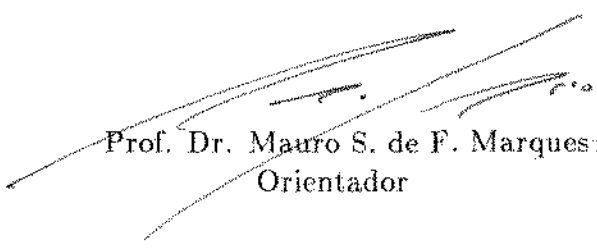


# Estimação de Parâmetros para Certos Processos Gaussianos sob Diferentes Esquemas Amostrais

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Aluísio de Souza Pinheiro e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 27 de julho de 1992



Prof. Dr. Mauro S. de F. Marques<sup>†</sup>  
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE em Estatística.

À Hildete

## Agradecimentos

Aos meus pais e a minha irmã

Ao Prof. Dr. Mauro S. de F. Marques, pela sua dedicação e trabalho durante a orientação desta dissertação.

À Prof.<sup>a</sup> Inês G. Chaves, pelo incentivo a fazer este mestrado.

Aos Profs. Drs. Luis Koodi Hotta e Luiz San Martin, pelas sugestões e idéias.

Aos colegas que ajudaram com sugestões ou observações.

## Sumário

|                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                                            | <b>1</b>  |
| <b>Capítulo 1 - Processo de Wiener com Função Média Linear</b>               | <b>4</b>  |
| 1.1 - Introdução                                                             | 4         |
| 1.2 - Tempos de Observação Determinísticos                                   | 7         |
| 1.2.1 - Estimação por Máxima Verossimilhança                                 | 8         |
| 1.2.2 - Estimação pelo Método dos Momentos                                   | 17        |
| 1.2.3 - Conclusões do Caso com Tempos Determinísticos                        | 27        |
| 1.3 - Tempos de Observação Aleatórios Observáveis                            | 34        |
| 1.3.1 - Estimação por Máxima Verossimilhança                                 | 35        |
| 1.3.2 - Estimação pelo Método de Momentos                                    | 43        |
| 1.3.3 - Conclusões Da Janela com Tempos Observáveis                          | 46        |
| 1.4 - Tempos Aleatórios Não-Observáveis Ordenáveis                           | 47        |
| 1.4.1 - Estimação por Máxima Verossimilhança                                 | 47        |
| 1.4.2 - Estimação pelo Método de Momentos                                    | 49        |
| 1.5 - Tempos Aleatórios Não-Ordenáveis                                       | 59        |
| 1.5.1 - Estimação pelo Método de Momentos                                    | 61        |
| 1.6 - Conclusões do Processo de Wiener                                       | 68        |
| <b>Capítulo 2 - Processo de Wiener com janela<br/>de Observação limitada</b> | <b>83</b> |
| 2.1 - Introdução                                                             | 83        |
| 2.2 - Tempos Aleatórios Observáveis                                          | 83        |
| 2.2.1 - Estimação por Máxima Verossimilhança                                 | 92        |
| 2.2.2 - Estimação pelo Método dos Momentos                                   | 97        |
| 2.3 - Tempos Aleatórios Não-Observáveis Ordenáveis                           | 99        |
| 2.3.1 - Estimação por Máxima Verossimilhança                                 | 99        |
| 2.3.2 - Estimação pelo Método dos Momentos                                   | 100       |

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| 2.4 - Tempos Aleatórios Não-Ordenáveis                 | 104 |
| 2.4.1 - Estimação pelo Método dos Momentos             | 104 |
| 2.5 - Conclusões                                       | 108 |
| <b>Capítulo 3 - Processo de Ornstein-Uhlenbeck com</b> |     |
| <b>Função Média Linear</b>                             | 109 |
| 3.1 - Introdução                                       | 109 |
| 3.2 - Tempos de Observação Determinísticos             | 110 |
| 3.2.1 - Estimação por Máxima Verossimilhança           | 110 |
| 3.2.2 - Estimação pelo Método dos Momentos             | 121 |
| 3.2.3 - Conclusões do Caso Determinístico              | 129 |
| 3.3 - Tempos Aleatórios Observáveis                    | 131 |
| 3.3.1 - Estimação por Máxima Verossimilhança           | 131 |
| 3.4 - Tempos Aleatórios Não-Observáveis Ordenáveis     | 133 |
| 3.4.1 - Estimação por Máxima Verossimilhança           | 133 |
| 3.4.2 - Estimação pelo Método de Momentos              | 134 |
| 3.5 - Tempos Aleatórios Não-Ordenáveis                 | 144 |
| 3.5.1 - Estimação pelo Método dos Momentos             | 144 |
| 3.6 - Conclusões do Processo de Ornstein-Uhlenbeck     | 150 |
| <b>Observações Finais</b>                              | 152 |
| <b>Apêndices</b>                                       | 153 |
| Apêndice A - Notação                                   | 154 |
| Apêndice B - Definições e Propriedades                 | 156 |
| <b>Bibliografia</b>                                    | 163 |
| <b>Bibliografia Complementar</b>                       | 164 |

## Introdução

A idéia inicial deste trabalho partiu da leitura do artigo de Stoyanov e Vladeva, *Estimation of Unknown Parameters of Continuous Time Stochastic Process by Observations at Random Moments*, publicado pela Academia Búlgara de Ciências em 1982. Nele, os autores trabalham com um processo estocástico da forma:

$$X_t = at + \sigma W_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

onde  $\{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  é um processo de Wiener padrão,  $a \in \mathbb{R}$  e  $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$  são parâmetros desconhecidos.

Stoyanov e Vladeva propõem, como forma de estimar  $a$  e  $\sigma^2$ , tomarem-se amostras discretas cujos tempos onde  $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  seria amostrado seguiriam um processo de Poisson de parâmetro  $\lambda$  conhecido. Assim, teríamos a amostra  $\{X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n}\}$ , onde  $\tau_i$  seria o tempo do  $i$ -ésimo salto do processo de Poisson utilizado.

Com isto, os autores procuraram obter os estimadores em três casos diferentes: os  $\tau_i$ 's seriam observáveis; os  $\tau_i$ 's seriam não-observáveis; entretanto, saber-se-ia em que ordem nossa amostra teria sido tomada; ou os  $\tau_i$ 's seriam não-observáveis e, além disso, não saberíamos em que ordem nossa amostra teria sido tomada.

Os autores citam o método de máxima verossimilhança ou algo próximo a ele como meio de se estimarem  $a$  e  $\sigma^2$  sem, no entanto, entrar em muitos detalhes sobre o que é esta variante. Há alguns problemas neste artigo que tentamos resolver nesta monografia. Além do método de estimação utilizado, não há resultados referentes às distribuições dos estimadores obtidos.

Outros artigos na literatura tratando de amostragem discreta em processos estocásticos em tempo contínuo são os de Blum e Rosenblatt (1964) que introduziram a idéia de que dever-se-ia fazer Inferência em processos estocásticos em tempo contínuo com base em amostras discretas, visto ser esta a única maneira de se amostrar um processo estocástico, na prática, sem que, no entanto, trabalhassem com nenhum tipo de amostragem e Robinson (1977) que se utilizou de uma amostra discreta de tamanho  $n$  com espaçamento irregular para o processo  $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  definido por:

$$X_t = a \int_0^t X_s ds + \sigma W_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

onde  $W_t$  é o processo de Wiener padrão.

Para este caso, o autor provou existirem estimadores de máxima verossimilhança consistentes para  $\alpha$  e  $\sigma^2$ , sob certas condições. Robinson demonstrou também que teríamos convergência para uma distribuição normal de certas funções dos estimadores em estudo.

Nesta área, no entanto, o domínio do tempo não é muito utilizado sendo preterido em favor do domínio da frequência, ou seja, da análise espectral. Nesta linha de pesquisa, iremos comentar alguns resultados interessantes.

Beutler (1970) discute o uso de uma amostra discreta em tempos aleatórios para a obtenção de estimadores da função de densidade espectral. Mas um dos primeiros artigos com resultados interessantes nesta questão é o de Masry (1978) em que o autor, tomando os tempos aleatórios como resultantes da realização de um processo de Poisson, obtém um estimador consistente da função de densidade espectral, desde que os tempos aleatórios sejam também observáveis.

Em Masry (1980), o autor volta à questão do artigo de 1978 sendo que, neste, ele encontra, sob certas condições, um estimador consistente da função de densidade espectral sem que a amostra contivesse os tempos de observação.

Blum e Boyles (1981) demonstraram que, sendo  $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  um processo estocástico qualquer, desde que estacionário, paramétrico e ergódico, consegue-se, através de uma amostra discreta em tempos aleatórios, estimar de forma consistente todas as distribuições finito-dimensionais do referido processo. Este resultado é fundamental para que, dada uma amostra aleatória em tempos aleatórios de um certo processo estocástico e os respectivos tempos observados, possamos caracterizar, de uma forma completa, nosso processo.

Deve-se notar que Stoyanov e Vladeva (1982) parecem ser, de certa forma, pioneiros no estudo, no domínio do tempo, de amostras aleatórias discretas em tempos aleatórios para processos estocásticos em tempo contínuo. Sendo assim, esta monografia terá como principal referência este artigo.

A falta de resultados mais expressivos na literatura aliada aos pontos obscuros em Stoyanov e Vladeva (1982) motivaram o primeiro capítulo deste trabalho. O segundo capítulo foi motivado por, na prática, muitas vezes, dispor-se apenas de um intervalo limitado de tempo em que se pode amostrar o processo. A motivação para o terceiro capítulo partiu do artigo de Ying (1991) e da importância do processo de Ornstein-Uhlenbeck na literatura, além de servir como forma de investigar a extensão dos resultados obtidos no primeiro capítulo para casos em que o processo de Wiener fosse substituído pelo outro processo Gaussiano. Em Ying(1991), tomou-se uma amostra discreta em tempos determinísticos de um processo de Ornstein-Uhlenbeck, ou seja, um processo  $\{U_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  que satisfaz a seguinte equação:

$$U_t = -\theta \int_0^t U_s ds + \sqrt{2\theta}\sigma W_t,$$

onde  $\{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  é um processo de Wiener padrão.

Este último problema parece, a primeira vista, bastante semelhante ao de Robinson (1977). Entretanto, naquele, conseguíamos estimadores para ambos os parâmetros separadamente. Neste caso, há três possibilidades: tomar  $\theta$  constante; tomar  $\sigma^2$  constante ou não fazer restrições a  $\theta$  ou a  $\sigma^2$ . Nos dois primeiros casos, encontraremos estimadores de máxima verossimilhança para o parâmetro não-fixado enquanto no terceiro só existirá estimador de máxima verossimilhança para o produto dos dois parâmetros. Sob estas condições, Ying provou a consistência destes estimadores e a convergência para a normal de certas funções destes estimadores.

Há alguns comentários sobre os resultados obtidos nesta monografia.

No Capítulo 1, conseguimos, de forma satisfatória, esclarecer os pontos obscuros em Stoyanov e Vladeva (1982), além de encontrar alguns resultados em aspectos não explorados pelo artigo como distribuição e eficiências absoluta e relativa dos estimadores.

Como comentado anteriormente, no Capítulo 2, tentamos encontrar estimadores para  $a$  e  $\sigma^2$ , no caso em que o processo é amostrado em um intervalo de tempo limitado. Os resultados obtidos foram, de certa forma, inferiores aos do Capítulo 1, não deixando, entretanto, de ser satisfatórios.

No Capítulo 3, tentamos estender o estudo feito no Capítulo 1 para um processo que não fosse o de Wiener, no caso o de Ornstein-Uhlenbeck. Os resultados não foram tão bons quanto os do Capítulo 1, sendo, possivelmente, tal fato explicado pela estrutura deste processo, bem mais complicada do que a daquele. Mesmo assim, de uma forma geral, os resultados nos mostraram ser possível a extensão de alguns dos resultados do Capítulo 1 para processos que não o de Wiener.

Há dois apêndices: o primeiro contém a notação utilizada nesta monografia e o segundo, algumas definições e propriedades constantes nesta monografia.

Na Bibliografia, são incluídas todas as referências do texto, sendo a Bibliografia Complementar composta por livros e artigos utilizados na monografia de forma indireta, sem citação.

# Capítulo 1

## Processo de Wiener com função média linear

### 1.1 Introdução

**Definição 1** *Seja  $\mathbf{W} = \{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  um processo estocástico definido no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  cujas principais propriedades são:*

$$W_0 = 0 \text{ a.s.}$$

$$W_t \sim N(0, t\sigma^2), \text{ se } t \in \mathbb{R}_+$$

$$W_t - W_s \sim N(0, (t-s)\sigma^2), \text{ se } t, s, t-s \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{Cov}(W_t - W_s, W_v - W_u) = 0 \text{ se } t, s, t-s, v, u, v-u, u-t \in \mathbb{R}_+.$$

$\mathbf{W}$  é então chamado de processo de Wiener. Caso  $\sigma^2 = 1$ , dizemos ser  $\mathbf{W}$  um processo de Wiener padrão.

Seja  $\mathbf{W}$  um processo de Wiener padrão. Tome-se  $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  um processo estocástico da forma:

$$dX_t = S(a, t) dt + \sigma dW_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

onde  $a \in \mathbb{R}$  e  $\sigma \in \mathbb{R}_+$ .

Esta equação pode ser interpretada como simplesmente a versão diferencial da seguinte equação integral:

$$X_t = \int_0^t S(a, v) dv + \sigma W_t$$

Suponhamos serem  $a$  e  $\sigma^2$  desconhecidos. Um problema da prática seria o de se amostrar o nosso processo  $\mathbf{X}$ , de forma a se obterem estimativas de  $a$  e  $\sigma^2$ . Para simplificação de notação, EMV denotará o estimador de máxima verossimilhança e EMM, o obtido pelo método dos momentos.

A amostragem contínua para este problema foi estudada por Ibragimov e Has'minskii (1981) pág. 40. Sejam  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $a$  e  $\sigma^2$  definidos anteriormente e tome-se:

$$\int_0^T S^2(a, t) dt < \infty, \quad \forall a, \quad \forall T \in \mathbb{R}_+.$$

Neste caso, existiria uma equação de verossimilhança se e somente se tomássemos  $\sigma^2$  constante, pois, caso contrário, as medidas em questão seriam singulares. Assim, sem perda de generalidade,  $\sigma^2 = 1$  e a equação de verossimilhança seria:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \int_0^T S(a, t) dX_t - \frac{1}{2} \int_0^T S^2(a, t) dt \right) = 0,$$

cujas solução explícita só é possível caso se imponham outras restrições à função  $S(a, t)$ .

Por exemplo, um caso de interesse seria o de  $S(a, t) = af(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Note-se que, pela forma de sua relação com  $S(a, t)$ ,  $f(t)$  mantém a propriedade de ser quadrado-integrável e o EMV de  $a$ ,  $\hat{a}_T$ , pode ser escrito como:

$$\hat{a}_T = \frac{\int_0^T f(t) dX_t}{\int_0^T f^2(t) dt}.$$

Se impusermos uma restrição mais forte ainda:  $f(t)$  constante, estaremos diante do modelo a ser estudado neste trabalho e encontraremos um estimador muito interessante, do ponto de vista computacional. Tomemos  $f(t) = 1$ , sem perda de generalidade. Neste caso:

$$\hat{a}_T = \frac{\int_0^T dX_t}{\int_0^T dt} = \frac{X_T - X_0}{T} = \frac{X_T}{T} \quad a.s..$$

Entretanto, na realidade, este tipo de amostragem é irrealizável. Isto ocorre porque, tecnologicamente, nenhum aparelho ou pessoa pode tomar um conjunto não-enumerável de pontos. Por exemplo, suponha-se que um conjunto de  $m$  aparelhos seja reunido para anotar o valor da realização de um determinado processo estocástico. Cada um deles levará um tempo, mesmo que exíguo, positivo,  $t$ , entre dois registros consecutivos do processo. Suponha-se, ainda, que o aproveitamento dos aparelhos seja perfeito, isto é, que não haja coincidências entre os registros dos diversos aparelhos. Note-se que, em um tempo  $T > t$ , serão registradas por  $m$  aparelhos no máximo  $mT/t$  observações, ou seja, uma amostra discreta.

Devemos, portanto, partir para a amostragem discreta. Para isto, utilizemo-nos de algumas definições baseadas em Stoyanov e Vladeva (1982). Seja  $\mathcal{W} = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$  um conjunto discreto e suponha-se que só possamos observar  $\mathbf{X}$  nos tempos em  $\mathcal{W}$ . Esta é então chamada de janela de observação discreta. Neste estudo, só trabalharemos com amostras discretas; portanto, ela será chamada simplesmente janela de observação. No caso em que  $\mathcal{W}$  for constituída por variáveis aleatórias, diremos ser  $\mathcal{W}$  uma janela aleatória; caso contrário, será uma janela determinística. Defina-se, ainda,  $\mathcal{W}_n$  como o conjunto dos  $n \in \mathbb{N}$  primeiros elementos de  $\mathcal{W}$ . A análise do problema de, a partir de uma amostra de  $\mathbf{X}$ , estimarem-se  $a$  e  $\sigma^2$  tem vários aspectos quanto a  $\mathcal{W}_n$ :

1.  $\mathcal{W}_n$  pode ser determinística, ou seja, os tempos em que o processo é amostrado são conhecidos a priori;
2.  $\mathcal{W}_n$  pode ser aleatória, de distribuição conhecida, sendo os seus elementos observáveis, ou seja, serão conhecidos a posteriori ou simultaneamente;
3.  $\mathcal{W}_n$  pode ser aleatória, de distribuição conhecida, sendo os seus elementos não-observáveis mas com sua ordem conhecida;
4.  $\mathcal{W}_n$  pode ser aleatória, de distribuição conhecida, sendo os seus elementos não-observáveis e, além disso, sua ordem é não-determinável;
5.  $\mathcal{W}_n$  pode ser aleatória, de distribuição desconhecida, sendo os seus elementos observáveis;
6.  $\mathcal{W}_n$  pode ser aleatória, de distribuição desconhecida, sendo os seus elementos não-observáveis mas com sua ordem conhecida; e
7.  $\mathcal{W}_n$  pode ser aleatória, de distribuição desconhecida, sendo os seus elementos não-observáveis e, além disso, sua ordem é não-determinável.

Além disso, podemos pensar no erro de medida, ou seja, além da aleatoriedade existente no processo, em vários casos na janela de observação,

teríamos aleatoriedade nos processos de medição adotados. Feito isso, aos nossos sete casos anteriores acrescentar-se-iam outros sete. Porém, note-se que, a partir do momento em que assumirmos tal incerteza, podemos considerá-la como parte de um desconhecimento que temos sobre a distribuição dos elementos de  $\mathcal{W}_n$  e, assim, os sete casos anteriores serão suficientes para as nossas análises.

Neste trabalho, serão considerados apenas os casos de 1 a 4. Isto se deve ao fato de que, nos casos em que os elementos de  $\mathcal{W}_n$  não são observáveis, sua distribuição é necessária para que se possam calcular os estimadores de máxima verossimilhança de  $a$  e  $\sigma^2$ , caso existam. No caso em que os elementos de  $\mathcal{W}_n$  estão disponíveis a priori ou a posteriori, não existe essa necessidade, sendo porém impossível o cálculo teórico das variâncias dos estimadores obtidos sem que se tenham as distribuições das variáveis amostradas, ou pelo menos, a estrutura de covariância entre elas. Nas seções seguintes, supor-se-á serem os elementos de  $\mathcal{W}_n$  os tempos dos saltos de um processo de Poisson de parâmetro  $\lambda$  conhecido.

Este capítulo será dividido de forma que analisaremos os estimadores, nas Seções 2, 3, 4 ou 5 se estivermos, respectivamente, diante dos casos 1, 2, 3 ou 4. Iremos, em cada uma delas, calcular, caso existam, os estimadores por máxima verossimilhança e pelo método dos momentos. Na Seção 6, analisaremos as relações entre os diversos estimadores encontrados nas seções anteriores.

## 1.2 Tempos de Observação Determinísticos

Temos aqui  $\mathcal{W}_n$  uma janela de observação determinística, ou seja, conhecemos, a priori, em quais tempos iremos amostrar o nosso processo  $\mathbf{X}$ .

Por ser  $\mathbf{W} = (W_t, t \in \mathbb{R}_+)$  um processo de Wiener padrão e nossa janela determinística, temos:

$$\begin{aligned}
 & t_0 = 0 \text{ e } W_0 = 0 \text{ a.s.}; \\
 & W_t \sim N(0, t), \text{ se } t \in \mathcal{W}_n; \\
 & Cov(W_t, W_s) = \text{Mín}(t, s), \text{ se } t, s \in \mathcal{W}_n; \\
 & W_t - W_s \sim N(0, t - s), \text{ se } t, s \in \mathcal{W}_n \text{ e } t - s \in \mathbb{R}_+; \\
 & Cov(W_t - W_s, W_v - W_u) = 0, \text{ se } t, s, u, v \in \mathcal{W}_n \\
 & \text{ e } t - s, v - u, u - t \in \mathbb{R}_+.
 \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Por hereditariedade da independência, unicidade do jacobiano da transformação e o fato de as variáveis serem normais, temos as seguintes proprie-

dades de  $\mathbf{X} = (X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ :

$$\begin{aligned}
& t_0 = 0 \text{ e } X_0 = 0 \text{ a.s.}; \\
& X_t \sim N(at, t\sigma^2), \text{ se } t \in \mathcal{W}_n; \\
& Cov(X_t, X_s) = \text{Mín}(t, s)\sigma^2, \text{ se } t, s \in \mathcal{W}_n; \\
& X_t - X_s \sim N(a(t-s), (t-s)\sigma^2), \text{ se } t, s \in \mathcal{W}_n \text{ e } t-s \in \mathbb{R}_+; \\
& Cov(X_t - X_s, X_v - X_u) = 0, \text{ se } t, s, u, v \in \mathcal{W}_n \\
& \text{ e } t-s, v-u, u-t \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Assim, poderemos, sem muitas dificuldades, encontrar os estimadores de máxima verossimilhança e de momentos de  $a$  e  $\sigma^2$ .

### 1.2.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

Chamemos nossa amostra, para simplificação de notação, de  $\mathbf{A}$ , ou seja,  $\mathbf{A} = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})'$ . Se, em vez de tomarmos  $\mathbf{A}$ , tomarmos

$$\mathbf{A}_* = (X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_i} - X_{t_{i-1}}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})',$$

nenhuma informação amostral se perde e conseguimos uma transformação que ortogonaliza a relação entre os eixos das observações do processo, o que, por serem normais as variáveis envolvidas, leva-nos à independência, por 1.2.2.

Seja  $L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*)$  nossa função de verossimilhança:

$$\begin{aligned}
L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*) &= \prod_{i=1}^n L(a, \sigma^2 | X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp \left( -\frac{(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} - a(t_i - t_{i-1}))^2}{2(t_i - t_{i-1})\sigma^2} \right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{(X_{t_j} - X_{t_{j-1}} - a(t_j - t_{j-1}))^2}{t_j - t_{j-1}} \right).
\end{aligned}$$

Para que encontremos os estimadores de máxima verossimilhança de  $a$  e  $\sigma^2$ , devemos maximizar  $L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*)$  em relação a ambos os parâmetros. Temos que:

$$\ln L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \ln \left( \prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}} \right) +$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} - a(t_i - t_{i-1})\right)^2}{t_i - t_{i-1}}.$$

Portanto, tomando a derivada com respeito a  $a$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \ln L(a, \sigma^2 \mid \mathbf{A}_*) &= \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{(-2)(t_i - t_{i-1}) \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} - a(t_i - t_{i-1})\right)}{t_i - t_{i-1}} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left( \sum_{i=1}^n \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right) - a \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (X_{t_n} - at_n). \end{aligned}$$

e a igualando a zero, obtemos:

$$\hat{a}_1 = \frac{X_{t_n}}{t_n}. \quad (1.2.3)$$

É interessante notar que, apesar de tomarmos  $n$  pontos em nossa amostra, utilizaremos apenas a última observação para o cálculo de nosso estimador.

Derivando, agora, em relação a  $\sigma^2$ :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(a, \sigma^2 \mid \mathbf{A}_*) = -\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{(-1)}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n \frac{\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} - a(t_i - t_{i-1})\right)^2}{t_i - t_{i-1}}$$

Igualando esta derivada parcial a zero, segue que:

$$-\frac{n}{2\hat{\sigma}_1^2} - \frac{(-1)}{2\hat{\sigma}_1^4} \sum_{i=1}^n \frac{\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} - \hat{a}_1(t_i - t_{i-1})\right)^2}{t_i - t_{i-1}} = 0$$

ou

$$-n + \frac{1}{\hat{\sigma}_1^2} \sum_{i=1}^n \frac{\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} - \hat{a}_1(t_i - t_{i-1})\right)^2}{t_i - t_{i-1}} = 0.$$

Temos, então:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} - \hat{a}_1(t_i - t_{i-1})\right)^2}{t_i - t_{i-1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\left( X_{t_i} - X_{t_{i-1}} - (t_i - t_{i-1}) \frac{X_{t_n}}{t_n} \right)^2}{t_i - t_{i-1}} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\left( X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right)^2 + (t_i - t_{i-1})^2 \frac{X_{t_n}^2}{t_n^2} - 2 \frac{X_{t_n}}{t_n} (t_i - t_{i-1}) (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})}{t_i - t_{i-1}} \\
&= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\left( X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right)^2}{t_i - t_{i-1}} - \frac{X_{t_n}^2}{t_n} \right). \tag{1.2.4}
\end{aligned}$$

Atendidas as condições em Apostol (1977) págs. 380 e 381, contidas no Apêndice, Definição 9, podemos, então, afirmar que  $\hat{a}_1$  e  $\hat{\sigma}_1^2$  são os estimadores de máxima verossimilhança de  $a$  e  $\sigma^2$ , respectivamente.

Verifica-se que  $\hat{a}_1$  é idêntico ao obtido em Stoyanov e Vladeva (1982) sendo que  $\hat{\sigma}_1^2$  difere apenas pelo fator  $n/(n-1)$ , introduzido pelos autores de forma a obter um estimador não-viciado.

