve-se, nesse caso, $\mathcal{F}_c(X;M)$.

(d) <u>a topologia da convergência uniforme nas partes limitadas</u>: quando X for um espaço métrico e $\mathfrak{S}$ a coleção das partes limitadas de X. Nesse caso escrevemos $\mathcal{F}_b(X;M)$. Observe que quando $X = \mathbb{R}^n$ temos $\mathcal{F}_c(X;M) = \mathcal{F}_b(X;M)$.

Indicaremos com $C_{\mathfrak{S}}(X;M)$ o subespaço de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(X;M)$ constituído das aplicações contínuas do espaço topológico X no espaço métrico M. O símbolo C(X;M) indicará apenas o conjunto das aplicações contínuas de X em M, sem considerar topologia.

Temos agora a:

Proposição 2.3.2: Quando $\mathfrak{S}$ é uma cobertura enumerável de X, o espaço $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(X;M)$ é metrizável. Mais precisamente, se $\mathfrak{S}_0 = \{S_1, S_2, \ldots\}$ é uma cobertura enumerável tal que $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(X;M) = \mathcal{F}_{\mathfrak{S}_0}(X;M)$ então a topologia de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(X;M)$ pode ser definida pela métrica

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \sup_{x \in S_n} \frac{d(f(x),g(x))}{1 + d(f(x),g(x))},$$ onde d é a métrica de M.

Demonstração: Ver [7], página 262.

2.4: Topologia compacto-aberta

Veremos agora que a topologia da convergência uniforme nas partes compactas de X pode ser caracterizada sem que a métrica de M seja mencionada diretamente. Para isso colocaremos a seguinte notação: dados $P \subset X$ e $Q \subset Y$, seja $A(P,Q) = \{f \in C(X,Y) : f(P) \subset Q\}$. Temos então a:

Proposição 2.4.1: Sejam X espaço topológico e M métrico A topologia do espaço $C_c(X;M)$ é gerada pelos $A(K;V)$, onde $K \subset X$ é compacto e $V \subset M$ é aberto.

Demonstração: [7], página 274.

Como a métrica de M não foi mencionada diretamente na proposição acima, isso sugere a seguinte generalização:

Definição 2.4.2: Sejam X, Y espaços topológicos. A topologia em $C(X;Y)$ gerada pela família $\{A(K;V);\ K \subset X$ compacto e $V \subset Y$ aberto$\}$ é chamada <u>topologia</u> <u>compacto-aberta</u>, e o espaço correspondente é denotado por $C_{ca}(X;Y)$.

Segue então da proposição 2.4.1 que se M é métrico temos $C_c(X;M) = C_{ca}(X;M)$.

Mais adiante, quando estivermos tratando das equações diferenciais ordinárias do tipo $\dot{x} = f(t,x)$, onde $f : \mathbb{R} \times W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com $W \subset \mathbb{R}^n$ aberto, será útil considerar a topologia compacto-aberta em $C(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$. Assim, como $\mathbb{R}^n$ é métrico e como $\mathbb{R} \times W$ admite uma cobertura enumerável por compactos de $\mathbb{R} \times W$ segue que tal topologia em $C(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$ é metrizável.

Para finalizar vejamos as duas proposições abaixo.

Proposição 2.4.3: A topologia compacto-aberta é mais fina que a topologia da convergência simples. Em outras palavras, sejam quais forem os espaços topológicos X e Y, a aplicação identidade $i : C_{ca}(X;Y) \longrightarrow C_s(X;Y)$ é contínua.

Demonstração: Basta ver que a topologia de $C_s(X,Y) \subset Y^X$ é gerada pelos conjuntos $A(\{x\},V)$, onde $x \in X$ e V percorre os abertos de Y, pois os $A(\{x\},V)$ são as "fatias" $p_x^{-1}(V)$, imagem inversa de V pela projeção $p_x(f) = f(x)$. Como cada conjunto $\{x\}$ é compacto a proposição segue. □

Proposição 2.4.4: Se Y é Hausdorff então $C_{ca}(X,Y)$ é Hausdorff, qualquer que seja o espaço topológico X.

Demonstração: Ora, como $C_s(X,Y) \subset Y^X$, e como Y é Hausdorff então $C_s(X,Y)$ é Hausdorff (produto de Hausdorff é Hausdorff). Agora, como a topologia de $C_{ca}(X,Y)$ é mais fina que a topologia de $C_s(X,Y)$ segue o resultado. □

3: INTRODUÇÃO-MOTIVAÇÃO AOS ESPAÇOS DE SOBOLEV RESULTADOS PRINCIPAIS

3.1 Motivação:

Ao se estudar o problema das pequenas vibrações transversais de uma corda flexível obtém-se a seguinte equação integral:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x)u_t(t,x)dx = \int_a^b \tau(t)u_{xx}(t,x)dx + \int_a^b h_1(t,x,u)dx \qquad (3.1)$$

onde:

. $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função das variáveis reais t e x representando a posição do ponto x da corda no instante t;

. $\rho(x)$ é a densidade da corda no ponto x;

. $\tau(t)$ é a componente horizontal da tensão;

. $h_1(t,x,u)$ é a densidade linear das f rças externas, como por exemplo, a gravidade, a resistência ao movimento imposta pelo meio onde está a corda, ou ainda forças tendentes a restaurar a posição de equilíbrio da corda.

O problema físico está bem representado pela equação (3.1), e poder-se-ia até mesmo tentar obter a função incógnita u a partir dela. No entanto, é um costume tradicional supor que a função u tenha mais regularidade do que aquela essencial para satisfazer (3.1) e passar-se a uma equação diferencial.

Por exemplo, no nosso caso, se supormos que u_{tt} é contínua podemos escrever

$$\int_a^b \rho(x)u_{tt}(t,x)dx = \int_a^b \tau(t)u_{xx}(t,x)dx + \int_a^b h_1(t,x,u)dx,$$

e como a equação acima vale para quaisquer $a,b \in \mathbb{R}$ têm-se

$$\rho(x)u_{tt}(t,x) = \tau(t)u_{xx}(t,x) + h_1(t,x,u) \tag{3.2}$$

No caso em que $h_1 \equiv 0$, isto é, não há forças externas, e que $\tau(t)/_{\rho(x)}$ é uma constante positiva, digamos c^2 (isto ocorre quando a corda for homogênea, i.é, densidade constante, e quando as tensões $\tau(t)$ são constantes), ficamos com a equação

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{3.3}$$

Obs.: Normalmente estuda-se o caso em que $c = 1$. Esta suposição não particulariza nada, pois caso $c \neq 1$ trocamos x por x/c e ficamos com a equação $u_{tt} = u_{xx}$ na nova variável x.

Mas note que soluções com essa regularidade são conseguidas às custas de hipóteses adicionais - e porque não dizer artificiais? - sobre os dados do problema.

De fato, o problema de Cauchy (clássico) abaixo:

$$\left.\begin{array}{l} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ \\ u(0,x) = f(x) \quad , \quad u_t(0,x) = g(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

tem solução clássica $u(t,x)$ (isto é, existe função $u \in C^2(\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R})$)que satisfaz (3.4)) desde que $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$, e mais ainda, essa solução é dada pela fórmula de D'Alembert

$$u(t,x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds \qquad (3.5)$$

No entanto, às vezes é necessário tratar do problema (3.4) sem pedir os graus de derivabilidade acima para f e g. Inclusive, é de interesse tratar casos em que f e g são até mesmo descontínuas.

O que se faz para resolver esse problema é o seguinte: vamos introduzir o conceito de solução fraca da equação da onda. Uma determinada função será uma solução fraca se satisfizer uma determinada equação integral. Mais ainda, toda solução forte (clássica) será uma solução fraca. Uma primeira vantagem é que aumentamos o universo das funções soluções (podendo ganhar, entre outras coisas, complitude do espaço), e uma outra é que estamos, num certo sentido, resolvendo o problema na forma original, pois voltamos à equação integral.

3.2 Derivadas Generalizadas

Nosso objetivo nesse parêntesis é generalizar o conceito de derivada. Iremos, após esse parágrafo, falar em derivada de uma função qualquer de L^1_{loc}. Isso será, sem dúvida nenhuma, uma ótima generalização, pois L^1_{loc} engloba "todas" as funções que estamos imaginando, muitas das quais não tendo derivadas no sentido clássico.

Comecemos com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, e defina $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ como sendo o conjunto das funções $u:\Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ e com suporte compacto contido em Ω.

Definamos uma noção de convergência como segue (como $\mathcal{D}(\Omega)$ é espaço vetorial basta definir o que significa uma sequência $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ convergir a zero (função identicamente nula em Ω)).

Definição 3.2.1: Seja $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Dizemos que Φ_n converge à função nula em $\mathcal{D}(\Omega)$ se:

(i) Existe compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp}\ \Phi_n \subset K,\ \forall n$.

(ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha\Phi_m \longrightarrow 0$ uniformemente em x, isto é, dado $\varepsilon > 0$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, existe $N(\varepsilon, \alpha) \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq N(\varepsilon,\alpha)$ então $|D^\alpha\Phi_m(x)| < \varepsilon,\ \forall\ x \in \Omega$.

Definição 3.2.2: (Distribuições)

Uma distribuição é um funcional linear e contínuo em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, é uma aplicação $T:\mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) linear e tal que se $\Phi_m \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então $T(\Phi_m) \longrightarrow 0$ em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.2.3: Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, defina $T_f:\mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$< T_f,\ \phi > = \int_\Omega f(x)\ \phi(x)dx\ .$$

Em primeiro lugar é lógico que T_f está bem definida, pois $\left|\int_\Omega f(x)\phi(x)dx\right| \leq \int_K |f(x)|.|\phi(x)|dx \leq M_{\Phi,k}\ .\ \int_k |f(x)|\ dx < \infty$, onde $K = \text{supp}\ \Phi$ e $M_{\Phi,K} = \max_{x\in K} |\Phi(x)|$ (o qual existe porque Φ é C^∞, em particular contínua, e K é compacto).

É lógico também que T_f é linear.

Verifiquemos que T_f é contínua. Para isso consideremos $\Phi_n \longrightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Devemos provar que $|\langle T_f, \Phi_n \rangle| \longrightarrow 0$. Ora,

$$|\langle T_f, \Phi_n \rangle| = \left|\int_\Omega f(x)\Phi_n(x)dx\right| \leq \int_\Omega |f(x)|.|\Phi_n(x)|dx = \int_K |f(x)|.|\Phi_n(x)|dx$$

onde K é um compacto de Ω tal que supp $\Phi_n \subset K$ $\forall$ n = 1,2,....

Portanto, $|\langle T_f, \Phi_n \rangle| \leq M_{\Phi_{n,K}} . \int_K |f(x)|dx = M_{\Phi_{n,k}} . \|f\|_{L^1(k)}$

onde $M_{\Phi_{n,K}} = \max_{x \in K} |\Phi_n(x)|$. Agora, como $\Phi_n \longrightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então $\Phi_n(x) = D^{(0,\dots,0)}\Phi_n(x) \longrightarrow 0$ uniformemente em Ω, e portanto $M_{\Phi_{n,k}} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Portanto $\langle T_f, \Phi_n \rangle \longrightarrow 0$, como queríamos.

Logo, do que vimos acima segue que T_f é uma distribuição. ■

O conjunto de todas as distribuições será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Não é difícil mostrar que a aplicação $f \in L^1_{loc}(\Omega) \longrightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é injetora. O que isso está dizendo é que podemos pensar numa função de $L^1_{loc}(\Omega)$ como sendo uma distribuição, ou, abusando da linguagem, podemos dizer que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Uma pergunta que surge é a seguinte:

Será que toda distribuição é da forma T_f, com $f \in L^1_{loc}(\Omega)$? Ou, abusando novamente da linguagem, será que $L^1_{loc}(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega)$?

A resposta é não, e um contra-exemplo é o que se vê a seguir:

Exemplo 3.2.4 (Distribuição de Dirac):

Seja $a \in \Omega$ fixo e coloque $\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $<\delta_a, \Phi> = \Phi(a)$. Não é difícil ver que $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e que $\delta_a \neq T_f$, $\forall\, f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Para atingir o nosso objetivo (definir derivada para qualquer função de $L^1_{loc}(\Omega)$)faremos o seguinte: definiremos uma operação de derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$ que será sempre possível de realizar qualquer que seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, e daí, como $L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, tal operação ficará bem definida para os elementos de $L^1_{loc}(\Omega)$. Para que essa derivada generalizada (ou <u>derivada fraca</u>, ou ainda <u>derivada no sentido das distribuições</u>) generalize de fato o conceito de derivada clássica (que nem sempre existe), estas deverão coincidir no caso da derivada clássica existir. "Coincidir" aqui significa $T_{D^\alpha f} = D^\alpha(T_f)$.

Com isso em mente tomemos primeiro uma função "bastante" regular $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Vale então a igualdade

$$\int_\Omega (D^\alpha f)(x)\ \Phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)\ D^\alpha \Phi(x)dx\ , \qquad (3.2.1)$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ é um <u>multi-índice</u> e $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ seu <u>comprimento</u>.

Mas (3.2.1) diz que $< T_{D^\alpha f}\ , \Phi > = (-1)^{|\alpha|} < T_f\ , D^\alpha \Phi >$, e portanto, se quisermos que $T_{D^{\alpha}f} = D^{\alpha}T_f$ teremos que definir a derivada da distribuição como segue:

Definição 3.2.5 (Derivada de Distribuição)

$$\begin{cases} \text{Seja } T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{) uma distribuição, e } \alpha \in \mathbb{N}^n \\ \text{Definimos } D^{\alpha}T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{) pondo} \\ \qquad < D^{\alpha}T \, , \, \Phi > \; = \; (-1)^{|\alpha|} < T, \, D^{\alpha} \Phi > . \end{cases}$$

É de fácil verificação que a expressão acima define, de fato, uma distribuição.

Foi dito no início da seção que $L^1_{loc}(\Omega)$ é "bem grande". Para não ficarmos apenas com essa afirmação superficial vejamos a:

Proposição 3.2.6: $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$

Em particular temos o conceito de derivada generalizada para os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração da proposição 3.2.6:

Dada $f \in L^p(\Omega)$, devemos verificar que $f \in L^1(K)$ $\forall$ $K \subset \Omega$ compacto. Seja então $K \subset \Omega$ compacto.

Se $p = \infty$ não há o que fazer, pois $\int_K |f(x)|dx \leq$

$\leq \int_K \|f\|_{L^\infty(\Omega)} dx = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \mu(K)$, onde $\mu(K)$ é a medida de Lebesque de K em $\mathbb{R}^n$, a qual é finita pois K é compacto.

Consideremos o caso $1 \leq p < \infty$. Escrevemos $\int_K |f(x)|dx =$

$\int_A |f(x)|dx + \int_B |f(x)|dx$, onde $A = \{x \in K : |f(x)|<1\}$ e $B = K \setminus A$.

Então ficamos com

$$\int_K |f(x)|dx \leq \int_A 1dx + \int_B |f(x)|^p dx \leq \mu(A) + \|f\|^p_{L^p(\Omega)} < \infty \qquad \blacksquare$$

3.3 Espaços de Sobolev

Definição 3.3.1 (Espaços de Sobolev)

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por

$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \ \forall \ i = 1,\dots,N\right\}$, onde

as derivadas acima são no sentido das distribuições.

O que queremos dizer acima é que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se $\frac{\partial}{\partial x_i}(T_u) = T_{g_i}$ para alguma (única) $g_i \in L^p(\Omega)$, $i = 1,\dots,N$.

Isto é,

$$u \in W^{1,P}(\Omega) \iff < \frac{\partial}{\partial x_i} T_u, \Phi > = <T_{g_i}, \Phi>, \forall \Phi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall i$$

isto é, $u \in W^{1,P}(\Omega) \iff - <T_u, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} >= <T_{g_i}, \Phi > \forall \Phi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall i.$

$$\text{ou seja, } u \in W^{1,P}(\Omega) \iff - \int_\Omega u(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x)dx =$$

$$= \int_\Omega g_i(x)\Phi(x)dx, \ \forall \Phi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \forall i.$$

De agora em diante abandonaremos a notação T_f para identificar a distribuição associada à função f, mas isso não vai causar confusão. Dessa maneira escreveremos simplesmente $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ao invés de $\frac{\partial}{\partial x_i}(T_u)$. Denotaremos $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Munimos o espaço $W^{1,P}(\Omega)$ da norma

$$\|u\|_{W^{1,P}(\Omega)} = \|u\|_{L^P(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^P(\Omega)} , \qquad \text{ou da}$$

norma equivalente

$$\left[\|u\|^P_{L^P(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^P_{L^P(\Omega)} \right]^{1/P} \qquad \text{se } 1 \le P < \infty$$

Temos então o:

TEOREMA 3.3.2: O espaço $W^{1,P}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \le p \le \infty$.

$W^{1,P}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \le p < \infty$.

Demonstração: Ver Brezis [1]

Quando $p = 2$ a norma $\left[\|u\|^2_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|^2_{L^2} \right]^{1/2}$ é

exatamente a norma associada ao produto interno em H^1 dado por

$$\langle u, v\rangle_{H^1} := \langle u,v\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2}$$

Portanto o espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, reflexivo e separável.

Podemos definir ainda os espaços $W^{m,p}(\Omega)$, m inteiro ≥ 2, por indução em m.

Definição 3.3.3: $W^{m,p}(\Omega)=\left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega)\ i=1,\dots,N \right\}$

ou equivalentemente

$$W^{m,p}(\Omega)=\left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ com } |\alpha| \leq m, \text{ existe } g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_\Omega u\, D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha\, \varphi\ ,\ \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\ . \end{array} \right\}$$

Denotaremos $D^\alpha u = g_\alpha$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é munido da norma

$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$ $(1 \leq p \leq \infty)$, ou da norma

equivalente

$$\left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \qquad \text{se } 1 \le p < \infty \ .$$

Como no caso m = 1, temos também que $W^{m,p}(\Omega)$ é de Banach para todo $m \ge 2$. Denotaremos, como antes, $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

Também observamos que a norma

$$\left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$ em $H^m(\Omega)$ é a norma associada

ao produto interno abaixo em $H^m(\Omega)$

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2} \ .$$

Listaremos agora uma série de resultados que serão utilizados mais adiante. Apenas alguns serão demonstrados.

Notação: Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, diremos que um aberto ω é <u>fortemente incluso</u> em Ω, e escreveremos $\omega \subset\subset \Omega$, se $\bar{\omega}$ é compacto e $\bar{\omega} \subset \Omega$.

TEOREMA 3.3.4: (Friedrichs). Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \le p < \infty$.

Então existe sequência (u_n) em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

(1) $u_n\big|_\Omega \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$

$$(2)\ \nabla u_n\Big|_{\omega} \longrightarrow \nabla u\Big|_{\omega} \text{ em } L^p(\omega)^N, \quad \text{para todo } \omega \subset\subset \Omega .$$

Demonstração: Brezis, página 151. ■

Proposição 3.3.5: Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto limitado, $u \in L^p(\Omega)$ com $1<p<\infty$, p' o conjugado de p, e $c \geq 0$ uma constante.

$$\text{Se } \left|\int_\Omega u\, D^\alpha\varphi\right| \leq c\ \|\varphi\|_{L^{p'}} \qquad \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ e } \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^N$$

com $|\alpha| \leq m$, então $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Mais ainda, $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq M.c$ para alguma constante $M \geq 0$.

Demonstração: Fixe $\alpha \in \mathbb{N}^N$ com $|\alpha| \leq m$. Queremos mostrar que existe

$$f = f_{u,\alpha} \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega u\, D^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f\,\varphi\ ,\ \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Para isso definamos $T = T_{u,\alpha} : \left[C_c^\infty(\Omega),\ \|.\|_{L^{p'}(\Omega)}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\, D^\alpha\varphi$. Logo T resulta linear. Além disso T é contínua. De fato, seja $(\varphi_n) \subset L^{p'}(\Omega)$ tal que $\varphi_n \longrightarrow 0$ em $L^{p'}(\Omega)$.

Então $$\left|T(\varphi_n)\right| = \left|\int_\Omega u\, D^\alpha\varphi_n\right| \leq C\ \left\|\varphi_n\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \longrightarrow 0,$$ donde a continuidade.

Assim $T \in C_c^\infty(\Omega)^*$. Pelo teorema de Hahn-Banach existe extensão $\tilde{T}$ de T ao espaço $L^{p'}(\Omega)$. Mais ainda, $\|\tilde{T}\|_{L^{p'}(\Omega)^*} = \|T\|_{C_c^\infty(\Omega)^*}$.

Agora, do teorema da representação de Riesz sabemos que existe uma única $f = f_{u,\alpha} \in L^p(\Omega)$ com as propriedades $\tilde{T}(v) = \int_\Omega fv$ $\forall\, v \in L^{p'}(\Omega)$ e $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|\tilde{T}\|_{L^{p'}(\Omega)^*}$. Em particular temos que $\tilde{T}(\varphi) = \int_\Omega f\,\varphi\ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, isto é, $(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi = \int_\Omega f\,\varphi$ $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, ou seja, $f_{u,\alpha}$ é a derivada distribucional $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, $\forall\, |\alpha| \leq m$, donde sai que $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Mais ainda, como $|T(\varphi)| =$

$= \left|\int_\Omega u\, D^\alpha\varphi\right| \leq C\, \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$ $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ então $\|T\|_{C_c^\infty(\Omega)^*} \leq C$;

mas como $\left\|D^\alpha u\right\|_{L^p(\Omega)} = \left\|f_{u,\alpha}\right\|_{L^p(\Omega)} = \left\|\tilde{T}\right\|_{L^{p'}(\Omega)^*} = \left\|\tilde{T}\right\|_{C_c^\infty(\Omega)^*}$ então

$\left\|D^\alpha u\right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \quad \forall\, |\alpha| \leq m$.

Logo obtemos que $\left\|u\right\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha| \leq m} \left\|D^\alpha u\right\|_{L^p(\Omega)} \leq L.C.$

para alguma constante $L \geq 0$, e como a expressão acima define uma norma equivalente à usual em $W^{m,p}(\Omega)$ obtemos que

$\left\|u\right\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq M.C$ para alguma constante $M \geq 0$. ■

Corolário 3.3.6: Sejam:

. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado;

. $u \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$, $f \in L^r(\Omega)$ com $1 \leq r \leq \infty$

e suponhamos ainda que $\left| \int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \right| \leq K. \left\| f \right\|_{L^r(\Omega)} . \left\| \varphi \right\|_{L^{p'}(\Omega)}$, $\forall \ \varphi \in C_c^\infty (\Omega)$

e $\forall \left| \alpha \right| \leq m$. Então $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e $\left\| u \right\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq M \left\| f \right\|_{L^r(\Omega)}$, para alguma constante $M \geq 0$.

Demonstração: É só usar a proposição acima com $C = K. \left\| f \right\|_{L^r(\Omega)}$.

Vejamos agora uma caracterização das funções de $W^{1,p}(\Omega)$.

TEOREMA 3.3.7: Seja $u \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. São equivalentes:

(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$

(ii) Existe constante C tal que para todo $\omega \subset \subset \Omega$ e todo $h \in \mathbb{R}^N$ com $\|h\| < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$ têm-se

$$\left\| \tau_h \, u - u \right\|_{L^p(\omega)} \leq C \left\| h \right\|$$

Mais ainda, podemos tomar $C = \left\| \nabla u \right\|_{L^p(\Omega)}$.

Obs.: Com $\left\|\nabla u\right\|_{L^p(\Omega)}$ queremos denotar $\left\|\varphi\right\|_{L^p(\Omega)}$, com $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = \|\nabla u(x)\|_p$, onde para $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N) \in \mathbb{R}^N$ colocamos $\|\zeta\|_p = \left(|\zeta_1|^p + \ldots + |\zeta_n|^p\right)^{1/p}$. Equivalentemente, $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^p}^p + \ldots\ldots + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii): Suponhamos inicialmente que $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Seja $h \in \mathbb{R}^N$ e coloque $v(t) = u(x + th)$, $t \in \mathbb{R}$. Então $v'(t) = h \cdot \nabla u(x + th)$, e daí vem $u(x + h) - u(x) = v(1) - v(0) =$
$$= \int_0^1 v'(t)dt = \int_0^1 h.\nabla u(x + th)dt .$$

Logo $\left|\tau_h u(x) - u(x)\right| = \left|\int_0^1 h.\nabla u(x + th)dt\right| \leq$
$$\leq \int_0^1 \left\|h\right\|.\left\|\nabla u(x + th)\right\| dt \leq \left\|h\right\|.\left(\int_0^1 \left\|\nabla u(x + th)\right\|^p\right)^{1/p},$$ onde na última desigualdade usamos Hölder com as funções $\|h\|.\|\nabla u(x + th)\| \in L^p(0,1)$ e $1 \in L^{p'}(0,1)$.

Logo $\left|\tau_h u(x) - u(x)\right|^p \leq \left\|h\right\|^p \int_0^1 \left\|\nabla u(x + th)\right\|^p dt.$ Logo,

$$\int_\omega \left|\tau_h u(x) - u(x)\right|^p dx \le \|h\|^p . \int_\omega \left[\int_0^1 \|\nabla u(x+th)\|^p dt\right] dx =$$

$$= \|h\|^p \int_0^1 \left[\int_\omega \|\nabla u(x + th)\|^p dx\right] dt = \|h\|^p \int_0^1 \left[\int_{\omega+th} \|\nabla u(y)\|^p dy\right] dt.$$

Agora, fixando $\|h\| < \text{dist}\,(\omega, \Omega^c)$, existe aberto $\omega' \subset\subset \Omega$ tal que $\omega + th \subset \omega'$ $\forall\ t \in [0,1]$, e portanto

$$\int_\omega \left|\tau_h u(x) - u(x)\right|^p dx \le \|h\|^p \int_0^1 \left[\int_{\omega'} \|\nabla u(y)\|^p dy\right] dt = \|h\|^p \int_{\omega'} \|\nabla u(y)\|^p dy =$$

$$= \|h\|^p . \|\nabla u\|^p_{L^p(\omega')}, \text{ donde sai } \|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \le \|h\| . \|\nabla u\|_{L^p(\omega')} \qquad (2.3.1)$$

Agora, quando $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, sabemos que existe uma sequência (u_n) em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n\big|_\Omega \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n\big|_\omega \longrightarrow \nabla u\big|_\omega$ em $L^p(\omega)^N$, para todo $\omega \subset\subset \Omega$. Daí, como a equação (2.3.1) vale para as funções u_n, e tomando limite quando $n \longrightarrow \infty$ obtemos a desigualdade desejada. A convergência no limite acima se explica pelas seguintes desigualdades:

$$\left| \left\| \tau_h u_n - u_n \right\|_{L^p(\omega)} - \left\| \tau_h u - u \right\|_{L^p(\omega)} \right| \le \left\| \left(\tau_h u_n - u_n \right) - \left(\tau_h u - u \right) \right\|_{L^p(\omega)} \le$$

$$\le \left\| \tau_h (u_n - u) \right\|_{L^p(\omega)} + \left\| u_n - u \right\|_{L^p(\omega)} = \left\| u_n - u \right\|_{L^p(h+\omega)} + \left\| u_n - u \right\|_{L^p(\omega)} \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow \infty$, donde sai que $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \tau_h u_n - u_n \right\|_{L^p(\omega)} = \left\| \tau_h u - u \right\|_{L^p(\omega)}$.

Também,

$$\left| \left\| \nabla u_n \right\|_{L^p(\omega')^N} - \left\| \nabla u \right\|_{L^p(\omega')^N} \right| \le \left\| \nabla u_n - \nabla u \right\|_{L^p(\omega')^N} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

donde sai que $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \nabla u_n \right\|_{L^p(\omega')^N} = \left\| \nabla u \right\|_{L^p(\omega')^N}$. ∎

(ii) → (i) : É suficiente provar que $\forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ têm-se

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \le C. \left\| \varphi \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \qquad i=1,2,\dots,N.$$

Seja então $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, e ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ tal que $\operatorname{supp} \varphi \subset \omega \subset\subset \Omega$. Consideremos $h \in \mathbb{R}^N$ com $\|h\| < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$. Por Hölder temos

$$\left| \int_\omega (\tau_h u - u)\, \varphi \right| \le \left\| \tau_h u - u \right\|_{L^p(\omega)} . \left\| \varphi \right\|_{L^{p'}(\omega)} \tag{2.3.2}$$

e da hipótese sai que

$$\| \tau_h u - u \|_{L^p(\omega)} \leq C.\|h\| . \qquad (2.3.3)$$

De (2.3.2) e (2.3.3), mais o fato que supp $\varphi \subset \omega$ obtemos

$$\left| \int_\Omega (\tau_h u - u)\ \varphi \right| \leq C.\left\|h\right\|.\left\|\varphi\right\|_{L^{p'}(\omega)} \leq C.\left\|h\right\|.\left\|\varphi\right\|_{L^{p'}(\Omega)} . \qquad (2.3.4)$$

Agora,

$$\int_\Omega (\tau_h u-u)(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega \left[u(x+h)-u(x)\right]\varphi(x)dx = \int_\Omega u(y).\left[\varphi(y-h)-\varphi(y)\right]dy$$

e portanto $\left|\int_\Omega u(y)\ \dfrac{\varphi(y-h) - \varphi(y)}{\|h\|}\ dy\right| \leq C.\left\|\varphi\right\|_{L^{p'}(\Omega)}$ (2.3.5)

Tomando $h = te_i$, $i = 1,\dots,N$, $t \in \mathbb{R}$, e fazendo $t \longrightarrow 0$,

obtemos $\left|\int_\Omega u(y)\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_i}\ (y)dy\right| \leq C\ \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$, $i = 1,2,\dots,N$, (2.3.6)

como queríamos. ■

Proposição 3.3.8: (Fórmula de Mudança de Variáveis em Integrais)

Sejam Ω e Ω' abertos de $\mathbb{R}^N$ e $H: \Omega' \longrightarrow \Omega$ uma aplicação bijetora, $x = H(y)$, tal que $H \in C^1(\Omega')$, $H^{-1} \in C^1(\Omega)$, $JacH \in L^\infty(\Omega')^{N\times N}$ e $JacH^{-1} \in L^\infty(\Omega)^{N\times N}$ $\left[\text{obs.: JacH denota a matriz jacobiana } \dfrac{\partial H_i}{\partial y_j}\right]$.

Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então

$$u \circ H \in W^{1,p}(\Omega') \text{ e } \frac{\partial}{\partial y_j}(u \circ H)(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y)) \cdot \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y), \ \forall j .$$

Demonstração: Brezis [1], pág. 156.

3.4. Operadores de Prolongamento

Em geral é mais cômodo estabelecer as propriedades das funções de $W^{1,p}(\Omega)$ começando pelo caso $\Omega = \mathbb{R}^N$. É útil portanto saber prolongar uma função de $W^{1,p}(\Omega)$ a uma função $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Isso nem sempre é possível. No entanto, se Ω é "regular" podemos construir tal prolongamento. Comecemos por precisar a noção de aberto regular.

Notações: Dado $x \in \mathbb{R}^N$ escreveremos $x = (x', x_N)$ com

$$x' \in \mathbb{R}^{N-1}, \ x' = (x_1, \ldots\ldots, x_{N-1}) \ , \text{ e colocamos } \|x'\| = \left[\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \right]^{1/2} .$$

Denotamos também

$$\mathbb{R}^N_+ = \left\{ x = (x', x_N) \ ; \ x_N > 0 \right\} , Q = \left\{ x = (x', x_N) \quad \|x'\| < 1 \text{ e } |x_N| < 1 \right\} ,$$

$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^N_+ \text{ e } Q_o = \left\{ x = (x', x_N) : \|x'\| < 1 \text{ e } x_N = 0 \right\} .$$

Definição 3.4.1 (regularidade de abertos)

Dizemos que um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é de classe C^m, m inteiro ≥ 1, se para todo $x \in \partial\Omega$ existe uma vizinhança U de x em $\mathbb{R}^N$ e uma aplicação $H: Q \longrightarrow U$ bijetora tal que: $H \in C^m(\overline{Q})$, $H^{-1} \in C^m(\overline{U})$, $H(Q_+) = \Omega \cap U$ e $H(Q_o) = \partial\Omega \cap U$.

Obs.: Dada $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ denotaremos $\overline{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$\overline{f}\,(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0\ , & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Sejam $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\alpha \in C^1_c(\Omega)$. Então $\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\overline{\alpha u}\right] = \overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}}$$

De fato, dada $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\alpha u}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega \alpha u\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega u. \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\alpha\varphi\right] - \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\,\varphi \right] =$$

$$= -\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\alpha\varphi + u\varphi\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right) = -\int_{\mathbb{R}^N} \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\alpha + u\,\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}} \right)\varphi\ .$$

A mesma conclusão se verifica se, ao invés de supor $\alpha \in C^1_c\,(\Omega)$, tomamos $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $\nabla\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$ e supp $\alpha \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$, onde $\Gamma = \partial\Omega$.

Vejamos agora o:

TEOREMA 3.4.2 (operador de prolongamento)

Suponha que Ω é de classe C^1 com $\Gamma=\partial\Omega$ limitado (ou então $\Omega = \mathbb{R}^N_+$). Então existe um operador de prolongamento

$$P: W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

linear e tal que para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ valem:

(i) $\quad Pu\big|_{\Omega} = u$

(ii) $\quad \|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C. \|u\|_{L^p(\Omega)}$

(iii) $\quad \|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C. \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

onde C é uma constante que só depende de Ω .

Para a demonstração comecemos por um lema simples, mas fundamental, relacionado ao prolongamento por <u>reflexão</u>.

Lema 3.4.3: Dada $u \in W^{1,p}(Q_+)$ defina $u^* : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ por reflexão, isto é,

$$u^*(x', x_N) = \begin{cases} u(x',x_N) & \text{se } x_N > 0 \\ u(x', -x_N) & \text{se } x_N < 0 \end{cases}$$

Então $u^* \in W^{1,p}(Q)$, e mais ainda,

$$\left\|u^*\right\|_{L^p(Q)} \leq 2.\left\|u\right\|_{L^p(Q_+)} \quad \text{e} \quad \left\|u^*\right\|_{W^{1,p}(Q)} \leq 2.\left\|u\right\|_{W^{1,p}(Q_+)} .$$

Demonstração do lema 3.4.3.: Verifiquemos inicialmente que

$$(1)\quad \frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]^* \quad \text{para todo } 1 \le i \le N-1 \quad \text{, e que}$$

$$(2)\quad \frac{\partial u^*}{\partial x_N} = \left[\frac{\partial u}{\partial x_N}\right]^{\square} \quad ,$$

onde definimos, para f dada em Q_+

$$f^{\square}(x', x_N) = \begin{cases} f(x', x_N) & \text{se} \quad x_N > 0 \\ -f(x', -x_N) & \text{se} \quad x_N < 0 \end{cases}$$

Disso seguirá o resultado, pois como $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(Q_+)$ $\forall\ i = 1,\dots,N-1$, então é fácil verificar que $\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]^* \in L^p(Q)$ e

$\left\| \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]^* \right\|_{L^p(Q)} \le 2. \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(Q_+)}$. Daí, como $\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]^*$, temos

que $\frac{\partial u^*}{\partial x_i} \in L^p(Q)$ e $\left\| \frac{\partial u^*}{\partial x_i} \right\|_{L^p(Q)} \le 2. \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(Q_+)}$, $\forall\ i = 1,\dots,N-1$.

Para $i = N$ usa-se (2) e obtém-se o mesmo resultado, donde sai que $u^* \in W^{1,p}(Q)$ e $\|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} \le 2. \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}$

Agora, para demonstrarmos (1) e (2) consideremos a sequência $(\eta_k)_k \subset C^\infty(\mathbb{R})$ dada por $\eta_k(t) = \eta(kt)$, $t \in \mathbb{R}$ e $k = 1,2,\dots\dots$, onde η é uma função fixada em $C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 1/2 \\ 1 & \text{se} \quad t > 1 \end{cases}$$

Provemos (1). Devemos provar que $\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^* \varphi$, $1 \le i \le N-1$, e $\forall\ \varphi \in C_c^1(Q)$. Para isso seja $\varphi \in C_c^1(Q)$. Então, para $1 \le i \le N-1$ temos que

(3) $$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad , \qquad \text{onde}$$

$$\psi(x', x_N) := \varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N) .$$

É claro que ψ é de classe C^1, mas não é verdade em geral que supp $\psi \subset Q_+$. Logo ψ não pode ser usada como função teste. No entanto, a função $\eta_k(x_N).\psi(x', x_N) \in C_c^1(Q_+)$, e portanto

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta_k \psi \right] = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_k \psi .$$

Mas $\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta_k \psi \right] = \eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$, e consequentemente

(4) $$\int_{Q_+} u\, \eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_k \psi .$$

Passando ao limite em (4) quando $k \longrightarrow \infty$ (usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue) obtemos que

(5) $$\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi$$

Combinando (3) e (5) vem

$$\int_Q u^* \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\psi = -\int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^* \varphi \quad , \quad \text{como queríamos.}$$

Provemos agora a afirmação (2). Devemos verificar que

$$\int_Q u^* \frac{\partial\varphi}{\partial x_N} = -\int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{\square} . \varphi \quad , \quad \forall\ \varphi \in C_c^1\ (Q).$$

Seja então $\varphi \in C_c^1(Q)$. Temos então que

(6) $$\int_Q u^* \frac{\partial\varphi}{\partial x_N} = \int_{Q_+} u\ \frac{\partial\kappa}{\partial x_N} \quad ,$$

onde $\kappa(x',\ x_N) = \varphi(x',\ x_N) - \varphi(x',\ -x_N)$.

Afirmação: Existe constante $M \geq 0$ tal que $|\kappa(x',\ x_N)| \leq M.\,|x_N|$ em Q.

De fato,

(7) $$\kappa(x',x_N) = \kappa\ [(x',0)+(0,x_N)] =$$

$$=\kappa(x',0) + \frac{\partial\kappa}{\partial x'}\,(x',0).0 + \frac{\partial\kappa}{\partial x_N}\,(x',0)\ x_N + \rho(|x_N|), \text{com}$$

(8) $$\lim_{x_n \to 0} \rho(|x_N|)\Big/|x_N| = 0$$

De (8) segue que existe $\delta \in (0,1)$ tal que $|\rho(|\,x_N|)| \leq$ $\leq |x_n|$ sempre que $0 \leq |x_N| \leq \delta$.

Agora, como $\kappa(x',0) = 0$, tiramos de (7) que

$$\kappa(x',x_N) = \frac{\partial \kappa}{\partial x_N}(x',0)x_N + \rho(|x_N|). \tag{9}$$

Logo, para $\delta \le |x_N| \le 1$, como κ e $\frac{\partial \kappa}{\partial x_N}$ são contínuas em $\overline{Q}$ tiramos que

$$|\rho(|x_N|)| \le |\kappa(x',x_N)| + \left|\frac{\partial \kappa}{\partial x_N}(x',0)\right| |x_N| \le A + B|x_N| \tag{10}$$

onde $\quad A = \max_{\overline{Q}} |\kappa| \quad$ e $\quad B = \max_{\overline{Q}} \left|\frac{\partial \kappa}{\partial x_N}\right|$.

Agora, $A + B|x_N| \le K.|x_N|$, $\forall\ \delta \le |x_N| \le 1$, bastando para isso tomar $K = \frac{A + B\delta}{\delta} \ge 0$, donde sai que

$$|\rho(|x_N|)| \le K.|x_N| , \quad \forall\ \delta \le |x_N| \le 1 .$$

Logo, de (9) sai que

$$|\kappa(x',x_N)| \le \left|\frac{\partial \kappa}{\partial x_N}(x',0)\right| |x_N| + |\rho(|x_N|)| \le$$

$$\le \begin{cases} B|x_N| + |x_N| = (B+1).|x_N|, & \forall\ 0 \le |x_N| \le \delta \\ K|x_N| , & \forall\ \delta \le |x_N| \le 1 \end{cases}$$

donde sai que $|\kappa(x',x_N)| \le M.|x_N|$, $\forall\ 0 \le |x_N| \le 1$, bastando para isso tomar $M = \max\{B + 1, K\}$, o que conclui a afirmação.

Agora, como $\eta_k \kappa \in C_c^1(Q_+)$ temos

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k \kappa) = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \eta_K \kappa . \tag{11}$$

Mas

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k \kappa) = k\eta'(kx_N)\kappa + \eta_k \frac{\partial \kappa}{\partial x_N} \quad .$$

Mostremos que $\displaystyle\int_{Q_+} uk\eta'(k\, x_N)\kappa \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$ (13)

De fato, temos que

$$\left|\int_Q u\, k\, \eta'(k\, x_N)\kappa\right| \le k.MC.\int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u|.x_N dx \le MC.\int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u| dx \text{ , onde}$$

$C = \sup \left\{|\eta'(t)| \text{ , } t \in [0,1]\right\}$ donde segue (13) .

Logo tiramos de (11), (12) e (13) que

$$(14) \qquad \int_{Q_+} u \frac{\partial \kappa}{\partial x_N} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \kappa \quad .$$

Também, como $\displaystyle\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\kappa = \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{\square} \varphi$, segue de (6) e (14) que

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} = -\int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{\square} \varphi \text{ , como queríamos.}$$

Isso termina a demonstração do lema. A mesma coisa pode ser feita se substituimos Q_+ por $\mathbb{R}^N_+$ (sem mudar a demonstração), o que estabelece o teorema (2.4.2) para o caso $\mathbb{R}^N_+$.

Antes de demonstrar o teorema (2.4.2) precisamos introduzir o:

Lema 3.4.4 (Partição da Unidade)

Sejam $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ compacto e $U_1, U_2, \ldots, U_k$ abertos de $\mathbb{R}^N$ tais que $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Então existem funções $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k$ em $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que:

(i) $0 \le \theta_i \le 1 \quad \forall\ i = 0,1,2,\ldots,k \quad$ e $\quad \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 1$ em $\mathbb{R}^N$.

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} \text{supp } \theta_i \text{ é compacto e supp } \theta_i \subset U_i \quad \forall\ i = 1,2,\ldots,k \ . \\ \text{supp } \theta_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma \end{cases}$$

Mais ainda, quando Ω é um aberto limitado e $\Gamma = \partial\Omega$ então $\theta_0\big|_\Omega \in C_c^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [EX] .

A técnica de usar uma partição da unidade para passar de um resultado demonstrado sobre $\mathbb{R}^N_+$ (ou Q_+) à mesma conclusão sobre um aberto regular Ω é muito utilizada. Abaixo teremos ocasião de observar essa técnica na demonstração do teorema (3.4.2).

Demonstração do teorema (3.4.2):

Como $\Gamma = \partial\Omega$ é um compacto de classe C^1, existem abertos $\left\{U_i\right\}_{1\le i\le k}$ de $\mathbb{R}^N$ tais que $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ e existem aplicações $H_i : Q \longrightarrow U_i$ bijetivas tais que $H_i \in C^1(\overline{Q})$, $H_i^{-1} \in C^1(\overline{U}_i)$, $H_i(Q_+) = \Omega \cap U_i$ e $H_i(Q_0) = \Gamma \cap U_i$.

Consideremos as funções $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k$ introduzidas no lema (2.4.4). Dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ escrevemos

$$u = \sum_{i=0}^{k} \theta_i u = \sum_{i=0}^{k} u_i \ , \quad \text{onde} \quad u_i = \theta_i u \ .$$

Vamos prolongar cada uma das u_i a $\mathbb{R}^N$, distinguindo o caso u_0 e o caso u_i, $1 \le i \le k$.

(a) Prolongamento de u_0. Definimos o prolongamento de u_0 a $\mathbb{R}^N$ por $\overline{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x) \ , & x \in \Omega \\ 0 \ , & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$

Recorde que $\theta_0 \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$, porque $\nabla\theta_0 = -\sum_{i=1}^{k} \nabla\theta_i$ tem suporte compacto e $\operatorname{supp}\theta_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$.

Logo, segue da observação anterior ao enunciado do teorema (3.4.2) que $\bar{u}_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e que $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\bar{u}_0) = \theta_0 \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \theta_0}{\partial x_i}\bar{u}$.

Portanto $\| \bar{u}_0 \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C. \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

(b) Prolongamento de u_i, $1 \leq i \leq k$

Consideremos a restrição de u a $U_i \cap \Omega$ e transportemos essa função a Q_+ via aplicação H_i. Mais precisamente, colocamos $v_i(y) = u(H_i(y))$ para $y \in Q_+$. Usando a fórmula de mudança de variáveis para integrais do § 3.3 tiramos que $v_i \in W^{1,p}(Q_+)$. Consideramos então o prolongamento por reflexão de v_i (lema 3.4.3), digamos v_i^*. Desse lema sabemos que $v_i^* \in W^{1,p}(Q)$. Retransportamos agora v_i^* sobre U_i via H_i^{-1}, digamos $w_i(x) = v_i^*(H_i^{-1}(x))$, $x \in U_i$.

Temos então da fórmula de mudança de variáveis que $w_i \in W^{1,p}(U_i)$, $w_i = u$ sobre $U_i \cap \Omega$ e $\| w_i \|_{W^{1,p}(U_i)} \leq C. \| u \|_{W^{1,p}(\Omega \cap U_i)}$.

Finalmente, colocamos para $x \in \mathbb{R}^N$

$$\hat{u}_i(x) = \begin{cases} \theta_i(x) w_i(x) & , \ x \in U_i \\ 0 & , \ x \in \mathbb{R}^N \setminus U_i \end{cases}$$

de maneira que $\hat{u}_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (da observação anterior ao teorema 3.4.2), $\hat{u}_i = u_i$ sobre Ω e $\| \hat{u}_i \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C. \| u \|_{W^{1,p}(\Omega \cap U_i)}$.

Colocando agora $Pu = \bar{u}_0 + \sum_{i=1}^{k} Q_i$ obtemos todas as propriedades citadas no teorema (2.4.2). ■

3.5 O Espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.

Definição: Seja $1 \le p < \infty$. $W_0^{1,p}(\Omega) :=$ (fêcho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$), com a norma induzida de $W^{1,p}(\Omega)$. Denotaremos $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Observações:

(1) Como $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ então $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

(2) Verifica-se que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$, de forma que podemos usar indiferentemente $C_c^\infty(\Omega)$ ao invés de $C_c^1(\Omega)$ na definição de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

TEOREMA 3.5.1 (Desigualdade de Poincaré)

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto limitado. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que $\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C . \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ $\forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$.

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ define uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que é equivalente à norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, e sobre $H_0^1(\Omega)$ a expressão $\int \nabla u \,.\, \nabla v$ define um produto interno cuja norma associada é equivalente à norma $\|u\|_{H_0^1}$.

Demonstração: Brezis [1], página 174.

No teorema abaixo, dado $x \in \mathbb{R}$ colocaremos $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, ié, $[x]$ é a parte inteira de x.

Temos agora os seguintes resultados:

TEOREMA 3.5.2: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto de classe C^1 com $\Gamma = \partial\Omega$ limitado, ou $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Então, se $m - \frac{N}{p} > 0$ temos, colocando $k = \left[m - \frac{N}{p}\right]$, que $W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ (módulo a escolha de um representante contínuo, é claro).

Demonstração: Veja Brezis, pág. 169.

TEOREMA 3.5.3: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado de classe C^1. Então a inclusão $H^m(\Omega) \subset H^n(\Omega)$ é compacta $\forall\, m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Veja [14], página 144.

4: SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES LIMITADOS

Utilizaremos aqui as notações e resultados sobre semigrupos $\{T(t) : t \geq 0\}$ fortemente contínuo de operadores lineares limitados de Pazy, referência [8]. Colocaremos neste parágrafo somente alguns resultados mais importantes tais como o teorema de Hille-Yosida-Phillips e alguns casos particulares.

Definição 4.1: Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Uma família a um parâmetro $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares limitados de X em X é chamada um <u>semigrupo de operadores lineares limitados</u> se:

(i) $T(0) = I$ (operador identidade de X em X).

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall\ t,s \geq 0$ (propriedade de semigrupo)

Definição 4.2: O <u>gerador infinitesimal</u> de um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é o operador linear $A: \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ dado por

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}$$

onde $\mathcal{D}(A) = \{x \in X$: existe o limite acima (na norma de X)$\}$. É imediata a verificação de que $\mathcal{D}(A)$ é subespaço vetorial de X e que A é linear.

Definição 4.3: O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é dito ser:

(a) <u>uniformemente contínuo na origem</u> se $\lim_{t \downarrow 0} \left\| T(t) - I \right\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$

(b) <u>fortemente contínuo</u> se $\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x$, $\forall\, x \in X$. Neste caso diz-se também que $T(t)$ é um <u>C^0- semigrupo</u> de operadores lineares limitados.

(c) <u>uniformemente limitado</u> se $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le M$, $\forall\, t \ge 0$.

TEOREMA 4.4: Seja $\{T(t) : t \ge 0\}$ um C^0- semigrupo em X. Então existem constantes $\omega \ge 0$ e $M \ge 1$ tais que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le Me^{\omega t}$ $\forall\, t \ge 0$.

Demonstração: Ver Pazy, página 4.

Coralário 4.5: Se $\{T(t) : t \ge 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é C^0 - semigrupo então, para todo $x \in X$ fixado, a aplicação $t \longrightarrow T(t)x$ de $[0, \infty)$ em X é contínua.

Demonstração: Ver Pazy, página 4.

TEOREMA 4.6: Seja $\{T(t) : t \ge 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ um C^0 - semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então:

(a) Para todo $x \in X$ temos $T(t)x = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\,ds$ $\forall\, t \ge 0$ (quando $t = 0$ consideramos $h \longrightarrow 0^+$).

(b) Para todo $x \in X$ temos $\int_0^h T(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A)$, $\forall\, h \ge 0$;

(c) Se $x \in \mathcal{D}(A)$ então $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ $\forall\, t \ge 0$ (isto é, o domínio do gerador é invariante pelo semigrupo). Mais ainda,

$$\frac{d}{dt}\left[T(t)x\right] = A.T(t)x = T(t).Ax$$

Observações:

(i) Tomando $t=0$ no item (a) do teorema 4.6 obtemos $x = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds$; agora do item (b) de 4.6 sabemos que $\frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds \in \mathcal{D}(A)$, donde sai que $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Resumindo: todo gerador de C^0- semigrupos em $\mathcal{L}(X)$ é densamente definido em X.

(ii) O item (c) do teorema 4.6 afirma que o problema de encontrar uma função $u:[0,\infty] \longrightarrow X$ contínua em $[0,\infty]$, diferenciável em $(0,\infty)$, com $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t > 0$ e tal que

$$(1)\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t)\ , & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases}$$

tem solução se A for o gerador infinitesimal de um C^0- semigrupo $T(t)$ em X. Neste caso a solução é dada por $u(t) = T(t)u_0$. Convém reforçar que o fato de A gerar C^0- semigrupo é apenas condição suficiente para existência de solução de (1).

Da observação (ii) acima vemos que é importante um resultado que decida se um determinado operador linear A gera ou não C^0- semigrupo em X, e para isso temos o:

TEOREMA 4.7: (Hille-Yosida-Phillips)

Um operador linear $A:\mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C^0- semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ se e somente se as condições (i) e (ii) abaixo se verificam:

(i) A é fechado e densamente definido em X;

(ii) o conjunto resolvente de A, $\rho(A)$, contém o semi - eixo (ω, ∞), e, para $\lambda > \omega$ temos $\|R(\lambda:A)^n\| \leq M.(\lambda-\omega)^{-n}$, para todo n = 1,2,... .

Mais ainda, todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Re\lambda > \omega$ pertence a $\rho(A)$ e $\|R(\lambda:A)^n\| \leq M.(Re\lambda - \omega)^{-n}$ para todo n = 1,2,... .

Demonstração: Ver Pazy, página 20.

Definição 4.8: Uma família a um parâmetro T(t), $-\infty < t < \infty$, de operadores lineares limitados num espaço de Banach X é um <u>C^0- grupo de operadores lineares limitados</u> se:

(i) $T(0) = I$; (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ $\forall\, t,s \in \mathbb{R}$ e (iii) $\lim_{t \to 0} T(t)x = x$ $\forall\, x \in X$.

De maneira análoga ao caso de semigrupos define-se gerador infinitesimal para grupos, com a observação de que agora não é necessária a restrição $t \longrightarrow 0^+$.

É fácil ver que se T(t) é um C^0- grupo de operadores limitados e A é seu gerador infinitesimal então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é C^0-semigrupo com o mesmo gerador. Também é claro que, para $t \geq 0$, $S(t) = T(-t)$ define um C^0- semigrupo de operadores limitados com gerador $-A$.

Reciprocamente, se A e $-A$ são geradores infinitesimais de C^0- semigrupos $T_+(t)$ e $T_-(t)$ respectivamente, então A é gerador infinitesimal de um C^0- grupo $T(t)$ dado por

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t) & \text{se } t \geq 0 \\ T_-(-t) & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

Veremos agora uma motivação que leva a outras condições suficientes para que determinado operador linear A em X seja gerador de um C^0- semigrupo. Para isso consideremos o caso em que X é Hilbert com produto $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $M = 1$ e $\omega = 0$ no teorema 4.7 (isto é, $T(t)$ é de contrações num espaço de Hilbert). Então, se $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$, a condição $\|R(\lambda:A)\| \leq 1/\lambda$ $\forall\ \lambda > 0$ é equivalente a $\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle \leq 0$ $\forall\ u \in \mathcal{D}(A)$. De fato, $\|R(\lambda:A)\| \leq 1/\lambda$ $\forall\ \lambda > 0 \iff \lambda\|u\| \leq \|(\lambda-A)u\|$, $\forall\ u \in \mathcal{D}(A)$ e $\forall\ \lambda > 0 \iff \lambda^2 \langle u,u\rangle \leq \langle(\lambda-A)u, (\lambda-A)u\rangle$ $\forall\ u \in \mathcal{D}(A)$ e $\forall\ \lambda > 0 \iff$ $\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle \leq 1/\lambda \langle Au,Au\rangle$ $\forall\ u \in \mathcal{D}(A)$ e $\forall\ \lambda > 0 \iff \mathrm{Re}\langle Au,u\rangle \leq 0$.

Definição 4.9: Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ no espaço de Hilbert H é <u>dissipativo</u> se $\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle \leq 0$ $\forall\ u \in \mathcal{D}(A)$.

Uma motivação para esse nome segue do fato abaixo:

Suponha que $u(t)$ resolve a equação $\dot{u}(t) = Au(t)$. Temos que $\frac{d}{dt}\left[\|x(t)\|^2\right] = \frac{d}{dt}\langle x(t), x(t)\rangle = 2\langle\dot{x}(t),x(t)\rangle = 2\langle Ax(t),x(t)\rangle$.

Assim, $d/dt\left[\|x(t)\|^2\right] \leq 0 \iff \langle Ax(t),x(t)\rangle \leq 0$, e a propriedade $d/dt\left[\|x(t)\|^2\right] \leq 0$ bem justifica o nome operador dissipativo para A.

TEOREMA 4.10 (Lumer-Phillips): Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ linear e densamente definido no espaço de Hilbert H. Se existe $\lambda_0 > \omega \geq 0$ tal que $H = Im(\lambda_0 - A)$ e se $Re\langle Ax, x\rangle \le \omega\|x\|^2$ $\forall$ $x \in \mathcal{D}(A)$ então A é gerador infinitesimal de um C^0- semigrupo $T(t)$ em H tal que $\|T(t)\| \le e^{\omega t}$. Em particular, o mesmo ocorre quando A é dissipativo.

Demonstração: Veja Pazy, página 14.

Corolário 4.11: Seja A linear e densamente definido no espaço de Hilbert H. Se $Re\langle Ax, x\rangle = 0$ $\forall$ $x \in \mathcal{D}(A)$ e se existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 \pm A) = H$ então A gera C^0- grupo de contrações em H.

Demonstração: Imediata.

5: SEMIGRUPOS ANALÍTICOS E POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS DE OPERADORES

Definição 5.1: Seja $\Delta = \left\{ z : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2,\ \text{com } \varphi_1 < 0 < \varphi_2 \right\}$ e, para cada $z \in \Delta$, seja $T(z) \in \mathcal{L}(X)$, X um espaço de Banach. A família $\left\{ T(z) : z \in \Delta \right\}$ é um <u>semigrupo analítico</u> em Δ se:

(i) $z \longrightarrow T(z)$ de Δ em $\mathcal{L}(X)$ é analítica;

(ii) $T(0) = I$; (iii) $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in \Delta}} T(z)x = x \ \forall\, x \in X$, e

(iv) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2) \quad \forall\, z_1, z_2 \in \Delta$.

Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ será chamado <u>analítico</u> se existir uma extensão analítica a um setor Δ contendo o eixo real não-negativo. O próximo teorema dá condições suficientes para que um operador linear gere semigrupo analítico.

TEOREMA 5.2: Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ linear, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Se:

(i) o conjunto resolvente de A contém o setor $S_\varphi = \left\{ \lambda \neq 0 : |\arg \lambda| < \varphi + \pi/2 \right\}$ com $0 < \varphi < \pi/2$, e

(ii) $\| R(\lambda : A) \| \leq M/|\lambda| \quad \forall\, \lambda \in S_\varphi$, então A gera semigrupo analítico $\{T(t) : t \geq 0\}$, com extensão analítica ao setor $\Delta_\varphi = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \varphi \right\}$.

Demonstração: Ver Friedman, [9].

No restante desse parágrafo objetivamos apenas apresentar o material necessário sobre potências fracionárias de operadores, material este que será utilizado num exemplo posterior sobre compacidade do fluxo de um determinado sistema dinâmico. Como esse é o único objetivo seremos breves na exposição, e a maioria dos resultados não serão demonstrados. O leitor interessado nos detalhes pode consultar [Lecture Notes in Math., 840, Dan Henry].

Definição 5.3: Seja X Banach e $A:\mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ linear. Dizemos que A é <u>setorial</u> se A é fechado, densamente definido e tal que existem constantes $\varphi \in (0, {}^{\pi}\!/2)$, $M \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$ de sorte que o setor $S_{a,\varphi} = \{\lambda : \varphi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$ está contido em $\rho(A)$ e, para $\lambda \in S_{a,\varphi}$, $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq M/|\lambda - a|$.

Note da definição que se A é setorial então -A gera semigrupo analítico. De fato, temos $S_{a,\varphi} \subset \rho(A)$, donde $-S_{a,\varphi} \subset -\rho(A) = \rho(-A)$, e portanto $a - S_{a,\varphi} \subset a + \rho(-A) = \rho(aI - A)$, ou seja, chamando $B = aI - A$ temos $\rho(B) \supset a - S_{a,\varphi} \supset S_\theta$ com $\theta \in (0, \frac{\pi}{2} - \varphi)$. Também, para $\lambda \in S_\theta$ temos $\left\|(\lambda I - B)^{-1}\right\| = \left\|[(a-\lambda)I - A]^{-1}\right\| \leq M/|(a-\lambda)-a|$, pois $a - \lambda \in S_{a,\varphi}$. Logo $\left\|(\lambda I - B)^{-1}\right\| \leq M/|\lambda|$ $\forall \lambda \in S_\theta$. Assim, do teorema 5.2 segue que B gera semigrupo analítico S(t). Agora, colocando $T(t) = e^{-at}S(t)$ temos que T(t) é analítico e -A é seu gerador infinitesimal. Na verdade podemos concluir mais que isso, como diz o teorema abaixo.

