

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Adriano Zanin Zambom

Estimação Não Paramétrica da Trajetória
Percorrida por um Veículo Autônomo

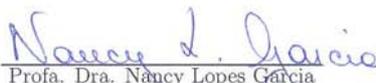
Dissertação apresentada junto ao Departamento de Estatística do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP, para obtenção do Título de MESTRE em Estatística.

Orientadora: Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Adriano Zanin Zambom e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 06 de Março de 2008.



Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia
Departamento de Estatística - UNICAMP
Orientadora

Banca Examinadora:

1. Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia (IMECC-UNICAMP) - orientadora
2. Prof. Dr. Dani Gamerman (DME-UFRJ)
3. Prof. Dr. José Mario Martinez (IMECC-UNICAMP)
4. Profa. Dra. Cláudia Monteiro Peixoto (IME-USP) - suplente
5. Prof. Dr. Roberto Andreani (IMECC/UNICAMP) - suplente

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves - CRB8a/5094

Z14e

Zambom, Adriano Zanin
Estimação não paramétrica da trajetória percorrida por um
veículo autônomo/

Adriano Zanin Zambom – Campinas, [S.P. :s.n.],2008.

Orientadora: Nancy Lopes Garcia;
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Estatística não paramétrica. 2. Ajuste de curva. 3. Otimização
matemática. 4. Convergência. I. Garcia, Nancy Lopes. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Título em inglês: Non-parametric curve estimation of an autonomous vehicle trajectory

Palavras-chave em inglês (Keywords): Non-parametric statistics. 2. Curve fitting. 3.
Mathematical optimization. 4. Convergence.

Área de Concentração: Probabilidade

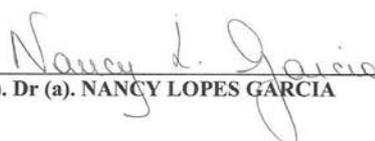
Titulação: Mestre em Estatística

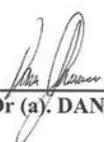
Banca Examinadora:

1. Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia (IMECC-UNICAMP)
2. Prof. Dr. Dani Gamerman(UFRJ)
3. Prof. Dr. José Mario Martinez (IMECC-UNICAMP)

Data da Defesa: 06/03/2008

Dissertação de Mestrado defendida em 06 de março de 2008 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.


Prof (a). Dr (a). NANCY LOPES GARCIA


Prof (a). Dr (a). DANI GAMERMAN


Prof (a). Dr (a). JOSÉ MARIO MARTINEZ PÉREZ

A meus pais, Carlos e Rosângela.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, por terem me criado de maneira maravilhosa, me possibilitando atingir cada um dos meus objetivos pessoais e profissionais, inclusive esta titulação.

A minha professora orientadora Nancy Lopes Garcia, pelo incentivo, pela paciência, dedicação e conhecimentos a mim transmitidos desde a graduação até hoje.

Ao professor Ronaldo Dias, pelas várias conversas esclarecedoras, e grande ajuda que deu neste trabalho.

Aos professores Dani Gamerman e José Mario Martinez, por participarem da banca examinadora, pelas sugestões dadas referentes a esta dissertação.

Aos meus amigos durante o difícil curso de mestrado em estatística na UNICAMP, pelos vários dias de estudo juntos, pela ajuda e incentivo de cada um.

A FAPESP e à CNPQ pelas bolsas concedidas.

Resumo

O objetivo deste estudo é encontrar a melhor trajetória para um veículo autônomo que tem que se locomover de um ponto A à um ponto B na menor distância possível evitando os possíveis obstáculos fixos entre esses pontos. Além disso, assumimos que existe uma distância segura r para ser mantida entre o veículo e os obstáculos. A locomoção do veículo não é fácil, isto é, o veículo não pode fazer movimentos abruptos e a trajetória tem que seguir uma curva suave. Obviamente, se não há obstáculos, a melhor rota é uma linha reta entre A e B . Neste trabalho propomos um método não paramétrico de encontrar o melhor caminho. Se há erro de medida, um estimador estocástico consistente é proposto no sentido de que quando o número de observações aumenta, a trajetória estocástica converge para a determinística.

Abstract

The objective of this study is to find a smooth function joining two points A and B with minimum length constrained to avoid fixed subsets. A penalized non-parametric method of finding the best path is proposed. The method is generalized to the situation where stochastic measurement errors are present. In this case, the proposed estimator is consistent, in the sense that as the number of observations increases the stochastic trajectory converges to the deterministic one. Two applications are immediate, searching the optimal path for an autonomous vehicle while avoiding all fixed obstacles between two points and flight planning to avoid threat or turbulence zones.

Sumário

1	Introdução - O Problema de Veículos Autônomos	1
2	Formulação do Modelo	4
2.1	Os Parâmetros de Sintonia (ψ, α, H)	7
2.2	Número de Nós	10
3	O Problema Estocástico	14
3.1	Visão Completa	14
3.2	Estudo assintótico da Curva Estimada	20
3.3	Exemplos Numéricos Para a Visão Completa	25
3.4	Visão Parcial	25
3.5	Observações Dependentes	35
3.6	Planejamento GPS	39
4	Conclusão	43

Captítulo 1

1 Introdução - O Problema de Veículos Autônomos

A seguinte definição pode ser encontrada no DARPA Grand Challenge (<http://www.darpa.mil/grandchallenge>): “Um veículo autônomo terrestre é um veículo que navega e dirige inteiramente sozinho sem nenhum motorista humano e nenhum controle remoto. Através do uso de vários sensores e sistemas de posicionamento, o veículo determina todas as características do seu meio necessárias para que ele possa cumprir a tarefa que lhe foi assinalada”.

Neste trabalho, assumimos que um veículo autônomo tem que se mover de um ponto A até um ponto B em uma trajetória com o menor comprimento possível evitando todos os obstáculos fixos entre esses pontos. Em diversos problemas práticos existem obstáculos pelo caminho como rochas, postes, depressões, áreas de turbulência, etc. Aplicações desse tipo são atualmente muito importantes pelo fato de que a robótica tem evoluído muito e pesquisas nessa área são constantes. Robôs domésticos, de exploração a outros planetas e lugares onde o homem não pode chegar estão se tornando cada vez mais próximos da realidade e sua autonomia é de grande relevância. Uma outra aplicação similar é encontrar planos de vôo evitando zonas perigosas ou de turbulência.

Vamos supor que a trajetória possa ser representada pelo gráfico de uma função suave. Portanto, queremos descrever uma trajetória entre $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, dois pontos no \mathbb{R}^2 , com $x_a < x_b$. Procuramos uma função suave $f : [x_a, x_b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_a) = y_a$ e $f(x_b) = y_b$, $\text{Graf}(f)$ tem comprimento mínimo, restrito a $\text{Graf}(f) \cap \Gamma = \emptyset$ onde $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ representa o conjunto dos obstáculos. Note que a dirigibilidade do veículo não é fácil, isto é, ele não pode fazer movimentos abruptos e a trajetória deve seguir uma curva suave. Pode-se encontrar mais detalhes de veículos autônomos no site do “DARPA Grand Challenge”. Obviamente, se não houver obstáculos no caminho, uma linha reta entre os dois pontos é a melhor solução. Para resolver este problema propomos um procedimento adaptativo de otimização penalizada com expansão em funções base que penaliza soluções que não

cumprem as restrições. O método é generalizado para o caso onde o conjunto Γ não é conhecido mas é observado através de um mecanismo aleatório que adiciona um ruído.

Uma vasta literatura tem aparecido nas últimas duas décadas sobre planejamento de movimento para robôs móveis, como carros, sem controle humano, veja “Unmanned Aerial Vehicles” (UAV). Veja os livros [14, 20, 7] para material introdutório, e [15, 16] para resultados recentes. Muitos métodos determinísticos tem sido propostos para problemas de evitar obstáculos. Eles podem ser classificados em métodos de procura básica, métodos geométricos, métodos de controle teóricos e métodos de campo potenciais artificiais. As técnicas atuais usam programação dinâmica, dividindo o espaço de estados em células de dimensões específicas e coloca restrições nestas células para prescrever o caminho. O custo computacional deste procedimento cresce quando o tamanho das células diminui e o número de caminhos possíveis aumenta. Mais ainda, os caminhos devem ser suavizados para evitar mudanças de direção abruptas. Quando as áreas de perigo são circulares a solução mais simples para ambos os problemas consiste em segmentos de linhas retas e arcos dos discos, e os possíveis seguimentos são facilmente enumerados por um algoritmo de busca. Asseo (1998) propõe um algoritmo baseado em uma construção geométrica para achar rotas com segmentos lineares tangentes a periferia dos círculos de perigo e segmentos circulares ao longo dos círculos de periferia para obter a menor trajetória entre um ponto de partida e um ponto de destino usando o princípio de otimalidade.

Entretanto, o método de penalização que propomos é bem mais geral. Não apenas ele pode lidar com áreas de perigo não circulares, mas também é mais eficiente que o método geométrico, o termo de penalização evita o cálculo de todos os caminhos que não cumprem as restrições. Mais ainda, a expansão em funções base reduz a dimensionalidade do problema e, na prática, apenas poucos coeficientes tem que ser encontrados. Outra vantagem é que podemos facilmente lidar com áreas de perigo que surgem no meio do caminho sem aumentar o tempo de percurso. Também, um aspecto que é estudado aqui é a introdução da possibilidade de erros de medida não homogêneos no lugar das áreas de perigo.

Problemas de otimização para trajetórias conectando dois pontos são importan-

tes do ponto de vista matemático e tem aplicações em várias ciências aplicadas. Um destes problemas, que tem aplicações à análise não linear e química computacional, é o chamado “Mountain-Pass Problem”. Existe uma vasta literatura sobre o “Mountain-Pass Problem”, o livro de Jabri (2003) tem uma boa introdução sobre o tema. Uma diferença crucial entre o problema proposto neste trabalho e o “Mountain-Pass Problem” é que queremos encontrar a melhor trajetória contínua e diferenciável restrita a evitar conjuntos fixos ao invés de procurar pontos críticos no caminho.

Neste trabalho, analisaremos o problema em dois cenários diferentes: determinístico e estocástico. Na Seção 2 o caso determinístico é analisado onde assumimos que o veículo tem visão perfeita e pode encontrar os obstáculos sem erro. Neste caso, o caminho é obtido resolvendo um problema de otimização penalizada. Na Seção 3.1, consideramos que cada obstáculo é lido com um erro e uma solução estocástica é encontrada. No caso de leituras múltiplas e independentes a solução estocástica converge para a solução do caso determinístico. Além disso, na Seção 3.4, consideramos o caso onde o veículo não enxerga todo o campo. Neste caso, a trajetória é construída por partes usando o mesmo algoritmo. Idéias similares foram usadas pelo time Caltech no DARPA Challenge em 2005, veja Cremean et al. (2006).

Captítulo 2

2 Formulação do Modelo

Sejam $A = (x_a, y_a)$ o ponto de partida e $B = (x_b, y_b)$ o ponto de chegada, em \mathbb{R}^2 , com $x_a < x_b$. Sem perda de generalidade podemos considerar A como sendo a origem $(0, 0)$ e B um ponto na eixo das abscissas $(b, 0)$. Se não, uma transformação ortogonal do sistema de coordenadas leva um sistema ao outro. Para uma função $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e $f(b) = 0$, então $\text{Graf}(f) = \{(x, y) : x \in [0, b] \text{ e } y = f(x)\}$ representa uma trajetória no plano do ponto A ao ponto B . Para sermos precisos no que chamamos de trajetória suave, consideramos apenas funções f que pertencem ao espaço Sobolev $\mathcal{H}_2^2 := \{f : f \text{ abs. contínua e } \int (f'')^2 < \infty\}$. Este é um espaço infinito-dimensional, entretanto pode-se assumir que f é aproximada por uma função que pertence a um espaço \mathcal{H}_K finito-dimensional que é gerado por K (fixo) funções-base, tais como expansões de Fourier, Wavelets, B-Splines, Natural-Splines. Veja, por exemplo, Silverman (1986), Kooperberg and Stone (1991), Vidakovic (1999), Dias (1998) e Dias (2000).

Seja $\Gamma \in \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto. O objetivo é encontrar uma função suave pertencente a \mathcal{H}_2^2 satisfazendo as seguintes condições:

1. $f(0) = 0$ and $f(b) = 0$, ou seja, a função deve ter início em $(0, 0)$ e final em $(b, 0)$.
2. $\text{Graf}(f) \cap \Gamma = \emptyset$.
3. A função f minimiza a trajetória no sentido de que o comprimento de $\text{Graf}(f)$ é mínimo.

Para qualquer f diferenciável, o comprimento de $\text{Graf}(f)$ é dado por

$$\int_0^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt. \quad (2.1)$$

Portanto, queremos encontrar $f \in \mathcal{H}_2^2$ que minimiza

$$Q(f) = \int_0^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \quad (2.2)$$

com as restrições $\text{Graf}(f) \cap \Gamma = \emptyset$, $f(0) = 0$ e $f(b) = 0$.

Note que o problema de minimização com restrições pode ser visto como um problema de minimização com penalização onde a penalidade é 0 ou ∞ de acordo com $\text{Graf}(f) \cap \Gamma = \emptyset$ ou não. Ou seja, queremos uma solução de

$$\min_{f \in \mathcal{H}_2^2} \int_0^b \sqrt{(1 + f'(t)^2)} dt + J^*(f) \quad (2.3)$$

onde

$$J^*(f) = \begin{cases} 0, & \text{se } \text{Graf}(f) \cap \Gamma = \emptyset \\ \infty, & \text{se } \text{Graf}(f) \cap \Gamma \neq \emptyset. \end{cases} \quad (2.4)$$

A solução para este tipo de penalização, já que estamos nos restringindo a funções pertencentes a \mathcal{H}_2^2 , é bastante difícil e dependendo de Γ pode não ter solução.

Por razões de simplicidade, de agora em diante consideraremos que temos L pontos em \mathbb{R}^2 com coordenadas $\xi_i = (w_i, v_i)$, $i = 1, \dots, L$ e que nossas áreas de perigo são bolas abertas centradas nos obstáculos. Assim, denote por $N = (\xi_1, \dots, \xi_L)$ e

$$\Gamma = \cup_{i=1}^L B(\xi_i, r) \quad (2.5)$$

onde $B(\xi, r) = \{z \in \mathbb{R}^2; d(z, \xi) < r\}$ e d é a distância Euclidiana. Em geral, considera-se Γ um conjunto aberto, pois se não, o mínimo em (2.8) é não atingível.