**Proposição 1** *A distribuição de  $\hat{a}_1$  é dada por:*

$$\hat{a}_1 \sim N \left( a, \frac{\sigma^2}{t_n} \right).$$

Prova: Note que:

$$E(\hat{a}_1) = E \left( \frac{X_{t_n}}{t_n} \right) = \frac{1}{t_n} E(X_{t_n}) = \frac{1}{t_n} a t_n = a \tag{1.2.5}$$

e

$$Var(\hat{a}_1) = Var \left( \frac{X_{t_n}}{t_n} \right) = \frac{1}{t_n^2} Var(X_{t_n}) = \frac{\sigma^2 t_n}{t_n^2} = \frac{\sigma^2}{t_n}. \tag{1.2.6}$$

Como  $X_{t_n} \sim N(at_n, \sigma^2 t_n)$  e por ser  $\hat{a}_1$  uma função linear desta, temos que  $\hat{a}_1$  também é normal.  $\square$

**Proposição 2**  *$\hat{a}_1$  é consistente se e somente se a seguinte condição for satisfeita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty. \tag{1.2.7}$$

Prova: Note-se que  $E(\hat{a}_1) = a$  e 1.2.7 nos leva a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{a}_1) = 0. \quad (1.2.8)$$

Assim, 1.2.7 seria suficiente, por Tchebyshev. Para provar a necessidade, note-se que a função característica de  $\hat{a}_1$  é dada por:

$$\phi_{\hat{a}_1}(s) = \exp\left(isa - \frac{\sigma^2 s^2}{2t_n}\right)$$

e que  $\phi_{\hat{a}_1}(s) \rightarrow \exp(isa)$ , isto é,  $\hat{a}_1 \xrightarrow{d} a$ , se e somente se 1.2.7 ocorre. Sabemos que, se uma seqüência de variáveis aleatórias converge em probabilidade para uma determinada v.a., mesmo que degenerada, sabemos que essa seqüência também converge para esta v.a. em distribuição. Aplicando ao nosso caso a contrapositiva desta afirmativa, se nosso estimador não convergir para  $a$  em distribuição implica em que não houve convergência em probabilidade, provando-se, assim, a necessidade.  $\square$

Para que encontremos a variância de  $\hat{\sigma}_1^2$  de uma forma elegante, devemos introduzir a notação matricial. Definamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \left( \frac{X_{t_1}}{\sqrt{t_1}}, \frac{X_{t_2} - X_{t_1}}{\sqrt{t_2 - t_1}}, \dots, \frac{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}{\sqrt{t_n - t_{n-1}}} \right)' \\ \mu_Z &= a \left( \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2 - t_1}, \dots, \sqrt{t_n - t_{n-1}} \right)' \\ \Sigma_Z &= \sigma^2 \mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

Temos que  $\mathbf{Z} \sim N(\mu_Z, \Sigma_Z)$ .  $\hat{\sigma}_1^2$  pode ser escrito na forma matricial como:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{nt_n} \mathbf{Z}' \mathbf{C} \mathbf{Z}, \quad (1.2.9)$$

onde  $\mathbf{C}_{n \times n} = [c_{ij}]$  de forma que:

$$c_{ij} = \begin{cases} t_n - d_i & i = j \\ -\sqrt{d_i d_j} & i \neq j \end{cases}$$

sendo  $d_i = t_i - t_{i-1}$ .

**Proposição 3** A esperança e a variância de  $\hat{\sigma}_1^2$  são dadas por:

$$E(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \quad (1.2.10)$$

$$Var(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4. \quad (1.2.11)$$

Prova:

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_1^2) &= E\left(\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2}{t_i - t_{i-1}} - \frac{X_{t_n}^2}{t_n} \right)\right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n E\left(\frac{(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2}{t_i - t_{i-1}}\right) - E\left(\frac{X_{t_n}^2}{t_n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i - t_{i-1}} (\sigma^2(t_i - t_{i-1}) + a^2(t_i - t_{i-1})^2) - \frac{1}{t_n} (\sigma^2 t_n + a^2 t_n^2) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \sigma^2 + a^2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) - \sigma^2 - a^2 t_n \right) \\ &= \frac{1}{n} ((n-1)\sigma^2 + a^2 t_n - a^2 t_n) \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma^2. \end{aligned}$$

Temos, por Searle (1982) pág. 355,  $Var(\mathbf{Z}'\mathbf{C}\mathbf{Z}) = 2tr(\mathbf{C}\Sigma_{\mathbf{Z}})^2 + 4\mu'_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}\Sigma_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}\mu_{\mathbf{Z}}$ . Como  $\mathbf{C}\Sigma_{\mathbf{Z}} = \mathbf{C}\sigma^2\mathbf{I}_n = \sigma^2\mathbf{C}$ . Seja  $\mathbf{M} = \mathbf{C}^2 = [m_{ij}]$ . Temos, então:

$$\begin{aligned} m_{ii} &= \sum_{k=1}^n c_{ik}^2 = \sum_{k \neq i}^n \left(-\sqrt{d_i d_k}\right)^2 + (t_n - d_i)^2 \\ &= \sum_{k \neq i}^n d_i d_k + t_n^2 - 2d_i t_n + d_i^2 = t_n^2 - d_i t_n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \sum_{k=1}^n c_{ik} c_{kj} = \sum_{k \neq i,j}^n c_{ik} c_{kj} + c_{ij} c_{ij} \\ &= \sum_{k \neq i,j}^n \left(-\sqrt{d_i d_k}\right) \left(-\sqrt{d_k d_j}\right) - \sqrt{d_i d_j} (t_n - d_i) - \sqrt{d_i d_j} (t_n - d_j) \\ &= -\sqrt{d_i d_j} t_n \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{C}\Sigma_Z)^2 &= \text{tr}(\sigma^4 \mathbf{C}^2) = \text{tr}(\sigma^4 \mathbf{M}) = \sigma^4 \sum_{i=1}^n (t_n^2 - d_i t_n) \\ &= (n-1)t_n^2 \sigma^4 \end{aligned}$$

Note-se, ainda, que:

$$\begin{aligned} \mu'_Z \mathbf{C}\Sigma_Z \mathbf{C}\mu_Z &= \mu'_Z \mathbf{C}\sigma^2 \mathbf{I}_n \mathbf{C}\mu_Z = \sigma^2 \mu'_Z \mathbf{M}\mu_Z \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i m_{ij} \mu_j = \sigma^2 \left( \sum_{i=1}^n \mu_i^2 m_{ii} + \sum_{i \neq j}^n \mu_i m_{ij} \mu_j \right) \\ &= \sigma^2 \left( \sum_{i=1}^n d_i (t_n^2 - d_i t_n) - \sum_{i \neq j}^n \sqrt{d_i} \sqrt{d_j} t_n \sqrt{d_j} \right) \\ &= \sigma^2 \left( t_n^3 - t_n \left( \sum_{i=1}^n d_i^2 - \sum_{i \neq j}^n d_i d_j \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

Temos, portanto:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) &= \frac{1}{n^2 t_n^2} \text{Var}(\mathbf{Z}' \mathbf{C} \mathbf{Z}) \\ &= \frac{1}{n^2 t_n^2} \left( 2 \text{tr}(\mathbf{C}\Sigma_Z)^2 + 4 \mu'_Z \mathbf{C}\Sigma_Z \mathbf{C}\mu_Z \right) \\ &= \frac{1}{n^2 t_n^2} 2(n-1)t_n^2 \sigma^4 = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4. \quad \square \end{aligned}$$

**Proposição 4**  $\hat{\sigma}_1^2$  é consistente, independente da janela de observação adotada.

Prova: Temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\sigma}_1^2) = \sigma^2 \quad (1.2.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) = 0. \quad (1.2.13)$$

Assim, por 1.2.12 e 1.2.13, utilizando Tchebyshev,  $\hat{\sigma}_1^2$  é consistente, independente da janela tomada.  $\square$

Notemos que as restrições impostas à janela de observação são necessárias apenas para garantirmos a consistência de  $\hat{a}_1$ . Como desejamos que ambos os estimadores sejam consistentes, devemos atendê-las. Uma boa propriedade, com relação aos cálculos computacionais, de  $\hat{a}_1$  se perde entretanto em  $\hat{\sigma}_1$ : para o seu cálculo, utilizaremos toda a nossa amostra.

### Proposição 5

$$\frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}_1^2 \sim \chi_{(n-1)}^2$$

Prova: Vimos, durante a prova da Proposição 3, que  $\hat{\sigma}_1^2$  pode ser colocado como uma forma quadrática, em um vetor aleatório normal n-dimensional. Com isto,  $\frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}_1^2$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{t_n} \mathbf{Z}' \mathbf{C} \mathbf{Z}. \quad (1.2.14)$$

e, por Searle (1971) pág. 57,  $\frac{1}{t_n} \mathbf{C}$  tem que ser idempotente para que  $\frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}_1^2$  tenha distribuição  $\chi^2$ . Seja  $\mathbf{M} = \mathbf{C}^2$  de forma que:

$$m_{ii} = t_n^2 - d_i t_n = t_n c_{ii}$$

e

$$m_{ij} = -\sqrt{d_i d_j} t_n = t_n c_{ij} \quad i \neq j.$$

Assim,  $\frac{1}{t_n} \mathbf{C}$  é idempotente e, conseqüentemente:

$$\frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}_1^2 \sim \chi^2 \left( r \left( \frac{1}{t_n} \mathbf{C} \right), \frac{1}{2t_n} \mu'_Z \mathbf{C} \mu_Z \right). \quad (1.2.15)$$

O parâmetro de não-centralidade é dado por:

$$\begin{aligned} \mu'_Z \left( \frac{1}{t_n} \mathbf{C} \right) \mu_Z &= \frac{1}{t_n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j c_{ij} = \frac{1}{t_n} \left( \sum_{i=1}^n \mu_i^2 c_{ii} + 2 \sum_{i < j} \mu_i \mu_j c_{ij} \right) \\ &= \frac{a^2}{t_n} \left( \sum_{i=1}^n d_i (t_n - d_i) - 2 \sum_{i < j} \sqrt{d_i} \sqrt{d_j} \sqrt{d_i d_j} \right) \\ &= \frac{a^2}{t_n} \left( t_n^2 - \sum_{i=1}^n (d_i)^2 - 2 \sum_{i < j} d_i d_j \right) = \frac{a^2}{t_n} \left( t_n^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i d_j \right) = 0. \end{aligned}$$

Por 1.2.10,  $E(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$  e, por 1.2.15,  $E\left(\frac{n}{\sigma^2}\hat{\sigma}_1^2\right) = r\left(\frac{1}{t_n}\mathbf{C}\right)$ , podemos dizer então que  $r\left(\frac{1}{t_n}\mathbf{C}\right) = n-1$  e, conseqüentemente:

$$\frac{n}{\sigma^2}\hat{\sigma}_1^2 \sim \chi^2(n-1, 0) = \chi^2(n-1). \square$$

Ser-nos-ia interessante montar intervalos de confiança para os nossos parâmetros baseados em nossos estimadores. Para isto, necessitamos do seguinte resultado:

**Proposição 6**  $\hat{a}_1$  e  $\hat{\sigma}_1^2$  são independentes.

Prova: Temos  $\hat{\sigma}_1^2$ , por 1.2.9, e  $\hat{a}_1$  na forma matricial como:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{nt_n} \mathbf{Z}'\mathbf{C}\mathbf{Z}$$

e

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{t_n} \mathbf{E}'\mathbf{Z}, \quad (1.2.16)$$

onde  $\mathbf{E} = (\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2 - t_1}, \dots, \sqrt{t_n - t_{n-1}})'$ .

Por Searle (1971) pág. 59,  $\hat{a}_1$  e  $\hat{\sigma}_1^2$  são independentes se e somente se  $\frac{1}{nt_n^2} \mathbf{E}'\Sigma_Z\mathbf{C} = \mathbf{0}_n$ , isto é:

$$\frac{\sigma^2}{nt_n^2} \mathbf{E}'\mathbf{I}_n\mathbf{C} = \mathbf{0}_n,$$

ou seja, temos que provar que  $\mathbf{E}'\mathbf{C} = \mathbf{0}_n$ . Temos:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}'\mathbf{C}]_i &= \sum_{j=1}^n e_j c_{ji} = e_i c_{ii} + \sum_{j \neq i} e_j c_{ji} \\ &= \sqrt{t_i - t_{i-1}} (t_n - (t_i - t_{i-1})) - \sum_{j \neq i} \sqrt{t_j - t_{j-1}} \sqrt{(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1})} \\ &= \sqrt{t_i - t_{i-1}} t_n - \sum_{j=1}^n \sqrt{t_i - t_{i-1}} (t_j - t_{j-1}) = 0 \end{aligned}$$

Logo,  $\hat{a}_1$  e  $\hat{\sigma}_1^2$  são independentes.  $\square$

A fim de construirmos intervalos de confiança para  $a$ , teríamos:

i) se  $\sigma^2$  for desconhecido:

$$\frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}_1^2 \sim \chi_{(n-1)}^2$$

e

$$\frac{\sqrt{t_n}(\hat{a}_1 - a)}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

o que nos leva, pela independência entre os dois estimadores, a:

$$\frac{\frac{\sqrt{t_n}(\hat{a}_1 - a)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{n}{(n-1)\sigma^2} \hat{\sigma}_1^2}} \sim t_{(n-1)},$$

ou seja,

$$\frac{\sqrt{(n-1)t_n}(\hat{a}_1 - a)}{\sqrt{n}\hat{\sigma}_1} \sim t_{(n-1)}.$$

Para um intervalo de confiança de  $100(1 - \alpha)\%$ , teríamos:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{\sqrt{(n-1)t_n}(\hat{a}_1 - a)}{\sqrt{n}\hat{\sigma}_1}\right| \leq s_{\frac{\alpha}{2}}\right) &= P\left(-s_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{\frac{(n-1)t_n}{n\hat{\sigma}_1^2}}(\hat{a}_1 - a) \leq s_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \\ P\left(\hat{a}_1 - \sqrt{\frac{n}{(n-1)t_n}}\hat{\sigma}_1 s_{\frac{\alpha}{2}} \leq a \leq \hat{a}_1 + \sqrt{\frac{n}{(n-1)t_n}}\hat{\sigma}_1 s_{\frac{\alpha}{2}}\right) &= 1 - \alpha, \end{aligned}$$

onde  $s_{\frac{\alpha}{2}}$  é tal que  $P(t_{(n-1)} \leq s_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ . Assim, nosso intervalo de confiança seria:

$$\left(\hat{a}_1 - \sqrt{\frac{n}{(n-1)t_n}}\hat{\sigma}_1 s_{\frac{\alpha}{2}}, \hat{a}_1 + \sqrt{\frac{n}{(n-1)t_n}}\hat{\sigma}_1 s_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

ii) Caso  $\sigma^2$  seja conhecido:

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{t_n}(\hat{a}_1 - a)}{\sigma}\right| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\hat{a}_1 - \frac{\sigma}{\sqrt{t_n}}z_{\frac{\alpha}{2}} \leq a \leq \hat{a}_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{t_n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha,$$

onde  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  é tal que  $P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ , sendo  $Z \sim N(0, 1)$ . Com isto, nosso

intervalo de confiança seria dado por:

$$\left( \hat{a}_1 - \frac{\sigma}{\sqrt{t_n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \hat{a}_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{t_n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

Um intervalo de confiança para  $\sigma^2$  é facilmente obtido, pois:

$$P\left(\frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}_1^2 \leq q_\alpha\right) = P\left(\sigma^2 \geq \frac{n}{q_\alpha} \hat{\sigma}_1^2\right) = \alpha,$$

onde  $q_\alpha$  é tal que  $P(Q \leq q_\alpha) = \alpha$ , tendo  $Q$  distribuição  $\chi_{(n-1)}^2$ . Sendo assim, um intervalo de confiança de  $100(1 - \alpha)\%$  de  $\sigma^2$  baseado em  $\hat{\sigma}_1^2$  seria dado por:

$$\left(0, \frac{n}{q_\alpha} \hat{\sigma}_1^2\right)$$

### 1.2.2 Estimação pelo Método dos Momentos

Nesta subseção, iremos trabalhar com o método dos momentos contido na Definição 8 do Apêndice A, para, posteriormente, comparar os estimadores de  $a$  e  $\sigma^2$ , por este método, que serão chamados de  $\tilde{a}_1$  e  $\tilde{\sigma}_1^2$ , com os obtidos pelo método de máxima verossimilhança.

Os estimadores pelo método dos momentos nesta monografia serão calculados de forma que sejam a solução de uma equação em que se iguala uma estatística de nossa amostra cuja esperança seja uma função linear de nosso parâmetro, que é conhecida como momento amostral à sua esperança, conhecida como momento teórico.

Neste caso, temos, por exemplo:

$$E\left(\frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}}\right) = a$$

e

$$\begin{aligned} E\left(\left(\frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}}\right)^2\right) &= Var\left(\frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}}\right) + \left(E\left(\frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{t_i - t_{i-1}} Var(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left(E(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left( \sigma^2 (t_i - t_{i-1}) + a^2 (t_i - t_{i-1})^2 \right) = \sigma^2 + a^2 (t_i - t_{i-1})$$

Segue que:

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}} \quad (1.2.17)$$

e

$$n\hat{\sigma}_1^2 + \tilde{a}_1^2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = n\hat{\sigma}_1^2 + \tilde{a}_1^2 t_n = \sum_{i=1}^n \frac{(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2}{t_i - t_{i-1}}.$$

Com isto, nosso estimador de  $a$  é dado por 1.2.17 e o estimador de  $\sigma^2$ , por:

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2}{t_i - t_{i-1}} - \frac{t_n}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}} \right)^2 \right). \quad (1.2.18)$$

Notemos que nenhum dos dois estimadores coincide com os respectivos encontrados pelo método de máxima verossimilhança. A proposição a seguir nos dá a distribuição de  $\tilde{a}_1$ :

**Proposição 7** *A distribuição de  $\tilde{a}_1$  é dada por:*

$$\tilde{a}_1 \sim N \left( a, \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right)$$

Prova: Pelas propriedades dos estimadores de momentos contidas no Apêndice B,  $\tilde{a}_1$  é não-viciado e

$$\begin{aligned} Var(\tilde{a}_1) &= Var \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i - t_{i-1})^2} Var(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i - t_{i-1})^2} \sigma^2 (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sigma^2 \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Além disso, sendo  $\tilde{a}_1$  uma combinação linear de v.a.s normais independentes, temos que  $\tilde{a}_1$  também é normal.  $\square$

Uma importante propriedade nos é dada pela seguinte proposição:

**Proposição 8**  $\tilde{a}_1$  é consistente se e somente se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{n^2} = 0. \quad (1.2.19)$$

Prova: Temos que  $E(\tilde{a}_1) = a$  e, por 1.2.19 ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\tilde{a}_1) = 0.$$

Portanto, 1.2.19 é suficiente para que  $\tilde{a}_1$  seja consistente. Devemos, agora, provar que esta condição é também necessária. Sabemos que a função característica de  $\tilde{a}_1$  é dada por:

$$\phi_{\tilde{a}_1}(s) = \exp \left( isa - \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right).$$

Para que  $\tilde{a}_1$  convirja em distribuição para  $a$ , devemos ter  $\phi_{\tilde{a}_1}(s) \rightarrow \exp(isa)$ , que ocorre se e somente se 1.2.19 for satisfeita. Como a convergência em distribuição para uma v.a. degenerada implica na convergência em probabilidade para esta constante, está provada a necessidade.  $\square$

É importante observar é que para  $\tilde{a}_1$  ser consistente, não podemos, ao aumentar a amostra, diminuir excessivamente a diferença entre os tempos de observação; assim, devemos aumentar nosso intervalo observado à medida em que aumentarmos o tamanho da amostra. Aqui, não nos basta, como no estimador anterior, controlar  $t_n$ . Devemos controlar todos os elementos de  $\mathcal{W}_n$  de forma a obtermos consistência.

**Proposição 9** A esperança e a variância de  $\tilde{\sigma}_1^2$  são dadas por:

$$E(\tilde{\sigma}_1^2) = \sigma^2 \left( 1 - \frac{t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right) \quad (1.2.20)$$

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\sigma}_1^2) &= \frac{2\sigma^4}{n} \left( 1 + \frac{t_n^2}{n^5} \left( \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \right)^2 - \frac{2t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right) \\ &+ \frac{4a^2\sigma^2 t_n}{n^2} \left( \frac{t_n}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} - 1 \right). \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Prova:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\sigma}_1^2) &= E\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \frac{(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2}{t_i - t_{i-1}} - \frac{t_n}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}}\right)^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i - t_{i-1}} E(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 - \frac{t_n}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left(\text{Var}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + E(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2\right) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{t_n}{n^2} \left(\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}}\right) + \left(E\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}}\right)\right)^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left(\sigma^2(t_i - t_{i-1}) + a^2(t_i - t_{i-1})^2\right) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{t_n}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i - t_{i-1})^2} \sigma^2(t_i - t_{i-1}) + \left(\sum_{i=1}^n E\left(\frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}}\right)^2\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \sigma^2 + a^2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) - \frac{t_n}{n^2} \sigma^2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{t_n}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i - t_{i-1}} a(t_i - t_{i-1})\right)^2\right) \\
&= \sigma^2 + a^2 \frac{t_n}{n} - \sigma^2 \frac{t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} - \frac{t_n}{n} a^2 \\
&= \sigma^2 \left(1 - \frac{t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Para o cálculo da variância de  $\hat{\sigma}_1^2$ , utilizaremos novamente a notação matricial e as definições usadas na Proposição 3. Analogamente ao caso do estimador de máxima verossimilhança, podemos escrever nosso estimador na notação matricial:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n^3} \mathbf{Z}' \mathbf{F} \mathbf{Z}, \quad (1.2.22)$$

onde  $\mathbf{Z}$  foi definida na sub-seção anterior e  $\mathbf{F}_{n \times n} = [f_{ij}]$  é de forma que:

$$f_{ij} = \begin{cases} \frac{n^2 d_i - t_n}{d_i} & i = j; \\ -\frac{t_n}{\sqrt{d_i d_j}} & i \neq j. \end{cases}$$

Sabemos, por Searle (1982) pág. 355, que, sendo  $\mathbf{Z}$  um vetor aleatório normal  $n$ -dimensional, a variância de nosso estimador pode ser calculada da seguinte forma:

$$Var(\mathbf{Z}'\mathbf{F}\mathbf{Z}) = 2tr(\mathbf{F}\Sigma_{\mathbf{Z}})^2 + 4\mu_{\mathbf{Z}}'\mathbf{F}\Sigma_{\mathbf{Z}}\mathbf{F}\mu_{\mathbf{Z}}$$

Seja  $\mathbf{Q} = [q_{ij}] = \mathbf{F}^2$ :

$$\begin{aligned} q_{ii} &= \sum_{k=1}^n f_{ik}f_{ki} = \sum_{k=1}^n f_{ki}^2 \\ &= \sum_{k \neq i}^n \left( -\frac{t_n}{\sqrt{d_k d_i}} \right)^2 + \left( \frac{n^2 d_i - t_n}{d_i} \right)^2 \\ &= \sum_{k \neq i}^n \frac{t_n^2}{d_k d_i} + \frac{n^4 d_i^2 - 2n^2 d_i t_n + t_n^2}{d_i^2} \\ &= \frac{n^4 d_i - 2n^2 t_n + t_n^2 \sum_{k=1}^n d_k^{-1}}{d_i} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \sum_{k=1}^n f_{ik}f_{kj} = \sum_{k \neq i,j}^n \left( -\frac{t_n}{\sqrt{d_i d_k}} \right) \left( -\frac{t_n}{\sqrt{d_k d_j}} \right) + \frac{n^2 d_i - t_n}{d_i} \left( -\frac{t_n}{\sqrt{d_i d_j}} \right) + \\ &\quad \left( -\frac{t_n}{\sqrt{d_i d_j}} \right) \frac{n^2 d_j - t_n}{d_j} \\ &= \sum_{k \neq i,j}^n t_n^2 d_k \sqrt{d_i d_j} - \frac{n^2 d_i t_n - t_n^2}{d_i \sqrt{d_i d_j}} - \frac{n^2 d_j t_n - t_n^2}{d_j \sqrt{d_i d_j}} \\ &= t_n \frac{t_n \sum_{k=1}^n d_k^{-1} - 2n^2}{\sqrt{d_i d_j}}. \end{aligned}$$

Assim:

$$q_{ij} = \begin{cases} \frac{n^4 d_i - 2n^2 t_n + t_n^2 \sum_{k=1}^n d_k^{-1}}{d_i} & i = j \\ t_n \frac{t_n \sum_{k=1}^n d_k^{-1} - 2n^2}{\sqrt{d_i d_j}} & i \neq j. \end{cases}$$

Temos então que:

$$\begin{aligned}
tr(\mathbf{F}\Sigma_Z)^2 &= \sigma^4 tr(\mathbf{Q}) \\
&= \sigma^4 \sum_{i=1}^n \frac{n^4 d_i - 2n^2 t_n + t_n^2 \sum_{k=1}^n d_k^{-1}}{d_i} \\
&= \sigma^4 \left( n^5 - 2n^2 t_n \sum_{i=1}^n d_i^{-1} + t_n^2 \left( \sum_{i=1}^n d_i^{-1} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mu_Z' \mathbf{F} \Sigma_Z \mathbf{F} \mu_Z &= \sigma^2 \mu_Z' \mathbf{Q} \mu_Z = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i q_{ij} \mu_j = \sigma^2 \left( \sum_{i=1}^n \mu_i^2 q_{ii} + \sum_{i \neq j} \mu_i \mu_j q_{ij} \right) \\
&= a^2 \sigma^2 \left( \sum_{i=1}^n d_i \frac{n^4 d_i - 2n^2 t_n + t_n^2 \sum_{k=1}^n d_k^{-1}}{d_i} + \sum_{i \neq j} \sqrt{d_i} \sqrt{d_j} t_n \frac{t_n \sum_{k=1}^n d_k^{-1} - 2n^2}{\sqrt{d_i d_j}} \right) \\
&= a^2 \sigma^2 \left( n^4 \sum_{i=1}^n d_i - t_n \left( \sum_{i=1}^n 2n^2 + \sum_{i \neq j} 2n^2 \right) + \sum_{k=1}^n d_k^{-1} \left( \sum_{i=1}^n t_n^2 + \sum_{i \neq j} t_n^2 \right) \right) \\
&= a^2 \sigma^2 \left( n^2 t_n^2 \sum_{i=1}^n d_i^{-1} - n^4 t_n \right).
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
Var(\tilde{\sigma}_1^2) &= \frac{1}{n^6} Var(\mathbf{Z}' \mathbf{F} \mathbf{Z}) = \frac{1}{n^6} \left( 2tr(\mathbf{F}\Sigma_Z)^2 + 4\mu_Z' \mathbf{F} \Sigma_Z \mathbf{F} \mu_Z \right) \\
&= \frac{1}{n^6} \left( 2\sigma^4 \left( n^5 - 2n^2 t_n \sum_{i=1}^n d_i^{-1} + t_n^2 \left( \sum_{i=1}^n d_i^{-1} \right)^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. 4a^2 \sigma^2 \left( n^2 t_n^2 \sum_{i=1}^n d_i^{-1} - n^4 t_n \right) \right) \\
&= \frac{2\sigma^4}{n} \left( 1 + \frac{t_n^2}{n^5} \left( \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \right)^2 - \frac{2t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right) \\
&\quad + \frac{4a^2 \sigma^2}{n^4} \left( \frac{t_n^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} - 1 \right). \square
\end{aligned}$$

Na proposição, exibiremos as condições suficientes para a consistência de nosso estimador:

**Proposição 10** *Para que  $\tilde{\sigma}_1^2$  seja consistente, temos como condições suficientes:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} = 0 \quad (1.2.23)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n} = 0. \quad (1.2.24)$$

Prova: Por Tchebyshev, se tivermos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\tilde{\sigma}_1^2) = \sigma^2 \quad (1.2.25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\tilde{\sigma}_1^2) = 0, \quad (1.2.26)$$

temos assegurada a consistência de  $\tilde{\sigma}_1^2$ . Vemos que 1.2.23 implica diretamente em 1.2.25 e que, para 1.2.26 ocorrer, devemos ter:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} & \left( \frac{2\sigma^4}{n} \left( 1 + \frac{t_n^2}{n^5} \left( \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right)^2 - \frac{2t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right) \right. \\ & \left. + \frac{4\sigma^2}{n^4} \left( \frac{t_n^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} - 1 \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

Temos que 1.2.27 pode ser colocada como soma de produtos de 1.2.23 e 1.2.24. Assim, estas condições são suficientes para a consistência de  $\tilde{\sigma}_1^2$ .  
□

Estas condições podem ser interpretadas da seguinte forma: 1.2.23 implica em que não se deve deixar que haja um desequilíbrio muito grande em nossa janela de observação, ou seja, não devemos tomar nossos incrementos convergindo para 0 pois esta convergência poderia ser rápida o suficiente para que 1.2.25 não

ocorresse; e 1.2.24 implica em que  $t_n$  pode crescer indefinidamente desde que seja de ordem inferior a  $n$ , isto é, os acréscimos devem ser feitos de forma a o último tempo amostrado ter uma ordem  $n^p$   $0 < p < 1$ . Por exemplo, basta-nos tomar  $t_n = n^{1/2}$  para que 1.2.26 seja satisfeita, pois esta condição não contradiz a condição 1.2.23.