TEOREMA 5.4: Se A é setorial então -A gera semigrupo analítico em X. Mais ainda, se $\operatorname{Re} \sigma(A) > a$, isto é, se $\operatorname{Re} \lambda > a$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$, então

$\left\|e^{-tA}\right\| \le Ce^{-at}$ e $\left\|Ae^{-tA}\right\| \le \frac{C}{t}\, e^{-at}$ para todo $t > 0$ e alguma constante C.

Demonstração: Para as estimativas acima veja [10], página 21.

Definição 5.6 (Potências Fracionárias)

Seja A setorial no espaço de Banach X e suponha que $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$. Então, para $\alpha > 0$ coloque

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-At}\, dt, \quad \text{onde } \Gamma \text{ é a função gama.}$$

Observação: Em [10] prova-se que quando A é como acima então, para cada $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado em X, o qual é injetor e satisfaz $A^{-\alpha}.A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$ para todos $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Assim, faz sentido a definição de potências fracionárias positivas, como abaixo.

Definição 5.7: (continuação da definição 5.6)

Para A como antes e $\alpha > 0$ definamos A^{α} = (inversa de $A^{-\alpha}$), com $\mathcal{D}(A^{\alpha}) = \operatorname{Im}(A^{-\alpha})$. Colocamos também A^{0} = (identidade em X).

Consideraremos agora uma topologia nos espaços $X^{\alpha} = \mathcal{D}(A^{\alpha})$ e apresentaremos um resultado sobre inclusão compacta.

Definição 5.8: Seja A setorial no espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$, e defina, para cada $\alpha \ge 0$, $X^{\alpha} = \mathcal{D}(A_1^{\alpha})$ com a norma do gráfico, isto é,

$\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|$, onde $A_1 = A + aI$, com $\underline{a}$ escolhido de modo que Re $\sigma(A_1) > 0$

É evidente que existe tal $\underline{a}$, pois A é setorial e $\sigma(A + aI) = a + \sigma(A)$.

Observação: Escolhas distintas de $\underline{a} \in \mathbb{R}$ nos dão normas equivalentes em X^α, de modo que vamos omitir a dependência com a escolha de $\underline{a}$. Temos agora o:

TEOREMA 5.9: Seja A setorial no espaço de Banach X. Então $\left[X^\alpha, \|\cdot\|_\alpha\right]$ é Banach para $\alpha \geq 0$. Mais ainda, para $\alpha \geq \beta > 0$, X^α é um subespaço denso de X^β com inclusão contínua. Além disso, se A tem resolvente compacto, a inclusão $X^\alpha \subset X^\beta$ é compacta se $\alpha > \beta \geq 0$.

Demonstração: Veja [10], página 29.

Para finalizar esta secção colocaremos o resultado abaixo que será utilizado posteriormente.

TEOREMA 5.10: Seja $A: \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ setorial e suponha que Re $\sigma(A) > > \delta > 0$. Então:

(i) Para $\alpha \geq 0$ existe constante $C_\alpha < \infty$ tal que $\|A^\alpha e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\alpha \, t^{-\alpha} \, e^{-\delta t} \;\; \forall \, t > 0$;

(ii) $e^{-At} : X \longrightarrow \mathcal{D}(A^\alpha) \;\; \forall \, t > 0$ e $\forall \, \alpha \geq 0$;

(iii) $e^{-At} A^\alpha x = A^\alpha \, e^{-At} x \;\; \forall \, x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$.

Demonstração: Ver [10] pág. 26 e/ou Pazy, pág. 74.

CAPÍTULO UM

APLICAÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

1.0: PROBLEMAS DE EVOLUÇÃO ABSTRATOS

1.0.1: O Problema de Cauchy Homogêneo

Seja X Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ linear. Dado $x \in X$ o problema de Cauchy abstrato com condição inicial x consiste em encontrar uma solução u(t) para o problema

$$(1) \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) \quad , \quad t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

onde por solução entendemos uma função $u: [0,T) \longrightarrow X$, $0 < T \leq \infty$, com u contínua em $[0,T)$, diferenciável em $(0,T)$, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \in (0,T)$ e tal que (1) fica satisfeita. Do que vimos no parágrafo 4, mais precisamente no teorema 4.6, sabemos que se A gera C^0- semigrupo T(t) então (1) tem solução para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Mais ainda, $u(t) = T(t)x$ resolve (1). Não é difícil provar que para $x \in \mathcal{D}(A)$, $u(t) = T(t)x$ é a única solução de (1).

Observação: Vê-se em Pazy, página 104, que se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo diferenciável (isto é, $t \longrightarrow T(t)x$ é diferenciável para todo $x \in X$) então (1) tem solução única $\forall\, x \in X$. Em particular o mesmo ocorre se A gera semigrupo analitico, pois se $t \longrightarrow T(t)x$ é analítica $\forall\, x \in X$ então $t \longrightarrow T(t)x$ é diferenciável $\forall\, x \in X$. Quando A gera C^0- semigrupo T(t) que não é diferenciável então em geral, se $x \notin \mathcal{D}(A)$, o problema (1) não tem solução. Nesse caso a função $t \longrightarrow T(t)x$ é tida como uma solução fraca de (1), a qual chamamos <u>solução mild</u>.

1.0.2 O Caso Semi-Linear

Consideraremos nessa seção a equação semi-linear

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t,u(t)) \ , \ t > t_0 \\ u(t_0) = x \end{cases}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C^0- semigrupo $T(t)$ e $f\colon (0,T) \times X \longrightarrow X$. Por solução de (2) entendemos uma aplicação $u : [t_0,t_0 + T) \longrightarrow X$ a qual é contínua em $[t_0,t_0+ T)$, diferenciável e $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ em $(t_0,t_0 + T)$ e tal que (2) se verifica.

Suponhamos que (2) tem solução diferenciável u e considere, para $t \in (t_0,t_0 + T)$ fixo a aplicação $g\colon[t_0,t) \longrightarrow X$ dada por $g(s) = T(t-s)u(s)$. Então $g'(s) = T(t-s)f(s,u(s))$, e integrando de t_0 a t obtemos $u(t) = T(t-t_0)x + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds$. Note que esta expressão está bem definida bastando para isso que $f \in L^1(t_0,t_0 + T{:}X)$. Neste caso pode acontecer que ela não seja solução de (2) conforme a definição acima, mas apesar disso é natural considerá-la como uma solução fraca de (2). Definimos então:

Definição 1.0.2.1: Seja A o gerador infinitesimal de um C^0- semigrupo $T(t)$ em X, seja $x \in X$ e $f \in L^1(t_0,t_0 + T : X)$. A função $u \in$

$C([t_0,t_0+T):X)$ dada por $u(t) = T(t-t_0)x + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds$ é chamada solução mild de (2).

Tal expressão é conhecida como fórmula da variação das constantes. Observe que quando $f \equiv 0$ a definição de solução mild coincide com a definição já dada para o caso homogêneo.

TEOREMA 1.0.2.2: Se $f : (0,T) \times X \longrightarrow X$ é contínua e localmente lipschitziana na segunda variável [isto é, dado $(t_0,x_0) \in (0,T) \times X$ existem $\sigma > 0$ e $K > 0$ tais que $\|f(t,x) - f(t,y)\| \le K \|x-y\|$ para todo $|t-t_0| \le \sigma$, $\|x-x_0\| \le \sigma$ e $\|y-x_0\| \le \sigma$] então, dado $(t_0,x_0) \in (0,T) \times X$ existem $t_1 > t_0$ e uma solução mild $u : [t_0,t_1] \longrightarrow X$ do problema (2). Mais ainda, se $\tilde{u} : [t_0,\tilde{t}_1] \longrightarrow X$ é uma outra solução mild de (2) então $u(t) = \tilde{u}(t)$ $\forall$ $t \in [t_0, \min\{t_1,\tilde{t}_1\}]$.

Demonstração: Veja [10].

Observação: De modo análogo às EDO's obtemos que para cada (t_0,x_0) existe um intervalo maximal $[t_0,t_1)$ de definição da solução $u(t)$, e mais ainda, se $f : (0,\infty) \times X \longrightarrow X$ leva conjuntos limitados em conjuntos limitados então $t_1 < \infty$ implica que $\limsup_{t \to t_1^-} \|u(t)\| = \infty$, isto é, $u(t)$ deixa qualquer compacto. Essa propriedade é útil para verificarmos se a solução, quando existe, está definida para todo $t \ge t_0$. Uma condição suficiente é, por exemplo, verificar que $u(t)$ é limitada. Em geral, a técnica utilizada para demonstrar limitação de soluções é lançar mão dos funcionais de Lyapunov. Nos capítulos 1 e 2 que seguirão faremos isso em detalhes num exemplo concreto, a saber, numa equação da onda com termo dissipativo.

O teorema abaixo dá agora condições suficientes para existência de solução forte.

TEOREMA 1.0.2.3 Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ setorial, $0 \leq \alpha < 1$, e $f : U \longrightarrow X$, com $U \subset \mathbb{R} \times X^{\alpha}$ aberto. Suponhamos que $f(t,x)$ é localmente Hölder contínua em t e localmente Lipschitziana em x, isto é, dado $(t_0,x_0) \in U$ existe vizinhança $V \subset U$ de (t_0,x_0) tal que para todo $(t,x) \in V$ e $(s,y) \in V$ vale

$$\left\| f(t,x) - f(s,y)\right\| \leq L.\left(|t-s|^{\theta} + \|x-y\|_{\alpha}\right) ,$$

para algumas constantes $L > 0$, $\theta > 0$. Então, para qualquer $(t_0,x_0) \in U$ existe $T = T(t_0,x_0) > 0$ tal que o problema

$$(3) \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t,u(t)), \ t > t_0 \\ u(t_0) = u_o \end{cases}$$

tem uma única solução, isto é, existe uma única $u : [t_0,t_0 + T) \longrightarrow X$ tal que $u(t_0) = u_0, (t,u(t)) \in U$ e $u(t)) \in \mathcal{D}(A)$ para $t_0 < t < t_0 + T$, du/dt existe, $t \longrightarrow f(t,u(t))$ é localmente Hölder contínua, $\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(t,u(t))\|dt < \infty$ para algum $\rho > 0$, e (3) se verifica em $(t_0,t_0 + T)$.

Demonstração: Veja Lecture Notes in Math., 840, página 54.

Vale a mesma observação anterior sobre o intervalo maximal das soluções.

1.0.3 Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento (EDFR)

Sejam $r \geq 0$ e $C = C([-r,0]; \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas de $[-r,0]$ em $\mathbb{R}^n$, munido da topologia da convergência uniforme, ié, munido com a norma do supremo

$$\|x\|_C = \sup\left\{ \|x(\theta)\| : -r \leq \theta \leq 0\right\} = \text{máx}\left\{ \|x(\theta)\| : -r \leq \theta \leq 0\right\},$$

onde $\|\cdot\|$ denota qualquer norma em $\mathbb{R}^n$. Dados $A > 0$ e $x : [-r,A] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definiremos $x_t \in C$ para $t \in [0,A]$ pondo $x_t(\theta) := x(t+\theta)$ para $-r \leq \theta \leq 0$. Seja ainda $f : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Definição 1.0.3.1: Uma <u>equação diferencial funcional retardada</u> (EDFR) é uma relação da forma

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = f(x_t) \qquad , \qquad t \in [0,A) \quad ,$$

onde a derivada no extremo é a derivada à direita.

Definição 1.0.3.2: Uma <u>solução de (1) com condição inicial $\varphi \in C$</u> é uma função $x(\cdot) = x(\cdot,\varphi) : [-r,A) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $A > 0$, a qual é derivável em $[-r,A)$, $\dot{x}(t) = f(x_t)$ $\forall$ $t \in [0,A)$, e tal que $x_0 = \varphi$, isto é, $x(\theta) = \varphi(\theta)$ $\forall$ $-r \leq \theta \leq 0$.

TEOREMA 1.0.3.3 (Existência e Unicidade de Solução):

Seja $\Omega \subset C$ aberto e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. Se $\varphi \in \Omega$ então existe uma solução $x(\cdot) = x(\cdot,\varphi)$ de (1) com condição inicial φ.

Mais ainda, se f for lipschitziana em cada compacto $K \subset \Omega$ então para cada $\varphi \in \Omega$ existe uma única tal solução.

Demonstração: Veja [3], páginas 41 e 42.

TEOREMA 1.0.3.4: (Dependência contínua com relação às condições iniciais)

Seja $\Omega \subset C$ aberto, $\varphi^{\circ} \in \Omega$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua.

Suponha que x° é solução de $\dot{x}=f(x_t)$ com condição inicial φ°, a qual suporemos ser única e definida em $[-r,A]$. Seja $W^{\circ} \subset \Omega$ o compacto definido por $W^{\circ} = \left\{x_t^{\circ} : t \in [0,A]\right\}$, e V° uma vizinhança de W° na qual f é limitada. Se $\left\{\varphi_k\right\}_{k\geq 1}$ satisfaz $\varphi^k \longrightarrow \varphi^{\circ}$ em Ω quando $k \longrightarrow \infty$, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $k \geq k_0$, a equação $\dot{x} = f(x_t)$ com $x_0 = \varphi^k$ tem solução $x^k = x^k(\cdot,\varphi^k)$ definida em $[-r,A]$ e $x^k \longrightarrow x^{\circ}$ uniformemente em $[-r,A]$.

Demonstração: Veja [3], página 41.

TEOREMA 1.0.3.5: Seja $\Omega \subset C$ aberto e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. Se $[-r,A)$, $0 < A < \infty$, é o intervalo maximal de definição da solução de $\dot{x} = f(x_t)$ (isto é, não existe solução definida em $[-r,B)$ com $B > A$) então, para todo compacto $K \subset \Omega$ existe t_K tal que $x_t \notin K$ para todo $t_K \leq t < A$.

Demonstração: Veja [3], página 42.

O teorema acima dá uma condição suficiente para que a solução $x(\cdot) = x(\cdot,\varphi)$ esteja definida para todo $t \geq 0$, a saber, basta verificar a compacidade de $\overline{\{x_t : 0 \leq t < A\}}$.

1.1: Regularidade das soluções de $\lambda u - \Delta u = f$

O objetivo deste parágrafo é mostrar que o conjunto resolvente de $\Delta : H^2 \cap H^1_0 \longrightarrow L^2$ contém $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$, onde $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \partial^2/\partial x_i^2$ é o operador Laplaciano, e mais ainda, que $R(\lambda:\Delta)$ resulta compacto para todo $\lambda \geq 0$.

1.1.1: Existência de Solução Fraca para o Problema

$$(1) \begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$ é dada, e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto de classe C^2 com $\Gamma = \partial\Omega$ limitado (ou $\Omega = \mathbb{R}^N_+$).

Vamos iniciar tornando preciso o conceito de solução fraca de (1) comentada no início do parágrafo 3 do capitulo 0.

Digamos que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma solução clássica de (1). Então

$$\int_\Omega \lambda\, u\, \Phi - \int_\Omega \Delta\, u\, \Phi = \int_\Omega f\, \Phi \quad , \quad \forall\, \Phi \in \mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega).$$

Usando integração por partes e o fato que $u = 0$ em Γ obtemos

$$\int_\Omega \lambda\, u\, \Phi + \int_\Omega \nabla u . \nabla\Phi = \int_\Omega f\, \Phi \quad , \quad \forall\, \Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Também, usando o fato que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H^1_0(\Omega)$ obtemos

$$(2) \quad \int_\Omega \lambda\, u\, v + \int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega f v \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

Isso sugere a:

Definição 1 (Solução Fraca para (1))

Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (1) se (2) é satisfeita para toda função $v \in H_0^1(\Omega)$.

Do que foi feito acima é claro então que toda solução clássica é solução fraca.

Quem garante que a definição acima é boa é o:

TEOREMA 1 (Existência e Unicidade de Solução Fraca para (1))

Dada $f \in L^2(\Omega)$ existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca de (1).

Demonstração: É só usar o teorema de Lax - Milgram (veja teorema 1.11) com $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v + \int_\Omega \lambda\, u\, v$, o qual é claramente bilinear e com o funcional linear $\varphi = \varphi_f : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $<\varphi, v> = \int_\Omega fv$, o qual está bem definido e é contínuo pela desigualdade de Hölder. Basta

verificar que a é contínua e coerciva. A coercividade é imediata, pois $a(v,v) = \int_\Omega \|\nabla v\|^2 + \lambda \int_\Omega v^2 \geq \int_\Omega \|\nabla v\|^2 = \|v\|^2_{H_0^1}$, $\forall\ v \in H_0^1(\Omega)$. A continuidade também sai fácil usando a caracterização por sequências. ∎

Podemos então pensar na aplicação $T : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ que para cada $f \in L^2(\Omega)$ associa a única função $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca de (1).

É fácil ver, usando o teorema do gráfico fechado, que T resulta contínua.

De fato, seja $(f_n, u_n) \longrightarrow (f, u)$ em $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Devemos verificar que $f \in L^2(\Omega)$, o que é claro, e que $u = Tf$. Ora, para cada n temos que

$$\int_\Omega \nabla u_n . \nabla v + \lambda . \int_\Omega u_n v = \int_\Omega f_n\, v \quad , \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \ ,$$

logo, no limite obtemos,

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v + \lambda \, . \int_\Omega uv = \int_\Omega f . v \quad , \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

ou seja, $u = Tf$. Temos então o:

Corolário 1: Dada $f \in L^2(\Omega)$ então a única solução fraca de (1) satisfaz $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C . \|f\|_{L^2(\Omega)}$ para alguma constante $C \ge 0$ independente de f.

Alternativamente, podemos concluir a continuidade de T do seguinte modo:

$$\alpha \|u\|^2_{H_0^1} \le \left| a(u, u) \right| = \left| \varphi_f(u) \right| \le \|\varphi_f\|_{H_0^{1*}} \, . \, \|u\|_{H_0^1}$$

isto é,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C.\|\varphi_f\|_{H_0^1(\Omega)^*} \text{ ; agora, como } \left|\varphi_f(v)\right| = \left|\int_\Omega f\ v\right| \leq \|f\|_{L^2}.\|v\|_{L^2}$$

então $\|\varphi_f\| \leq \|f\|_{L^2}$. Portanto, $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M.\|f\|_{L^2(\Omega)}$ ■

Mais geralmente (e não com mais esforço) temos o:

TEOREMA 2 **(Equação Elíptica de 2a. Ordem)**

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado. Dadas as funções $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq N$ verificando a <u>condição de elipticidade</u>

$$(3) \qquad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\ \zeta_i\zeta_j \geq \alpha\ \|\zeta\|^2 \quad \forall\ x \in \Omega\ , \quad \forall\ \zeta \in \mathbb{R}^N, \quad \text{com } \alpha > 0\ ,$$

e dada função $a_o(x) \in C(\bar{\Omega})$, $a_o(x) \geq 0\ \forall\ x \in \Omega$, então o problema de encontrar uma função $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$(4) \qquad \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + \lambda\ a_o\ u = f \quad \text{em } \Omega \\ \qquad\qquad\qquad u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

admite uma única solução fraca, isto é, existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(5) \qquad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial v}{\partial x_j} + \lambda \int_\Omega a_o\ u\ v = \int_\Omega f\ v \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$$

Observação: o problema (1) é um caso particular, no qual $a_{ij} \equiv 0\ \ \forall\ i \neq j$, $a_{ii} \equiv 1\ \ \forall\ i$ e $a_o \equiv 1$.

Demonstração do Teorema 2: Basta usar Lax - Milgram com o funcional linear contínuo $\varphi = \varphi_f : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $\langle\varphi, v\rangle = \int_\Omega f\ v$ e com a forma bilinear $a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \lambda \int_\Omega a_0 uv$, a qual é contínua e coerciva, sendo que a coercividade é consequência da condição de elipticidade junto com a desigualdade de Poincaré. ■

De maneira análoga à anterior, mostra-se que

$$\|u\|_{H^1} \le C.\|f\|_{L^2} \quad .$$

1.1.2: Regularidade das Soluções Fracas

TEOREMA 3: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto limitado de classe C^2 (ou $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ ou $\Omega = \mathbb{R}^N$), e seja $f \in L^2(\Omega)$. Então a única função $u \in H_0^1(\Omega)$ verificando

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi + \lambda\int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad , \quad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{6}$$

é tal que $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2} \le C\ \|f\|_{L^2}$, onde C é uma constante que só depende de Ω.

Ou seja, o teorema (3) está dizendo que a aplicação

$$\lambda\ I - \Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

é invertível e tem inversa contínua.

Demonstração: Consideremos inicialmente $\lambda > 0$. Dividiremos a demonstração em três casos, a saber:

(a) $\Omega = \mathbb{R}^N$; (b) $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ e (c) Caso Geral.

Caso (a): Usaremos o <u>método das translações</u>

Dado $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos

$D_h u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por $D_h u = (\tau_h u - u)/|h|$, isto é ,

$D_h u(x) = (u(x+h) - u(x))/|h|$. É de fácil verificação as identidades :

$$\cdot \quad D_{-h}(D_h w) = \frac{-1}{|h|} \cdot \left[D_h w + D_{-h} w\right]$$

$$\cdot \quad \int D_{-h} w = -\int D_h w$$

$$\cdot \quad \int v D_{-h} D_h w = \int D_h v . D_h w$$

$$\cdot \quad D_h\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(D_h w\right)$$

Também é claro que $H^1_0(\mathbb{R}^N)$ é invariante por translações, isto é, $u \in H^1_0(\mathbb{R}^N)$ implica $D_h u \in H^1_0(\mathbb{R}^N)$. Logo, levando $\varphi = D_{-h}(D_h u)$ em

(6) ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u.\nabla\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[D_{-h}D_h u\right] = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_k} D_{-h}D_h\left[\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} D_h\left[\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] D_h\left[\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[D_h u\right] \frac{\partial}{\partial x_k}\left[D_h u\right] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \langle\nabla(D_h u) \ , \ \nabla(D_h u)\rangle_{\mathbb{R}^N} = \int_{\mathbb{R}^N} \left\|\nabla(D_h u)\right\|^2 ; \tag{7}$$

Por outro lado,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u\ \varphi = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u.D_{-h}D_h u = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} D_h u.D_h u = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (D_h u)^2 = \lambda.\left\|D_h u\right\|^2_{L^2} \tag{8}$$

Portanto, de (7) e (8) vemos que (6) se transforma em

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left\|\nabla D_h u\right\|^2 + \lambda.\int_{\mathbb{R}^N} \left|D_h u\right|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f\ D_{-h}(D_h u), \tag{9}$$

e usando a desigualdade de Hölder no segundo membro vem

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left\|\nabla D_h u\right\|^2 + \lambda.\int_{\mathbb{R}^N} \left|D_h u\right|^2 \leq \left\|f\right\|_{L^2} . \left\|D_{-h}(D_h u)\right\|_{L^2} . \tag{10}$$

Por outro lado, usando o teorema (3.3.7) do parágrafo 3 com $p = 2$ e $D_h u$ no lugar de u obtemos

$$\left\| D_{-h}(D_h u) \right\|_{L^2(\omega)} \leq \left\| \nabla(D_h u) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall\ \omega \subset\subset \mathbb{R}^N$$

Como $\omega \subset\subset \mathbb{R}^N$ é arbitrário vem

$$\left\| D_{-h}(D_h u) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \left\| \nabla(D_h u) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Daí (10) fica

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left\| \nabla(D_h u) \right\|^2 + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left| D_h u \right|^2 \leq \left\| f \right\|_{L^2} \cdot \left\| \nabla(D_h u) \right\|_{L^2} . \tag{11}$$

Agora, tomando $C = \text{máx}\{1,\ 1/\lambda\}$ ficamos com

$$\left\| D_h u \right\|_{H^1}^2 \leq C \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left\| \nabla(D_h u) \right\|^2 + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left| D_h u \right|^2 \right] \leq C \left\| f \right\|_{L^2} \left\| \nabla(D_h u) \right\|_{L^2} \leq C \left\| f \right\|_{L^2} \left\| D_h u \right\|_{H^1},$$

isto é ,
$$\left\| D_h u \right\|_{H^1} \leq C \left\| f \right\|_{L^2} . \tag{12}$$

Agora,
$$\left\| D_h \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right\|_{L^2} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (D_h u) \right\|_{L^2} \leq$$

$$\leq \left\| D_h u \right\|_{H^1} \leq C \left\| f \right\|_{L^2} , \qquad \forall\ i = 1,2,\ldots,N \tag{13}$$

Logo, usando novamente o teorema (3.3.7) do parágrafo 3 com $p = 2$ e $\partial u / \partial x_i$ em lugar de u obtemos que $\partial u / \partial x_i \in H^1(\Omega)$

$\forall\ i = 1,\dots,N$, isto é, $u \in H^2(\Omega)$. Temos também que $\|u\|_{H^2} \le M\,\|f\|_{L^2}$ para alguma constante $M \ge 0$. De fato, tomando $h = |h|e_k$ em (13) com $k \in \{1,2,\dots,N\}$, e fazendo $|h| \longrightarrow 0$ vem $\left\| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \right\|_{L^2} \le C\,.\,\|f\|_{L^2}$, $\forall\ 1 \le i,k \le N$.

Agora, do corolário (1) sabemos que $\|u\|_{H^1} \le C.\|f\|_{L^2}$, donde sai que $\|u\|_{H^2} = \|u\|_{H^1} + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2} \le M.\|f\|_{L^2}$, cqd ■

Caso b: $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Usaremos novamente o método das translações, mas somente nas direções tangenciais ao bordo de Ω, isto é, para $h \in \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$, $h \ne 0$. Para tais h escreveremos $h /\!/ \Gamma$, e diremos que h é paralelo ao bordo. É lógico que se $u \in H^1_0(\Omega)$ então $\tau_h u \in H^1_0(\Omega)$ $\forall\ h /\!/ \Gamma$, isto é, $H^1_0(\Omega)$ é invariante por translações tangenciais. Agora, tomando $h /\!/ \Gamma$ com $h \ne 0$ e $\varphi = D_{-h}(D_h u)$, onde $u \in H^1_0(\Omega)$ é a única função que satisfaz (6), e levando tal φ em (6) obtemos, como no item (a),

$$\int_\Omega \|\nabla(D_h u)\|^2 + \lambda.\int_\Omega |D_h u|^2 = \int_\Omega f.D_{-h}(D_h u)\ . \tag{14}$$

Precisaremos agora do:

Lema 1: $\|D_h v\|_{L^2} \le \|\nabla v\|_{L^2}$ $\quad \forall\ v \in H^1_0(\Omega)$, $\forall\ h /\!/ \Gamma$.

Demonstração: Começamos com $v \in C^\infty_c(\Omega)$ e copiamos a demonstração do teorema (3.3.7) do parágrafo 3. Daí, tendo estabelecido o lema para $v \in$

$C_c^\infty(\Omega)$, o caso em que $v \in H_0^1(\Omega)$ sai da seguinte maneira. Pelo teorema de Friedricks existe sequência v_n em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_n\big|_\Omega \longrightarrow v$ em $L^2(\Omega)$ e $\nabla v_n\big|_\omega \longrightarrow \nabla v\big|_\omega$ em $L^2(\omega)$ para todo $\omega \subset\subset \Omega$. Daí, como

$\|\tau_h v_n - v_n\|_{L^2(\omega)} \le \|h\|^2 . \int_\Omega \|\nabla v_n\|^2$ $n = 1,2,\ldots$ (veja teorema (3.3.7) do parágrafo 3), e tomando limite quando $n \to \infty$ obtemos:

$\|\tau_h v - v\|^2_{L^2(\omega)} \le \|h\|^2 . \int_\Omega \|\nabla v\|^2 = \|h\|^2 . \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}$, e como $\omega \subset\subset \Omega$ é arbitrário obtemos o lema 1. ■

Logo, obtemos de (14) que

$$\int_\Omega \|\nabla(D_h u)\|^2 + \lambda . \int_\Omega |D_h u|^2 = \int_\Omega f . D_{-h}(D_h u) \le \|f\|_{L^2} . \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2} \le$$

$$\le \|f\|_{L^2} . \|\nabla(D_h u)\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2} . \|D_h u\|_{H^1} . \qquad (15)$$

Daí, tomando $C = \text{máx}\,\{1, 1/\lambda\}$ conseguimos, como no caso (a), que

$$\|D_h u\|_{H^1} \le C . \|f\|_{L^2} . \qquad (16)$$

Sejam agora $1 \le j \le N$, $1 \le k \le N-1$, $h = |h| e_k$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. É fácil ver que $\int_\Omega D_h\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\varphi = -\int_\Omega u\, D_{-h}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)$, e portanto

$$\left|\int_\Omega u\, D_{-h}\left(\partial\varphi/\partial x_j\right)\right| = \left|\int_\Omega D_h\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\varphi\right| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left\| D_h\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2} \leq$$

$\|D_h u\|_{H^1} \cdot \|\varphi\|_{L^2} \leq C.\|f\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2}$, onde usamos (16) na última desigualdade.

Assim, tomando limite quando $|h| \longrightarrow 0$ e usando convergência dominada, obtemos que

$$\left|\int_\Omega u\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_j}\right| \leq C.\|f\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2}, \quad \forall\ 1 \leq j \leq N, \quad \forall\ 1 \leq k \leq N-1.$$

Mostremos agora que também temos

$$\left|\int_\Omega u\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_N^2}\right| \leq M \cdot \|f\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2} \qquad \text{para alguma constante } M \geq 0.$$

De (6) obtemos que $-\int_\Omega u\,\Delta\varphi + \lambda \cdot \int_\Omega u\,\varphi = \int_\Omega f\,\varphi$,

$\forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, donde

$$\int_\Omega u\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_N^2} = \lambda \cdot \int_\Omega u\varphi - \int_\Omega f\varphi - \sum_{i=1}^{N-1}\int_\Omega u\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2},$$

e portanto,

$$\left|\int_\Omega u\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_N^2}\right| \leq \left|\lambda\int_\Omega u\varphi - \int_\Omega f\varphi\right| + \sum_{i=1}^{N-1}\left|\int_\Omega u\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\right| \leq M.\|f\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2}.$$

Logo conseguimos que $\left|\int_\Omega u\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_j}\right| \leq K \cdot \|f\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2}$

$\forall\ 1 \leq k, j \leq N$, para alguma constante $K \geq 0$.

