Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - UNICAMP

Tese de doutorado

Mergulhos Graduados de PI-Álgebras

Autor: Ednei Aparecido Santulo Junior[1]

Orientador: Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov

[1]Bolsa de doutorado Fapesp processo n. 03/07793-4

MERGULHOS GRADUADOS DE PI-ÁLGEBRAS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Ednei Aparecido Santulo Junior e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de junho de 2007.

P Kochloukov

Prof. Dr. Plamen E. Kochlouckov

Banca Examinadora
Prof. Dr. Plamen E. Kochloukov
Prof. Dr. Henrique Guzzo Júnior
Prof. Dr. Ivan Chestakov
Prof. Dr. Vyacheslav Futorny
Prof. Dr. Adriano A. Moura

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

	Santulo Junior, Ednei Aparecido
Sa59m	Mergulhos graduados de PI-Álgebras/Ednei Aparecido Santulo Junior -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.
	Orientador : Plamen Emilov Kochloukov
	Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. PI-Álgebras. 2. Algebra não-comutativa. 3. Teoremas de mergulho. I. Kochloukov, Plamen Emilov. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Graded embeddings of PI-Algebras

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. PI-Algebras. 2. Noncommutative algebra. 3. Embedding theorems.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Ivan Chestakov (IME–USP)
Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (IME-USP)
Prof. Dr. Henrique Guzzo Júnior (IME-USP)

Data da defesa: 22/06/2007

Programa de Pós-Graduação: Doutor em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 22 de junho de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

P Kochloukov

____

Prof. (a). Dr (a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

____

Prof. (a). Dr (a). ADRIANO ADREGA DE MOURA

____

Prof. (a). Dr (a). IVAN CHESTAKOV

____

Prof. (a). Dr (a). VYACHESLAV FUTORNY

____

Prof. (a) Dr. (a) HENRIQUE GUZZO JÚNIOR

Agradecimentos

Eu agradeço primeiramente a Deus que me permitiu chegar até aqui.

Agradeço à minha noiva Aryana, que muito me motivou durante toda a pós-graduação.

Agradeço à minha família por todo o apoio, em especial aos meus pais.

Agradeço à Fapesp pelo suporte financeiro por todo o doutorado.

Agradeço muito especialmente ao meu orientador Plamen E. Kochloukov, que sempre esteve presente nos momentos em que eu precisava de sua inestimável ajuda.

Agradeço de forma especial também ao Onofrio Mario Di Vincenzo da Università degli Studi di Bari, tanto pela hospitalidade bem como pela parceria de pesquisa.

Agradeço a todos os membros da banca examinadora por suas valiosas observações tanto no tocante às correções da tese escrita, bem como no que diz respeito à apresentação oral da mesma.

Agradeço a todos os amigos que me apoiaram e incentivaram, em especial a Guilherme Tizziotti e Carlos Grossi, pelo companheirismo e sincera amizade ao longo de 9 anos e meio de Unicamp.

Agradeço a todos os professores do instituto, uma vez que cada um, à sua maneira, contribuiu para que eu pudesse vencer essa etapa.

Agradeço ao pessoal da secretaria de pós-graduação que tantos serviços valorosos prestaram com eficiência e amizade.

Agradeço por fim às demais pessoas cujo esquecimento injusto nesta lista não consegui impedir, mas que sempre estiveram torcendo por mim, perto ou longe.

Resumo

Kemer classificou, a menos de PI-equivalência, todas as álgebras T-primas no caso de caracterísitica zero e, em seu importante Teorema sobre o Produto Tensorial (TPT), demonstrou que o produto tensorial entre duas álgebras T-primas (ainda sobre corpos de característica zero) resulta igualmente numa álgebra T-prima.

Neste trabalho é fornecida uma generalização para o último caso do TPT utilizando identidades graduadas.

Além disso, é estudada a existência de mergulhos nas álgebras que aparecem no TPT. Mais especificamente, são encontradas condições necessárias e suficientes para a existência de um mergulho graduado de uma álgebra que satisfaz todas as identidades graduadas da álgebra de matrizes cujas entradas pertencem à álgebra de Grassmann em uma álgebra de matrizes cujas entradas se encontram numa álgebra supercomutativa com unidade, quando todas essas álgebras são consideradas sobre corpos infinitos de característica diferente de dois.

Por fim, são fornecidas bases de identidades graduadas para os T-ideais graduados da n-ésima potência tensorial da álgebra de Grassmann, das álgebras de matrizes cuja ordem é uma potência de dois, e do produto tensorial de quaisquer duas dentre as álgebras previamente citadas. A partir destas deduz-se o TPT no caso em que a ordem das álgebras de matrizes é uma potência de dois.

Abstract

Kemer classified, up to PI-equivalence, the T-prime algebras in the case of characteristic zero, and in his celebrated Tensor Product Theorem (TPT) he showed that the tensor product of two T-prime algebras considered over a field of characteristic zero, is another T-prime algebra.

In this work, a generalization for the last case of the TPT is given using graded identities.

The existence of embeddings into the algebras cited on the TPT is also studied. More specifically, necessary and sufficient conditions for the existence of a graded embedding of an algebra satisfying all graded polynomial identities for the matrix algebra with entries in the Grassmann algebra, into a matrix algebra with entries in a supercommutative algebra with unity are found when these algebras are taken over fields of characteristic different from two.

Graded identities that generate the graded T-ideals of the n-th tensor power of the Grassmann algebra, of the matrix algebras cited in Kemer's TPT (whose order is a power of two) and of the tensor product between any two of those algebras are provided. As a consequence, Kemer's TPT is derived from those results in the special case when the order of the matrices in the matrix algebras under consideration, is a powers of two.

Sumário

Introdução

As álgebras de matrizes sobre anéis, as álgebras comutativas e as álgebras de dimensão finita são objetos cujo estudo é muito significativo, tendo em vista o vasto campo da aplicações destes objetos. Tais álgebras pertencem a uma classe mais ampla de álgebras, constituem o que denominamos de *PI-álgebras* ou *álgebras com identidades polinomiais*, isto é, são álgebras para as quais, existe (pelo menos) um polinômio cujo produto entre as variáveis é associativo e não comutativo, que é anulado via qualquer substituição das variáveis por elementos da álgebra em questão. Estudar PI-álgebras é estudar como as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra interferem em sua estrutura.

Embora as pesquisas na PI-teoria, como a área de estudo de tais álgebras é comumente conhecida, tenha tido início em 1922 com o artigo [9], seu estudo foi intensificado em torno dos anos 1950, época da publicação do famoso teorema de Amitsur-Levitzki, que nos diz que a álgebra das matrizes de ordem n satisfaz a identidade *standard* de grau $2n$. Na mesma época foram publicados trabalhos importantes de Jacobson e Kaplansky, que influenciaram muito o futuro desenvolvimento da PI teoria. Ressaltamos que Kaplansky em [17] elaborou uma extensa lista de problemas relevantes na teoria de anéis; naquela lista entraram vários problemas em aberto sobre PI álgebras. Ainda em 1950, Specht levantou o seguinte problema: "Toda álgebra associativa possui uma base finita de identidades polinomiais?". Esse problema, que passou a ser conhecido como Problema de Specht, motivou grande parte do desenvolvimento desta teoria, que considerava inicialmente apenas álgebras sobre corpos de característica zero.

O Problema de Specht só foi resolvido, afirmativamente, em 1987 por Kemer, ver a monografia [18], onde ele apresenta sua teoria sobre a estrutura dos T-ideais. Uma abordagem mais atualizada da teoria de Kemer pode ser encontrada em [16]. Naquele trabalho Kemer também classificou as álgebras T-primas sobre corpos de característica zero. No entanto o trabalho de Kemer não dá outra informação sobre a base dos T-ideais, senão sua finitude.

Além disso, no caso de característica positiva, não só nem sempre podemos obter uma base de identidades finita bem como não se possui uma classificação das álgebras T-primas. A busca pelas bases de identidades de PI-álgebras concretas, tanto no caso de característica positiva como no caso de característica nula, é portanto um assunto de grande relevância na teoria de anéis, sendo igualmente difícil.

Ressaltamos que não são muitas as álgebras para as quais se conhece uma base de identidades polinomiais. Por exemplo, para a álgebra $M_n(K)$, sendo o corpo K infinito, e $n \geq 3$ não se conhece uma base de identidades. Ainda no caso de $n = 2$ e $\mathrm{char}K = 2$ a existência (ou não) de uma base finita das identidades de $M_2(K)$ permanece um mistério.

Como as identidades ordinárias de uma álgebra podem constituir objetos de difícil estudo, é conveniente, por vezes, considerar generalizações destas, como identidades fracas, identidades com involução, identidades com traço, polinômios centrais e identidades graduadas. Neste trabalho dedicamos grande atenção a estas últimas, que tanto nos dão informações sobre as identidades ordinárias de uma álgebra, mas também que constituem um objeto de estudo por si sós, uma vez que desempenham um papel muito importante na teoria de Kemer.

Uma das conseqüências dos estudos de Kemer é o Teorema sobre o Produto Tensorial (TPT), que estabelece que o produto tensorial de duas álgebras T-primas em característica zero é PI-equivalente a outra álgebra T-prima. Outras demonstrações, mais "elementares", para as afirmações do TPT foram obtidas de forma independente por vários autores. As identidades graduadas desempenharam papel fundamental na maioria dessas demonstrações, bem como na "generalização" do TPT do caso de característica zero para o caso de característica positiva.

Tendo tanta importância quanto o estudo dos problemas acima citados, outra pergunta relevante é: "Uma álgebra A pode ser mergulhada, e portanto é isomorfa a uma subálgebra, numa álgebra T-prima?".

O problema de estudo de mergulhos de uma álgebra qualquer em uma álgebra de matrizes cujas entradas se encontram num corpo por exemplo, foram amplamente estudadas por vários algebristas. O leitor interessado pode encontrar mais informação sobre esse problema na recente monografia [16].

Quando lidamos com PI-álgebras, é de imediata verificação que se uma álgebra A pode ser mergulhada numa álgebra B, então o T-ideal de identidades da primeira deve conter o T-ideal de identidades da segunda, não sendo no entanto condição suficiente para a existência de tal mergulho. Tal como no caso das identidades, este é um problema difícil, e para obter mais informações sobre ele é conveniente restringir a classe de mergulhos com que trabalhamos, considerando mergulhos graduados. Como veremos, esse estudo não depende tanto da característica do corpo sobre o qual consideramos a álgebra como acontece quando estudamos apenas as identidades polinomiais.

Aqui apresentamos tanto resultados ligados ao estudo de T-ideais graduados de álgebras T-primas, bem como estudamos as condições necessárias e suficientes para a existência de um mergulho numa álgebra T-prima. O texto está organizado em quatro capítulos estruturados da seguinte forma:

O primeiro é um capítulo onde as definições, resultados e notações utilizados ao longo de todo o texto são introduzidos com exemplos a serem retomados posteriormente.

No segundo capítulo, é demonstrada no teorema 2.19, usando-se T-ideais $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduados a continência do T-ideal de identidades de $M_{k,l}(E)$ no T-ideal de identidades de $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$, onde $pr + qs = k$ e $ps + qr = l$. Aqui E denota a álgebra de Grassmann (ver definição 1.3) e $M_{k,l}(E)$ é a álgebra de matrizes tal como na definição 1.6.

No terceiro capítulo encontramos condições necessárias (teorema 3.7) e suficientes (teoremas 3.16 e 3.19) para a existência de um mergulho graduado de uma álgebra $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduada A em $M_n(S)$ e $M_{p,q}(S)$ para alguma álgebra supercomutativa S com unidade. Em particular, mostramos que a álgebra $M_{p,q}(E) \otimes E$ pode ser mergulhada gradualmente numa álgebra $M_{p+q}(S)$, onde S é uma álgebra supercomutativa adequada. Além disso, mostramos que em característica zero, quando ocorre a igualdade entre os T-ideais de $M_{p+q}(E)$ e $M_{p,q}(E) \otimes E$, não há mergulho de $M_{p+q}(E)$ em $M_{p,q}(S) \otimes T$, para quaisquer álgebras supercomutativas S e T(teorema 3.22). Ressaltamos que todos os resultados deste capítulo são inéditos.

No quarto e último capítulo, exibimos bases de identidades $\mathbb{Z}_2^k$-graduadas para as álgebras $M_{2^{p-1},2^{p-1}}(E)$, $M_{2^q}(E)$ e para potências tensoriais de E. A partir dos resultados obtidos nesta seção, temos como conseqüência uma demonstração alternativa, com identidades graduadas para o TPT em característica zero, e sua "generalização" graduada para o caso de característica positiva.

Capítulo 1

Conceitos introdutórios

Ao longo de todo esse capítulo forneceremos resultados clássicos, sem demonstração, da PI teoria que serão utilizados ao longo deste trabalho, bem como definições e notações que serão empregadas ao longo de toda a tese.

1.1 Conceitos básicos

Em todo o texto, exceto quando feita menção explícita do contrário, K denotará um corpo arbitrário e todas as álgebras, espaços vetoriais ou produtos tensoriais serão considerados sobre K.

Iniciamos com a definição de álgebra, tal como será utilizada ao longo de todo o trabalho.

Definição 1.1. *Seja K um corpo e seja A um K-espaço vetorial. Se existe uma operação binária $\cdot : A \times A \to A$ tal que para quaisquer a, b, $c \in A$ e para todo $\alpha \in K$ as seguintes condições são válidas:*

1. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
3. $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$;

então A com tal estrutura é chamado uma K-álgebra.

Daqui por diante, tal como no produto por escalar, omitiremos o símbolo $\cdot$, a menos que seja necessário distinguir o produto da álgebra do produto por escalar do espaço vetorial.

Definição 1.2. *Seja A uma álgebra.*

- *A é dita associativa se para quaisquer a, b, $c \in A$ tivermos que $(ab)c = a(bc)$.*
- *A é dita comutativa se para quaisquer a, $b \in A$ tivermos que $ab = ba$.*
- *A é dita unitária se existir em A um elemento neutro para a multiplicação entre os elementos da álgebra, i.e., se existe 1_A tal que $1_A a = a 1_A = a$ para todo $a \in A$. Quando não houver riscos de mal-entendidos 1_A será denotado simplesmente por* 1.

Ao longo de todo o texto, exceto quando feito menção do contrário, toda álgebra considerada será **associativa** e **unitária**.

Exemplo 1.3. *Seja V um espaço vetorial com uma base $\beta = \{e_i |\ i \in I\}$ enumerável. Considere a álgebra gerada pelo conjunto β satisfazendo $e_i e_j = -e_j e_i$ e $e_i^2 = 0$ para quaisquer i, $j \in I$. Tal álgebra é chamada de* álgebra de Grassmann *$E(V)$, ou simplesmente E quando o espaço vetorial em questão é conhecido.*

Note que o conjunto $\{e_{i_1} \dots e_{i_r} |\ i_1 < \dots < i_r\}$ forma uma base para E como espaço vetorial. Note ainda, que a álgebra E pode ser escrita como $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 é o subespaço gerado pelos elementos de comprimento par e E_1 é o subespaço gerado pelos elementos de comprimento ímpar.

Exemplo 1.4. *Seja $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ um conjunto enumerável de variáveis. Denotaremos por $K\langle X \rangle$ a álgebra cuja base como espaço vetorial é formada pelos elementos da forma:*

$$x_{i_1} \dots x_{i_n},\ x_{i_j} \in X,\ n \in \mathbb{N},$$

onde para $n = 0$ temos o monômio vazio 1; e com multiplicação dada por:

$$(x_{i_1} \dots x_{i_m})(x_{j_1} \dots x_{j_n}) = x_{i_1} \dots x_{i_m} x_{j_1} \dots x_{j_n},\ x_{k_l} \in X.$$

Definição 1.5. *Um subconjunto B de uma álgebra A é chamado de* subálgebra *de A se B é subespaço vetorial de A fechado quanto à multiplicação da álgebra A e $1_A \in B$. Um subconjunto I de A é chamado de* ideal à esquerda *se I é subespaço de A e além disso $ab \in I$, para todo $a \in A$ e para todo $b \in I$. De maneira análoga podemos definir* ideal à direita. *Um* ideal bilateral *é um subconjunto que é, simultaneamente, ideal à direita e ideal à esquerda. Os ideais bilaterais serão chamados simplesmente* ideais *daqui em diante.*

A partir dessa definição é de imediata verificação que todo ideal (à esquerda, à direita, bilateral) de uma álgebra A é uma subálgebra (com unidade somente no caso em que o ideal é a própria álgebra).

Exemplo 1.6. *Seja $M_n(E)$ a álgebra formada pelas matrizes quadradas de ordem n cujas entradas se encontram na álgebra de Grassmann, com o produto usual. O conjunto $M_{a,b}(E)$ que consiste de todas as matrizes da forma*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} E_0 & \cdots & E_0 & E_1 & \cdots & E_1 \\ \vdots & a\times a & \vdots & \vdots & a\times b & \vdots \\ E_0 & \cdots & E_0 & E_1 & \cdots & E_1 \\ \hline E_1 & \cdots & E_1 & E_0 & \cdots & E_0 \\ \vdots & b\times a & \vdots & \vdots & b\times b & \vdots \\ E_1 & \cdots & E_1 & E_0 & \cdots & E_0 \end{array}\right)$$

forma uma subálgebra de $M_n(E)$.

Exemplo 1.7. *O conjunto de todos os polinômios de $K\langle X\rangle$ cuja primeira variável em cada monômio é x_1 é um ideal à direita de $K\langle X\rangle$.*

Definição 1.8. *Sejam A e B duas álgebras e seja $\varphi : A \to B$ uma transformação linear. Tal transformação é chamada* homomorfismo de álgebras *(ou simplesmente homomorfismo daqui em diante) se a mesma preserva o produto da álgebra, isto é,*

$$\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2), \text{ para todo } a_1, a_2 \in A; \text{ e se } \varphi(1) = 1.$$

De maneira análoga ao que ocorre com todas as estruturas algébricas, chamamos φ de isomorfismo *se o mesmo é bijetor, de* mergulho *se o mesmo é injetor, de* endomorfismo *se $A = B$, e de* automorfismo *se for um endomorfismo bijetor.*

Exemplo 1.9. *A transformação linear $\varphi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle$ que leva $1 \mapsto 1$ e $x_i \mapsto x_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ é ao mesmo tempo um endomorfismo e um mergulho.*

A seguir enunciamos o teorema de isomorfismo:

Teorema 1.10. *Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo. Então o núcleo de φ,*

$$\ker\varphi = \{a \in A |\ \varphi(a) = 0\}$$

é um ideal de A e a álgebra quociente $A/\ker\varphi$ é isomorfa à sua imagem

$$\varphi(A) = \{\varphi(a) |\ a \in A\}.$$

Definição 1.11. *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de álgebras, e seja $F \in \mathcal{C}$ uma álgebra gerada (como álgebra) por um conjunto X. A álgebra F é chamada de* álgebra livre na classe $\mathcal{C}$, livremente gerada pelo conjunto X, *se para qualquer álgebra $A \in \mathcal{C}$, qualquer aplicação de X em A pode ser estendida a um único homomorfismo de F em A e a cardinalidade do conjunto X é chamado de* posto *de F.*

Exemplo 1.12. *A álgebra $K\langle X\rangle$, tal como na definição 1.4 é livre na classe de todas as álgebras associativas, é livremente gerada pelo conjunto X e é de posto infinito.*

1.2 Álgebras com identidades polinomiais

Nessa seção definiremos as álgebras com identidades polinomiais, que formam uma classe muito importante de álgebras, uma vez que representam generalizações de álgebras nilpotentes, comutativas ou de dimensão finita e que mantêm algumas boas propriedades apresentadas por estas últimas. Além disso fornecemos variados exemplos dessas álgebras.