A proposição a seguir nos dá a distribuição de  $\tilde{\sigma}_1^2$  sob determinadas condições.

### Proposição 11

$$\frac{n}{\sigma^2} \tilde{\sigma}_1^2 \sim \chi_{(n-1)}^2$$

se e somente se

$$n^2 = t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \quad (1.2.28)$$

Prova: Utilizando a forma matricial, 1.2.22, para  $\tilde{\sigma}_1^2$ , temos a seguinte igualdade:

$$\frac{n}{\sigma^2} \tilde{\sigma}_1^2 = \frac{\mathbf{Z}' \mathbf{F} \mathbf{Z}}{\sigma \ n^2 \ \sigma}. \quad (1.2.29)$$

Com esta expressão, temos que provar que  $\frac{1}{n^2} \mathbf{F}$  é idempotente. Sendo  $\mathbf{Q}_{n \times n} = [q_{ij}] = \mathbf{F}^2$  e substituindo  $t_n \sum_{k=1}^n d_k^{-1}$  por  $n^2$ , teremos:

$$\begin{aligned} q_{ii} &= \frac{n^4 d_i - 2n^2 t_n + t_n^2 \sum_{k=1}^n d_k^{-1}}{d_i} \\ &= n^2 \frac{n^2 d_i - 2t_n + t_n}{d_i} = n^2 \frac{n^2 d_i - t_n}{d_i} \\ &= n^2 f_{ii} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q_{ij} &= t_n \frac{t_n \sum_{k=1}^n d_k^{-1} - 2n^2}{\sqrt{d_i d_j}} \\ &= t_n \frac{n^2 - 2n^2}{\sqrt{d_i d_j}} = n^2 \left( -\frac{t_n}{\sqrt{d_i d_j}} \right) \\ &= n^2 f_{ij} \quad i \neq j, \end{aligned}$$

ou seja,  $\mathbf{F}/n^2$  é idempotente se e somente se 1.2.28 for satisfeita. Substituindo-se 1.2.28 em 1.2.20 :

$$E(\hat{\sigma}_1^2) = \sigma^2 \left( 1 - \frac{t_n}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right) = \sigma^2 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

e, por Searle (1982) pág. 57:

$$\frac{n\tilde{\sigma}_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2 \left( r \left( \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{n}^2} \right), \frac{1}{2} \mu'_{\mathbf{Z}} \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{n}^2} \mu_{\mathbf{Z}} \right).$$

O parâmetro de não-centralidade é dado por:

$$\begin{aligned} \mu'_{\mathbf{Z}} \mathbf{F} \mu_{\mathbf{Z}} &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mu_i \mu_j f_{ij} \\ &= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n \mu_i^2 f_{ii} + 2 \sum_{i < j} \mu_i \mu_j f_{ij} \right) \\ &= \frac{a^2}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n d_i \frac{n^2 d_i - t_n}{d_i} - 2 \sum_{i < j} \sqrt{d_i} \sqrt{d_j} \frac{t_n}{\sqrt{d_i d_j}} \right) \\ &= \frac{a^2}{n^2} \left( n^2 t_n - n t_n - t_n \sum_{i < j} (n - i) \right) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{n\tilde{\sigma}_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1, 0) = \chi^2(n-1),$$

desde que 1.2.28 seja satisfeita.  $\square$

Novamente iremos encontrar intervalos de confiança baseados em nossos estimadores. Para isto, seria interessante descobrir em que condições  $\hat{a}_1$  e  $\tilde{\sigma}_1^2$  são independentes.

**Proposição 12**  $\hat{a}_1$  e  $\tilde{\sigma}_1^2$  são independentes se e somente se  $n^2 = t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}$

Prova:  $\tilde{\sigma}_1^2$  pode ser colocado na forma

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n^2} \mathbf{Z}' \mathbf{F} \mathbf{Z}.$$

e  $\tilde{a}_1^2$  como

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{n} \mathbf{H}' \mathbf{Z}, \quad (1.2.30)$$

onde  $\mathbf{H} = \left( \frac{1}{\sqrt{d_1}}, \frac{1}{\sqrt{d_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{d_n}} \right)'$ . Analogamente aos estimadores de máxima verossimilhança, para que nossos estimadores sejam independentes, devemos ter  $\mathbf{H}\mathbf{F} = \mathbf{0}_n$ . Como:

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}'\mathbf{F}]_i &= \sum_{j=1}^n g_j f_{j_i} = d_i^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{n^2 d_i - t_n}{d_i} \right) - \sum_{j \neq i}^n d_j^{-\frac{1}{2}} \frac{t_n}{\sqrt{d_i d_j}} \\ &= d_i^{-\frac{1}{2}} \left( n^2 - d_i^{-1} t_n - t_n \sum_{j=1}^n d_j^{-1} \right) \\ &= d_i^{-\frac{1}{2}} \left( n^2 - t_n \sum_{j=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right), \end{aligned}$$

para que nossos estimadores sejam independentes, devemos ter

$$n^2 - t_n \sum_j (t_i - t_{i-1})^{-1} = 0, \quad (1.2.31)$$

para todo  $i$ , ou seja, temos que atender à seguinte condição:

$$n^2 = t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}. \square$$

Calculemos, a princípio, intervalos de confiança de  $100(1 - \alpha)\%$  para  $a$  baseados em  $\tilde{a}_1$ . Sabemos que:

$$\frac{n(\tilde{a}_1 - a)}{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}} \sim N(0, 1).$$

Caso  $\sigma^2$  fosse conhecido, por analogia à Seção 2, teríamos o seguinte intervalo de confiança de  $100(1 - \alpha)\%$ :

$$\left( \hat{a}_1 - \frac{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}}{n} z_{\frac{\alpha}{2}}, \hat{a}_1 + \frac{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}}{n} z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

Se  $\sigma^2$  for desconhecido, suponhamos que os estimadores sejam independentes, ou seja, a condição 1.2.31 vale. Novamente por analogia à seção anterior, nosso intervalo de confiança de  $100(1 - \alpha)\%$  é:

$$\left( \hat{a}_1 - \sqrt{\frac{1}{n-1}} \tilde{\sigma}_1 s_{\frac{n}{2}}, \hat{a}_1 + \sqrt{\frac{1}{n-1}} \tilde{\sigma}_1 s_{\frac{n}{2}} \right)$$

Para  $\sigma^2$ , somente se 1.2.28 for satisfeita, haverá possibilidades de construir um intervalo de confiança visto que esta hipótese é imprescindível para que  $\hat{\sigma}_1^2$  tenha uma distribuição conhecida. Neste caso, um intervalo de confiança para  $\sigma^2$  será análogo ao da seção anterior, isto é :

$$\left( 0, \frac{n}{q_\alpha} \hat{\sigma}_1^2 \right)$$

### 1.2.3 Conclusões do Caso com Tempos Determinísticos

Iremos, agora, fazer um breve comentário sobre um interessante caso particular do anteriormente exposto. Sejam  $\Delta = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $t_0 = 0$ . Estamos diante do equi-espacamento dos elementos de  $\mathcal{W}_n$ . Neste cenário:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,\Delta} = \tilde{a}_{1,\Delta} &= \frac{X_{n\Delta}}{n\Delta}; \\ \text{Var}(\hat{a}_{1,\Delta}) &= \frac{\sigma^2}{n\Delta} \\ \hat{\sigma}_{1,\Delta}^2 = \tilde{\sigma}_{1,\Delta}^2 &= \frac{1}{n\Delta} \left( \sum_{i=1}^n (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta})^2 - \frac{X_{n\Delta}^2}{n} \right) \\ E(\tilde{\sigma}_{1,\Delta}^2) &= \frac{n-1}{n} \sigma^2 \\ \text{Var}(\hat{\sigma}_{1,\Delta}^2) &= \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4. \end{aligned}$$

O interessante a ser observado é que, dada a condição de equi-espacamento, ou seja,  $t_i - t_{i-1} = t_1$ , para todo  $i$ , teríamos os estimadores pelos método dos momentos e de máxima verossimilhança idênticos, para ambos os parâmetros, sendo que os estimadores de momentos seriam independentes. Quanto às suas propriedades assintóticas, teríamos os estimadores de ambos os parâmetros consistentes.

As propriedades dos estimadores estudadas até o momento nos mostram que, até agora, os estimadores de  $\sigma^2$  são assintoticamente mais satisfatórios do que os de  $a$ , no sentido de que aqueles são consistentes sob qualquer

espaçamento que se utilize, enquanto esses necessitam que não se diminua de forma forte o espaçamento, quando aumentarmos o tamanho da amostra; isto significa que não podemos fixar um intervalo e neste aumentarmos progressivamente o nosso tamanho de amostra. Por esta razão, como queremos que todos os estimadores sejam consistentes, temos que, à medida em que aumentarmos o tamanho da amostra, aumentarmos proporcionalmente o intervalo em que a estamos observando.

Passemos à uma análise final comparativa entre os estimadores obtidos pelos dois métodos em janelas mais gerais.

Um detalhe interessante é o de que o EMV de  $a$  no caso discreto é idêntico ao respectivo EMV calculado na introdução deste capítulo no caso contínuo caso Máx  $t_n = T$ , ou seja, basta-nos tomar uma amostra discreta em que tomemos como maior elemento de  $\mathcal{W}_n$  o supremo do intervalo contínuo observado para que obtenhamos resultados idênticos aos obtidos pela amostragem contínua.

Quanto a  $\sigma^2$ , na literatura de amostragem contínua, não há nenhum resultado expressivo, visto que as medidas geradas por  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  seriam singulares, o que impediria o cálculo de um estimador de máxima verosimilhança.

Começemos nossas análises por  $\sigma^2$ . Vimos que  $\hat{\sigma}_1^2$  apresenta duas características muito importantes que  $\hat{\sigma}_1^2$  não possui, a menos que 1.2.28 ocorra: tem uma distribuição conhecida, chi-quadrado e é sempre consistente. Isto pode nos levar à preferência daquele estimador em detrimento deste. Entretanto, para pequenas amostras, podemos ter o EMM melhor do que o EMV. Para isto, devemos utilizar o erro quadrático médio (EQM), por serem ambos viciados. Nesta análise,  $B(\hat{\theta})$  será o vício do estimador  $\hat{\theta}$ . Temos os seguintes erros quadráticos médios dos estimadores em estudo:

$$\begin{aligned} EQM(\hat{\sigma}_1^2) &= Var(\hat{\sigma}_1^2) + (B(\hat{\sigma}_1^2))^2 \\ &= \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4 + \left(-\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 \\ &= \frac{(2n-1)\sigma^4}{n} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} EQM(\tilde{\sigma}_1^2) &= Var(\tilde{\sigma}_1^2) + (B(\tilde{\sigma}_1^2))^2 \\ &= \frac{2\sigma^4}{n} \left(1 + \frac{t_n^2}{n^5} \left(\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}\right)^2 - \frac{2t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4a^2\sigma^2 t_n}{n^2} \left( \frac{t_n}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} - 1 \right) + \left( -\frac{t_n\sigma^2}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right)^2 \\
= & \frac{\sigma^4}{n} \left( 2 + \frac{3t_n^2}{n^5} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} (t_j - t_{j-1})^{-1} + \right. \\
& \left. - \frac{4t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right) + \frac{4a^2\sigma^2 t_n}{n^2} \left( \frac{t_n}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Com isto, para encontrar sob que condições um estimador se comporta melhor do que o outro, tomemos a diferença entre os seus  $EQM$ 's.

$$\begin{aligned}
EQM(\tilde{\sigma}_1^2) - EQM(\hat{\sigma}_1^2) = & \frac{\sigma^4}{n} \left( \frac{3t_n^2}{n^5} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})^{-1} + \right. \\
& \left. - \frac{4t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} - \frac{1}{n} \right) + \\
& + \frac{4a^2\sigma^2 t_n}{n^2} \left( \frac{t_n}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} - 1 \right). \quad (1.2.32)
\end{aligned}$$

Note-se que não podemos dizer, de forma geral, qual dos  $EQM$ 's é menor, pois, na realidade, como veremos a seguir, cada um deles é menor em uma determinada região.

Começemos pelo caso em que ambos têm distribuição  $\chi^2(n-1)$ . Sabemos que isto ocorre sempre para  $\hat{\sigma}_1^2$  mas necessitamos tomar, de acordo com a Proposição 11,  $n^2 = t_n \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^{-1}$ , para que também ocorra para  $\tilde{\sigma}_1^2$ .

Com esta condição satisfeita, os estimadores se equivalem. Um caso particular é o de equi-espacamento, pois, sendo  $\Delta$  como definido anteriormente, temos:

$$t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} = n\Delta \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta} = n^2,$$

Vejamos em que situação  $EQM(\hat{\sigma}_1^2) \geq EQM(\tilde{\sigma}_1^2)$ . Seja:

$$G = \frac{t_n}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \geq 1 \quad (1.2.33)$$

Isto ocorre pois, caso contrário, pelo último termo de 1.2.21,  $Var(\tilde{\sigma}_1^2)$  poderia ser negativa. Se tomarmos 1.2.32 negativo e 1.2.33, temos:

$$\frac{\sigma^4}{n} \left( \frac{3G^2}{n} - \frac{4G}{n} - \frac{1}{n} \right) + \frac{4a^2\sigma^2 t_n}{n^2} (G - 1) \leq 0. \quad (1.2.34)$$

Assim:

$$3\sigma^2 G^2 - 4(\sigma^2 - a^2 t_n)G - (4a^2 t_n + \sigma^2) \leq 0,$$

ou seja,

$$\left| G - \frac{2(\sigma^2 - a^2 t_n)}{3\sigma^2} \right| \leq \frac{2\sqrt{1.75\sigma^4 + a^2\sigma^2 t_n + a^4 t_n}}{3\sigma^2}.$$

Tomemos um caso particular:  $a = 0$ , apenas para se ter uma idéia aproximada das regiões que favorecem um ou outro estimador. Teremos a desigualdade satisfeita quando:

$$-\frac{1}{2} \leq G \leq \frac{11}{6} \quad (1.2.35)$$

Logo, neste caso ( $a = 0$ ), como  $G \geq 1$ ,  $EQM(\tilde{\sigma}_1^2) \leq EQM(\hat{\sigma}_1^2)$  se e somente se  $1 \leq G \leq 11/6$ , ou seja, nenhum dos dois estimadores é mais preciso do que o outro em todos os casos. Seria interessante descobrir a partir de que valor de  $G$ , o erro quadrático médio de  $\hat{\sigma}_1^2$  se torna menor do que o de  $\tilde{\sigma}_1^2$ . Seja  $G_2$  este ponto. Sabemos, pela solução encontrada anteriormente que:

$$\begin{aligned} G_2 &= \frac{2(\sigma^2 - a^2 t_n) + 2\sqrt{1.75\sigma^4 + a^2\sigma^2 t_n + a^4 t_n}}{3\sigma^2} \\ &\leq \frac{2(\sigma^2 - a^2 t_n) + 3.5(\sigma^2 + a^2 t_n)}{3\sigma^2} \\ &= \frac{11}{6}, \end{aligned}$$

indicando-nos que basta termos  $G > 11/6$  para que garantamos ser  $\hat{\sigma}_1^2$  mais preciso do que  $\tilde{\sigma}_1^2$ . Juntando este fato ao de que aquele estimador tem uma distribuição  $\chi^2(n-1)$  qualquer que seja  $G$  enquanto o outro se e somente se  $G = 1$ , o estimador de máxima verossimilhança pode ser preferível ao estimador de momentos. Estes resultados nos levam à seguinte proposição:

**Proposição 13**  $EQM(\hat{\sigma}_1^2) < EQM(\tilde{\sigma}_1^2)$  se  $G > 11/6$ .

Façamos, agora, uma análise da relação do comportamento assintótico dos erros quadráticos médios dos dois estimadores de  $\sigma^2$ . Neste caso,

é interessante avaliar a eficiência relativa assintótica dos estimadores. Para isto, utilizamos a razão entre os dois EQM's:

$$\begin{aligned} \frac{EQM(\hat{\sigma}_1^2)}{EQM(\hat{\sigma}_1^2)} &= \frac{n^2}{(2n-1)\sigma^4} \frac{\sigma^4}{n} \left( 2 + \frac{3t_n^2}{n^5} \left( \sum_{i=1}^n d_i^{-1} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{4t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n d_i^{-1} \right) + \frac{n^2}{(2n-1)\sigma^4} \frac{4a^2\sigma^2 t_n}{n^2} \left( \frac{t_n}{n^2} \sum_{i=1}^n d_i^{-1} - 1 \right) \\ &= \frac{2n}{2n-1} + \frac{3t_n^2}{(2n-1)n^4} \left( \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right)^2 - \frac{4t_n}{(2n-1)n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} + \\ &\quad + \frac{4a^2 t_n}{(2n-1)\sigma^2} \left( \frac{t_n}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Tomando-se a expressão acima, temos a seguinte proposição sobre a eficiência relativa dos dois estimadores:

#### Proposição 14

$$\frac{EQM(\hat{\sigma}_1^2)}{EQM(\hat{\sigma}_1^2)} \rightarrow \begin{cases} 1 & \frac{t_n}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \rightarrow 1 \text{ e } \frac{t_n}{n} \rightarrow 0 \\ \infty & \frac{t_n}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Notemos que as condições impostas para que os dois estimadores sejam equivalentes são um pouco mais fortes do que as exigidas para que  $\hat{\sigma}_1^2$  seja consistente. Para que o estimador de máxima verossimilhança seja assintoticamente mais eficiente do que o de momentos, basta-nos tomar nosso intervalo aumentando de forma drástica à medida em que o tamanho da amostra aumentar.

Façamos uma breve revisão das características dos estimadores por máxima verossimilhança e por momentos. O primeiro tem distribuição qui-quadrado qualquer que seja a janela de observação que se tome. O EMM só possui esta distribuição caso  $G = 1$ . Além disso, note que basta-nos tomar  $G > 11/6$  para que o erro quadrático médio do estimador por máxima verossimilhança seja menor do que o respectivo pelo estimador de momentos. Como é possível tomar  $G$  de forma que a eficiência relativa do EMV seja superior à do EMM, sendo sua forma mais simples e tendo sempre uma distribuição conhecida, há motivos razoáveis para se escolher o estimador por máxima verossimilhança ao invés do estimador de momentos.

Iremos, agora, comparar os estimadores de  $a$  pelo método da máxima verossimilhança e momentos. Para isto, visto serem ambos não-viciados, utilizar-nos-emos das respectivas variâncias:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{a}_1) &= \frac{\sigma^2}{t_n} \\ \text{Var}(\tilde{a}_1) &= \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Com isto, teríamos as seguintes possibilidades:

- a) se  $t_n = \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}$ , cujo caso particular é o já conhecido equi-espacamento, os estimadores têm a mesma variância;
- b) se  $t_n > \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}$ , então  $\hat{a}_1$  tem menor variância do que a de  $\tilde{a}_1$ ; ou
- c) se  $t_n < \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}$ , então  $\tilde{a}_1$  tem menor variância do que a de  $\hat{a}_1$ .

Note-se que (c) equivale a  $G < 1$ , o que já vimos ser impossível, devido à variância de  $\tilde{\sigma}_1^2$ . Assim sendo, temos provada a seguinte proposição:

### Proposição 15

$$\text{Var}(\hat{a}_1) \leq \text{Var}(\tilde{a}_1)$$

com igualdade se e somente se

$$n^2 = t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}.$$

Seja  $d_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Tentaremos, a seguir, estudar o comportamento relativo das duas variâncias com base nos incrementos impostos aos elementos de  $\mathcal{W}_n$ . Utilizaremos (a) sem perda de generalidade dos resultados. Temos que  $\text{Var}(\hat{a}_1) = \text{Var}(\tilde{a}_1)$  se e somente se  $t_n \sum_{i=1}^n d_i^{-1} = n^2$ . Isto implica em que:

$$\begin{aligned} n^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i d_j^{-1} = \sum_{i=1}^n d_i d_i^{-1} + \sum_{i \neq j} d_i d_j^{-1} \\ &= n + \sum_{i \neq j} d_i d_j^{-1}. \end{aligned}$$

Com isto e mais a Proposição 15, teríamos:

$$Var(\hat{a}_1) = Var(\tilde{a}_1) \Leftrightarrow n(n-1) = \sum_{i \neq j} (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1})^{-1} \quad (1.2.36)$$

$$Var(\hat{a}_1) < Var(\tilde{a}_1) \Leftrightarrow n(n-1) < \sum_{i \neq j} (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1})^{-1} \quad (1.2.37)$$

Analisemos um caso ideal em que queiramos controlar nossa variância passo a passo. Suponha-se que, para todo  $n$ , tenhamos as duas variâncias iguais. Sabemos que o equi-espaçamento,  $d_i = d_1$  para todo  $i$ , é uma condição suficiente. Iremos provar, utilizando-nos de indução finita, que ele também será necessária.

Para  $n = 1$ , 1.2.36 vale sempre. Para  $n = 2$ , temos, por 1.2.36, que:

$$2 = d_1 d_2^{-1} + d_2 d_1^{-1}.$$

Seja  $c = d_2/d_1$ . Temos:

$$2 = \frac{d_1}{cd_1} + \frac{cd_1}{d_1},$$

equação que é satisfeita se e somente se  $c = 1$ . Provamos que vale também para  $n = 2$ . Suponha-se que valha para  $n - 1$ . Temos  $d_i = d_1$ ,  $i = 2, 3, \dots, n - 1$  e, por 1.2.36 :

$$\begin{aligned} n(n-1) &= \sum_{i \neq j}^n d_i d_j^{-1} = \sum_{i \neq j}^{n-1} d_i d_j^{-1} + d_n^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} d_i + d_n \sum_{i=1}^{n-1} d_n^{-1} \\ &= (n-1)(n-2) + d_n^{-1} d_1 (n-1) + d_n d_1^{-1} (n-1) \end{aligned}$$

levando-nos a:

$$2 = d_n^{-1} d_1 + d_n d_1^{-1},$$

cujas únicas soluções são, com raciocínio análogo ao anterior,  $d_1 = d_n$ , ou seja, acabamos de provar a seguinte proposição:

**Proposição 16**  $Var(\hat{a}_1) = Var(\tilde{a}_1)$  para todo  $n$  se e somente se  $t_i - t_{i-1} = t_1$  para todo  $i$ .

Quanto à eficiência assintótica, teríamos:

$$\frac{Var(\hat{a}_1)}{Var(\hat{a}_1)} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}.$$

Note-se que o termo cujo limite estamos tomando é  $G$  que sabemos ser maior do que 1 ou igual a ele, sempre, ou seja, o estimador de máxima verossimilhança de  $a$  é, em geral, assintoticamente mais eficiente do que o respectivo estimador pelo método de momentos, sendo que ambos serão assintoticamente equivalentes se e somente se  $\lim_{n \rightarrow \infty} G = 1$ .