Para solucionar este problema, primeiro aproximamos a penalização pelo funcional suave

$$J_{\psi, \alpha, H}(f) = \psi \Phi(Z_\alpha + \sqrt{H}(r - d(f, N))) \quad (2.6)$$

onde $d(f, N) = \inf\{d(z, \xi); z \in \text{Graf}(f), \xi \in N\}$, Φ é a distribuição acumulada Gaussiana padrão e (ψ, α, H) são parâmetros de sintonia, Z_α é o $(1 - \alpha)$ -percentil da distribuição Gaussiana padrão. Esta penalização foi escolhida porque $J_{\psi, \alpha, H}(f) \rightarrow J^*(f)$ quando $\psi \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$ e $H \rightarrow \infty$.

Segundo, fixamos K e a sequência de nós $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{K-2})$ e consideramos f pertencente ao espaço \mathcal{H}_K gerado por B -splines com sequência interior de nós \mathbf{t} . Isto é,

$$f(x) = f_{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{j=1}^K \theta_j B_j(x) \quad (2.7)$$

onde B_j são as bases de B -splines cúbicos (ordem 4) e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_K)$ é o vetor de coeficientes desconhecidos.

A Figura 2 apresenta 6 funções base B -splines para nós igualmente espaçados no intervalo $[0,1]$. Da figura, podemos ver algumas das propriedades computacionais apresentadas pelos B -splines. Eles são splines que tem o mínimo suporte possível. Em outras palavras, B -splines são zero em um grande conjunto. Mais ainda, uma avaliação estável de B -splines com a ajuda de relação de recorrência é possível. Para detalhes, veja de Boor (1978).

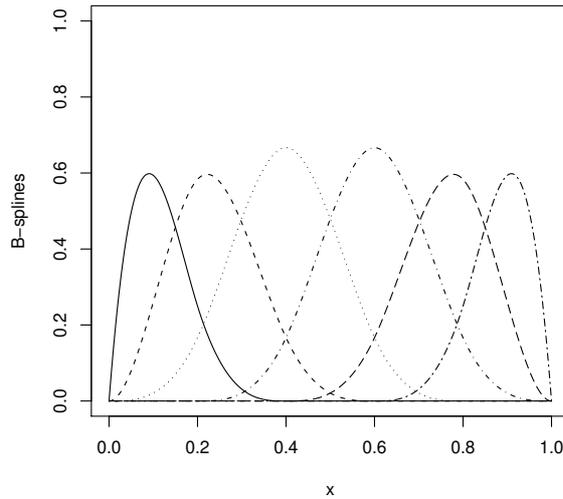


Figura 1: Funções Base com 6 nós em $\mathbf{t} = (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1)$

Portanto, queremos encontrar $f_{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{H}_K$, ou equivalentemente $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_K) \in$

\mathbb{R}^K que minimiza

$$Q_{\alpha,\psi,r,H}(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^b \left(1 + \left(\sum_{j=1}^K \theta_j B_j'(t) \right)^2 \right)^{1/2} dt + \psi \Phi \left(Z_\alpha + \sqrt{H} \left(r - d \left(\sum_{j=1}^K \theta_j B_j(\cdot), N \right) \right) \right), \quad (2.8)$$

tal que $f_{\boldsymbol{\theta}}(0) = 0, f_{\boldsymbol{\theta}}(b) = 0$.

Note que o método com penalização é adequado já que ele nos permite mudar o problema não linear com restrições de encontrar uma função, para um problema não linear sem restrição de encontrar um vetor em \mathbb{R}^{K-2} . Este problema foi resolvido usando a função *fminunc* do MATLAB que é baseada no método bem conhecido BFGS Quase Newton com procedimento de procura linear quadrática e cúbica.

2.1 Os Parâmetros de Sintonia (ψ, α, H)

Note que os funcionais J^* e $J_{\psi,\alpha,H}$ dependem da função f apenas através da sua distância do campo de obstáculos $(d(f, N))$. A função $J_{\psi,\alpha,H}$ é uma analogia contínua de J^* . Os papéis dos parâmetros de sintonia (ψ, α, H) são: $\psi\alpha = J_{\psi,\alpha,H}(f)$ quando f é tal que $d(f, N) = r$, $\psi = J_{\psi,\alpha,H}(f)$ quando f é tal que $d(f, N) = 0$ e H controla a inclinação de $J_{\psi,\alpha,H}(f)$ quando f é tal que $d(f, N) = r$. Eles devem ser escolhidos de forma que quando a trajetória tenta violar a restrição que a distância entre o veículo e os obstáculos tem que ser maior ou igual a r , a penalização é tão maior que o ganho na distância que esta trajetória não é aceita. Figura 2 mostra o efeito do parâmetro H em $J_{\psi,\alpha,H}(f)$, para uma melhor visualização fixamos $\psi\alpha = 30$. Entretanto, para computação e exemplos numéricos usaremos $\psi\alpha = 0.05$.

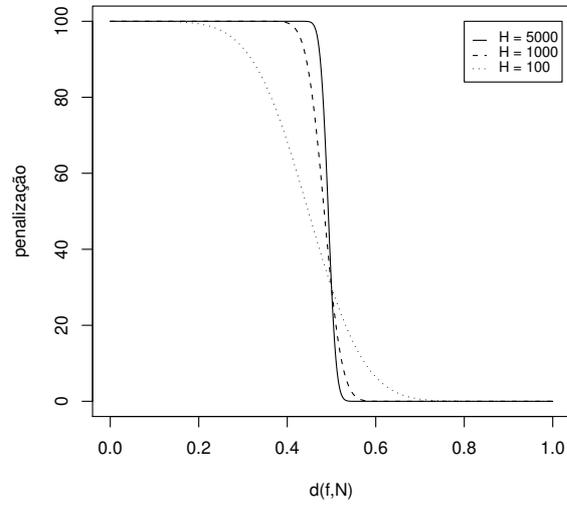


Figura 2: Efeito do parâmetro de sintonia H na função de penalização $J_{\psi,\alpha,H}(f)$ para $\psi = 100$, $\alpha = 0.3$, $r = 0.5$

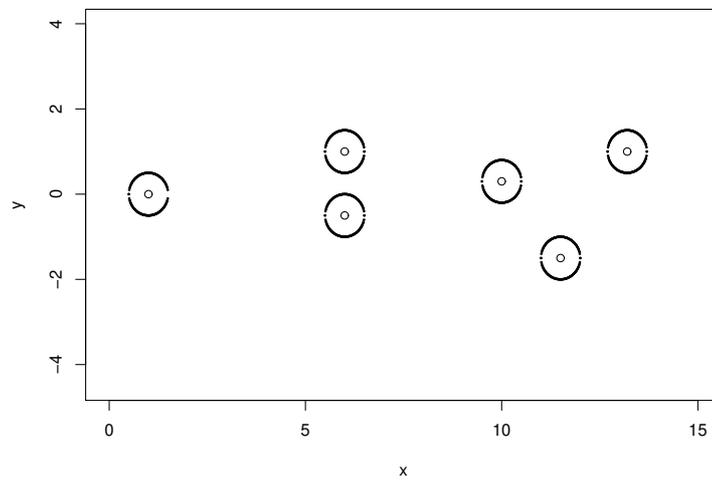


Figura 3: Primeiro Campo de Obstáculos

α	$3.333 * 10^{-9}$	$3.333 * 10^{-8}$	$3.333 * 10^{-7}$	$3.333 * 10^{-6}$
H				
500	15.29637	15.29671	15.29717	15.29781
1000	15.29076	15.29179	15.29303	15.29454
5000	15.28292	15.28317	15.28353	15.28404
10000	15.28216	15.28223	15.28233	15.28249
20000	15.28202	15.28202	15.28204	15.28206
40000	15.28202	15.28201	15.28201	15.28201
50000	15.28202	15.28201	15.28201	15.28201
150000	15.28202	15.28201	15.28201	15.28201
1500000	15.28202	15.28201	15.28201	15.28201
15000000	15.28201	15.28201	15.28201	15.28201

Tabela 1: $\min_{\theta} Q_{\alpha,\psi,r,H}$ para o primeiro campo de obstáculos apresentado na Figura 3. O tamanho da trajetória escolhida sem penalização para $H = 500$ é 15.29503 e para todos os outros valores de H , é 15.28201.

α	$1.666 * 10^{-9}$	$1.666 * 10^{-8}$	$1.666 * 10^{-7}$	$1.666 * 10^{-6}$
H				
500	30.2067	30.54674	30.2067	30.2067
1000	30.2067	30.2067	30.2067	30.2067
5000	30.19141	30.19238	30.19354	30.19495
10000	30.18695	30.1876	30.18842	30.18947
20000	30.18436	30.18467	30.18510	30.18568
40000	30.18333	30.18343	30.18356	30.18377
50000	30.18321	30.18326	30.18335	30.18348
300000	30.18308	30.18308	30.18308	30.18308
3000000	30.18308	30.18308	30.18308	30.18308
30000000	30.18308	30.18308	30.18308	30.18308

Tabela 2: $\min_{\theta} Q_{\alpha,\psi,r,H}$ para o segundo campo de obstáculos apresentado na Figura 4. O tamanho da trajetória escolhida sem penalização para $H = 500, 1000$ é 30.2067 e para todos os outros valores de H , é 30.18308.

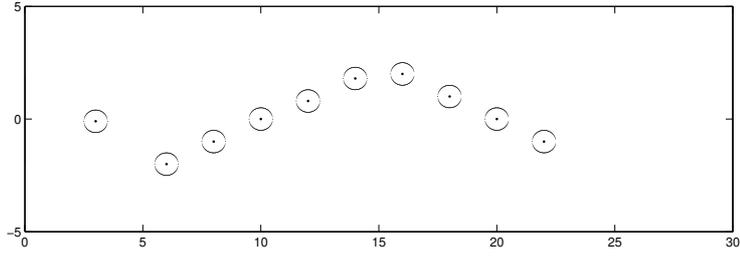


Figura 4: Segundo Campo de Obstáculos

α	$8.333 * 10^{-10}$	$8.333 * 10^{-9}$	$8.333 * 10^{-8}$	$8.333 * 10^{-7}$
H				
500	60.0116	60.0118	60.0120	60.0123
6000	60.0102	60.0102	60.0102	60.0103
60000	60.0098	60.0098	60.0098	60.0098
600000	60.0097	60.0097	60.0097	60.0097
6000000	60.0096	60.0096	60.0096	60.0096
60000000	60.0096	60.0096	60.0096	60.0096

Tabela 3: $\min_{\theta} Q_{\alpha, \psi, r, H}$ para o terceiro campo de obstáculos apresentado na Figura 5. O tamanho da trajetória escolhida sem penalização para $H = 500, 6000$ é 60.0102 e para todos os outros valores de H , é 60.0096.

As Tabelas 1, 2 e 3 apresentam alguns resultados de simulações para 3 campos de obstáculos dados pelas Figuras 3, 4 e 5. Estes campos apresentam graus de dificuldade diferentes para o veículo encontrar a melhor trajetória. Note que quando ψ cresce (α diminui, lembre-se que $\psi = 0.05/\alpha$) e/ou H cresce chegamos cada vez mais perto da melhor trajetória até que se estabiliza. Destes resultados de simulação, escolhemos $\psi = 10^6 b$, $\alpha = 0.05/\psi$ e $H = 10^6 b$.

2.2 Número de Nós

Na verdade, em teoria de aproximação, um dos problemas mais desafiadores é como selecionar a dimensão do espaço aproximante. Um problema similar é encon-

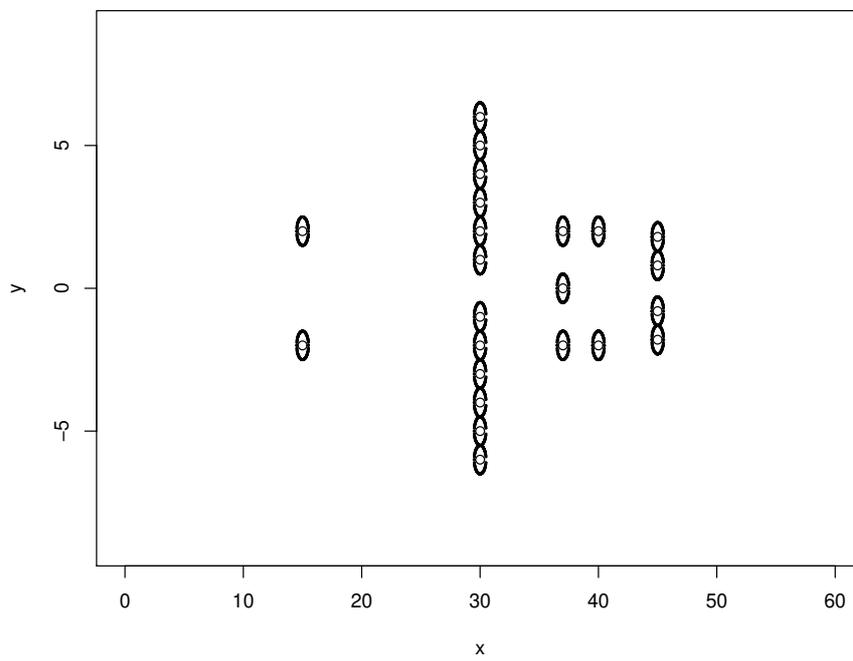


Figura 5: Terceiro Campo de Obstáculos

trado no campo de processamento de imagem onde o nível de resolução precisa ser determinado apropriadamente. Em estimação de densidades e regressão vários autores sugerem algoritmos para uma boa escolha da dimensão do espaço aproximante como uma função do tamanho da amostra, veja por exemplo Gu (1993), Antoniadis (1994), De Vore, Petrova and Temlyakov (2003), Bodin, Villemoes and Wahlberg (2000), Khon, Marron and yau (2000). Estes métodos não se aplicam diretamente ao nosso problema. As Figuras 6 a 12 apresentam vários campos de obstáculos com diferentes graus de dificuldade de se encontrar uma trajetória. Estes campos foram construídos para testar a capacidade do algoritmo dado que a melhor trajetória não é “fácil”. Podemos ver que aumentar o número de nós além de 4 não traz nenhuma melhora. Com 3 ou 4 nós obtemos a “melhor” possível f_{θ} . Se necessário, a escolha do número de nós pode ser bastante adaptativa.