Definição 1.13. *Seja f um elemento não nulo de $K\langle X\rangle$ e seja A uma álgebra. Dizemos que f é uma* identidade polinomial *de A, se:*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \text{ para quaisquer } a_1, \ldots, a_n \in A.$$

Se A é uma álgebra que satisfaz alguma identidade polinomial não nula, a mesma é chamada de álgebra com identidade polinomial*, ou simplesmente* PI-álgebra*.*

Exemplo 1.14. *Uma álgebra A é chamada de* álgebra nil de índice limitado *se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$, para todo $a \in A$, e A é chamada de* álgebra nilpotente de índice m *se $a_1 \ldots a_m = 0$, para quaisquer elementos $a_1, \ldots, a_m \in A$ (portanto toda álgebra nilpotente é nil de índice limitado). Essas álgebras não são, evidentemente, unitárias.*

Ambas são PI-álgebras, pois ambas satisfazem $f(x) = x^m$. No caso de A ser nilpotente de índice m, ela satisfaz uma identidade multilinear (ver definição 1.29), a saber $x_1 \ldots x_m$.

Exemplo 1.15. *Toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra, pois a mesma satisfaz o polinômio $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$.*

Exemplo 1.16. *Toda álgebra A de dimensão finita n é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio chamado de* identidade standard de grau $n+1$*:*

$$s_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n+1)},$$

onde $(-1)^\sigma$ denota o sinal da permutação σ.

Exemplo 1.17. *Claramente do exemplo anterior obtemos que a álgebra $M_n(K)$ é uma PI-álgebra, pois satisfaz s_{n^2+1}. Mas, em verdade pelo teorema de Amitsur–Levitzki podemos afirmar que $M_n(K)$ satisfaz s_{2n} e que não satisfaz nenhuma identidade de grau menor.*

Exemplo 1.18. *A álgebra de Grassmann E é uma PI-álgebra, pois satisfaz $[[x_1, x_2], x_3]$, onde $[x, y] = xy - yx$. Note que se a, $b \in E$, então $[a, b] \in E_0$, que é o centro de E, donde segue a identidade.*

Uma pergunta bastante natural é a seguinte: se A e B são duas PI-álgebras, então $A \otimes B$ também é necessariamente uma PI-álgebra?

O resultado a seguir, devido a Regev, e cuja demonstração original pode ser encontrada em [19], responde afirmativamente a esta questão.

Teorema 1.19. *Sejam A, B duas PI-álgebras, então $A \otimes B$ também é uma PI-álgebra.*

1.3 T-ideais, variedades e álgebras relativamente livres

Nesta seção definiremos variedades, T-ideais de identidades, e álgebras relativamente livres, conceitos fundamentais no estudo da PI-teoria.

Definição 1.20. *Seja A uma álgebra e seja I um ideal de A. Dizemos que I é um* T-ideal *de A se o mesmo é invariante por endomorfismos, isto é, se para todo endomorfismo $\varphi : A \to A$, temos que $\varphi(I) \subseteq I$.*

Definição 1.21.

1. *Seja $\{f_i \in K\langle X\rangle |\ i \in I\}$ um conjunto de polinômios. A classe $\mathcal{C}$ de todas as álgebras satisfazendo as identidades $f_i = 0$ (e possivelmente outras), para todo $i \in I$, é chamada* variedade definida pelo sistema de identidades *$\{f_i |\ i \in I\}$.*

2. *O conjunto $T(\mathcal{C})$ formado por todas as identidades polinomiais satisfeitas por todas as álgebras na variedade $\mathcal{C}$ é chamado de* T-ideal de $\mathcal{C}$*, e dizemos que o T-ideal $T(\mathcal{C})$* é gerado como T-ideal *pelo conjunto de identidades $\{f_i |\ i \in I\}$ que definem $\mathcal{C}$. Desse modo denotamos $T(\mathcal{C}) = \langle\{f_i | i \in I\}\rangle^T$ e o conjunto $\{f_i | i \in I\}$ é chamado de* base de identidades polinomiais de $\mathcal{C}$ ou de $T(\mathcal{C})$*. Os demais elementos do T-ideal são chamados de* conseqüências *dos polinômios da base. Ao lidarmos com uma única PI-álgebra A, denotamos por $T(A)$ o T-ideal das identidades satisfeitas por A.*

3. *Dizemos que dois conjuntos de identidades polinomiais são* equivalentes *se geram o mesmo T-ideal. Ainda, duas PI-álgebras A e B são chamadas de* PI-equivalentes *se $T(A) = T(B)$, denotamos $A \sim B$.*

Proposição 1.22. *Seja $\mathcal{C}$ uma variedade definida por um conjunto $\mathcal{B}$ de polinômios. Então $T(\mathcal{C})$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$ tal como na definição 1.20.*

Demonstração: É imediato que $T(\mathcal{C})$ é um ideal de $K\langle X\rangle$. Seja $\varphi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle$ um endomorfismo e seja $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in T(\mathcal{C})$. Cada x_{i_j} é levado em algum polinômio $g_{i_j}(x_1, \ldots, x_r)$. Seja $A \in \mathcal{C}$ e considere $a_1, \ldots, a_r \in A$ e fixe $a_{i_j} = g_{i_j}(a_1, \ldots, a_r)$. Então

$$0 = f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = f(g_{i_1}(a_1, \ldots, a_r), \ldots, g_{i_n}(a_1, \ldots, a_r)) = \varphi(f)(a_1, \ldots, a_r).$$

E portanto $T(\mathcal{C})$ é fechado por endomorfismos. ■

Observação 1.23. *Note que, tal como definida, a base de identidades de um T-ideal não requer minimalidade quanto ao número de elementos da mesma, isto é, se B e C são subconjuntos de $K\langle X\rangle$ tais que B é base de identidades para o T-ideal de alguma variedade de álgebras associativas, e $B \subset C$, então C é base para esse mesmo T-ideal. Em particular, $T(\mathcal{C})$ é uma base para si mesmo. Além disso é imediato que se A é uma álgebra numa variedade $\mathcal{C}$, então qualquer subálgebra sua também se encontra nessa mesma variedade.*

O teorema a seguir nos fornece as condições necessárias e suficientes para que uma classe de álgebras seja uma variedade.

Teorema 1.24. ***(Birkhoff)*** *Uma classe de álgebras $\mathcal{C} \neq \emptyset$ é uma variedade se, e somente se, é fechada com relação ao produto direto infinito, formação de subálgebras e álgebras quocientes.*

Demonstração: Veja [14], Theorem 2.3.2, pp.24–25. ■

Definição 1.25. *O T-ideal de uma álgebra (ou de uma variedade) é dito* finitamente gerado *se o mesmo admite uma base finita de identidades polinomiais.*

Specht propôs em [22] o seguinte problema que ficou famoso como problema de Specht:

Problema 1.26. *Seja A uma PI-álgebra qualquer sobre um corpo de característica 0. O T-ideal de A é finitamente gerado?*

Em 1987, após 37 anos em aberto, esse problema foi respondido afirmativamente por Kemer em [18], que com esse fim desenvolveu uma densa teoria de T-ideais. Alguns resultados desta teoria serão enunciados em momento oportuno, omitindo-se as demonstrações que podem ser encontradas juntamente com mais detalhes da teoria na referência já citada.

Definição 1.27. *Para um conjunto fixo Y, a álgebra $F_Y(\mathcal{C}) \in \mathcal{C}$ é chamada uma* álgebra relativamente livre *de $\mathcal{C}$* livremente gerada por Y, *se $F_Y(\mathcal{C})$ é livre na classe $\mathcal{C}$ (ver definição 1.11). A cardinalidade de Y é chamada de* posto de $\mathcal{C}$.

Proposição 1.28. *Sejam $\mathcal{C}$ uma variedade definida por um conjunto $\{f_i|\ i \in I\}$, Y um conjunto e J um ideal de $K\langle Y\rangle$ gerado por:*

$$\{f_i(g_1, \ldots, g_{n_i})|\ g_j \in K\langle Y\rangle,\ i \in I\}.$$

Então a álgebra quociente $F = K\langle Y\rangle/J$ é uma álgebra relativamente livre, com o conjunto de geradores $\overline{Y} = \{y + J|\ y \in Y\}$. Além disso, quaisquer duas álgebras relativamente livres na mesma variedade e de mesmo posto são isomorfas.

Demonstração: Veja [14], Proposition 2.2.5, p. 23. ■

1.4 Identidades polinomiais homogêneas, multilineares e próprias

Nesta seção serão fornecidos os resultados clássicos amplamente utilizados para se obter a base de identidades do T-ideal de uma PI-álgebra, pois restringem significativamente a quantidade de polinômios com a qual devemos lidar.

Iniciamos lembrando algumas nomenclaturas:

Definição 1.29. *Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$ é chamado de* homogêneo *se todas as suas parcelas possuem o mesmo grau total. Além disso, ele é chamado de* multihomogêneo *se o grau com que cada variável aparece em todas as suas parcelas é o mesmo. Por fim, f é chamado de multilinear se é multihomogêneo de multigrau $(1, \ldots, 1)$, i.e.:*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(m)},\ \alpha_\sigma \in K.$$

Proposição 1.30. *Seja*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i \in K\langle X \rangle,$$

onde f_i são as componentes homogêneas de f com grau i em x_1.

1. *Se K possui mais que n elementos, então as identidades polinomiais $f_i = 0$, $i = 0$, 1, ..., n são conseqüências de $f = 0$.*

2. *Se K tem característica 0, então f é equivalente a um sistema de identidades polinomiais multilineares.*

Demonstração: Veja [14], Proposition 4.2.3, pp 39–40. ■

Como conseqüência imediata dessa proposição temos o seguinte corolário:

Corolário 1.31. *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo K infinito de qualquer característica. Então existe uma base para $T(A)$ formada somente por polinômios multihomogêneos.*

Definição 1.32. *O* comutador de comprimento *n, $[a_1, \ldots, a_n]$ é definido indutivamente por:*

$$[a_1, a_2] = a_1 a_2 - a_2 a_1, \quad [a_1, \ldots, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n],\ n \geq 3.$$

Definição 1.33. *Um polinômio $f \in K\langle X \rangle$ é chamado* próprio *se é combinação linear de produtos de comutadores.*

Tal como assumimos 1 como sendo o monômio de comprimento 0 em $K\langle X \rangle$, assumimos aqui 1 como sendo o produto de um conjunto vazio de comutadores, e denotaremos por $B\langle X \rangle$ o conjunto de tais polinômios, que é uma subálgebra de $K\langle X \rangle$.

Proposição 1.34. *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo infinito K. Então as identidades polinomiais de A são conseqüências das identidades próprias. Além disso, se supomos que* $\mathrm{char} K = 0$*, então existe uma base de identidades para $T(A)$ formada somente por polinômios que são próprios e multilineares.*

1.5 Graduações e identidades graduadas

No estudo das álgebras com identidades polinomiais é interessante algumas vezes considerarmos versões mais fracas de identidades polinomiais, como por exemplo, identidades com involução, identidades com traço, polinômios centrais e identidades graduadas. Essas últimas são o principal objeto de estudo de nosso trabalho e dedicamos essa seção à introdução de tais técnicas.

Definição 1.35. *Seja G um grupo. Uma álgebra A é dita G-*graduada *(ou simplesmente graduada), se $A = \oplus_{g\in G} A_g$, onde A_g é subespaço de A para todo $g \in G$ e $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para todo g, $h \in G$. Se $\dim_K A_g \leq 1$, para todo $g \in G$, então a G-graduação é chamada* fina.

Um elemento a de uma álgebra graduada A é chamado *(G)-homogêneo de grau g* se o mesmo pertence ao subespaço A_g, e seu grau é denotado por $\partial_G(a)$, ou simplesmente $\partial(a)$. Se $G = G_1 \times G_2$, $\partial_{G_i}(a)$ denotará a i-ésima componente do grau de a, $i = 1, 2$. Note que possivelmente podemos ter $A_g = \{0\}$ para alguns $g \in G$. Isso nos leva a definir o *suporte da graduação* como sendo $\mathrm{supp}_G(A) = \{g \in G |\ A_g \neq \{0\}\}$.

O grupo sobre o qual a graduação é realizada será sempre um grupo abeliano (e na maior parte das vezes finito), então daqui por diante optaremos por utilizar a notação aditiva no lugar da multiplicativa.

Definição 1.36. *Uma subálgebra B de uma álgebra G-graduada A é dita G-*graduada *se $B = \oplus_{g\in G} B \cap A_g$.*

Definição 1.37. *Sejam A, B duas álgebras G-graduadas, e seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras. Tal homomorfismo é chamado* (G-)graduado *se $\varphi(A_g) \subseteq \varphi(B_g)$, para todo $g \in G$.*

Exemplo 1.38. *A álgebra $K\langle X\rangle$ admite uma $\mathbb{Z}$-graduação natural onde $K\langle X\rangle_j = \{0\}$ se $j < 0$ e $K\langle X\rangle_j$ é igual ao subespaço dos polinômios homogêneos de grau total igual a j. A verificação segue imediatamente do fato que o grau do produto é igual à soma dos graus.*

Exemplo 1.39. *A álgebra $K\langle X\rangle$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada, sendo $K\langle X\rangle_0$ a subálgebra gerada pelos monômios de grau total par e sendo $K\langle X\rangle_1$ o subespaço gerado pelos monômios de grau total ímpar. De modo geral pode-se obter uma $\mathbb{Z}_n$-graduação para $K\langle X\rangle$ de modo análogo, para $n > 2$.*

Exemplo 1.40. *A álgebra de Grassmann admite uma $\mathbb{Z}_2$-graduação segundo a decomposição $E = E_0 \oplus E_1$ do exemplo 1.3.*

Exemplo 1.41. *O quadrado tensorial da álgebra de Grassmann E também admite uma $\mathbb{Z}_2$-graduação, a saber: $(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1)$ e $(E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0)$. A verificação de que tal decomposição define uma $\mathbb{Z}_2$-graduação é direta.*

Exemplo 1.42. *A álgebra $M_{a,b}(E)$, tal como apontada na definição 1.6 admite uma $\mathbb{Z}_2$-graduação, que é a decomposição em:*

$$(M_{a,b}(E))_0 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} E_0 & \cdots & E_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a \times a & \vdots & \vdots & a \times b & \vdots \\ E_0 & \cdots & E_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & E_0 & \cdots & E_0 \\ \vdots & b \times a & \vdots & \vdots & b \times b & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & E_0 & \cdots & E_0 \end{array}\right),$$

e

$$(M_{a,b}(E))_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & E_1 & \cdots & E_1 \\ \vdots & a \times a & \vdots & \vdots & a \times b & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & E_1 & \cdots & E_1 \\ \hline E_1 & \cdots & E_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & b \times a & \vdots & \vdots & b \times b & \vdots \\ E_1 & \cdots & E_1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right).$$

Trataremos detalhadamente a graduação acima no caso especial $a = b = 1$ posteriormente.

Exemplo 1.43. *A álgebra $M_n(K)$ possui uma $\mathbb{Z}_n$-graduação natural, definida do seguinte modo:*

$$(M_n(K))_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2,k+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-k,n} \\ a_{n-k+1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

sendo $k \in \mathbb{Z}_n$. A partir desta graduação, podemos induzir uma $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduação em $M_n(E)$, e portanto em $M_{a,b}(E)$, com $a + b = n$.

A demonstração do resultado seguinte é conseqüência de cálculos diretos e será omitida.

Lema 1.44. *Sejam a, b inteiros positivos tais que $a+b=n$, então a álgebra $M_{a,b}(E)$ é subálgebra graduada de $M_n(E)$ com a $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduação induzida da fornecida no exemplo anterior.*

Note que no exemplo 1.43 o suporte da graduação é todo o grupo $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$, enquanto que no exemplo seguinte o suporte é um subconjunto próprio do mesmo, pois $(M_{a,b}(E))_{0,1} = \{0\}$.

Definição 1.45. *Considere G um grupo fixo e sejam $\mathcal{C}$ uma classe de álgebras G-gradudadas, $F \in \mathcal{C}$ uma álgebra G-graduada gerada (como álgebra) por um conjunto $X_G = \bigcup_{g\in G} X_g$, onde a união é disjunta. A álgebra F é chamada de* álgebra graduada livre na classe $\mathcal{C}$, livremente gerada pelo conjunto X, *se para toda álgebra $A \in \mathcal{C}$, qualquer aplicação $\varphi : X \to A$, tal que*

$$\varphi(X_g) \subseteq A_g, \text{ para todo } g \in G,$$

pode ser estendida a um único homomorfismo graduado $\tilde{\varphi} : F \to A$. A cardinalidade do conjunto X é chamado de posto *de F.*

Exemplo 1.46. *Seja $X_G = \bigcup_{g\in G} X_g$, onde cada X_g é um conjunto enumerável infinito de variáveis: $\{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots\}$. Então a álgebra de polinômios $K\langle X_G\rangle$ gerada como espaço vetorial pelos monômios da forma:*

$$x_{i_1}^{(g_1)} x_{i_2}^{(g_2)} \ldots x_{i_r}^{(g_r)},\ r \in \mathbb{N}$$

é álgebra G-graduada livre na classe de todas as álgebras G-graduadas associativas, e será chamada daqui em diante de álgebra (associativa) graduada livre.

Definição 1.47. *Seja A uma álgebra G-graduada. A é chamada de* PI-álgebra graduada *se existe $f(x_{i_1}^{(g_1)}, \ldots, x_{i_r}^{(g_r)}) \in K\langle X_G\rangle$ tal que $f(a_1, \ldots, a_r) = 0$ sempre que os a_i forem elementos G-homogêneos de A satisfazendo $\partial(a_i) = g_i$, para todo i entre 1 e r.*

Definição 1.48. *Uma substituição de variávies em um polinômio da álgebra G-graduada livre por elementos de uma álgebra graduada, respeitando-se os respectivos G-graus, tal como acima, é denominada* substituição standard.

Tal como na definição 1.27, podemos definir álgebra graduada relativamente livre de modo absolutamente análogo, e temos como conseqüência a proposição seguinte, cuja demonstração praticamente repete aquela da proposição 1.28, com pequenas e óbvias adaptações:

Proposição 1.49. *Sejam $\mathcal{C}$ uma variedade definida por um conjunto $\{f_i \in K\langle Y_G\rangle |\ i \in I\}$, $Y_G = \bigcup_{g\in G} Y_g$ um conjunto e J um ideal de $K\langle Y_G\rangle$ gerado por:*

$$\{f_i(g_1, \dots, g_{n_i})|\ g_j \in K\langle Y_G\rangle,\ i \in I\}.$$

Então a álgebra quociente $F = K\langle Y_G\rangle/J$ é uma álgebra relativamente livre, com o conjunto de geradores $\overline{Y} = \{y + J|\ y \in Y\}$. Além disso, quaisquer duas álgebras relativamente livres na mesma variedade e de mesmo posto são isomorfas.

De maneira análoga ainda ao que ocorre no caso ordinário podemos falar dos T-ideais graduados de $K\langle X_G\rangle$ e de T-ideais graduados de identidades polinomiais graduadas de uma PI-álgebra graduada. Tal como no caso ordinário, basicamente repetindo as demonstrações, pode-se demonstrar que se K é de característica zero, então o T-ideal graduado de identidades de uma álgebra A (denotado daqui em diante por $T_G(A)$) é gerado, como T-ideal, pelas identidades graduadas multilineares de A, e que se K é infinito tal T-ideal é gerado pelas identidades graduadas multihomogêneas de A.

Encerramos esta seção com dois resultados, de demonstração imediata, que são muito úteis para se comparar os T-ideais ordinários de duas PI-álgebras utilizando identidades graduadas.

Lema 1.50. *Sejam A, B duas PI-álgebras G-graduadas. Se $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, então $T(A) \subseteq T(B)$.*

Corolário 1.51. *Sejam A, B duas PI-álgebras G-graduadas. Se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T(A) = T(B)$.*

1.6 Resumo da teoria dos T-ideais

Nesta seção faremos um breve resumo da teoria sobre a estrutura dos T-ideais desenvolvida por Kemer para álgebras **sobre característica zero**. Todas as demonstrações serão omitidas e podem ser encontradas na monografia [18], mais especificamente nas seções 2 e 3 do capítulo 1.