Analizadas as relações de eficiência dos estimadores de  $a$  e  $\sigma^2$  pelos dois métodos em estudo, parece-nos que, neste caso em que os tempos de amostragem são determinísticos, o melhor método de estimação seria o de máxima verossimilhança, visto que o estimador obtido por este para  $a$  tem sempre variância menor do que a do obtido pelo método de momentos. Quanto aos respectivos estimadores de  $\sigma^2$ , o de máxima verossimilhança se apresenta sob qualquer esquema amostral com distribuição qui-quadrado, enquanto o de momentos necessita de  $G = 1$ .

### 1.3 Tempos de Observação Aleatórios Observáveis

Como explicado na Introdução, consideremos aqui  $\mathcal{W}_n$  uma janela de observação aleatória cujas observações das variáveis aleatórias que a compõem farão parte da amostra, ou seja, conhecemos, a posteriori, em quais tempos amostramos o nosso processo  $\mathbf{X}$ .

Por ser  $\mathcal{W}_n$  uma janela aleatória, denotaremos os seus elementos não mais por  $t_i$  e sim por  $\tau_i$   $i = 1, 2, \dots, n$ . Assumiremos serem os  $\tau_i$ 's os tempos dos saltos de um processo de Poisson de parâmetro  $\lambda$ . Temos, então, as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0 \text{ e } W_0 = 0 \text{ a.s.} \\ W_t | \mathcal{W}_n &\sim N(0, t), \text{ se } t \in \mathcal{W}_n \\ COV(W_t, W_s | \mathcal{W}_n) &= \text{Mín}(t, s), \text{ se } t, s \in \mathcal{W}_n \\ W_t - W_s | \mathcal{W}_n &\sim N(0, t - s), \text{ se } t, s \in \mathcal{W}_n \text{ e } t - s \in \mathbb{R}_+ \\ COV(W_t - W_s, W_v - W_u | \mathcal{W}_n) &= 0, \text{ se } t, s, u, v \in \mathcal{W}_n \\ &\text{ e } t - s, v - u, u - t \in \mathbb{R}_+ \\ \tau_i - \tau_{i-1} \text{ i.i.d. } &\sim Exp(\lambda) \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.3.38}$$

Por hereditariedade da independência, unicidade do jacobiano da

transformação e o fato de que as variáveis serem Normais dado  $\mathcal{W}_n$ , temos as seguintes propriedades de  $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ :

$$\begin{aligned}
& \tau_0 = 0 \text{ e } X_0 = 0 \text{ a.s.} \\
& X_t \mid \mathcal{W}_n \sim N(at, t\sigma^2), \text{ se } t \in \mathcal{W}_n \\
& COV(X_t, X_s \mid \mathcal{W}_n) = \text{Mín}(t, s)\sigma^2, \text{ se } t, s \in \mathcal{W}_n \\
& X_t - X_s \mid \mathcal{W}_n \sim N(a(t-s), (t-s)\sigma^2), \text{ se } t, s \in \mathcal{W}_n \\
& \text{ e } t-s \in \mathbb{R}_+ \\
& COV(X_t - X_s, X_v - X_u \mid \mathcal{W}_n) = 0, \text{ se } t, s, u, v \in \mathcal{W}_n \\
& \text{ e } t-s, v-u, u-t \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned} \tag{1.3.39}$$

### 1.3.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

Utilizemo-nos de uma notação análoga à da Seção 2. Assim, nossa amostra seria  $\mathbf{A} = (X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n})'$  e definamos  $\mathbf{B}$  como sendo  $\mathbf{B} = (\mathbf{A}; \mathcal{W}_n)'$ . Note que, se tomarmos  $\mathbf{A}_* = (X_{\tau_1}, X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \dots, X_{\tau_n} - X_{\tau_{n-1}})'$  e  $\mathcal{T} = (\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_{n-1})'$ , os elementos daquele vector dado  $\mathcal{T}$  serão independentes. Tem-se que os elementos de  $\mathcal{T}$  também serão independentes. Defina-se  $\mathbf{B}_* = (\mathbf{A}_*; \mathcal{T})'$ . Em termos de função de verossimilhança em  $a, \sigma^2$ ,  $\mathbf{B}_*$  mantém as propriedades de  $\mathbf{B}$  com a vantagem de que adquire as facilidades resultantes das propriedades de  $\mathbf{A}_*$  e  $\mathcal{T}$ .

É conhecido o fato de que, no caso do processo de Poisson, os incrementos dos tempos dos respectivos saltos são independentes e identicamente distribuídos, seguindo uma distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda$ , ou seja,  $\mathcal{T}$  é uma v.a. n-dimensional cujas marginais são *i.i.d* exponenciais de parâmetro  $\lambda$ .

Sabemos também que o processo de Wiener tem incrementos independentes, ou seja, como se vê em 1.3.39, as componentes de  $\mathbf{A}_*$  dado  $\mathcal{T}$  são independentes com distribuição normal n-dimensional. Temos, pelas propriedades de vetores aleatórios, que:

$$\begin{aligned}
L(a, \sigma^2 \mid \mathbf{B}_*) &= f_{\mathbf{B}_*}(\mathbf{x}; a, \sigma^2) \\
&= f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2 \mid \mathcal{T} = t) f_{\mathcal{T}}(t; a, \sigma^2) \\
&= f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2 \mid \mathcal{T} = t) f_{\mathcal{T}}(t),
\end{aligned}$$

visto que a distribuição de  $\mathcal{T}$  independe de  $a$  e  $\sigma^2$ . Assim, para maximizar a nossa função de verossimilhança, basta maximizar  $f(\mathbf{A}_*; a, \sigma^2 \mid \mathcal{T})$ . Note-se que tal expressão é funcionalmente idêntica à função de verossimilhança da Seção 2 a menos

da troca de  $t_i$  por  $\tau_i$ . Com isto, nossos estimadores de máxima verossimilhança são funcionalmente idênticos aos anteriormente encontrados:

$$\hat{a}_2 = \frac{X_{\tau_n}}{\tau_n} \quad (1.3.40)$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2}{\tau_i - \tau_{i-1}} - \frac{X_{\tau_n}^2}{\tau_n} \right) \quad (1.3.41)$$

É interessante notar que, se  $\lambda$  for desconhecido e o quisermos estimar, teríamos, por 1.3.38 que  $\tau_i - \tau_{i-1} \text{ i.i.d. } \sim \exp(\lambda)$ , ou seja, podemos estimar  $\lambda$  por:

$$\frac{\hat{1}}{\lambda} = \frac{\tau_n}{n},$$

estimador que teria as seguintes propriedades:

$$E \left( \frac{\hat{1}}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var \left( \frac{\hat{1}}{\lambda} \right) = \frac{1}{n\lambda^2}.$$

Voltando ao caso em que  $\lambda$  é conhecido, temos os seguintes resultados quanto aos nossos estimadores:

**Proposição 17** *A esperança e a variância de  $\hat{a}_2$  são dadas por :*

$$E(\hat{a}_2) = a \quad (1.3.42)$$

$$Var(\hat{a}_2) = \sigma^2 \frac{\lambda}{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (1.3.43)$$

Prova:

$$E(\hat{a}_2) = E\left(\frac{X_{\tau_n}}{\tau_n}\right) = E\left(E\left(\frac{X_{\tau_n}}{\tau_n} \mid \mathcal{W}_n\right)\right) = E\left(\frac{1}{\tau_n} a \tau_n\right) = a.$$

e

$$\begin{aligned}
Var(\hat{a}_2) &= \\
&= Var\left(\frac{X_{\tau_n}}{\tau_n}\right) = E\left(Var\left(\frac{X_{\tau_n}}{\tau_n} \mid \mathcal{W}_n\right)\right) + Var\left(E\left(\frac{X_{\tau_n}}{\tau_n} \mid \mathcal{W}_n\right)\right) \\
&= E\left(\frac{1}{\tau_n^2} \sigma^2 \tau_n\right) + Var(a) = \sigma^2 E\left(\frac{1}{\tau_n}\right) \\
&= \sigma^2 \frac{\lambda}{n-1}, \quad n \geq 2. \square
\end{aligned}$$

Caso  $n < 2$ , a última esperança calculada diverge, sendo portanto necessário que a amostra tenha no mínimo duas observações.

**Proposição 18**  $\hat{a}_2$  é consistente, independente da janela de observação amostrada.

Prova: Note-se, por 1.3.42 que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{a}_2) = a$$

e, por 1.3.43, que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{a}_2) = 0.$$

Pela desigualdade de Tchebyshev,  $\hat{a}_2$  é consistente.  $\square$

**Proposição 19**

$$\frac{\sqrt{2n}(\hat{a}_2 - a)}{\sqrt{2\lambda}\sigma} \sim t_{(2n)}.$$

Prova: Sabemos, sendo  $\hat{a}_2$  funcionalmente idêntico a  $\hat{a}_1$ , que:

$$\hat{a}_2 \mid \tau_n \sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{\tau_n}\right), \quad (1.3.44)$$

ou seja,

$$f_{\hat{a}_2|\tau_n}(x) = \frac{\sqrt{\tau_n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\tau_n(x-a)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1.3.45)$$

Temos, então:

$$\begin{aligned}
f_{\hat{a}_2}(x) &= \int_0^\infty f_{\hat{a}_2, \tau_n}(x, v) dv = \int_0^\infty f_{\tau_n}(v) f_{\hat{a}_2 | \tau_n = v}(x) dv \\
&= \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} v^{n-1} \exp(-\lambda v) \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{v(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dv \\
&= \frac{\lambda^n}{\sqrt{2\pi}\sigma \Gamma(n)} \int_0^\infty v^{n-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} v\right) \exp(-\lambda v) dv \\
&= \frac{\lambda^n}{\sqrt{2\pi}\sigma \Gamma(n)} \mathcal{L}\left(v^{n-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} v\right)\right),
\end{aligned}$$

onde  $\mathcal{L}(f)$  representa a transformada de Laplace da função  $f$ . Se tomarmos  $s = \lambda$ ,  $k = n + \frac{1}{2}$  e  $m = \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}$ , teremos:

$$\mathcal{L}\left(v^{k-1} \exp(-mv)\right) = \frac{\Gamma(k)}{(s+m)^k},$$

Isto implica em que:

$$\begin{aligned}
f_{\hat{a}_2}(x) &= \frac{\lambda^n}{\sqrt{2\pi}\sigma \Gamma(n)} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(\lambda + \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)} (2\pi\lambda\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{(x-a)^2}{2\lambda\sigma^2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

$$\text{Tomando } Y = \frac{\sqrt{2n}(\hat{a}_2 - a)}{\sqrt{2\lambda}\sigma};$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{\sqrt{2\lambda}\sigma}{\sqrt{2n}} f_{\hat{a}_2}\left(\frac{\sqrt{2\lambda}\sigma}{\sqrt{2n}} y + a\right) \\
&= \frac{\sqrt{2\lambda}\sigma}{\sqrt{2n}} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)} (2\pi\lambda\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\left(\frac{\sqrt{2\lambda}\sigma}{\sqrt{2n}} y + a - a\right)^2}{2\lambda\sigma^2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)} \left(1 + \frac{y^2}{2n}\right)^{-n-\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$\frac{\sqrt{2n}(\hat{a}_2 - a)}{\sqrt{2\lambda}\sigma} \sim t_{(2n)}. \square$$

Esta proposição nos dá um resultado muito interessante pois, a menos de uma operação linear, no caso uma translação e uma rotação,  $\hat{a}^2$  segue uma distribuição  $t$  de *Student* e sabemos que, sendo  $Y$  uma v.a. com distribuição  $t$  de Student com  $n$  graus de liberdade, tem ela a seguinte propriedade:

$$Y \xrightarrow{d} N(0,1), \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

Termos, assim, com relação ao nosso estimador:

$$\frac{\sqrt{2n}(\hat{a}_2 - a)}{\sqrt{2\lambda}\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1), \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.3.46)$$

Iremos agora analisar as propriedades do estimador de  $\sigma^2$ .

**Proposição 20** *A esperança e a variância de  $\hat{\sigma}_2^2$  são dadas por:*

$$E(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$Var(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4.$$

Prova: Por ser  $\hat{\sigma}_2^2$  funcionalmente idêntico a  $\hat{\sigma}_1^2$ , teremos que os momentos, condicionados aos tempos observados, daquele estimador serão funcionalmente idênticos aos momentos deste:

$$E(\hat{\sigma}_2^2 | \mathcal{W}_n) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \quad (1.3.47)$$

$$Var(\hat{\sigma}_2^2 | \mathcal{W}_n) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4. \quad (1.3.48)$$

Como 1.3.47 e 1.3.48 independem de nossa janela, temos provada nossa proposição.  $\square$

**Proposição 21**  $\hat{\sigma}_2^2$  é consistente, independente da janela de observação amostrada.

Prova: Tendo  $\hat{\sigma}_2^2$  as mesmas esperança e variância de  $\hat{\sigma}_1^2$  e sendo este consistente, fica provada a nossa proposição.  $\square$

Quanto à distribuição de  $\hat{\sigma}_2^2$ , temos a seguinte proposição:

**Proposição 22**

$$\frac{n\hat{\sigma}_2^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2.$$

Prova: Temos, visto ser  $\hat{\sigma}_2^2$  funcionalmente idêntico a  $\hat{\sigma}_1^2$ :

$$\frac{n\hat{\sigma}_2^2}{\sigma^2} \mid \mathcal{W}_n \sim \chi_{(n-1)}^2 \quad (1.3.49)$$

o que nos leva a:

$$\begin{aligned} f_{\hat{\sigma}_2^2}(x) &= \int_{\mathcal{W}_n} f_{\hat{\sigma}_2^2|\mathcal{W}_n}(x) f_{\mathcal{W}_n}(w) dw \\ &= f_{\hat{\sigma}_2^2|\mathcal{W}_n}(x) \int_{\mathcal{W}_n} f_{\mathcal{W}_n} dw = f_{\hat{\sigma}_2^2|\mathcal{W}_n}(x), \end{aligned}$$

tendo em vista a independência da distribuição de  $\hat{\sigma}_2^2$  em relação à janela. Assim, por 1.3.49, chega-se, finalmente, a:

$$\frac{n\hat{\sigma}_2^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2. \square$$

A próxima proposição nos dá um interessante resultado sobre os nossos estimadores:

**Proposição 23**  $\hat{a}_2$  e  $\hat{\sigma}_2^2$  são independentes.

Prova: Como os estimadores desta seção são funcionalmente idênticos aos da seção anterior, temos que  $\hat{a}_2$  dado  $\mathcal{T}$  e  $\hat{\sigma}_2^2$  dado  $\mathcal{T}$  são independentes, ou seja:

$$\begin{aligned} f_{\hat{a}_2, \hat{\sigma}_2^2}(x, y \mid \mathcal{T} = t) &= f_{\hat{a}_2}(x \mid \mathcal{T} = t) f_{\hat{\sigma}_2^2}(y \mid \mathcal{T} = t) \\ &= f_{\hat{a}_2}(x \mid \mathcal{T} = t) f_{\hat{\sigma}_2^2}(y), \end{aligned}$$

visto que  $\hat{\sigma}_2^2$  independente de  $\mathcal{T}$ . Utilizando-nos do fato de que as três v.a.s em questão têm distribuições absolutamente contínuas e trabalhando com o conjunto  $\{t : f_{\mathcal{T}}(t) > 0\}$ , temos:

$$\frac{f_{\hat{a}_2, \hat{\sigma}_2^2, \mathcal{T}}(x, y, t)}{f_{\mathcal{T}}(t)} = \frac{f_{\hat{a}_2, \mathcal{T}}(x, t) f_{\hat{\sigma}_2^2}(y)}{f_{\mathcal{T}}(t)}.$$

Simplificando-se a expressão acima e integrando-se em ambos os lados em relação a  $t$ , obtemos:

$$\int_{\mathcal{T}} f_{\hat{a}_2, \hat{\sigma}_2^2, \mathcal{T}}(x, y, s) ds = \int_{\mathcal{T}} f_{\hat{a}_2, \mathcal{T}}(x, s) f_{\hat{\sigma}_2^2}(y) ds.$$

A primeira integral representa a função densidade de probabilidade conjunta de nossos estimadores. Quanto à segunda, sendo  $\hat{\sigma}_2^2$  independente de  $\mathcal{T}$ , representa o produto das duas funções densidade marginais, ou seja:

$$f_{\hat{a}_2, \hat{\sigma}_2^2}(x, y) = f_{\hat{a}_2}(x) f_{\hat{\sigma}_2^2}(y). \square$$

Esta proposição juntamente com o resultado 1.3.46 e a Proposição 21 nos leva à seguinte proposição:

**Proposição 24**

$$\frac{\sqrt{2n}(\hat{a}_2 - 2)}{\sqrt{2\lambda\hat{\sigma}_2^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Prova: Temos, por 1.3.46 :

$$\frac{\sqrt{2n}(\hat{a}_2 - 2)}{\sqrt{2\lambda\sigma}} \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

e, pela proposição 21:

$$\frac{\hat{\sigma}_2}{\sigma} \xrightarrow{d} 1 > 0$$

e, ainda, pela proposição 23, utilizando-nos do Teorema de Slutsky:

$$\frac{\frac{\sqrt{2n}(\hat{a}_2 - a)}{\sqrt{2\lambda\sigma}}}{\frac{\hat{\sigma}_2}{\sigma}} \xrightarrow{d} N(0, 1) . \square$$

Como na seção anterior, iremos agora construir intervalos de confiança para os parâmetros  $a$  e  $\sigma^2$  baseados em nossos EMV's. Começemos pelo caso em que  $\sigma^2$  é conhecido. Temos que o estimador de  $a$  segue uma distribuição absolutamente contínua de forma que:

$$\frac{\sqrt{2n}(\hat{a}_2 - a)}{\sqrt{2\lambda\sigma}} \sim t_{(2n)}.$$

Temos, com  $\sigma^2$  conhecido:

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{2n}(\hat{a}_2 - a)}{\sqrt{2\lambda\sigma}}\right| \leq s_{\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$P\left(\hat{a}_2 - \frac{\sqrt{\lambda\sigma}}{\sqrt{n}} s_{\frac{\alpha}{2}} \leq a \leq \hat{a}_2 + \frac{\sqrt{\lambda\sigma}}{\sqrt{n}} s_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha,$$

onde  $s_{\frac{\alpha}{2}}$  é tal que  $P(t_{(2n)} \leq s_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ . Assim, um intervalo de confiança de  $100(1 - \alpha)\%$  seria dado por:

$$\left(\hat{a}_2 - \frac{\sqrt{\lambda\sigma}}{\sqrt{n}} s_{\frac{\alpha}{2}}, \hat{a}_2 + \frac{\sqrt{\lambda\sigma}}{\sqrt{n}} s_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Como  $\hat{\sigma}_2^2$  tem a mesma distribuição de  $\hat{\sigma}_1^2$ , podemos construir um intervalo de confiança construído a partir daquele estimador análogo ao deste, isto, é:

$$\left(0, \frac{n}{q_\alpha} \hat{\sigma}_2^2\right)$$

Neste esquema amostral, caso  $\sigma^2$  não seja conhecido, só poderemos montar um intervalo de confiança para  $a$  de forma assintótica. Utilizando-nos da Proposição 24, temos, analogamente aos intervalos normais que, para  $n$  grande, um intervalo de confiança de  $100(1 - \alpha)\%$  para  $a$  é aproximadamente:

$$\left( \hat{a}_2 - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{2n}} \hat{\sigma}_2 z_{\frac{\alpha}{2}}, \hat{a}_2 + \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{2n}} \hat{\sigma}_2 z_{\frac{\alpha}{2}} \right).$$

### 1.3.2 Estimação pelo Método dos Momentos

Estudaremos, agora, os estimadores de  $a$  e  $\sigma^2$ , pelo método dos momentos, que serão chamados de  $\tilde{a}_2$  e  $\tilde{\sigma}_2^2$ . Como veremos a seguir, este método não produz, para esse esquema de amostragem, estimadores aceitáveis. Para que possamos encontrar estimadores de momentos, devemos encontrar funções de nossa amostra de forma a igualarmos os momentos amostrais aos momentos teóricos.

$$E \left( \frac{X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \right) = E \left( E \left( \frac{X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \mid \mathcal{W}_n \right) \right) = a$$

e

$$\begin{aligned} E \left( \frac{(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2}{\tau_i - \tau_{i-1}} \right) &= E \left( E \left( \frac{(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2}{\tau_i - \tau_{i-1}} \mid \mathcal{W}_n \right) \right) \\ &= E \left( \sigma^2 + a^2 (\tau_i - \tau_{i-1}) \right) = \sigma^2 + \frac{a^2}{\lambda}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\tilde{a}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \quad (1.3.50)$$

e

$$\left( \tilde{\sigma}_2^2 + \frac{\tilde{a}_2^2}{\lambda} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2}{\tau_i - \tau_{i-1}},$$

o que implica em que:

$$\tilde{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2}{\tau_i - \tau_{i-1}} - \frac{1}{n\lambda} \left( \sum_{i=1}^n \frac{X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \right)^2 \right). \quad (1.3.51)$$

Neste caso,  $\tilde{\sigma}_2^2$  terá uma propriedade nada desejável que se refletirá na sua esperança. Sendo:

$$\begin{aligned} X_i &= X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} \\ t_i &= \tau_i - \tau_{i-1}, \end{aligned}$$

teremos certas condições sob as quais  $\tilde{\sigma}_2^2 < 0$ . Isto acontecerá se e somente se:

$$\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{t_i} - \frac{1}{n\lambda} \left( \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{t_i} \right)^2 \right) < 0,$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{t_i} < \frac{1}{n\lambda} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{X_i X_j}{t_i t_j} \right),$$

o que nos leva à condição:

$$n\lambda \sum_{i=1}^n \frac{(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2}{\tau_i - \tau_{i-1}} < \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})(X_{\tau_j} - X_{\tau_{j-1}})}{(\tau_i - \tau_{i-1})(\tau_j - \tau_{j-1})} \right).$$

Note que  $\tilde{\sigma}_2^2$  que é um estimador de um parâmetro positivo que, segundo as condições acima explicitadas, pode assumir valores negativos com probabilidade positiva, o que não é uma propriedade desejável.

**Proposição 25**  $\tilde{a}_2$  é não-viciado com variância infinita, ou seja,

$$E(\tilde{a}_2) = a \quad (1.3.52)$$

$$Var(\tilde{a}_2) = \infty. \quad (1.3.53)$$

Prova: 1.3.52 segue diretamente das propriedades dos EMM's e 1.3.53 segue de:

$$\begin{aligned} Var(\tilde{a}_2) &= Var \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Var \left( \frac{X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left( E \left( Var \left( \frac{X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \right) \mid \mathcal{W}_n \right) + Var \left( E \left( \frac{X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \right) \mid \mathcal{W}_n \right) \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left( E \left( \frac{\sigma^2}{\tau_i - \tau_{i-1}} \right) + Var(a) \right) = \frac{\sigma^2}{n^2} n E_1(0) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \lim_{s \rightarrow 0} E_1(s) = \infty, \end{aligned}$$

onde  $E_1(s) = \int_s^\infty \frac{\lambda}{s} \exp(-\lambda s) ds$  de forma que  $E_1 \rightarrow \infty$  quando  $s \rightarrow 0$ .

**Proposição 26** *A distribuição de  $\tilde{a}_2$  é absolutamente contínua com função densidade de probabilidade,  $f_{\tilde{a}_2}(x)$ , dada por:*

$$n\lambda^n (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left( \sum_{i=1}^n t_i^{-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\lambda \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n^2 (x-a)^2}{\sigma^2 \sum_{i=1}^n t_i^{-1}} \right) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1.$$

Prova: Como  $\tilde{a}_2$  é funcionalmente idêntico a  $\tilde{a}_1$ , temos:

$$\tilde{a}_2 \mid \tau \sim N \left( a, \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^{-1} \right),$$

ou seja,

$$f_{\tilde{a}_2 \mid \tau}(x) = \left( 2\pi n^{-2} \sigma^2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^{-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{n^2 (x-a)^2}{\sigma^2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^{-1}} \right)$$

Temos, então:

$$\begin{aligned} f_{\tilde{a}_2}(x) &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f_{\tilde{a}_2 \mid \tau}(x) f_\tau(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left( 2\pi n^{-2} \sigma^2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^{-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{n^2 (x-a)^2}{\sigma^2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^{-1}} \right) \\ &\quad \prod_{j=1}^n (\lambda \exp(-\lambda t_j) dt_{n+1-j}) \\ &= n\lambda^n (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left( \sum_{i=1}^n t_i^{-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\lambda \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n^2 (x-a)^2}{\sigma^2 \sum_{i=1}^n t_i^{-1}} \right) \\ &\quad dt_n dt_{n-1} \dots dt_1. \square \end{aligned}$$

**Proposição 27**

$$E(\tilde{\sigma}_2^2) = -\infty \quad (1.3.54)$$

$$Var(\tilde{\sigma}_2^2) \text{ indeterminada.} \quad (1.3.55)$$

Prova: Temos que:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\sigma}_2^2) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2}{\tau_i - \tau_{i-1}} - \frac{1}{n^2 \lambda} \left(\sum_{i=1}^n \frac{X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}}{\tau_i - \tau_{i-1}}\right)^2\right) \\
&= E\left(E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2}{\tau_i - \tau_{i-1}} - \frac{1}{n^2 \lambda} \left(\sum_{i=1}^n \frac{X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}}{\tau_i - \tau_{i-1}}\right)^2 \mid \mathcal{W}_n\right)\right) \\
&= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + a^2 (\tau_i - \tau_{i-1})) - \frac{1}{n^2 \lambda} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\sigma^2}{\tau_i - \tau_{i-1}} + n^2 a^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{n} \left(n\sigma^2 + n\frac{a^2}{\lambda}\right) - \frac{1}{n^2 \lambda} \sigma^2 n \lim_{s \rightarrow 0} E_1(s) - \frac{1}{n^2 \lambda} n^2 a^2 \\
&= \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n\lambda} \lim_{s \rightarrow 0} E_1(s)\right) = -\infty
\end{aligned}$$

1.3.55 segue diretamente de 1.3.54.  $\square$

Isto vem comprovar o fato acima mencionado de que  $\hat{\sigma}_2^2$  poderia assumir valores negativos com probabilidade positiva. Mais ainda, leva-nos a inferir ter sua distribuição uma cauda inferior pesada.