Também temos que

$$\left| \int_\Omega u \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right| = \left| \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \, . \, \varphi \right| \le \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2} . \, \|\varphi\|_{L^2} \le$$

$$\le \|u\|_{H^1} . \, \|\varphi\|_{L^2} \le M . \|f\|_{L^2} . \, \|\varphi\|_{L^2} \quad , \quad \forall \, \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \ \text{ e } \forall \, j = 1, \ldots, N \, .$$

Logo temos provado que

$$\left| \int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \right| \le M . \|f\|_{L^2} . \, \|\varphi\|_{L^2} \quad \forall \, \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \ \text{ e } \ \forall \, \alpha \in \mathbb{N}^N \ \text{ com } |\alpha| \le 2 \ .$$

Assim, usando a proposição (3.3.5) do parágrafo 3, ou mais especificamente o seu corolário, concluimos que $u \in H^2(\Omega)$ e que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le M . \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad .$$

(c) Caso Geral:

Usaremos uma part'ção da unidade e escreveremos $u = \sum_{i=0}^{k} \theta_i u$ como no teorema (3.4.2) do parágrafo 3. Nosso objetivo é provar então que $\theta_i u \in H^2(\Omega)$ para todo $i=0,1,\ldots,k$.

(c.1) Estimativas no interior ($i = 0$):

Como $\theta_o \Big|_\Omega \in C_c^\infty(\Omega)$ então a função $\theta_0 u$ prolongada como sendo zero fora de Ω pertence a $H^1(\mathbb{R}^N)$ (veja observação anterior ao teorema 2 do parágrafo 3.4). Verifica-se facilmente que $\theta_0 u$ é solução fraca (sobre $\mathbb{R}^N$) da equação

$$-\Delta(\theta_0 u) + \lambda(\theta_0 u) = \theta_0 f - 2\langle\nabla\theta_0, \nabla u\rangle - (\Delta\theta_0)u \equiv g \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

isto é, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \langle\nabla(\theta_0 u), \nabla\phi\rangle + \lambda. \int_{\mathbb{R}^N} \theta_0 u\, \phi = \int_{\mathbb{R}^N} g\phi \ , \ \forall\, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (17)

Observação: Como $\theta_0 u = 0$ fora de Ω podemos realizar as integrais acima apenas em Ω. Mesmo assim omitiremos o símbolo Ω ou $\mathbb{R}^N$ sob o sinal da integral. A afirmação (16) segue então como abaixo

$\displaystyle\int g\phi = \int \theta_0 f\phi - 2\int\langle\nabla\theta_0, \nabla u\rangle\phi - \int(\Delta\theta_0)u\phi$ = (integração por partes na terceira parcela).

$\displaystyle= \int f(\theta_0\phi) - 2\int\langle\nabla\theta_0, \nabla u\rangle\phi + \int\langle\nabla\theta_0, \nabla(u\,\phi)\rangle =$ (expandindo a 3a. parcela)

$$= \int f(\theta_0\phi) - 2\int\langle\nabla\theta_0, \nabla u\rangle\phi + \int\langle\nabla\theta_0, \nabla u\rangle\phi + \int\langle\nabla\theta_0, \nabla\phi\rangle u \ =$$

$\displaystyle= \int f(\theta_0\phi) - \int\langle\nabla\theta_0, \nabla u\rangle\phi + \int\langle\nabla\theta_0, \nabla\phi\rangle u =$ [usando que $\theta_0\phi \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ e que u é solução fraca de $\lambda u - \Delta u = f$ obtemos]

$\displaystyle= \int\langle\nabla u, \nabla(\theta_0\phi)\rangle + \lambda. \int\theta_0\phi u - \int\langle\nabla\theta_0, \nabla u\rangle\phi + \int\langle\nabla\theta_0, \nabla\phi\rangle u$, e, expandindo a primeira parcela e reduzindo os termos obtemos,

$\displaystyle= \int\langle\nabla(\theta_0 u), \nabla\phi\rangle + \lambda. \int(\theta_0 u)\phi$, como queríamos.

Logo, do caso (a) tiramos que $\theta_0 u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ e $\|\theta_0 u\|_{H^2} \leq$ $\leq C.\|g\|_{L^2} \leq M.\|f\|_{L^2}$.

(c.2) <u>Estimativas Numa Vizinhança do Bordo</u>:

Trata-se de provar que $\theta_i u \in H^2(\Omega)$, $i = 1,2,\dots,k$.

Recordemos que $\theta_i \in C_c^\infty(U_i)$ e que temos uma bijeção $H : Q \longrightarrow U_i$ tal que $H \in C^2(\bar{Q})$, $H^{-1} \in C^2(\bar{U}_i)$, $H(Q_+) = \Omega \cap U_i$ e $H(Q_0) = (\partial\,\Omega) \cap U_i$.

Escreveremos $x = H(y)$ e $y = H^{-1}(x) = J(x)$.

É fácil ver que $v = \theta_i u \in H_0^1(\Omega\cap U_i)$ e que v é solução fraca (sobre $\Omega\cap U_i$) da equação $-\Delta v = \theta_i f - \theta_i u - 2\langle\nabla\theta_i, \nabla u\rangle - (\Delta\theta_i)u \equiv g \in L^2(\Omega\cap U_i)$. Essa verificação é análoga à feita no caso (c.1). Também é fácil ver que $\|g\|_{L^2(\Omega\cap U_i)} \le C.\|f\|_{L^2(\Omega\cap U_i)}$. Vamos agora transportar equação acima em $\Omega\cap U_i$ para uma equação em Q_+. Chamaremos $\omega(y) = v(H(y))$, $y \in Q_+$, isto é, $\omega(Jx) = v(x)$ para $x \in \Omega\cap U_i$.

O lema abaixo mostra que a equação

$$\int_{\Omega\cap U_i} \langle\nabla v,\ \nabla\phi\rangle\, dx = \int_{\Omega\cap U_i} g\ \phi\ dx \quad , \quad \forall\ \phi \in H_0^1(\Omega\cap U_i) \tag{18}$$

se transporta sobre Q_+ a uma equação elíptica de ordem 2.

Lema 2: Com as notações introduzidas acima temos $\omega \in H_0^1(Q_+)$ e

$$\sum_{k,\ell=1}^{N} \int_{Q_+} a_{k\ell} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y_\ell}\ dy = \int_{Q_+} \tilde{g}\ \psi\ dy\ ,\ \forall\ \psi \in H_0^1(Q_+)\ , \tag{19}$$

onde $\tilde{g} = (g \circ H).|\mathrm{Jac}\ H| \in L^2(Q_+)$ e onde $a_{k\ell}$ são funções em $C^1(\bar{Q}_+)$

que verificam a condição de elipticidade.

Demonstração: Seja $\psi \in H_0^1(Q_+)$; denotemos $\varphi(x) = \psi(Jx)$ para $x \in \Omega \cap U_i$.

Então $\varphi \in H_0^1(\Omega \cap U_i)$ e $\qquad \dfrac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{N} \dfrac{\partial \omega}{\partial y_k} \cdot \dfrac{\partial J_k}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \sum_{\ell=1}^{N} \dfrac{\partial \psi}{\partial y_\ell} \cdot \dfrac{\partial J_\ell}{\partial x_j}$

Logo $\qquad \displaystyle\int_{\Omega \cap U_i} \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle \, dx = \int_{\Omega \cap U_i} \sum_{j,k,\ell=1}^{N} \frac{\partial J_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial J_\ell}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y_\ell} \, dx =$

$= \displaystyle\int_{Q_+} \sum_{j,k,\ell=1}^{N} \frac{\partial J_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial J_\ell}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y_\ell} \cdot |\text{Jac } H| dy$ pela fórmula de mudança de variáveis em integrais. Chamando $\displaystyle a_{k\ell} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial J_k}{\partial x_j} \frac{\partial J_\ell}{\partial x_j} |\text{Jac } H|$

obtemos

$$\int_{\Omega \cap U_i} \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle dx = \sum_{k,\ell=1}^{N} \int_{Q_+} a_{k\ell} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y_k} \frac{\partial \psi}{\partial y_\ell} \, dy \tag{20}$$

É lógico que $a_{k\ell} \in C^1(\overline{Q}_+)$, bastando para isso olhar para a fórmula que os define e lembrar que H e J são de classe C^2. Vejamos que a condição de elipticidade está satisfeita. Ora, dado $\xi \in \mathbb{R}^N$ e $y \in \overline{Q}$ temos

$$\sum_{k,\ell} a_{k\ell}(y)\, \xi_k \xi_\ell = \left|\text{Jac } H(y)\right| \sum_j \left[\sum_k \frac{\partial J_k}{\partial x_j}(x)\, \xi_k \right]^2 = \left|\text{Jac } H(y)\right| \left\|B(x)\xi\right\|^2_{\mathbb{R}^N}.$$

onde $B(x)$ é a matriz $(\mathrm{Jac}\ J(x))^t$. Assim, se considerarmos a função

$f : \overline{Q}_+ \times (\overline{\Omega\cap U_i}) \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(y, x, \xi) = \left|\mathrm{Jac}\ H(y)\right| \left\|B(x)\xi\right\|^2_{\mathbb{R}^N}$

temos que f é contínua.

Também, como $\overline{Q}_+ \times (\overline{\Omega\cap U_i}) \times S^{n-1}$ é compacto (pois é produto de compactos), existe (y_0, x_0, ξ_0) tal que $f(y_0, x_0, \xi_0) = \min f(y,x,\xi)$. Verifiquemos agora que $f(y,x,\xi) > 0$ $\forall$ $(y,x,\xi) \in \overline{Q}_+ \times (\overline{\Omega\cap U_i}) \times S^{n-1}$. Por hipótese temos que $|\mathrm{Jac}\ H(y)| > 0$ $\forall$ $y \in Q_+$. Afirmamos que $|\mathrm{Jac}H(y)|>0$ $\forall$ $y \in \overline{Q}_+$. De fato, se não fosse assim, existiria $y \in Q'_+$ tal que $|\mathrm{Jac}\ H(y)| = 0$, e sequência $y_n \in Q_+$ tal que $y_n \longrightarrow y$. Como a função $|\mathrm{Jac}\ H(\cdot)|$ é em particular contínua, temos $|\mathrm{Jac}\ H(y_n)| \longrightarrow |\mathrm{Jac}\ H(y)| = 0$. Agora, chamando $x_n = H(y_n)$, temos $|\mathrm{Jac}\ J(x_n)| \cdot |\mathrm{Jac}\ H(y_n)| = 1$, donde sai que $|\mathrm{Jac}\ J(x_n)| \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$, o que contradiz o fato de $|\mathrm{Jac}\ J(\cdot)|$ estar em $C^1(\overline{U}_i)$. Da mesma maneira prova-se que $B(x)$ é invertível para todo $x \in (\overline{\Omega \cap u_i})$.

Verifiquemos agora que $\left\|F(x)\xi\right\|^2 > 0$ $\forall$ $(x,\xi) \in (\overline{\Omega\cap U_i}) \times S^{n-1}$. Ora, se $\left\|B(x)\xi\right\|_{\mathbb{R}^N} = 0$ então $B(x).\xi = 0$, e daí, sendo $B(x)$ invertível, obtemos $\xi = 0$, contradizendo o fato $\xi \in S^{n-1}$.

Do fato que $|\mathrm{Jac}\ H(y)| > 0$ $\forall$ $y \in \overline{Q}_+$ e $\|B(x)\xi\|_{\mathbb{R}^N} > 0$ $\forall (x,\xi) \in (\overline{\Omega\cap U_i}) \times S^{n-1}$ sai que $f(y,x,\xi) > 0$ $\forall$ $(y,x,\xi) \in \overline{Q}_+ \times (\overline{\Omega\cap U_i}) \times S^{n-1} = D$, como queríamos. Logo, existe constante $\alpha > 0$ tal que $f(y,x,\xi)>\alpha$, $\forall (y,x,\xi) \in D$. Seja agora $y \in \overline{Q}_+, x = H(y)$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$. Temos então que $f(y,x,\xi/\|\xi\|) > \alpha$, isto é, $\left|\mathrm{Jac}H(y)\right| . \left\|B(y).\xi/\|\xi\|\right\|^2_{\mathbb{R}^N} \geq \alpha$, ou ainda $\left|\text{Jac } H(y)\right| . \left\|B(y).\xi\right\|^2_{\mathbb{R}^N} \geq \alpha . \left\|\xi\right\|^2_{\mathbb{R}^N}$, donde sai a condição de elipticidade.

Por outro lado,

$$\int_{\Omega\cap U_1} g(x)\varphi(x)dx = \int_{Q_+} g(H(y)).\varphi(H(y)).\left|\text{Jac } H(y)\right|dy = \int_{Q_+} \tilde{g}(y).\psi(y)dy \qquad (21)$$

Assim, de (18), (20) e (21) obtemos o lema 2. ∎

Vamos mostrar agora que a função $\omega(y) = v(H(y))$, $y \in Q_+$, está em $H^2(Q_+)$, e que $\left\|\omega\right\|_{H^2} \leq c.\left\|\tilde{g}\right\|_{L^2}$. Isto implicará, ao retornarmos a $\Omega\cap U_1$, que $v = \theta_1 u \in H^2(\Omega\cap U_1)$ e $\left\|\theta_1 u\right\|_{H^2} \leq \tilde{c}.\left\|f\right\|_{L^2}$.

Utilizaremos, como no caso b, o método das translações tangenciais.

Em (19), tomando $\psi = D_{-h}(D_h\omega)$ com $h /\!/ Q_0$ e $\|h\|$ pequeno o suficiente para termos $\psi \in H^1_0(Q_+)$, obtemos

$$\sum_{k,\ell=1}^{N} \int_{Q_+} D_h\left[a_{k\ell}\ \frac{\partial\omega}{\partial y_k}\right](y)\ \frac{\partial}{\partial y_\ell}\left[D_h\omega\right](y)dy = \int_{Q_+} \tilde{g}(y)D_{-h}(D_h\omega)(y)dy \qquad (22)$$

Agora,

$$\int_{Q_+} \tilde{g}.D_{-h}(D_h\omega) \leq \left\|\tilde{g}\right\|_{L^2}.\left\|D_{-h}(D_h\omega)\right\|_{L^2} \leq \left\|\tilde{g}\right\|_{L^2}.\left\|\nabla(D_h\omega)\right\|_{L^2}, \qquad (23)$$

onde usamos Hölder na primeira desigualdade e o lema 1 do caso b na segunda. Por outro lado temos a identidade

$$D_h\left[a_{k\ell}\ .\ \frac{\partial\omega}{\partial y_k}\right](y) = a_{k\ell}\ (y + h)\ .\ \frac{\partial}{\partial y_k}\ D_h\omega(y) + \left[D_h a_{k\ell}(y)\right]\ \frac{\partial\omega}{\partial y_k}(y) \quad (24)$$

e consequentemente, levando-a em (22) obtemos

$$[1^{\underline{o}} \text{ membro de } (22)] = A + B \tag{25}$$

onde
$$A = \sum_{k,\ell} \int_{Q_+} a_{k\ell}(y+h) \cdot \frac{\partial}{\partial y_k}\left[D_h\omega(y)\right] \cdot \frac{\partial}{\partial y_\ell}\left[D_h\omega(y)\right] dy$$
e
$$B = \sum_{k,\ell} \int_{Q_+} \left[D_h a_{k\ell}(y)\right] \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y_k}(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y_\ell}\left[D_h\omega\right](y)dy$$

Agora, $A \geq \alpha. \left\|\nabla(D_h\omega)\right\|^2_{L^2(Q_+)}$, onde se usou a condição de elipticidade com $\xi = \nabla(D_h\omega)(y)$.

Também, como $a_{k\ell} \in C^1(\overline{Q}_+)$ para todos os k, ℓ vem

$$\left|B\right| \leq M. \sum_{k,\ell} \left| \int_{Q_+} \frac{\partial \omega}{\partial y_k}(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y_\ell}\left[D_h\omega\right](y)dy \right| \leq \quad \text{(usando des. de Hölder)}$$

$$\leq M. \sum_{k,\ell} \left\| \frac{\partial\ \omega}{\partial y_k} \right\|_{L^2(Q_+)} \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial y_\ell}\left[D_h\omega\right] \right\|_{L^2(Q_+)} \leq C. \left\|\omega\right\|_{H^1(Q_+)} \cdot \left\|\nabla(D_h\omega)\right\|_{L^2(Q_+)}.$$

Portanto, obtemos de (23) que

$$\left\|\tilde{g}\right\|_{L^2} \cdot \left\|\nabla(D_h\omega)\right\|_{L^2} \geq \int_{Q_+} \tilde{g}.D_{-h}(D_h\omega) = [1^{\underline{o}} \text{ membro de } (22)] = A + B \geq$$

$$\geq \alpha. \left\|\nabla(D_h\omega)\right\|^2_{L^2(Q_+)} - c. \left\|\omega\right\|_{H^1(Q_+)} \cdot \left\|\nabla(D_h\omega)\right\|_{L^2(Q_+)} \tag{26}$$

De (26) tiramos que $\left\|\nabla(D_h\omega)\right\|_{L^2} \le \tilde{c}.\left(\left\|\omega\right\|_{H^1} + \left\|\tilde{g}\right\|_{L^2}\right)$, e como $\left\|\omega\right\|_{H^1} \le L.\left\|\tilde{g}\right\|_2$ (veja observação após teorema 2 do parágrafo 1.1)

obtemos $$\left\|\nabla(D_h\omega)\right\|_{L^2(Q_+)} \le M.\left\|\tilde{g}\right\|_{L^2(Q_+)} . \tag{27}$$

Agora, seja $h = \left\|h\right\| e_j$ com $j \in \{1,2,\dots,N-1\}$, e $\psi \in C_c^\infty(Q_+)$

É fácil ver que

$$\left|\int_{Q_+} \frac{\partial\omega}{\partial y_k} \,.\, D_{-h}\,\psi\right| = \left|\int_{Q_+} D_h\left(\frac{\partial\omega}{\partial y_k}\right).\psi\right| \le \qquad \text{(por Hölder)}$$

$$\le \left\|D_h\left(\frac{\partial\omega}{\partial y_k}\right)\right\|_{L^2}.\left\|\psi\right\|_{L^2} = \left\|\frac{\partial}{\partial y_k}\left(D_h\omega\right)\right\|_{L^2}.\left\|\psi\right\|_{L^2} \le \left\|\nabla\left(D_h\omega\right)\right\|_{L^2}.\left\|\psi\right\|_{L^2} \le$$

$$\le M.\left\|\tilde{g}\right\|_{L^2} . \left\|\psi\right\|_{L^2} , \qquad \text{ou seja,}$$

$$\left|\int_{Q_+} \frac{\partial\omega}{\partial y_k} \,.\, D_{-h}\,\psi\right| \le M.\left\|\tilde{g}\right\|_{L^2} . \left\|\psi\right\|_{L^2} , \qquad \forall\, \psi \in C_c^\infty(Q_+) . \tag{28}$$

Tomando limite quando $\|h\| \longrightarrow 0$ em (28) vem

$$\left|\int_{Q_+} \frac{\partial\omega}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y_j}\right| \le M.\left\|\tilde{g}\right\|_{L^2} . \left\|\psi\right\|_{L^2},\ \forall\, \psi \in C_c^\infty(Q_+),\ \forall\, k \in \{1,2,\dots,N\} \tag{29}$$

e $\forall\, j \in \{1,2,\dots,N-1\}$. Assim, se mostrarmos que (29) também vale para $(k,j) = (N,N)$ teremos conseguido que

$$\left|\int_{Q_+} \omega \frac{\partial^2\psi}{\partial y_k \, \partial y_j}\right| = \left|\int_{Q_+} \frac{\partial\omega}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y_j}\right| \le M.\left\|\tilde{g}\right\|_{L^2}.\left\|\psi\right\|_{L^2}, \ \forall\, \psi \in C_c^\infty(Q_+) \quad (30)$$

e $\forall$ (k,j). Mais ainda, temos que

$$\left|\int_{Q_+} \omega\, D^\alpha \psi\right| \le M.\left\|\tilde{g}\right\|_{L^2} \cdot \left\|\psi\right\|_{L^2}, \ \forall\, \psi \in C_c^\infty(Q_+) \ \text{ e } \ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^N \quad (31)$$

com $|\alpha| \le 2$ (os casos $|\alpha| = 0$ e $|\alpha| = 1$ são imediatos).

Logo, usando a proposição (3.3.5) do parágrafo 3 obtemos que $\omega \in H^2(Q_+)$ e $\left\|\omega\right\|_{H^2} \le M \,.\left\|\tilde{g}\right\|_{L^2}$, como queríamos.

Vejamos então que (29) vale para $(k,j) = (N,N)$.

Para isso substituimos ψ por ψ / a_{NN} na equação (19), o que é possível, pois da condição de elipticidade com $\xi = e_N = (0,\dots,1)$ temos que $a_{NN}(y) \ge \alpha > 0 \ \ \forall\, y \in Q_+$. Obtemos então que

$$\int \frac{\partial\omega}{\partial y_N} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y_N} = \int \frac{1}{a_{NN}} \cdot \frac{\partial a_{NN}}{\partial y_N} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial y_N} \cdot \psi + \int \frac{\tilde{g}\psi}{a_{NN}} + \sum_{(k,\ell)\neq(N,N)} \int \frac{\partial\omega}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial a_{k\ell}}{\partial y_\ell} \cdot \frac{\psi}{a_{NN}} +$$

$$- \sum_{(k,\ell)\neq(N,N)} \int \frac{\partial\omega}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial}{\partial y_\ell}\left[\frac{a_{k\ell}}{a_{NN}} \cdot \psi\right]. \quad (32)$$

Usando (30) com $a_{k\ell}\, \psi / a_{NN}$ no lugar de ψ e combinando com (32) tiramos que

$$\left|\int_{Q_+} \frac{\partial\omega}{\partial y_N} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y_N}\right| \le C.\left(\|\omega\|_{H^1} + \|\tilde{g}\|_{L^2}\right).\|\psi\|_{L^2} \ ,$$

e como $\left\|\omega\right\|_{H^1} \le \tilde{C}.\left\|\tilde{g}\right\|_{L^2}$ (pois ω é solução fraca de $-\Delta\omega + \lambda\omega = \tilde{g}$)

obtemos o desejado. Isso conclui o teorema de regularidade para $\lambda > 0$.

O caso $\lambda = 0$ segue agora fácil. De fato, dada $f \in L^2(\Omega)$ existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca de $-\Delta u = f$, isto é, tal que $\int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega f\, v$, $\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$, bastando para isso usar Lax - Milgram com a forma bilinear $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v$ e o funcional linear contínuo $\varphi_f : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $\varphi_f(v) = \int_\Omega f\, v$.

Ora, mas $-\Delta u = f \Leftrightarrow -\Delta u + \frac{1}{2c} u = f + \frac{1}{2c} u$, onde c é qualquer constante positiva. Logo, u é solução fraca de $-\Delta u + \lambda u = g$, onde $\lambda = 1/2c > 0$ e $g = f + \frac{1}{2c} u \in L^2(\Omega)$, donde sai que $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2} \le K . \|g\|_{L^2} = K . \|f + \frac{1}{2c} u\|_{L^2} \le K . \|f\|_{L^2} + \frac{K}{2c} . \|u\|_{L^2}$. Tomando $c = K$ obtemos $\|u\|_{H^2} \le K . \|f\|_{L^2} + \frac{1}{2} . \|u\|_{H^2}$, isto é, $\|u\|_{L^2} \le 2K . \|f\|_{L^2}$, como queríamos. ■

Corolário: $R(\lambda : \Delta) : L^2 \longrightarrow L^2$ é compacto $\forall\, \lambda \ge 0$.

Demonstração: Seja $B \subset L^2$ limitado, digamos $\|f\|_{L^2} \le M$ para toda $f \in B$. Temos então que $\|R(\lambda:\Delta) f\|_{H^2} = \|(\lambda - \Delta)^{-1} f\|_{H^2} \le C . \|f\|_{L^2} \le CM$ $\forall\, f \in B$, ou seja, $R(\lambda:\Delta)(B)$ é limitado em H^2, e como a inclusão $H^2 \subset L^2$ é compacta segue que $R(\lambda:\Delta)(B)$ é relativamente compacto em L^2. ■

1.2: Equação do Calor

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado de classe C^k, $k \geq 1$.

Consideremos o problema de determinar uma função real $u(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in \Omega$, satisfazendo

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x), & t > 0, \quad x \in \Omega \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, & u_0 \in L^2(\Omega) \\ u(t,x) = 0, \quad t > 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Trataremos o problema (1) de uma outra forma, a saber, vamos vê-lo como uma equação diferencial em $L^2(\Omega)$. Para isso definiremos, a cada $t \geq 0$ fixado, $u(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$u(t)(x) = u(t,x) := \text{(solução de (1), se existir).}$$

Assim, o problema (1) se transforma na equação diferencial

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = \Delta u(t) & \forall\, t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

onde, dada $u_0 \in L^2(\Omega)$, perguntamos se existe função $u(t) \in \mathcal{D}(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ para todo $t > 0$ e tal que (2) fica satisfeita. É suficiente provar que o operador $\Delta : H^2 \cap H_0^1 \longrightarrow L^2$ gera semigrupo analítico $T(t)$ em L^2.

Afirmação: $A = -\Delta : H^2 \cap H_0^1 \longrightarrow L^2$ é setorial.

Logo, usando o teorema 5.4 do capítulo zero obtemos que Δ gera semigrupo analítico $T(t)$ em $L^2(\Omega)$, e da observação feita no parágrafo 1.0.1 deste capítulo segue que $u(t) = T(t)u_0$ é a única solução (forte) de (2).

Prova da afirmação: é lógico que $-\Delta$ é fechado e densamente definido. Sabemos também que o espectro $\sigma(\Delta)$ do operador Δ consiste de uma seqüência $0 > -\lambda_1^2 > -\lambda_2^2 \geq -\lambda_3^2 \geq \ldots.$, e portanto o espectro $\sigma(A)$ de A consiste da seqüência $0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 \leq \lambda_3^2 \leq \ldots.$, pois $\sigma(A) = \sigma(-\Delta) = -\sigma(\Delta)$. Logo podemos tomar $a = 0$ e $\varphi \in (0, \pi/2)$ arbitrário na definição de operador setorial que teremos $S_{0,\varphi} \subset \rho(A)$. Vejamos agora que para todo $\lambda \in S_{0,\varphi}$ vale $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq M \big/ |\lambda|$ para alguma constante $M \geq 1$. Isso é equivalente a mostrar que $|\lambda| \leq$ $\leq M.\|(\lambda+\Delta)v\|_{L^2}$ $\forall$ $v \in L^2$ com $\|v\|_{L^2} = 1$. Ora, mas para $\lambda \in S_{0,\varphi}$ temos $|\lambda| \text{sen}\ \varphi \leq \text{dist}(\lambda, \mathbb{R}^{++}) \leq \text{dist}\left[\lambda, \langle -\Delta v, v\rangle_{L^2}\right] = \left|\lambda\langle v, v\rangle_{L^2} + \langle \Delta v, v\rangle_{L^2}\right| \leq$ $\leq \left\|(\lambda+\Delta)v\right\|_{L^2}$, e portanto $|\lambda| \leq (\text{sen}\ \varphi)^{-1}.\left\|(\lambda+\Delta)v\right\|_{L^2}$, donde tomamos $M = (\text{sen}\ \varphi)^{-1}$, o que prova a afirmação. Do teorema 5.10 do capítulo 0 sabemos particularmente que o semigrupo $T(t) = e^{-At}$ sai de L^2 e chega em $\mathcal{D}(A^m)$ $\forall$ $m \in \mathbb{N}$ e $\forall$ $t > 0$. Logo a solução $u(t) = e^{\Delta t}u_0$ pertence a $H^m(\Omega)$ $\forall$ $m \in \mathbb{N}$ e $\forall$ $t > 0$, e usando o teorema 3.5.2 do parágrafo 3 do capítulo 0 tiramos que $u(t) \in C^k(\Omega)$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $u(t) \in C^\infty(\Omega)$. Essa é uma propriedade muito interessante, pois mesmo que o dado inicial $u(0) = u_0 \in L^2$ não tenha nenhuma regularidade, $u(t)$ resulta C^∞ para qualquer $t > 0$.

1.3: Equação da Onda

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado de classe C^k, $k \geq 2$. Consideremos o problema de determinar uma função real $u(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in \Omega$, satisfazendo:

$$(1)\quad \begin{cases} u_{tt}(t,x) = \Delta u(t,x), \ t > 0, \ x \in \Omega \\ u(t,x) = 0 \ , \ t > 0, \ x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) \ , \ u_t(0,x) = v_0(x) \ , \ x \in \Omega \end{cases}$$

Chamando $v(t,x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ obtemos o sistema

$$(2)\quad \begin{cases} u_t(t,x) = v(t,x) \\ \\ v_t(t,x) = \Delta u(t,x) \end{cases}, \ t > 0, \ x \in \Omega.$$

Assim, para cada $t \geq 0$ fixado, se definirmos $u(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $v(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ como na seção anterior, então o problema (1) acima consiste em encontrar uma função $w(t) = (u(t), v(t)) \in \mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que a equação (3) abaixo fica satisfeita:

$$(3)\quad \begin{cases} \dot{w}(t) = A\, w(t) \ , \ t > 0 \\ \\ w(0) = w_0 = (u_0, v_0) \in H = H_0^1 \times L^2 \end{cases}$$

onde $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow H_0^1 \times L^2$, $A(\varphi,\psi) = (\psi, \Delta\varphi)$.