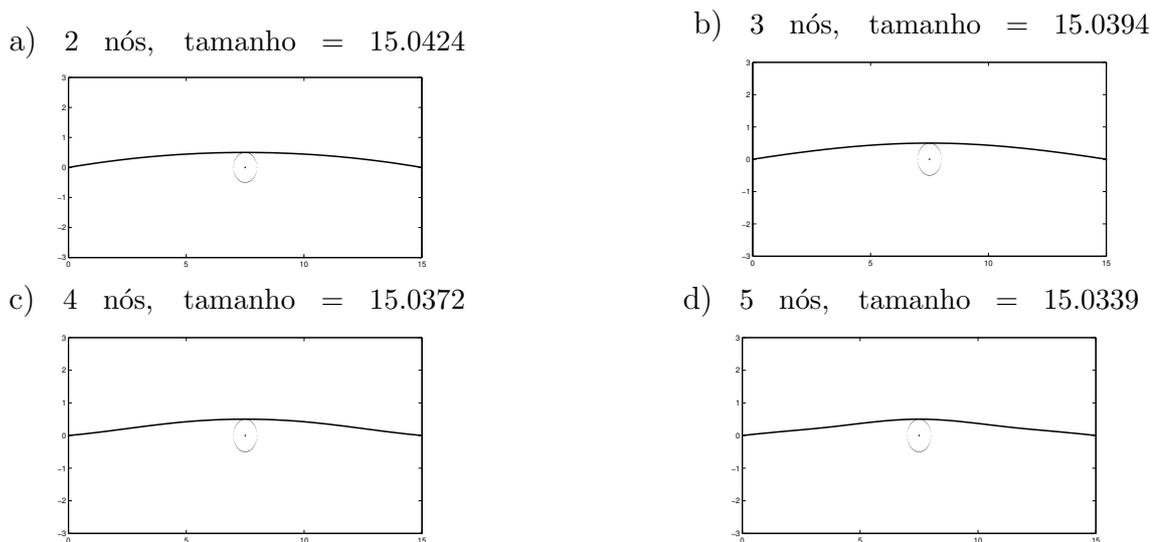
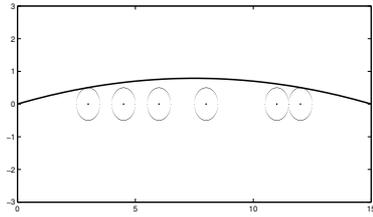
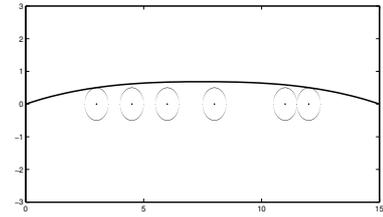


Figura 6: “Melhor” trajetória estimada com 2, 3, 4, 5 nós e os respectivos comprimentos.

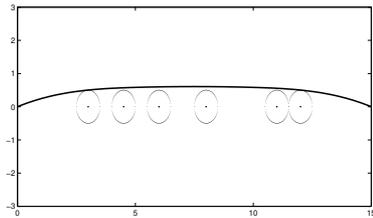
a) 2 nós, tamanho = 15.1076



b) 3 nós, tamanho = 15.0977



c) 4 nós, tamanho = 15.0966



d) 5 nós, tamanho = 15.0965

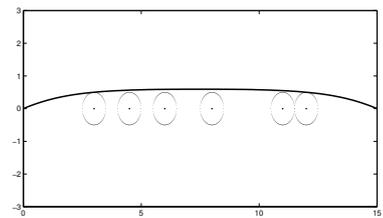
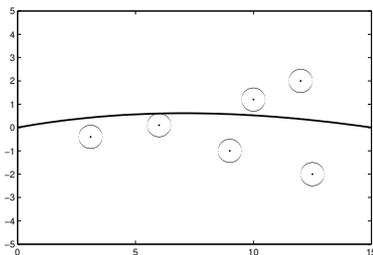
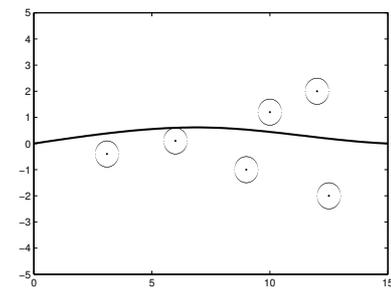


Figura 7: “Melhor” trajetória estimada com 2, 3, 4, 5 nós e os respectivos comprimentos.

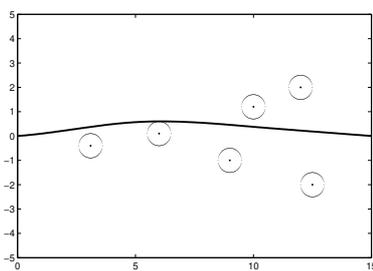
a) 2 nós, tamanho = 15.0647



b) 3 nós, tamanho = 15.0575



c) 4 nós, tamanho = 15.0539



d) 5 nós, tamanho = 15.0538

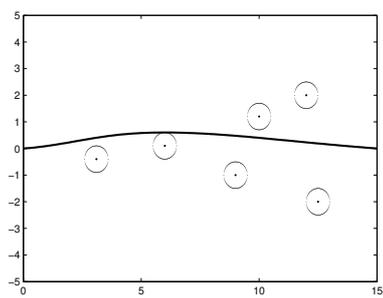
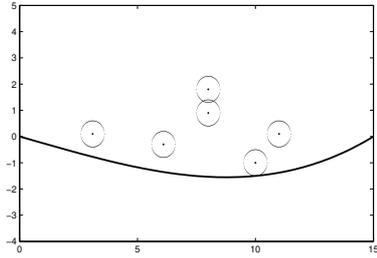
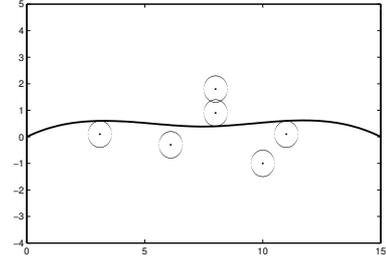


Figura 8: “Melhor” trajetória estimada com 2, 3, 4, 5 nós e os respectivos comprimentos.

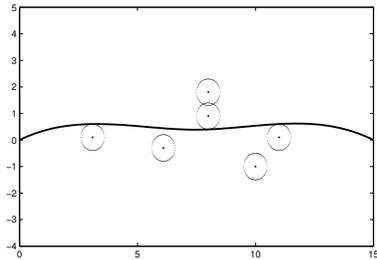
a) 2 nós, tamanho = 15.4207



b) 3 nós, tamanho = 15.1738



c) 4 nós, tamanho = 15.1421



d) 5 nós, tamanho = 15.1413

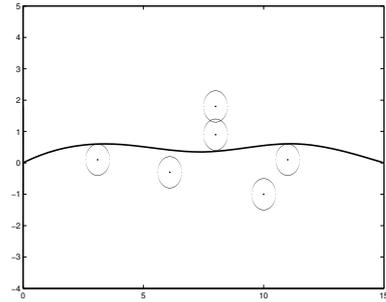


Figura 9: “Melhor” trajetória estimada com 2, 3, 4, 5 nós e os respectivos comprimentos.

Captítulo 3

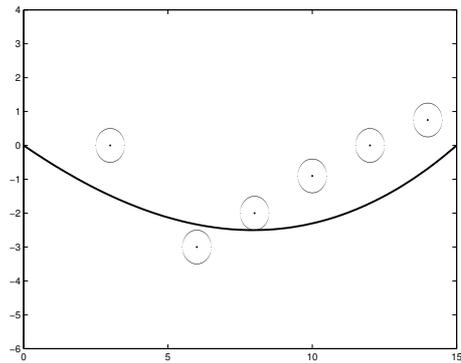
3 O Problema Estocástico

3.1 Visão Completa

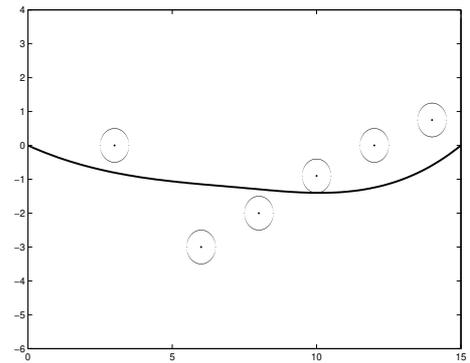
Na seção anterior, assumimos que o conjunto Γ era determinístico, isto é, que os sensores do veículo podiam ver o campo todo e detectar com certeza onde estavam os obstáculos. Isto não é realístico, pois sempre há um erro de medida envolvido. Nesta seção, supomos que o veículo pode ver todo o campo de obstáculos (visão parcial será considerada na Seção 3.4), mas invés de ver N , ele vê $\eta = N + \varepsilon$ onde $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_L)$ é o erro de medição. Especificamente, assumiremos que

$$\Gamma = \cup_{\ell=1}^L B((w_\ell, v_\ell), r)$$

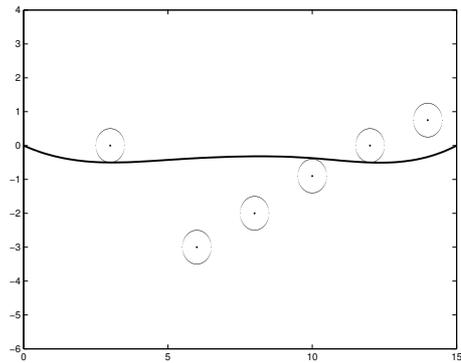
a) 2 nós, tamanho = 16.0450



b) 3 nós, tamanho = 15.4207



c) 4 nós, tamanho = 15.1349



d) 5 nós, tamanho = 15.1342

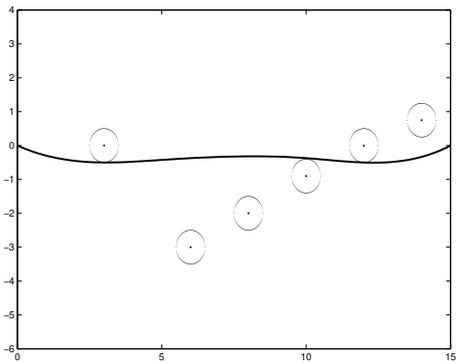
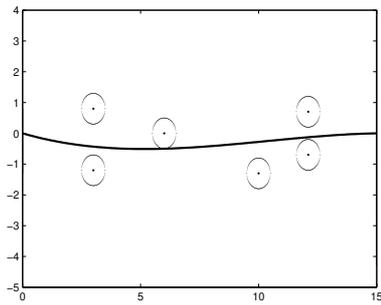
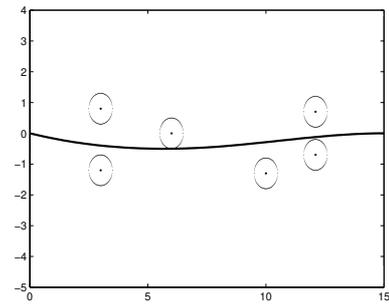


Figura 10: “Melhor” trajetória estimada com 2, 3, 4, 5 nós e os respectivos comprimentos.

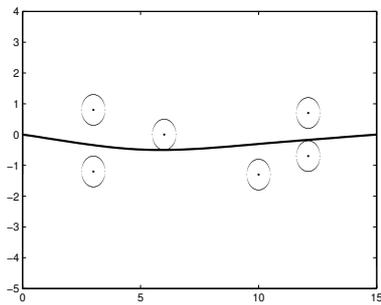
a) 2 nós, tamanho = 15.0489



b) 3 nós, tamanho = 15.0447



c) 4 nós, tamanho = 15.0380



d) 5 nós, tamanho = 15.0367

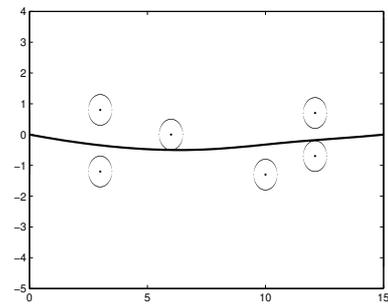
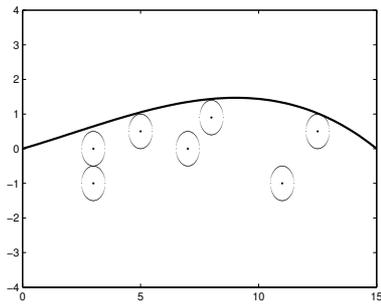
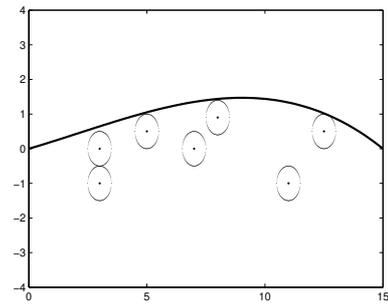


Figura 11: “Melhor” trajetória estimada com 2, 3, 4, 5 nós e os respectivos comprimentos.

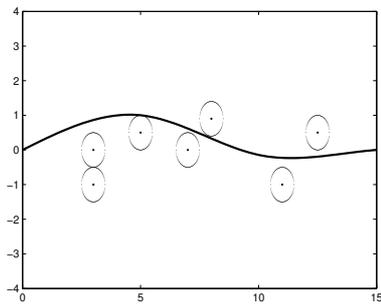
a) 2 nós, tamanho = 15.3806



b) 3 nós, tamanho = 15.3781



c) 4 nós, tamanho = 15.2829



d) 5 nós, tamanho = 15.2816

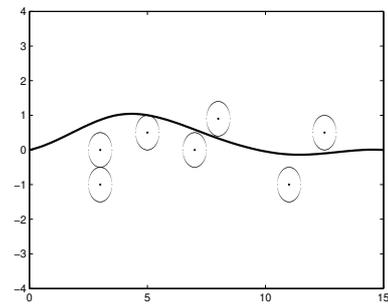


Figura 12: “Melhor” trajetória estimada com 2, 3, 4, 5 nós e os respectivos comprimentos.

mas as observações são $(W_\ell, V_\ell) = (w_\ell, v_\ell) + (\varepsilon_{\ell 1}, \varepsilon_{\ell 2})$, $\ell = 1, \dots, L$ com $(\varepsilon_{\ell 1}, \varepsilon_{\ell 2}) \sim N_2((0, 0), \Sigma_\ell)$, $\ell = 1, \dots, L$ variáveis aleatórias independentes com matriz de co-variância dada por Σ_ℓ (que pode depender do obstáculo (w_ℓ, v_ℓ)) dada por

$$\Sigma_\ell = \begin{pmatrix} \sigma_{\ell,1}^2 & \rho\sigma_{\ell,1}\sigma_{\ell,2} \\ \rho\sigma_{\ell,1}\sigma_{\ell,2} & \sigma_{\ell,2}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Este cenário incorpora várias situações práticas, por exemplo grande variância para pontos escuros, variância crescente dependendo da distância do obstáculo, etc.