### 1.3.3 Conclusões da Janela com Tempos Observáveis

Novamente, os EMV's têm, a menos de constantes, distribuições conhecidas:

$$\frac{\sqrt{2n}(\hat{a}_2 - a)}{\sqrt{2\lambda}\sigma} \sim t_{(2n)}$$

$$\frac{n\hat{\sigma}_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

o que os torna muito interessantes para a construção de testes de hipóteses, intervalos de confiança, entre outros.

Não tentamos encontrar a distribuição de  $\hat{\sigma}_2^2$  visto ter esperança negativa, o que é inadmissível para um pretendo estimador de um parâmetro sempre positivo.

## 1.4 Tempos Aleatórios Não-Observáveis Ordenáveis

Consideremos, agora, seguindo a ordem estabelecida na Introdução,  $\mathcal{W}_n$  uma janela de observação aleatória cujas variáveis aleatórias que a compõem não são observáveis, mas tem-se conhecimento da ordem em que amostramos o nosso processo  $X$ . Isto quer dizer que os tempos em que os tempos em que o processo  $\{X_t : t \geq 0\}$  será tomado não serão conhecidos nem a posteriori. Temos, neste caso, novamente atendidas as propriedades 1.3.38 e 1.3.39, visto que estas são independentes do processo amostral utilizado.

### 1.4.1 Estimação de Máxima Verossimilhança

Como os  $\tau$ 's não são observáveis, o cálculo da função de verossimilhança se torna mais trabalhoso e o cálculo dos estimadores de máxima verossimilhança só é realizável por meios numéricos, como ver-se-á em seguida.

Sejam  $\mathbf{A}_*$  e  $\mathcal{T}$  como no caso anterior. Estamos interessados em calcular estimadores de máxima verossimilhança baseados em nossa amostra  $\mathbf{A}_*$ , ou seja, desejamos maximizar  $L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*)$  com respeito a  $a$  e  $\sigma^2$ . Temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*) &= f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2) \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f_{\mathbf{A}_*}(x, t_1, t_2, \dots, t_n; a, \sigma^2) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2 | t) f_{\mathcal{T}}(t; a, \sigma^2) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1, \end{aligned}$$

onde  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)'$ .

Utilizando 1.3.38 e 1.3.39, temos:

$$\begin{aligned} L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*) &= \int_{\mathcal{T}} f_{\mathcal{T}}(t; a, \sigma^2) f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2 | t) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{\sigma \sqrt{2\pi(t_1 - t_{n-1})}} \exp \left( - \left( \sum_{i=1}^n \left( \left( \lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2} \right) (t_i - t_{i-1}) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2}{2\sigma^2(t_i - t_{i-1})} + \frac{a}{\sigma^2} X_{t_i} \right) \right) \right) d(t_n - t_{n-1}) d(t_{n-1} - t_{n-2}) \dots dt_1 \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^n \int_0^\infty \frac{\lambda (t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left( - \left( \lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2} \right) (t_i - t_{i-1}) + \frac{(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2}{2\sigma^2 (t_i - t_{i-1})} + \frac{a}{\sigma^2} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \right) d(t_i - t_{i-1}),$$

com  $\tau_0 = 0$  a.s.

Note-se que cada elemento do produtório acima pode ser descrito como uma transformada de Laplace da função :

$$F(r_i) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r_i}} \exp \left( - \frac{k_i^2}{2\sigma^2 r_i} \right)$$

multiplicada pela constante  $\frac{\lambda}{\sqrt{2\sigma}} \exp \left( \frac{a}{\sigma^2} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \right)$ , tomando-se  $s = \lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2}$ ,  $k_i = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|$  e  $r_i = t_i - t_{i-1}$ , cuja solução,  $\mathcal{L}(F(r_i))$ , é:

$$\mathcal{L}(F(r_i)) = \frac{1}{\sqrt{s}} \exp(-k_i \sqrt{s}).$$

Assim, temos que a nossa função de verossimilhança,  $L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*)$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*) &= \prod_{i=1}^n \frac{\lambda}{\sqrt{2\sigma}} \left( \lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{a}{\sigma^2} (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}) + \right. \\ &\quad \left. - \left( \lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} |X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}| \right) \\ &= \left( \frac{\lambda}{\sqrt{2\sigma}} \right)^n \left( \lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2} \right)^{-\frac{n}{2}} \exp \left( \frac{a}{\sigma^2} X_{\tau_n} - \left( \lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \sum_{i=1}^n |X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}| \right). \end{aligned}$$

Esta função, porém, não nos permite encontrar uma solução explícita de  $\hat{a}_3$  e  $\hat{\sigma}_3^2$  de forma que  $L(\hat{a}_3, \hat{\sigma}_3^2 | \mathbf{A}_*)$  seja o máximo para  $L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  e  $\sigma \in \mathbb{R}_+$ . Seria interessante se conseguíssemos descobrir as situações em que existe máximo para esta função. Note-se que esta função pode ser colocada com o produto das funções  $g$  e  $h$ , onde:

$$g(a, \sigma^2) = \left( \frac{\lambda}{\sqrt{2\sigma}} \right)^n \left( \lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2} \right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$h(a, \sigma^2) = \exp \left( \frac{a}{\sigma^2} X_{\tau_n} - \left( \lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \sum_{i=1}^n |X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}| \right).$$

A função  $g$  é tal que diverge, como função de  $a$  e  $\sigma^2$ , somente se  $\sigma^2 \rightarrow 0$ . Entretanto, caso  $\sigma^2 \rightarrow 0$ ,  $h$  pode convergir para 0 ou divergir, se, respectivamente,  $\log(h) > 0$  ou  $\log(h) < 0$ . Como  $h$  é uma função exponencial enquanto  $g$  é apenas polinomial, se  $h$  convergir, mesmo que  $g$  diverja,  $gh$  convergirá. Com isto, para que exista um máximo, o termo da exponencial não deve ser positivo, ou seja:

$$\frac{a}{\sigma^2} X_{\tau_n} - \left( \lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \sum_{i=1}^n |X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}| < 0. \quad (1.4.56)$$

Como  $X_{\tau_n} = \sum_{i=1}^n (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})$ ,  $|X_{\tau_n}| \leq \sum_{i=1}^n |X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}|$ , para que a condição 1.4.56 seja satisfeita, basta-nos tomar:

$$\frac{|a|}{\sigma^2} < \left( \lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sigma}, \quad (1.4.57)$$

sendo que toma-se  $|a|$  no lugar de  $a$ , pela possibilidade de que o primeiro termo de 1.4.56 seja o produto de dois fatores negativos sendo que  $a$  poderia ser maior, em módulo, do que o respectivo coeficiente do segundo termo. Tome-se o quadrado de cada um termos de 1.4.57. Teremos que nos basta ser  $\lambda$  positivo. Como sabemos que o parâmetro do processo de Poisson é positivo, existe sempre um vetor de estimadores de máxima verossimilhança. O estudo das propriedades assintóticas destes estimadores seguiria provavelmente técnicas sofisticadas que fogem ao objetivo desta monografia.

## 1.4.2 Estimação pelo Método dos Momentos

Em contraste com o ocorrido na seção 1.3, os estimadores aqui obtidos terão propriedades satisfatórias, como ver-se-á em seguida.

Analogamente aos casos anteriores, para que possamos encontrar os estimadores de momentos, devemos encontrar funções de nossa amostra de forma a igualar os momentos amostrais aos momentos teóricos. Temos, por exemplo:

$$\begin{aligned} E(\lambda(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})) &= \lambda E(E(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} | \mathcal{W}_n)) = \lambda E(a(\tau_i - \tau_{i-1})) \\ &= a\lambda E(\tau_i - \tau_{i-1}) = a, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left( \lambda \left( X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} \right) \right) &= \\
 &= \lambda^2 \left( E \left( \text{Var} \left( X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} \mid \mathcal{W}_n \right) + \text{Var} \left( E \left( X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} \mid \mathcal{W}_n \right) \right) \right) \right) \\
 &= \lambda^2 \left( E \left( \left( \tau_i - \tau_{i-1} \right) \sigma^2 \right) + \text{Var} \left( a \left( \tau_i - \tau_{i-1} \right) \right) \right) \\
 &= \lambda^2 \left( \sigma^2 E \left( \tau_i - \tau_{i-1} \right) + a^2 \text{Var} \left( \tau_i - \tau_{i-1} \right) \right) \\
 &= \lambda^2 \left( \frac{\sigma^2}{\lambda} + \frac{a^2}{\lambda^2} \right) = \lambda \sigma^2 + a^2, \quad i = 1, 2, \dots, n,
 \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
 E \left( \left( \lambda \left( X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} \right) \right)^2 \right) &= \\
 &= \text{Var} \left( \lambda \left( X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} \right) \right) + E \left( \lambda \left( X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} \right) \right)^2 \\
 &= \lambda \sigma^2 + 2a^2.
 \end{aligned}$$

Segue que:

$$\hat{a}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda \left( X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} \right)$$

e

$$n \left( \lambda \hat{\sigma}_3^2 + 2\hat{a}_3^2 \right) = \sum_{i=1}^n \lambda^2 \left( X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} \right)^2.$$

Finalmente:

$$\hat{a}_3 = \frac{\lambda X_{\tau_n}}{n} \quad (1.4.58)$$

e

$$\hat{\sigma}_3^2 = \frac{\lambda}{n} \left( \sum_{i=1}^n \left( X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} \right)^2 - \frac{2X_{\tau_n}^2}{n} \right). \quad (1.4.59)$$

**Proposição 28** *A esperança e a variância de  $\hat{a}_3$  são dadas por:*

$$E \left( \hat{a}_3 \right) = a \quad (1.4.60)$$

$$Var(\tilde{a}_3) = \frac{\lambda\sigma^2 + a^2}{n}. \quad (1.4.61)$$

Prova: 1.4.60 segue diretamente das propriedades dos EMM's. Quanto a 1.4.61 :

$$\begin{aligned} Var(\tilde{a}_3) &= \\ &= Var\left(\lambda \frac{X_{\tau_n}}{n}\right) = \frac{\lambda^2}{n^2} (Var(E(X_{\tau_n} | \mathcal{W}_n)) + E(Var(X_{\tau_n} | \mathcal{W}_n))) \\ &= \frac{\lambda^2}{n^2} (Var(a\tau_n) + E(\sigma^2\tau_n)) = \frac{\lambda^2}{n^2} \left(a^2 \frac{n}{\lambda^2} + \sigma^2 \frac{n}{\lambda}\right) \\ &= \frac{\lambda\sigma^2 + a^2}{n}. \square \end{aligned}$$

**Proposição 29**  $\tilde{a}_3$  é consistente, qualquer que seja a janela de observação amostrada.

Prova: Temos  $E(\tilde{a}_3) = a$  e, por 1.4.61 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\tilde{a}_3) = 0.$$

Analogamente aos casos anteriores, segue da Desigualdade de Tchebyshev a consistência de  $\tilde{a}_3$ .  $\square$

**Proposição 30** A distribuição de  $\tilde{a}_3$  é tal que sua densidade é da seguinte forma:

$$f_{\tilde{a}_3}(x) = \frac{n\lambda^n}{\Gamma(n)} \mathcal{L} \left( v^{n-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{\lambda^2 a^2 v^3 - 2\lambda a n x v^2}{2\lambda^2 \sigma^2} \right) \right)$$

Prova: Sendo  $\tilde{a}_3 | \mathcal{W}_n$  uma combinação linear de variáveis aleatórias normais:

$$\tilde{a}_3 | \mathcal{W}_n \sim N \left( \frac{\lambda a \tau_n}{n}, \frac{\lambda^2 \sigma^2}{n^2 \tau_n} \right),$$

o que nos levaria a:

$$\begin{aligned} f_{\hat{a}_3|y_n}(x) &= f_{\hat{a}_3|\tau_n}(x) = \frac{n\sqrt{\tau_n}}{\sqrt{2\pi}\lambda\sigma} \exp\left(-\frac{n^2\tau_n\left(x - \frac{\lambda a\tau_n}{n}\right)^2}{2\lambda^2\sigma^2}\right) = \\ &= \frac{n\sqrt{\tau_n}}{\sqrt{2\pi}\lambda\sigma} \exp\left(-\frac{\tau_n(nx - \lambda a\tau_n)}{2\lambda^2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f_{\hat{a}_3}(x) &= \int_{\tau_n} f_{\tau_n}(v) f_{\hat{a}_3|\tau_n=v}(x) dv \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} v^{n-1} \exp(-\lambda v) \frac{n\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}\lambda\sigma} \exp\left(-\frac{v(nx - \lambda av)}{2\lambda^2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{n\lambda^n}{\Gamma(n)} \mathcal{L}\left(v^{n-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda^2 a^2 v^3 - 2\lambda a n x v^2}{2\lambda^2\sigma^2}\right)\right). \square \end{aligned}$$

A solução explícita da transformada de Laplace em questão não nos parece possível visto que não foi encontrada em nenhum dos livros consultados nem fomos capazes de computá-la.

Iremos, a seguir, discutir as propriedades do estimador de  $\sigma^2$ . Para o cálculo da variância de  $\hat{\sigma}_3^2$ , necessitaremos, como nos casos anteriores, da notação matricial, sendo as seguintes as definições pertinentes a este caso:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (X_{\tau_1}, X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \dots, X_{\tau_n} - X_{\tau_{n-1}})' \\ \mu\mathbf{U} &= a(\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_{n-1})' \\ \Sigma\mathbf{U} &= \sigma^2 \text{diag}(\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_{n-1}) \\ \mathbf{K} &= \mathbf{I}'\mathbf{I} \\ \mathbf{T} &= (T_1, T_2, \dots, T_n)' \sim N(\mathbf{0}_n, \mathbf{I}_n) \end{aligned}$$

### Proposição 31

$$E(\hat{\sigma}_3^2) = \frac{n-2}{n}\sigma^2 - \frac{2}{\lambda n}a^2 \quad (1.4.62)$$

$$\begin{aligned} Var(\hat{\sigma}_3^2) &= \frac{1}{\lambda^2 n^3} \left( \lambda^2 \sigma^4 (5n^2 - 2n + 12) + 4\lambda a^2 \sigma^2 (5n^2 + n + 8) + \right. \\ &\quad \left. + 4a^4 (3n^2 + 2n + 6) \right). \quad (1.4.63) \end{aligned}$$

Prova: Temos que:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\sigma}_3^2) &= E\left(\frac{\lambda}{n}\left(\sum_{i=1}^n (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2 - \frac{2X_{\tau_n}^2}{n}\right)\right) \\
&= \frac{\lambda}{n}\left(\sum_{i=1}^n E\left(E\left((X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2 \mid \mathcal{W}_n\right)\right) - \frac{2}{n}E\left(E\left(X_{\tau_n}^2 \mid \mathcal{W}_n\right)\right)\right) \\
&= \frac{\lambda}{n}\left(\sum_{i=1}^n E\left(\sigma^2(\tau_i - \tau_{i-1}) + a^2(\tau_i - \tau_{i-1})^2\right) - \frac{2}{n}E\left(\sigma^2\tau_n + a^2\tau_n^2\right)\right) \\
&= \frac{\lambda}{n}\left(\sum_{i=1}^n \left(\sigma^2\frac{1}{\lambda} + a^2\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\right)\right) - \frac{2}{n}\left(\sigma^2\frac{n}{\lambda} + a^2\left(\frac{n}{\lambda^2} + \frac{n^2}{\lambda^2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{\lambda}{n}\left(\sigma^2\frac{n}{\lambda} + a^2\frac{2n}{\lambda^2} - \sigma^2\frac{2}{\lambda} - a^2\frac{2(n+1)}{\lambda^2}\right) \\
&= \frac{\lambda}{n}\left(\sigma^2\frac{n-2}{\lambda} - a^2\frac{2}{\lambda^2}\right) \\
&= \frac{n-2}{n}\sigma^2 - \frac{2}{\lambda n}a^2.
\end{aligned}$$

Usando a notação matricial, podemos escrever  $\hat{\sigma}_3^2$  na forma:

$$\hat{\sigma}_3^2 = \frac{\lambda}{n}\mathbf{U}'\mathbf{U} - \frac{2\lambda}{n^2}\mathbf{U}'\mathbf{K}\mathbf{U}.$$

Alguns momentos condicionados a  $\mathcal{W}_n$  das formas quadráticas envolvidas na fórmula acima são:

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{U}'\mathbf{U} \mid \mathcal{W}_n) &= \\
&= E\left(\mathbf{T}'\Sigma_{\mathbf{U}}\mathbf{T} + 2\mu'_{\mathbf{U}}\Sigma_{\mathbf{U}}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T} + \mu'_{\mathbf{U}}\mathbf{K}\mu_{\mathbf{U}} \mid \mathcal{W}_n\right) \\
&= E\left(\sigma^2\sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})T_i^2 + a^2\sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2 \mid \mathcal{W}_n\right) \\
&= \sigma^2\sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})E(T_i^2 \mid \mathcal{W}_n) + a^2\sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2 \\
&= \sigma^2\tau_n + a^2\sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(\mathbf{U}'\mathbf{U} \mid \mathcal{W}_n) &= \\
&= Var\left(\sigma^2\sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})T_i^2 + 2a\sigma\sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^{\frac{3}{2}}T_i \mid \mathcal{W}_n\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^4 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2 \text{Var} (T_i^2 \mid \mathcal{W}_n) + \\
&\quad + 4a^2 \sigma^2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^3 \text{Var} (T_i \mid \mathcal{W}_n) \\
&= 2\sigma^4 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2 + 4a^2 \sigma^2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{U}'\mathbf{K}\mathbf{U} \mid \mathcal{W}_n) &= \\
&= E\left(\mathbf{T}'\Sigma_{\mathbf{U}}^{\frac{1}{2}}\mathbf{K}\Sigma_{\mathbf{U}}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T} + 2\mu'_{\mathbf{U}}\mathbf{K}\Sigma_{\mathbf{U}}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T} + \mu'_{\mathbf{U}}\mathbf{K}\mu_{\mathbf{U}} \mid \mathcal{W}_n\right) \\
&= E\left(\sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{\tau_i - \tau_{i-1}} \sqrt{\tau_j - \tau_{j-1}} T_i T_j \mid \mathcal{W}_n\right) + \\
&\quad + E\left(2a\sigma\tau_n \sum_{i=1}^n \sqrt{\tau_i - \tau_{i-1}} T_i \mid \mathcal{W}_n\right) + a^2\tau_n^2 \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{\tau_i - \tau_{i-1}} \sqrt{\tau_j - \tau_{j-1}} E(T_i T_j \mid \mathcal{W}_n) + a^2\tau_n^2 \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1}) E(T_i^2 \mid \mathcal{W}_n) + a^2\tau_n^2 = \sigma^2\tau_n + a^2\tau_n^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\mathbf{U}'\mathbf{K}\mathbf{U} \mid \mathcal{W}_n) &= \\
&= \text{Var}\left(\mathbf{T}'\Sigma_{\mathbf{U}}^{\frac{1}{2}}\mathbf{K}\Sigma_{\mathbf{U}}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T} + 2\mu'_{\mathbf{U}}\mathbf{K}\Sigma_{\mathbf{U}}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T} + \mu'_{\mathbf{U}}\mathbf{K}\mu_{\mathbf{U}} \mid \mathcal{W}_n\right) \\
&= \text{Var}\left(\sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{\tau_i - \tau_{i-1}} \sqrt{\tau_j - \tau_{j-1}} T_i T_j \mid \mathcal{W}_n\right) + \\
&\quad + \text{Var}\left(2a\sigma\tau_n \sum_{i=1}^n \sqrt{\tau_i - \tau_{i-1}} T_i \mid \mathcal{W}_n\right) \\
&= \sigma^4 \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{\tau_i - \tau_{i-1}} \sqrt{\tau_j - \tau_{j-1}} T_i T_j, \right. \\
&\quad \left. \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sqrt{\tau_k - \tau_{k-1}} \sqrt{\tau_l - \tau_{l-1}} T_k T_l \mid \mathcal{W}_n\right) \\
&\quad + 4a^2 \sigma^2 \tau_n^2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1}) \text{Var}(T_i \mid \mathcal{W}_n) \\
&= \sigma^4 \left( \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2 \text{Var}(T_i^2 \mid \mathcal{W}_n) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{i \neq j} (\tau_i - \tau_{i-1}) (\tau_j - \tau_{j-1}) \text{Var} (T_i T_j \mid \mathcal{W}_n) + 4a^2 \sigma^2 \tau_n^3 \\
& = 2\sigma^4 \left( \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2 + \sum_{i \neq j} (\tau_i - \tau_j) (\tau_i - \tau_j) \right) + 4a^2 \sigma^2 \tau_n^3 \\
& = 2\sigma^4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1}) (\tau_j - \tau_{j-1}) + 4a^2 \sigma^2 \tau_n^3 \\
& = 2\sigma^4 \tau_n^2 + 4a^2 \sigma^2 \tau_n^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Cov} (\mathbf{U}' \mathbf{U}, \mathbf{U}' \mathbf{K} \mathbf{U} \mid \mathcal{W}_n) = \\
& = \text{Cov} \left( \sigma^2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1}) T_i^2 + 2a\sigma \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^{\frac{3}{2}} T_i, \right. \\
& \quad \sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{\tau_i - \tau_{i-1}} \sqrt{\tau_j - \tau_{j-1}} T_i T_j \\
& \quad \left. + 2a\sigma \tau_n \sum_{i=1}^n \sqrt{\tau_i - \tau_{i-1}} T_i \mid \mathcal{W}_n \right) \\
& = \sigma^4 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2 \text{Var} (T_i^2 \mid \mathcal{W}_n) + \\
& \quad + 4a^2 \sigma^2 \tau_n \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2 \text{Var} (T_i \mid \mathcal{W}_n) \\
& = 2\sigma^4 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2 + 4a^2 \sigma^2 \tau_n \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E (\text{Var} (\mathbf{U}' \mathbf{U} \mid \mathcal{W}_n)) = \\
& = E \left( 2\sigma^4 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2 + 4a^2 \sigma^2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^3 \right) \\
& = 2\sigma^4 \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma(1+2)}{\Gamma(1)} \lambda^{-2} + 4a^2 \sigma^2 \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1)} \lambda^{-3} \\
& = \frac{4n\sigma^4}{\lambda^2} + \frac{24a^2 \sigma^2}{\lambda^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E (\text{Var} (\mathbf{U}' \mathbf{K} \mathbf{U} \mid \mathcal{W}_n)) \\
& = E (2\sigma^4 \tau_n + 4a^2 \sigma^2 \tau_n^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sigma^4 \Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} \lambda^{-2} + 4a^2 \sigma^2 \frac{\Gamma(n+3)}{\Gamma(n)} \lambda^{-3} \\
&= \frac{2(n+1)n\sigma^4}{\lambda^2} + \frac{4(n+2)(n+1)na^2\sigma^2}{\lambda^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(E(\mathbf{U}'\mathbf{U} \mid \mathcal{W}_n)) &= \\
&= Var\left(\sigma^2\tau_n + a^2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2\right) \\
&= \sigma^4 \frac{n}{\lambda^2} + a^4 n \left( \frac{\Gamma(1+4)}{\Gamma(1)} \lambda^{-4} - (2\lambda^{-2})^2 \right) \\
&= \frac{n\sigma^4}{\lambda^2} + \frac{20na^4}{\lambda^4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(E(\mathbf{U}'\mathbf{K}\mathbf{U} \mid \mathcal{W}_n)) &= \\
&= Var\left(\sigma^2\tau_n + a^2\tau_n^2\right) \\
&= \frac{n\sigma^4}{\lambda^2} + a^4 \left( \frac{\Gamma(n+4)}{\Gamma(n)} \lambda^{-4} - \left( \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} \lambda^{-2} \right)^2 \right) \\
&= \frac{n\sigma^4}{\lambda^2} + \frac{2(n+3)(n+1)na^4}{\lambda^4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(E(\mathbf{U}'\mathbf{U} \mid \mathcal{W}_n), E(\mathbf{U}'\mathbf{K}\mathbf{U} \mid \mathcal{W}_n)) &= \\
&= Cov\left(\sigma^2\tau_n + a^2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2, \sigma^2\tau_n + a^2\tau_n^2\right) \\
&= \sigma^4 Var(\tau_n) + a^2 \sigma^2 Cov(\tau_n, \tau_n^2) \\
&\quad + a^2 \sigma^2 Cov\left(\sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2, \tau_n\right) + a^4 Cov\left(\sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2, \tau_n^2\right) \\
&= \frac{n\sigma^4}{\lambda^2} + a^2 \sigma^2 \left( E(\tau_n^3) - E(\tau_n) E(\tau_n^2) \right) + \\
&\quad + a^2 \sigma^2 \left( Cov\left(\sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2, \sum_{j=1}^n (\tau_j - \tau_{j-1})\right) + \right. \\
&\quad \left. + a^4 Cov\left(\sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2, \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\tau_j - \tau_{j-1})(\tau_k - \tau_{k-1})\right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n\sigma^4}{\lambda^2} + a^2\sigma^2 \left( \frac{\Gamma(n+3)}{\lambda^3\Gamma(n)} - \frac{n}{\lambda} \frac{\Gamma(n+2)}{\lambda^2\Gamma(n)} \right) + \\
&\quad + a^2\lambda^2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\Gamma(1+3)}{\lambda^3\Gamma(1)} - \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma(1+2)}{\lambda^2\Gamma(1)} \right) + \\
&\quad + a^4 \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\Gamma(1+4)}{\lambda^4\Gamma(1)} - \left( \frac{\Gamma(1+2)}{\lambda^2\Gamma(1)} \right)^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{i \neq j} \left( \frac{\Gamma(1+3)}{\lambda^3\Gamma(1)} \frac{1}{\lambda} - \frac{\Gamma(1+2)}{\lambda^2\Gamma(1)} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\lambda} \right) \right) \\
&= \frac{n\sigma^4}{\lambda^2} + \frac{2(n+3)na^2\sigma^2}{\lambda^3} + \frac{4n(2n+3)a^4}{\lambda^4}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
E(Cov(\mathbf{U}'\mathbf{U}, \mathbf{U}'\mathbf{K}\mathbf{U} \mid \mathcal{W}_n)) &= \\
&= E \left( 2\sigma^4 \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2 + 4a^2\sigma^2 \tau_n \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2 \right) \\
&= 2\sigma^4 n \frac{2}{\lambda^2} + 4a^2\sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E((\tau_i - \tau_{i-1})(\tau_j - \tau_{j-1})^2) \\
&= \frac{4n\sigma^4}{\lambda^2} + 4a^2\sigma^2 (nE(\tau_1^3) + n(n-1)E(\tau_1)E(\tau_1^2)) \\
&= \frac{4n\sigma^4}{\lambda^2} + 4a^2\sigma^2 \left( \frac{6n}{\lambda^3} + \frac{2n(n-1)}{\lambda^3} \right) \\
&= \frac{4n\sigma^4}{\lambda^2} + \frac{8(n+2)na^2\sigma^2}{\lambda^3}.
\end{aligned}$$