Perguntamos agora se o operador A anterior gera C^0-semigrupo em $H = H_0^1 \times L^2$, onde neste consideramos o produto interno

$$\left\langle (u_1,v_1), \ (u_2,v_2) \right\rangle_H = \left\langle u_1, u_2 \right\rangle_{H^1} + \left\langle v_1, v_2 \right\rangle_{L^2} = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx + \int_\Omega v_1 v_2 \, dx.$$

Estudemos inicialmente o resolvente $\rho(A)$ de A. Para isso sejam dadas $(f_1, f_2) \in H = H_0^1 \times L^2$. Queremos $(u,v) \in \mathcal{D}(A)$ única tal que $(\lambda - A)(u,v) = (f_1, f_2)$, i.é, tal que $\lambda u - v = f_1$ e $\lambda v - \Delta u = f_2$. Equivalentemente, $\lambda^2 u - \Delta u = f_2 + \lambda f_1$ e $v = \lambda u - f_1$. Ora, basta então que λ^2 não seja negativo e teremos a existência e unicidade de u (e portanto de v) garantida, pois λ^2 não negativo implica $\lambda^2 \in \rho(\Delta)$. Mais ainda, u dependerá continuamente de f_1 e f_2 (e portanto v também). Logo, basta que λ satisfaça $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$ que teremos $\lambda \in \rho(A)$, pois $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$ implica $\lambda^2 \notin (-\infty, 0)$. Em particular existe $\lambda_0 > w = 0$ tal que $\mathrm{Im}(\lambda_0 \pm A) = H$. Também temos que

$$\left\langle A(u,v),(u,v)\right\rangle_H = \left\langle (v,\Delta u),(u,v)\right\rangle_H = \int_\Omega \nabla v \nabla u \, dx + \int_\Omega \Delta u v dx \quad ,$$

e usando integração por partes mais o fato que $v \in H_0^1(\Omega)$ obtemos que $\int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx$, donde resulta $\left\langle A(u,v),(u,v)\right\rangle_H = 0 \ \forall \ (u,v) \in \mathcal{D}(A)$.

Logo do corolário 4.11 do teorema de Lumer-Phillips segue que A gera C^0- grupo T(t) de contrações em H, ou seja, o problema (3) tem solução (mild) definida para todo $t \in \mathbb{R}$, e esta é dada por $w(t) = T(t)w_0$.

1.4: Equação da Onda com Termo Dissipativo

Consideremos agora o problema de determinar uma função real $u : (0,\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$(a) \quad \begin{cases} (4) \ u_{tt}(t,x) = \Delta u(t,x) - a(x)q(u_t(t,x)), \ (t,x) \in \mathbb{R}^{++} \times \Omega \ . \\ (5) \ u(t,x) = 0 \ , \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{++} \times \partial\Omega \\ (6) \ u(0,x) = u_0(x) \ , \quad u_t(0,x) = v_0(x) \ , \quad x \in \Omega \end{cases}$$

onde $\cdot\ \Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto limitado regular e conexo;

$\cdot\ a \in C_c^1(\Omega)$, $a(x) \geq 0\ \forall\ x \in \Omega$ e $a(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in \Omega$;

. $q \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, q é estritamente crescente, $q(0)=0$ e $q' \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

Podemos olhar o problema (a) como uma equação diferencial semi-linear no espaço de Hilbert $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, este munido do mesmo produto interno considerado no caso anterior, bastando para isso usar os mesmos artifícios do caso da equação da onda sem atrito. Isto é, chamamos $v(t,x) = u_t(t,x)$, definimos $u(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $v(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ como antes, e transformamos (a) no problema (b):

$$
\text{(b)} \quad \begin{cases} \dfrac{dw(t)}{dt} = Aw(t) + F(w(t)) \ , \ t > 0 \\ w(0) = w_0 = (u_0, v_0) \in H = H_0^1 \times L^2 \end{cases}
$$

onde $w(t) = (u(t),v(t))$, $F : H_0^1 \times L^2 \longrightarrow H_0^1 \times L^2$ é a aplicação dada por $F(\varphi,\psi) = (0, -a(\cdot)q\circ\psi)$, e $A(\varphi,\psi) = (\psi,\Delta\varphi)$ para todo par $(\varphi,\psi) \in \mathcal{D}(A) = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1 \subset H_0^1 \times L^2 = H$.

É claro que A está bem definida. Vejamos que o mesmo ocorre com F. Basta verificar que $a(\cdot)q(\psi(\cdot)) \in L^2(\Omega)$. Mas note que as hipóteses sobre q nos garante que $|q(y)| \leq M|y|$ para todo $y \in \mathbb{R}$. De fato, dado $y \in \mathbb{R}$ temos $|q(y) - q(0)| = |q'(\xi_y)|.|y-0|$ para algum ξ_y entre 0 e y, e como $q(0) = 0$ e $q' \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vem $|q(y)| \leq M.|y|$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Assim $\displaystyle\int_\Omega a^2(x)q^2(\psi(x)dx \leq C_a . \int_\Omega q^2(\psi(x))dx$, pois $a \in C_c^1(\Omega)$. Por sua vez $\displaystyle\int_\Omega q^2(\psi(x))dx \leq M^2.\int_\Omega \psi^2(x)dx = M^2\|\psi\|_{L^2}^2 < \infty$, donde sai a boa definição de F.

Agora, vimos em 1.3 (eq. da onda sem atrito) que A gera C^0- grupo de contrações $T(t)$ em $H = H_0^1 \times L^2$.

Verificaremos agora que F é localmente Lipschitziana.

De fato, temos:

$$\left\| F\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\|_H^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -a(\cdot)[qo\psi_1(\cdot) - qo\psi_2(\cdot)] \end{pmatrix} \right\|_H^2 =$$

$$= \left\| a(\cdot)\left[qo\psi_1(\cdot) - qo\psi_2(\cdot)\right] \right\|_{L^2}^2 = \int_\Omega a^2(x).\left[q(\psi_1(x)) - q(\psi_2(x))\right]^2 dx \le$$

$$\le C_a.M^2.\int_\Omega \left[\psi_1(x) - \psi_2(x)\right]^2 dx = K^2.\left\|\psi_1 - \psi_2\right\|_{L^2}^2 \le$$

$$\le K^2.\left(\left\|\psi_1 - \psi_2\right\|_{L^2}^2 + \left\|\varphi_1 - \varphi_2\right\|_{H^1}^2\right) \le K^2.\left(\left\|\psi_1 - \psi_2\right\|_{L^2} + \left\|\varphi_1 - \varphi_2\right\|_{H^1}\right)^2 =$$

$$= K^2.\left\| \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\|_H^2 \quad \text{, como queríamos.}$$

Assim, usando o teorema 1.0.2.2 do capítulo 1 concluímos que (b) tem uma única solução mild $w(t) = (u(t),v(t))$, e esta é dada pela fórmula da variação das constantes $w(t)=T(t)w_0 + \int_0^t T(t-s)F(w(s))ds$.

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DINÂMICOS E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

1: Alguns Conceitos e Resultados

Nesta seção, X denotará um espaço métrico e $\phi: (a,b) \longrightarrow X$ uma aplicação.

Definição 1.1: (Ponto limite) Dizemos que $q \in X$ é um <u>ponto limite positivo</u> de ϕ se existe seqüência de números reais $t_n \longrightarrow b^-$ de modo que $\phi(t_n) \longrightarrow q$. De maneira análoga, $q \in X$ é <u>ponto limite negativo</u> de ϕ se existe seqüência $t_n \longrightarrow a^+$ tal que $\phi(t_n) \longrightarrow q$.

Observação: quando $b = \infty$ os pontos limites positivos são também chamados de <u>pontos ω-limites</u> de ϕ, e quando $a = -\infty$ os pontos limites negativos de ϕ são chamados de <u>pontos α-limites</u> de ϕ.

Definição 1.2: (Sistemas Dinâmicos)

Um sistema dinâmico em X é uma aplicação $\pi : \mathbb{R}^+ x\ X \longrightarrow X$ com as propriedades:

(i) $\pi(0,x) = x$ para todo $x \in X$;

(ii) $\pi(t + s,x) = \pi(t,\pi(s,x))$ $\forall\ x \in X$, $\forall\ t,s \in \mathbb{R}^+$;

(iii) π é contínua.

Para cada $x \in X$ fixo podemos imaginar a aplicação $t \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \phi(t) = \pi(t,x)$ como sendo o estado de um determinado sistema (físico, químico, biológico, etc.) no instante t, dado que no instante inicial ($t = 0$) o estado era x. Chamamos tal função como sendo o <u>fluxo por x</u>.

Observação: em problemas concretos pode acontecer do fluxo $\pi(\cdot,x)$ não estar definido para todo $t \geq 0$, e sim apenas num subconjunto $I(x) = [0,b(x))$, $0 < b(x) \leq \infty$. Define-se então o conceito de <u>sistemas dinâmicos locais</u>. Não o faremos aqui, pois objetivamos estudar o comportamento assintótico de sistemas dinâmicos, isto é, o que acontece com $\pi(t,x)$ quando $t \longrightarrow \infty$, e para isso é necessário termos $I(x) = R^+$. O leitor interessado pode consultar Dynamical Systems - An International Symposium - Volume I - edited by Lamberto Cesari, Jack K. Hale, Joseph P. La Salle à página 212.

Proposição 1.3: Seja (X,d) um espaço métrico (p_n) seqüência em X tal que $p_n \longrightarrow p$, e π um sistema dinâmico em X. Então a seqüência de funções $\left[\pi(\cdot,p_n)\right]_n$ converge para $\pi(\cdot,p)$, sendo a convergência uniforme em subconjuntos compactos $J \subset \mathbb{R}^+$.

Usaremos as seguintes notações. Dado $p \in X$ e o fluxo associado $\pi(\cdot,p) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ escreveremos:

- $\Omega(p) :=$ {pontos ω-limites de $\pi(\cdot,p)$} ;
- $\gamma^+(p) := \{\pi(t,p); t\geq 0\}$, órbita (positiva) por x ;
- $H(p) := \overline{\gamma^+(p)}$, chamado "hull de p segundo π" ;

Definição 1.4: Seja X métrico e π sistema dinâmico em X.

(a) $M \subset X$ é dito ser <u>π-invariante</u> se $\pi(\mathbb{R}^+,p) \subset M$ para todo $p \in M$.

(b) Dizemos que o fluxo $\pi(\cdot,p)$ é <u>compacto</u> se $\pi(\mathbb{R}^+,p)$ for pré-compacto (i.e., $\pi(\mathbb{R}^+,p)$ está contido num compacto de X).

Proposição 1.5.: Sejam X e π como acima. Então:

(a) $\Omega(p)$ é π-invariante;

(b) Se $\pi(\cdot,p)$ é compacto então $\Omega(p)$ é não-vazio, pré-compacto, π-invariante e conexo.

Demonstração: (a) Se $\Omega(p) = \phi$ não há o que fazer. Se $\Omega(p) \neq \phi$ seja $q \in \Omega(p)$ e $t \geq 0$. Devemos provar que $\pi(t,q) \in \Omega(p)$. Ora, como $q \in \Omega(p)$ existe seqüência $s_n \longrightarrow \infty$ tal que $\pi(s_n,p) \longrightarrow q$. Logo, da continuidade do fluxo temos que $\pi(t,\pi(s_n,p)) \longrightarrow \pi(t,q)$. Mas $\pi(t,\pi(s_n,p)) = \pi(t+s_n,p)$, e portanto, tomando $t_n = t + s_n$ temos que $t_n \longrightarrow \infty$ e $\pi(t_n,p) \longrightarrow \pi(t,q)$, donde resulta $\pi(t,q) \in \Omega(p)$.

(b) Sendo $\pi(\cdot,p)$ compacto, existe $K \subset X$ compacto tal que $\pi(\mathbb{R}^+,p) \subset K$. Seja então (t_n) seqüência de reais com $t_n \longrightarrow \infty$. Temos então que $\pi(t_n,p)$ é seqüência em K, e sendo K compacto podemos supor que $\pi(t_n,p) \longrightarrow q \in K$. Logo $q \in \Omega(p)$, e portanto $\Omega(p) \neq \phi$.

Provemos agora que $\Omega(p)$ é pré-compacto. De fato, seja $z \in \Omega(p)$. Então existe seqüência $t_n \longrightarrow \infty$ tal que $\pi(t_n,p) \longrightarrow z$. Agora, como $\pi(t_n,p) \in K$ para todo n, onde $K \subset X$ é um compacto, segue que $z \in \overline{K} = K$, donde sai que $\Omega(p) \subset K$.

Vejamos agora a conexidade de $\Omega(p)$. Suponhamos por absurdo que $\Omega(p) = A \cup B$ com A, B abertos, disjuntos, $\Omega(p) \cap A \neq \phi$ e $\Omega(p) \cap B \neq \phi$. Sejam $x \in \Omega(p) \cap A$ e $y \in \Omega(p) \cap B$. Logo existem seqüências $t_n \longrightarrow \infty$ e $s_n \longrightarrow \infty$ de modo que $\pi(t_n,p) \longrightarrow x$ e $\pi(s_n,p) \longrightarrow y$. Para cada n, seja τ_n entre t_n e s_n de modo que $\pi(\tau_n,p) \in (A \cup B)^c$. É lógico então que $\tau_n \longrightarrow \infty$. Também, como $\pi(\cdot,p)$ é compacto, podemos supor que $\pi(\tau_n,p) \longrightarrow z$. Logo $z \in \Omega(p)$. Também, como $(A \cup B)^c$ é fechado e $\pi(\tau_n,p) \in (A \cup B)^c$ para todo n, então $z \in (A \cup B)^c$. Logo $z \in \Omega(p) \cap (A \cup B)^c$, contradição. ∎

Definição 1.6: (Função de Lyapunov)

Sejam π sistema dinâmico no espaço métrico X, $G \subset X$ e $V : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que V é uma <u>função de Lyapunov para π em G</u> se:

(i) V é contínua, e

(ii) Se $\pi([0,b],p) \subset G$ então $V(\pi(t,p))$ é não-crescente com relação a $t \in [0,b]$.

Dado $c \in \mathbb{R}$ denotaremos $V_c = V^{-1}(c)$ e $M_c = \left\{q \in \bar{G} : \pi(\mathbb{R}^+,q) \subset V_c\right\}$.

Proposição 1.7: Sejam π, X, G e V como antes. Se $\pi(\cdot,p)$ é compacto e $\pi(\mathbb{R}^+,p) \subset G$ então $\Omega(p) \subset M_c$ para alguma constante $c = c(p)$.

Demonstração: Seja $q \in \Omega(p)$. Então existe seqüência $t_n \longrightarrow \infty$ de modo que $\pi(t_n,p) \longrightarrow q$. Em particular temos $q \in \bar{G}$, pois $\pi(t_n,p) \in G$ $\forall$ $n = 1,2,\ldots$. Falta provar que se $t \geq 0$ então $\pi(t,q) \in V_c$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Seja então $t \geq 0$. Como $\pi(t_n,p) \longrightarrow q$ então $\pi(t + t_n, p) \longrightarrow \pi(t,q)$, bastando para isso usar a continuidade de π e sua propriedade de semigrupo. Também, da continuidade de V sai que $V(\pi(t + t_n,p)) \longrightarrow V(\pi(t,q))$. Agora, como $\pi(\mathbb{R}^+,p) \subset \bar{G} \cap K$ para algum compacto $K \subset X$, sai que a função $t \longrightarrow V(\pi(t,p))$ de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$ é limitada (em particular limitada inferiormente). Como além disso ela é não-crescente (pois V é de Lyapunov) obtemos que $V(\pi(s,p)) \longrightarrow c = c(p)$ quando $s \longrightarrow \infty$. Em particular, temos $V(\pi(t + t_n,p)) \longrightarrow c$ quando $n \longrightarrow \infty$. Logo $V(\pi(t,q)) = c$, i.é, $\pi(t,q) \in V^{-1}(c)$. ∎

Lema 1.8: Seja π sistema dinâmico em X. Então a função $V : \bar{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Lyapunov para π em G se e somente se V é contínua e $\dot{V}(p) \leq 0$ $\forall$ $p \in G$, onde $\dot{V}(p) = \liminf_{h \longrightarrow 0^+} \dfrac{V(\pi(h,p)) - V(p)}{h}$.

Demonstração: A parte "somente se" é imediata. Para a outra parte devemos verificar que a função $V(\pi(\cdot,p)) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é não-crescente. É suficiente provar que se $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz $\dot{\varphi}(t_0) \leq 0$ $\forall$ $t_0 \in \mathbb{R}^+$ então φ é não-crescente, onde $\dot{\varphi}(t_0) := \liminf\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h}$.

Daí, para concluir o lema é só usar a afirmação acima com $\varphi(\cdot) = V(\pi(\cdot,p))$. A prova dessa afirmação será feita em duas etapas:

(i) Suponhamos $\dot{\varphi}(t_0) < 0$ $\forall$ $t_0 \in \mathbb{R}^+$.

Disso sai que φ é não-crescente. De fato, se não o fosse existiriam t_1, $t_2 \in \mathbb{R}^+$ com $t_1 < t_2$ e $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$. Como φ é contínua existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(t_1) < \varphi(t)$ $\forall$ $t \in [t_2 - \delta, t_2]$. Afirmo que existe $\xi \in [t_1, t_2 - \delta]$ de modo que $\varphi(\xi) < \varphi(t_1)$, pois se não fosse assim teríamos $\varphi(t_1) \leq \varphi(t)$ $\forall$ $t \in [t_1, t_2 - \delta]$, donde resultaria $\dot{\varphi}(t_1) \geq 0$, o que é contradição. Temos então que φ é contínua em $[\xi, t_2]$ e $\varphi(\xi) < a = \varphi(t_1) < \varphi(t_2)$. Logo existe $\alpha \in [\xi, t_2]$ tal que $\varphi(\alpha) = a$. Podemos então considerar o real $t_0 = \sup\left\{\alpha \in [\xi, t_2] : \varphi(\alpha) = a\right\}$.

É claro então que $\dot{\varphi}(t_0) \geq 0$, pois $\varphi(t) > \varphi(t_0)$ $\forall$ $t \in [t_0, t_2]$, o que é ainda uma contradição. Logo φ é não-crescente, como queríamos. ∎

(ii) Suponhamos agora que $\dot{\varphi}(t_0) \leq 0$ $\forall$ $t_0 \in \mathbb{R}^+$.

Provaremos que $\varphi|_K$ é não-crescente, qualquer que seja o compacto $k \subset \mathbb{R}^+$. Da arbitrariedade de K seguirá o resultado. Para isso seja então $K \subset \mathbb{R}^+$ compacto e definamos $\psi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $\psi(t) = \varphi(t) - \dfrac{\varepsilon}{|K|} t$, onde $|K|$ é o diâmetro de K e ε é um real positivo.

Temos então que $\dot{\psi}(t_0) = \dot{\varphi}(t_0) - \frac{\varepsilon}{|K|} < 0 \ \forall \ t_0 \in K$. De (1) segue então que ψ é não-crescente em K, isto é, $\psi(t_1) \geq \psi(t_2) \ \forall \ t_1, t_2 \in K$ com $t_1 \leq t_2$; equivalentemente, $\varphi(t_2) \leq \varphi(t_1) + \frac{\varepsilon}{|K|}(t_2 - t_1) \leq \varphi(t_1) + \varepsilon$ $\forall \ t_1, t_2 \in K$ com $t_1 \leq t_2$, e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário concluimos que $\varphi(t_2) \leq \varphi(t_1) \ \forall \ t_1, t_2 \in K$ tal que $t_1 \leq t_2$, donde segue que φ é não-crescente em K, como queríamos. ■

Lema 1.9: Sejam π e V como no lema acima. Então $M_c \subset M$, onde M é o maior subconjunto invariante em $E = \{q \in \bar{G} : \dot{V}(q) = 0\}$, i.é, $M = \bigcup_{p \in \Lambda} \pi(\mathbb{R}^+, p)$, onde $\Lambda = \{p : \pi(\mathbb{R}^+, p) \subset E\}$.

Demonstração: Em primeiro lugar é lógico que o maior subconjunto π-invariante em E é $\bigcup_{p \in \Lambda} \pi(\mathbb{R}^+, p)$. Provemos então a inclusão $M_c \subset M$. Para isso seja $q \in M_c$. Então $q \in \bar{G}$ e $\pi(\mathbb{R}^+, q) \subset V_c$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Assim temos $\dot{V}(\pi(\mathbb{R}^+, q)) = 0$, ou seja, $\pi(\mathbb{R}^+, q) \subset E$. Logo $q \in M$, pois $q = \pi(0, q) \in \pi(\mathbb{R}^+, q) \subset \bigcup_{p \in \Lambda} \pi(\mathbb{R}^+, p) = M$. ■

Proposição 1.10: Seja π sistema dinâmico em X e $V : \bar{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov para π em G. Se $\pi(\cdot, p)$ é compacto e $\pi(\mathbb{R}^+, p) \subset G$ então $\Omega(p) \subset M$.

Demonstração: É imediato da proposição 1.7 e dos lemas 1.8 e 1.9. ■

2: Sistemas Dinâmicos Gerados por Equações Autônomas

Nesta secção aplicaremos a teoria do parágrafo anterior no estudo de sistemas dinâmicos que vem de equações autônomas. Dentre outras coisas ilustraremos algumas dificuldades com relação à hipótese de compacidade do fluxo no item (b) da proposição 1.5. Quando π define um sistema dinâmico em $\mathbb{R}^n$, por exemplo, não há dificuldade alguma, pois basta verificar que o fluxo é limitado. A dificuldade aparece quando π define sistema dinâmico num espaço de Banach de dimensão infinita. No entanto, vencida essa eventual dificuldade de verificar compacidade do fluxo, têm-se em mãos todas as informações contidas nas proposições 1.5, 1.7 e 1.10. Estas serão utilizadas para obter decaimento a zero da solução da equação da onda com atrito, como veremos no exemplo 2.4.

Exemplo 2.1: (Equações Diferenciais Ordinárias)

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e consideremos o problema de determinar uma função $x : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável e tal que

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \quad , \quad t \in I \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad . \end{cases}$$

onde I é um intervalo da reta contendo zero. Suponhamos que f tem condições que garantem existência e unicidade de solução para (1), bem como continuidade dessas com relação às condições iniciais. Então, denotando por $\phi(\cdot,0,x_0) : I(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a única solução de (1), onde $I(x_0)$ é o intervalo maximal de definição, temos então um primeiro exemplo de sistema dinâmico local em $\mathbb{R}^n$, a saber $\pi(t,x_0) := \phi(t,0,x_0)$. É bem conhecido dos cursos tradicionais de EDO's que se f é localmente lipschitziana então temos garantidas a existência, unicidade e dependência contínua das soluções com relação às condições iniciais.

Uma condição suficiente para que π defina um sistema dinâmico em $\mathbb{R}^n$ é verificar a limitação da solução, graças ao resultado, também clássico, de que se $I(x_0)$ é da forma $I(x_0) = [0,b)$ com $b < \infty$ então $\lim_{t \to b^-} \|x(t)\| = \infty$

Exemplo 2.2: (Abstrato) Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $\{T(t): t \geq 0\}$ um C^0- semigrupo de operadores lineares limitados em X. Então a aplicação $\pi : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ dada por $\pi(t,x) = T(t)x$ define um sistema dinâmico em X. Basta verificar a continuidade de π, pois as outras propriedades são imediatas. Para verificarmos a continuidade seja (t_n, x_n) seqüência em $\mathbb{R}^+ \times X$ tal que $(t_n, x_n) \longrightarrow (t,x)$. Então temos:

$$\left\|\pi(t_n,x_n) - \pi(t,x)\right\| = \left\|T(t_n)x_n - T(t)x\right\| \leq \left\|T(t_n)x_n - T(t_n)x\right\| +$$

$$+ \left\|T(t_n)x - T(t)x\right\| \leq \left\|T(t_n)\right\| \cdot \left\|x_n - x\right\| + \left\|T(t_n)x - T(t)x\right\| \leq$$

$\leq M\, e^{wt_n} \cdot \left\|x_n - x\right\| + \left\|T(t_n)x - T(t)x\right\|$ para algumas constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$. Agora, $M\, e^{wt_n}\left\|x_n - x\right\| \longrightarrow M.e^{wt}.0 = 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Também, como a aplicação $t \longrightarrow T(t)x$ é contínua de $\mathbb{R}^+$ em X para todo x $\in$ X fixo temos também que $\left\|T(t_n)x - T(t)x\right\| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, donde segue a continuidade de π. Tal sistema dinâmico está associado à equação diferencial $\dot{u} = Au$, $u(0) = x$, onde A é o gerador infinitesimal de $T(t)$. O próximo exemplo é um caso particular.

Exemplo 2.3: (Equação do Calor)

Na secção 1.2 do capítulo 1 tratamos da equação do calor em $L^2(\Omega)$, e este dá exemplo de um sistema dinâmico $\pi : \mathbb{R}^+ \times L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, $(t,u_0) \longrightarrow \pi(t,u_0) = u(t) = e^{\Delta t}u_0$.

Verificaremos agora a compacidade do fluxo $\pi(\cdot,u_0)$, qualquer que seja $u_0 \in L^2(\Omega)$. Vimos em 1.2 que o operador $A = -\Delta$ é setorial e Re $\sigma(A) > 0$. Logo podemos definir A^{α} para todo $\alpha > 0$, com domínio $H^{\alpha} = \mathcal{D}(A^{\alpha})$ e norma $\|u\|_{\alpha} = \|A^{\alpha}u\|_{L^2}$, e temos que a inclusão $H^{\alpha} \subset H^{\beta}$ é compacta se $\alpha > \beta \geq 0$, pois $A = -\Delta$ tem resolvente compacto.

Afirmamos que $e^{\Delta t} : H^{\alpha} \longrightarrow H^{\alpha}$, $t > 0$, $0 \leq \alpha < 1$ é compacto. De fato, seja $B \subset H^{\alpha}$ limitado, digamos $\|u\|_{\alpha} = \|A^{\alpha}u\|_{L^2} \leq K$ para todo $u \in B$. Temos então que

$$(3)\quad \left\|e^{\Delta t}u\right\|_{1} = \left\|A\, e^{\Delta t}u\right\|_{L^2} = \left\|A^{1-\alpha} \,.\, e^{\Delta t}A^{\alpha}\, u\right\|_{L^2} \leq \left\|A^{1-\alpha}.e^{\Delta t}\right\|_{\mathcal{L}(L^2)} . \left\|A^{\alpha}u\right\|_{L^2}$$

$\leq C_{1-\alpha} \,.\, t^{\alpha-1} \,.\, e^{-\delta t} \,.\, K = M_{\alpha,t} \,.\, K$, onde usamos o teorema 5.10 do capítulo zero. Logo obtemos que $e^{\Delta t}(B)$ é limitado em $H^1 = \mathcal{D}(\Delta) = H^2 \cap H^1_0$ e como $H^1 \hookrightarrow H^{\alpha}$ é compacta segue o resultado.

Disso podemos concluir, em particular, a compacidade do fluxo $\pi(t, u_0) = e^{\Delta t}u_0$ em L^2. De fato, precisamos verificar que $\left\{e^{\Delta t}u_0 \;;\; t \geq 0\right\}$ é relativamente compacto em L^2. Ora, $\left\{e^{\Delta t}u_0 \;;\; t \geq 0\right\} =$ $= \left\{e^{\Delta t}u_0 \;;\; 0 \leq t \leq 1\right\} \cup \left\{e^{\Delta t}u_0 \;;\; t > 1\right\}$. Agora, como $[0,1]$ é compacto e $t \longrightarrow e^{\Delta t}u_0$ é contínua obtemos que $\left\{e^{\Delta t}u_0 \;;\; 0 \leq t \leq 1\right\}$ é compacto em L^2. Também, como $B = \left\{u_0\right\}$ é limitado temos $\left[\text{usando a desigualdade (3) com } K = \left\|u_0\right\|\right]$ que $\left\|e^{\Delta t}u_0\right\|_1 \leq C_{1-\alpha} \,.\, \left\|u_0\right\| \;\forall\, t > 1$. Logo $\left\{e^{\Delta t}u_0 ;\; t > 1\right\}$ é limitado em H^1, e como $H^1 \hookrightarrow H^{\alpha}$ é compacta para $0 \leq \alpha < 1$ então $\left\{e^{\Delta t}u_0 \;;\; t > 1\right\}$ é relativamente compacto em H^{α} , e em particular relativamente compacto em L^2.

Exemplo 2.3': **(um caso não-linear)**

Veremos agora que a propriedade de compacidade do exemplo 2.3 ainda vale no seguinte caso não-linear:

$$(4)\quad \begin{cases} \dot{u} - \Delta u = f(u) & ; \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \in H = L^2(\Omega) \end{cases}$$

com a seguinte hipótese na função f :

$$(5)\quad \begin{cases} f : H^\alpha \longrightarrow H \text{ para algum } 0 \le \alpha < 1 \, , \\ \|f(u) - f(v)\|_H \le K.\|u - v\|_\alpha \end{cases}$$

A condição acima diz que f é Lipschitziana, e o fato de $\alpha < 1$ obriga f estar definida num espaço "maior" que $\mathcal{D}(\Delta)$.