Mais ainda, temos para cada obstáculo, n leituras independentes. Portanto, nossos dados são compostos de n leituras do processo pontual $\eta_i = \{(W_{1,i}, V_{1,i}), \dots, (W_{L,i}, V_{L,i})\}$ para $i = 1, \dots, n$. Denote $\mathbf{W}_\ell = (W_{\ell,1}, \dots, W_{\ell,n})$ e $\mathbf{V}_\ell = (V_{\ell,1}, \dots, V_{\ell,n})$, $\ell = 1, \dots, L$.

Para uma sequência $\gamma_n \in (0, 1)$ fixa, o estimador proposto para f_θ é a função

$$f_{\hat{\theta}}^{\gamma_n}(x) = \sum_{j=1}^K \hat{\theta}_j B_j(x) \quad (3.10)$$

onde $\hat{\theta}$ é a solução do problema de minimização

$$\hat{\theta} = \arg \min Q_{\alpha, \psi, r, H, n}(\theta) \quad (3.11)$$

restrito a $f_{\hat{\theta}}^{\gamma_n}(0) = 0$, $f_{\hat{\theta}}^{\gamma_n}(b) = 0$, onde

$$Q_{\alpha, \psi, r, H, n}(\theta) = \int_0^b \left(1 + \left(\sum_{j=1}^K \theta_j B_j'(t) \right)^2 \right)^{1/2} dt \quad (3.12)$$

$$+ \psi \Phi \left(Z_\alpha + \sqrt{H} (r - d(\sum_{j=1}^K \theta_j B_j(\cdot), \Gamma_n^{\gamma_n})) \right),$$

(cf. com Equação 2.8). O conjunto $\Gamma_n^{\gamma_n}$ é definido por

$$\Gamma_n^{\gamma_n} = \bigcup_{\ell=1}^L G^{\gamma_n}(\mathbf{W}_\ell, \mathbf{V}_\ell) \quad (3.13)$$

onde para cada $\ell = 1, \dots, L$, $G^{\gamma_n}(\mathbf{W}_\ell, \mathbf{V}_\ell)$ é uma $100(1 - \gamma_n)\%$ *elipse de confiança* baseada nas n leituras para o ℓ th ponto $(\mathbf{W}_\ell, \mathbf{V}_\ell)$ definida como a elipse formada pelos pontos (x, y) que satisfazem a equação

$$n((\bar{\mathbf{W}}_\ell, \bar{\mathbf{V}}_\ell) - (x, y))^t \Sigma_\ell^{-1} ((\bar{\mathbf{W}}_\ell, \bar{\mathbf{V}}_\ell) - (x, y)) \leq \chi_2^2(\gamma_n)$$

onde $\overline{\mathbf{W}}_\ell$ e $\overline{\mathbf{V}}_\ell$ são as médias amostrais dos vetores \mathbf{W}_ℓ e \mathbf{V}_ℓ respectivamente, $\chi_2^2(\gamma_n)$ é o $100\gamma_n$ -percentil da distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade. Estas elipses estão centradas na média amostral $(\overline{\mathbf{W}}_\ell, \overline{\mathbf{V}}_\ell)$ e tem eixos $(\sqrt{\chi_2^2(\gamma_n)}\sqrt{\lambda_{\ell,j}/ne_{\ell,j}}, -\sqrt{\chi_2^2(\gamma_n)}\sqrt{\lambda_{\ell,j}/ne_{\ell,j}})$, onde $\lambda_{\ell,j}$, $j = 1, 2$ são os autovalores de Σ_ℓ e $e_{\ell,j}$ são os autovetores correspondentes. Aqui $\Gamma_n^{\gamma_n}$ pode ser visto como um engordamento do processo pontual $\bar{\eta} = \frac{1}{n}(\eta_1 + \dots + \eta_n)$ correspondendo a variabilidade ocasionada por erros de medida dos sensores. Os limites de confiança $1 - \gamma_n$ serão escolhidos cuidadosamente para obtermos convergência forte dos estimadores (Teorema 3.26).

A Figura 13 mostra elipses de confiança para uma distribuição normal bivariada centrada em uma observação.

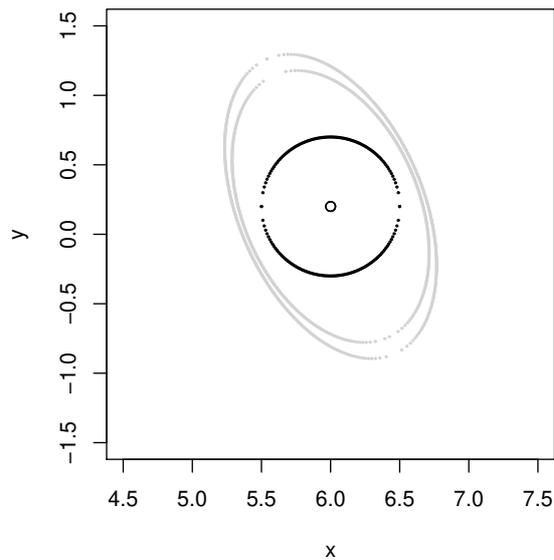


Figura 13: Curvas de Nível de 95% e 99% para Normal Multivariada com $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0.2$ e $\rho = -0.8$

Nota. Se as matrizes de covariância Σ_ℓ são desconhecidas, os pontos (x, y)

pertencentes as elipses de confiança tem que satisfazer

$$n((\bar{\mathbf{W}}_\ell, \bar{\mathbf{V}}_\ell) - (x, y))^t \mathbf{S}_\ell^{-1} ((\bar{\mathbf{W}}_\ell, \bar{\mathbf{V}}_\ell) - (x, y)) \leq T^2(\gamma_n)$$

onde \mathbf{S}_ℓ é a matriz de covariância amostral dos vetores \mathbf{W}_ℓ e \mathbf{V}_ℓ e $T^2(\gamma_n)$ é o $100\gamma_n$ -percentil da distribuição Hotelling's com $(n - 1)$ graus de liberdade. Os valores de $T^2(\gamma_n)$ de um vetor aleatório p -dimensional estão conectados com os valores críticos $F_{p, n-p}(\gamma_n)$ da distribuição F de Snedecor com p e $n - p$ graus de liberdade. Para $p = 2$ vale a relação:

$$T^2(\gamma_n) = \frac{2(n-1)}{n-2} F_{2, n-2}(\gamma_n)$$

e portanto

$$P\left(\frac{n(n-2)}{2(n-1)} ((\bar{\mathbf{W}}_\ell, \bar{\mathbf{V}}_\ell) - (x, y))^t \mathbf{S}_\ell^{-1} ((\bar{\mathbf{W}}_\ell, \bar{\mathbf{V}}_\ell) - (x, y)) \leq F_{2, n-2}(\gamma_n)\right) = 1 - \gamma_n$$

.

3.2 Estudo assintótico da Curva Estimada

Lema 3.14 Se $\sum 1 - (1 - \gamma_n)^L < \infty$ então

$$P(N \notin \Gamma_n^{\gamma_n} \text{ i.v.}) = 0 \tag{3.15}$$

Prova. Dado que os processos η_1, \dots, η_L são independentes, pela definição de elipses de confiança, temos que

$$P(N \in \Gamma_n^{\gamma_n}) = \prod_{l=1}^L P((w_\ell, v_\ell) \in G^{\gamma_n}(\mathbf{W}, \mathbf{V})) = (1 - \gamma_n)^L.$$

Portanto, o resultado segue imediatamente do Lema de Borel Canteli. □

Lema 3.16 (a) $\{\bar{W}_\ell, \bar{V}_\ell, l = 1, \dots, L\} \rightarrow N$, q.c..

(b) Se $\sqrt{\chi_2^2(\gamma_n)}/\sqrt{n} \rightarrow 0$ então $\Gamma_n^{\gamma_n} \rightarrow N$ q.c. quando $n \rightarrow \infty$.

(c) Para um $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^K$ fixo, temos que

$$Q_{\alpha, \psi, r, H, n}(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow Q_{\alpha, \psi, r, H}(\boldsymbol{\theta}), \quad \text{q.c.} \tag{3.17}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Prova. (a) segue diretamente da Lei Forte dos Grandes Números para vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos.

Para provar (b) temos apenas que observar que o conjunto $\Gamma_n^{\gamma_n}$ é a união de elipses com centros nos pontos $(\mathbf{W}_\ell, \mathbf{V}_\ell)$ e eixos com tamanho $2\sqrt{\chi_2^2(\gamma_n)}\sqrt{\lambda_{\ell,j}/n}$.

(c) é implicado diretamente de (a) e (b). \square

Note que é possível satisfazer simultaneamente as condições do Lema 3.14 e 3.16. Pela desigualdade de Chernoff, para qualquer variável aleatória Z temos que

$$P(Z > a) \leq e^{-at}E(e^{Zt}), \text{ para todo } t.$$

Portanto tomando $Z \sim \chi_2^2$ obtemos

$$\gamma_n \leq e^{-\chi_2^2(\gamma_n)t} \left(\frac{1}{1-2t} \right).$$

De agora em diante, para simplificar a notação, deixaremos de indicar o índice (α, ψ, r, H) .

Lema 3.18 *Para quaisquer funções contínuas $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ temos que*

$$\sup_{x \in [0, b]} |f(x) - g(x)| \geq |d(f, \Gamma) - d(g, \Gamma)|.$$

Prova. De fato, seja $\epsilon = \sup_{x \in [0, b]} |f(x) - g(x)|$ e sem perda de generalidade assumamos que $d(f, \Gamma) > d(g, \Gamma)$. É fácil notar que para qualquer $x \in [0, b]$ e $w \in \Gamma$

$$d((x, f(x)), w) \leq |f(x) - g(x)| + d((x, g(x)), w).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d((x, f(x)), \Gamma) &\leq |f(x) - g(x)| + d((x, g(x)), \Gamma) \\ &\leq \epsilon + d((x, g(x)), \Gamma) \end{aligned}$$

O resultado segue imediatamente tomando o ínfimo sobre $x \in [0, b]$ na última desigualdade. \square

Teorema 3.19 *As funções Q_n e Q são funções contínuas.*

Prova. Apenas precisamos mostrar que a aplicação

$$\boldsymbol{\theta} \mapsto \Phi \left(Z_\alpha + \sqrt{H}(r - d(\sum_{j=1}^K \theta_j B_j(\cdot), \Gamma)) \right)$$

é contínuo para qualquer conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Na verdade, esta aplicação é Lipschitz. Para ver isto, tome $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^K$

$$\begin{aligned} & \left| \Phi \left(Z_\alpha + \sqrt{H}(r - d(\sum_{j=1}^K \theta_j B_j(\cdot), \Gamma)) \right) - \Phi \left(Z_\alpha + \sqrt{H}(r - d(\sum_{j=1}^K \phi_j B_j(\cdot), \Gamma)) \right) \right| \\ &= |\Phi'(\xi)\sqrt{H}| \left(d(\sum_{j=1}^K \theta_j B_j(\cdot), \Gamma) - d(\sum_{j=1}^K \phi_j B_j(\cdot), \Gamma) \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{H} \sup_{z \in [0, b]} \left| \sum_{j=1}^K (\theta_j - \phi_j) B_j(z) \right| \\ &\leq C |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\phi}| \end{aligned} \quad (3.21)$$

para uma constante positiva adequada C e $\xi \in \mathbb{R}^K$. A primeira igualdade segue do Teorema do Valor Médio. A primeira desigualdade segue do Lemma 3.18 e $\Phi'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\xi^2/2)$. \square

Para provar o teorema principal, é importante notar que Q_n é uma função aleatória dado que ela depende do processo aleatório $\eta_i = \{(W_{1,i}, V_{1,i}), \dots, (W_{L,i}, V_{L,i})\}$ para $i = 1, \dots, n$ através das elipses de confiança $\Gamma_n^{\gamma_n}$. Na prova a seguir, quando necessário, enfatizamos o fato de que estamos lidando com uma realização específica ω escrevendo $Q_n(\boldsymbol{\theta}, \omega)$ e $\Gamma_n^{\gamma_n}(\omega)$.

Lema 3.22 *Para qualquer $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^K$ temos que*

$$P(Q_n(\boldsymbol{\phi}) < Q(\boldsymbol{\phi}) \text{ i.v.}) = 0 \quad (3.23)$$

Prova. Do Lema 3.14 temos que o evento $A = [N \notin \Gamma_n^{\gamma_n} \text{ i.v.}]$ tem probabilidade zero. Isto significa que qualquer $w \in A^c$ existe um $n_0(\omega)$ com

$$N \subset \Gamma_n^{\gamma_n}(\omega)$$

para todo $n \geq n_0$.

Portanto, para $\omega \in A^c$ e qualquer $\phi \in \mathbb{R}^K$ temos que

$$d\left(\sum_j \phi_j B_j, \Gamma_n^{\gamma_n}(\omega)\right) \leq d\left(\sum_j \phi_j B_j, N\right) \quad (3.24)$$

para todo $n \geq n_0$. Assim, para qualquer escolha dos parâmetros de sintonia,

$$\psi\Phi\left(Z_\alpha + \sqrt{H}(r - d(\sum_{j=1}^K \phi_j B_j(\cdot), \Gamma_n^{\gamma_n}))\right) \geq \psi\Phi\left(Z_\alpha + \sqrt{H}(r - d(\sum_{j=1}^K \phi_j B_j(\cdot), N))\right)$$

dado que Φ é estritamente crescente, $\psi, H > 0$. Portanto, para todo $\omega \notin A$

$$Q_n(\phi, \omega) \geq Q(\phi), \quad (3.25)$$

para todo $n \geq n_0$. Equação 3.23 segue imediatamente. \square

Agora podemos provar o principal teorema deste trabalho.