Definição 1.52. *Um T-ideal S é chamado* T-semiprimo *se, para qualquer T-ideal J tal que $J^n \subseteq S$, para algum $n \in \mathbb{N}$, tivermos necessariamente que $J \subseteq S$.*

Um T-ideal P é chamado T-primo *se, para quaisquer T-ideais J_1, J_2 tais que $J_1 J_2 \subseteq P$, tivermos necessariamente que $J_1 \subseteq P$ ou $J_2 \subseteq P$.*

Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, então $A\widehat{\otimes}E = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1)$ é chamado de *envolvente de Grassmann de A*.

Teorema 1.53. *1. Todo T-ideal não-trivial coincide com o T-ideal do envelope de Grassamann de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada;*

2. O T-ideal de qualquer álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e finitamente gerada coincide com o T-ideal de alguma álgebra também $\mathbb{Z}_2$-graduada e de dimensão finita.

Como conseqüência do teorema anterior temos que todo T-ideal não trivial coincide com o T-ideal de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita, ficando claro que essa teoria está fortemente ligada às propriedades das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas, justificando portanto o estudo independente das mesmas.

O teorema a seguir contém os resultados que permitem classificar, em característica zero, os T-ideais T-primos.

Teorema 1.54. *1. Seja $\mathcal{C} \neq \emptyset$ uma variedade. Então $\mathcal{C} = \mathcal{N}_m\mathcal{S}$, onde $\mathcal{N}_m$ é a variedade de todas as álgebras nilpotentes de índice menor ou igual a m e onde $\mathcal{S}$ representa a maior subvariedade semiprima de $\mathcal{C}$. Aqui o produto de variedades $\mathcal{N}_m\mathcal{S}$ representa todas as álgebras A que possuem um ideal $I \subset \mathcal{N}_m$ e tal que $A/I \subset \mathcal{S}$.*

2. O T-ideal I é semi-primo se, e somente se, I é interseção finita de T-ideais primos.

3. Se um T-ideal não-trivial é T-primo, então o mesmo é isomorfo a um dos seguintes T-ideais: $T(M_n(K))$, $T(M_n(E))$, $T(M_{a,b}(E))$.

Dentre as conseqüências mais importantes desse resultado se encontra a resposta afirmativa ao Problema de Specht, como já citado anteriormente.

No caso de característica positiva, os resultados de Kemer não se aplicam diretamente e a calssificação dos T-ideais primos nesse caso é ainda um problema em aberto, e extremamente dificil.

Kemer demonstrou ainda um importante resultado que retomaremos mais tarde. Esse resultado diz que a classe dos T-ideais T-primos, em característica 0, é fechado com respeito a produtos tensoriais. É imediato que $M_n(K) \otimes M_m(K) \cong M_{mn}(K)$, também $M_n(K) \otimes E \cong M_n(E)$. Portanto os respectivos T-ideais coincidem. Bem menos evidentes são as seguintes igualdades. Elas foram demonstradas por A. Kemer.

Teorema 1.55. (**Teorema sobre o produto tensorial de álgebras T-primas - TPT**) *Sobre um corpo K de característica zero as seguintes igualdades de T-ideais são válidas:*

1. $T(M_{1,1}(E)) = T(E \otimes E)$;
2. $T(M_{a+b}(E)) = T(M_{a,b}(E) \otimes E)$;
3. $T(M_{ac+bd,ad+bc}(E)) = T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E))$.

Capítulo 2

Identidades graduadas de $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$ e $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$

Nesse capítulo demonstramos que, se a característica do corpo K é diferente de 2 , o T-ideal $\mathbb{Z}_{a+b} \times \mathbb{Z}_2$-graduado de $M_{a,b}(E)$ está contido no T-ideal graduado de $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$, onde $a = pr + qs$ e $b = ps + qr$ (**teorema 2.16** e **corolário 2.17**). Como conseqüência obtemos a continência para os T-ideais de identidades ordinárias (**corolário 2.18**). A igualdade de tais T-ideais em característica 0 é demonstrada em [18]. Posteriormente Regev em [21] forneceu uma demonstração alternativa sem utilizar a teoria de Kemer. Vários casos do teorema foram demonstrados utilizando-se identidades graduadas por Di Vincenzo e Nardozza em [12] e [13].

Damos um exemplo de identidade graduada de $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ que não pertence ao T-ideal graduado de $M_{a,b}(E)$ no caso em que char$K > 2$ (**teorema 2.19**). Assim ao longo de todo o capítulo, K denotará um corpo de característica diferente de 2.

2.1 Preliminares

Iniciamos fixando a notação que será usada ao longo de todo o capítulo. Os inteiros positivos denotados pelas letras m, n, p, q, r, s satisfarão sempre:

$$p + q = m,\ r + s = n, \text{ e o grupo } \mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2 \text{ será denotado por } G.$$

Para um inteiro positivo k, I_k representará o conjunto dos k primeiros inteiros positivos, isto é, $\{1, \dots, k\} = I_k$.

Definimos o conjunto de variáveis:

$$Y = \{y_{ij}^k \mid 1 \leq i, j \leq m\}, \quad Z = \{z_{ij}^k \mid 1 \leq i, j \leq n\}, \quad U = \{u_{ij}^k \mid 1 \leq i, j \leq mn\}$$

onde os índices superiores k percorrem todos os inteiros positivos.

Sejam $p \geq q$ e $r \geq s$ quatro inteiros positivos. Definimos a aplicação $\gamma_{p,q} \colon I_{p+q} \to \mathbb{Z}_2$ como $\gamma_{p,q}(i) = 0$ se $1 \leq i \leq p$ e $\gamma_{p,q}(i) = 1$ caso contrário. Em outras palavras, $\gamma_{p,q}$ é a função característica do conjunto $I_{p+q} \setminus I_p$. Para um elemento fixo (t, a) do grupo G definimos as seguintes matrizes na álgebra $M_{mn}(K\langle Y, Z\rangle)$:

$$A_k^{(t,a)} = \sum_{n(j-i)+w-v=t} \delta_{a,(\gamma_{p,q}(i)+\gamma_{r,s}(v)+\gamma_{p,q}(j)+\gamma_{r,s}(w))} y_{ij}^k z_{vw}^k \mathbf{e}_{n(i-1)+v,n(j-1)+w}.$$

Aqui $\delta_{v,w}$ representa o símbolo de Kronecker e $\mathbf{e}_{vw}$ é a v, w-matriz elementar, isto é, a matriz com todas as entradas nulas exceto a entrada (v, w), que é igual a 1.

Denotaremos por $\mathcal{G}^{(t,a)}$ o conjunto de todas as matrizes $A_k^{(t,a)}$, $k \geq 1$ e $\mathcal{G} = \cup_{(t,a)\in G} \mathcal{G}^{(t,a)}$. Finalmente definimos a álgebra $F_{p,q,r,s}$ como sendo a álgebra gerada pelo conjunto $\mathcal{G}$, impondo as seguintes relações entre os elementos de Y e Z:

$$\begin{aligned}
&[y_{i_1j_1}^{k_1}, z_{i_2j_2}^{k_2}] = 0;\\
&[y_{i_1j_1}^{k_1}, y_{i_2j_2}^{k_2}] = 0, \quad \text{se } \gamma_{p,q}(i_1) + \gamma_{p,q}(j_1) = 0;\\
&[z_{i_1j_1}^{k_1}, z_{i_2j_2}^{k_2}] = 0, \quad \text{se } \gamma_{r,s}(i_1) + \gamma_{r,s}(j_1) = 0;\\
&y_{i_1j_1}^{k_1} \circ y_{i_2j_2}^{k_2} = 0, \quad \text{se } \gamma_{p,q}(i_1) + \gamma_{p,q}(j_1) = \gamma_{p,q}(i_2) + \gamma_{p,q}(j_2) = 1;\\
&z_{i_1j_1}^{k_1} \circ z_{i_2j_2}^{k_2} = 0, \quad \text{se } \gamma_{r,s}(i_1) + \gamma_{r,s}(j_1) = \gamma_{r,s}(i_2) + \gamma_{r,s}(j_2) = 1.
\end{aligned}$$

Aqui $[v, w] = vw - wv$ é o comutador usual entre v e w, e $v \circ w = vw + wv$ representa o produto simétrico (de Jordan) de v por w.

Em outras palavras, o conjunto Y gera uma álgebra supercomutativa livre, assim como o conjunto Z, e os elementos de Y comutam com os de Z.

A álgebra $F_{p,q,r,s}$ é G-graduada de maneira óbvia.

Exemplo 2.1. *A álgebra $F_{1,1,1,1}$ é gerada pelas matrizes*

$$A_k^{(0,0)} = \begin{pmatrix} y_{11}^k z_{11}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{11}^k z_{22}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{22}^k z_{11}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{22}^k z_{22}^k \end{pmatrix}, \quad A_k^{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{12}^k z_{21}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{21}^k z_{21}^k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_k^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & y_{11}^k z_{12}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{22}^k z_{12}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_k^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_{12}^k z_{11}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{12}^k z_{22}^k \\ y_{21}^k z_{11}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{21}^k z_{22}^k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_k^{(3,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & y_{12}^k z_{12}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{21}^k z_{12}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_k^{(3,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{11}^k z_{21}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{22}^k z_{21}^k & 0 \end{pmatrix},$$

onde as componentes de grau $(0,1)$ e $(2,0)$ são triviais.

Consideremos agora $a = pr+qs \geq b = ps+qr$, construiremos a álgebra $L_{p,q,r,s}$ como segue. Para cada $(t,a) \in G$ definimos $\mathcal{H}^{(t,a)}$ como sendo o conjunto de matrizes $B_k^{(t,a)} \in M_{mn}(K\langle U\rangle)$ onde

$$B_k^{(t,a)} = \sum_{\overline{j-i}=t} \delta_{a,\varepsilon(j)+\varepsilon(i)} u_{ij}^k \mathbf{e}_{ij}.$$

Aqui para cada $w \in I_{mn}$ escrevemos $w = n(w_1 - 1) + w_2$, $w_1 \in I_m$, $w_2 \in I_n$, e denotamos $\varepsilon(w) := \gamma_{p,q}(w_1) + \gamma_{r,s}(w_2)$. Observe que $\varepsilon(w)$ está bem definido uma vez que w_1 e w_2 são determinados unicamente por w.

Consideramos então $\mathcal{H} = \cup_{(t,a)\in G}\mathcal{H}^{(t,a)}$. A álgebra $L_{p,q,r,s}$ é gerada pelo conjunto $\mathcal{H}$ com as seguintes relações entre os elementos de U:

$$\begin{aligned} &[u_{i_1j_1}^{k_1}, u_{i_2j_2}^{k_2}] = 0, \quad \text{se } \varepsilon(i_1) + \varepsilon(j_1) = 0; \\ &u_{i_1j_1}^{k_1} \circ u_{i_2j_2}^{k_2} = 0, \quad \text{se } \varepsilon(i_1) + \varepsilon(j_1) = \varepsilon(i_2) + \varepsilon(j_2) = 1. \end{aligned}$$

Em outras palavras, U gera uma álgebra supercomutativa livre.

Novamente é imediato que a álgebra $L_{p,q,r,s}$ é G-graduada de maneira natural.

Abaixo damos construções explícitas dessas duas álgebras.

Exemplo 2.2. *A álgebra $L_{1,1,1,1}$ é gerada pelas matrizes*

$$B_k^{(0,0)} = \begin{pmatrix} u_{11}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{22}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{33}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44}^k \end{pmatrix}, \quad B_k^{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{23}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{41}^k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_k^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & u_{12}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{34}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_k^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_{13}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{24}^k \\ u_{31}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{42}^k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_k^{(3,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & u_{14}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{32}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_k^{(3,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{43}^k & 0 \end{pmatrix}$$

e as componentes $(0,1)$ e $(2,0)$ são novamente o espaço vetorial trivial.

Lema 2.3. *Seja (t,a) pertencente a $\mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$, e considere p, q, r, s fixos. Então a posição das entradas não nulas da matriz $B_k^{(t,a)} \in L_{p,q,r,s}$ são as mesmas da matriz $A_l^{(t,a)} \in F_{p,q,r,s}$.*

Demonstração: Temos que mostrar que se $(r,s) \in I_{mn} \times I_{mn}$, então existem $i,j \in I_m$ e $v,w \in I_n$ tais que $(r,s) = (n(i-1)+v, n(j-1)+w)$. Mas isso é conseqüência das propriedades de divisão euclidiana dos inteiros. ■

2.2 G-graduações em $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ e $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$

Lembramos que G é o grupo $G = \mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$ e que $m = pr + qs$ e $n = ps + qr$.

Definiremos uma G-graduação sobre a álgebra $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$. Sejam b_{ij} e b_{vw} elementos $\mathbb{Z}_2$-homogêneos de E com a graduação natural dada pelo exemplo 1.40. Então $b_{ij}\mathbf{e}_{ij} \in M_{p,q}(E)$ e $b_{vw}\mathbf{e}_{vw} \in M_{r,s}(E)$ se e somente se $\partial_{\mathbb{Z}_2}(b_{ij}) = \gamma_{p,q}(i) + \gamma_{p,q}(j)$ e $\partial_{\mathbb{Z}_2}(b_{uv}) = \gamma_{r,s}(v) + \gamma_{r,s}(w)$.

Podemos então considerar o produto tensorial entre esses elementos:

$$C_{ij,vw} = b_{ij}\mathbf{e}_{ij} \otimes b_{vw}\mathbf{e}_{vw} \in M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$$

O G-grau da matriz $C_{ij,vw} \in M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ é definida da maneira seguinte:

$$\partial(C_{ij,vw}) = (\overline{n(j-i)+w-v}, \overline{\partial_{\mathbb{Z}_2}(b_{ij}) + \partial_{\mathbb{Z}_2}(b_{vw})}).$$

Isso define uma G-graduação sobre o produto tensorial $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$. Verifica-se prontamente que esta é de fato uma G-graduação, ver [13, Section 2].

Nossas considerações da seção anterior fornecem uma álgebra genérica para o produto tensorial $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$.

Lema 2.4. *A álgebra $F_{p,q,r,s}$ é relativamente livre na variedade das álgebras G-graduadas determinadas por $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$.*

Demonstração: Seja $K\langle X_{g_1}, \ldots, X_{g_{2mn}}\rangle$ a álgebra G-graduada, onde o conjunto X_{g_i} consiste das variáveis $\{x_t^{(g_i)} \mid t \geq 1\}$ de G-grau g_i. Agora considere o homomorfismo de álgebras G-graduadas $\varphi : K\langle X_{g_1}, \ldots, X_{g_{2mn}}\rangle \to F_{p,q,r,s}$ definida por $x_l^{(g_i)} \mapsto A_{2mn(l-1)+i}^{(g_i)}$. Então é immediato que o mesmo é sobrejetor e que seu núcleo é exatamente o ideal das identidades G-graduadas de $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$. ∎

Sejam $a = pr + qs$ e $b = ps + qr$. Uma subálgebra $M_{p,q,r,s}(E)$ de $M_{mn}(E)$, isomorfa a $M_{a,b}(E)$ foi construída em [13]. A álgebra $M_{p,q,r,s}(E)$ é definida da seguinte maneira: o elemento $A = \sum_{i,j} a_{ij}\mathbf{e}_{ij}$ pertence a $M_{p,q,r,s}(E)$ se e somente se $a_{ij} \in E_{\varepsilon(j)+\varepsilon(i)}$. Além disso, foi mostrado em [13, Seção 2] que $M_{p,q,r,s}(E) \cong M_{a,b}(E)$.

Lema 2.5. *A álgebra $L_{p,q,r,s}$ é relativamente livre na variedade das álgebras G-graduadas gerada por $M_{p,q,r,s}(E)$.*

Demonstração: Tal como no lema anterior, consideramos o homomorfismo G-graduado $\psi : K\langle X_{g_1}, \ldots, X_{g_{2mn}}\rangle \to L_{p,q,r,s}$ definido por $x_l^{(g_i)} \mapsto B_l^{(g_i)}$. Tal homomorfismo é sobrejetor e seu núcleo é o ideal gerado pelas identidades G-graduadas de $M_{p,q,r,s}(E)$. ∎

Agora temos modelos convenientes de álgebras G-graduadas relativamente livres para $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ e para $M_{p,q,r,s}(E)$.

2.3 As identidades G-graduadas de $M_{p,q,r,s}(E)$ e de $L_{p,q,r,s}$

Sejam $\mathrm{m}(x_1, \ldots, x_d)$ e $\mathrm{n}(x_1, \ldots, x_d) \in K\langle X_G\rangle$ dois monômios graduados.

Lema 2.6. *Suponha que* $\mathrm{m}(B_1^{(t_1,a_1)},\dots,B_d^{(t_d,a_d)})_{ij} = \pm\mathrm{n}(B_1^{(t_1,a_1)},\dots,B_d^{(t_d,a_d)})_{ij} \neq 0$ *para algum par de inteiros* $i,\ j \in I_{mn}$. *(Aqui* B_{ij} *representa a entrada* (i,j) *da matriz* B.*) Então os monômios* m *e* n *são do mesmo multigrau como monômios ordinários. E mais, se* $\mathrm{m} = \mathrm{m}'x_j\mathrm{m}''$ *então* $\mathrm{n} = \mathrm{n}'x_j\mathrm{n}''$ *para* n' *e* n'' *adequados tais que* $\partial(\mathrm{m}') = \partial(\mathrm{n}')$. *Os monômios* m', n', m'' *e* n'' *podem representar eventualmente a palavra vazia, isto é, podem ser iguais a 1.*

Demonstração: A afirmação a respeito dos multigraus é direta uma vez que as entradas de $B_i^{(t_i,a_i)}$ são variáveis que aparecem somente nessa matriz. Para provarmos a segunda afirmação, escrevemos a entrada (i,j) de m, denotada por m_{ij}, como

$$\mathrm{m}_{ij} = u_{ij_1}^{k_1}u_{j_1j_2}^{k_2}\dots u_{bc}^{k_\alpha}\dots u_{j_{d-1}j}^{k_\beta}.$$

Aqui a ordem dos u_{ij}^k corresponde à ordem em que as variáveis aparecem no monômio m. Repetindo o mesmo procedimento para o monômio n e usando o fato de que ambas as entradas são não nulas, obtemos o resultado. ■

Definição 2.7. *Seja* $B_k^{(t,a)} \in L_{p,q,r,s}$, *denotaremos por* $|\mathrm{supp}(B_k^{(t,a)})|$ *o número de entradas não nulas de* $B_k^{(t,a)}$ *e o chamaremos de suporte de* $B_k^{(t,a)}$.

Lema 2.8. *A seguinte desigualdade é válida:*

$$|\mathrm{supp}(B_{k_1}^{(t_1,a_1)}B_{k_2}^{(t_2,a_2)})| \leq \min\{|\mathrm{supp}(B_{k_1}^{(t_1,a_1)})|, |\mathrm{supp}(B_{k_2}^{(t_2,a_2)})|\}.$$

Demonstração: A verificação feita diretamente é imediata. ■

Definição 2.9. *Se* $\mathrm{m} = \mathrm{m}(x_1,\dots,x_d)$ *é um monômio graduado, definimos a densidade de* m *em* $L_{p,q,r,s}$ *como o número de entradas não nulas da matriz* $\mathrm{m}(\tilde{B}_1,\dots,\tilde{B}_d)$. *Aqui* $\tilde{B}$ *representa a matriz com a mesma ordem de* B *e obtida de* B *substituindo todas as entradas não nulas de* B *por* $1 \in K$ *(e preservando as entradas nulas).*

Definição 2.10. *O monômio graduado* m *é chamado de esparso em* $L_{p,q,r,s}$ *se sua densidade em* $L_{p,q,r,s}$ *é igual a 0.*

Exemplo 2.11. *Se um monômio possui um submonômio de* G*-grau* $(0,1)$ *então o mesmo é esparso em* $L_{p,q,r,s}$. *Além disso, se* $p = q$ *então a existência de um submonômio de* G*-grau* $(mn/2,0)$ *também implica que o monômio dado é esparso.*

Tal como foi feito para a álgebra $L_{p,q,r,s}$ podemos definir $|\mathrm{supp}(A)|$ para um elemento homogêneo $A \in F_{p,q,r,s}$, e da mesma maneira podemos falar sobre monômios esparsos nessa álgebra. Segue diretamente do lema 2.3 que:

Lema 2.12. *Um monômio é esparso em $F_{p,q,r,s}$ se e somente se o mesmo é esparso em $L_{p,q,r,s}$.*

Considere a álgebra associativa livre G-graduada $K\langle X_G\rangle$ e denote por J o T-ideal de identidades G-graduadas gerado pelos polinômios

$$[x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}], \quad x_1^{(t,a_1)}x_2^{(-t,a_2)}x_3^{(t,a_3)} - (-1)^{s_2(a_1,a_2,a_3)}x_3^{(t,a_3)}x_2^{(-t,a_2)}x_1^{(t,a_1)}$$

onde $t \in \mathbb{Z}_{mn}$, $s_2(x,y,z) = xy + xz + yz$; e por todos os monômios que são esparsos em $L_{p,q,r,s}$.