O teorema 0.2.3 do capítulo um diz em particular que (4) admite uma única solução local u(t) definida em [0,T) com $u(t) \in \mathcal{D}(\Delta)$ para $t > 0$. Supondo que $T = \infty$ temos, colocando $u(t) = T(t)u_0$, que $T(t) : H^\alpha \longrightarrow H^\alpha$ é um semi-grupo fortemente contínuo de operadores.

TEOREMA 2.6: Se T(t) leva conjuntos limitados em conjuntos limitados para t em compactos de $[0,\infty)$, então $T(t) : H^\alpha \longrightarrow H^\alpha$ é compacto para $t > 0$.

Demonstração: Sabemos que (fórmula da variação das constantes) $u(t) = T(t)\, u_0 = e^{\Delta t}\, u_0 + \int_0^t e^{\Delta(t-s)} f(T(s)u_0)ds$, para $t \ge 0$ e $u_0 \in H^\alpha$. A denotará o operador $-\Delta$, como antes.

Tome M limitado em H^α. Devemos provar que T(t)(M) é relativamente compacto em H^α para $t > 0$ fixado. Ora, $T(t)(M) =$

$$= \left\{ e^{\Delta t}u_0 + \int_0^t e^{\Delta(t-s)} f(T(s)u_0)ds : u_0 \in M \right\} \subset M_I + M_{II} \text{ , onde}$$

$$M_I = \left\{ e^{\Delta t}u_0 : u_0 \in M \right\} \text{ e } M_{II} = \left\{ \int_0^t e^{\Delta(t-s)} f(T(s)u_0)\, ds : u_0 \in M \right\}.$$

É claro que M_I é pré-compacto, pois já sabemos que $e^{\Delta t} : H^\alpha \longrightarrow H^\alpha$ é compacto. Vejamos agora que M_{II} também é pré-compacto em H^α. Em primeiro lugar é lógico que $M_{II} = \left\{ \int_0^t e^{\Delta s} f(T(t-s)u_0)ds : u_0 \in M \right\}$

Seja agora $\varepsilon \in \mathbb{R}$ com $0 < \varepsilon < t$. Logo $M_{II} \subset M_\varepsilon + M_{III}$, onde

$$M_\varepsilon = \left\{ \int_0^\varepsilon e^{\Delta s} f(T(t-s)u_0)ds : u_0 \in M \right\} \text{ e } M_{III} = \left\{ \int_\varepsilon^t e^{\Delta s} f(T(t-s)u_0)ds : u_0 \in M \right\} =$$

$$= \left\{ e^{\Delta\varepsilon} \int_\varepsilon^t e^{\Delta(s-\varepsilon)} f(T(t-s)u_0)ds : u_0 \in M \right\}$$

. Afirmamos que M_{III} é pré-compacto em H^α. De fato, por hipótese temos que

$\left\{ T(t-s)u_0 : u_0 \in M \text{ e } 0 \le s \le t \right\}$ é limitado em H^α. Logo, como f é Lipschitziana obtemos que $\left\{ f(T(t-s)u_0) ; u_0 \in M , 0 \le s \le t \right\}$ é limitado em L^2. Digamos $\left\| f(T(t-s)u_0) \right\|_{L^2} \le \tilde{K}$ $\forall\, u_0 \in M$ e $\forall\, 0 \le s \le t$.

Obtemos então que

$$\left\| \int_\varepsilon^t e^{\Delta(s-\varepsilon)} f(T(t-s)u_0)ds \right\|_\alpha = \left\| A^\alpha \left[\int_\varepsilon^t e^{\Delta(s-\varepsilon)} f(T(t-s)u_0)ds \right] \right\|_{L^2} \le$$

$$\le \int_\varepsilon^t \left\| A^\alpha e^{\Delta(s-\varepsilon)} \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \cdot \left\| f(T(t-s)u_0) \right\|_{L^2} ds \le \int_\varepsilon^t C_\alpha \cdot (s-\varepsilon)^{-\alpha} . \tilde{K}\, ds \text{ devido}$$

ao teorema 5.10 do capítulo 0, onde $C_\alpha < \infty$. Agora,

$\int_\varepsilon^t C_\alpha\, \tilde{K}(s-\varepsilon)^{-\alpha}\, ds = C_\alpha\, \tilde{K} \cdot \frac{(t-\varepsilon)^{1-\alpha}}{1-\alpha} < C_\alpha\, \tilde{K}\, \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Portanto obtemos que $\left\{\int_\varepsilon^t e^{\Delta(s-\varepsilon)} f(T(t-s)u_0)ds : u_0 \in M\right\}$ é limitado em H^α , e como $e^{\Delta\varepsilon} : H^\alpha \longrightarrow H^\alpha$ é compacto (já provamos o caso linear) segue que M_{III} é relativamente compacto, como afirmamos.

Resumindo, temos visto que $T(t)(M) \subset M_I + M_{II} \subset M_I + M_\varepsilon + M_{III}$ e provamos que M_I e M_{III} são pré-compactos em H^α. Vamos agora estimar o diâmetro de M_ε .

Ora, $\left\|\int_0^\varepsilon e^{\Delta s} f(T(t-s)u_0)ds\right\|_\alpha = \left\|A^\alpha \int_0^\varepsilon e^{\Delta s} f(T(t-s)u_0)\right\|_{L^2} \le$

$$\le \int_0^\varepsilon \left\|A^\alpha e^{\Delta s}\right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \cdot \left\|f(T(t-s)u_0)\right\|_{L^2} ds \le \int_0^\varepsilon C_\alpha \cdot s^{-\alpha} \cdot \tilde{K}\, ds = C_\alpha\, \tilde{K}\, \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

$\forall\, u_0 \in M$. Logo diam $M_\varepsilon \le C\, \varepsilon^{1-\alpha}$.

Disso segue que $T(t)(M)$ é relativamente compacto em H^α. Basta mostrar que para todo $\delta > 0$ existe uma δ-rede para $T(t)(M)$. Ora, temos visto que $T(t)(M) \subset M_I + M_\varepsilon + M_{III}$, com M_I e M_{III} pré-compactos. Logo existem $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset M_I + M_{III}$ tais que $M_I + M_{III} \subset \bigcup_{i=1}^k B\left[x_i, \delta/4\right]$ onde $B\left[x_i, \delta/4\right] = \left\{y \in H^\alpha : \|y - x_i\|_\alpha < \delta/4\right\}$. Também escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $c\varepsilon^{1-\alpha} < \delta/4$ temos que $M_\varepsilon \subset B\left[x_0; \delta/4\right]$, qualquer que seja $x_0 \in M_\varepsilon$. Logo $\left\{x_0, x_1, \dots, x_k\right\}$ é tal que $T(t)(M) \subset$

$$\subset B\left[x_0; \delta/4\right] + \bigcup_{i=1}^k B\left[x_i, \delta/4\right] = \bigcup_{i=1}^k \left[B\left[x_0; \delta/4\right] + B\left[x_i, \delta/4\right]\right],$$

e temos que $\mathrm{diam}\left[B\left[x_0; \delta/4\right] + B\left[x_i, \delta/4\right]\right] \le \mathrm{diam}\, B\left[x_0; \delta/4\right] +$

$+ \operatorname{diam} B\left[x_1, \delta/4\right] = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$, ou seja, $\left\{x_1,\ldots,x_k\right\}$ é uma δ-rede para $T(t)(M)$, como queríamos. ∎

Corolário: Se o C^0- semigrupo $T(t)$ anterior satisfaz a condição do teorema acima então o fluxo $\pi(t,u_0) = T(t)u_0$ em H^α é compacto, $\forall\ 0\le\alpha<1$.

Demonstração: Análoga à feita no caso linear. ∎

Exemplo 2.4: Equação da Onda com Atrito

Na secção 1.4 do capítulo 1 tratamos da equação da onda com atrito como uma equação diferencial em $H = H_0^1 \times L^2$. Lá vimos que esse problema tem uma única solução mild $\omega(t) = (u(t,\cdot),\ v(t,\cdot)) = = T(t)\omega_0 + \int_0^t T(t-s)F(\omega(s))ds = S(t)\omega_0$. Verificaremos agora que o fluxo $\pi(\cdot,\omega_0)$ por $\omega_0 = (u_0,v_0)$ é compacto em $H_0^1\times L^2$ qualquer que seja $\omega_0 \in H_0^1 \times L^2$. Para isso devemos provar que $\left\{u(t,\cdot)\ :\ t \ge 0\right\}$ é relativamente compacto em $H_0^1(\Omega)$ e que $\left\{u_t(t,\cdot) = v(t,\cdot)\ :\ t \ge 0\right\}$ é relativamente compacto em $L^2(\Omega)$. Suponhamos inicialmente que $(u_0,\ v_0) \in (H^2\cap H_0^1)\times H_0^1$, o domínio do gerador do semigrupo $T(t)$ em $H_0^1 \times L^2$. Então, como esse domínio é invariante pelo semigrupo segue que $(u(t,\cdot),\ v(t,\cdot)) \in \left[H^2\cap H_0^1\right] \times H_0^1\ \ \forall\ t \ge 0$.

O mecanismo dissipativo se manifesta pela <u>integral de energia</u> da equação

(6) $\quad u_{tt} = \Delta u - a(x)q(u_t)$, a saber

$$(7)\qquad \frac{d}{dt}\left[E(u(t,\cdot),\ v(t,\cdot))\right] = -\int_\Omega a(x)q(u_t(t,x))u_t(t,x)dx \le 0\ ,\quad \text{onde}$$

$$(8)\qquad E(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\cdot\int_\Omega\left[\psi^2(x) + \|\nabla\varphi(x)\|^2\right]dx\ ,\ \forall\ (\varphi,\psi)\in H_0^1\times L^2\ .$$

O funcional $E : H_0^1 \times L^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ acima é chamado de <u>energia</u>, pois para cada $t \ge 0$ fixado, $E(u(t,\cdot),\ u_t(t,\cdot))$ dá a energia mecânica do sistema no instante t. Para detalhes consulte por exemplo [4] à página 139.

Agora, com $v = u_t$ a equação (6) fica

$$(9)\qquad v_t = \Delta u - a(x)q(v)$$

e derivando com relação a t obtemos

$$(10)\qquad v_{tt} = \Delta v - a(x)q'(v)v_t\ .$$

Assim, a integral de energia de (10) fica

$$(11)\qquad \frac{d}{dt}\left[E(v(t,\cdot),\ v_t(t,\cdot))\right] = -\int_\Omega a(x)q'(v(t,x))v_t^2(t,x)dx \le 0\ .$$

A equação (11) nos diz que $\{v(t,\cdot)\ :\ t \ge 0\}$ é limitado em $H_0^1(\Omega)$. De fato,

$$\left\|v(t,\cdot)\right\|^2_{H_0^1} = \int_\Omega \left\|\nabla v(t,x)\right\|^2 dx \le \int_\Omega \left[v_t(t,x)^2 + \left\|\nabla v(t,x)\right\|^2\right]dx =$$

$= 2E(v(t,\cdot),v_t(t,\cdot)) \le 2E\left[v(0,\cdot),\ v_t(0,\cdot)\right] = M,$ pois (11) diz que E é não-crescente ao longo do fluxo $(v(t,\cdot),\ v_t(t,\cdot))$.

Logo, como a imersão $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ é compacta, segue que

(12) $\left\{v(t,\cdot) : t \geq 0\right\}$ é relativamente compacto em $L^2(\Omega)$.

Também, como

$$\left\|v_t(t,\cdot)\right\|^2_{L^2} = \int_\Omega v_t(t,x)^2 dx \leq E\left[v(t,\cdot), v_t(t,\cdot)\right] \leq M \text{ , segue que}$$

(13) $\left\{ v_t(t,\cdot) : t \geq 0 \right\}$ é limitado em $L^2(\Omega)$.

Logo, de (6) segue que

(14) $\left\{ \Delta u(t,\cdot) : t \geq 0 \right\}$ é limitado em $L^2(\Omega)$.

De fato, da hipótese sobre q tiramos que $q^2(y) \leq K^2y^2$ $\forall$ $y \in \mathbb{R}$. Assim, como $a(\cdot) \in C^1_c(\Omega)$, vem $\int_\Omega a^2(x)q^2(v(t,x))dx \leq$ $\leq C_a \cdot \int_\Omega q^2(v(t,x))dx \leq C_a K^2 \cdot \int_\Omega v^2(t,x)dx = B^2 \cdot \left\|v(t,\cdot)\right\|^2_{L^2} \leq$ $\leq B^2 \cdot \left\|v(t,\cdot)\right\|^2_{H^1_0} \leq B^2M = L$, pois já sabemos que $\{v(t,\cdot) : t \geq 0\}$ é limitado em $H^1_0(\Omega)$. Temos provado então que

(15) $\left\|a(\cdot)\ q(v(t,\cdot))\right\|_{L^2(\Omega)} \leq L < \infty$, $\forall$ $t \geq 0$.

De (9), (13) e (15) obtemos

$$\left\|\Delta u(t,\cdot)\right\|_{L^2} = \left\|v_t(t,\cdot) + a(\cdot)q(v(t,\cdot))\right\|_{L^2} \leq \left\|v_t(t,\cdot)\right\|_{L^2} + \left\|a(\cdot)q(v(t,\cdot))\right\|_{L^2} \leq$$

$\leq \sqrt{M} + L$, donde segue (14)

Agora, $\left\{\Delta u(t,\cdot) : t \geq 0\right\}$ limitado em $L^2(\Omega)$ implica que

$\left\{u(t,\cdot) : t \geq 0\right\}$ é limitado em $H^2(\Omega)$, e como a inclusão $H^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ é compacta obtemos que $\left\{u(t,\cdot) : t \geq 0\right\}$ é relativamente compacto em $H_0^1(\Omega)$. Essa afirmação, junto com (12) nos dá que o fluxo $\pi(t,u_0,v_0)$ é compacto em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, como queríamos.

O caso em que $(u_0,v_0) \notin \mathcal{D}(A)$ segue facilmente usando-se o fato de que $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_0^1 \times L^2$. ■

Tendo verificado a compacidade do fluxo $\pi(\cdot,u_0,v_0) = (u(t,\cdot), v(t,\cdot))$ em $H = H_0^1 \times L^2$, usaremos agora essa propriedade para mostrar que $\pi(t,u_0,v_0) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$ em $H_0^1 \times L^2$, ou seja, que as soluções da equação da onda com atrito decaem a zero quando $t \longrightarrow \infty$, qualquer que seja a condição inicial (u_0,v_0). Bem, como $\pi(\cdot,u_0,v_0)$ é compacto então o conjunto ω-limite $\Omega(u_0,v_0)$ é não-vazio. Verificamos acima que o funcional energia $E : H \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $E(\varphi,\psi) = \frac{1}{2} \cdot \int_\Omega \left[\psi(x)^2 + \left\|\nabla\varphi(x)\right\|^2\right]dx$ é uma função de Lyapunov para π em H. Logo, como funções de Lyapunov são constantes nos conjuntos ω-limite obtemos

$$(1) \qquad 0 = \frac{d}{dt}\left\{E\left[\hat{u}(t,\cdot),\ \hat{v}(t,\cdot)\right]\right\} = -\int_\Omega a(x)q(\hat{v}(t,x))\hat{v}(t,x)dx,$$

onde $\left[\hat{u}(t,\cdot),\ \hat{v}(t,\cdot)\right] = S(t)(\hat{u}_0,\hat{v}_0)$, com $(\hat{u}_0,\hat{v}_0) \in \Omega(u_0,v_0)$.

Agora, como o integrando em (1) é não-negativo em quase toda parte de Ω (isto é, a menos de um conjunto com medida de Lebesgue nula) temos que

$$(2) \qquad a(x).q(\hat{v}(t,x)).\hat{v}(t,x) = 0 \quad \forall\ t \geq 0 \ \text{ e } \ \forall\ x \in A = \Omega \setminus N \text{ , onde}$$

$\mu(N) = 0$ (μ = medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$).

Dessa forma temos que $\hat{v}(t,x) = 0 \quad \forall\, t \geq 0$ e $\forall\, x \in \operatorname{spt}(a(\cdot)) \cap A = B$, onde $\operatorname{spt}(a(\cdot)) = \{x : a(x) \neq 0\}$. Em particular $\hat{u}$ é solução da equação da onda sem atrito. De fato, $\hat{u}_{tt}(t,x) = \Delta\, \hat{u}(t,x) - a(x)q(\hat{v}(t,x))$. Agora, dado $x \in \Omega$ temos $x \in B$ ou $x \in \Omega \setminus B$. Se $x \in B$ então $\hat{v}(t,x) = 0$, donde sai que $a(x).q(\hat{v}(t,x)) = 0$ pois $q(0) = 0$, e portanto $\hat{u}_{tt}(t,x) = \Delta\hat{u}(t,x)$. Também é fácil ver que se $x \in \Omega \setminus B$ então $a(x).q(\hat{v}(t,x) = 0$, e portanto $\hat{u}_{tt}(t,x) = \Delta\hat{u}(t,x)$. Ou seja, em qualquer situação temos que a equação da onda sem atrito é satisfeita por $\hat{u}(t,x)$. Então, usando o método de separação de variáveis obtemos a seguinte expressão para $\hat{u}(t,x)$:

$$(3) \qquad \hat{u}(t,x) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\sqrt{|\lambda_n|}\; t} . \; \omega_n(x) \quad ,$$

onde $\left\{0 > \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots\right\}$ é o espectro do Laplaciano e ω_n são as auto-funções associadas, isto é,

$$(4) \qquad \begin{cases} \Delta\omega_n = \lambda_n\, \omega_n & \text{em } \Omega \\ \omega_n = 0 & \text{em } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Assim obtemos

$$(5) \qquad 0 = \hat{v}(t,x) = \hat{u}_t(t,x) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} i\sqrt{|\lambda_n|}\; t . e^{i\sqrt{|\lambda_n|}\; t} . \omega_n(x) \; ,$$

$\forall\, t \geq 0$, $\forall\, x \in B$.

Agora, para cada $x \in B$ fixado, (5) está dizendo que $i\lambda_n \omega_n(x)$ são os coeficientes de Fourier da função identicamente nula, e portanto $\omega_n(x) = 0 \quad \forall\, n = 1,2,\ldots$. Como x é arbitrário tiramos que $\omega_n = 0$ em B $\forall\, n = 1,2,\ldots$. Agora, como as soluções de (4) são analíticas em Ω e Ω é conexo, segue que $\omega_n(x) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega$. Portanto

$(\hat{u}(t,\cdot),\ \hat{v}(t,\cdot)) = (0,0)$ $\forall\ t \geq 0$ e $\forall\ x \in \Omega$. O que temos provado então é que $\Omega(u_0,v_0) = \{0\}$. Portanto toda solução da equação da onda tende a zero quanto $t \longrightarrow \infty$, qualquer que seja a condição inicial $(u_0,v_0) \in H_0^1 \times L^2$.

Exemplo 2.5 (EDFR)

Neste ponto assumiremos que as soluções de $x'(t) = f(x_t)$ com condição inicial $x_0 = \varphi \in C([-r,0];\mathbb{R}^n)$ existem, dependem continuamente de φ e estão definidas para todo $t \geq 0$. Já vimos no capítulo 1 teoremas que dão condições suficientes em f para termos tais propriedades. Agora, colocando $T(t)\varphi = x_t(\cdot,\varphi)$, temos que $T(t):C \longrightarrow C$ é um semigrupo não-linear que possui a seguinte propriedade de compacidade:

TEOREMA 2.5.1:

Se $f:C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é limitada e $T(t):C \longrightarrow C$ $(t \geq 0)$ é limitada para t em compactos de $[0,\infty)$ então:

(1) $T(t)$ é compacta para $t \geq r$

(2) $T(t)$ não é compacta para $0 \leq t < r$, mas existe uma norma equivalente em C tal que

$$T(t) = S(t) + U(t)$$

onde $S(t)$ é uma contração e $U(t)$ é compacta.

Antes da demonstração coloquemos o:

Lema 2.5.2: Sejam $(X,\|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $A : X \longrightarrow X$ linear e limitado. Denotemos r^* o raio espectral de A, isto é, $r^* = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf\limits_{n\geq 1} \|A^n\|^{1/n}$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe uma norma $|\cdot|$ em X equivalente à norma $\|\cdot\|$ e tal que $|A| \leq r^* + \varepsilon$.

(Obs.: Sem perigo de confusão continuaremos a usar $|\cdot|$ para denotar a norma do operador A).

Demonstração do lema: Definamos $|\cdot| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n x\|}{(r^* + \varepsilon)^n}$$

A série acima converge, pois:

$0 \leq \dfrac{\|A^n x\|}{(r^* + \varepsilon)^n} \leq \dfrac{\|A^n\| . \|x\|}{(r^* + \varepsilon)^n}$ $\forall$ n , e veremos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\|}{(r^* + \varepsilon)^n}$

converge pelo critério da raiz. De fato, como $r^* = \inf\limits_{n\geq 1} \left\|A^n\right\|^{1/n}$ temos

que $\left\|A^n\right\|^{1/n} < r^* + \varepsilon/2$ $\forall\ n \geq N(\varepsilon)$. Logo, $\|A^n\| < (r^* + \varepsilon/2)^n$ $\forall\ n \geq N$,

e daí $\dfrac{\|A^n\|}{(r^* + \varepsilon)^n} < \left[\dfrac{r^* + \varepsilon/2}{r^* + \varepsilon}\right]^n$ $\forall\ n \geq N$, o que dá

$$\left[\frac{\|A^n\|}{(r^* + \varepsilon)^n}\right]^{1/n} < \frac{r^* + \varepsilon/2}{r^* + \varepsilon} < 1 \ .$$

Logo o número real $|x| = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n x\|}{(r^* + \varepsilon)^n}$ é bem

definido para todo $x \in X$, e é imediato verificar que $|\cdot|$ define uma norma em X.

Agora, é claro que $\|x\| \leq |x|$ para todo $x \in X$, e pelo que vimos acima temos

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n x\|}{(r^* + \varepsilon)^n} \leq \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\|}{(r^* + \varepsilon)^n}\right] . \|x\| = K. \|x\| \quad \forall\ x \in X \qquad ,$$

ou seja, $|\cdot|$ é equivalente a $\|\cdot\|$.

Falta agora ver que $|A| \leq r^* + \varepsilon$. Ora, para todo $x \in X$ temos

$$|Ax| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^{n+1}x\|}{(r^* + \varepsilon)^n} = (r^* + \varepsilon) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^{n+1}x\|}{(r^* + \varepsilon)^{n+1}} \leq (r^* + \varepsilon) \cdot |x| \quad ,$$

ou seja, $|A| \leq r^* + \varepsilon$, o que completa a prova do lema. ∎

Demonstração do teorema: Provemos (1). Para isso sejam $t \geq r$ e $B \subset C$ limitado. Devemos provar que $T(t)B$ é relativamente compacto em C, i.é, que $\left\{x_t(\cdot,\varphi) \mid \varphi \in B\right\}$ é relativamente compacto em C. Pelo teorema de Ascoli - Arzelá é suficiente mostrar que:

(i) $\left\{x_t(\theta, \varphi) \ ; \ \varphi \in B\right\}$ é relativamente compacto em $\mathbb{R}^n$,

para todo $\theta \in [-r, 0]$, e

(ii) $\left\{x_t(\cdot, \varphi) \ : \ \varphi \in B\right\}$ é equicontínuo.

A propriedade (i)é imediata, pois como $T(t)B$ é limitado existe constante $M > 0$ tal que $\left\|x_t(\cdot,\varphi)\right\| \leq M$ para toda $\varphi \in B$. Assim $\left\{x_t(\theta, \varphi) \ ; \ \varphi \in B\right\}$ é limitado em $\mathbb{R}^n$, donde relativamente compacto em $\mathbb{R}^n$ $\forall \ \theta \in [-r, 0]$.

A propriedade (ii) segue como abaixo:

Seja $\varepsilon > 0$. Queremos $\delta > 0$ tal que se $|\theta_1 - \theta_2| < \delta$ então $\left|x_t(\theta_1, \varphi) - x_t(\theta_2, \varphi)\right| < \varepsilon \quad \forall \ \varphi \in B$. Ora,

$$\left|x_t(\theta_1, \varphi) - x_t(\theta_2, \varphi)\right| = \left|x(t + \theta_1, \varphi) - x(t + \theta_2, \varphi)\right| =$$

$$= \left|\int_{t+\theta_2}^{t+\theta_1} \frac{d}{ds} \left[x(s, \varphi)\right] ds\right| = \left|\int_{t+\theta_2}^{t+\theta_1} f(x_s(\cdot, \varphi))ds\right| =$$

$$= \left|\int_{t+\theta_2}^{t+\theta_1} f(T(s)\varphi)ds\right| \le \int_{t+\theta_2}^{t+\theta_1} \left|f(T(s)\varphi)\right| ds \le L.\left|\theta_1 - \theta_2\right| ,$$ pois sendo

$D = \left\{T(s)\varphi \; ; \; \varphi \in B \text{ e } t + \theta_2 \le s \le t + \theta_1\right\}$ limitado em C então f(D) é limitado em $\mathbb{R}^n$, donde $|f(T(s)\varphi| \le L \quad \forall\, \varphi \in B$ e $t + \theta_2 \le s \le t + \theta_1$ para alguma constante $L > 0$. Logo basta tomar $\delta = \varepsilon/_L$ que teremos o desejado.

Observe que foi importante termos $t \ge r$ pelo seguinte fato: sendo $t \ge r$ então os números $t + \theta_1$ e $t + \theta_2$ são ≥ 0 para todo θ_1, $\theta_2 \in [-r,0]$. Logo é lícito tomarmos a derivada $d/_{ds}\,(x(s,\varphi))$ para $s \ge 0$, pois só temos certeza da diferenciabilidade de $x(\cdot, \varphi)$ em $[0,\infty)$. Em $[-r,0)$ não podemos afirmar nada, pois aí temos $x(\cdot,\varphi) = \varphi(\cdot)$, a qual pode ser apenas contínua, e não diferenciável.

Provemos agora a afirmação 2:

Pela fórmula da variação das constantes temos

$$T(t)\varphi(\theta) = x(t + \theta, \varphi) = \begin{cases} \varphi(t + \theta) & \text{se } -r \le t + \theta \le 0 \\ \varphi(0) + \int_0^{t+\theta} f(T(s)\varphi)ds & \text{se } t + \theta \ge 0 \end{cases}$$

e portanto colocando, para cada $t \ge 0$ fixo,

$$S(t)\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(t + \theta) - \varphi(0) & \text{se } -r \le t + \theta \le 0 \\ 0 & \text{se } t + \theta \ge 0 \end{cases}$$

temos que $S(t) : C \longrightarrow C$ é claramente linear e limitado, e mais ainda, $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \geq 0$. Em particular temos $S(nt) = S(t)^n$ para todo inteiro $n \geq 1$ (observe que não é verdade que $S(o) = I$).

Calculemos o raio espectral $r^* = r^*(t)$ do operador $S(t)$. Temos $r^* = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left\| S(t)^n \right\|^{1/n}$.

Agora, se $t_0 > r$ então $S(t_0) \equiv 0$, pois $t_0 > r$ implica $t_0 + \theta \geq 0$ para todo $\theta \in [-r, 0]$. Ora, mas para n suficientemente grande temos $nt > r$, donde $S(nt) \equiv 0$, donde $r^*(t) = 0$ para todo $t > 0$. Pelo lema anterior, dado $\varepsilon = 1/2$ existe norma $|\cdot|$ em C equivalente à norma do supremo $\|\cdot\|$ tal que $|S(t)| \leq 1/2 < 1$, ou seja, $S(t) : (C, |\cdot|)$ é uma contração. Agora, dado que $S(t)$ foi definido como acima então $U(t) = T(t) - S(t)$ é dado por

$$U(t)\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(o) & \text{se} \quad -r \leq t + \theta \leq 0 \\ \varphi(o) + \displaystyle\int_0^{t+\theta} f(T(s)\varphi)ds & \text{se} \quad t + \theta \geq 0 \end{cases}$$

e é fácil concluir a compacidade de $U(t)$, $o \leq t \leq r$, via Ascoli - Arzelá de maneira análoga ao ítem (1) para $T(t)$. Agora, para $t > r$ fazemos o seguinte: Seja $B \subset C$ limitado. Temos $U(t)B = U(t-r)U(r)B$; agora, como $U(r)B$ é relativamente compacta e $U(t-r)$ contínua então $U(t-r)U(r)B$ é relativamente compacto, como queríamos. ■

2.3 Equações Diferenciais Ordinárias Não-Autônomas - Comportamento Assintótico

Nesta seção estaremos estudando equações do tipo

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} ,$$

onde $f : \mathbb{R} \times W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, com $W \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $x_0 \in W$.

Definição 1: Uma <u>solução</u> de (1) é uma função $x : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida num intervalo aberto I contendo zero, a qual é diferenciável em I e satisfaz $x'(t) = f(t,x(t))$ para todo $t \in I$ e $x(0) = x_0$.

Definição 2: Diremos que $f : \mathbb{R} \times W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é <u>admissível</u> se o problema (1) tem solução única, e se esta depende continuamente de x_0. Neste caso escreveremos $\varphi(\cdot, x_0, f)$ para denotar a solução.

Definição 3: Dada $f : \mathbb{R} \times W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tau \geq 0$ definimos a <u>transladada</u> $f_\tau : \mathbb{R} \times W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de f por $f_\tau(t,x) = f(t + \tau, x)$.

Se $\tau_n \longrightarrow \tau$ temos que $f_{\tau_n}(t,x) = f(t + \tau_n, x) \longrightarrow f(t + \tau, x) = f_\tau(t, x)$, com convergência uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{R} \times W$, portanto tomaremos em $C(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ a topologia compacto-aberta, e denotaremos tal topologia por $C_{ca}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$, ou simplesmente C_{ca} quando não houver confusão. No conjunto $\mathcal{F} = \left\{f_\tau : \tau \geq 0\right\} \subset C_{ca}(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n)$ consideraremos a topologia induzida de C_{ca}, e denotaremos esta topologia por $\mathcal{F}_{ca}$.