Teorema 3.26 *A solução de 3.11, $\hat{\theta}_n$, é um estimador fortemente consistente para θ , a solução de 2.8.*

Prova. Neste caso, precisamos do conceito de *epiconvergência*. Uma sequência de funções g_n *epiconverge* para uma função g se e somente se a sequência de conjuntos $\text{epi}(g_n)$ converge para o conjunto $\text{epi}(g)$, onde $\text{epi}(g) = \{(x, \lambda) \in S \times \mathbb{R} : g(x) \leq \lambda\}$. Precisamos provar que Q_n epiconverge para Q quando $n \rightarrow \infty$. O seguinte resultado é verdadeiro: se θ_n é um ϵ_n minimizador de Q_n com $\epsilon_n \rightarrow 0$, então qualquer subsequência convergente de $\{\theta_n\}$ tem que convergir para um ponto θ que minimiza Q e o valor ótimo $Q_n(\theta_n)$ também deve convergir para o ponto mínimo $Q(\theta)$. Note que não há necessidade de unicidade dos minimizadores. Se Q tem um minimizador único θ então θ é o único ponto de acumulação da sequência $\{\theta_n\}$. Também, isto não garante que θ é finito. Há muitas caracterizações para epiconvergência, nós seguimos [??]. A sequência Q_n epiconverge para Q se

$$Q(\theta) \leq \sup_{B \in \mathcal{N}(\theta)} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\phi \in B} \{Q_n(\phi)\} \quad (3.27)$$

$$Q(\theta) \geq \sup_{B \in \mathcal{N}(\theta)} \limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{\phi \in B} \{Q_n(\phi)\} \quad (3.28)$$

onde $\mathcal{N}(\theta)$ denota o conjunto de vizinhanças do ponto θ . Note que existe uma base enumerável $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ para a topologia de \mathbb{R}^K . Para qualquer ponto θ , seja

$$\mathcal{N}_c(\theta) = \mathcal{B} \cap \mathcal{N}(\theta).$$

Então, em nosso caso, o supremo sobre o conjunto não enumerável $\mathcal{N}(\theta)$ em (3.27) e (3.28) pode ser substituído pelo supremo sobre o conjunto enumerável $\mathcal{N}_c(\theta)$.

Primeiro provaremos (3.28). Se $B \in \mathcal{B}$ e $\theta \in B \in \mathcal{N}_c(\theta)$ então

$$Q(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(\theta) = \limsup_{n \rightarrow \infty} Q_n(\theta) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{\phi \in B} Q_n(\phi)$$

desde que pelo Lema 3.16

$$\Phi \left(Z_\alpha + \sqrt{H}(r - d(\sum_{j=1}^K \phi_j B_j(\cdot), \Gamma_n^{\gamma_n})) \right) \rightarrow \Phi \left(Z_\alpha + \sqrt{H}(r - d(\sum_{j=1}^K \phi_j B_j(\cdot), N)) \right),$$

quase certamente, quando $n \rightarrow \infty$. Portanto,

$$Q(\theta) \geq \sup_{B \in \mathcal{N}_c(\theta)} \limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{\phi \in B} Q_n(\phi)$$

e (3.28) está provada.

Para (3.27), primeiro escolhemos um conjunto enumerável denso $\Theta_c = \{\theta_1, \theta_2, \dots\}$ como segue. Para cada n , seja $\theta_n \in B_n$ tal que

$$Q(\theta_n) \leq \inf_{\phi \in B_n} Q_n(\phi) + \frac{1}{n}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sup_{B_n \in \mathcal{N}_c} \liminf_{m \rightarrow \infty} \inf_{\phi \in B_n} Q_m(\phi) &\geq \sup_{B_n \in \mathcal{N}_c} \inf_{\phi \in B_n} Q(\phi) \\ &\geq \sup_{B_n \in \mathcal{N}_c} \left\{ Q(\theta_n) - \frac{1}{n} \right\} \\ &\geq Q(\theta) \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade segue do Lema 3.22. □

3.3 Exemplos Numéricos Para a Visão Completa

Nesta seção, usaremos a linguagem de procura de caminhos para veículo autônomo. Fizemos simulações numéricas para uma grande variedade de campos de obstáculos. Nesta seção, apresentamos resultados de alguns deles. Para propósito de ilustração, mostramos apenas o caso onde temos uma e dez leituras de cada obstáculo.

Em todos os gráficos os pontos pretos são os obstáculos reais, as cruces são médias dos obstáculos observados, as elipses de confiança são desenhadas em cinza. A curva sólida obteríamos pelo procedimento descrito na Seção 2 se não tivéssemos erro de medida. As curvas tracejada e traço-e-ponto são obtidas por (3.11).

Figuras 14 à 17 mostram que na presença de variabilidade, os caminhos tendem a ficar longe do obstáculo, mas quando o número de leituras aumenta este irá convergir para a trajetória determinística.

Como comentado anteriormente, o procedimento não é limitado para evitar conjuntos circulares. Figuras 18 e 19 apresentam a solução para o problema determinístico para conjuntos do tipo diamante.

3.4 Visão Parcial

Nas seções anteriores assumimos que todo o processo pontual, e consequentemente o conjunto Γ , era conhecido previamente. Suponha, entretanto, que gostaríamos de construir a trajetória em passos nos pontos $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < b$ e a cada “checkpoint” um novo Γ_γ é apresentado. Em termos de aplicações, talvez o campo de obstáculos não pode ser visto do ponto de partida e a estratégia não pode ser calculada antes do veículo sair. De fato, é mais realístico imaginar que os sensores tem um alcance finito R menor que o campo que tem que percorrer. Neste caso, um procedimento sequencial é necessário. Vamos supor que quando o veículo está localizado em (u, v) ele pode ver até $S_{u,v} = \{(x, y) : 0 < x - u \leq R\}$.

O algoritmo para estimar a melhor trajetória é:

1. Seja N_1 o processo pontual N restrito a $S_{(0,0)}$. Seja $\hat{f}_1 \in \mathcal{H}_K$ o minimizador

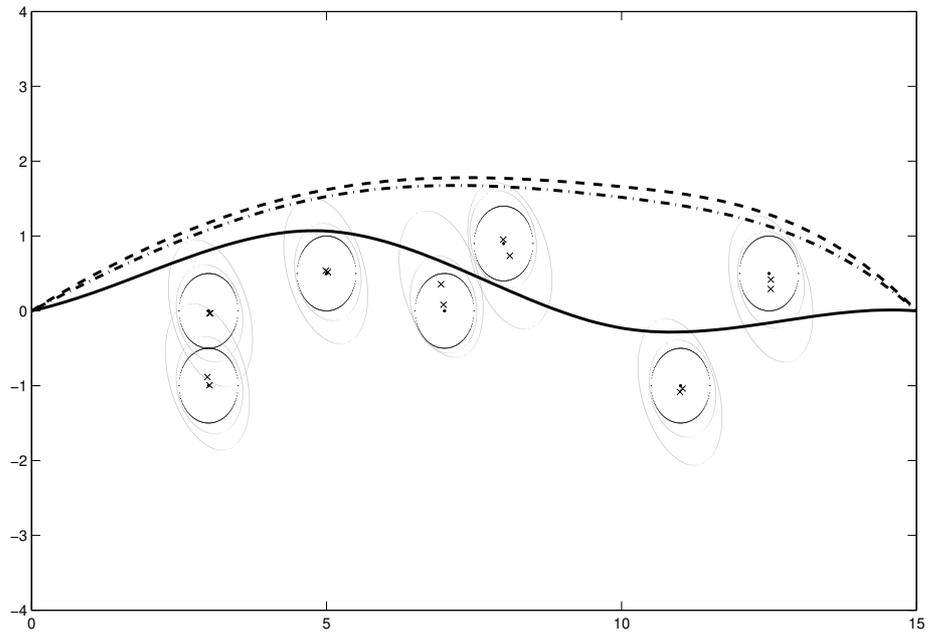


Figura 14: Trajetórias estimadas para o caso iid: trajetória determinística (curva sólida), trajetórias baseadas em 1 e 10 observações (linha tracejada, linha traço-e-ponto). Os erros são distribuídos normalmente com $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.2$ e $\rho = -0.8$.

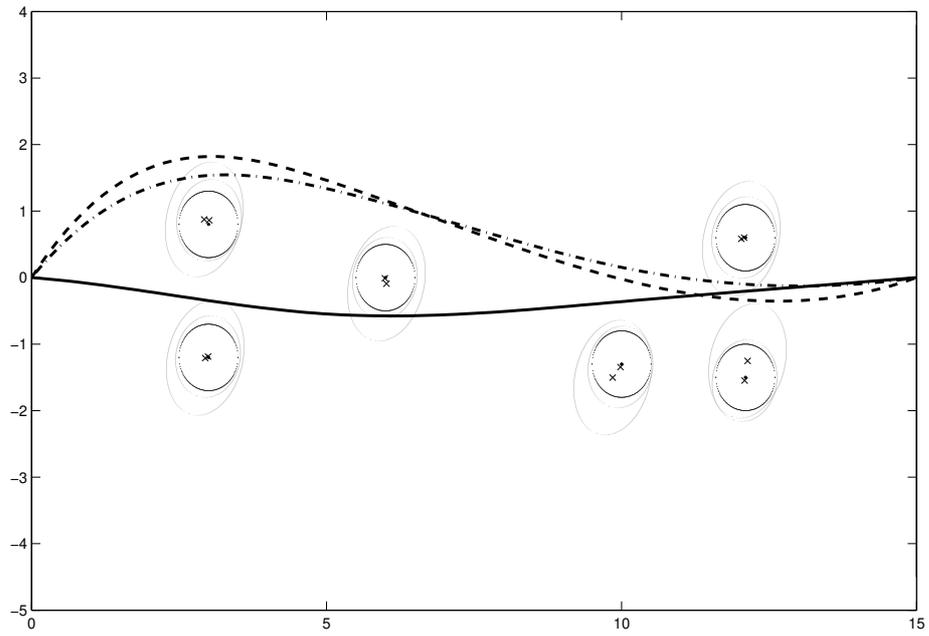


Figura 15: Trajetórias estimadas para o caso iid: trajetória determinística (curva sólida), trajetórias baseadas em 1 e 10 observações (linha tracejada, linha traço-e-ponto). Os erros são distribuídos normalmente com $\sigma_1 = 0.07$, $\sigma_2 = 0.15$ e $\rho = 0.6$.

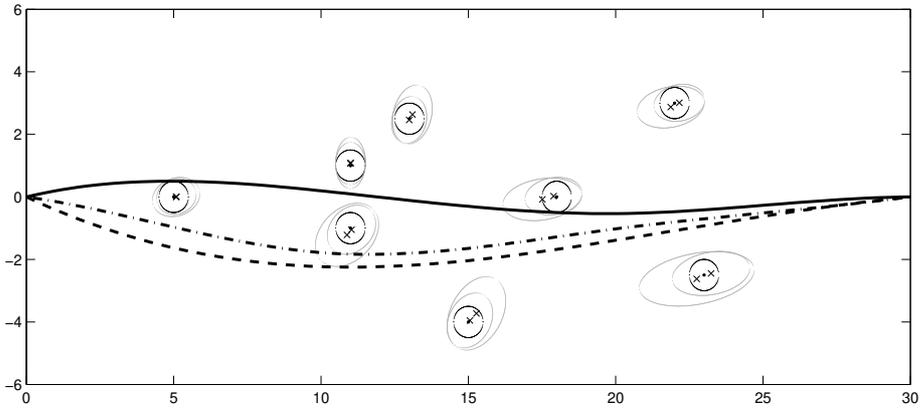


Figura 16: Trajetórias estimadas para o caso independente: trajetória determinística (curva sólida), trajetórias baseadas em 1 e 10 observações (linha tracejada, linha traço-e-ponto). Os erros são distribuídos normalmente com $\rho = 0.6$, $\sigma_{\ell,1} \sim U(0, (.8/30)W_\ell)$ e $\sigma_{\ell,2} \sim U(0, (.6/30)W_\ell)$.

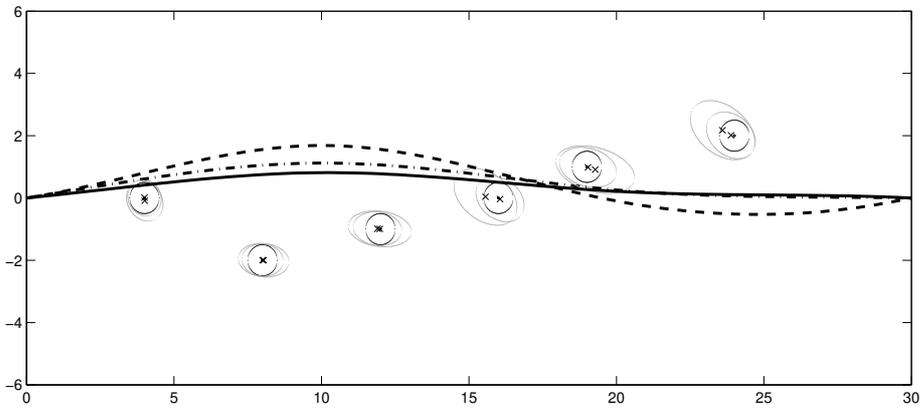


Figura 17: Trajetórias estimadas para o caso independente: trajetória determinística (curva sólida), trajetórias baseadas em 1 e 10 observações (linha tracejada, linha traço-e-ponto). Os erros são distribuídos normalmente com $\rho = -0.7$, $\sigma_{\ell,1} \sim U(0, (.7/30)W_\ell)$ e $\sigma_{\ell,2} \sim U(0, (.5/30)W_\ell)$.