Utilizando a seqüência de expressões acima, temos:

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\sigma}_s^2) &= Var \left( \frac{\lambda}{n} \mathbf{U}'\mathbf{U} - \frac{2\lambda}{n^2} \mathbf{U}'\mathbf{K}\mathbf{U} \right) \\
&= \frac{\lambda^2}{n^2} Var(\mathbf{U}'\mathbf{U}) + \frac{4\lambda^2}{n^4} Var(\mathbf{U}'\mathbf{K}\mathbf{U}) - \frac{2\lambda^2}{n^3} Cov(\mathbf{U}'\mathbf{U}, \mathbf{U}'\mathbf{K}\mathbf{U}) \\
&= \frac{\lambda^2}{n^2} \left( \frac{4n\sigma^4}{\lambda^2} + \frac{24na^2\sigma^2}{\lambda^3} + \frac{n\sigma^4}{\lambda^2} + \frac{20na^4}{\lambda^4} \right) + \frac{4\lambda^2}{n^4} \left( \frac{2(n+1)n\sigma^4}{\lambda^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4(n+2)(n+1)na^2\sigma^2}{\lambda^3} + \frac{n\sigma^4}{\lambda^2} + \frac{2(n+3)(n+1)na^4}{\lambda^4} \right) - \frac{2\lambda^2}{n^3} \left( \frac{4n\sigma^4}{\lambda^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{8(n+2)na^2\sigma^2}{\lambda^3} + \frac{n\sigma^4}{\lambda^2} + \frac{2(n+3)na^2\sigma^2}{\lambda^3} + \frac{4n(2n+3)a^4}{\lambda^4} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^4}{n^3} (5n^2 - 2n + 12) + \frac{4a^2\sigma^2}{\lambda n^3} (5n^2 + n + 8) + \frac{8a^4}{\lambda^2 n^3} (3n^2 + 2n + 6) \\
&= \frac{1}{\lambda^2 n^3} \left( \lambda^2 \sigma^4 (5n^2 - 2n + 12) + 4\lambda a^2 \sigma^2 (5n^2 + n + 8) + 4a^4 (3n^2 + 2n + 6) \right). \square
\end{aligned}$$

Observe-se que a esperança deste estimador pode ser negativa, mas, para  $n$  suficientemente grande, isto não vale, visto que:

**Proposição 32**  $\tilde{\sigma}_3^2$  é consistente, independente da janela de observação amostrada.

Prova: Tomando-se o limite da esperança e variância de  $\tilde{\sigma}_3^2$  quando  $n \rightarrow \infty$ , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\tilde{\sigma}_3^2) = \sigma^2 \quad (1.4.64)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\tilde{\sigma}_3^2) = 0. \quad (1.4.65)$$

Por raciocínio análogo aos anteriores,  $\tilde{\sigma}_3^2$  é consistente, independente da janela de observação.  $\square$

Ao contrário de alguns dos casos anteriores, não teremos, este estimador seguindo a distribuição qui-quadrado, como ver-se-á em seguida. Para utilizar o já referido resultado de Searle (1982) pág. 57 sobre distribuição de formas quadráticas, coloquemos  $\tilde{\sigma}_3^2$  na forma:

$$\tilde{\sigma}_3^2 = \mathbf{U}'\mathbf{V}\mathbf{U},$$

onde:

$$\mathbf{V} = \frac{\lambda}{n} \mathbf{I}_n - \frac{2\lambda}{n^2} \mathbf{K},$$

ou seja,

$$v_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda(n-2)}{n^2} & i = j \\ -\frac{2\lambda}{n^2} & i \neq j \end{cases}$$

Por Searle (1982) pág. 57, basta-nos provar que  $\mathbf{V}$  não é idempotente para que  $\tilde{\sigma}_3^2$  não seja qui-quadrado. Seja  $\mathbf{P} = \mathbf{V}^2 = [p_{ij}]$ :

$$\begin{aligned} p_{ii} &= \sum_{j \neq i}^n b_{ij}b_{ji} + b_{ii}^2 \\ &= \sum_{j \neq i}^n \left( -\frac{2\lambda}{n^2} \right) + \left( \frac{\lambda(n-2)}{n^2} \right)^2 = \frac{\lambda^2}{n^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \sum_{k \neq i, j}^n b_{ik}b_{kj} + b_{ii}b_{ij} + b_{ij}b_{jj} \\ &= (n-2) \frac{4\lambda^2}{n^4} - 2 \frac{2\lambda}{n^2} \frac{\lambda(n-2)}{n^2} = 0. \end{aligned}$$

Temos, então, que:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda^2}{n^2} & i = j \\ 0 \neq & i \neq j, \end{cases}$$

o que nos leva ao fato de que  $p_{ij} \neq b_{ij}$ , ou seja,  $\tilde{\sigma}_3^2$  não segue uma distribuição qui-quadrado, o que é coerente, visto que sua esperança pode ser negativa.

Este último fato, juntamente com a forma desconhecida da distribuição de  $\tilde{a}_3$ , não nos permite discutir intervalos de confiança neste caso. Um estudo mais elaborado das respectivas distribuições seria desejável.

## 1.5 Tempos Aleatórios Não-Ordenáveis

Nesta seção, iremos considerar um esquema amostral em que a janela de observação será composta por variáveis aleatórias não-observáveis. Além disso, não saberemos em que ordem, no tempo, a referida amostra foi obtida. Devido a esta falta de informação, como na seção anterior, os resultados obtidos neste caso serão menos expressivos do que os das Seções 1.2 e 1.3.

Mantendo-se notação análoga à das seções anteriores, teremos  $\mathbf{A} = (X_{\tau_{i_1}}, X_{\tau_{i_2}}, \dots, X_{\tau_{i_n}})'$ , onde  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  é uma permutação de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Como não sabemos em que instante de tempo ou ordem cada componente de nossa amostra foi observada, precisamos descobrir uma função de  $A$  que se mostre utilizável nestas condições. Note-se que  $A$  nada mais é do que uma permutação da amostra no caso em que os  $\tau$ 's eram não-observáveis mas cuja ordem de observação era conhecida.

Notemos ainda que  $X_{\tau_j}$ , dado  $(X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n})$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$  segue uma distribuição uniforme discreta, isto é, assume, com probabilidades positivas, apenas os valores  $X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n}$ :

$$P(X_{\tau_j} = y \mid X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n}) = \frac{1}{n} \mathbb{1}(y)_{\{X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n}\}}; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Isto implica em que:

$$P(X_{\tau_1} = y_1, X_{\tau_2} = y_2, \dots, X_{\tau_n} = y_n \mid X_{\tau_1} = x_1, X_{\tau_2} = x_2, \dots, X_{\tau_n} = x_n) = \begin{cases} 0 & \text{existir } i \text{ tal que } y_i \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ \frac{1}{n!} & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.5.66)$$

Necessitaremos das seguintes proposições adaptadas de James (1981) págs. 166, 167 e 175:

### Proposição 33 *Princípio da Preservação das Chances Relativas*

Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias absolutamente contínuas de forma que tenhamos:

$$\frac{f_{X,Y}(x_1, y)}{f_{X,Y}(x_2, y)} = g(x_1, x_2),$$

para todo  $x_1, x_2$  onde a densidade seja positiva.

Temos que  $f_{X|Y=y}(x)$  é densidade condicional de  $X$  dado  $Y = y$  se e somente se:

$$\frac{f_{X|Y=y}(x_1)}{f_{X|Y=y}(x_2)} = g(x_1, x_2),$$

para todo  $x_1, x_2$  onde a densidade seja positiva.

e

### Proposição 34 *Princípio da Substituição*

Sejam  $Y$  uma variável aleatória e  $h(Y)$  uma função de  $Y$ . Temos, então, que:

$$E(h(Y) \mid Y = y) = h(y).$$

Note-se que nossa amostra é uma permutação de  $(X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n})$ . Utilizando-nos do Princípio da Preservação das Chances Relativas:

$$f_{X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n}}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{n!} f_{X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n}}(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Logo, a função-densidade de nossa amostra atual é proporcional à obtida na seção anterior. Com isto, existe o vetor de estimadores de máxima verossimilhança; entretanto, novamente, sua solução é numérica.

#### 1.5.1 Estimação pelo Método dos Momentos

Sendo  $X_{\tau_j}$  dado  $\{X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n}\}$  uma uniforme discreta, temos:

$$E(X_{\tau_j} \mid X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\tau_i}$$

e

$$E(X_{\tau_j}^2 \mid X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\tau_i}^2,$$

pelo Princípio da Substituição.

Para que possamos encontrar os estimadores pelo método de momentos,  $\tilde{a}_4$  e  $\tilde{\sigma}_4^2$ , devemos conhecer o primeiro e segundo momentos da variável acima descrita:

$$\begin{aligned} E(X_{\tau_j}) &= E(E(X_{\tau_j} \mid X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n})) \\ &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\tau_i}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E(E(X_{\tau_j} \mid \mathcal{W}_n)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E(ar_j) = \frac{a}{n} \sum_{j=1}^n \frac{j}{\lambda} = \frac{a}{n\lambda} \sum_{j=1}^n j \end{aligned}$$

$$= \frac{a}{n\lambda} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2\lambda} a.$$

e

$$\begin{aligned} E(X_{\tau_{i_j}}^2) &= E\left(E(X_{\tau_{i_j}}^2 \mid X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n})\right) \\ &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{\tau_j}^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E\left(E(X_{\tau_j}^2 \mid \mathcal{W}_n)\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E\left(\text{Var}(X_{\tau_j} \mid \mathcal{W}_n) + (E(X_{\tau_j} \mid \mathcal{W}_n))^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E(\sigma^2 \tau_j + a^2 \tau_j^2) = \frac{1}{n} \left(a^2 \sum_{j=1}^n E(\tau_j^2) + \sigma^2 \sum_{j=1}^n \tau_j\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(a^2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{\lambda^2} + \frac{j^2}{\lambda^2}\right) + \sigma^2 \sum_{j=1}^n \frac{j}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{\lambda^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{\sigma^2 n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n\lambda} \left(\frac{a^2 3n(n+1) + (2n+1)n(n+1)}{6} + \sigma^2 \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{a^2(n+1)(n+2)}{\lambda^2 3} + \sigma^2 \frac{n+1}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Temos, portanto, que:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{2\lambda}{n+1} X_{\tau_{i_j}} = \tilde{a}_4$$

e

$$\sum_{j=1}^n X_{\tau_{i_j}}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{a}_4^2 (n+1)(n+2)}{\lambda^2 3} + \tilde{\sigma}_4^2 \frac{n+1}{2\lambda},$$

chegando-se finalmente a:

$$\tilde{a}_4 = \frac{2\lambda}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n X_{\tau_{i_j}} \quad (1.5.67)$$

e

$$\tilde{\sigma}_4^2 = \frac{2\lambda}{n+1} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{\tau_{i_j}}^2 - \frac{(n+1)(n+2)}{3\lambda^2} \tilde{a}_4^2 \right)$$

$$= \frac{2\lambda}{n+1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\tau_i}^2 - 8 \frac{(n+1)(n+2)}{3\lambda^2} \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( \sum_{j=1}^n X_{\tau_{i,j}} \right)^2 \right),$$

ou seja,

$$\hat{\sigma}_4^2 = \frac{2\lambda}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n X_{\tau_j}^2 - \frac{8(n+2)\lambda}{3n^2(n+1)^2} \left( \sum_{j=1}^n X_{\tau_{i,j}} \right)^2. \quad (1.5.68)$$

**Proposição 35**  $\hat{a}_4$  é não-viciado com variância dada por:

$$Var(\hat{a}_4) = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} (a^2 + \lambda\sigma^2).$$

Prova: A esperança segue diretamente das propriedades dos estimadores de momentos. Quanto à variância, temos:

$$\begin{aligned} Var(\hat{a}_4) &= Var\left(\frac{2\lambda}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n X_{\tau_i}\right) \\ &= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( E\left(Var\left(\sum_{i=1}^n X_{\tau_i} \mid X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n}\right)\right) + \right. \\ &\quad \left. + Var\left(E\left(\sum_{i=1}^n X_{\tau_i} \mid X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n}\right)\right) \right) \\ &= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} Var\left(\sum_{j=1}^n X_{\tau_j}\right) \\ &= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( Var\left(E\left(\sum_{j=1}^n X_{\tau_j} \mid \mathcal{W}_n\right)\right) + E\left(Var\left(\sum_{j=1}^n X_{\tau_j} \mid \mathcal{W}_n\right)\right) \right) \\ &= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( Var\left(\sum_{j=1}^n a\tau_j\right) + E\left(\sum_{j=1}^n \sigma^2\tau_j + 2\sum_{j < k} \sigma^2\tau_j\right) \right) \\ &= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( a^2 \left( \sum_{j=1}^n \frac{j}{\lambda^2} + 2\sum_{j < k} (n-j) \frac{j}{\lambda^2} \right) + \sigma^2 \left( \sum_{j=1}^n \frac{j}{\lambda} + 2\sum_{j < k} (n-j) \frac{j}{\lambda} \right) \right) \\ &= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( \frac{a^2}{\lambda^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} + 2 \left( n \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n-1)}{6} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{\lambda} \left( \frac{n(n+1)}{2} + 2 \left( n \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n-1)}{6} \right) \right) \right) \\ &= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( \frac{a^2 n(n+1)}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{2(3n-2n-1)}{3} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma^2 n(n+1)}{\lambda} \left( 1 + \frac{3n-2n-1}{3} \right) \\
= & \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\lambda^2} (a^2 + \lambda\sigma^2) \\
= & \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} (a^2 + \lambda\sigma^2). \square
\end{aligned}$$

**Proposição 36**  $\tilde{a}_4$  é consistente, independente da janela de observação amostrada.

Prova: Como  $\tilde{a}_4$  é não-viciado e  $\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\tilde{a}_4) = 0$ , temos, por Tchebyshev, a consistência de  $\tilde{a}_4$ .  $\square$

**Proposição 37** A distribuição de  $\tilde{a}_4$  tem densidade da forma:

$$\begin{aligned}
f_{\tilde{a}_4}(x) = & \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\lambda n(n+1)}{2\lambda\sigma\sqrt{2\pi} \sum_{i=1}^n 2(n-i) \sum_{j=1}^i t_j} \exp\left(-\frac{n(n+1)}{8\lambda^2\sigma^2} \right. \\
& \left. \frac{(n(n+1)x - 2\lambda a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i t_j)^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 2(n-i)t_j} \right) \prod_{k=1}^n \exp(-\lambda t_k) dt_k.
\end{aligned}$$

Prova: Temos os seguintes momentos condicionais de  $\tilde{a}_4$  dado  $\mathcal{W}_n$ :

$$\begin{aligned}
E(\tilde{a}_4 \mid \mathcal{W}_n) &= E\left(\frac{2\lambda}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n X_{\tau_j} \mid \mathcal{W}_n\right) \\
&= \frac{2\lambda}{n(n+1)} E\left(\sum_{i=1}^n X_{\tau_i} \mid \mathcal{W}_n\right) = \frac{2\lambda}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n E(X_{\tau_i} \mid \mathcal{W}_n) \\
&= \frac{2\lambda a}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \tau_i
\end{aligned}$$

e

$$Var(\tilde{a}_4 \mid \mathcal{W}_n) = \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} Var\left(\sum_{i=1}^n X_{\tau_i} \mid \mathcal{W}_n\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_{\tau_i} | W_n) + 2 \sum_{i < j}^n \text{Cov}(X_{\tau_i}, X_{\tau_j} | W_n) \right) \\
&= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( \sigma^2 \sum_{i=1}^n \tau_i + 2 \sum_{i < j}^n \sigma^2 \tau_i \right) \\
&= \frac{4\lambda^2 \sigma^2}{n^2(n+1)^2} \sum_{i=1}^n (2(n-i) + 1) \tau_i.
\end{aligned}$$

Como  $\tilde{a}_4$  é função linear de primeira ordem de v.a.s normais, temos:

$$\tilde{a}_4 | W_n \sim N \left( \frac{2\lambda a}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \tau_i, \frac{4\lambda^2 \sigma^2}{n^2(n+1)^2} \sum_{i=1}^n (2(n-i) + 1) \tau_i \right).$$

Utilizando-nos das propriedades das distribuições absolutamente contínuas, entre elas,  $f_{XY}(x, y) = f_Y(y) f_{X|Y=y}(x)$ , temos:

$$\begin{aligned}
f_{\tilde{a}_4}(x) &= \\
&= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left( \sqrt{2\pi \sum_{i=1}^n 2(n-i) t_i} \frac{2\lambda\sigma}{n(n+1)} \right)^{-1} \exp \left( -\frac{\left( x - \frac{2\lambda a}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n t_i \right)^2}{\frac{8\lambda^2 \sigma^2}{n^2(n+1)^2} \sum_{i=1}^n 2(n-i) t_i} \right) \times \\
&\quad \prod_{j=1}^n \frac{\lambda^j}{\Gamma(j)} t_j^{j-1} \exp(-\lambda t_j) dt_j \\
&= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\lambda n(n+1)}{2\lambda\sigma \sqrt{2\pi \sum_{i=1}^n 2(n-i) \sum_{j=1}^i t_j}} \exp \left( -\frac{n(n+1)}{8\lambda^2 \sigma^2} \right. \\
&\quad \left. \frac{\left( n(n+1)x - 2\lambda a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i t_j \right)^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 2(n-i) t_j} \right) \prod_{k=1}^n \exp(-\lambda t_k) dt_k. \square
\end{aligned}$$

Os resultados a seguir mostram que o estimador de  $\sigma^2$  pelo método de momentos é viciado até mesmo assintoticamente, tendo, inclusive, esperança negativa, o que não é aceitável visto ser  $\sigma^2$  um parâmetro positivo. Temos que  $\tilde{\sigma}_4^2$  é negativo se e somente se:

$$\frac{2\lambda}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n X_{\tau_{i_j}}^2 - \frac{8(n+2)\lambda}{3n^2(n+1)^2} \left( \sum_{j=1}^n X_{\tau_{i_j}} \right)^2 < 0,$$

o que é equivalente a:

$$\sum_{i=1}^n X_{\tau_i}^2 < \frac{4(n+2)}{3n(n+1)} \left( \sum_{i=1}^n X_{\tau_i} \right)^2,$$

levando-nos finalmente a que  $\tilde{\sigma}_4^2 < 0$  se e somente se:

$$\sum_{i=1}^n X_{\tau_i}^2 < \frac{4(n+2)}{3n^2 - n - 8} \sum_{i \neq j} X_{\tau_i} X_{\tau_j}.$$

Portanto,  $\tilde{\sigma}_4^2$  assume valores negativos com probabilidade positiva. Resta-nos calcular a esperança deste estimador. Para isto, calcularemos as seguintes esperanças:

$$\begin{aligned} E \left( \sum_{i=1}^n X_{\tau_{i,j}}^2 \right) &= \sum_{i=1}^n E \left( X_{\tau_{i,j}}^2 \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{a^2}{\lambda^2 \frac{(n+1)(n+2)}{3}} + \sigma^2 \frac{n+1}{2\lambda} \right) \\ &= \frac{a^2 n(n+1)(n+2)}{\lambda^2 3} + \sigma^2 \frac{n(n+1)}{2\lambda} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E \left( \left( \sum_{i=1}^n X_{\tau_{i,j}} \right)^2 \right) &= E \left( E \left( \left( \sum_{i=1}^n X_{\tau_{i,j}} \right)^2 \mid X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n} \right) \right) \\ &= E \left( E \left( \left( \sum_{j=1}^n X_{\tau_j} \right)^2 \mid \mathcal{W}_n \right) \right) \\ &= E \left( Var \left( \sum_{j=1}^n X_{\tau_j} \mid \mathcal{W}_n \right) + \left( E \left( \sum_{j=1}^n X_{\tau_j} \right) \right)^2 \right) \\ &= E \left( \sum_{j=1}^n Var \left( X_{\tau_j} \mid \mathcal{W}_n \right) + 2 \sum_{j < k} Cov \left( X_{\tau_j}, X_{\tau_k} \mid \mathcal{W}_n \right) + \left( E \left( \sum_{j=1}^n X_{\tau_j} \right) \right)^2 \right) \\ &= E \left( \sum_{j=1}^n \sigma^2 \tau_j + 2 \sum_{j < k} \sigma^2 \tau_j + \left( \sum_{j=1}^n a \tau_j \right)^2 \right) \\ &= \sigma^2 \sum_{j=1}^n E(\tau_j) + 2\sigma^2 \sum_{j=1}^n (n-j) E(\tau_j) + a^2 \left( \sum_{j=1}^n E(\tau_j)^2 + Var \left( \sum_{j=1}^n \tau_j \right) \right) \\ &= \sigma^2 \sum_{j=1}^n \frac{j}{\lambda} + 2\sigma^2 \sum_{j=1}^n (n-j) \frac{j}{\lambda} + a^2 \left( \left( \sum_{j=1}^n \frac{j}{\lambda} \right)^2 + \sum_{j=1}^n \frac{j}{\lambda^2} + 2 \sum_{j=1}^n (n-j) \frac{j}{\lambda^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^2}{\lambda} \left( \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{\lambda} \left( n \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \right) + \\
&\quad + a^2 \left( \left( \frac{n(n+1)}{2\lambda} \right)^2 + \frac{n(n+1)}{2\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} \left( n \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \right) \\
&= \frac{\sigma^2 n(n+1)}{\lambda} (1 + 2(3n - 2n - 1)) + \\
&\quad + a^2 \frac{n(n+1)}{2\lambda^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} + 1 + 2(3n - 2n - 1) \right) \\
&= \frac{n(n+1)(2n-1)}{2\lambda^2} (\lambda\sigma^2 + a^2) + a^2 \frac{n^2(n+1)^2}{4\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Com isto:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\sigma}_4^2) &= E \left( \frac{2\lambda}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n X_{\tau_{i,j}}^2 - \frac{8(n+2)\lambda}{3n^2(n+1)^2} \left( \sum_{i=1}^n X_{\tau_{i,j}} \right)^2 \right) \\
&= \frac{2\lambda}{n(n+1)} E \left( \sum_{i=1}^n X_{\tau_{i,j}}^2 \right) - \frac{8(n+2)\lambda}{3n^2(n+1)^2} E \left( \sum_{i=1}^n X_{\tau_{i,j}} \right)^2 \\
&= \frac{2\lambda}{n(n+1)} \left( \frac{a^2 n(n+1)(n+2)}{\lambda^2} + \sigma^2 \frac{n(n+1)}{2\lambda} \right) + \\
&\quad - \frac{8(n+2)\lambda}{3n^2(n+1)^2} \left( \frac{n(n+1)(2n-1)}{2\lambda^2} (\lambda\sigma^2 + a^2) + a^2 \frac{n^2(n+1)^2}{4\lambda^2} \right) \\
&= \frac{2(n+2)}{3\lambda} a^2 + \sigma^2 - \frac{4(n+2)(2n-1)}{3n(n+1)\lambda} (\lambda a^2 + a^2) - \frac{2(n+2)}{3\lambda} a^2 \\
&= \sigma^2 \left( 1 - \frac{4(n+2)(2n-1)}{3n(n+1)} \right) - \frac{4(n+2)(2n-1)}{3n(n+1)\lambda} a^2,
\end{aligned}$$

o que nos leva a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\sigma}_4^2) = -\frac{5}{3}\sigma^2 - \frac{8}{3}a^2, \quad (1.5.69)$$

o que não é aceitável para um pretendo estimador de  $\sigma^2$ , isto porque, sendo  $\sigma^2$  um parâmetro positivo, não é razoável que o seu estimador convirja em média para um valor negativo.

## 1.6 Conclusões do Processo de Wiener

Nas seções anteriores, trabalhamos com dois métodos de estimação: o método dos momentos e o de máxima verossimilhança. Seria interessante notar como se comportaria o método de mínimos quadrados nestes casos. Note-se que nossa amostra poderia ser colocada na forma:

$$\mathbf{X} = at + \epsilon, \quad (1.6.70)$$

onde  $\mathbf{X}$  seria nossa amostra, ou seja, o vetor de observações do processo,  $t$  seria o vetor dos tempos, no caso da Seção 1.2, determinístico, nas outras, aleatório e  $\epsilon$  o vetor de erros, ou seja,  $\epsilon_t = \sigma W_t$ .

Com esta representação, utilizando-nos da teoria de modelos lineares exposta em Rao (1973) Capítulo 4, teríamos, na seção 1.2, a seguinte solução para a equação normal:

$$\bar{a}_1 = (t' \Sigma^{-1} t)^{-1} t' \Sigma^{-1} \mathbf{X}, \quad (1.6.71)$$

sendo  $\sigma^2 \Sigma$  a matriz de Covariância de  $\epsilon$ .