Em $X = W \times \mathcal{F}_{ca}$ consideramos a topologia produto (obs.: a topologia de W é a induzida de $\mathbb{R}^n$). Desse modo X é metrizável, e uma métrica que gera tal topologia é dada por

$$(2) \qquad d\left[(x,f),\ (\hat{x},\ \hat{f})\right] = \left\|x - \hat{x}\right\| + \rho(f,\ \hat{f}) \quad ,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$, e ρ é uma <u>métrica</u> <u>básica</u> em C_{ca}, isto é, ρ é uma métrica em $C(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$ que gera a topologia compacto-aberta. Por exemplo, ρ pode ser a dada abaixo:

Seja $\left\{K_n\right\}_{n\geq 1}$ uma seqüência de compactos de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\mathbb{R} \times W = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Então a aplicação $\rho : C(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n) \times C(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n) \longrightarrow C(\mathbb{R} \times W,\ \mathbb{R}^n)$ dada por $\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \sup_{x \in K_n} \frac{\|f(x) - g(x)\|}{1 + \|f(x) - g(x)\|}$

é claramente bem definida e, pela proposição 2.3.2 do capítulo zero, gera a topologia compacto-aberta em $C(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$.

Observamos que existem outras normas equivalentes à acima e que ainda geram a topologia compacto-aberta. A escolha de uma delas depende da conveniência.

Observação: daqui em diante estaremos considerando somente funções admissíveis $f : \mathbb{R} \times W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfazem a <u>propriedade</u> <u>da</u> <u>existência</u> <u>global</u>, isto é, com a propriedade de que a solução $\varphi(t,x_0,f)$ esteja definida para todo $t \geq 0$.

Com isso fica bem definida a aplicação $\pi : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ dada por $\pi(t,\ x_0,f) = (\varphi(t,\ x_0,\ f),\ f_t)$. (3)

Provaremos agora que a aplicação π acima define um sistema dinâmico em $X = W \times \mathcal{F}_{ca}$. Antes necessitamos do:

Lema 4: (Kamke)

4.1: Seja $(g_n) \subset C_{ca}$ e $g = \lim g_n$, onde a convergência é na topologia compacto-aberta. Seja, para cada n, φ_n uma solução de

$x' = g_n(t,x)$ com $\varphi_n(0) \longrightarrow x_0 \in W$. Então existe uma subseqüência de (φ_n) que converge para uma solução φ de $x' = g(t,x)$ que satisfaz $\varphi(0) = x_0$, e a convergência é uniforme em subconjuntos compactos $J \subset \mathcal{D}(\varphi)$, o domínio de φ.

4.2: Se as soluções de $x' = g(t,x)$ são únicas então $\varphi = \lim \varphi_n$ sendo a convergência uniforme em subconjuntos compactos $J \subset \mathcal{D}(\varphi)$.

Demonstração: Veja [16] .

TEOREMA 5: A aplicação $\pi(t,x_0,f) = (\varphi(t,x_0,f),f_t)$ de $\mathbb{R}^+ \times W \times \mathcal{F}_{ca}$ em $W \times \mathcal{F}_{ca}$ é um sistema dinâmico.

Demonstração: As propriedades $\pi(0, x_0, f) = (x_0, f)$ e $\pi(t + s, x_0, f) = \pi\left[t, \pi\ (s, x_0, f)\right]$ são imediatas, sendo que esta última é conseqüência da propriedade de unicidade das soluções. Vejamos a questão da continuidade de π. Para isso seja $\left(t_n, x_n, f_{\tau_n}\right)$ seqüência em $\mathbb{R}^+ \times W \times \mathcal{F}_{ca}$ tal que $\left(t_n, x_n, f_{\tau_n}\right) \longrightarrow \left(t, x_0, f_\tau\right)$. Devemos provar que $\pi\left(t_n, x_n, f_{\tau_n}\right) \longrightarrow \pi\left(t, x_0, f_\tau\right)$ em $W \times \mathcal{F}_{ca}$, isto é, que $\varphi\left(t_n, x_n, f_{\tau_n}\right) \longrightarrow \varphi\left(t, x_0, f_\tau\right)$ em $\mathbb{R}^n$ e que $f_{t_n + \tau_n} \longrightarrow f_{t+\tau}$ em $\mathcal{F}_{ca}$. A convergência $\varphi\left(t_n, x_n, f_{\tau_n}\right) \longrightarrow \varphi\left(t, x_0, f_\tau\right)$ se verifica pelo lema de Kamke com $g_n = f_{\tau_n}$ e $g = f_\tau$. Só falta então verificar que $f_{t_n + \tau_n} \longrightarrow f_{t+\tau}$ em $C_{ca}\left(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n\right)$. Para isso fixemos então $J \times K \subset \mathbb{R} \times W$, onde J e K são compactos. Devemos verificar que $f_{t_n+\tau_n} \longrightarrow f_{t+\tau}$ uniformemente em J x K. Seja então $\varepsilon > 0$. Procuramos por $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de modo que se $n \geq N$ então $\left\|f_{t_n+\tau_n}(s,x) - f_{t+\tau}(s,x)\right\| < \varepsilon$ para todo $(s,x) \in J \times K$. Ora, como $t_n \longrightarrow t$, existe compacto $\tilde{J} \supset J$ tal que $\left\{t + s\right\} \cup \left\{t_n + s;\ n = 1,2,\ldots\right\} \subset \tilde{J}$, $\forall\, s \in J$. Logo, como $f_{\tau_n} \longrightarrow f_\tau$ em $\mathcal{F}_{ca}$, existe $n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de modo que se $n \geq n_1$ então $\left\|f_{\tau_n}(\lambda,x) - f_\tau(\lambda,x)\right\| < \varepsilon/2$ $\forall\,(\lambda,x) \in \tilde{J} \times K$. Em particular temos

(3) $\left\|f_{\tau_n}(t_n + s,x) - f_\tau(t_n + s,x)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall\, n \geq n_1$ e $\forall\,(s,x) \in J \times K$.

Também, como $f_\tau \in C(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$ então f_τ é uniformemente contínua em $\tilde{J} \times K$. Logo existe $\delta > 0$ tal que se $|s - t| + \|x - y\| < \delta$ então $\left\|f_\tau(s,x) - f_\tau(t,y)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora, como $(t_n+s,x) \longrightarrow (t+s,x)$, existe $n_2 = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de modo que se $n \geq n_2$ então

(4) $\left\|f_\tau(t_n + s,x) - f_\tau(t + s,x)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall\,(s,x) \in J \times K$.

Logo, tomando $N = \text{máx}\left\{n_1,\ n_2\right\}$ obtemos que para $n \geq N$ vale $\left\|f_{t_n+\tau_n}(s,x) - f_{t+\tau}(s,x)\right\| \leq \left\|f_{\tau_n}(t_n+ s,x) - f_\tau(t_n+ s,x)\right\| + \left\|f_\tau(t_n + s,x) - f_\tau(t+s,x)\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\forall\ (s,x) \in J \times K$, ou seja, $f_{t_n+\tau_n} \longrightarrow f_{t+\tau}$ uniformemente e J x K, como queríamos. ■

Nosso objetivo é obter informações de soluções da equação $x' = f(t,x)$ estudando propriedades da dinâmica topológica de π. No entanto, muitos resultados em dinâmica topológica se apoiam no fato do espaço-base X ser completo. Isso não acontece com o espaço $\mathcal{F}_{ca}$, e em particular, não acontece com X. Mas esse problema se resolve, pois com a métrica básica ρ o espaço C_{ca} resulta completo. Logo, tomando $\mathcal{F}^*_{ca} = \overline{\mathcal{F}_{ca}}$, o fecho de $\mathcal{F}_{ca}$ na topologia compacto-aberta, $\mathcal{F}^*_{ca}$ resulta um espaço métrico completo. A questão agora é ver se o sistema dinâmico π em $W \times \mathcal{F}_{ca}$ tem extensão a $W \times \mathcal{F}^*_{ca}$.

Lema 6: A aplicação $\pi^* : \mathbb{R}^+ \times C_{ca} \longrightarrow C_{ca}$ dada por $\pi^*(\tau,f) = f_\tau$ define um sistema dinâmico em C_{ca}.

Demonstração: É imediata, com exceção da continuidade, cuja demonstração está incluida na demonstração do teorema 5, pois π^* é uma projeção de π. ■

Agora, como $\mathcal{F}_{ca}$ é um subconjunto de C_{ca} que é π^*-invariante, então o fecho $\mathcal{F}^*_{ca}$ de $\mathcal{F}_{ca}$ também é π^*- invariante, e portanto a restrição de π^* a $\mathcal{F}^*_{ca}$ ainda tem imagem em $\mathcal{F}^*_{ca}$. Assim a aplicação $(t, x_0, f) \longrightarrow (\varphi(t, x_0, f), f_t)$ definirá um sistema dinâmico em $W \times \mathcal{F}^*_{ca}$ desde que toda $f^* \in \mathcal{F}^*_{ca}$ seja admissível.

Continuaremos a denotar a extensão de π a $W \times \mathcal{F}^*_{ca}$ por π, e ainda escreveremos X para denotar $W \times \mathcal{F}^*_{ca}$.

O próximo teorema dá uma condição suficiente em $f \in C(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$ para que toda $f^* \in \mathcal{F}^*_{ca}$ seja admissível. Neste caso diremos que f é <u>regular</u>.

TEOREMA 7: Seja $f \in C(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$ com a condição: "Dado $K \subset W$ compacto existe constante positiva $C = C(K)$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq C\|x-y\| \quad \forall\ x,y \in K, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}."$$

Então toda $f^* \in \mathcal{F}^*_{ca}$ é admissível.

Demonstração: Seja $f^* \in \mathcal{F}^*_{ca}$. Provemos que f^* é admissível. Faremos isso verificando que f^* satisfaz a mesma desigualdade que f, a qual sabemos ser uma condição suficiente para existência e unicidade de soluções.

Para isso seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Como $f^* \in \mathcal{F}^*_{ca}$, existe seqüência f_{τ_n} em $\mathcal{F}_{ca}$ tal que $f_{\tau_n} \longrightarrow f^*$. Logo, se $I \subset \mathbb{R}$ é compacto, $f_{\tau_n} \longrightarrow f^*$ uniformemente em $I \times K$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon, I, K) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\left\| f_{\tau_n}(s,z) - f^*(s,z) \right\| < \varepsilon/2$ $\forall\ (s,z) \in I \times K$. Assim, escolhendo $n \geq n_0$ temos que

$$\left\| f^*(t,y) - f^*(t,x) \right\| \leq \left\| f^*(t,y) - f_{\tau_n}(t,y) \right\| + \left\| f_{\tau_n}(t,y) - f_{\tau_n}(t,x) \right\| +$$

$$+ \left\| f_{\tau_n}(t,x) - f^*(t,x) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + C.\left\| x - y \right\| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + C\left\| x - y \right\| \ \forall\ x,y \in K \text{ e}$$

$\forall\ t \in I$.

Agora, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos que $\left\| f^*(t,x) - f^*(t,y) \right\| \leq C.\left\| x - y \right\|$, $\forall\ x,y \in K$, $\forall\ t \in I$.

Também, como $I \subset \mathbb{R}$ é um compacto arbitrário obtemos que $\left\| f^*(t,x) - f^*(t,y) \right\| \leq C.\left\| x - y \right\|$, $\forall\ x,y \in K$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, como queríamos. ■

A hipótese de que f satisfaça uma condição de Lipschitz com constante Lipschitziana independente de t dada no teorema 7 não pode ser abandonada, como mostra o exemplo abaixo:

Exemplo 8: Consideremos a equação $x' = f(t,x)$ onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(t,x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & , \quad |x| \geq e^{-2t} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ e^{-t} & , \quad |x| \leq e^{-2t} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

As soluções de $x' = f(t,x)$ são únicas, pois f é claramente contínua e localmente Lipschitziana na segunda variável. No entanto, a função $f^*(t,x) = \sqrt{|x|}$ está em $\mathcal{F}^*_{ca}$ e não é admissível. De fato, pois tanto $\phi(t) \equiv 0$ quanto

$$\psi(t) = \begin{cases} t^2/_4 & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases} \quad \text{são soluções de} \quad \begin{cases} x' = f^*(t,x) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad , \text{ e é}$$

claro que $\phi \neq \psi$. Para verificar que $f^*(t,x) = \sqrt{|x|}$ pertence a $\mathcal{F}^*_{ca}$ basta tomar $t_n = n$, $n = 1,2,\ldots,$ que teremos facilmente a convergência $f_{t_n} \longrightarrow f^*$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R} \times W$. ■

Antes de analisarmos o comportamento dinâmico-topológico das soluções de $x' = f(t,x)$ via o semi-fluxo π vamos analisar o comportamento da projeção $\pi^* : \mathbb{R} \times \mathcal{F}^*_{ca} \longrightarrow \mathcal{F}^*_{ca}$, $\pi^*(t,f) = f_t$.

O primeiro resultado abaixo é óbvio:

Proposição 9:

(a) $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$ é um ponto fixo de π^* $\Longleftrightarrow$ f é autônoma;

(b) O fluxo $\pi^*(\cdot,f)$ é periódico $\Longleftrightarrow$ $f(t,x)$ é periódica em t.

Demonstração: Imediata. ■

Queremos saber agora quando é que um fluxo $\pi^*(\cdot,f)$ é compacto, ou positivamente compacto. Isto é, quando é que $\gamma(f)$ ou $\gamma^+(f)$ são relativamente compactos em $C_{ca}(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n)$.

Quem responde a essa pergunta é o teorema de Ascoli-Arzelá abaixo:

TEOREMA 10: Sejam X e Y espaços métricos, com X separável e Y completo. Um subconjunto $U \subset C(X,Y)$ é relativamente compacto na topologia compacto-aberta se e somente se

(i) $\{f(x);\ f \in U\}$ é relativamente compacto em Y, $\forall\ x \in X$

e (ii) U é eqüicontínuo.

Demonstração: [H.L.Royden, Real Analysis, Macmillan, New York, 1963, pág. 155].

Com isso temos então o:

TEOREMA 11:

(a) O fluxo $\pi^*(\cdot,f)$ é compacto (na topologia compacto - aberta de $C(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n)$) se e somente se f é limitada e uniformemente contínua em todo conjunto da forma $\mathbb{R} \times M$, onde $M \subset W$ é compacto.

(b) O fluxo $\pi^*(\cdot,f)$ é positivamente compacto (na topologia compacto-aberta de $C(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n)$ se e somente se f é limitada e uniformemente contínua em todo conjunto da forma $\mathbb{R}^+ \times M$, onde $M \subset W$ é compacto e $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R};\ t \geq 0\}$.

Demonstração: $\pi^*(\cdot,f)$ é compacto em $C_{ca}(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n) \iff \{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ é relativamente compacto em $C_{ca}(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n)$. Mas pelo teorema de Ascoli - Arzelá isso é equivalente a dizer que

(i) $\left\{f_\tau(t,x);\ \tau \geq 0\right\}$ é relativamente compacto em $\mathbb{R}^n$, $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R} \times W$ e

(ii) $\left\{f_\tau : \tau \geq 0\right\}$ é localmente eqüicontínuo.

Mas (i) é equivalente a dizer que $\{f(t + \tau, x);\ \tau \geq 0\}$ é limitado em $\mathbb{R}^n$, qualquer que seja $(t,x) \in \mathbb{R} \times W$; ou seja, (i) é equivalente a dizer que $f(t,x)$ é limitada em $t \in \mathbb{R}$ qualquer que seja $x \in W$. (1)

Agora (ii) diz que dado $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times W$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$ de modo que se $\|x - x_0\| < \delta$ e $|t - t_0| < \delta$ então

$$\left\|f_\tau(t, x) - f_\tau(t_0, x_0)\right\| < \varepsilon \quad , \quad \forall\ \tau \in \mathbb{R}$$

isto é,
$$\left\|f(t + \tau, x) - f(t_0 + \tau, x_0)\right\| < \varepsilon \quad , \quad \underline{\forall\ \tau \in \mathbb{R}} \qquad (2)$$

Isto demonstra que δ pode ser escolhido independente de t_0.

Logo (2) é equivalente a dizer que f é uniformemente contínua em $\mathbb{R} \times M$, onde $M \subset W$ é compacto. (3)

Portanto vimos que $\pi^*(\cdot, f)$ é compacto em $C_{ca} \Longleftrightarrow$ (1) e (3).

Mas como (1) e (3) é equivalente a dizer que f é limitada e uniformemente contínua em $\mathbb{R} \times M$, $\forall\ M \subset W$ compacto, segue o resultado.

A demonstração de (b) é análoga. ∎

A próxima proposição relaciona a solução $\varphi(\cdot, x, f)$ com o fluxo $\pi(\cdot, x, f)$.

Proposição 12: Considere $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n)$ admissível tal que toda $f^* \in \mathcal{F}^*_{ca}$ seja admissível. Então:

(a) Se o fluxo $\pi(\cdot, x, f)$ é $\left\{\begin{array}{l}\text{positivamente compacto}\\ \text{compacto}\\ \text{periódico}\end{array}\right\}$ então

o fluxo $\pi^{*}(\cdot,f)$ em $\mathcal{F}^{*}_{ca}$ é $\left\{\begin{array}{l}\text{positivamente compacto}\\ \text{compacto}\\ \text{periódico}\end{array}\right\}$, e a solução

correspondente $\varphi(\cdot, x, f)$ é $\left\{\begin{array}{l}\text{positivamente compacta}\\ \text{compacta}\\ \text{periódica}\end{array}\right\}$.

(b) Se o fluxo $\pi^{*}(\cdot,f)$ em $\mathcal{F}^{*}_{ca}$ é

$\left\{\begin{array}{l}\text{positivamente compacto}\\ \text{compacto}\end{array}\right\}$ então a solução $\varphi(\cdot, x, f)$ é

$\left\{\begin{array}{l}\text{positivamente compacta}\\ \text{compacta}\end{array}\right\}$ se e somente se o fluxo $\pi(\cdot,x,f)$ é $\left\{\begin{array}{l}\text{positivamente compacto}\\ \text{compacto}\end{array}\right\}$.

Demonstração: Imediata. ■

Antes de ver o próximo resultado relacionando $\varphi(\cdot,x,f)$ e $\pi(\cdot,x,f)$ vejamos o lema abaixo. Para isso precisamos de algumas notações e conceitos.

Seja $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^{n})$ regular e π o sistema dinâmico local em $W \times \mathcal{F}^{*}_{ca}$ já mencionado. Denotemos

$$P : W \times \mathcal{F}^{*}_{ca} \longrightarrow W \quad \text{e} \quad Q : W \times \mathcal{F}^{*}_{ca} \longrightarrow \mathcal{F}^{*}_{ca}$$

as projeções em W e $\mathcal{F}^{*}_{ca}$ respectivamente.

O fluxo $\pi(\cdot,x,f)$ está definido para todo $t \geq 0$ se e somente se a solução $\varphi(\cdot,x,f)$ está definida para todo $t \geq 0$. Nesse caso o conjunto ω-limite $\Omega_{(x,f)}$ do fluxo $\pi(\cdot,x,f)$ está definido, embora possa ser vazio.

Definimos o *conjunto limite positivo* da solução $\varphi(\cdot,x,f)$ como

$$L^{+}_{(x,f)} = P\left[\Omega_{(x,f)}\right]$$

A proposição abaixo mostra que quando o fluxo $\pi^{*}(\cdot,f)$ é positivamente compacto então essa definição coincide com a definição já conhecida do parágrafo 1 deste capítulo.

Proposição 13: Seja $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^{n})$ regular e suponha que $\pi^{*}(\cdot,f)$ é positivamente compacto. Então um ponto $\hat{x}$ está no conjunto limite positivo $L^{+}_{(x,f)}$ da solução $\varphi(\cdot,x,f)$ se e somente se existe seqüência τ_n de números reais tal que $\tau_n \longrightarrow \infty$ e $\varphi(\tau_n, x, f) \longrightarrow \hat{x}$.

Demonstração: Digamos inicialmente que $\hat{x} \in L^{+}_{(x,f)} = P(\Omega_{(x,f)})$. Então existe $\hat{f} \in \mathcal{F}^{*}_{ca}$ tal que $(\hat{x},\hat{f}) \in \Omega_{(x,f)}$.
Mas $(\hat{x},\hat{f}) \in \Omega_{(x,f)}$ implica que existe seqüência $\tau_n \longrightarrow \infty$ de modo que $\pi(\tau_n,x,f) \longrightarrow (\hat{x},\hat{f})$, isto é, $(\varphi(\tau_n,x,f), f_{\tau_n}) \longrightarrow (\hat{x},\hat{f})$. Em particular temos $\varphi(\tau_n,x,f) \longrightarrow \hat{x}$, como queríamos.

Reciprocamente, seja τ_n seqüência de reais com $\tau_n \longrightarrow \infty$ e $\varphi(\tau_n,x,f) \longrightarrow \hat{x}$. Como $\pi^{*}(\cdot,f)$ é positivamente compacto, existe subseqüência de f_{τ_n} que converge em $\mathcal{F}^{*}_{ca}$, digamos que $f_{\tau_n} \longrightarrow \hat{f} \in \mathcal{F}^{*}_{ca}$. Então $\pi(\tau_n,x,f) \longrightarrow (\hat{x},\hat{f})$, donde sai que $(\hat{x},\hat{f}) \in \Omega_{(x,f)}$, donde segue que

$\hat{x} \in L^+_{(x,f)}$. ∎

Temos agora o:

TEOREMA 14: Seja $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n)$ regular e suponhamos que o fluxo $\pi^*(\cdot,f)$ seja positivamente compacto (na topologia compacto - aberta). Seja $\varphi(\cdot,x,f)$ uma solução positivamente compacta de $x' = f(t,x)$. Então o conjunto ω-limite $\Omega_{(x,f)}$ do fluxo $\pi(\cdot,x,f)$ em $W \times \mathcal{F}^*_{ca}$ é não - vazio, compacto e invariante. Se $(x^*,f^*) \in \Omega_{(x,f)}$ então a solução $\varphi(\cdot,x^*,f^*)$ de $x' = f^*(t,x)$ é compacta. Além disso, o conjunto limite positivo $L^+_{(x,f)}$ é não-vazio e compacto em W. Também, se $x^* \in L^+_{(x,f)}$ então $\varphi(t,x^*,f^*) \in L^+_{(x,f)}$ para todo t, onde f^* é alguma função em $\mathcal{F}^*_{ca}$.

Demonstração: Sendo $\pi^*(\cdot,f)$ positivamente compacto em $\mathcal{F}^*_{ca}$ e $\varphi(\cdot,x,f)$ positivamente compacta em $\mathbb{R}^n$ então $\pi(\cdot,x,f)$ é positivamente compacto em $\mathbb{R}^n \times \mathcal{F}^*_{ca}$. Logo segue que $\Omega_{(x,f)}$ é não-vazio, compacto e invariante. Logo $L^+_{(x,f)}$ é não - vazio, pois $L^+_{(x,f)} = P\left[\Omega_{(x,f)}\right]$ e $\Omega_{(x,f)}$ é não - vazio. Também, como a projeção P é contínua sai que $L^+_{(x,f)}$ é compacto.

Seja agora $(x^*,f^*) \in \Omega_{(x,f)}$. Então, como $\Omega_{(x,f)}$ é invariante pelo fluxo temos que $\pi(t,x^*,f^*) \in \Omega_{(x,f)}$ $\forall\ t \geq 0$, e em particular, $\varphi(t,x^*,f^*) \in L^+_{(x,f)}$ $\forall\ t \geq 0$. Agora, como $L^+_{(x,f)}$ é compacto segue que $\varphi(\cdot,x^*,f^*)$ é compacta.

Também, se $x^* \in L^+_{(x,f)}$ então existe $f^* \in \mathcal{F}^*_{ca}$ tal que $(x^*,f^*) \in \Omega_{(x,f)}$. Logo $\pi(t,x^*,f^*) \in \Omega_{(x,f)}$ $\forall\ t \geq 0$, e portanto $\varphi(t,x^*,f^*) \in P(\Omega_{(x,f)}) = L^+_{(x,f)}$ $\forall\ t \geq 0$. ∎

EQUAÇÕES LIMITES

Introduziremos agora o conceito de equação limite para $x' = f(t,x)$, o qual se revelará muito útil no estudo do comportamento assintótico das soluções. Para isso consideremos $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n)$. Nem regularidade ou admissibilidade são importantes aqui.

Denotaremos Ω_f^* o conjunto ω - limite de f pelo fluxo $\pi^*(t,f) = f_t$.

Se $\Omega_f^* \neq \phi$ diremos que o <u>conjunto das equações limites</u> para $x' = f(t,x)$ é o conjunto de todas as equações da forma $x' = f^*(t,x)$, onde $f^* \in \Omega_f^*$.

Uma condição suficiente para que Ω_f^* seja não - vazio é que o fluxo $\pi^*(t,f) = f_t$ seja positivamente compacto em $\mathcal{F}_{ca}^*$.

Seja agora $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n)$ tal que f_t seja positivamente compacto.

Definição 15: (Assintoticamente Autônoma)

Dizemos que f é assintoticamente autônoma se Ω_f^* é unitário.

O nome "assintoticamente autônoma" se justifica, pois sabemos que se $\Omega_f^* = \{f^*\}$, então f^* é ponto fixo de π^*, e portanto f^* é autônoma.

Definição 16: (Assintoticamente Periódica)

Dizemos que f é assintoticamente periódica se Ω_f^* consiste de uma única órbita periódica.

Da mesma forma que antes o nome se justifica, pois se

$\Omega_f^* = \left\{\pi^*(t,f^*);\ t \in [0,T]\right\}$ então f^* é periódica em t.

Assim, se f é assintoticamente autônoma o conjunto das equações limites para $x' = f(t,x)$ consiste da única equação diferencial $x' = f^*(x)$, onde $\Omega_f^* = \{f^*\}$.

Também, se f é assintoticamente periódica o conjunto das equações limites para $x' = f(t,x)$ consiste das seguintes equações diferenciais

$$x' = f^*(t + \tau,\ x) \quad , \quad \tau \in [0,\ T) \quad ,$$

onde $f^* \in \Omega_f^*$ e f^* é periódica em t com período (mínimo) T.

O próximo lema é útil em algumas aplicações:

Lema 17: Seja $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$ e assuma que $f = g + h$ com g, h $\in C_{ca}(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$.

Suponhamos ainda que $h(t,\cdot) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$ em $C_{ca}(W;\ \mathbb{R}^n)$, isto é, $h(t,x) \longrightarrow 0$ uniformemente nas partes compactas de W quando $t \longrightarrow \infty$.

As seguintes afirmações são verdadeiras:

(A) As equações limites de $x' = f(t,x)$ e $x' = g(t,x)$ são as mesmas.

(B) Se $\pi^*(\cdot,g)$ é compacto então $\pi^*(\cdot,f)$ é positivamente compacto;

(C) Se g é autônoma então f é assintóticamente autônoma;

(D) Se g é periódica em t então f é assintoticamente periódica;

Demonstração:

(A) Devemos provar que $\Omega_f^* = \Omega_g^*$.

Para isso seja $f^* \in \Omega_f^*$. Então existe seqüência $\tau_n \longrightarrow \infty$ tal que $f_{\tau_n} \longrightarrow f^*$ em $\mathcal{F}_{ca}^*$, isto é, $f_{\tau_n}(t,x) \longrightarrow f^*(t,x)$ uniformemente em todo $I \times K \subset \mathbb{R} \times W$ compacto.

Mas $f_{\tau_n}(t,x) = f(t + \tau_n, x) = g(t + \tau_n, x) + h(t + \tau_n, x) =$ $= g_{\tau_n}(t,x) + h(t + \tau_n, x)$, e como $h(t + \tau_n, \cdot) \longrightarrow 0$ uniformemente em $K \subset W$ temos que $f^* = \lim f_{\tau_n} = \lim g_{\tau_n}$ (limite na topologia compacto aberta), e portanto $f^* \in \Omega_g^*$, donde sai que $\Omega_f^* \subset \Omega_g^*$.

A outra inclusão prova-se de maneira análoga.

(B) Sendo $\pi^*(\cdot,g)$ compacto segue do teorema 11 que g é limitada e uniformemente contínua em todo conjunto da forma $\mathbb{R} \times M$, onde $M \subset W$ é compacto. Agora, $f(t,x) = g(t,x) + h(t,x)$, e como $h(t,x)$ é contínua e $h(t,\cdot) \longrightarrow 0$ em $C_{ca}(W; \mathbb{R}^n)$ quando $t \longrightarrow \infty$ então h é limitada e uniformemente contínua em todo conjunto da forma $\mathbb{R}^+ \times M$, onde $M \subset W$ é compacto, donde segue que f também é limitada e uniformemente contínua em $\mathbb{R}^+ \times M$, e de novo do teorema 11 concluimos que $\pi^*(\cdot,f)$ é positivamente compacto (na topologia compacto - aberta).

(C) Digamos que $g(t,x) = \xi(x)$. Então g é limitada e uniformemente contínua em todo $\mathbb{R} \times M$, com $M \subset W$ compacto. Do teorema 11 então segue que $\pi^*(\cdot,g)$ é compacto, e do item (B) desse teorema segue que $\pi^*(\cdot,f)$ é positivamente compacto, donde sai que $\Omega_f^* \neq \phi$. Vejamos agora que Ω_f^* é unitário. Para isso seja $f^* \in \Omega_f^*$. Veremos que f^* já está bem determinada, mais ainda, que $f^* = \xi$. De fato, como $f^* \in \Omega_f^*$ e como $\Omega_f^* = \Omega_g^*$, existe seqüência $\tau_n \longrightarrow \infty$ tal que $g_{\tau_n} \longrightarrow f^*$ na topologia compacto aberta, isto é $g_{\tau_n}(t,x) \longrightarrow f^*(t,x)$ uniformemente em $I \times K \subset \mathbb{R} \times W$ compacto.