Lema 2.13. *Seja $\mathrm{m}(x_1,\ldots,x_d) \in K\langle X_G\rangle$ um monômio graduado. Se $\mathrm{m}(B_1,\ldots,B_d) = 0$ então $\mathrm{m}(x_1,\ldots,x_m) \equiv 0 \pmod J$.*

Demonstração: Assuma que $\mathrm{m}(B_1,\ldots,B_d) = 0$, então ou m é esparso ou alguma variável ímpar u_{ij}^k aparece pelo menos duas vezes nas entradas do m. Isso implica que

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}_1 x_k^{(t,1)} \mathrm{m}_2 x_k^{(t,1)} \mathrm{m}_3$$

com $\partial_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathrm{m}_1) = \partial_{\mathbb{Z}_{mn}}(\mathrm{m}_1 x_k \mathrm{m}_2)$ e $\partial_{\mathbb{Z}_{mn}}(x_k\mathrm{m}_2) = 0$. Mas se $\partial(x_k\mathrm{m}_2) = (0,1)$ então $\mathrm{m} \in J$. Se $\partial(x_k\mathrm{m}_2) = (0,0)$ então $\mathrm{m}_2 \neq 1$ e portanto

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}_1 x_k^{(t,1)} \mathrm{m}_2^{(-t,1)} x_k^{(t,1)} \mathrm{m}_3 \equiv_J -\mathrm{m}_1 x_k^{(t,1)} \mathrm{m}_2^{(-t,1)} x_k^{(t,1)} \mathrm{m}_3 = -\mathrm{m}.$$

Logo temos que $2\mathrm{m} \in J$ e como $\mathrm{char} K \neq 2$ necessariamente $\mathrm{m} \in J$. ■

Lema 2.14. *Sejam m e n dois monômios graduados em $K\langle X_G\rangle$ e sejam $B_1, \ldots, B_d$ geradores da álgebra $L_{p,q,r,s}$. Suponha que para algum par (i,j) temos $\mathrm{m}(B_1,\ldots,B_d)_{ij} = \pm\mathrm{n}(B_1,\ldots,B_d)_{ij} \neq 0$. Então $\mathrm{m} \equiv \pm\mathrm{n} \pmod J$.*

Demonstração: De acordo com o lema 2.6 os monômios m e n possuem o mesmo multigrau. Suponha que x_1 é a primeira variável à esquerda que aparece em m. Mais uma vez pelo lema 2.6 podemos escrever $\mathrm{n} = \mathrm{n}_1 x_1 \mathrm{n}_2$ onde $\partial(n_1) = (0,0)$. Seja ℓ o comprimento (grau total) de m, fazemos então indução sobre ℓ. A base da indução é $\ell = 1$ e é trivial, então suponha $\ell > 1$. Se n_1 é o monômio vazio, obtemos o resultado pois podemos aplicar a indução sobre m' e n_2 onde $\mathrm{m} = x_1\mathrm{m}'$. Portanto podemos supor que n_1 é não-vazio. Temos que considerar então três casos:

Caso 1 Seja $\mathrm{m} = x_1\mathrm{m}_1x_1\mathrm{m}_2$ com $\partial(x_1\mathrm{m}_1) = (0,0)$. Então $\mathrm{n} = \mathrm{n}_1x_1\mathrm{n}_2x_1\mathrm{n}_3$ com $\partial(\mathrm{n}_1) = (0,0)$ e $\partial(x_1\mathrm{n}_2) = (0,0)$. Nessa situação temos que

$$\mathrm{n} = \mathrm{n}_1x_1\mathrm{n}_2x_1\mathrm{n}_3 \equiv x_1\mathrm{n}_2x_1\mathrm{n}_1\mathrm{n}_3 \pmod{J}.$$

Renomeando $\mathrm{n}' = \mathrm{n}_2x_1\mathrm{n}_1\mathrm{n}_3$ temos $\mathrm{n} \equiv x_1\mathrm{n}' \pmod{J}$, e podemos aplicar a indução sobre m' e sobre n'.

Caso 2 Sejam $\mathrm{m} = x_1\mathrm{m}_1x_ax_b\mathrm{m}_2$ e $\mathrm{n} = \mathrm{n}_1x_a\mathrm{n}_2x_1\mathrm{n}_3x_b\mathrm{n}_4$ tais que

$$\partial(\mathrm{n}_1x_a) = \partial(x_1\mathrm{m}_1x_a) = \partial(\mathrm{n}_1x_a\mathrm{n}_2x_1\mathrm{n}_3), \quad \partial(\mathrm{n}_1x_a\mathrm{n}_2) = (0,0).$$

Então, se n_2 é o monômio vazio, $\partial(\mathrm{n}_1x_a) = \partial(x_1\mathrm{n}_3) = (0,0)$. Se, por outro lado, n_2 é não-vazio então $\partial(\mathrm{n}_1x_a) = \partial(x_1\mathrm{n}_3) = (t,c)$ e $\partial(\mathrm{n}_2) = (-t,c)$. Em ambas as possibilidades concluímos que $\mathrm{n} \equiv \pm x_1\mathrm{n}_3\mathrm{n}_2\mathrm{n}_1x_ax_b\mathrm{n}_4$ e encerramos esse caso exatamente como o primeiro caso.

Caso 3 Nenhum dos casos anteriores acontece. Suponha que n começa com a letra x_j e escreva $\mathrm{m} = x_1\mathrm{m}_1\mathrm{m}_2x_j\mathrm{m}_3$ com $\partial(x_1\mathrm{m}_1\mathrm{m}_2) = (0,0)$. Assuma $\mathrm{n} = x_j\mathrm{n}_1x_1\mathrm{n}_2$, então, devido à G-graduação temos que $\partial(\mathrm{m}_2x_j\mathrm{m}_3) = \partial(x_j\mathrm{n}_1) = (0,0)$ e mais ainda, $\partial(x_1\mathrm{m}_1) = \partial(x_1\mathrm{n}_2)$. Tal como no caso 2, distinguimos duas possibilidades. Quando m_2 é o monômio vazio, então $\partial(x_1\mathrm{m}_1) = \partial(x_j\mathrm{m}_3) = (0,0)$. Quando, ao contrário, m_2 é não-vazio, obtemos $\partial(x_j\mathrm{m}_3) = \partial(x_1\mathrm{m}_1) = (t,c)$ e $\partial(\mathrm{m}_2) = (-t,c)$. Em cada uma das possibilidades concluímos que $\mathrm{m} \equiv \pm x_j\mathrm{m}_3x_1\mathrm{m}_1$ e obtemos o resultado desejado aplicando o passo indutivo, dessa vez começando com n . ■

Proposição 2.15. *O T-ideal das identidades G-graduadas de $L_{p,q,r,s}$ coincide com o T-ideal J. Em outras palavras, $T_G(L_{p,q,r,s}) = J$.*

Demonstração: Observemos primeiramente que os polinômios que geram J são identidades G-graduadas de $L_{p,q,r,s}$, e portanto $J \subseteq T_G(L_{p,q,r,s})$. Portanto temos que demonstrar a inclusão recíproca.

Suponha que o polinômio multihomogêneo f é uma identidade G–graduada de $L_{p,q,r,s}$ mas que $f \notin J$, e escolha o menor inteiro positivo k tal que f pode ser escrito, modulo J, como combinação linear de k monômios. Isto é $f \equiv \sum_{i=1}^{k} a_i\mathrm{m}_i \pmod{J}$ onde $a_i \in K$

são todos não nulos, e $\mathrm{m}_i \in K\langle X\rangle$ são monômios graduados. Observe que os m_i devem ter todos o mesmo multigrau como f. Uma vez que $f \notin J$ necessariamente $k \geq 1$. Então pelo lema 2.13 podemos supor que, a menos de reordenação nos monômios $\mathrm{m}_1, \ldots, \mathrm{m}_k$, temos $\mathrm{m}_1(B_1, \ldots, B_d) \neq 0$. Então temos que $a_1\mathrm{m}_1(B_1, \ldots, B_d) = -\sum_{i=2}^{k} a_i\mathrm{m}_i(B_1, \ldots, B_d)$. Logo para algum h, $2 \leq h \leq k$, teremos

$$\mathrm{m}_1(B_1, \ldots, B_d)_{ij} = \pm\mathrm{m}_h(B_1, \ldots, B_d)_{ij} \neq 0.$$

Mas de acordo com o lema 2.14 obtemos $\mathrm{m}_1 \equiv \pm\mathrm{m}_h \pmod J$. Portanto podemos representar f, modulo J, como

$$f \equiv \sum_{i=1}^{k} a_i\mathrm{m}_i \equiv (a_1 \pm a_h)\mathrm{m}_1 + \sum_{i=2}^{h-1} a_i\mathrm{m}_i + \sum_{i=h+1}^{k} a_i\mathrm{m}_i \pmod J.$$

No entanto isso contradiz a minimalidade do inteiro positivo k e portanto $f \in J$ e obtemos o resultado desejado. ■

Teorema 2.16. *Seja K um corpo infinito de característica diferente de 2. Então o T-ideal graduado das identidades G-graduadas da álgebra $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$ coincide com J.*

Demonstração: A demonstração segue diretamente da proposição anterior. ■

Como conseqüência imediata obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.17. *Sob as hipóteses do teorema anterior temos que, $T_G(M_{pr+qs,ps+qr}(E)) \subseteq T_G(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))$.*

Demonstração: Uma vez que $J = T_G(M_{pr+qs,ps+qr}(E))$ basta verificar que os polinômios que determinam J são identidades G-graduadas de $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$. Mas esta última verificação é imediata. ■

O próximo corolário também é de interesse.

Corolário 2.18. $T((M_{pr+qs,ps+qr}(E)) \subseteq T(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E))$.

Em [1] foi demonstrado que os T-ideais acima são diferentes quando a característica do corpo base é maior que 2. De fato foi construída uma identidade pertencente ao T-ideal de identidades de $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ mas que não pertence ao T-ideal de $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$, quando $(r, s) = (1, 1)$. Portanto temos o seguinte teorema.

Teorema 2.19. *Seja K corpo infinito e* $\mathrm{char}K > 2$*, então* $T(M_{p+q,p+q}(E)) \subset T(M_{p,q}(E) \otimes M_{1,1}(E))$*, é uma inclusão própria.*

Assim estamos aptos a dar uma resposta mais precisa para o problema proposto em [4] a respeito dos T-ideais de identidades ordinárias das álgebras $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ e $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$. Aqui demonstramos que se $\mathrm{char}K > 2$, o T-ideal da primeira álgebra contém o da segunda, e a inclusão é própria quando $(r, s) = (1, 1)$. Observamos que em [1] é demonstrado que ambos os T-ideais são distintos, mas não temos nada quanto à continência.

Capítulo 3

Existência de mergulhos graduados em álgebras de matrizes

3.1 Motivação

O problema de existência de mergulho de uma álgebra numa álgebra de matrizes com entradas numa álgebra comutativa é de grande importância na PI-teoria. Informações, motivação e referências mais detalhadas podem ser encontradas em [16] e [7]. No entanto quando lidamos com álgebras como $M_{a,b}(E)$ ou $M_n(E)$ somos levados a estudar mergulhos em extensões de tais álgebras como explicado a seguir. Ressaltamos que a álgebra de Grassmann E, sobre corpos de característica 0, não satisfaz nenhuma identidade standard s_n, e portanto não pode ser mergulhada em álgebra de matrizes sobre qualquer anel comutativo com unidade.

Definição 3.1. *Uma álgebra S é chamada* supercomutativa *se $S = S_0 \oplus S_1$ for $\mathbb{Z}_2$-graduada e para todo $s \in S_i$, $t \in S_j$ tivermos necessariamente $st = (-1)^{ij} ts$, i, $j \in \{0, 1\}$.*

Portanto pode-se considerar álgebras supercomutativas como extensões da álgebra de Grassmann.

Quando lidamos com existência de mergulhos entre PI-álgebras (graduadas), o resultado seguinte, de verificação imediata, nos dá um critério prévio.

Proposição 3.2. *Sejam A e B duas PI-álgebras (G-graduadas), tais que A pode ser mergulhada (preservando as componentes graduadas) em B. Então o T-ideal (graduado) de A contém o T-ideal (graduado) de B.*

Um conjunto gerador finito para o T-ideal de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para a álgebra $M_{1,1}(E)$ foi descrito por Di Vincenzo em [10] no caso em que $\mathrm{char}K = 0$. Usando o resultado de Di Vincenzo, Berele em [7] estudou o problema de existência de mergulho para as álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$. Ele provou o seguinte resultado que motivou nosso estudo.

Teorema 3.3. *1. Existe uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada satisfazendo as mesmas identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(E)$ e que não pode ser mergulhada, preservando-se a graduação, em nenhuma álgebra do tipo $M_{1,1}(S)$ onde S é uma álgebra supercomutativa.*

2. Se A é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada cujo T-ideal graduado contém o T-ideal graduado de $M_{1,1}(E)$ e, além disso, não possui anuladores de sua componente ímpar (A_1), então existe um mergulho $\mathbb{Z}_2$-graduado de A em $M_{1,1}(S)$ para alguma álgebra supercomutativa S;

3. Não existem álgebras supercomutativas S e T tais que $M_{1,1}(E)$ possa ser mergulhada, via um homomorfismo graduado, em $S \otimes T$.

Embora os resultados de Berele tenham sido obtidos assumindo-se que $\mathrm{char}K = 0$ eles podem ser facilmente estendidos para qualquer característica diferente de 2, supondo que o corpo K seja infinito. Para os dois primeiros teoremas a extensão pode ser feita uma vez que as demonstrações de ambos dependem exclusivamente dos geradores do T-ideal graduado obtidos por Di Vincenzo [10], e que, tal como demonstrado por Azevedo e Koshlukov, são os mesmos no caso em que $\mathrm{char}K > 2$, ver [2]. Já o terceiro teorema é imediato em característica positiva, uma vez que o T-ideal graduado de $E \otimes E$ (e portanto de $S \otimes T$, para quaisquer duas álgebras supercomutativas S e T) está propriamente contido no T-ideal graduado de $M_{1,1}(E)$, ver [2]. Um exemplo de identidade no T-ideal graduado de $S \otimes T$ que não se encontra no T-ideal graduado de $M_{1,1}(E)$ é $[(x_1^{(0)})^p, x_2^{(1)}] = 0$.

Descrevemos abaixo os principais problemas estudados neste capítulo.

1. Seja A uma PI-álgebra G-graduada que satisfaz todas as identidades G-graduadas de alguma álgebra T-prima, sendo esta última considerada com sua graduação natural (já fornecida nos capítulos anteriores). Existe um mergulho G-graduado de A na referida álgebra T-prima? O que ocorre se considerarmos essa álgebra T-prima não sobre E, mas sobre alguma álgebra supercomutativa?

2. Seja $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$, assuma que a álgebra G-graduada A satisfaça todas as identidades G-graduadas de $M_n(E)$. Quais condições são suficientes para garantir a existência de um mergulho graduado de A em $M_n(S)$ para alguma álgebra supercomutativa S?

3. Considere o caso char $K = 0$, então existe um mergulho graduado de $M_{a+b}(E)$ em $M_{a,b}(S) \otimes T$ para álgebras supercomutativas S e T adequadas?

Fornecemos condições necessárias para a existência de um mergulho graduado de uma álgebra em $M_n(S)$, sendo S supercomutativa - **teorema 3.7**. Além disso provamos que se A é $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduada cujo T-ideal graduado contém o de $M_n(E)$ então A pode ser mergulhada, preservando a graduação, em $M_n(S)$ para alguma álgebra supercomutativa S se A satisfaz uma certa condição necessária e se alguns anuladores das componentes graduadas de A forem triviais - **teorema 3.16**. Obtemos resultados análogos para o caso da álgebra $M_{a,b}(S)$ - **teorema 3.19**. Todos esses resultados são demonstrados supondo K um corpo infinito e de característica diferente de 2. (Ressaltamos que se char$K = 2$ então a álgebra de Grassmann é comutativa.) No caso de característica 0, provamos que $M_{a+b}(E)$ não pode ser mergulhada, via um mergulho graduado, em $M_{a,b}(S) \otimes T$ onde S e T são álgebras supercomutativas - **teorema 3.22**. Para obter os nossos resultados, usamos largamente as bases concretas de identidades graduadas de $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E) \otimes E$ fornecidas em característica 0 por Di Vincenzo e Nardozza, ver [12, 13], e mais tarde estendidas em característica positiva em [3, 4]. Também fazemos uso de idéias derivadas do artigo de Berele [7].

3.2 Preliminares

Aqui introduzimos e relembramos alguns fatos que serão necessários posteriormente. Considere $G = \mathbb{Z}_{a+b} \times \mathbb{Z}_2$, e sejam S, T, U, V álgebras supercomutativas. Então $M_{a+b}(S)$ é G-graduada de maneira análoga à do exemplo 1.43, onde a $\mathbb{Z}_2$-componente diz respeito à paridade das entradas da matriz. Consideramos ainda $M_{a,b}(S)$, G-graduada tal como no lema 1.44. Do mesmo modo define-se uma G-graduação em $M_{a,b}(T) \otimes U$. A componente homogênea de grau (t_1, t_2) é a soma $(M_{a,b}(T))_{(t_1,t_2)} \otimes U_0 \oplus (M_{a,b}(T))_{(t_1,t_2+1)} \otimes U_1$.

Finalmente para a álgebra $A = M_{p,q}(S) \otimes M_{r,s}(T)$ fixamos $n = (pr + qs)(ps + qr)$, $a = p + q$, $b = r + s$, e $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$. Considere $(t_1, t_2) \in G$, então tomamos a G-graduação análoga àquela fornecida na seção 2.2, ou seja, o $\mathbb{Z}_2$-grau faz referência ao $\mathbb{Z}_2$-grau nas álgebras supercomutativas em questão. A fim de simplificar a notação, denotaremos para um elemento $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-homogêneo a, respectivamente, por $\partial_n(a)$ o $\mathbb{Z}_n$-grau; por $|u|$, seu $\mathbb{Z}_2$-grau; e como conseqüência $\partial(u)$ será $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-grau, portanto $\partial(u) = (\partial_n(u), |u|)$.

Daqui em diante neste capítulo, $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$, e para uma álgebra G-graduada A, denotaremos sua componente (k, l)-homogênea por $A_{k,l}$, e denotaremos simplesmente por

A_k o subespaço vetorial $A_{k,0} \oplus A_{k,1}$, $0 \leq k \leq n-1$, $0 \leq l \leq 1$.

3.3 Condições necessárias para o mergulho

Daqui em diante, neste capítulo, exceto quando feita menção explícia do contrário, K será um corpo infinito de característica diferente de 2.