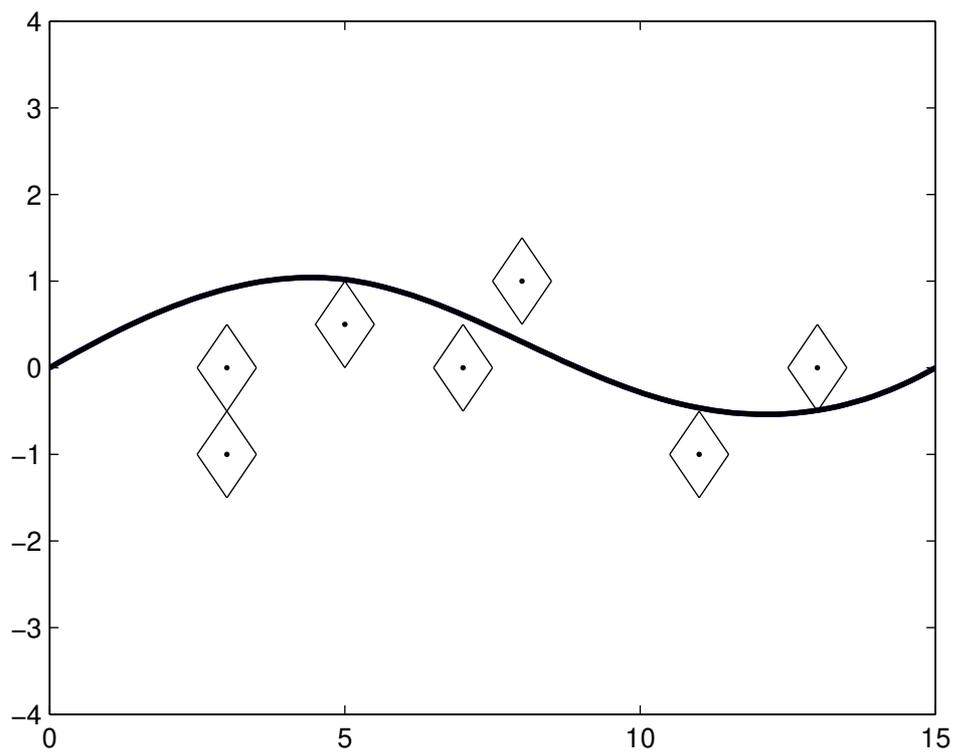


Figura 18: Trajetória estimada para trajetória determinística para obstáculos na forma de diamante.

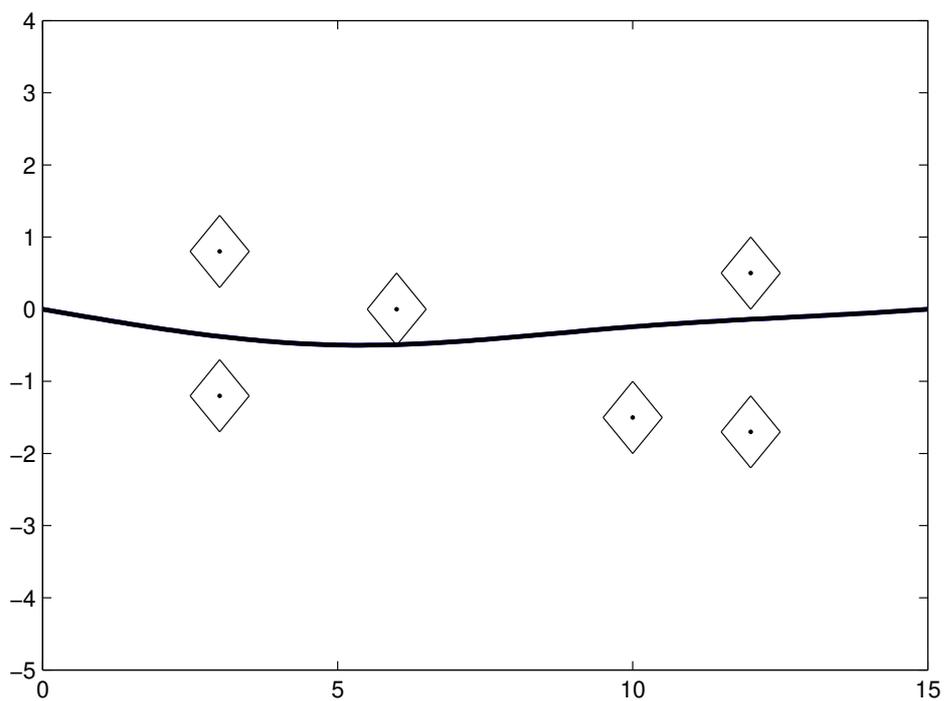


Figura 19: Trajetória estimada para trajetória determinística para obstáculos na forma de diamante.

da função custo

$$\int_0^b \sqrt{1 + f_1'(t)^2} dt + \psi \Phi(Z_\alpha + \sqrt{H}(r - d(f_1, N_1))) \quad (3.29)$$

onde $f_1(0) = 0$, $f_1(b) = 0$.

2. Dada a solução \hat{f}_{i-1} no passo $i - 1$, seja N_i o processo pontual N restrito a $S_{((i-1)R,0)}$. Seja $\hat{f}_i \in \mathcal{H}_K$ o minimizador de

$$\int_0^b \sqrt{1 + f_i'(t)^2} dt + \psi \Phi(Z_\alpha + \sqrt{H}(r - d(f_i, N_i))), \quad (3.30)$$

restrito a $f_i^{(\nu)}((i-1)R) = \hat{f}_{i-1}^{(\nu)}((i-1)R)$, para $\nu = 0, 1, 2$, $f_i(b) = 0$.

A solução sequencial pode ser vista como se o veículo no passo i entendesse que não há obstáculos depois de uma distância R . Quando ele chega aos “checkpoints” $R, 2R, \dots$, ele recomeça o procedimento unindo suavemente os caminhos. Outra coisa importante é que, no passo i o procedimento não é exatamente como era no começo pois o veículo estará no ponto (iR, y_i) , para algum y_i não necessariamente 0.

Note que esta estimacão foi descrita considerando o caso determinístico. O procedimento estocástico pode ser facilmente implementado neste caso.

As Figuras 20 e 21 mostram resultados simulados para este caso. Da Figura 21 surge uma questão muito importante. Dado que o veículo apenas faz releituras após percorrer toda a distância R , e o caminho tem que ser suave, se há um obstáculo muito próximo ao veículo quando ele chega lá, ele não será capaz de desviar e baterá. Para consertar este problema, o veículo deve reler o caminho a passos mais curtos e o procedimento refeito. A seguir, discutiremos o seguinte problema: assuma que o alcance da visão é R , o veículo faz releituras a passos de tamanho $R/2^\nu$ e os erros de medida são menores quando a distância entre os sensores e os obstáculos diminua, temos que combinar então diferentes leituras, por exemplo do ponto 0, ponto $R/2^\nu, R/2^{\nu-1}$, etc.

Suponha então que a cada passo j de tamanho $R/2^\nu$ no eixo das abscissas o veículo observa o processo pontual $\eta_j = N_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j$ com $\boldsymbol{\varepsilon}_j = (\varepsilon_{j,1}, \dots, \varepsilon_{j,L})$, $j = 1, \dots, [w_\ell 2^\nu / R] + 1$ o erro de medida, onde $[x]$ é o maior inteiro menor ou igual a x . Ou seja, as observações são $(W_{\ell,j}, V_{\ell,j}) = (w_\ell, v_\ell) + (\varepsilon_{\ell,j,1}, \varepsilon_{\ell,j,2})$, $\ell = 1, \dots, L$

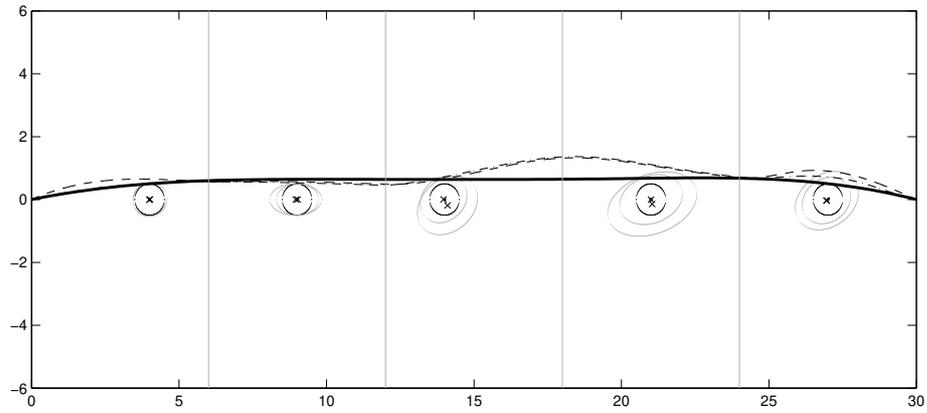


Figura 20: A curva sólida é o caminho objetivo estimado usando (2.8), as curvas pontilhada e traço-e-ponto são estimadas sequencialmente com releituras nas linhas cinzas verticais. Os erros são distribuídos normalmente com $\rho = 0.5$, $\sigma_{\ell,1} \sim U(0, (.6/30)W_\ell)$, $\sigma_{\ell,2} \sim U(0, (.4/30)W_\ell)$ e releituras em passos de 6 .

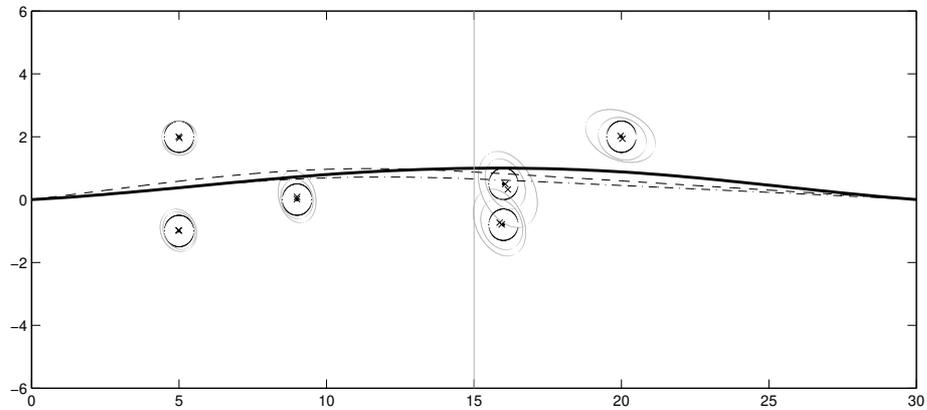


Figura 21: A curva sólida é o caminho objetivo estimado usando (2.8), as curvas pontilhada e traço-e-ponto são estimadas sequencialmente com releituras nas linhas cinzas verticais. Os erros são distribuídos normalmente com $\rho = -.6$, $\sigma_{\ell,1} \sim U(0, (.5/30)W_\ell)$, $\sigma_{\ell,2} \sim U(0, (.6/30)W_\ell)$ e releituras em passos de 15.

com $(\varepsilon_{\ell,j,1}, \varepsilon_{\ell,j,2}) \sim N_2((0, 0), \Sigma_{\ell,j})$, variáveis aleatórias independentes com matriz de covariância conhecida dada por $\Sigma_{\ell,j}$ (que pode depender do obstáculo (w_ℓ, v_ℓ)) dada por

$$\Sigma_{\ell,j} = \begin{pmatrix} \sigma_{\ell,j,1}^2 & \rho\sigma_{\ell,j,1}\sigma_{\ell,j,2} \\ \rho\sigma_{\ell,j,1}\sigma_{\ell,j,2} & \sigma_{\ell,j,2}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Note que nesse caso cada leitura de um ponto $(W_{\ell,j}, V_{\ell,j}), \ell = 1, \dots, L$ tem peso diferente na nossa estimação, pois as variâncias diminuem. Assim para estimar o verdadeiro ponto, usaremos a função de verossimilhança. Como as observações $(W_{\ell,j}, V_{\ell,j}) \sim N_2((w_\ell, v_\ell), \Sigma_{\ell,j}), \ell = 1, \dots, L, j = 1, \dots, [w2^\gamma/R] + 1$, a função de verossimilhança é dada por

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{j}{2}} \prod_{k=1}^j |\Sigma_{\ell,k}|^{\frac{j}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^j (U_{\ell,k} - u_\ell)' \Sigma_{\ell,k}^{-1} (U_{\ell,k} - u_\ell)\right) \quad (3.32)$$

onde $U_{\ell,k} = (W_{\ell,k}, V_{\ell,k})'$ e $u_\ell = (w_\ell, v_\ell)'$. A log-verossimilhança é

$$\log\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{j}{2}} \prod_{k=1}^j |\Sigma_{\ell,k}|^{\frac{j}{2}}}\right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^j (U_{\ell,k} - u_\ell)' \Sigma_{\ell,k}^{-1} (U_{\ell,k} - u_\ell), \quad (3.33)$$

e derivando em relação a u_ℓ e igualando a zero temos

$$\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1} (U_{\ell,k} - u_\ell) = 0, \quad (3.34)$$

portanto

$$\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1} U_{\ell,k} = \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right) u_\ell, \quad (3.35)$$

e o estimador de u_ℓ é

$$\hat{u}_\ell = \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1} U_{\ell,k}\right). \quad (3.36)$$

Note que, como o estimador \hat{u}_ℓ é uma combinação de variáveis aleatórias normais bivariadas $U_{\ell,k}$, ele é uma variável com distribuição Normal e esperança dada por

$$\begin{aligned} E(\hat{u}_\ell) &= \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right) E(U_{\ell,k}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right) (w_\ell, v_\ell)' \\ &= (w_\ell, v_\ell)' \end{aligned}$$

e variância

$$\begin{aligned}
Var(\hat{u}_\ell) &= Var\left(\left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1} U_{\ell,k}\right)\right) \\
&= Var\left(\sum_{k=1}^j \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1} \Sigma_{\ell,k}^{-1} U_{\ell,k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^j \left(\left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1} \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right) Var(U_{\ell,k}) \left(\left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1} \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)' \\
&= \sum_{k=1}^j \left(\left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1} \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right) \Sigma_{\ell,k} \left(\left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1} \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)' \\
&= \sum_{k=1}^j \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1} \left(\left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1} \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)' \\
&= \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^j (\Sigma_{\ell,k}^{-1})'\right) \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1}' \\
&= \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\ell,k}^{-1}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Assim, para um $\gamma \in (0, 1)$ fixo, o estimador proposto para f_θ é a função

$$f_\theta^\gamma(x) = \sum_{j=1}^K \hat{\theta}_j B_j(x) \tag{3.38}$$

onde $\hat{\theta}$ é a solução do problema de minimização

$$\hat{\theta} = \arg \min Q_{\alpha,\psi,r,H}(\theta) \tag{3.39}$$

restrito a $f_\theta^\gamma(0) = 0$, $f_\theta^\gamma(b) = 0$, onde

$$\begin{aligned}
Q_{\alpha,\psi,r,H}(\theta) &= \int_0^b \left(1 + \left(\sum_{j=1}^K \theta_j B_j'(t)\right)^2\right)^{1/2} dt \\
&\quad + \psi \Phi\left(Z_\alpha + \sqrt{H}(r - d(\sum_{j=1}^K \theta_j B_j(\cdot), \Gamma^\gamma))\right),
\end{aligned} \tag{3.40}$$

(cf. com Equação 2.8).