Mas $g_{\tau_n}(t,x) = g(t + \tau_n, x) = \xi(x)$, e portanto $f^* = \xi$, como queríamos.

(D) Devemos provar que $\Omega_f^* = \left\{\pi^*(t,f^*); t \in [0,T]\right\}$ para alguma $f^* \in \Omega_f^*$ e algum $T \in \mathbb{R}$.

Em primeiro lugar vejamos que $\Omega_f^* \neq \phi$. De fato, como g é periódica em t existe $T > 0$ tal que $g(t+T,x) = g(t,x)$, $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R} \times W$. Agora, como g é contínua em $[0,T] \times K$ ($K \subset W$ compacto) então g é uniformemente contínua e limitada em $[0,T] \times K$. Logo, da periodicidade de g em t segue que g é limitada e uniformemente contínua em $\mathbb{R} \times K$, para todo $K \subset W$ compacto. Logo, do teorema 11 segue que $\pi^*(\cdot,g)$ é compacto, e do item (B) desse teorema sai que $\pi^*(\cdot,f)$ é positivamente compacto, donde segue $\Omega_f^* \neq \phi$.

Seja agora $f^* \in \Omega_f^*$. Então existe seqüência $\tau_n \longrightarrow \infty$ de modo que $f_{\tau_n} \longrightarrow f^*$ em $\mathcal{F}_{ca}^*$.

Veremos que se $v^* \in \Omega_f^*$ então $v^* = (f^*)_\tau$ para algum $\tau \in [0,T]$.

Ora, como $v^* \in \Omega_f^*$ existe seqüência $\sigma_n \longrightarrow \infty$ com $f_{\sigma_n} \longrightarrow v^*$ em $\mathcal{F}_{ca}^*$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\sigma_n \geq \tau_n$, $\forall\ n$.

Temos então (todas as convergências abaixo são na topologia compacto - aberta) que

$v^* = \lim_n f_{\sigma_n} = \lim_n f_{\tau_n+(\sigma_n-\tau_n)}$; agora, para todo $n = 1,2,\ldots$ podemos escrever $\sigma_n - \tau_n = K_n \cdot T + r_n$, com $K_n \in \mathbb{N}$ e $r_n \in [0,T)$.

Logo $v^* = \lim_n f_{\tau_n + K_n T + r_n}$, e como f é T-periódica vem

$$v^* = \lim_n f_{\tau_n + r_n} = \lim_n (f_{\tau_n})_{r_n} = \lim_n \pi^*(r_n, f_{\tau_n}) .$$

Agora, com r_n é seqüência no compacto $[0,T]$, podemos supor que $r_n \longrightarrow \tau \in [0,T]$.

Logo temos $r_n \longrightarrow \tau \in [0,T]$ e $f_{\tau_n} \longrightarrow f^*$ em $\mathcal{F}^*_{ca}$, e como π^* é contínua obtemos $\pi^*(r_n, f_{\tau_n}) \longrightarrow \pi^*(\tau, f^*) = (f^*)_\tau$, ou seja, $v^* = (f^*)_\tau$ com $\tau \in [0,T]$, como queríamos. ∎

O próximo teorema é importante. Ele ilustra bem a relevância do conceito de equações limites para $x' = f(t,x)$, pois o estudo das equações limites pode levar-nos a tirar conclusões da equação diferencial original. Isso de modo geral é bom, pois se o estudo direto de $x' = f(t,x)$ é muito complicado têm-se a alternativa de estudar as equações limites, às quais podem vir a ser mais simples.

TEOREMA 18: Seja $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n)$ regular e suponha que $\pi^*(\cdot, f)$ seja positivamente compacto em $\mathcal{F}^*_{ca}$. Seja $\varphi(t,x,f)$ uma solução positivamente compacta de $x' = f(t,x)$. Então, para todo ponto $(x^*, f^*) \in \Omega(x,f)$ a solução $\varphi(t, x^*, f^*)$ é compacta. Mais ainda, existe seqüência $\tau_n \longrightarrow \infty$ tal que $\varphi(t + \tau_n, x, f) \longrightarrow \varphi(t, x^*, f^*)$ uniformemente em compactos da reta.

Demonstração: Com exceção da última afirmação, tudo já foi demonstrado no teorema 14. Quanto à última afirmação, esta segue da proposição 1.3 do capítulo 2.

Vejamos detalhadamente:

Como $(x^*,f^*) \in \Omega(x,f)$, existe seqüência $\tau_n \longrightarrow \infty$ tal que $\pi(\tau_n,x,f) \longrightarrow (x^*,f^*)$.

Logo, da proposição citada acima segue que $\pi(t,\pi(\tau_n,x,f)) \longrightarrow \pi(t,x^*,f^*)$ com convergência uniforme em compactos $J \subset \mathbb{R}$. Ou seja, $\pi(t + \tau_n,x,f) \longrightarrow \pi(t,x^*,f^*)$, e tomando a projeção $P : \mathbb{R}^n \times \mathcal{F}^*_{ca} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ obtemos $\varphi(t + \tau_n,x,f) \longrightarrow \varphi(t,x^*,f^*)$, com convergência uniforme em compactos $J \subset \mathbb{R}$. ∎

O corolário abaixo é apenas a contra-positiva do teorema acima:

Corolário 19: Seja $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n)$ regular e suponha que o fluxo $\pi^*(\cdot,f)$ seja positivamente compacto em $\mathcal{F}^*_{ca}$. Se existe uma equação limite $x' = f^*(t,x)$ que não tem solução compacta então a equação dada $x' = f(t,x)$ não tem solução positivamente compacta.

Pode ocorrer que a equação $x' = f(t,x)$ não tenha nenhuma solução positivamente compacta enquanto que as equações limites tem somente soluções compactas, como vemos no exemplo abaixo.

Exemplo 20: Seja a equação $x' = f(t,x)$, onde $f : \mathbb{R}^+ \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(t,x) = \frac{x + 1}{t + 1} \quad , \quad \text{onde } W = (-1,1) \subseteq \mathbb{R} .$$

As soluções de $x' = f(t,x)$ com $x(0) = x_0 \in W$ são dadas por $x(t) = (1 + x_0)t + x_0$, as quais são todas não-compactas.

No entanto, como veremos abaixo, existe uma única equação limite, a saber $x' = f^*(t,x)$, com $f^* \equiv 0$. Logo, toda solução da equação limite é positivamente compacta, como queríamos exemplificar. Vejamos agora que $\Omega^*_f = \{0\}$.

Ora, $f(t,x) = \frac{1}{t+1}\ x + \frac{1}{t+1}$, ou seja, f é da forma $f(t,x) = g(t,x) + h(t,x)$, com $g(t,x) = \frac{1}{t+1}\ x$ e $h(t,x) = \frac{1}{t+1}$.

Agora é claro que g e h satisfazem as condições do lema 17 e portanto $\Omega_f^* = \Omega_g^*$, e é fácil verificar que $\Omega_g^* = \{0\}$.

O que vimos no exemplo anterior ocorre quando a equação diferencial deixa de ter certas propriedades de estabilidade. Vamos agora investigar o comportamento assintótico de soluções sob certas condições de estabilidade. Antes porém introduzamos os seguintes conceitos:

Seja $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$ regular, onde $W \subset \mathbb{R}^n$ é aberto contendo a origem, e suponha ainda que $f(t,0) = 0 \ \ \forall\, t \geq 0$. Portanto $\varphi(t,0,f) \equiv 0$. Também é claro que $f^*(t,0) = 0 \ \ \forall\, f^* \in \Omega_f^*$ e $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Definição 21: Seja $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$ admissível com $f(t,0) = 0 \ \ \forall\, t \geq 0$.

Dizemos que a solução nula $\varphi(t,0,f) \equiv 0$ é :

(a) **ESTÁVEL** se $\|\varphi(t,x,f)\| \leq \alpha(\|x\|) \ \ \forall\, \|x\| \leq a$ e $\forall\, t \geq 0$, onde $\alpha : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, não-negativa, crescente, com $\alpha(0) = 0$;

(b) **UNIFORMEMENTE ESTÁVEL (u.e)** se $\|\varphi(t,x,f_\tau)\| \leq \alpha(\|x\|)$ $\forall\, \|x\| \leq a$, $\forall\, t \geq 0$ e $\forall\, \tau \geq 0$, onde α é como em (a);

(c) **ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL (a.e.)** se é estável e se $\varphi(t,x,f_\tau) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$, qualquer que seja $\|x\| \leq a$ e $\tau \geq 0$.

(d) **UNIFORMEMENTE ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL (u.a.e)** se existe função α como em (a) e função $\sigma:[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, positiva, decrescente, com $\sigma(t) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$, e tal que

$$\|\varphi(t,x,f_\tau)\| \le \alpha(\|x\|).\sigma(t) \ \forall \ \|x\| \le a, \ \forall \ t \ge 0 \ \text{ e } \forall \ \tau \ge 0.$$

É lógico das definições que (b) $\Rightarrow$ (a), (d) $\Rightarrow$ (b), (d) $\Rightarrow$ (c), (c) $\Rightarrow$ (a), e nada mais além disso pode ser afirmado.

Vejamos agora o:

Lema 22: Seja $\alpha:[0,a] \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função

$$(r,t) \longrightarrow \alpha(r,t)$$

não-negativa. Seja $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W; \mathbb{R}^n)$ regular. Se as soluções de $x' = f_\tau(t,x)$ satisfazem $\|\varphi(t,x,f_\tau)\| \le \alpha(\|x\|, t)$ $\forall$ $\|x\| \le a$ e $\forall$ $t,\tau \ge 0$, então as soluções de $x' = f^*(t,x)$ satisfazem $\|\varphi(t,x,f^*)\| \le \alpha(\|x\|,t)$ $\forall$ $\|x\| \le a$ e $\forall$ $t \ge 0$, qualquer que seja $f^* \in \Omega_f^*$.

Demonstração: Seja $f^* \in \Omega_f^*$ e $\varepsilon > 0$ dado. Então existe seqüência $\tau_n \longrightarrow +\infty$ tal que $f_{\tau_n} \longrightarrow f^*$ em $\mathcal{F}_{ca}^*$ (podemos supor $\tau_n \ge 0$ $\forall$ $n = 1,2,\dots$).

Então temos $(x, f_{\tau_n}) \longrightarrow (x, f^*)$ em $W \times \mathcal{F}_{ca}^*$, e portanto $\pi(t,x,f_{\tau_n}) \longrightarrow \pi(t,x,f^*)$ $\forall$ $t \ge 0$. Mais ainda, a convergência é uniforme para t em compactos $J \subset \mathbb{R}^+$. Em particular, $\varphi(t,x,f_{\tau_n}) \longrightarrow \varphi(t,x,f^*)$ uniformemente em compactos $J \subset \mathbb{R}^+$.

Assim temos $\|\varphi(t,x,f^*)\| \le \|\varphi(t,x,f^*) - \varphi(t,x,f_{\tau_n})\| +$

$+ \|\varphi(t,x,f_{\tau_n})\|$, e como $\|\varphi(t,x,f^*) - \varphi(t,x,f_{\tau_n})\| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0(\varepsilon)$ e $\forall\, t \in J$ obtemos $\|\varphi(t,x,f^*)\| < \varepsilon + \alpha(\|x\|,\, t)$ $\forall\, \|x\| \leq a$ e $\forall\, t \in J$.

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário obtemos que $\|\varphi(t,x,f^*)\| \leq \alpha(\|x\|,t)$, $\forall\, \|x\| \leq a$ e $\forall\, t \in J$.

Também, como o compacto $J \subset \mathbb{R}^+$ é arbitrário vem $\|\varphi(t,x,f^*)\| \leq \alpha(\|x\|,t)$, $\forall\, \|x\| \leq a$ e $\forall\, t \geq 0$. ∎

Observação: Note que no lema anterior não precisamos assumir que o fluxo $\pi^*(\cdot,f)$ seja positivamente compacto. Se ele não for positivamente compacto então o conjunto ω - limite Ω^*_f pode ser vazio, mas nesse caso o lema é vacuamente satisfeito. Observe que o teorema abaixo também não requer compacidade positiva do fluxo $\pi^*(\cdot,f)$.

TEOREMA 23: Seja $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$ regular, com $f(t,0) = 0$ $\forall\, t \geq 0$.

(A) Se a solução nula de $x' = f(t,x)$ é uniformemente estável, então a solução nula de toda equação limite $x' = f^*(t,x)$ é uniformemente estável.

(B) Se a solução nula de $x' = f(t,x)$ é uniformemente assintoticamente estável, então a solução nula de toda equação limite é uniformemente assintoticamente estável.

Demonstração: É uma conseqüência imediata do lema anterior. ∎

O conceito de estabilidade para uma solução arbitrária pode ser reduzido ao conceito acima por uma técnica padrão. A saber, se φ é uma solução de $x' = f(t,x)$, dizemos que φ é ".....estável" se a solução nula de $x' = g(t,x)$ é ".....estável", onde $g(t,x) = f(t,x + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$.

O teorema anterior admite agora a seguinte generalização:

TEOREMA 24: Seja $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^n)$ regular. Se existe uma solução positivamente compacta $\varphi(t,x,f)$ de $x' = f(t,x)$ que é uniformemente estável (ou uniformemente assintoticamente estável) então toda equação limite $x' = f^*(t,x)$ tem uma solução compacta que é uniformemente estável (respectivamente, uniformemente assintoticamente estável).

Demonstração: Se $\varphi(t) = \varphi(t,x,f)$ é positivamente compacta então é claro que toda equação limite $x' = f^*(t,x)$ admite solução compacta, bastando para isso tomar uma condição inicial x^* tal que $(x^*, f^*) \in \Omega(x,f)$ (veja teorema 18 atrás). [Observamos que $\Omega(x,f) \neq \phi$, pois sendo $\varphi(t,x,f)$ compacta então esta se define para todo $t \geq 0$; também, como $\Omega_f^* \neq \phi$ (do contrário o teorema é vacuamente satisfeito), segue que $\Omega(x,f) \neq \phi$].

Agora, como $\varphi(t,x,f)$ é u.e. (u.a.e) então a solução nula de $x' = g(t,x)$ é u.e.(u.a.e), onde $g(t,x)=f(t,x + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$. Logo, do teorema 23 segue que a solução nula de toda equação limite $x' = g^*(t,x)$ é u.e (u.a.e).

Mas g^* é da forma $g^* = \lim g_{\tau_n}$ para alguma seqüência $\tau_n \longrightarrow \infty$. Agora, $g_{\tau_n}(t,x) = f_{\tau_n}(t,x + \varphi(t + \tau_n,x,f)) - f_{\tau_n}(t, \phi(t + \tau_n,x, f))$, e do teorema 18 podemos escolher τ_n (isto é, podemos escolher g^*) de tal forma que $\varphi(t + \tau_n, x, f) \longrightarrow \varphi(t,x^*, f^*)$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}$, donde sai que $g^*(t,x) = f^*(t,x + \varphi(t,x^*,f^*)) - f^*(t, \varphi(t,x^*,f^*))$, ou seja, a solução $\varphi(t,x^*,f^*)$ é u.e.(u.a.e). ◻

Vimos nos dois teoremas anteriores que se a equação dada tem uma solução estável então as equações limites também o tem. No entanto, o problema de tirar conclusões sobre estabilidade para soluções da equação original a partir de hipóteses da equação limite é uma questão delicada. O exemplo 20 ilustra essa dificuldade, pois nele vimos que $x' = f(t,x)$ não tinha nenhuma solução estável, e no entanto as equações limites só tinham soluções estáveis. No entanto temos o seguinte resultado para estabilidade assintótica.

TEOREMA 25; Seja $f \in C_{ca}(\mathbb{R} \times W;\ \mathbb{R}^n)$ regular, com $f(t,0) = 0 \quad \forall\ t \geq 0$. Suponhamos também que o fluxo $\pi^*(\cdot,f)$ seja positivamente compacto (na topologia compacto - aberta). Se:

(1) A solução nula de $x' = f(t,x)$ é u.e., e

(2) A solução nula de toda equação limite é a.e. (num sentido uniforme), isto é, $\|\varphi(t,x,f^*)\| \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$ sempre que $\|x\| \leq a$ e $f^* \in \Omega_f^*$, então a solução nula de $x' = f(t,x)$ é a.e.

Antes de demonstrarmos o teorema acima precisamos de mais alguns conceitos e resultados auxiliares.

Dado espaço métrico (X,d) e $M \subset X$ escreveremos:

(a) $d(x,M) := \inf_{y \in M} \{d(x,y)\}$, distância de $x \in X$ ao conjunto M;

(b) $S(M;r) := \left\{x \in X \;\middle|\; d(x;M) < r\right\}$

(c) $B(M;r) := \left\{x \in X \;\middle|\; d(x,M) \leq r\right\}$.

Seja π um sistema dinâmico local em X e $M \subset X$ um subconjunto não-vazio, compacto e invariante por π, isto é, $\pi(I(p),p) \subset$

M para todo $p \in M$. (em particular $I(p) \supset \mathbb{R}^{+}$).

Definição 26: Dizemos que M é:

(a) *(positivamente) estável* se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\gamma^{+}(y) \subset S(M;\ \varepsilon)$ sempre que $y \in S(M;\ \delta)$.

(b) um *atrator (positivo)* se existe $\delta > 0$ de modo que se $y \in S(M;\delta)$ então $\Omega(y) \neq \phi$ e $\Omega(y) \subset M$ (lembre que $\Omega(y)$ é o conjunto ω-limite do fluxo $\pi(\cdot,y)$).

(c) *(positivamente) assintoticamente estável* se M for um atrator estável, isto é, se (a) e (b) ocorrem.

Analogamente define-se estabilidade negativa e atrator negativo, no entanto não os consideraremos adiante, e por isso omitiremos o adjetivo "positivo" quando estivermos falando em estabilidade e atrator.

Definição 27: **(Região de Atração)**

Seja $M \subset X$ não-vazio, compacto e π-invariante.

A região de atração A(M) de M é o conjunto

A(M) := (união de todas as trajetórias com a propriedade de que seus conjuntos limites positivos são não-vazios e contidos em M).

É fàcil ver que M é um atrator se e somente se A(M) é uma vizinhança de M.

Vejamos agora o:

Lema 28: Se M é um atrator então A(M) é aberto e invariante.

Demonstração: A invariância é clara da definição. Vejamos que $A(M)$ é aberto. Para isso seja $y \in A(M)$. Queremos vizinhança $V = V_y$ de y tal que $V \subset A(M)$. Ora, como M é atrator existe $\delta > 0$ tal que se $z \in S(M;\delta)$ então $\Omega(z) \neq \phi$ e $\Omega(z) \subset M$. É claro que temos $M \subset S(M;\delta) \subset A(M)$. Agora, como $y \in A(M) = S(M;\delta) \cup [A(M) \setminus S(M;\delta)]$ então $y \in S(M;\delta)$ ou $y \in A(M) \setminus S(M;\delta)$. Se $y \in S(M;\delta)$ podemos tomar $V = S(M;\delta)$. Senão fazemos assim: como $y \in A(M) \setminus S(M;\delta)$, existe $\tau > 0$ de modo que $\pi(\tau,y) \in S(M;\delta) \setminus M$, o quel é aberto. Logo existe vizinhança aberta U tal que $\pi(\tau,y) \in U \subset S(M,\delta) \setminus M$. Tomemos então $V_y = \pi(-\tau,U)$. É lógico que $y \in V_y$ e que V_y é aberto, pois $V_y = \varphi^{-1}(U)$, onde $\varphi = \pi_{-\tau}$, isto é, φ é a inversa do homeomorfismo $\pi_\tau : X \longrightarrow X$ dado por $\pi_\tau(x) = \pi(\tau,x)$. Vejamos agora que $V_y \subset A(M)$. Ora, como $V_y \subset S(M;\delta) \subset A(M)$ temos $\Omega(\pi(-\tau,V_y)) = \Omega(V_y) \subset \Omega(S(M;\delta)) \subset M$, o que nos diz que $\pi(-\tau,V_y) \subset A(M)$, como queríamos. ■

Lema 29: Seja $M \subset X$ não-vazio, compacto e π-invariante. Suponhamos que M seja um atrator. São equivalentes:

(a) M é estável;

(b) $A(M)$ não contém pontos α-limite de órbitas em $A(M) \setminus M$.

Demonstração: Ver [6] à página 63. ■

Demonstração do teorema 25:

Objetivo: Mostrar que a solução nula de $x' = f(t,x)$ é assintoticamente estável, isto é, que é estável e que $\|\varphi(t,x,f_\tau)\| \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$ $\forall\ \tau \geq 0$ e $\forall\ \|x\| \leq \hat{a}$ para algum $\hat{a} > 0$. A estabilidade já se tem da hipótese. Vejamos a segunda afirmação.

Ora, do enunciado sabemos que existe $a > 0$ e $\alpha \in C([0,a]);\mathbb{R})$ não-negativa, não-decrescente, com $\alpha(0) = 0$ e $\|\varphi(t,x,f_\tau)\| \leq$

$\leq \alpha(\|x\|)$, $\forall\ t,\tau \geq 0$ e $\forall\ \|x\| \leq a$. Logo, do lema 22 segue que $\|\varphi(t,x,f^*)\| \leq$ $\leq \alpha(\|x\|)$ $\forall\ t \geq 0$, $\forall\ \|x\| \leq a$ e $\forall\ f^* \in \Omega_f^*$.

Consideremos agora a restrição do fluxo local π em $W \times \mathcal{F}_{ca}^*$ ao subconjunto $W \times \Omega_f^*$. Ainda denotaremos a restrição por π.

Seja $M = \{0\} \times \Omega_f^* \subset W \times \mathcal{F}_{ca}^*$. Verifica-se facilmente que M é um atrator estável segundo o fluxo π em $W \times \Omega_f^*$.

Sabemos também que a região de atração $A(M)$ de M é um subconjunto aberto e positivamente invariante em $W \times \Omega_f^*$, e é claro que contém um subconjunto da forma $\left\{(x,f^*) \;\middle|\; \|x\| \leq \hat{a} \text{ e } f^* \in \Omega_f^*\right\}$ para algum $\hat{a} > 0$.

Mostremos agora que $\|\varphi(t,x,f_\tau)\| \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$ para $\|x\| \leq a$ e todo $\tau \geq 0$.

Para isso seja $\tau \geq 0$ fixado e considere a solução $\varphi(t,x,f_\tau)$, com $\|x\|$ suficientemente pequeno de modo que $\|x\| \leq a$ e $\alpha(\|x\|)$ $\leq \hat{a}$. Como $\|x\| \leq a$, a solução $\varphi(t,x,f_\tau)$ é positivamente compacta (de fato, pois $\|\varphi(t,x,f_\tau)\| \leq \alpha(\|x\|) \leq \hat{a}$, $\forall\ t \geq 0$). Logo o fluxo $\pi(\cdot,x,f_\tau)$ é positivamente compacto (pois $\pi^*(\cdot,f)$ é compacto por hipótese), e daí o conjunto ω-limite $\Omega = \Omega(x,f_\tau)$ do fluxo $\pi(\cdot,x,f_\tau)$ é um subconjunto não-vazio e compacto de $W \times \Omega_f^*$. Também, como $\varphi(t,x,f_\tau)$ satisfaz $\|\varphi(t,x,f_\tau)\| \leq \hat{a}$, o conjunto ω-limite $\Omega(x,f_\tau)$ fica contido em $\{(x,f^*) :$ $\|x\| \leq \hat{a},\ f^* \in \Omega_f^*\}$, o qual está contido em $A(M)$. Como Ω é compacto, todo fluxo em Ω é compacto. Portanto, se $(x^*,f^*) \in \Omega(x,f_\tau)$, teremos que o cojunto α-limite do fluxo $\pi(\cdot,x^*,f^*)$ é não-vazio e fica contido em $\Omega \subset A(M)$. Agora, como M é um atrator estável, segue do lema 29 que $\Omega \subset M = \{0\} \times \Omega_f^*$. Portanto $L^+(x,f_\tau) = \{0\}$, e daí segue que $\varphi(t,x,f_\tau) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$, como queríamos. ■

Para finalizar esta dissertação vamos enfatizar que os resultados obtidos no Capítulo 1 dependem fortemente do caráter autônomo das equações. Por exemplo, mostramos no parágrafo 1.4 que as soluções de

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - a(x)u_t \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

tendem a zero, quando $t \longrightarrow +\infty$, se $a(x) \geq 0$ e $a(x_0) > 0$ para algum x_0.
No caso não autônomo podemos tomar

$$a(t,x) = a(t) = 2 + e^t > 2 > 0 \quad \forall\, t,\ \forall\, x$$

e verificar que $u(t,x) = (1 + e^{-t})$ senx é solução de

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - a(t,x)u_t \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

que não tende a zero, quando $t \longrightarrow +\infty$.

Quando $a(t,x) = \beta(t)\, a(x)$ com $\beta(t) > 0$ periódica, $a(x)$ satisfazendo as hipóteses acima, temos resultados análogos ao caso autônomo. Veja [11], [12].

A generalização para equações não autônomas mais gerais tem recebido uma considerável atenção na literatura, sendo que a generalização mais direta é o conceito de "processo" cuja definição é motivada, a partir do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t,u) \\ u(\sigma) = x \end{cases}$$

Se $\phi(t,\sigma,x)$ é solução definida para $t \geq \sigma$ tal que $\phi(\sigma,\sigma,x) = x$, colocamos $u(t,\sigma,x) = \phi(t + \sigma,\sigma,x)$ como sendo um processo, isto é:

Definição: Se X é um espaço métrico completo, um <u>processo</u> em X é uma aplicação

$u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ satisfazendo:

i) u é contínua

ii) $u(0,s,x) = x$

iii) $u(t + \tau, s, x) = u(t, \tau + s, u(\tau,s,x))$.

Denotando por W o conjunto de todos os processos e por $\sigma(t)$ a translação $(\sigma(\tau)u)(t,s,x) = u(t, \tau + s, x)$ temos que

$$\sigma(0) = I$$

$$\sigma(t + \tau) = \sigma(t)\ \sigma(\tau)$$

e podemos definir

$$\pi(t) : X \times W \longrightarrow X \times W$$

$$\pi(t)\ (x,u) = (u(t,0,x),\ \sigma(t)u)$$

e não é difícil verificar que

$$\pi(0) = I$$

$$\pi(t + \tau) = \pi(t)\ \pi(\tau).$$

Resta portanto analisarmos a continuidade. Equipando W com uma métrica, nós não podemos esperar que $\pi(t)(x,u)$ seja contínua em t,x,u, para u variando em todo W, mas podemos esperar que

$$(*) \quad \pi(t) : X \times V \longrightarrow X \times V$$

seja contínua num sub-espaço métrico completo V de W. Quando (*) é satisfeito dizemos que $\pi(t)$, $t \geq 0$ é um skew - produto de processos.

A existência de skew - produtos tem sido mostrada para problemas particulares (veja [13, pag. 60]) em especial para a classe de processos compactos u, caracterizados pela propriedade que

$$\left\{\sigma(\tau)u\ ;\ \tau \in [0,\infty)\right\}$$

satisfaz: $\forall\ (\tau_n)$, existe subseqüência (τ_{n_k}) e $v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ tal que

$$\left[\sigma(\tau_{n_k})u\right]\ (t,\ s,\ x) \longrightarrow v(t,\ s,\ x)$$

quando $k \longrightarrow \infty$ e $t \in \mathbb{R}^+$, $s \in \mathbb{R}$, $x \in X$.

Exemplos de processos compactos são:

. caso autônomo, $u(t, s, x)$ é independente de s;

. processos periódicos, $u(t,\ s + \omega,\ x) = u(t,\ s,\ x)$ para algum $\omega > 0$.

processos quase - periódicos e assintoticamente quase - periódicos, veja [11] e [13] para maiores detalhes. Realmente (ainda) temos que estudar bastante se fôssemos atacar estes problemas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle*, Théorie et Applications, 2^{e} tirage, Masson, 1987.

[2] Goffman, Casper and Pedrick, George, *First Course in Functional Analysis*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[3] Jack K. Hale, *Theorie of Functional Differential Equations*, Volume 3, Springer Verlag, 1977.

[4] De Figueiredo, D.G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, 2ª edição, Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1977.

[5] Béla SZ, Nagy, *Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansions*, New York, Oxford University Press, 1965.

[6] Auslander, J., Bathia, N.P., and Seibert, P., *Atractors in Dynamical Systems*, Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, Volumen 9, Segunda Serie, número 2, octubre de 1964, 55, 65.

[7] Lima, Elon L., *Elementos de Topologia Geral*, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1970.

[8] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Volume 44, Springer, 1983.

[9] Fiedman, A., *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.

[10] Henry, D., *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, 840, Springer-Verlag.

[11] Dafermos, C.M., *An Invariance Principle*, J.Diff.Eq. 9, (1971), 239-252.

[12] Dafermos, C.M., *Asymptotic Behavior of Solutions of Evolution Equations*, Academic Press, Inc., (1978), 103-109.

[13] Hale, Jack K., *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 1988.

[14] Adams, Robert A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[15] Sell, George R., *Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics, I e II*. Trans. Amer. Math. Soc. 127 (1967), 241-283.

[16] Sotomayor Tello, Jorge Manuel, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro - IMPA.

[17] Smale, Stephen and Hirsch, Morris W., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, New York, Academic Press - 1974.

[18] Hale, Jack K., *Ordinary Differential Equations*, Wiley - Interscience - volume XXI.