Nesta seção estendemos os resultados de Berele [7] para outras classes de álgebras. Denote por J_1 o ideal em $K\langle X_G\rangle$ gerado por todas as identidades graduadas de $M_{a+b}(E)$ e pelo monômio $x_1^{(1,0)}x_2^{(-1,0)}$, e denote por J_2 o gerado pelas identidades graduadas de $M_{a,b}(E) \otimes E$ e por $x_1^{(1,0)}x_2^{(-1,0)}$. Observamos que $x_1^{(1,0)}x_2^{(-1,0)}$ não é identidade graduada de $M_{a+b}(E)$ nem de $M_{a,b}(E) \otimes E$. Denotemos para $i = 1, 2$, $B_i = K\langle X_G\rangle / J_i$.

Lema 3.4. *1. A álgebra B_1 não pode ser mergulhada, via morfismo graduado, em $M_{a+b}(S)$ para qualquer álgebra supercomutativa S.*

2. Não existe mergulho graduado da álgebra B_2 em $M_{a,b}(S) \otimes T$ para quaisquer álgebras supercomutativas S e T.

Demonstração: De acordo com [13, Corollary 12] o T-ideal G-graduado de $M_n(E)$ é gerado pelos polinômios

$$\begin{aligned} &x_1^{(0,u)}x_2^{(0,v)} - (-1)^{uv}x_2^{(0,v)}x_1^{(0,u)}, \\ &x_1^{(k,u)}x_2^{(-k,v)}x_3^{(k,w)} - (-1)^{uv+vw+wu}x_3^{(k,w)}x_2^{(-k,v)}x_1^{(k,u)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Assuma que $\varphi\colon B_1 \to M_{a+b}(S)$ é um mergulho graduado e denote $\varphi(x_1^{(1,0)}) = r$, $\varphi(x_2^{(-1,0)}) = s$. Então $rs = 0$. Mas para qualquer álgebra supercomutativa S e r, s arbitrários em $(M_{a+b}(S))_{(1,0)}$ e $M_{a+b}(S))_{(-1,0)}$, respectivamente, a igualdade $rs = 0$ implica $sr = 0$. Uma vez que $\varphi(x_1^{(1,0)})\varphi(x_2^{(-1,0)}) = 0$ em B_1 isso implicaria $x_2^{(-1,0)}x_1^{(1,0)} \in \ker\varphi$ e $\ker\varphi \neq 0$, o que nos dá uma contradição. A segunda afirmação é demonstrada de maneira análoga. ■

Seja A uma álgebra que satisfaz todas as identidades G-graduadas de $M_n(E)$. Temos a seguinte condição necessária para a existência de um mergulho graduado de A em $M_n(S)$ para alguma álgebra supercomutativa S.

Corolário 3.5. *Seja A uma álgebra que pode ser mergulhada (mergulho graduado) em $M_n(S)$ para uma álgebra supercomutativa S. Se u, $v \in A$ são elementos homogêneos tais que $\partial_n(u) = -\partial_n(v)$, e $uv = 0$ então $vu = 0$.*

Outra condição necessária para a existência de um mergulho graduado de A em $M_n(S)$ é apresentada abaixo.

Lema 3.6. *Assuma A uma álgebra G-graduada e $\varphi\colon A \to M_n(S)$ um mergulho graduado para alguma álgebra supercomutativa S. Considere u, $v \in A$ elementos homogêneos de A tais que $uv = 0$. Então para todo elemento homogêneo $w \in A$ satisfazendo $\partial_n(w) = 0$ tem-se $uwv = 0$ em A.*

Demonstração: Considere a transformação linear $\varphi_{ij}\colon A_{j-i} \to S$ que leva $u \in A_{j-i}$ na entrada (i, j) da matriz $\varphi(u)$. Suponha que $\partial_n(u) = s$ e $\partial_n(v) = t$. Então $\varphi_{ij}(uv) = 0$ sempre que $j - i \equiv s + t \pmod{n}$. Mas $\varphi_{ij}(uv) = \varphi_{i,i+s}(u)\varphi_{i+s,j}(v)$ uma vez que $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$. Assim $\varphi_{i,i+s}(u)\varphi_{i+s,j}(v) = 0$. Tome agora um elemento homogêneo w em A tal que $\partial_n(w) = 0$. Então $\varphi_{ij}(uwv) = \varphi_{i,i+s}(u)\varphi_{i+s,i+s}(w)\varphi_{i+s,j}(v) = 0$ em S uma vez que os elementos homogêneos em S comutam ou anticomutam. Obtemos que $\varphi_{ij}(uwv) = 0$ para todo i e j; como φ é um monomorfismo temos $uwv = 0$. ■

O lema a seguir generaliza as condições necessárias acima para a existência de mergulho graduado. O critério fornecido é bastante técnico, mas por outro lado vale ressaltar que as condições acima são casos particulares dele.

Teorema 3.7. *Seja A uma álgebra G-graduada e seja $\varphi\colon A \to M_n(S)$ um mergulho graduado, onde S é supercomutativa. Assuma $v_1, \ldots, v_t \in A$ elementos homogêneos de A, não necessariamente distintos dois a dois. Definimos os pares de inteiros positivos (i_k, j_k), $1 \le k \le s$ do seguinte modo. Fixamos $i_1 = 1$, e para todo $k \le s$, $j_k - i_k \equiv \partial_n(v_k) \pmod{n}$, e impomos $i_{k+1} = j_k$ para $k < s$. Suponha que para alguns $v_{t_1}, \ldots, v_{t_r}$, $1 \le t_k \le s$, têm-se as seguintes condições $j_{t_k} = i_{t_{k+1}}$ para todo k, $1 \le k \le r-1$, e que $v_{k_1}v_{k_2}\ldots v_{k_r} = 0$. Então $v_1v_2\ldots v_s = 0$.*

Demonstração: Retomamos a transformação linear φ_{ij}, a mesma já utilizada na demonstração do lema 3.6. Então $\varphi_{ij}(v_{k_1}v_{k_2}\ldots v_{k_r}) = 0$ para todo (i, j) tal que $j - i = \partial_n(v_{k_1}v_{k_2}\ldots v_{k_r})$ em $\mathbb{Z}_n$. Temos $0 = \varphi_{ij}(v_{k_1}v_{k_2}\ldots v_{k_r}) = \varphi_{p_0,p_1}(v_{k_1})\varphi_{p_1pk_2}(v_{k_2})\ldots\varphi_{p_{r-1},p_r}(v_{k_r})$. Aqui $p_m - p_{m-1} \equiv \partial_n(v_{k_m}) \pmod{n}$, e $p_0 = i$.

Escolhemos $m - 1 = \partial_n(v_1v_2\ldots v_t)$ e calculamos

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,r}(v_1v_2\ldots v_t) &= \varphi_{1,j_1}(v_1)\varphi_{i_2,j_2}(v_2)\ldots\varphi_{i_t,j_t}(v_t)\\
&= \pm\varphi_{p_0,p_1}(v_{k_1})\varphi_{p_1pk_2}(v_{k_2})\ldots\varphi_{p_{r-1},p_r}(v_{k_r})Q = 0.
\end{aligned}$$

Aqui usamos o fato de que S é supercomutativa; Q representa o produto dos $\varphi_{i_k,j_k}(v_k)$ restantes.

De maneira análoga, obtemos que

$$\varphi_{1,r}(v_1v_2\dots v_t)=\varphi_{2,r+1}(v_1v_2\dots v_t)=\dots=\varphi_{n,r-1}(v_1v_2\dots v_t)=0.$$

Mas φ é injetiva, portanto $v_1v_2\dots v_t=0$. ∎

3.4 Condições suficientes para existência de mergulho em $M_n(S)$

Aqui fixamos $G=\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_2$. O ideal das identidades G-graduadas de $M_n(E)$ é gerado pelos polinômios da Eq. 3.1.

Nesta seção A representará sempre uma álgebra $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_2$-graduada cujo T-ideal graduado contenha o T-ideal graduado de $M_n(E)$. Lembramos que $A_i=A_{i,0}\oplus A_{i,1}$.

Seja $A_0^{(*)n}$ o produto livre de n cópias de A_0 sobre o corpo K (ver [5]). $A_0^{(*)n}$ é isomorfo à álgebra livre gerada por todos os elementos da forma $1*\dots*1*a*1\dots*1$, $a\in A_0$, com as seguintes relações:

1. $(a*1*\dots*1)+(b*1\dots*1)-(a+b)*1*\dots*1$, para quaisquer a, $b\in A_0$.
2. $(a*1*\dots*1)(b*1*\dots*1)-(ab)*1*\dots*1$, para quaisquer a, $b\in A_0$.
3. $\lambda(1*\dots*1)-\lambda*1*\dots*1$ para todo $\lambda\in K$ e $\lambda*1*\dots*1=1*\lambda*1*\dots*1=\dots=1*\dots*1*\lambda$.

Podemos então definir uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural nesta álgebra e tomar $\Gamma(A_0^{(*)n})$ sendo $A_0^{(*)n}/J$, onde J é o ideal gerado por todas as relações do tipo $rs-(-1)^{|r||s|}sr$ para quaisquer r, s $\mathbb{Z}_2$-homogêneos em $A_0^{(*)n}$, sendo $|r|$, $|s|$, o $\mathbb{Z}_2$-grau de cada elemento.

A álgebra $\Gamma(A_0^{(*)n})$ possui unidade, a saber, o elemento $1*\dots*1$.

A fim de simplificar a notação, daqui em diante passaremos a denotar o elemento $1*\dots*1*\underbrace{r}_{i}*1*\dots*1$ por $\langle r\rangle_{ii}$.

Para todo $k\in\mathbb{Z}_n\setminus\{0\}$ tomamos n cópias de A_k, e as denotamos respectivamente por $M_{1,k+1}$, $M_{2,k+2}$, …, $M_{n,k}$. Se $m\in A_{\overline{j-i}}$ denotamos por $\langle m\rangle_{i,j}$ sua imagem em $M_{i,j}$.

A partir do espaço vetorial $V = (\oplus_{i,j} M_{ij}) \oplus A_0^{(*)n}$, definimos a álgebra supercomutativa $S(V)$ como sendo a álgebra supercomutativa livre $\Gamma(V)$ gerada pelos elementos $\mathbb{Z}_2$-homogêneos de V (cujo produto denotamos por $\wedge$) e quocientada pelo ideal J_2 gerado por todas as relações do tipo $\langle a\rangle_{ij} \wedge \langle b\rangle_{jk} = \langle ab\rangle_{ik}$, para todo $a \in A_{j-i}$, $b \in A_{k-j}$.

Como conseqüência destas, obtemos mais uma relação em $S(V)$ com relação aos elementos de $A_0^{(n)*}$. Sejam $u \in A_k$ e $v \in A_{-k}$, $\mathbb{Z}_2$-homogêneos com $k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$. Então

$$\langle uv\rangle_{ii} = (-1)^{|u||v|}\langle vu\rangle_{jj}, \tag{3.2}$$

onde $j - i \equiv k \pmod{n}$.

Agora passamos a denotar $S(V)$ simplesmente por S.

Definimos $\varphi\colon A \to M_n(S)$ como sendo a transformação linear dada por

$$\varphi\colon r \mapsto \langle r\rangle_{1,k+1}\mathbf{e}_{1,k+1} + \langle r\rangle_{2,k+2}\mathbf{e}_{2,k+2} + \ldots + \langle r\rangle_{n,k}\mathbf{e}_{n,k} \tag{3.3}$$

para todo elemento $\mathbb{Z}_2$-homogêneo $r \in A_k$, $k \neq 0$, com os $\mathbf{e}_{ij}$ denotando as matrizes elementares de $M_n(S)$.

Lema 3.8. *A transformação linear φ é um homomorfismo graduado de álgebras.*

Demonstração: A preservação da G-graduação segue diretamente da definição da aplicação φ, bastando verificar que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, para quaisquer elementos a, $b \in A$. Podemos supor sem perda de generalidade que a, b são G-homogêneos. Supomos primeiro que tanto o $\mathbb{Z}_n$-grau k_1 de a quanto o $\mathbb{Z}_n$-grau k_2 de b são diferentes de 0. Nesse caso:

$$\begin{aligned}\varphi(a)\varphi(b) &= (\langle a\rangle_{1,k_1+1}\mathbf{e}_{1,k_1+1} + \ldots + \langle a\rangle_{n,k_1}\mathbf{e}_{n,k_1})(\langle b\rangle_{1,k_2+1}\mathbf{e}_{1,k_2+1} + \ldots + \langle b\rangle_{n,k_2}\mathbf{e}_{n,k_2}) \\ &= \langle ab\rangle_{1,k_1+k_2+1}\mathbf{e}_{1,k_1+k_2+1} \ldots + \langle ab\rangle_{n,k_1+k_2}\mathbf{e}_{n,k_1+k_2} = \varphi(ab).\end{aligned}$$

■

Lema 3.9. *Se φ é um mergulho e se existem $u \in A_{k,t}$, $v \in A_{-k,s}$ satisfazendo $uv = 0$ então $vu = 0$ também.*

Demonstração: Note que $\langle uv\rangle_{ii} = 0$ para todo i. Portanto pela equação (3.2), temos $\langle vu\rangle_{jj} = 0$ para todo j. Mas φ é mergulho, logo pela injetividade $vu = 0$. ■

Definição 3.10. *Sejam v_1, v_2, $\ldots$, $v_k \in A$ elementos homogêneos. O monômio* $\mathrm{m} = \langle v_1\rangle_{i_1j_1} \wedge \langle v_2\rangle_{i_2j_2} \wedge \ldots \wedge \langle v_k\rangle_{i_kj_k} \in \Gamma(V)$ *é chamado de monômio cadeia (ou está em posição cadeia) se $j_{\sigma(i)} = i_{\sigma(i+1)}$, $1 \leq i \leq k-1$ para alguma permutação $\sigma \in S_k$.*

Ainda mais, definimos um operador linear ψ sobre V, definindo-o primeiro sobre os monômios e estendendo-o por linearidade. Esse operador linear pode ser estendido para uma transformação linear $\Psi : \Gamma(V) \to S(V)_0$, onde $S(V)_0$ denota a componente de $\mathbb{Z}_n$-grau 0 de $S(V)$, tal como segue.

Seja m um produto de elementos G-homogêneos de $\Gamma(V)$. Se o mesmo for um monômio cadeia de $\mathbb{Z}_n$-grau 0, nós impomos

$$\Psi(\mathrm{m}) = \Psi(\langle v_1\rangle_{i_1j_1} \wedge \langle v_2\rangle_{i_2j_2} \wedge \ldots \wedge \langle v_k\rangle_{i_kj_k}) = (-1)^{\sigma*}\langle v_{\sigma(1)} \wedge v_{\sigma(2)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(k)}\rangle_{i_{\sigma(1)}j_{\sigma(k)}},$$

e $\Psi(\mathrm{m}) = 0$, caso contrário. Aqui $\sigma*$ é a permutação σ restrita aos elementos ímpares (na $\mathbb{Z}_2$-graduação) entre os v_i's e $(-1)^{\sigma*}$ é seu sinal. Lembramos que a ação de Ψ sobre os monômios cadeia é composto de certas permutações com a aplicação de Kemer $f \mapsto f^*$, ver [18, Chapter1.2, p. 17].

Proposição 3.11. *O operador linear Ψ está bem definido sobre $\Gamma(V)$.*

Demonstração: Primeiro vamos mostrar se m é um monômio cadeia então $\Psi(\mathrm{m})$ não depende da escolha da permutação σ que coloca os índices em posição correta. Isto é, se m de comprimento k já se encontra em posição cadeia, e $\sigma \in S_k \setminus \{1_{S_k}\}$ é tal que $\Psi(\mathrm{m})$ também fica em posição cadeia e $i_{\sigma(1)} = i_1$ (e portanto $j_k = j_{\sigma(k)}$), então $\Psi(\mathrm{m})$ pode ser obtido de m via as identidades graduadas da álgebra A.

Suponha que há mais de uma permutação satisfazendo a condição de cadeia, i.e., sejam σ, $\tau \in S_k$ duas permutações em S_k tais que $j_{\sigma(i)} = i_{\sigma(i+1)}$ and $j_{\tau(i)} = i_{\tau(i+1)}$, $1 \leq i \leq k-1$. Sem perda de generalidade podemos supor $\tau = 1$, a permutação idêntica. Suponha v_1, v_2, $\ldots$, $v_k \in A$ homogêneos.

Fazemos indução sobre k. No caso $k = 1$ não resta nada a demonstrar. Consideremos $k = 2$, $\mathrm{m} = \langle u\rangle_{ij} \wedge \langle v\rangle_{pq}$. Se existem duas permutações (em S_2) que fazem de m um monômio cadeia, então necessariamente $j = p$. Mas então temos

$$\Psi(\langle u\rangle_{ij} \wedge \langle v\rangle_{ji}) = \langle uv\rangle_{ii} = (-1)^{|u||v|}\langle vu\rangle_{jj} = (-1)^{|v||u|}\Psi(\langle v\rangle_{ji} \wedge \langle u\rangle_{ij}),$$

que é justamente a relação dada pela equação (3.2).

Agora suponha que a afirmação acima é verdadeira para todo monômio cadeia m de comprimento máximo $k-1$. Seja $\mathrm{m} = \langle v_1 \rangle_{i_1 j_1} \wedge \langle v_2 \rangle_{i_2 j_2} \wedge \ldots \wedge \langle v_k \rangle_{i_k j_k}$, $j_t = i_{t+1}$ para todo $t \leq k-1$. Suponha ainda que para alguma $\sigma \in S_k$, $\sigma \neq 1$ temos $j_{\sigma(t)} = i_{\sigma(t+1)}$, $t \leq k-1$. Mostraremos que

$$(-1)^{\sigma *} \langle v_{\sigma(1)} v_{\sigma(2)} \ldots v_{\sigma(k)} \rangle_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(k)}} = \langle v_1 v_2 \ldots v_k \rangle_{i_1 j_k}.$$

Se $\sigma(1) = 1$ aplicamos a hipótese indutiva em $\langle v_{\sigma(2)} \ldots v_{\sigma(k)} \rangle_{i_{\sigma(2)} j_{\sigma(k)}}$ e $\langle v_2 \ldots v_k \rangle_{i_2 j_k}$, então podemos supor, sem perda de generalidade, que $\sigma(1) \neq 1$. Denotamos através de $\sigma(\mathrm{m}) = \Psi(\langle x_{\sigma(1)} \rangle_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge \langle x_{\sigma(k)} \rangle_{i_{\sigma(k)} j_{\sigma(k)}})$. Observe que se $r = \sigma^{-1}(1)$ então v_1 é a r-ésima letra em $\sigma(\mathrm{m})$ da esquerda para a direita.

Seja $\sigma(1) = s > 1$. Se $s = 2$ então necessariamente $i_{\sigma(1)} = i_1$ portanto $j_1 = i_2 = i_1$, e $\partial(v_1) = (0, |v_1|)$, $\partial(v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(r-1)}) = (0, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. Logo aplicamos a primeira identidade do sistema 3.1 aos primeiros r fatores de $\sigma(m)$, e o monômio resultante começará com x_1. E portanto aplicamos a indução. Observe que o sinal do monômio resultante mudará apenas quando $|v_1| = \alpha = 1$. Mas isso significa que dentre os $r-1$ fatores de $\sigma(\mathrm{m})$ o número de fatores ímpares é ímpar. Então levar v_1 ao começo do monômio deve mudar o sinal da permutação σ^*, e então aplicamos uma vez mais a indução.

Agora suponha $s > 2$. Considere primeiro o caso $r \neq k$. Seja p o maior inteiro positivo, $p < s$, e tal que v_p está à direita de v_1 em $\sigma(\mathrm{m})$. Se $p = s-1$ então temos, como acima, que

$$\partial(v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(r-1)}) = (0, \beta), \quad \partial(v_1 v_{\sigma(r+1)} \ldots v_{\sigma(p)}) = (j_{s-1} - i_1, \gamma) = (0, \gamma).$$

Portanto podemos aplicar a primeira identidade de (3.1) para obter um monômio começando com v_1, e aplicamos o passo indutivo no submonômio de comprimento $k-1$ à direita de v_1.