Devido à estrutura de covariância do processo de Wiener, teríamos que  $\Sigma$  poderia ser particionada da forma:

$$\Sigma = [S, t],$$

onde

$$S = \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \end{bmatrix}$$

Com isto, teríamos, de 1.6.71 :

$$\bar{a}_1 = (e_n' t)^{-1} e_n' \mathbf{X} = \frac{X_{t_n}}{t_n}.$$

Quanto ao estimador de  $\sigma^2$  por mínimos quadrados:

$$\bar{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n-1} (\mathbf{X} - at)' (\mathbf{X} - at).$$

Segue que:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1^2 &= \sum_{i=1}^n \left( X_{t_i} - t_i \frac{X_{t_n}}{t_n} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left( X_{t_i}^2 + \frac{t_i^2}{t_n^2} X_{t_n}^2 - 2 \frac{t_i}{t_n} X_{t_i} X_{t_n} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} X_{t_i}^2 + \frac{X_{t_n}^2}{t_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 - 2 \frac{X_{t_n}}{t_n} \sum_{i=1}^{n-1} t_i X_{t_i}\end{aligned}$$

Assim, teríamos que os métodos de máxima verossimilhança e de mínimos quadrados nos dariam os mesmos estimadores para  $a$ , sendo diferentes, entretanto, os respectivos estimadores para  $\sigma^2$ . Isto aconteceria nos casos em que os tempos de amostragem fossem determinísticos ou aleatórios observáveis, visto serem as relações entre  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{t}$  idênticas, diferindo apenas no fato de que em um dos casos  $\mathbf{t}$  é determinístico e no outro aleatório, o que não influencia na obtenção dos estimadores de mínimos quadrados nem de máxima verossimilhança.

Nestes casos, quanto aos estimadores de  $\sigma^2$ , devemos salientar que os estimadores de máxima verossimilhança tem EQM's menores do que os respectivos estimadores por mínimos quadrados, o mesmo ocorrendo com o estimador por momentos desde que os tempos sejam determinísticos e  $n^2 = t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-})^{-1}$ .

Nos casos em que os tempos são não-observáveis mesmo que ordenáveis, o cálculo dos estimadores não pôde ser feito através da teoria de modelos lineares, visto serem os tempos indispensáveis para a formulação e ajuste do modelo. Nestes casos, vimos existirem os estimadores de máxima verossimilhança de  $a$  e  $\sigma^2$  sendo, entretanto, numa forma não-analítica.

Notemos que, nos dois casos em que os métodos de máxima verossimilhança e mínimos quadrados fornecem estimadores sob forma analítica, os estimadores de  $a$  obtidos pelos dois métodos são idênticos enquanto os de  $\sigma^2$  pelo método de máxima verossimilhança têm variâncias menores do que os respectivos calculados segundo o método de mínimos quadrados. Isto nos leva a que a máxima verossimilhança nos fornece estimadores com propriedades no mínimo tão boas quanto os encontrados por mínimos quadrados.

Feito isto, restringiremos novamente aos dois métodos mais utilizados neste trabalho: máxima verossimilhança e por momentos. Um ponto interessante a ser discutido seria o de qual, ou quais, estimador teria maior precisão para estimar um determinado parâmetro. Quando estivermos tratando dos estimadores de  $a$ , usaremos como medida de precisão a variância, pois todos eles são não-viciados. No caso dos estimadores de  $\sigma^2$ , entretanto, utilizar-nos-emos do erro

quadrático médio ( $EQM$ ), visto serem todos viciados.

Nas quatro seções anteriores, obtivemos seis estimadores para o parâmetro  $a$  e quatro para  $\sigma^2$  cujas variâncias e erros quadráticos médios foram as seguintes:

$$Var(\hat{a}_1) = \frac{\sigma^2}{t_n}$$

$$Var(\tilde{a}_1) = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}$$

$$Var(\hat{a}_2) = \sigma^2 \frac{\lambda}{n-1}$$

$$Var(\tilde{a}_2) = \infty$$

$$Var(\tilde{a}_3) = \frac{\lambda\sigma^2 + a^2}{n}$$

$$Var(\tilde{a}_4) = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} (\lambda\sigma^2 + a^2)$$

$$EQM(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{2\sigma^4}{n} \left( 1 + \frac{3t_n^2}{n^5} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} (t_j - t_{j-1})^{-1} - \frac{2t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right) +$$

$$+ \frac{4a^2\sigma^2 t_n}{n^4} \left( t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} - 1 \right)$$

$$EQM(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{2n-1}{n^2} \sigma^4$$

$$EQM(\tilde{\sigma}_3^2) = \frac{1}{\lambda^2 n^3} \left( \lambda^2 \sigma^4 (5n^2 + 2n + 2) + 4\lambda a^2 \sigma^2 (5n^2 + 3n + 8) + \right.$$

$$\left. + 12a^4 (n^2 + n + 2) \right),$$

visto serem  $\hat{\sigma}_1^2$  e  $\hat{\sigma}_2^2$  identicamente distribuídos. Ser-nos-ia interessante, agora que iremos comparar os diversos estimadores encontrados nas seções, que tivéssemos um limite inferior para as variâncias, ou erros quadráticos médios caso viciados, para analisarmos a eficiência de nossos estimadores. Para isto, utilizaremos o limite inferior de Cramer-Rao, conforme colocado na Definição 14. Tivemos, sendo a média de cada uma das v.a.s observadas,  $\mu_i = ag_i$  e a respectiva variância  $s_i^2 = \sigma^2 h_i$ , as seguintes informações de Fischer para  $a$  e  $\sigma^2$ :

$$I_1(a) = \sum_{i=1}^2 \frac{g_i^2}{\sigma^2 h_i}$$

e

$$I_1(\sigma^2) = \frac{n}{2\sigma^4},$$

caso os tempos sejam determinísticos, e

$$I_2(a) = E(I1(a))$$

e

$$I_2(\sigma^2) = E(I2(a)),$$

nos outros esquemas amostrais em que os tempos são aleatórios.

No caso determinístico, temos  $g_i = h_i(t_i - t_{i-1})$ . Assim, a informação de Fischer de  $a$  em nossa amostra seria:

$$I_1(a) = \sum_{i=1}^n \frac{t_i - t_{i-1}}{\sigma^2} = \frac{t_n}{\sigma^2},$$

o que nos leva ao seguinte limite inferior de Cramer-Rao para os estimadores de  $a$ , por serem ambos não-viciados:

$$LCR_1(a) = \frac{\sigma^2}{t_n}.$$

Neste esquema, para  $\sigma^2$ , há diferentes limites inferiores de Cramer-Rao, visto os dois estimadores terem vícios diferentes. Quanto a  $\hat{\sigma}_1^2$ , por ser seu vício igual a  $-\sigma^2/n$ , temos:

$$LCR_{\hat{\sigma}_1^2}(\sigma^2) = \left(-\frac{1}{n} + 1\right)^2 \frac{2\sigma^4}{n} = \frac{2(n-1)^2}{n^3} \sigma^4.$$

Para  $\hat{\sigma}_1^2$ , cujo vício é  $-\sigma^2 t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} / n^3$ , o limite inferior de Cramer-Rao é dado por:

$$\begin{aligned} LCR_{\hat{\sigma}_1^2}(\sigma^2) &= \left(1 - \frac{t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}\right)^2 \frac{2\sigma^4}{n} \\ &= \frac{2\sigma^4}{n} \left(1 + \frac{t_n^2}{n^6} \left(\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{2t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}\right) \end{aligned}$$

Passemos, agora, ao caso em que os tempos de amostragem são aleatórios. Em todos os três, pela maneira que é calculada, a informação de Fisher não se altera, sendo:

$$I_3(a) = E(a) = E\left(\frac{\tau_n}{\sigma^2}\right) = \frac{n}{\lambda\sigma^2}$$

e

$$I_3(\sigma^2) = \frac{n}{2\sigma^4},$$

visto que a informação de Fischer de  $\sigma^2$  independe da janela de observação.

Por serem os estimadores de  $a$  não-viciados, temos, para todos, o mesmo limite inferior de Cramer-Rao, que é o seguinte:

$$LCR_2(a) = \frac{\lambda\sigma^2}{n}.$$

Para  $\sigma^2$ , haverá um limite inferior de Cramer-Rao para cada estimador, dado terem todos vícios diferentes. Como  $\hat{\sigma}_2^2$  tem a mesma distribuição de  $\hat{\sigma}_1^2$ , o limite inferior relativo a  $\hat{\sigma}_2^2$  é:

$$LCR_{\hat{\sigma}_2^2}(\sigma^2) = \frac{2(n-1)^2}{n^3}\sigma^4.$$

Sendo o vício de  $\hat{\sigma}_3^2$  igual a  $-\frac{2}{n}\sigma^2$ :

$$LCR_{\hat{\sigma}_3^2}(\sigma^2) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^2 \frac{2\sigma^4}{n} = \frac{2(n-2)^2}{n^3}\sigma^4.$$

Entre os estimadores de  $a$ , o EMV no caso determinístico atinge o respectivo limite; neste mesmo caso, o EMM não o consegue a menos que  $n^2 = t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}$ ; nos caso aleatório em que os tempos são observáveis, o EMV não atinge o limite inferior de Cramer-Rao mas consegue ser assintoticamente eficiente, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Var(\hat{a}_2)}{LCR_2(a)} = 1.$$

Se estivermos trabalhando com uma amostra baseada em tempos aleatórios não-observáveis mas ordenáveis, o EMM atigirá o limite inferior se e somente se  $a = 0$ ; mesmo que  $a$  seja diferente de 0, ele será assintoticamente eficiente; quanto ao EMM caso os tempos de amostragem sejam não-ordenáveis, este não atingirá o limite inferior de Cramer-Rao nem tampouco será assintoticamente eficiente.

Quanto aos estimadores de  $\sigma^2$ , no caso determinístico, o EMM atinge o limite inferior enquanto o EMV não o faz mas é assintoticamente eficiente; no caso dos tempos aleatórios observáveis, o EMV tem comportamento idêntico ao do EMV do caso determinístico enquanto no caso em que os tempos são não-observáveis mas ordenáveis, não atinge o limite inferior de Cramer-Rao nem é assintoticamente eficiente.

Há que se fazer uma ressalva quanto aos resultados expostos baseados nos limites inferiores de Cramer-Rao: para  $a$ , eles são válidos entre os estimadores baseados em tempos determinísticos ou entre os baseados em tempos aleatórios, pois, caso contrário, estaremos trabalhando com limites diferentes e, para  $\sigma^2$ , as análises são menos expressivas do que as de  $a$ , visto que cada um dos estimadores tem um limite inferior de Cramer-Rao próprio baseado em seus vícios, com exceção de  $\hat{\sigma}_1^2$  e  $\tilde{\sigma}_2^2$  que são identicamente distribuídos.

Façamos, a seguir, a comparação entre os diversos estimadores. Na Seção 1.2, comparamos as variâncias entre  $\hat{a}_1$  e  $\tilde{a}_1$ , ressaltando-se que, pela Proposição 15,  $\hat{a}_1$  terá variância menor do que a de  $\tilde{a}_1$  a menos que  $n^2 = t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}$  ocorra, quando os dois serão identicamente distribuídos. Cabe ressaltar que, em nossas comparações, não nos preocuparemos com  $\hat{a}_2$ , sendo a sua variância infinita.

Para os estimadores de  $a$  nos casos em que  $\mathcal{W}_n$  é aleatória:  $\hat{a}_2$ ,  $\hat{a}_3$  e  $\tilde{a}_4$ , temos as seguintes relações:

$$Var(\hat{a}_3) < Var(\tilde{a}_4) \Leftrightarrow \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} < \frac{1}{n} \quad (1.6.72)$$

e

$$Var(\hat{a}_2) < Var(\tilde{a}_3) \Leftrightarrow \frac{\lambda\sigma^2}{n-1} < \frac{\lambda\sigma^2 + a^2}{n},$$

ou seja,

$$Var(\hat{a}_2) < Var(\tilde{a}_3) \Leftrightarrow n > 1 + \frac{\lambda\sigma^2}{a^2} \text{ e } a \neq 0. \quad (1.6.73)$$

Estas expressões implicam em que, sempre que  $n > 1$ , teremos que

$\tilde{a}_3$  terá variância menor do que a de  $\tilde{a}_4$  e que, caso  $a = 0$ ,  $Var(\hat{a}_2) > Var(\tilde{a}_3)$ ,  $n > 1$ . Isto equivale a dizer que, se nosso processo for um martingale, o conhecimento dos tempos de amostragem não tem importância mas, se esse for um super ou sub-martingale, esse conhecimento melhora o nosso estimador, para  $n$  grande. Temos, então, entre os estimadores de  $a$  baseados em amostras cujos tempos de observação são aleatórios, a menos que  $a \neq 0$ , a seguinte relação para  $n$  suficientemente grande:

$$Var(\hat{a}_2) \leq Var(\tilde{a}_3) \leq Var(\tilde{a}_4). \quad (1.6.74)$$

Comparando os estimadores baseados em amostras com tempos de observação aleatórios com os de tempos determinísticos, temos:

$$Var(\tilde{a}_1) < Var(\hat{a}_2) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} < \frac{\lambda n^2}{n-1}, \quad (1.6.75)$$

$$Var(\hat{a}_1) < Var(\hat{a}_2) \Leftrightarrow t_n > \frac{n-1}{\lambda} \quad (1.6.76)$$

e

$$Var(\hat{a}_2) < Var(\hat{a}_1) < Var(\tilde{a}_3) \Leftrightarrow \frac{n\sigma^2}{\lambda\sigma^2 + a^2} < t_n < \frac{n-1}{\lambda}. \quad (1.6.77)$$

Caso  $a$  seja nulo, a última relação será impossível e, mesmo sendo  $a \neq 0$ , as condições não se verificam para  $n$  grande.

Até o momento, trabalhamos com a intensidade,  $\lambda$ , de nosso processo de Poisson como uma constante independente de  $n$ . A partir de agora, para analisarmos comparativamente os estimadores baseados em tempos determinísticos com os baseados em tempos aleatórios, iremos supor que  $\lambda$  pode variar com  $n$ , o que será de grande importância como ver-se-á em seguida. Deve-se notar que a relação entre as variâncias dos estimadores de  $a$  fica bem definida dentro de cada tipo de janela, isto é, dentro dos estimadores baseados em amostras com tempos determinísticos ou dentro dos estimadores baseados em amostras com tempos aleatórios, sabemos exatamente a relação entre as suas variâncias. Se juntarmos estas duas categorias, as relações entre as variâncias não será imediata. Estas relações serão diretamente ligadas ao comportamento do parâmetro  $\lambda$  e da janela determinística utilizados.

Sendo  $a \neq 0$  e tomando-se  $t_n$  crescendo em relação a  $n/\lambda$  e

$\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}$  decrescendo em relação a  $n\lambda$ , temos:

$$Var(\hat{a}_1) \leq Var(\tilde{a}_1) \leq Var(\hat{a}_2) \leq Var(\tilde{a}_3) \leq Var(\tilde{a}_4). \quad (1.6.78)$$

Se, no entanto, continuássemos com as mesmas relações entre  $t_n$ ,  $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}$  e  $\lambda$ , sendo  $a$  nulo, teríamos:

$$Var(\hat{a}_1) \leq Var(\tilde{a}_1) \leq Var(\tilde{a}_3) \leq Var(\hat{a}_2) \leq Var(\tilde{a}_4). \quad (1.6.79)$$

Caso tivéssemos  $a \neq 0$ ,  $t_n$  diminuindo em relação a  $n/\lambda$  e  $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}$  crescendo em relação a  $n\lambda$ , teríamos:

$$Var(\hat{a}_2) \leq Var(\tilde{a}_3) \leq Var(\tilde{a}_4) \leq Var(\hat{a}_1) \leq Var(\tilde{a}_1). \quad (1.6.80)$$

Finalmente, se tomássemos as mesmas restrições anteriores com  $a = 0$ , obteríamos:

$$Var(\tilde{a}_3) \leq Var(\hat{a}_2) \leq Var(\tilde{a}_4) \leq Var(\hat{a}_1) \leq Var(\tilde{a}_1). \quad (1.6.81)$$

Assim, dependendo da relação entre  $t_n$  e  $n/\lambda$  e entre  $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}$  e  $n\lambda$ , teremos os estimadores baseados em amostras de tempos determinísticos com variâncias menores ou maiores do que as variâncias dos estimadores baseados em tempos aleatórios.

Seria também interessante estudar o comportamento assintótico dessas variâncias através das relações de eficiência relativa dos diversos estimadores de  $a$ . Novamente, não se poderá, de forma completa, os estimadores pelos diversos métodos e esquemas amostrais sem que se leve em conta  $t_n$ ,  $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}$  e  $\lambda$ .

Comparando a razão entre as variâncias de  $\hat{a}_1$  e  $\tilde{a}_1$ , temos:

$$\frac{Var(\hat{a}_1)}{Var(\tilde{a}_1)} = \frac{\frac{\sigma^2}{t_n}}{\frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}} = \frac{n^2}{t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}},$$

ou seja,

$$\frac{Var(\hat{a}_1)}{Var(\tilde{a}_1)} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}} = 1 \\ 0 & \text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}} = 0. \end{cases} \quad (1.6.82)$$

Como era de se esperar, devido à Proposição 15,  $\hat{a}_1$  é relativamente mais eficiente do que  $\tilde{a}_1$ .

Comparando, agora,  $\hat{a}_1$  e  $\hat{a}_2$ , temos:

$$\frac{Var(\hat{a}_1)}{Var(\hat{a}_2)} = \frac{\frac{\sigma^2}{t_n}}{\sigma^2 \frac{\lambda}{n-1}} = \frac{n-1}{\lambda t_n},$$

ou seja,

$$\frac{Var(\hat{a}_1)}{Var(\hat{a}_2)} \rightarrow \begin{cases} c & \text{se } \frac{\lambda t_n}{n} \rightarrow c \\ 0 & \text{se } \frac{\lambda t_n}{n} \rightarrow \infty \\ \infty & \text{se } \frac{\lambda t_n}{n} \rightarrow 0. \end{cases} \quad (1.6.83)$$

Isto nos mostra que dependendo do valor de  $t_n \lambda$ , tanto  $\hat{a}_1$  como  $\hat{a}_2$  podem ser relativamente mais eficientes. Tais relações se dão de forma análoga às análises feitas anteriormente para os valores absolutos das variâncias.

Para  $\tilde{a}_1$  e  $\tilde{a}_2$ , temos:

$$\frac{Var(\tilde{a}_1)}{Var(\tilde{a}_2)} = \frac{\frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{\sigma^2 \frac{\lambda}{n-1}} = \frac{(n-1) \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{\lambda n^2},$$

ou seja,

$$\frac{Var(\tilde{a}_1)}{Var(\tilde{a}_2)} \rightarrow \begin{cases} c & \text{se } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{n\lambda} \rightarrow d \\ 0 & \text{se } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{n\lambda} \rightarrow 0 \\ \infty & \text{se } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{n\lambda} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.6.84)$$

Com relação a  $\tilde{a}_3$  e  $\hat{a}_1$ , teríamos:

$$\frac{Var(\tilde{a}_3)}{Var(\hat{a}_1)} = \frac{\frac{\lambda\sigma^2 + a^2}{n}}{\frac{\sigma^2}{t_n}} = \frac{t_n(\lambda\sigma^2 + a^2)}{n\sigma^2} = \frac{\lambda t_n}{n} + \frac{a t_n}{n\sigma^2},$$

o que nos levaria a

$$\frac{Var(\tilde{a}_3)}{Var(\hat{a}_1)} \rightarrow \begin{cases} c + d\frac{a^2}{\sigma^2} & \text{se } \frac{\lambda t_n}{n} \rightarrow c \text{ e } \frac{t_n}{n} \rightarrow d \\ c & \text{se } \frac{\lambda t_n}{n} \rightarrow c \text{ e } \frac{t_n}{n} \rightarrow 0 \\ d\frac{a^2}{\sigma^2} & \text{se } \frac{\lambda t_n}{n} \rightarrow 0 \text{ e } \frac{t_n}{n} \rightarrow d \\ \infty & \text{se } \frac{\lambda t_n}{n} \rightarrow \infty \text{ ou } \frac{t_n}{n} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.6.85)$$

Note-se que, quanto maior for o limite de qualquer das duas expressões:  $\lambda t_n/n$  e  $t_n/n$ , tanto mais eficiente assintoticamente será  $\hat{a}_1$  em relação a  $\tilde{a}_3$ , valendo a recíproca.

Para comparar  $\tilde{a}_3$  e  $\tilde{a}_1$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{Var(\tilde{a}_3)}{Var(\tilde{a}_1)} &= \frac{\frac{\lambda\sigma^2 + a^2}{n}}{\frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}} \\ &= \frac{\lambda n}{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}} + \frac{na^2}{\sigma^2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{Var(\tilde{a}_3)}{Var(\tilde{a}_1)} \rightarrow \begin{cases} c^{-1} + d^{-1}\frac{a^2}{\sigma^2} & \text{se } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{\lambda n} \rightarrow c \text{ e } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{n} \rightarrow d \\ d^{-1}\frac{a^2}{\sigma^2} & \text{se } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{\lambda n} \rightarrow \infty \text{ e } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{n} \rightarrow d \\ c^{-1} & \text{se } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{\lambda n} \rightarrow c \text{ e } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{n} \rightarrow \infty \\ \infty & \text{se } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{\lambda n} \rightarrow 0 \text{ ou } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{n} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (1.6.86)$$

Para comparar  $\tilde{a}_3$  e  $\hat{a}_2$ , teríamos:

$$\frac{Var(\tilde{a}_3)}{Var(\hat{a}_2)} = \frac{\frac{\lambda\sigma^2 + a^2}{n}}{\sigma^2 \frac{\lambda}{n-1}} = \frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)a^2}{n\sigma^2},$$

chegando-se a

$$\frac{Var(\tilde{a}_3)}{Var(\hat{a}_2)} \rightarrow 1 + \frac{a^2}{\sigma^2}. \quad (1.6.87)$$

Temos, então, que  $\tilde{a}_3$  e  $\hat{a}^2$  são assintoticamente equivalentes, se  $a = 0$ . Caso contrário,  $\hat{a}_2$  é assintoticamente mais eficiente do que  $\tilde{a}_3$ .

Tomando-se as variâncias de  $\tilde{a}_4$  e  $\hat{a}_1$ , teríamos:

$$\begin{aligned} \frac{Var(\tilde{a}_4)}{Var(\hat{a}_1)} &= \frac{\frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}(\lambda\sigma^2 + a^2)}{\frac{\sigma^2}{t_n}} \\ &= \frac{2\lambda t_n(2n+1)}{3n(n+1)} + \frac{2(2n+1)t_n a^2}{3n(n+1)\sigma^2}. \end{aligned}$$

Teríamos, portanto:

$$\frac{Var(\tilde{a}_4)}{Var(\hat{a}_1)} \rightarrow \begin{cases} \frac{4c}{3} + \frac{4a^2 d}{\sigma^2} & \text{se } \frac{\lambda t_n}{n} \rightarrow c \text{ e } \frac{t_n}{n} \rightarrow d \\ \frac{4c}{3} & \text{se } \frac{\lambda t_n}{n} \rightarrow c \text{ e } \frac{t_n}{n} \rightarrow 0 \\ \frac{4a^2 d}{\sigma^2} & \text{se } \frac{\lambda t_n}{n} \rightarrow 0 \text{ e } \frac{t_n}{n} \rightarrow d \\ \infty & \text{se } \frac{t_n}{n} \rightarrow \infty \text{ ou } \frac{t_n}{n} \rightarrow 0. \end{cases} \quad (1.6.88)$$

Quanto a  $\tilde{a}_4$  e  $\tilde{a}_1$ , teríamos:

$$\begin{aligned} \frac{Var(\tilde{a}_4)}{Var(\tilde{a}_1)} &= \frac{\frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}(\lambda\sigma^2 + a^2)}{\frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}} \\ &= \frac{2\lambda n^2(2n+1)}{3n(n+1) \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}} + \frac{2n^2(2n+1)a^2}{3n(n+1)\sigma^2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{Var(\tilde{a}_4)}{Var(\tilde{a}_1)} \rightarrow \begin{cases} \frac{4c^{-1}}{3} + \frac{4a^2d^{-1}}{\sigma^2} \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{\lambda n} \rightarrow c \text{ e } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{n} \rightarrow d \\ \frac{4a^2d^{-1}}{\sigma^2} \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{\lambda n} \rightarrow \infty \text{ e } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{n} \rightarrow d \\ \frac{4c^{-1}}{3} \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{\lambda n} \rightarrow c \text{ e } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{n} \rightarrow \infty \\ \infty \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{\lambda n} \rightarrow 0 \text{ ou } \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}}{n} \rightarrow 0. \end{cases} \quad (1.6.89)$$

Para comparar  $\tilde{a}_4$  e  $\hat{a}_2$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{Var(\tilde{a}_4)}{Var(\hat{a}_2)} &= \frac{\frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}(\lambda\sigma^2 + a^2)}{\sigma^2 \frac{\lambda}{n-1}} \\ &= \frac{2(n-1)(2n+1)}{3n(n+1)} + \frac{2(2n+1)(n-1)a^2}{3n(n+1)\sigma^2\lambda}, \end{aligned}$$

o que nos leva a

$$\frac{Var(\tilde{a}_4)}{Var(\hat{a}_2)} \rightarrow \frac{4}{3} + \frac{4a^2}{3\sigma^2\lambda} \frac{4(\lambda\sigma^2 + a^2)}{3\lambda\sigma^2} \geq \frac{4}{3} \quad (1.6.90)$$

Portanto, esta expressão é sempre maior do que 1, ou seja, assintoticamente,  $\tilde{a}_4$  tem variância maior do que  $\hat{a}_2$ .

Finalmente, comparemos o último par de estimadores:  $\tilde{a}_3$  e  $\tilde{a}_4$ . Temos:

$$\frac{Var(\tilde{a}_4)}{Var(\tilde{a}_3)} = \frac{\frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}(\lambda\sigma^2 + a^2)}{\frac{\lambda\sigma^2 + a^2}{n}} = \frac{2(2n+1)}{3(n+1)},$$

ou seja,

$$\frac{Var(\tilde{a}_4)}{Var(\tilde{a}_3)} \rightarrow \frac{4}{3}. \quad (1.6.91)$$

Assim, assintoticamente,  $\tilde{a}_3$  tem variância menor do que  $\tilde{a}_4$ .