O conjunto Γ^γ neste caso é definido por

$$\Gamma^\gamma = \bigcup_{\ell=1}^L G^\gamma(\mathbf{W}_\ell, \mathbf{V}_\ell) \tag{3.41}$$

onde para cada $\ell = 1, \dots, L$, $G^\gamma(\mathbf{W}_\ell, \mathbf{V}_\ell)$ é uma $100(1 - \gamma)\%$ *elipse de confiança* baseada nas j leituras para o ℓ th ponto $(\mathbf{W}_\ell, \mathbf{V}_\ell)$ definido como a elipse formada pelos pontos (x, y) que satisfazem a equação

$$(\hat{u}_\ell - (x, y))^t \text{Var}(\hat{u}_\ell)^{-1} (\hat{u}_\ell - (x, y)) \leq \chi_2^2(\gamma)$$

onde $\chi_2^2(\gamma)$ é o 100γ -percentil da distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade. Estas elipses estão centradas em \hat{u}_ℓ e tem eixos

$(\sqrt{\chi_2^2(\gamma)} \sqrt{\lambda_{\ell,j}} e_{\ell,j}, -\sqrt{\chi_2^2(\gamma)} \sqrt{\lambda_{\ell,j}} e_{\ell,j})$, onde $\lambda_{\ell,j}$, $j = 1, 2$ são os autovalores de $\text{Var}(\hat{u}_\ell)$ e $e_{\ell,j}$ são os autovetores correspondentes.

Na Figura 22 a curva estimada antes do veículo sair é a tracejada, que bate no obstáculo pois não o vê ainda, já que sua visão é limitada (20 metros). No ponto 7 metros (eixo x) há uma releitura, e, já ao alcance do visor, o obstáculo é observado com erro (ponto x no gráfico) e desviado com 95% de confiança (elipse maior). No ponto 14 metros (eixo x) há mais uma releitura, e temos obstáculo (x) com sua elipse de confiança no gráfico. Mas, levando em consideração o ponto anterior observado, estimamos melhor onde o obstáculo pode estar, \hat{u} , e temos uma confiança um pouco melhor, dado que $\text{Var}(\hat{u})$ é menor que a variância das observações anteriores.

3.5 Observações Dependentes

Uma situação mais realista ainda seria considerar que, quando o veículo, após andar um passo $R/2^\nu$, faz uma nova observação de um obstáculo, devemos levar em conta a observação anterior, não apenas como uma nova observação, mas a nova observação depende da anterior, tendo assim uma cadeia de Markov.

Suponha agora que a cada passo j de tamanho $R/2^\nu$ no eixo das abscissas o veículo observa o processo pontual $\eta_j = N_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j$ com $\boldsymbol{\varepsilon}_j = (\varepsilon_{j,1}, \dots, \varepsilon_{j,L})$, $j = 1, \dots, [w_\ell 2^\nu / R] + 1$ mas as observações de um mesmo obstáculo ℓ $(W_{\ell,j}, V_{\ell,j}) = (w_\ell, v_\ell) + (\varepsilon_{\ell,j,1}, \varepsilon_{\ell,j,2})$, $j = 1, \dots, [w_\ell 2^\nu / R]$ são dependentes, ou seja, a distribuição conjunta de

$$\begin{pmatrix} W_{\ell,j} \\ V_{\ell,j} \\ W_{\ell,j-1} \\ V_{\ell,j-1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} X_{\ell,j} \\ X_{\ell,j-1} \end{pmatrix} \sim N_4 \left(\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{\ell,j,j} & \Sigma_{\ell,j,j-1} \\ \Sigma_{\ell,j-1,j} & \Sigma_{\ell,j-1,j-1} \end{pmatrix} \right). \quad (3.42)$$

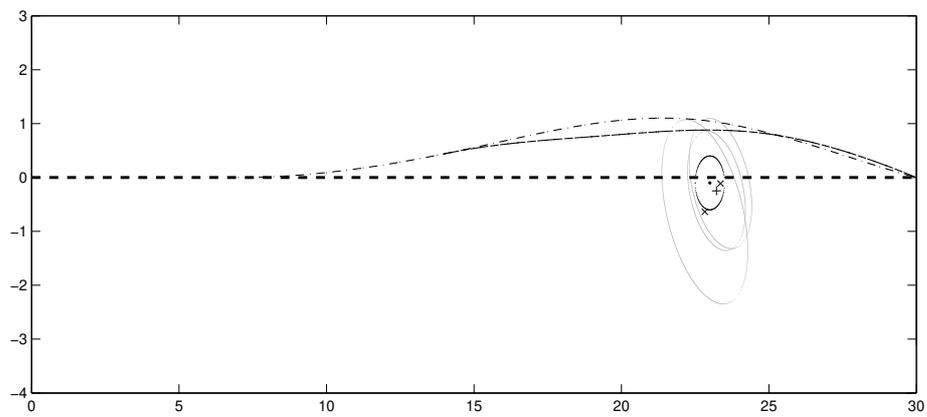


Figura 22: Com visão 20 metros, a curva tracejada é o caminho estimado antes de sair (sem ver o obstáculo), a curva traço-e-ponto é o caminho estimado no ponto 7 metros do eixo x (já vê o obstáculo) e a linha cheia é o caminho estimado no ponto 14 metros do eixo x . $\rho = -.6$, em 7 metros $\sigma_1 = .4$ e $\sigma_2 = .5$, e em 14 metros $\sigma_1 = 58.82\%.4$ e $\sigma_2 = 58.82\%.5$. O ponto $+$ é \hat{u} e a elipse de centro em $+$ é a estimada com $Var(\hat{u})$.

Assim, temos que a distribuição de $X_{\ell,j}$ dado $X_{\ell,j-1} = x_{\ell,j-1}$ é normal com média

$$\Upsilon_j := \mu + \Sigma_{\ell,j,j-1} \Sigma_{\ell,j-1,j-1}^{-1} (x_{\ell,j-1} - \mu)$$

e variância

$$\Xi_j := \Sigma_{\ell,j,j} - \Sigma_{\ell,j,j-1} \Sigma_{\ell,j-1,j-1}^{-1} \Sigma_{\ell,j-1,j}.$$

A função de verossimilhança nesse caso é

$$f_{X_{\ell,1}}(x_{\ell,1}) f_{X_{\ell,2}|X_{\ell,1}=x_{\ell,1}}(x_{\ell,2}) f_{X_{\ell,3}|X_{\ell,2}=x_{\ell,2}}(x_{\ell,3}) \dots f_{X_{\ell,j}|X_{\ell,j-1}=x_{\ell,j-1}}(x_{\ell,j}),$$

que é igual a

$$\frac{\exp(-\frac{1}{2}(x_{\ell,1} - \mu)' \Sigma_{\ell,1,1}^{-1} (x_{\ell,1} - \mu) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^j (x_{\ell,k} - \Upsilon_k)' \Xi_k^{-1} (x_{\ell,k} - \Upsilon_k))}{(2\pi)^{j/2} |\Sigma_{\ell,1,1}|^{1/2} \prod_{k=2}^j |\Xi_k|^{1/2}}. \quad (3.43)$$

A log-verossimilhança então é

$$\begin{aligned} \ln L(\mu | \underline{x}) &= -\ln((2\pi)^{j/2} |\Sigma_{\ell,1,1}|^{1/2} \prod_{k=2}^j |\Xi_k|^{1/2}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (x_{\ell,1} - \mu)' \Sigma_{\ell,1,1}^{-1} (x_{\ell,1} - \mu) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^j (x_{\ell,k} - \Upsilon_k)' \Xi_k^{-1} (x_{\ell,k} - \Upsilon_k) \end{aligned}$$

que podemos ver como

$$\begin{aligned} \ln L(\mu | \underline{x}) &= -\ln((2\pi)^{j/2} |\Sigma_{\ell,1,1}|^{1/2} \prod_{k=2}^j |\Xi_k|^{1/2}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (x_{\ell,1} - \mu)' \Sigma_{\ell,1,1}^{-1} (x_{\ell,1} - \mu) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^j (x_{\ell,k} - \mu - C_k(x_{\ell,k-1} - \mu))' \Xi_k^{-1} (x_{\ell,k} - \mu - C_k(x_{\ell,k-1} - \mu)), \end{aligned}$$

onde $C_k = \Sigma_{\ell,k,(k-1)} \Sigma_{\ell,(k-1),(k-1)}^{-1}$.

Derivando em μ e igualando a zero temos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial \mu} \ln L(\mu | \underline{x}) \\
&= \Sigma_{\ell,1,1}^{-1} (x_{\ell,1} - \mu) \\
&\quad + \sum_{k=2}^j (I - C_k)' \Xi_k^{-1} (x_{\ell,k} - C_k x_{\ell,k} - (I - C_k) \mu) = 0. \\
&= \Sigma_{\ell,1,1}^{-1} x_{\ell,1} - \Sigma_{\ell,1,1}^{-1} \mu + \sum_{k=2}^j ((I - C_k)' \Xi_k^{-1} (x_{\ell,k} - C_k x_{\ell,k-1})) \\
&\quad - \mu \left(\sum_{k=2}^j (I - C_k)' \Xi_k^{-1} (I - C_k) \right).
\end{aligned}$$

Isolando μ , temos o estimador

$$\hat{\mu} = [-\Sigma_{\ell,1,1}^{-1} - \sum_{k=2}^j (I - C_k)' \Xi_k^{-1} (I - C_k)]^{-1} [\Sigma_{\ell,1,1}^{-1} X_{\ell,1} - \sum_{k=2}^j (I - C_k)' \Xi_k^{-1} (X_{\ell,k} - C_k X_{\ell,k-1})] \quad (3.44)$$

Chame de $U = [-\Sigma_{\ell,1,1}^{-1} - \sum_{k=2}^j (I - C_k)' \Xi_k^{-1} (I - C_k)]^{-1}$ e $T = [\Sigma_{\ell,1,1}^{-1} X_{\ell,1} - \sum_{k=2}^j (I - C_k)' \Xi_k^{-1} (X_{\ell,k} - C_k X_{\ell,k-1})]$, a variância desse estimador é

$$\text{Var}(\hat{\mu}) = U' \text{Var}(T) U,$$

onde

$$\begin{aligned}
Var(T) &= Var(\Sigma_{\ell,1,1}^{-1}X_{\ell,1} + (I - C_2)' \Xi_2^{-1} C_2 X_{\ell,1}) \\
&+ \sum_{k=2}^{j-1} Var((- (I - C_k)' \Xi_k^{-1} + (I - C_{k+1})' \Xi_{k+1}^{-1} C_{k+1}) X_{\ell,k}) \\
&+ Var((I - C_j)' \Xi_j^{-1} X_{\ell,j}) \\
&- 2 \sum_{k=2}^{j-1} Cov[\Sigma_{\ell,1,1}^{-1} X_{\ell,1} + (I - C_2)' \Xi_2^{-1} C_2 X_{\ell,1}, \\
&\quad (- (I - C_k)' \Xi_k^{-1} + (I - C_{k+1})' \Xi_{k+1}^{-1} C_{k+1}) X_{\ell,k}] \\
&- 2 \sum_{k=2}^{j-1} \sum_{m=k+1}^{j-1} Cov[(- (I - C_k)' \Xi_k^{-1} + (I - C_{k+1})' \Xi_{k+1}^{-1} C_{k+1}) X_{\ell,k}, \\
&\quad (- (I - C_m)' \Xi_m^{-1} + (I - C_{m+1})' \Xi_{m+1}^{-1} C_{m+1}) X_{\ell,m}] \\
&- 2 \sum_{k=2}^{j-1} Cov[(I - C_j)' \Xi_j^{-1} X_{\ell,j}, (- (I - C_k)' \Xi_k^{-1} + (I - C_{k+1})' \Xi_{k+1}^{-1} C_{k+1}) X_{\ell,k}] \\
&- 2 Cov[\Sigma_{\ell,1,1}^{-1} X_{\ell,1} + (I - C_2)' \Xi_2^{-1} C_2 X_{\ell,1}, (I - C_j)' \Xi_j^{-1} X_{\ell,j}].
\end{aligned}$$

3.6 Planejamento GPS

No “DARPHA Grand Challenge”, os veículos tem que percorrer um certo trecho de uma área determinado previamente. No percurso ele obrigatoriamente deve passar por “checkpoints” que são descritos aos competidores antes da corrida começar. Mais ainda, o veículo tem que fazer seu caminho entre os “checkpoints” numa pista, que é determinada por círculos em volta dos “checkpoints” e retas tangentes a eles. Veja na Figura 23 como é descrita a pista.

Note que o veículo não necessariamente precisa passar exatamente pelos pontos dos “checkpoints”, na verdade o que tem que ser feito é a passagem dentro das pistas, ou seja, pode-se ter uma distância menor de percurso se programarmos o veículo “enxergar” os dois próximos “checkpoints”. Assim, a trajetória passaria mais perto do lado de menor ângulo do “checkpoints” do meio, com menor distância. Veja nas Figuras 24 e 25 exemplos de tais trajetórias.

Portanto o problema de minimização é o mesmo, mas temos que adicionar outra restrição para que o veículo não saia da pista.