Considere agora $p < s-1$, então $\sigma(\mathrm{m}) = (-1)^{\sigma *} \langle v_s \mathrm{m}_1 v_{p+1} \mathrm{m}_2 v_1 \mathrm{m}_3 v_p \mathrm{m}_4 \rangle_{i_s j_{\sigma(k)}}$ para alguns monômios m_i (alguns possivelmente vazios). Então $i_s = i_1$ portanto

$$\partial_n(v_s m_1) = j_p - j_1 = -\partial_n(v_{p+1} m_2) = \partial_n(v_1 m_3 v_p).$$

Agora estamos em posição de aplicar o segundo tipo de identidades graduadas do sistema (3.1), e obtemos um monômio começando com v_1. Observe que o sinal mudará se e somente se dois dentre $v_s \mathrm{m}_1$, $v_{p+1} \mathrm{m}_2$ and v_1 são ímpares. Verifica-se, caso a caso, que de qualquer modo o sinal obtido é o correspondente à da permutação dos elementos ímpares em $\sigma(m)$.

Se não existe tal índice p repete-se o mesmo argumento, mas no lugar de p toma-se q sendo o menor índice tal que $q > s$ e v_q está à esquerda de v_1 em $\sigma(\mathrm{m})$.

Caso não exista tal q, então necessariamente $r = s$, e todas as variáveis que estão à esquerda de v_s em m devem estar à esquerda de v_1 em $\sigma(\mathrm{m})$. Mais ainda, toda variável que está à direita de v_s em m aparece à direita de v_1 em $\sigma(m)$. Portanto $\sigma(m) = \langle v_s m_1 v_1 m_2 \rangle_{i_s j_{\sigma(k)}}$. Aqui $v_s m_1 v_1$ é uma permutação de $v_1 \ldots v_s$. Agora se $s < k$ usamos a indução. Se $r = s = k$ então $\sigma(\mathrm{m}) = \langle v_k \mathrm{m}_2 v_1 \rangle_{i_k j_1}$. Mas nessa situação obviamente $\partial_n(v_k \mathrm{m}_2) = \partial_n(v_1) = 0$ e podemos aplicar o primeiro tipo de identidades graduadas do sistema (3.1). Então v_1 vem para o começo de $\sigma(\mathrm{m})$ e aplicamos a indução. O sinal muda somente quando $|v_1| = |v_k m_2| = 1$ e isso significa que o sinal de σ^* mudará também.

Para encerrar temos que considerar o caso em que existe uma permutação $\sigma \in S_k$ que embora não coloque m em posição cadeia, faz aparecer um submonômio nulo em posição cadeia. Nesse caso, pelo produto de S, devemos ter necessariamente um monômio nulo mesmo considerando a cadeia de comprimento máximo. Mas isso segue como conseqüência das condições impostas no lema 3.7. ■

Daqui para frente A sempre satisfará as condições do lema 3.7.

Podemos considerar ainda uma transformação linear Φ que vai do subespaço gerado pelos monômios cadeia de $\mathbb{Z}_n$-grau 0 de $\Gamma(V)$ em A de modo que

$$\Phi(\langle r_1 \rangle_{i_1,i_2} \wedge \langle r_2 \rangle_{i_2,i_3} \wedge \ldots \wedge \langle r_k \rangle_{i_k,i_i}) = r_1 \ldots r_k,$$

sobre um monômio cadeia e estendida por linearidade.

Lema 3.12. *A transformação linear Ψ, quando restrita ao subespaço gerado pelos monômios cadeia de $\mathbb{Z}_n$-grau 0 de $\Gamma(V)$, satisfaz $\Psi(a) = 0$ se, e somente se, $\Phi(a) = 0$.*

Demonstração: A afirmação $\Phi(a) = 0$ implica $\Psi(a) = 0$ é imediata. Para a recíproca fazemos indução sobre o número de parcelas de $\mathrm{m}_1 + \ldots + \mathrm{m}_k$, onde cada m_i é um monômio cadeia não-nulo de $\mathbb{Z}_n$-grau zero de $\Gamma(V)$. Para o caso de um único monômio, temos que $\Psi(\mathrm{m}) = \langle r \rangle_{ii}$, $r \in A_0 \setminus \{0\}$, portanto $\langle r \rangle_{ii} \neq 0$ em $S(A_0^{(*)})$ pelo lema anterior, e portanto $\Phi(\mathrm{m}) \neq 0$.

Para o caso $\mathrm{m}_1 + \ldots + \mathrm{m}_k$, sendo k minimal, e $\Psi(\mathrm{m}_1 + \ldots + \mathrm{m}_k) = 0$, então $\Psi(\mathrm{m}_i) = \langle r_i \rangle_{j_i j_i}$ com $j_i = j_{i'}$ implicando $i = i'$ (pela condição de minimalidade das parcelas. Mas pelo argumento anterior, $\Phi(m_i) = 0$, para todo i entre 1 e k e obtemos o resultado desejado. ■

Denotamos por $A_0 * 1 * \ldots * 1$ o subespaço de $\Gamma(A_0^{(*)n})$ gerado pelos elementos $a * 1 * \ldots * 1$, $a \in A_0$. O seguinte lema é imediato:

Lema 3.13. *A aplicação Φ restrita ao subespaço vetorial $A_0 * 1 * \ldots * 1$ é injetiva.*

Lema 3.14. *Considere a aplicação $\varphi_{1,1} : A_0 \to S(V)_0$ que leva $r \mapsto \bar{r} * 1 * \ldots * 1$. Então $\varphi_{1,1}$ é um homomorfismo injetivo.*

Demonstração: Note que $\varphi_{1,1}$ coincide com $\Psi \circ i_{1,1}$, onde $i_{1,1} : A_0 \to \Gamma(V)$ é a inversa da aplicação Φ restrita a $A_0 * 1 * \ldots * 1$. Assim, o lema 3.12 fornece o resultado. ■

Lema 3.15. *Se $(ann_A A_k) \cap A_{-k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}_n$, então $\varphi : A \to M_n(S(V))$ tal como definido pela equação (3.3) é injetivo.*

Demonstração: Primeiramente temos que $\varphi|_{A_0}$ é injetiva, pois se $a \in A_0$, temos

$$\varphi(a) = \varphi_{1,1}(a)\mathbf{e}_{1,1} + \ldots + \varphi_{n,n}(a)\mathbf{e}_{n,n},$$

onde os $\varphi_{i,i}$ são definidos de maneira análoga a $\varphi_{1,1}$ e portanto são claramente injetivos pelos mesmos argumentos, donde segue a injetividade de $\varphi|_{A_0}$. Para demonstrar a injetividade em todo A, uma vez que φ é homomorfismo graduado, basta mostrar que a interseção de seu núcleo com cada componente homogênea é o subespaço trivial. Suponha $r \in A_k$ um elemento G-homogêneo de A. Por hipótese, existe $r' \in A_{-k}$ tal que $rr' \neq 0$, logo $\varphi(rr') \neq 0$ e como φ é homomorfismo de álgebras, temos que $\varphi(r) \neq 0$. ■

Como conseqüência direta deste lema, temos o teorema:

Teorema 3.16. *Seja A uma álgebra $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduada, satisfazendo as identidades graduadas de $M_n(E)$ e as condições do lema 3.7. Suponha, além disso, que $(ann_A A_k) \cap A_{-k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}_n$. Então existe um mergulho graduado de A em uma álgebra $M_n(S)$ para alguma álgebra supercomutativa S com unidade.*

Corolário 3.17. *A álgebra $M_{a,b}(E) \otimes E$ pode ser mergulhada, via um mergulho graduado, em $M_{a+b}(S)$ para alguma álgebra supercomutativa S.*

Observação 3.18. *No caso em que lidamos com $n = 2$, as hipóteses do lema 3.7 podem ser trocadas simplesmente pela condição $\mathrm{ann} A_1 = 0$. A idéia da demonstração é como um caso particular da anterior, com a diferença de que se $\langle r_1 \rangle_{i_1,j_1} \wedge \ldots \wedge \langle r_k \rangle_{i_k,j_k} \in S(V)_0$, então deve haver uma quantidade igual de fatores com índices $(1, 2)$ e $(2, 1)$ e nesse caso, devido ao fato dos índices serem necessariamente sempre 1 ou 2 se um submonômio cadeia é 0, ele pode ser escrito como submonômio de um monômio cadeia.*

3.5 Condições suficientes para mergulho em $M_{a,b}(S)$

Nesta seção todas as álgebras são consideradas sobre um corpo infinito K de característica diferente de 2. Seja $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$, $n = a + b$, e seja A uma álgebra G-graduada que satisfaz todas as identidades G-graduadas de $M_{a,b}(E)$. Nesta seção provamos que uma condição análoga à da seção anterior nos assegura que existe um mergulho graduado de A em $M_{a,b}(S)$ para uma álgebra supercomutativa S apropriada.

Teorema 3.19. *Seja A uma álgebra G-graduada satisfazendo todas as identidades graduadas de $M_{a,b}(E)$, $a + b = n$. Se essa álgebra satisfaz a condição do lema 3.7 quanto ao produto de elementos homogêneos e $(ann_A A_k) \cap A_{-k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}_n$ então existe uma álgebra supercomutativa S tal que A pode ser mergulhada, via um homomorfismo graduado, em $M_{a,b}(S)$.*

Demonstração: A demonstração deste teorema é muito parecida com a do teorema 3.16, assim vamos simplesmente enfatizar as diferenças entre as duas. Primeiro observamos que algumas das componentes homogêneas de $M_{a,b}(E)$, e portanto de A, são triviais. Portanto consideramos simplesmente as componentes não nulas. Seja $\chi_a\colon \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}_2$ a função característica de $\{1, \ldots, a\}$, isto é, $\chi_a(i) = 1$ se $1 \leq i \leq a$, e $\chi_a(i) = 0$ quando $a + 1 \leq i \leq n$. Então para todo $1 \leq i, j \leq n$, tomamos os espaços vetoriais $\overline{A}_{ij} = A_{(c,d)}$ com $c = j - i \pmod n$ e $d = \chi_a(i) + \chi_a(j)$.

Se $1 \leq i, j, k \leq n$ fixamos

$$R_k^{(i)} = \begin{cases} A_{(-i+k,\chi_a(i)+1)} & \text{se } i \leq a, \\ A_{(-i+k,\chi_a(i))} & \text{se } i \geq a+1; \end{cases} \qquad C_k^{(j)} = \begin{cases} A_{(j-k,\chi_a(j)+1)} & \text{se } j \leq a, \\ A_{(j-k,\chi_a(j))} & \text{se } j \geq a+1. \end{cases}$$

E para simplificar, usamos as notações $R_i = \oplus_{k=1}^n R_k^{(i)}$ e $C_j = \oplus_{k=1}^n C_k^{(j)}$. Consideramos W_{ij} como sendo o subespaço de A gerado por $W_{ij} = \sum_{k=1}^n R_k^{(i)} C_k^{(j)}$, e tomamos finalmente $N_{ij} = \overline{A}_{ij}/W_{ij}$.

Agora repetimos a construção da álgebra supercomutativa S da seção anterior substituindo os subespaços vetoriais M_{ij} daquela seção pelos espaços N_{ij} tal como definidos acima.

Define-se $\varphi\colon A \to M_{a,b}(S)$ da seguinte maneira. Se $(k, c) \in G$ e $r_{kc} \in A_{kc}$ então

$$\varphi(r_{kc}) = \langle r_{kc} \rangle_{1,k+1} \mathbf{e}_{1,k+1} + \langle r_{kc} \rangle_{2,k+2} \mathbf{e}_{2,k+2} + \ldots + \langle r_{kc} \rangle_{n,k} \mathbf{e}_{n,k}.$$

Logo se $c = 0$ em $\mathbb{Z}_2$ e $i \leq a \leq j$, ou $j \leq a \leq i$, então $\langle r_{kc} \rangle_{ij} = 0$.

Verifica-se, tal como na seção anterior, que φ preserva a G-graduação e que é injetivo. Assim, existe um mergulho graduado de A em $M_{a,b}(S)$. ■

3.6 Resultado negativo em característica 0

Na seção anterior pedimos que o corpo base fosse infinito e de característica diferente de 2. Nesta seção consideraremos apenas álgebras sobre um corpo de característica 0. Berele em [7, Theorem 3] provou que $M_{1,1}(E)$ não pode ser mergulhada, via mergulho graduado em $S \otimes T$ para quaisquer duas álgebras supercomutativas S e T. Aqui estendemos os resultados de Berele e provamos que não existe um mergulho graduado de $M_{a+b}(E)$ em $M_{a,b}(S) \otimes T$ para quaisquer duas álgebras supercomutativas S e T.

Lema 3.20. *Seja S uma álgebra supercomutativa com 1. Então para todo inteiro positivo k e quaisquer elementos ímpares $s_1, \ldots, s_k$, e $t_1, \ldots, t_k$ em $S \backslash \{0\}$ temos que $s_1t_1 + \ldots + s_kt_k \neq 1$.*

Demonstração: Assuma que $s_1t_1 + \ldots + s_kt_k = 1$. Tome o conjunto $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \in S$ e escolha o maior p tal que existem $t_{l_1}, \ldots, t_{l_p} \in S$ com $t_{l_1} \ldots t_{l_p} \neq 0$. Denotemos por t esse produto. Então $t \neq 0$ mas $t = 1 \cdot t = (s_1t_1 + \ldots + s_kt_k)t = 0$ uma vez que os t_i anticomutam, o que nos fornece uma contradição. ■

Lema 3.21. *(Compare com [7, Lemma 3].) Suponha que S e T são duas álgebras supercomutativas com 1. Seja $r \in M_{a,b}(S) \otimes T$ um elemento $\mathbb{Z}_{a+b} \times \mathbb{Z}_2$-homogêneo, $\partial(r) = (k, 0)$ com $k \neq 0$. Então não existe elemento homogêneo $s \in M_{a,b}(S) \otimes T$, $\partial(s) = (-k, 0)$, e tal que $rs = 1 \otimes 1$.*

Demonstração: Seja $r = \sum a_v \otimes t_v$, $a_v \in M_{a,b}(S)$, $t_v \in T$. Segue de $k \neq 0$ em $\mathbb{Z}_n$ que para algum par de inteiros positivos menores ou iguais a n, i e j, $j - i \equiv k \pmod{n}$, as entradas (i, j) das matrizes a_v são elementos ímpares de S. Portanto no produto rs estes elementos ímpares de S devem ser multiplicados por elementos ímpares na representação análoga para s. Logo pelo Lema 3.20 a entrada (i, i) das matrizes à esquerda do produto tensorial nas parcelas de rs jamais pode ser 1. ■

Teorema 3.22. *Sobre um corpo de característica 0, a álgebra $M_{a+b}(E)$ não pode ser mergulhada, preservando-se as componentes graduadas, em $M_{a,b}(S) \otimes T$ para quaisquer álgebras supercomutativas unitárias S e T.*

Demonstração: É suficiente observar que para $r = \mathbf{e}_{12}+\mathbf{e}_{23}+\ldots+\mathbf{e}_{n1}$, $r^n = 1$. Portanto r e sua inversa r^{n-1} são elementos homogêneos de $M_n(E)$. Mas na álgebra $M_{a,b}(S) \otimes T$ não existe um elemento homogêneo desse grau que possua inverso pelos lemas anteriores. ■

Capítulo 4

Identidades graduadas para as álgebras $M_{2^n}(E)$, $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ e $E^{\otimes n}$

Denotemos por $E^{\otimes n}$ a álgebra $E \otimes \ldots \otimes E$, n vezes. Neste capítulo consideramos $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduações para as álgebras $E^{\otimes 2n}$ e $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ e consideramos $\mathbb{Z}_2^{2n+1}$-graduações para as álgebras $E^{\otimes 2n+1}$ e $M_{2^n}(E)$. A partir destas, comparamos os T-ideais graduados das mesmas tanto no caso em que são consideradas sobre um corpo de característica zero — **teorema 4.12** como sobre corpo infinito de característica maior que 2 — **teoremas 4.20 e 4.21**. De fato, esses resultados são conseqüência direta das bases de identidades para os T-ideais destas álgebras exibidas nos lemas 4.9, 4.10, 4.11, 4.15, 4.16 e 4.19. Fornecemos ainda, através do **teorema 4.25** e do **teorema 4.26**, cadeias de T-ideais graduados das álgebras $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E) \otimes E^{\otimes l}$ e $M_{2^m}(E) \otimes E^{\otimes q}$ com $2k + l = 2m + q + 1$. Por fim exibimos bases de identidades graduadas para álgebras da forma $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E) \otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$ — **teorema 4.31**. Como corolários dos teoremas demonstrados neste capítulo (**corolários 4.13, 4.27 e 4.32**), temos os resultados do TPT em característica zero para os casos em que as álgebras de matrizes têm como ordem uma potência de 2.

4.1 Preliminares

Nesta seção fixaremos a notação a ser utilizada ao longo de todo este capítulo. Elas são praticamente as mesmas utilizadas por Regev em [20], com algumas leves alterações.

Lembramos que a álgebra de Grassmann, tal como definida no exemplo 1.3 é a K-

álgebra supercomutativa livre, com 1, livremente gerada pelo conjunto infinito enumerável $\{1, e_1, e_2, \ldots\}$, com a imposição de que cada e_i seja $\mathbb{Z}_2$-homogêneo de grau 1.

Começamos definindo o grupo $G_n \subset M_{2^n}(K)$, onde mais uma vez lembramos que K é um corpo infinito de característica diferente de 2. Definimos G_0 como sendo o grupo gerado por -1 em K, isto é, $G_0 = \{-1, 1\}$. Os demais G_n definimos de modo indutivo, a partir de G_1:

$$G_1 = \langle A_{1,1}, B_{1,1} \rangle, \text{ onde } A_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sejam agora $A_{1,n}, \ldots, A_{n,n}$ e $B_{1,n}, \ldots, B_{n,n}$ matrizes de $M_{2^n}(K)$. Definimos indutivamente $A_{1,n+1}, \ldots, A_{n+1,n+1}, B_{1,n+1}, \ldots, B_{n+1,n+1} \in M_{2^{n+1}}(K)$ do seguinte modo:

$$A_{i,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{i,n} \\ A_{i,n} & 0 \end{pmatrix}, \; B_{i,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & B_{i,n} \\ B_{i,n} & 0 \end{pmatrix}, \text{ se } 1 \leq i \leq n.$$

Considerando $C_n = A_{1,n}A_{2,n} \ldots A_{n,n}B_{1,n} \ldots B_{n,n}$ e sendo I_{2^n} a matriz identidade em $M_{2^n}(K)$, definimos

$$A_{n+1,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & C_n \\ C_n & 0 \end{pmatrix}, \text{ e } B_{n+1,n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -I_{2^n} \\ I_{2^n} & 0 \end{pmatrix}.$$

O resultado seguinte, de verificação simples através de cálculos diretos, fornece todas as propriedades interessantes dos geradores do grupo G_n.

Lema 4.1. *Para um número inteiro positivo n arbitrário, e para quaisquer $i, j \leq n$ as seguintes relações são válidas:*

1. $A_{i,n}^2 = -B_{j,n}^2 = C_n^2 = I_{2^n}$;
2. $A_{i,n}C_n = -C_nA_{i,n}$;
3. $B_{i,n}C_n = -C_nB_{i,n}$;
4. $A_{i,n}A_{j,n+1} = -A_{j,n}A_{1,n}$ *se* $i \neq j$;
5. $B_{i,n}B_{j,n} = -B_{j,n}B_{i,n}$ *se* $i \neq j$;
6. $A_{i,n}B_{j,n} = -B_{j,n}A_{i,n}$ *para todo* i, j.