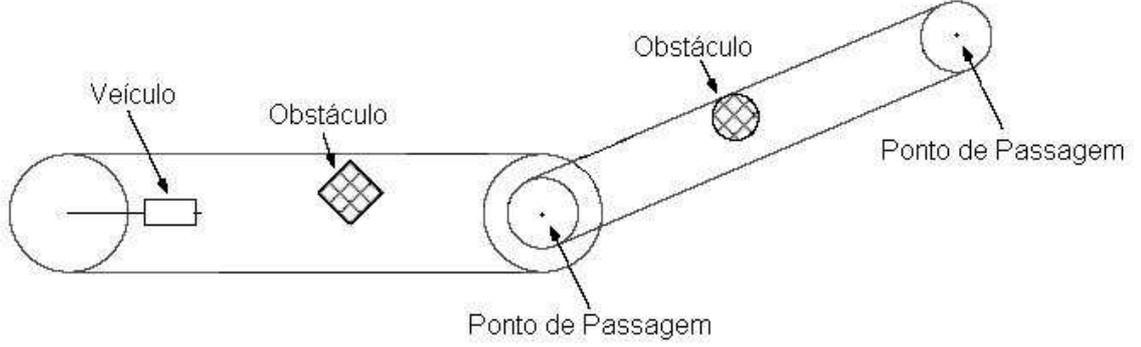


Figura 23: Pista e “checkpoints” de acordo com o “DARPHA Grand Challenge”

Suponha três “checkpoints”, $((ck_{1,x}, ck_{1,y}), (ck_{2,x}, ck_{2,y}), (ck_{3,x}, ck_{3,y}))$. Sem perda de generalidade, podemos considerar o primeiro em $(0,0)$, o segundo em um novo $(ck_{2,x}, ck_{2,y})$ e o terceiro em $(ck_{2,x}, 0)$. Para um $\gamma \in (0, 1)$ fixo, o estimador proposto para f_{θ} é a função

$$f_{\theta}^{\gamma}(x) = \sum_{j=1}^K \hat{\theta}_j B_j(x) \quad (3.45)$$

onde $\hat{\theta}$ é a solução do problema de minimização

$$\hat{\theta} = \arg \min Q_{\alpha, \psi, r, H}(\theta) \quad (3.46)$$

restrito a $f_{\theta}^{\gamma}(ck_{1,x}) = 0$, $f_{\theta}^{\gamma}(ck_{3,x}) = 0$, $f_{\theta}^{\gamma}(\cdot) \in \bigcup_{j=1}^6 A_j$, onde

- A_1 é o círculo de centro no primeiro “checkpoint” e raio r_1 , $\{(x, y) : (x - 0)^2 + (y - 0)^2 \leq r_1\}$
- A_2 é o círculo de centro no segundo “checkpoint” $(ck_{2,x}, ck_{2,y})$ e raio r_1 , $\{(x, y) : (x - ck_{2,x})^2 + (y - ck_{2,y})^2 \leq r_1\}$,
- A_3 é o círculo de centro no segundo “checkpoint” $(ck_{2,x}, ck_{2,y})$ e raio r_2 , $\{(x, y) : (x - ck_{2,x})^2 + (y - ck_{2,y})^2 \leq r_2\}$,
- A_4 é o círculo de centro no terceiro “checkpoint” $(ck_{3,x}, ck_{3,y})$ e raio r_2 , $\{(x, y) : (x - ck_{3,x})^2 + (y - ck_{3,y})^2 \leq r_2\}$,
- A_5 é a pista entre o primeiro e segundo “checkpoint”,

- A_6 é a pista entre o segundo e o terceiro “checkpoint”,

e

$$Q_{\alpha,\psi,r,H}(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^b \left(1 + \left(\sum_{j=1}^K \theta_j B_j'(t) \right)^2 \right)^{1/2} dt \quad (3.47)$$

$$+ \psi \Phi \left(Z_\alpha + \sqrt{H} (r - d(\sum_{j=1}^K \theta_j B_j(\cdot), \Gamma^\gamma)) \right).$$

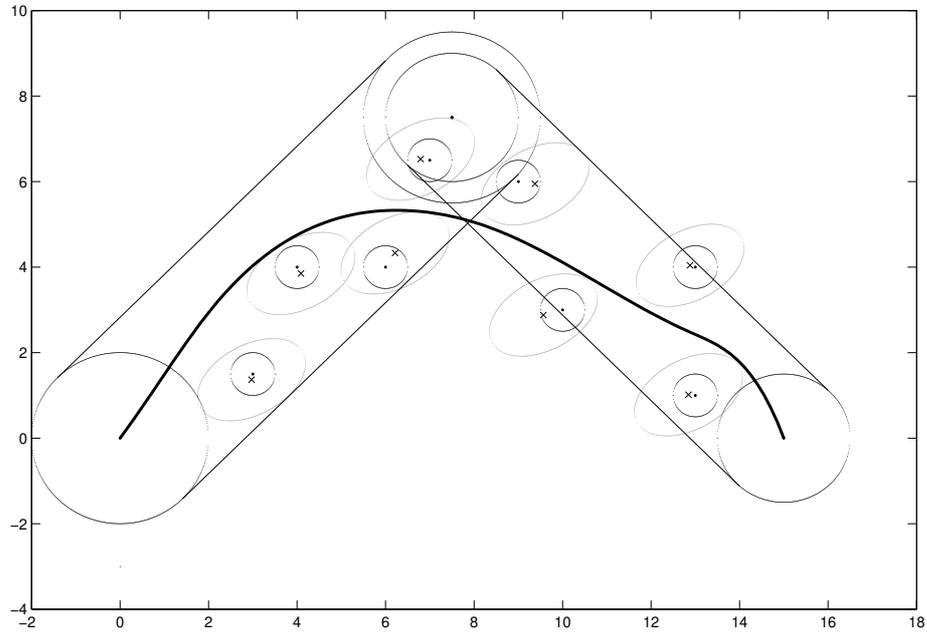


Figura 24: Trajetória estimada com “checkpoint” em (8,7.5) seguido de estreitamento da largura da pista

Obviamente, o método mais realista aqui também é a visão parcial. Sabendo previamente todos os “checkpoints”, consideramos sempre os dois próximos, assim, quando um “checkpoint” é ultrapassado pelo veículo, ele passa a fazer os cálculos considerando mais um a frente.

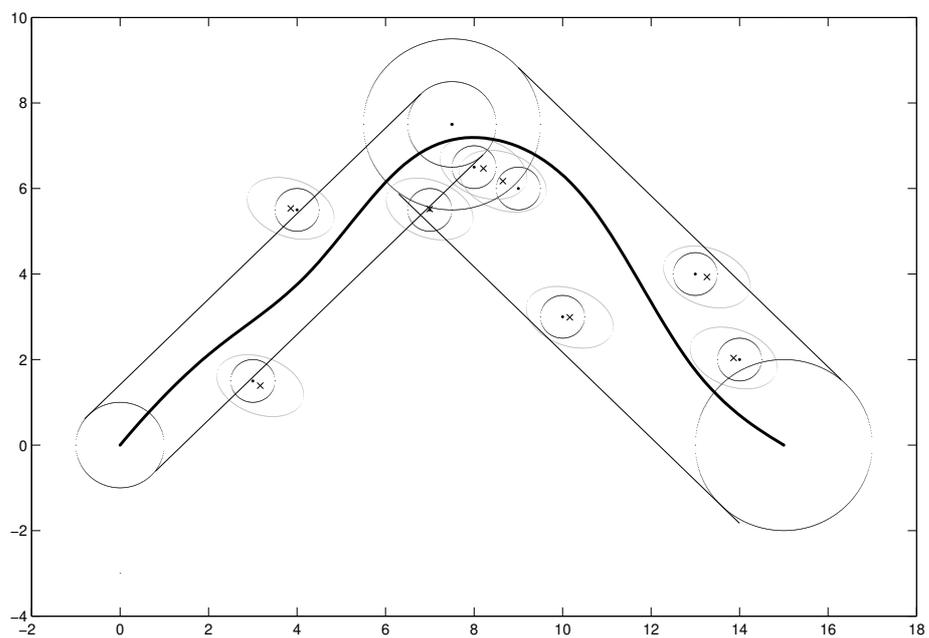


Figura 25: Trajetória estimada com “checkpoint” em $(8,7.5)$ seguido de alargamento da largura da pista

4 Conclusão

Podemos concluir que o método apresentado para estimar trajetórias para veículos autônomos é muito eficiente no sentido de que temos que encontrar poucos coeficientes, os quais formam a curva multiplicando funções base B -Splines que tem boas propriedades, comparando com outras técnicas já existentes que lidam com esse tipo de problema que discretizam o espaço de estados em células tendo um aumento computacional grande quando o tamanho da célula diminui. Estimamos de forma não paramétrica tal trajetória que deve evitar possíveis obstáculos fixos e ter o menor tamanho possível. No caso de erro de medida, propomos um estimador que é consistente, ou seja, se aumentamos o número de observações do campo de obstáculos, a trajetória estocástica converge para a determinística quase certamente. Também discutimos um caso mais realístico onde o veículo não enxerga todo o campo de obstáculos, mas apenas parte dele. Neste caso um algoritmo sequencial é proposto, mostrando-se cada vez melhor para releituras do campo de obstáculos em intervalos de tempo curtos. Estudamos o caso onde o veículo observa o mesmo obstáculo de diferentes posições, dado que o veículo já andou um pouco, tendo essas observações assim variâncias diferentes. Além disso, descrevemos brevemente a situação em que as observações de um mesmo obstáculo são dependentes, ou seja, quando o visor leva em consideração a observação anterior. No final, expomos o nosso algoritmo aplicado ao “DARPA Grand Challenge”, onde o veículo tem obrigatoriamente que passar por “checkpoints” para completar sua tarefa. Para trabalhos futuros ainda há muito a estudar, como por exemplo o caso de obstáculos que se movem.

Referências

- [1] Anestis Antoniadis. Wavelet methods for smoothing noisy data. In *Wavelets, images, and surface fitting (Chamonix-Mont-Blanc, 1993)*, pages 21-28. A K Peters, Wellesley, MA, 1994.
- [2] S. J. Asseo. In-flight replanning of penetration routes to avoid threat zones of circular shapes. *Aerospace and Electronics Conference, 1998. NAECON 1998. Proceedings of the IEEE 1998 National*, pages 383-391, 1998.
- [3] Charles J. Geyer. On the Convergence of Monte Carlo Maximum Likelihood Calculations. *J. R. Statist Soc. B(1994)*, 56, No 1, pages 261-274
- [4] H. Attouch. *Variational convergence for functions and operators*. Applicable Mathematics Series. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.
- [5] Jérôme Barraquand e Jean-Claude Latombe. Nonholonomic multibody mobile robots: controllability and motion planning in the presence of obstacles. *Algorithmica*, 10(2-4):121-155, 1993. Computational robotics: the geometric theory of manipulation, planning, and control.
- [6] Per Bodin, Lars F. Villemoes, and Bo Wahlberg. Selection of best orthonormal rational basis. *SIAM J. Control Optim.* 38(4):995-1032 (eletronic), 2000.
- [7] H. Choset, K. Lynch, S. Hutchinson, G. Kantor, W. Burgard and L. Kavraki, and Sebastian Thrun. *Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms and Implementations*. MIT Press, 2005.
- [8] Lars B. Cremean, Tully B. Foote, Jeremy H. Gillula, George H. Hines, Dmitriy Kogan, Kristopher L. Kriechbaum, Jeffrey C. Lamb, Jeremy Leibs, Laura Lindzey, Christopher E. Rasmussen, Alexander D. Stewart, Joel W. Burdick, and Richard M. Murray. Alice: An information-rich autonomous vehicle for high-speed desert navigation. *Journal of Field Robotics*, 23(9):777-810, 2006.
- [9] Carl de Boor. *A Pratical Guide to Splines*. Springer Verlag, New York, 1978.
- [10] Ronald De Vore, Guergana Petrova, and Vladimir Temlyakov. Best basis selection for approximation in L_p . *Found. Comput. Math.*, 3(2):161-185, 2003.

- [11] Ronaldo Dias. Density estimation via hybrid splines. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 60:277-294,1998.
- [12] Ronaldo Dias. Sequential adaptative non parametric regression via H-splines. *Communications in Statistics: Computations and Simulations*, 28:501-515, 1999.
- [13] Ronaldo Dias. A note on density estimation using a proxy of the Kullback-Leibler distance. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 13(2):181-192, 2000.
- [14] Jean-Paul Laumond editor, editor. *Robot Motion Planning and Control*, volume 229 of *Lecture Notes in Control and Information Science*. Springer, Berlin, 1998. Available online:<http://www.laas.fr/~jpl/book.html>.
- [15] Don Grundel, Robert Murphey, Panos Pardalos, and Oleg Prokopyev, editors. *Cooperative systems, Control and Optimization*, volume 588 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer, Berlin, 2007.
- [16] Michael J. Hirsch, Panos Pardalos, Robert Murphey, and Don Grundel, editors. *Advances in cooperative control and optimization*, volume 369 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer, Berlin, 2008. Papers from a meeting held in Gainesville FL, January 31-February 2, 2007.
- [17] Yussef Jabri. *The Mountain Passa Theorem: Variants, Generalizations and Some Applications*. Cambridge University Press, 2003.
- [18] Robert Kohn, J. S. Marron, and Paul Yau. Wavelet estimation using Bayesian basis selection and basis averaging. *Statist. Sinica*, 10(1):109-128, 2000.
- [19] Charles Kooperberg and Charles J. Stone. A study of logspline density estimation. *Computational Statistics and Data Analysis*, 12:327-347, 1991.
- [20] S. Lavalley. *Planning Algorithms*. Cambridge University Press, 2006.
- [21] Zhen Luo and Grace Wahba. Hybrid adaptative splines. *Journal of the American Statistical Association*, 92:107-116, 1997.
- [22] Ulrich Reif. Orthogonality of cardinal B-splines in weighted Sobolev spaces. *SIAM J. Math. Anal.*, 28(5):1258-1263, 1997.

- [23] B. W. Silverman. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall (London), 1986.
- [24] Abhishek Tiwari, Harish Chandra, Jacob Yadegar, and Junxian Wang. Constructing optimal cyclic tours for planar exploration and obstacle avoidance: A graph theory approach. In *Advances in Variable Structure And Sliding Mode Control*. Springer, 2007.
- [25] Brani Vidakovic. *Statistical modeling by wavelets*. Wiley Series in Probability and Statistics: Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. A Wiley-Interscience Publication.