Dessa forma, qualquer elemento do grupo G_n pode ser escrito, de maneira única, na forma $\pm A_{1,n}^{\alpha_1} A_{2,n}^{\alpha_2} \ldots A_{n,n}^{\alpha_n} B_{1,n}^{\alpha_{n+1}} B_{2,n}^{\alpha_2} \ldots B_{n,n}^{\alpha_{2n}}$, com $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}) \in \mathbb{Z}_2^{2n}$. A partir do grupo G_n obtemos uma base de matrizes invertíveis para $M_{2^n}(K)$.

Denote por H_n o subconjunto $\{A_{1,n}^{\alpha_1} \ldots A_{n,n}^{\alpha_n} B_{1,n}^{\alpha_{n+1}} \ldots B_{n,n}^{\alpha_{2n}} |\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}) \in \mathbb{Z}_2^{2n}\}$. Denotemos ainda por $H_{0,n}$ o subconjunto de H_n formado pelos monômios cuja soma dos expoentes é 0 e por $H_{1,n}$ seu complementar em H_n, i.e., o conjunto dos monômios cuja soma dos expoentes (considerada em $\mathbb{Z}_2$) é 1. Lembramos que se A é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, $A \widehat{\otimes} E$ denota o envelope de Grassmann da álgebra A, isto é, $A \widehat{\otimes} E = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1)$.

Lema 4.2. *Utilizando as notações acima o conjunto H_n forma uma base, como espaço vetorial, de matrizes invertíveis para $M_{2^n}(K)$. Além disso, $H_{0,n}$ e $H_{1,n}$ geram, respectivamente, subespaços $M_{2^n}(K)_0$ e $M_{2^n}(K)_1$ em $M_{2^n}(K)$, onde*

$$M_{2^n}(K)_0 = \begin{pmatrix} M_{2^{n-1}}(K) & 0 \\ 0 & M_{2^{n-1}}(K) \end{pmatrix} \ e\ M_{2^n}(K)_1 = \begin{pmatrix} 0 & M_{2^{n-1}}(K) \\ M_{2^{n-1}}(K) & 0 \end{pmatrix},$$

dando origem a uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em $M_{2^n}(K)$ de tal modo que, com essa $\mathbb{Z}_2$-graduação $M_{2^n}(K) \widehat{\otimes} E = M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$.

Demonstração: Ver [20, Lemma 1]. ■

4.2 $\mathbb{Z}_2^k$-graduações

A partir do último resultado da seção anterior, conseguimos definir uma $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduação natural em $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$. Basta considerar $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n})}$ como sendo o espaço gerado pelo conjunto $H_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n})} = \{rA_{1,n}^{\alpha_1} \ldots A_{n,n}^{\alpha_n} B_{1,n}^{\alpha_{n+1}} \ldots B_{n,n}^{\alpha_{2n}} |\ r \in E_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{2n}}\}$. O fato $H_\alpha H_{\alpha'} \subset H_{\alpha+\alpha'}$, para quaisquer $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}_2^{2n}$ segue diretamente das propriedades enunciadas no lema 4.1

Sejam $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ e $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k)$ dois elementos de $\mathbb{Z}_2^k$. Então definimos as seguintes expressões:

$$\begin{array}{rcl} \langle \alpha, \alpha' \rangle & := & \sum_{i=1}^k \alpha_i \alpha'_i, \\ s_\alpha & := & \sum_{i=1}^k \alpha_i \\ s_{\alpha,i} & := & s_\alpha - \alpha_i \end{array}$$

Lema 4.3. *Sejam M, N dois elementos $\mathbb{Z}_2^{2n}$-homogêneos de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$, e sejam α_M e α_N seus respectivos graus. Então $MN = (-1)^{\langle \alpha_M, \alpha_N \rangle} NM$.*

Demonstração: Seja $\alpha_M = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$ e seja $\alpha_N = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_{2n})$. Assim temos que $M = rA_{1,n}^{\alpha_1} \dots B_{n,n}^{\alpha_{2n}}$, para algum $r \in E$ e $N = r' A_{1,n}^{\alpha'_1} \dots B_{n,n}^{\alpha'_{2n}}$ e

$$\begin{aligned} MN &= rsA_{1,n}^{\alpha_1} \dots B_{n,n}^{\alpha_{2n}} A_{1,n}^{\alpha'_1} \dots B_{n,n}^{\alpha'_{2n}} \\ &= (-1)^{s_{\alpha,1}\alpha'_1} rsA_{1,n}^{\alpha'_1} A_{1,n}^{\alpha_1} \dots B_{n,n}^{\alpha_{2n}} A_{2,n}^{\alpha'_2} \dots B_{n,n}^{\alpha'_{2n}} \\ &= (-1)^{s_{\alpha,i}\alpha'_1 + \dots + s_{\alpha,2n}\alpha'_{2n}} rsA_{1,n}^{\alpha'_1} \dots B_{n,n}^{\alpha'_{2n}} A_{1,n}^{\alpha_1} \dots B_{n,n}^{\alpha_{2n}} \\ &= (-1)^{s_{al,1}\alpha'_1 + \dots + s_{\alpha,2n}\alpha'_{2n} + s_\alpha s_{\alpha'}} srA_{1,n}^{\alpha'_1} \dots B_{n,n}^{\alpha'_{2n}} A_{1,n}^{\alpha_1} \dots B_{n,n}^{\alpha_{2n}} \\ &= (-1)^{\langle \alpha, \alpha' \rangle} NM. \end{aligned}$$

■

Corolário 4.4. *Sejam M, N dois elementos $\mathbb{Z}_2^{2n}$-homogêneos de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ com mesmo grau α. Então $MN = (-1)^{s_\alpha} NM$. Em particular, se s_α é ímpar, então $M^2 = 0$.*

Demonstração: A primeira afirmação segue direto do fato de que $\langle \alpha, \alpha \rangle = s_\alpha$ e a segunda é conseqüência de considerarmos char$K \neq 2$. ■.

Agora definiremos uma $\mathbb{Z}_2^{2n+1}$-graduação para $M_{2^n}(E)$. Aqui temos que lançar mão de um truque.

Lema 4.5. *Seja $M \in H_n$ e seja $r \in E$ um elemento $\mathbb{Z}_2$-homogêneo. Então existe uma única maneira de escrever $rM = r' A_{1,n}^{\alpha_1} \dots B_{n,n}^{\alpha_{2n}} C_n^{\alpha_{2n+1}}$ de modo que o $\mathbb{Z}_2$-grau de r coincida com a paridade de s_α e $r = \pm r'$.*

Demonstração: Sabemos que podemos escrever $rM \in M_{2^n}(E)$ de maneira única na forma $rA_{1,1}^{\alpha'_1} \dots B_{n,n}^{\alpha'_{2n}}$, para algum elemento $\alpha' \in \mathbb{Z}_2^{2n}$. Se $\partial_{\mathbb{Z}_2}(r) = s_{\alpha'}$, então já temos o formato desejado com $\alpha_k = \alpha'_k$ se $k \leq 2n$ e $\alpha_{2n+1} = 0$. Suponha que o mesmo possa ser escrito como $r' A_{1,1}^{\alpha_1} \dots B_{n,n}^{\alpha_{2n}} C_n^{\alpha_{2n+1}}$, onde pelo menos um dos expoentes $\alpha_j \neq \alpha'_j$. Então necessariamente $\alpha_{2n+1} = 1$, mas como $C_n = A_{1,1} \dots B_{n,n}$, e as matrizes consideradas no produto anticomutam, exceto consigo mesmas, todos os demais expoentes α_i mudam para $\overline{\alpha}_i = \alpha_i + 1$ em $\mathbb{Z}_2$. Como de α_1 até α_{2n} temos uma quantidade par de expoentes, temos que $s_{\alpha,2n+1} = s_{\overline{\alpha},2n+1}$. Mas $\overline{\alpha}_{2n+1}$ é 1, e portanto $s_{\overline{\alpha}} \neq \partial_{\mathbb{Z}_2}(r)$. Um argumento análogo fornece o resultado desejado no caso em que $\partial(r) \neq s_{\alpha'}$. ■

Como conseqüência direta do lema anterior e das propriedades do lema 4.1, temos:

Corolário 4.6. *A álgebra $M_{2^n}(E)$ admite $\mathbb{Z}_2^{2n+1}$-graduação, de modo que $M_{2^n}(E)_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n+1})}$ é gerado pelos elementos da forma $rA_{1,1}^{\alpha_1}\ldots B_{n,n}^{\alpha_{2n}}C_n^{\alpha_{2n+1}}$.*

E, analogamente ao caso de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$, temos os seguintes resultados cujas demonstrações são quase repetições e, por isso, serão omitidas.

Lema 4.7. *Sejam M, N dois elementos $\mathbb{Z}_2^{2n+1}$-homogêneos de $M_{2^n}(E)$, e sejam α_M e α_N seus respectivos graus. Então $MN = (-1)^{\langle\alpha_M,\alpha_N\rangle}NM$.*

Corolário 4.8. *Sejam M, N dois elementos $\mathbb{Z}_2^{2n+1}$-homogêneos de $M_{2^n}(E)$ com mesmo grau α. Então $MN = (-1)^{s_\alpha}NM$. Em particular, se s_α é ímpar, então $M^2 = 0$.*

4.3 Identidades graduadas em característica 0

Seja k um inteiro positivo, nesta seção nosso objetivo será fornecer uma $\mathbb{Z}_2^k$-graduação para a álgebra $E^{\otimes k}$ e comparar o T-ideal graduado desta álgebra com o T-ideal graduado de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$, no caso em que k for par, e com o T-ideal graduado de $M_{2^n}(E)$ no caso em que k for ímpar.

No caso de característica 0, todas as identidades do T-ideal, graduado ou não, de uma álgebra seguem daquelas que são multilineares, como mostrado no capítulo 1. Como conseqüência direta do lema 4.3 e de seu corolário, temos que $c_{2n}(x,y) = xy - (-1)^{\langle\partial(x),\partial(y)\rangle}yx \in K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2^{2n}}$ pertence ao T-ideal graduado de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$. Daqui em diante denotaremos por $c_k(x,y)$ o polinômio de $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2^k}$ dado por $c_k(x,y) = xy - (-1)^{\langle\partial(x),\partial(y)\rangle}yx$.

De fato, temos:

Lema 4.9. *Sobre qualquer corpo de característica zero, as identidades $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduadas de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ são conseqüências de $c_{2n}(x,y) = xy - (-1)^{\langle\partial(x),\partial(y)\rangle}yx$.*

Demonstração: Como estamos lidando com corpo de característica zero, basta mostrar que todas as identidades graduadas multilineares seguem desta. Seja $f(x_1,\ldots,x_k)$ uma identidade multilinear graduada de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$, e seja J o T-ideal graduado gerado por $c_{2n}(x,y)$. Logo todos os fatores nos monômios comutam ou anticomutam entre si, e portanto temos que

$$f(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{\sigma\in S_k}\lambda_\sigma x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(k)} \equiv \lambda' x_1\ldots x_k \pmod J),\ \lambda\in K.$$

Se $\lambda' = 0$, então f é uma identidade que segue de $c_{2n}(x,y)$. Caso contrário, é fácil encontrar uma substituição standard (ver definição 1.48) para as variáveis em $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ tal que o monômio $x_1 \dots x_k$ não é levado em 0. Caso $s_{\partial(x_i)}$ seja par, basta substitui-lo por $A_{1,n}^{\alpha_1} \dots B_{n,n}^{\alpha_{2n}}$, onde $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}) = \partial(x_i)$. Caso contrário basta substituir x_i por $e_i A_{1,n}^{\alpha_1} \dots B_{n,n}^{\alpha_{2n}}$. Logo $x_1 \dots x_k$ vai em $e_{i_1} \dots e_{i_l} D$, onde $0 \leq l \leq k$, $i_1 < \dots < i_k$ e D é uma matriz invertível, e portanto f não é identidade de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$. ■

De maneira análoga ao que ocorre em $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$, temos para $M_{2^n}(E)$ que $c_{2n+1}(x,y)$ é uma identidade $\mathbb{Z}_2^{2n+1}$-graduada de $M_{2^n}(E)$. Mais que isso:

Lema 4.10. *O T-ideal $\mathbb{Z}_2^{2n+1}$-graduado de $M_{2^n}(E)$ é gerado por $c_{2n+1}(x,y)$ quando a álgebra é considerada sobre um corpo de característica zero.*

Demonstração: A demonstração é completamente análoga àquela do lema anterior, apenas acrescentando a matriz C_n elevada ao expoente respectivo na hora de realizar as substituições. ■

Agora olhemos para a álgebra $E^{\otimes n}$. A mesma admite uma $\mathbb{Z}_2^n$-graduação bastante natural. Basta tomar $E^{\otimes n}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$ como sendo o subespaço gerado pelos elementos da forma $a_1 \otimes \dots \otimes a_n$, tais que $\partial_{\mathbb{Z}_2}(a_j) = \alpha_j$.

Lema 4.11. *O polinômio $c_n(x,y)$ é uma identidade $\mathbb{Z}_2^n$-graduada de $E^{\otimes n}$. Se consideramos a álgebra sobre um corpo de característica zero, $c_n(x,y)$ gera o T-ideal graduado de $E^{\otimes n}$.*

Demonstração: Como $c_n(x,y)$ é multilinear, basta verificar que todos os elementos da base de $E^{\otimes n}$ a satisfazem. Considere então $a = a_1 \otimes \dots \otimes a_n$ e $b = b_1 \otimes \dots \otimes b_n$ dois elementos $\mathbb{Z}_2^n$-homogêneos de $E^{\otimes n}$. Então $(a_1 \otimes \dots \otimes a_n)(b_1 \otimes \dots \otimes b_n) =$

$$\begin{array}{lcccl} = & a_1 b_1 \otimes \dots \otimes a_n b_n & = & (-1)^{\partial_{\mathbb{Z}_2}(a_1)\partial_{\mathbb{Z}_2}(b_1)} b_1 a_1 \otimes a_2 b_2 \otimes \dots \otimes a_n b_n & = \\ = & (-1)^{\langle \partial(a), \partial(b) \rangle} b_1 a_1 \otimes \dots \otimes b_n a_n & = & (-1)^{\langle \partial(a), \partial(b) \rangle} (b_1 \otimes \dots \otimes b_n)(a_1 \otimes \dots \otimes a_n). & \end{array}$$

Para demonstrar a segunda parte, como $c_n(x,y)$ é identidade graduada de $E^{\otimes n}$, se f é uma identidade multilinear graduada de $E^{\otimes n}$, e f não pertence ao T-ideal gerado por c_n, então $f \equiv x_1 \dots x_k \pmod J$, onde J é o T-ideal $\mathbb{Z}_2^n$-graduado gerado por c_n. Novamente basta mostrarmos que então conseguimos tomar uma substituição standard na álgebra que não anule o monômio. Assim basta substituir x_i de grau $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ por $t_1 \otimes \dots \otimes t_n$, onde $t_j = 1$ se $\alpha_j = 0$, e $t_j = e_{(i-1)n+j}$ se $\alpha_j = 1$. ■

Segue então como conseqüência de tudo o que foi demonstrado nesta seção:

Teorema 4.12. *Sobre um corpo de característica* 0*, o T-ideal* $\mathbb{Z}_2^n$*-graduado de* $E^{\otimes n}$ *coincide com o T-ideal graduado de* $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E)$*, se* $n = 2k$*; e coincide com o T-ideal graduado de* $M_{2^k}(E)$ *no caso em que* $n = 2k + 1$*.*

Como conseqüência temos uma outra demonstração para o fato:

Corolário 4.13. *Em característica* 0*, o T-ideal de identidades ordinárias de* $E \otimes E$ *é igual ao T-ideal de* $M_{1,1}(E)$*.*

4.4 Identidades graduadas em característica positiva

Como sabemos que em característica 0, as álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ são PI-equivalentes, então também o são suas "potências tensoriais" de mesma ordem. No entanto sabemos que em característica positiva, diferente de 2, temos a continência estrita do T-ideal de $M_{1,1}(E)$ dentro do T-ideal de $E \otimes E$. Nesta seção analisamos o que se passa em característica positiva, diferente de 2, com as identidades graduadas das álgebras já mencionadas.

Daqui em diante, todos os corpos considerados são infinitos de característica maior que 2. Nesse caso, não podemos nos limitar a analisar as identidades multilineares da álgebra, mas temos de trabalhar com as multihomogêneas.

Ao longo de toda esta seção $p > 2$ denotará a característica do corpo K.

Lema 4.14. *Seja* $f(x_1, \ldots, x_k) \in K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2^n}$ *um polinômio multihomogêneo. Se* $s_{\partial(x_i)}$ *é ímpar e* x_i *possui grau maior que* 1 *em* f*, então* f *é conseqüência de* $c_n(x, y)$*. Caso contrário* $f \equiv \lambda x_1^{t_1} \ldots x_k^{t_k} \pmod J$*, onde* t_i *é o grau com que cada variável aparece em* f *e* $\lambda \in K$*. Em particular, se* $s_{\partial(x_i)} = 1$*,* x_i *deve aparecer com expoente* 1 *em* f*.*

Demonstração: A primeira afirmação é trivial e segue diretamente do corolário 4.4. Tal como no caso multilinear, como as variáveis comutam ou anticomutam entre si, elas podem ser rearranjadas em cada parcela a menos de sinal. ■

Lema 4.15. *As identidades graduadas de* $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ *são geradas pelo polinômio* $c_{2n}(x, y)$ *sobre um corpo de característica positiva, diferente de* 2*.*

Demonstração: Seja $f(x_1, \ldots, x_k)$ identidade multihomogênea gradudada da álgebra $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ que não é conseqüência de $c_{2n}(x, y)$. Então, módulo o T-ideal gerado por c_{2n}, o polinômio f pode ser escrito como:

$$f(x_1, \ldots, x_k) = x_1^{t_1} \ldots x_k^{t_k}.$$

Denote por $\alpha^{(i)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ o $\mathbb{Z}_2^{2n}$-grau de x_i. Se fazemos em f a mesma substituição standard sugerida na demonstração do lema 4.9, obtemos como resultado $e_{j_1} \ldots e_{j_l} D$, com $j_1 < \ldots < j_l$ e D invertível, portanto diferente de zero. ■

Praticamente repetindo os argumentos utilizados provamos também:

Lema 4.16. *As identidades graduadas de $M_{2^n}(E)$ são geradas pelo polinômio $c_{2n+1}(x, y)$ sobre um corpo de característica maior que dois.*

Lema 4.17. *Seja x uma variável de $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2^n}$, com $\mathbb{Z}_2^n$-grau $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ com s_α par e $\alpha_i = 1$ para algum $1 \leq i \leq n$. Seja $p > 2$ a característica do corpo base K de $E^{\otimes n}$. Então x^p é identidade graduada de $E^{\otimes n}$.*

Demonstração: Seja $a = \sum_{i=1}^{l} a_{i,1} \otimes \ldots \otimes a_{i,n}$ um elemento $\mathbb{Z}_2^{2n}$-homogêneo com o mesmo $\mathbb{Z}_2^{2n}$-grau da variável x. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha_1 = 1$.

Tratemos primeiro o caso $l \leq p$. Então no primeiro fator de cada parcela de a^p pelo menos um $a_{i,1}$ deve aparecer duas vezes, e portanto devemos obter 0, uma vez que os $a_{i,1}$ anticomutam entre si.

Suponhamos então que $l = p$. Pelo raciocínio anterior e pela identidade c_n, se há alguma parcela não nula, necessariamente ela deve ser $\lambda a_1 \ldots a_p$, onde $a_i = a_{i,1} \otimes \ldots \otimes a_{i,n}$ e λ é igual ao número de parcelas da forma $a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(p)}$ em a^p, $\sigma \in S_p$. No entanto a quantidade de vezes que esse termo aparecerá será $p!$, logo seu coeficiente será 0 em K. No caso em que $l > p$ aplica-se o mesmo raciocínio acima para cada subconjunto de p elementos de $\{1, 2, \ldots, l\}$, donde segue o resultado. ■

A demonstração do lema seguinte repete as idéias da demonstração do lema 4.14 e portanto será omitida.

Lema 4.18. *Seja P o T-ideal gerado por $c_n(x, y)$ e por x^p se o $\mathbb{Z}_2^n$-grau de x é tal como no lema anterior. Seja $f(x_1, \ldots, x_k) \in K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2^n}$ um polinômio multihomogêneo que não pertença a P, então $f \equiv \lambda x_1^{t_1} \ldots x_k^{t_k}$ (mod P), sendo $\lambda \neq 0$ e t_i o grau com que a variável x_i aparece em f. Além disso, $t_i = 1$ se $s_{\partial(x_i)} = 1$ e $t_i < p$ se $s_{\partial(x_i)} = 0$ e $\partial(x_i) \neq (0, \ldots, 0)$.*

Lema 4.19. *O T-ideal graduado de $E^{\otimes n}$ é P.*

Demonstração: Suponha $f(x_1, \ldots, x_k) = x_1^{t_1} \ldots x_k^{t_k}$, com os expoentes satisfazendo as condições do lema anterior. Vamos encontrar uma substituição das variáveis por elementos homogêneos de $E^{\otimes n}$ que resulte num elemento não nulo da álgebra.

Podemos dividir o conjunto $I_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ em três conjuntos $W_1 \cup W_2 \cup W_3$ (alguns possivelmente vazios), onde

- $W_1 = \{i \in I_k | \ \partial(x_i) = (0, \ldots, 0)\}$;
- $W_2 = \{i \in I_k \setminus W_1 | \ s_{\partial(x_i)}$ é par$\}$;
- $W_3 = I_k \setminus (W_1 \cup W_2)$.

As variáveis x_r, com $r \in W_1$ podem ser substituídas por $1_{E^{\otimes n}}$. As variáveis x_s com $s \in W_2$ podem ser substituídas por $a_{1,s} + a_{2,s} + \ldots + a_{p-1,s}$, onde $a_{i,s} = a_{i,s,1} \otimes \ldots \otimes a_{i,s,n}$ com $a_{i,s,j} = 1$ se $\partial(x_s)_j = 0$, e $a_{i,s,j} = e_{(s-1)p+i}$ caso contrário. As variáveis x_t, com $t \in W_3$ podem ser substituídas por $b_{1,t} \otimes \ldots \otimes b_{n,t}$, com $b_{i,t} = 1$ se $\partial(x_t)_i = 0$ e $b_{i,t} = e_{pt}$ caso contrário.

Com essas substituições, não aparecem coeficientes múltiplos de p, e os fatores em cada parcela ou estão no corpo ou podem ser arranjados na forma $e_{i_1} \ldots e_{i_q}$, com $i_1 < \ldots < i_q$. ■

Como conseqüência imediata dos lemas até agora demonstrados temos:

Teorema 4.20. *O T-ideal graduado de $E^{\otimes 2n}$ contém propriamente o T-ideal graduado de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$.*

Demonstração: A continência é trivial. Já a continência estrita segue do fato que x^p para a variável x de $\mathbb{Z}_2^{2n}$-grau $(1, 1, 0 \ldots, 0)$ é identidade de $E^{\otimes 2n}$, mas não de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$. ■

De maneira análoga, temos:

Teorema 4.21. *O T-ideal graduado de $E^{\otimes 2n+1}$ contém estritamente o T-ideal graduado de $M_{2^n}(E)$.*

A partir dos resultados desta seção, e estendendo as álgebras com que trabalhamos conseguimos algumas generalizações. Denotaremos por $L_{m,n}$ a álgebra

$$L_{m,n} := M_{2^{m-1},2^{m-1}}(E) \otimes E^{\otimes n}.$$

Essa álgebra é $\mathbb{Z}_2^{2m+n}$-graduada, combinando-se a $\mathbb{Z}_2^{2m}$-graduação de $M_{2^{m-1},2^{m-1}}(E)$ e a $\mathbb{Z}_2^n$-graduação de $E^{\otimes n}$.

Lema 4.22. *O T-ideal $\mathbb{Z}_2^{2m+n}$-graduado de $L_{m,n}$ é gerado por $c_{2m+n}(x,y)$ e por todos os monômios da forma x^p, $\partial(x) = \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m+n}) \in \mathbb{Z}_2^{2m+n}$, com a variável x satisfazendo as seguintes condições:*

1. $s_\alpha = 0$;

2. $\alpha_j = 1$, *para algum* $j \in \{2m+1, \ldots, 2m+n\}$.

Demonstração: A fim de simplificar a notação, escrevemos $\alpha = (\alpha^{(2m)}, \alpha^{(n)})$, onde $\alpha^{(k)} \in \mathbb{Z}_2^k$. Para verificar que tal álgebra satisfaz $c_{2m+n}(x,y)$, basta verificar que o mesmo se anula sobre qualquer elemento da base, uma vez que c_{2m+n} é multilinear. Assim, sendo $\alpha = \partial(x)$ e $\alpha' = \partial(y)$, substituímos x por $R \otimes s_1 \otimes \ldots \otimes s_n$, sendo R elemento $\mathbb{Z}_2^{2m}$-homogêneo da base de $M_{2^{m-1},2^{m-1}}(E)$ cujo $\mathbb{Z}_2^{2m}$-grau é $\alpha^{(2m)}$, $\partial_{\mathbb{Z}_2}(r) = s_{\alpha^{(2m)}}$ e $\partial_{\mathbb{Z}_2}(s_i) = \alpha_{2m+i}$. Da mesma forma, substituímos y por $R' \otimes s_1' \otimes \ldots \otimes s_n'$, satisfazendo as mesmas condições. Logo:

$$RR' \otimes s_1 s_1' \otimes \ldots \otimes s_n s_n' = \lambda = (-1)^{\langle \alpha^{(2m)}, \alpha'^{(2m)} \rangle + \langle \alpha^{(n)}, \alpha'^{(n)} \rangle} R'R \otimes s_1' s_1 \otimes \ldots \otimes s_n' s_n,$$

donde segue o resultado.

Para verificar que o T-ideal contém os monômios graduados da forma x^p, com as condições explicitadas acima, procede-se também de modo análogo ao que já foi feito ao longo desta seção, notando-se que se algum dos fatores em E do produto tensorial é ímpar, então a p-ésima potência do mesmo é zero. Para checar que o T-ideal é gerado por esses polinômios, notamos que todo polinômio multihomogêneo que não está no ideal gerado por esses polinômios é congruente, módulo o T-ideal gerado por esses polinômios, a um monômio de mesmo multigrau com algumas restrições quanto aos expoentes, a saber:

- o grau de x_i em f deve ser 1 se $s_{\partial(x_i)}$ é ímpar;

- o grau de x_i em f deve ser menor que p se o grau da variável x_i satisfaz as condições 1 e 2 enunciadas no lema.

E então basta tomar uma substituição standard para tal monômio que não o zere. As escolhas são as mesmas já feitas anteriormente, apenas fazendo uma mescla no produto tensorial agora. ■

Segue como conseqüência imediata:

Teorema 4.23. *Chamemos $\mathbb{Z}_2^{2n}$ de G. Então $T_G(L_{n,0}) \subsetneq T_G(L_{n-1,2}) \subsetneq \cdots \subsetneq T_G(L_{0,2n})$.*

Da mesma forma, denotando-se por $\mathcal{L}_{m,n}$ a álgebra $M_{2^m}(E) \otimes E^{\otimes n}$, temos uma $\mathbb{Z}_2^{2m+n+1}$-graduação induzida em $\mathcal{L}_{m,n}$. Praticamente repetindo-se o argumento empregado no lema 4.22 temos:

Lema 4.24. *O T-ideal $\mathbb{Z}_2^{2m+n+1}$-graduado de $\mathcal{L}_{m,n}$ é gerado por $c_{2m+n+1}(x,y)$ e por todos os monômios da forma x^p, $\partial(x) = \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m+n+1}) \in \mathbb{Z}_2^{2m+n+1}$, com a variável x satisfazendo as seguintes condições:*

1. $s_\alpha = 0$;

2. $\alpha_j = 1$, *para algum* $j \in \{2m+2, \ldots, 2m+n+1\}$.

Teorema 4.25. *Se consideramos um corpo K infinito de característica qualquer diferente de 2, temos $T_G(L_{n,0}) \subseteq T_G(\mathcal{L}_{n-1,1}) \subseteq T_G(L_{n-1,2}) \subseteq T_G(\mathcal{L}_{n-2,3}) \subseteq \ldots \subseteq T_G(L_{1,2n-2}) \subseteq T_G(\mathcal{L}_{0,2n})$. Além disso, ocorre igualdade entre quaisquer dois T-ideais vizinhos se, e somente se,* $\mathrm{char}K = 0$*, caso contrário todas as continências são estritas.*

E denotando o grupo $\mathbb{Z}_2^{2m+n+1}$ por $\mathcal{G}$, temos também:

Teorema 4.26. *Se consideramos um corpo K infinito de característica diferente de 2, temos $T_{\mathcal{G}}(\mathcal{L}_{n,0}) \subseteq T_{\mathcal{G}}(L_{n,1}) \subseteq T_{\mathcal{G}}(\mathcal{L}_{n-1,2}) \subseteq T_{\mathcal{G}}(L_{n-1,3}) \subseteq \ldots \subseteq T_{\mathcal{G}}(L_{1,2n-1}) \subseteq T_{\mathcal{G}}(\mathcal{L}_{0,2n})$. Além disso, ocorre igualdade entre quaisquer dois T-ideais vizinhos se, e somente se,* $\mathrm{char}K = 0$*, caso contrário todas as continências são estritas.*

Corolário 4.27. *Sobre um corpo infinito K de característica diferente de 2, temos sempre $T_{\mathcal{G}}(M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E) \otimes E) \supseteq T_{\mathcal{G}}(M_{2^n}(E))$; e a igualdade ocorre se, e somente se,* $\mathrm{char}K = 0$.

4.5 Relações entre os produtos tensoriais de matrizes

O nosso objetivo, ao longo desta seção será comparar, sobre um corpo infinito K de característica diferente de 2, os T-ideais graduados de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$ e de $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E) \otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$ com $k + l = n$. Para tanto, consideramos a mesma $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduação na álgebra $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$. Sejam k, l tais que $k + l = n$, então consideramos o subespaço vetorial $\mathcal{H}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n})}$ de $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E) \otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$ gerado pelos elementos da forma:

$$rA_{1,k}^{\alpha_1}\dots B_{k,k}^{\alpha_{2k}}\otimes r'A_{1,l}^{\alpha_{2k+1}}\dots B_{l,l}^{\alpha_{2n}},\ r\in E_{\alpha_1\dots+\alpha_{2k}} \text{ e } r'\in E_{\alpha_{2k+1}+\dots+\alpha_{2n}}.$$

É de verificação direta que $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E)\otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$ é igual a $\oplus_{\alpha\in\mathbb{Z}_2^{2n}}\mathcal{H}_\alpha$, e que $\mathcal{H}_\alpha\mathcal{H}_{\alpha'}\subset\mathcal{H}_{\alpha+\alpha'}$, $\alpha,\alpha'\in\mathbb{Z}_2^{2n}$, e portanto temos uma $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduação nesta álgebra.

Lema 4.28. *O polinômio $c_{2n}(x,y)$ é identidade graduada de $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E)\otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$.*

Demonstração: É conseqüência imediata de c_{2k} ser identidade da primeira álgebra no produto tensorial e de c_{2l} ser identidade da segunda. ■

Lema 4.29. *Seja x variável de $\mathbb{Z}_2^{2n}$-grau igual a $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{2n})$, com s_α par e ambos $\alpha_1+\dots+\alpha_{2k}$ e $\alpha_{2k+1}+\dots+\alpha_{2n}$ ímpares. Então x^p é identidade graduada de $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E)\otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$.*

Demonstração: Seja $a=a_1+\dots+a_t$ um elemento homogêneo da álgebra, cujo $\mathbb{Z}_2^{2n}$-grau é o mesmo que o da variável x, escrito como soma de elementos da base de $\mathcal{H}_{\partial_x}$. Então $a_i=r_iA_{1,k}^{\alpha_1}\dots B_{k,k}^{\alpha_{2k}}\otimes r_i'A_{1,l}^{\alpha_{2k+1}}\dots B_{l,l}^{\alpha_{2n}}$, com cada r_i,r_i' ímpares em E para $1\leq i\leq t$. Se $t<p$, em toda parcela de a^p pelo menos um dos a_i aparecerá pelo menos duas vezes, e no primeiro fator do produto tensorial r_i aparecerá pelo menos duas vezes, resultando em 0. Caso $t>p$, aplica-se um raciocínio análogo ao utilizado na demonstração do lema 4.17. ■.

Chamaremos $\alpha\in\mathbb{Z}_2^{2n}$ satisfazendo as condições do lema acima de $\mathbb{Z}_2^{2n}$-grau p-nil. Assim, como nos demais casos, encontramos os geradores para o T-ideal graduado de $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E)\otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$. A demonstração do lema a seguir é bastante análoga à demonstração do lema 4.14 e será omitida.

Lema 4.30. *Seja $f(x_1,\dots,x_s)$ um polinômio multihomogêneo em $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2^{2n}}$ que não pertence ao T-ideal gerado por $c_{2n}(x,y)$ e por todos os z^p, onde o $\mathbb{Z}_2^{2n}$-grau de z é p-nil, e denotemos por $\mathcal{J}$ o T-ideal gerado por tais polinômios. Então $f\equiv\lambda x_1^{u_1}\dots x_s^{u_s}$ (mod $\mathcal{J}$), onde $(u_1,\dots,u_s)$ é o multigrau de f, que satisfaz às seguintes condições:*

1. *se $s_{\partial(x_i)}$ é ímpar, então $u_i=1$;*
2. *se $\partial(x_i)$ é p-nil, então $u_i<p$.*

Considere agora um monômio $x_1^{u_1}\dots x_s^{u_s}$, tal como nas condições do lema acima. Através de um cálculo direto podemos ver que, fazendo-se substituições adequadas, podemos obter um elemento não nulo de $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E)\otimes M_{2^{l-1},{l-1}}(E)$. Basta substituir x_i por $r_iA_{1,k}^{\alpha_1}\dots B_{k,k}^{\alpha_{2k}}\otimes r'_iA_{1,l}^{\alpha_{2k+1}}\dots B_{l,l}^{\alpha_{2n}}$, onde $\alpha=\partial(x_i)$, caso $s_\alpha=1$, onde r_i e r'_i são e_{ip} ou 1, dependendo das paridades das somas parciais. Caso x_i possua $\mathbb{Z}_2^{2n}$-grau p-nil, então substituímos x_i por $a_1+\dots+a_p$, onde a_j é o quadrado tensorial de $(r_jA_{1,k}^{\alpha_1}\dots B_{l,l}^{\alpha_{2n}})$, sendo $r_j=e_{(i-1)p+j}$. Caso o grau de x_i não satisfaça nenhum dos casos anteriores, então ele pode ser simplesmente substituído pelo quadrado tensorial de $A_{1,k}^{\alpha_1}\dots B_{l,l}^{\alpha_{2n}}$.

Isso nos fornece o seguinte resultado.

Teorema 4.31. *O T-ideal graduado de $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E)\otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$ é igual a $\mathcal{J}$.*

Temos então dois corolários:

Corolário 4.32. *Seja K um corpo inifinito de característica diferente de 2, sejam k, l inteiros positivos com $k+l=n$, então o T-ideal $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduado de $M_{2^{k-1},2^{k-1}}(E)\otimes M_{2^{l-1},2^{l-1}}(E)$ contém o T-ideal $\mathbb{Z}_2^{2n}$-graduado de $M_{2^{n-1},2^{n-1}}(E)$. Além disso, ambos os T-ideais coincidem apenas se $\mathrm{char}K=0$.*

Corolário 4.33. *Considere k_1,k_2,l_1,l_2 inteiros positivos tais que*

1. $k_1+l_1=k_2+l_2$;
2. $k_1\geq l_1$ *e* $k_2\geq l_2$;
3. $k_1\neq k_2$

Se K é infinito, $\mathrm{char}K\neq 2$, então temos que $T_{\mathbb{Z}_2^{2n}}(M_{2^{k_1-1},2^{k_1-1}}(E)\otimes M_{2^{l_1-1},2^{l_1-1}}(E))$ coincide com $T_{\mathbb{Z}_2^{2n}}(M_{2^{k_2-1},2^{k_2-1}}(E)\otimes M_{2^{l_2-1},2^{l_2-1}}(E))$ se, e somente se $\mathrm{char}K=0$. Se $\mathrm{char}K=p>2$ nenhum dos T-ideais acima está sequer contido no outro.

Referências Bibliográficas

[1] S. M. Alves, P. Koshlukov, *Polynomial identities of algebras in positive characteristic*, J. Algebra, (2006), .

[2] S. S. Azevedo, P. Koshlukov *Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel J. Math. **128**, 157–176 (2002).

[3] S. S. Azevedo, M. Fidellis and P. Koshlukov, *Tensor Product Theorems in positive characteristic*, J. Algebra **276 (2)**, 836–845, (2004).

[4] S. S. Azevedo, M. Fidelis, P. Koshlukov, *Graded identities and PI equivalence of algebras in positive characteristic*, Commun. Algebra **33 (4)**, 1011–1022 (2005).

[5] P. M. Cohn, On the free product of associative rings, Math. Z., **71**, 380–398 (1959).

[6] Yu. A. Bahturin, M. V. Zaicev, *Graded algebras and graded identities*, Polynomial Identities and Combinatorial Methods, Dekker Series of Lecture Notes in Pure and Applied Maths **235**, (2003)

[7] A. Berele, *Examples and counterexamples for $M_{1,1}$ Embeddings*, J. Algebra, **172**, 379–384 (1995).

[8] A. Berele, *Supertraces and matrices over the Grassmann algebra*, Adv. Math. **108 (1)**, 77–90 (1994).

[9] M. Dehn, *Über die Grunddlagen der projektiven Geometrie und algemeine Zahlsysteme*, Math. Annalen **85**, 184–194 (1922).

[10] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of $M_{1,1}(E)$*, Israel J. Math. **80 (3)**, 323–335 (1992).

[11] O. M. Di Vincenzo, *On the Kronecker product of S_n-cocharacters for PI-algebras*, Linear Multilin. Algebra **23**, 193–143, (1988).

[12] O. M. Di Vincenzo, V. Nardozza, *$\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_2$-graded polynomial identities for $M_{k,l}(E) \otimes E$*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **108**, 27–39 (2000).

[13] O. M. Di Vincenzo, V. Nardozza, *Graded polynomial identities for tensor products by the Grassmann algebra*, Commun. Algebra **31 (3)**, 1453–1474 (2003).

[14] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer, Singapore, 1999.

[15] M. Fidelis, *Identidades polinomiais em álgebras T-primas*, Tese de doutorado, IMECC–UNICAMP, (2005).

[16] A. Kanel–Belov, L. Rowen, *Computational aspects of polynomial identities*, Research Notes in Mathematics, **9**, A. K. Peters, Wellesley, MA, 2005.

[17] I. Kaplansky, *Problems in the theory of rings*, Report of a Conference on Linear Algebras, June, 1956, in National Acad. of Sci. - National Research Council, Washington, Publ. **502**, 1–3 (1957).

[18] A. R. Kemer, *Ideals of Identities of Associative Algebras*, Translations of Mathematical Monographs, **87**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[19] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$*, Israel J. Math., **11**, 131–152 (1972).

[20] A. Regev, *Homomorphisms for tensor products of Grassmann algebras*, Ring Theory 1989: Israel Math. Conf. Proc., 1, 111–117, Weizmann, Jerusalem, 1989.

[21] A. Regev, *Tensor products of matrix algebras over the Grassmann algebra*, J. Algebra **133 (2)** 512–526 (1990).

[22] W. Specht, *Gesete in ringen*, Mathematische Zeitschrift, **52**, 557–589 (1950).