A ordenação das eficiências assintóticas relativas foi a mesma da ordenação das variâncias, como era de se esperar. Da mesma forma que na análise

anterior, dentro do grupo de estimadores baseados em janelas de tempos determinísticos ou dentro dos baseados em janelas de tempos aleatórios, temos nossa ordenação bem-definida mas, quando juntamos os dois tipos de estimadores, dependemos das quantidades que relacionam  $t_n$ ,  $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}$  e  $\lambda$ . Com isto, supondo que possamos variar a intensidade do processo de Poisson que estamos utilizando e que nos é possível montar qualquer esquema amostral determinístico, dependendo da relação dos tempos determinísticos com o valor da intensidade do processo de Poisson utilizado nos tempos aleatórios, podemos ter tanto um quanto outro tipo de amostragem com estimadores mais eficientes.

Para a análise dos estimadores de  $\sigma^2$ , utilizar-nos-emos não mais das respectivas variâncias e sim de seus Erros Quadráticos Médios, visto serem os estimadores viciados. Quanto a  $\hat{\sigma}_4^2$  e  $\tilde{\sigma}_2^2$ , não serão incluídos, visto que assintoticamente não têm propriedades adequadas.

Como  $EQM(\hat{\sigma}_1^2) = EQM(\hat{\sigma}_2^2)$ , os resultados de ambos os estimadores nesta análise são os mesmos. Assim, não é necessário que os dois sejam incluídos na análise. Com isto, temos três estimadores para comparar:  $\hat{\sigma}_1^2$ ,  $\tilde{\sigma}_1^2$  e  $\tilde{\sigma}_3^2$ .

Devido à complexidade algébrica de alguns dos  $EQM$ 's, iremos diretamente para o estudo da eficiência assintótica relativa. Na Seção 2, já comparamos os erros quadráticos médios de  $\hat{\sigma}_1^2$  e  $\tilde{\sigma}_1^2$ . Vimos que a eficiência assintótica de  $\hat{\sigma}_1^2$  em relação à de  $\tilde{\sigma}_1^2$  é diretamente relacionada ao limite da seguinte expressão quando  $n$  vai para infinito:

$$\frac{t_n}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}.$$

O limite de tal expressão não pode ser inferior a 1, pois, se o fosse, a variância de  $\tilde{\sigma}_1^2$  seria negativa, ou seja,  $\hat{\sigma}_1^2$  é, no mínimo, assintoticamente tão eficiente quanto  $\tilde{\sigma}_1^2$ . Comparando  $\hat{\sigma}_1^2$  e  $\tilde{\sigma}_3^2$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{EQM(\tilde{\sigma}_3^2)}{EQM(\hat{\sigma}_1^2)} &= \frac{n^2}{(2n-1)\lambda^2 n^3 \sigma^4} \left( \lambda^2 \sigma^4 (5n^2 + 2n + 2) + 4\lambda a^2 \sigma^2 (5n^2 + 3n + 8) + \right. \\ &\quad \left. + 12a^4 (n^2 + n + 2) \right) \\ &= \frac{5n^2 + 2n + 2}{(2n-1)n} + \frac{4a^2}{(2n-1)\lambda n \sigma^2} (5n^2 + 3n + 8) + \frac{12a^4}{(2n-1)n\lambda^2 \sigma^4} (n^2 + n + 2). \end{aligned}$$

Assim:

$$\frac{EQM(\tilde{\sigma}_3^2)}{EQM(\hat{\sigma}_1^2)} \rightarrow \frac{5}{2} + \frac{10}{\sigma^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} + \frac{6a^4}{\sigma^4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^2} > \frac{5}{2}. \quad (1.6.92)$$

Com isto,  $\hat{\sigma}_1^2$  é assintoticamente mais eficiente em relação a  $\hat{\sigma}_3$ .

Quanto à relação entre os *EQM*'s de  $\hat{\sigma}_1^2$  e  $\hat{\sigma}_3^2$ , temos:

$$\frac{EQM(\hat{\sigma}_1^2)}{EQM(\hat{\sigma}_3^2)} = \left( \frac{2\sigma^4}{n} \left( 1 + \frac{3t_n^2}{n^5} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} (t_j - t_{j-1})^{-1} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} \right) + \frac{4a^2\sigma^2 t_n}{n^4} \left( t_n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} - 1 \right) \right) \times \\ \frac{\lambda^2 n^3}{\lambda^2 \sigma^4 (5n^2 + 2n + 2) + 4\lambda a^2 \sigma^2 (5n^2 + 3n + 8) + 12a^4 (n^2 + n + 2)}$$

Neste caso, pode haver indeterminação desta expressão ao tomarmos seu limite quando  $n \rightarrow \infty$ . Como no estudo dos dois estimadores anteriores,  $\lambda$  não interfere no limite que iremos encontrar. Temos dois casos a expor. No primeiro, nossas hipóteses serão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} = c$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n} = 0.$$

Sob estas hipóteses, teríamos:

$$\frac{EQM(\hat{\sigma}_1^2)}{EQM(\hat{\sigma}_3^2)} \rightarrow \frac{2}{5},$$

indicando-nos ser  $\hat{\sigma}_1^2$ , neste caso, assintoticamente mais eficiente do que  $\hat{\sigma}_3^2$ .

O outro conjunto de hipóteses que nos leva a um limite que não é indeterminado é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} = 0$$

e uma das duas seguintes condições:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n n^5 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \left( \frac{t_n}{n^3} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1} - 1 \right) = \infty.$$

Se uma das duas condições acima for atendida, basta que o limite da outra exista para que, com este conjunto de hipóteses, tenhamos:

$$\frac{EQM(\hat{\sigma}_1^2)}{EQM(\hat{\sigma}_1^2)} \rightarrow \infty,$$

indicando-nos que tanto um como o outro estimador pode ser mais eficiente assintoticamente do que o outro, dependendo exclusivamente da relação entre  $n$ ,  $t_n$  e  $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{-1}$ , independentemente de  $\lambda$ .

Temos então que o método de máxima verossimilhança nos fornece estimadores assintoticamente mais eficientes do que qualquer um dos outros estimadores pelo método dos momentos. Entre estes, tanto um quanto o outro pode ser assintoticamente mais eficiente, dependendo das relações entre os tempos do caso determinísticos, independentemente de  $\lambda$ .

É interessante notar que, entre os estimadores de  $\sigma^2$ , sabemos precisar quais os estimadores mais eficientes, os obtidos pelo método de máxima verossimilhança, sem que seja necessária a análise dos esquemas amostrais a serem utilizados. No caso dos estimadores de momentos, um com tempos determinísticos e outro com tempos aleatórios, temos definida a relação entre os seus erros quadráticos médios sem utilizar  $\lambda$ . Para os estimadores de  $\sigma$ , na relação de suas variâncias, temos que levar em conta os tempos determinísticos e  $\lambda$  em qualquer caso em que estejamos comparando estimadores de grupos diferentes.

Isto vem corroborar observações feitas quando da obtenção das distribuições dos estimadores de  $\sigma^2$  pelo método de máxima verossimilhança de que estes se mostravam independentes dos tempos de amostragem utilizados, no caso determinístico, ou da intensidade  $\lambda$ , no caso aleatório, enquanto os estimadores de  $\sigma^2$  pelo método dos momentos e os de  $\sigma$  por ambos os métodos tinham relação estrita com  $\lambda$  ou os tempos de amostragem.

## Capítulo 2

# Processo de Wiener com Janela de Observação Limitada

### 2.1 Introdução

No capítulo anterior, para amostrar nosso processo, fixávamos o tamanho desejado de nossa amostra antes de efetuá-la. Na prática, no entanto, muitas vezes teremos um tempo restrito em que poderemos amostrar o nosso processo. Se  $\mathcal{W}$  for determinística, nosso problema não se altera, visto que podemos fixar nossos tempos de amostragem de acordo com o tamanho da amostra desejada. Caso tenhamos  $\mathcal{W}$  aleatória, há diferenças em relação aos resultados obtidos no Capítulo 1 pois não sabemos, a priori, qual o tamanho de nossa amostra e, em se tratando de um processo de Poisson, podemos, até mesmo, ter amostras de tamanho 0.

### 2.2 Tempos Aleatórios Observáveis

Como explicado anteriormente, para os próximos casos, em que  $\mathcal{W}$  for composta por variáveis aleatórias, não saberemos, a priori, qual o tamanho de nossa amostra. Como esta será tomada em tempos discretos no intervalo  $[0, T]$ , note-se que, a princípio,  $N = N_T$ , ou seja, o tamanho da amostra assumiria o valor do processo de Poisson de parâmetro  $\lambda$  no instante  $T$ . Entretanto, neste caso, poderíamos ter uma amostra de tamanho 0 ou 1, o que não seria interessante, aquela para o

cálculo dos estimadores de  $a$  e ambas para os de  $\sigma^2$ . Torna-se, assim, necessária a introdução de restrições em  $N$ . Com estas restrições,  $N$  fica caracterizada por:

$$P(N = k) = \begin{cases} \frac{(\lambda T)^k \exp(-\lambda T)}{k!} & k \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\} \\ \exp(-\lambda T) + \lambda T \exp(-\lambda T) + \frac{(\lambda T)^2 \exp(-\lambda T)}{2} & k = 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Temos, para esta variável:

$$\begin{aligned} E(N) &= 2\exp(-\lambda T) + 2\lambda T \exp(-\lambda T) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(\lambda T)^k \exp(-\lambda T)}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(\lambda T)^k \exp(-\lambda T)}{k!} + 2\exp(-\lambda T) + \lambda T \exp(-\lambda T) \\ &= \lambda T (1 + \exp(-\lambda T)) + 2\exp(-\lambda T). \end{aligned}$$

Teríamos, para o processo de Poisson, que:

$$\begin{aligned} E(N_T(N_T - 1)) &= E(N_T^2 - N_T) \\ &= \text{Var}(N_T) + E(N_T)^2 - E(N_T) \\ &= \lambda T + (\lambda T)^2 - \lambda T = (\lambda T)^2. \end{aligned}$$

Para  $N$ , o momento equivalente a este é dado por:

$$\begin{aligned} E(N(N - 1)) &= \\ &= 2\exp(-\lambda T) + 2\lambda T \exp(-\lambda T) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)(\lambda T)^k \exp(-\lambda T)}{k!} \\ &= 2\exp(-\lambda T) + 2\lambda T \exp(-\lambda T) + E(N_T(N_T - 1)) \\ &= 2\exp(-\lambda T) + 2\lambda T \exp(-\lambda T) + (\lambda T)^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Var(N) &= E(N^2) - (E(N))^2 = E(N(N-1)) + E(N) - (E(N))^2 \\
&= 2exp(-\lambda T) + 2\lambda T exp(-\lambda T) + (\lambda T)^2 + \lambda T(1 + exp(-\lambda T)) + \\
&\quad + 2exp(-\lambda T) - (\lambda T)^2(1 + exp(-2\lambda T) + 2exp(-\lambda T)) + 4exp(-2\lambda T) + \\
&\quad + 4\lambda T exp(-\lambda T)(1 + exp(-\lambda T)) \\
&= \lambda T + exp(-\lambda T)(4 + 7\lambda T - 2(\lambda T)^2) + exp(-2\lambda T)(4 + 4\lambda T - (\lambda T)^2).
\end{aligned}$$

É interessante notar que:

$$\lim_{\lambda T \rightarrow \infty} \frac{E(N)}{\lambda T} = 1 \quad (2.2.2)$$

$$\lim_{\lambda T \rightarrow \infty} \frac{Var(N)}{\lambda T} = 1, \quad (2.2.3)$$

ou seja,  $E(N)$  e  $E(N_T)$ ,  $Var(N)$  e  $Var(N_T)$  são, respectivamente, assintoticamente equivalentes.

Será interessante, para alguns dos nossos estimadores, obter momentos de certas funções de  $N$ . Por não podermos calculá-los exatamente, utilizaremos o desenvolvimento em série de Taylor para aproximá-los. Teríamos, como aproximações:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{\lambda T} - \frac{(N - \lambda T)}{(\lambda T)^2} + \frac{(N - \lambda T)^2}{(\lambda T)^3} + R_{2, \frac{1}{\lambda T}} \left( \frac{1}{N} \right),$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N^2} &= \frac{1}{(\lambda T)^2} - \frac{(N^2 - (\lambda T - 1)^2)}{(\lambda T)^4} + \\
&\quad + \frac{(N^2 - (\lambda T)^2)^2}{(\lambda T)^6} + R_{2, \frac{1}{(\lambda T)^2}} \left( \frac{1}{N^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{N^3} = \frac{1}{(\lambda T)^3} - \frac{(N^3 - (\lambda T)^3)}{(\lambda T)^6} + \frac{(N^3 - (\lambda T)^3)^2}{(\lambda T)^9} + R_{2, \frac{1}{(\lambda T)^3}} \left( \frac{1}{N^3} \right),$$

$$\frac{1}{N-1} = \frac{1}{\lambda T-1} - \frac{(N-\lambda T)}{(\lambda T-1)^2} + \frac{(N-\lambda T)^2}{(\lambda T-1)^3} + R_{2, \frac{1}{\lambda T-1}} \left( \frac{1}{N-1} \right),$$

$$\frac{1}{N+1} = \frac{1}{\lambda T+1} - \frac{(N-\lambda T)}{(\lambda T+1)^2} + \frac{(N-\lambda T)^2}{(\lambda T+1)^3} + R_{2, \frac{1}{\lambda T+1}} \left( \frac{1}{N+1} \right)$$

e

$$\frac{1}{N(N+1)} = \frac{1}{\lambda T(\lambda T+1)} - \frac{(N(N+1) - \lambda T(\lambda T+1))}{(\lambda T)^2(\lambda T+1)^2} + \frac{(N(N+1) - \lambda T(\lambda T+1))^2}{(\lambda T)^3(\lambda T+1)^3} + R_{2, \frac{1}{\lambda T(\lambda T+1)}} \left( \frac{1}{N(N+1)} \right).$$

Para o cálculo das esperanças aproximadas, necessitamos dos seguintes momentos de  $N$ :

$$E(N) = \lambda T + \lambda T \exp(-\lambda T) + 2 \exp(-\lambda T),$$

$$E(N^2) = (\lambda T)^2 + \lambda T + 3\lambda T \exp(-\lambda T) + 4 \exp(-\lambda T),$$

$$E(N(N-1)(N-2)) = \sum_{k=3}^n \frac{k(k-1)(k-2)(\lambda T)^k \exp(-\lambda T)}{k!} = (\lambda T)^3,$$

$$\begin{aligned} E(N(N-1)(N-2)(N-3)) &= \\ &= \sum_{k=4}^n \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(\lambda T)^k \exp(-\lambda T)}{k!} = (\lambda T)^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(N^3) &= E(N(N-1)(N-2)) + 3E(N^2) - 2E(N) \\ &= (\lambda T)^3 + 3(\lambda T + 3\lambda T \exp(-\lambda T) + 4\exp(-\lambda T) + (\lambda T)^2) - 2(\lambda T + \\ &\quad + \lambda T \exp(-\lambda T) + 2\exp(-\lambda T)) \\ &= (\lambda T)^3 + 3(\lambda T)^2 + \lambda T + 7\lambda T \exp(-\lambda T) + 8\exp(-\lambda T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(N^4) &= E(N(N-1)(N-2)(N-3)) + 6E(N^3) - 11E(N^2) + 6E(N) \\ &= (\lambda T)^4 + 6((\lambda T)^3 + 3(\lambda T)^2 + \lambda T + 7\lambda T \exp(-\lambda T) + 8\exp(-\lambda T)) + \\ &\quad - 11(\lambda T + 3\lambda T \exp(-\lambda T) + 4\exp(-\lambda T) + (\lambda T)^2) + \\ &\quad + 6(\lambda T + \lambda T \exp(-\lambda T) + 2\exp(-\lambda T)) \\ &= (\lambda T)^4 + 6(\lambda T)^3 + 7(\lambda T)^2 + \lambda T + 15\lambda T \exp(-\lambda T) + 16\exp(-\lambda T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(N^5) &= E(N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)) + 10E(N^4) + \\ &\quad - 35E(N^3) + 50E(N^2) - 24E(N) \\ &= (\lambda T)^5 + 10(\lambda T)^4 + 60(\lambda T)^3 + 70(\lambda T)^2 + 10\lambda T + 150\lambda T \exp(-\lambda T) + \\ &\quad + 160\exp(-\lambda T) - 35(\lambda T)^3 - 105(\lambda T)^2 - 35\lambda T - 245\lambda T \exp(-\lambda T) + \\ &\quad - 280\exp(-\lambda T) + 50(\lambda T)^2 + 50\lambda T + 150\lambda T \exp(-\lambda T) + 200\exp(-\lambda T) + \\ &\quad - 24\lambda T - 24\lambda T \exp(-\lambda T) - 48\exp(-\lambda T) \\ &= (\lambda T)^5 + 10(\lambda T)^4 + 25(\lambda T)^3 + 15(\lambda T)^2 + \lambda T + 31\lambda T \exp(-\lambda T) + \\ &\quad + 32\exp(-\lambda T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(N^6) &= E(N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)) + 15E(N^5) + \\
&\quad -85E(N^4) + 225E(N^3) - 274E(N^2) + 120E(N) \\
&= (\lambda T)^6 + 15\left((\lambda T)^5 + 10(\lambda T)^4 + 25(\lambda T)^3 + 15(\lambda T)^2 + \lambda T + \right. \\
&\quad \left. + 31\lambda T \exp(-\lambda T) + 32\exp(-\lambda T)\right) - 85\left((\lambda T)^4 + 6(\lambda T)^3 + 7(\lambda T)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \lambda T + 15\lambda T \exp(-\lambda T) + 16\exp(-\lambda T)\right) + 225\left((\lambda T)^3 + 3(\lambda T)^2 + \lambda T + \right. \\
&\quad \left. + 7\lambda T \exp(-\lambda T) + 8\exp(-\lambda T)\right) - 274\left((\lambda T)^2 + \lambda T + 3\lambda T \exp(-\lambda T) + \right. \\
&\quad \left. + 4\exp(-\lambda T)\right) - 120(\lambda T + \lambda T \exp(-\lambda T) + 2\exp(-\lambda T)) \\
&= (\lambda T)^6 + 15(\lambda T)^5 + 65(\lambda T)^4 + 90(\lambda T)^3 + 31(\lambda T)^2 + 275\lambda T + \\
&\quad + 63\lambda T \exp(-\lambda T) + 64\exp(-\lambda T),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(N - \lambda T) &= \lambda T + \lambda T \exp(-\lambda T) + 2\exp(-\lambda T) - \lambda T \\
&= \lambda T \exp(-\lambda T) + 2\exp(-\lambda T),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E((N - \lambda T)^2) &= E(N^2) - 2\lambda T E(N) + (\lambda T)^2 \\
&= (\lambda T)^2 + \lambda T + 3\lambda T \exp(-\lambda T) + 4\exp(-\lambda T) - 2\lambda T(\lambda T + \\
&\quad + \lambda T \exp(-\lambda T) + 2\exp(-\lambda T)) + (\lambda T)^2 \\
&= \lambda T - 2(\lambda T)^2 \exp(-\lambda T) - \lambda T \exp(-\lambda T) + 4\exp(-\lambda T),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(N^2 - (\lambda T)^2) &= (\lambda T)^2 + \lambda T + 3\lambda T \exp(-\lambda T) + 4\exp(-\lambda T) - (\lambda T)^2 \\
&= \lambda T + 3\lambda T \exp(-\lambda T) + 4\exp(-\lambda T),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E((N^2 - (\lambda T)^2)^2) &= E(N^4) - 2(\lambda T)^2 E(N^2) + (\lambda T)^4 \\
&= (\lambda T)^4 + 6(\lambda T)^3 + 7(\lambda T)^2 + \lambda T + 15\lambda T \exp(-\lambda T) + \\
&\quad + 16\exp(-\lambda T) - 2(\lambda T)^2((\lambda T)^2 + \lambda T + \\
&\quad + 3\lambda T \exp(-\lambda T) + 4\exp(-\lambda T)) + (\lambda T)^4 \\
&= 4(\lambda T)^3 + 7(\lambda T)^2 + \lambda T - 6(\lambda T)^3 \exp(-\lambda T) + \\
&\quad - 8(\lambda T)^2 \exp(-\lambda T) + 15\lambda T \exp(-\lambda T) + 16\exp(-\lambda T),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left(N^3 - (\lambda T)^3\right) &= (\lambda T)^3 + 3(\lambda T)^2 + \lambda T + 7\lambda T \exp(-\lambda T) + \\
&\quad + 8\exp(-\lambda T) - (\lambda T)^3 \\
&= 3(\lambda T)^2 + \lambda T + 7\lambda T \exp(-\lambda T) + 8\exp(-\lambda T),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left(\left(N^3 - (\lambda T)^3\right)^2\right) &= E\left(N^6\right) - 2(\lambda T)^3 E\left(N^3\right) + (\lambda T)^6 \\
&= (\lambda T)^6 + 15(\lambda T)^5 + 65(\lambda T)^4 + 90(\lambda T)^3 + 31(\lambda T)^2 + 275\lambda T + \\
&\quad + 63\lambda T \exp(-\lambda T) + 64\exp(-\lambda T) - 2(\lambda T)^3 \left((\lambda T)^3 + \right. \\
&\quad \left.+ 3(\lambda T)^2 + (\lambda T) + 7\lambda T \exp(-\lambda T) + 8\exp(-\lambda T)\right) + (\lambda T)^6 \\
&= 9(\lambda T)^5 + 63(\lambda T)^4 + 90(\lambda T)^3 + 31(\lambda T)^2 + 275\lambda T + \\
&\quad + \exp(-\lambda T) \left(64 + 63\lambda T - 16(\lambda T)^3 - 14(\lambda T)^4\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left(N(N+1) - \lambda T(\lambda T+1)\right) &= E\left(N^2\right) + E(N) - (\lambda T)^2 - \lambda T \\
&= (\lambda T)^2 + \lambda T + 3\lambda T \exp(-\lambda T) + 4\exp(-\lambda T) + \lambda T + \lambda T \exp(-\lambda T) + \\
&\quad + 2\exp(-\lambda T) - (\lambda T)^2 - \lambda T \\
&= \lambda T + 4\lambda T \exp(-\lambda T) + 6\exp(-\lambda T)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
E\left((N(N+1) - \lambda T(\lambda T+1))^2\right) &= E\left(N^4\right) + 2E\left(N^3\right) + \\
&\quad + (1 - 2\lambda T(\lambda T+1)) E\left(N^2\right) - 2\lambda T(\lambda T+1) E(N) + (\lambda T)^2 (\lambda T+1)^2 \\
&= (\lambda T)^4 + 6(\lambda T)^3 + 7(\lambda T)^2 + \lambda T + 15\lambda T \exp(-\lambda T) + 16\exp(-\lambda T) + \\
&\quad + 2\left((\lambda T)^3 + 3(\lambda T)^2 + (\lambda T) + 7\lambda T \exp(-\lambda T) + 8\exp(-\lambda T)\right) + \\
&\quad + (1 - 2\lambda T(\lambda T+1)) \left((\lambda T)^2 + \lambda T + 3\lambda T \exp(-\lambda T) + 4\exp(-\lambda T)\right) + \\
&\quad - 2\lambda T(\lambda T+1) (\lambda T + \lambda T \exp(-\lambda T)) + 2\exp(-\lambda T) + (\lambda T)^2 (\lambda T+1)^2 \\
&= 4(\lambda T)^3 + 13(\lambda T)^2 + 4\lambda T - 8(\lambda T)^3 \exp(-\lambda T) - 20(\lambda T)^2 \exp(-\lambda T) + \\
&\quad + 20\lambda T \exp(-\lambda T) + 36\exp(-\lambda T).
\end{aligned}$$

Tomando-se as esperanças das aproximações acima descritas e, levando-se em conta que, dado  $T$  suficientemente grande, qualquer termo que contiver  $\exp(-\lambda T)$  ou que, em relação ao denominador, tiver diferença de grau superior, em  $T$ , a três será considerado desprezível, teremos boas aproximações para momentos que serão utilizados para se encontrarem expressões aproximadas de esperanças e variâncias de alguns dos estimadores. A justificativa para a utilização destas aproximações é a seguinte: as expressões cujas esperanças serão calculadas são limitadas por 1. Além disso, todas elas convergem para 0 quando  $T$  cresce. Com isto, podemos utilizar o teorema da convergência dominada e, conseqüentemente, tomar o limite da esperança como sendo igual à esperança do limite, para todas as expressões abaixo. Temos, então, para  $T$  suficientemente grande:

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{1}{N}\right) &\approx \frac{1}{\lambda T} - \frac{E(N) - \lambda T}{(\lambda T)^2} + \frac{E((N - \lambda T)^2)}{(\lambda T)^3} \\
 &\approx \frac{1}{\lambda T} + \frac{\lambda T}{(\lambda T)^3} \\
 &\approx \frac{\lambda T + 1}{(\lambda T)^2}, \tag{2.2.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{1}{N^2}\right) &\approx \frac{1}{(\lambda T)^2} - \frac{E(N^2) - (\lambda T)^2}{(\lambda T)^4} + \frac{E((N^2 - (\lambda T)^2)^2)}{(\lambda T)^6} \\
 &\approx \frac{1}{(\lambda T)^2} - \frac{\lambda T}{(\lambda T)^4} + \frac{4(\lambda T)^3}{(\lambda T)^6} \\
 &\approx \frac{\lambda T + 3}{(\lambda T)^3}, \tag{2.2.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{1}{N^3}\right) &\approx \frac{1}{(\lambda T)^3} - \frac{E(N^3) - (\lambda T)^3}{(\lambda T)^6} + \frac{E(N^3 - (\lambda T)^3)}{(\lambda T)^9} \\
 &\approx \frac{1}{(\lambda T)^3}, \tag{2.2.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{N+1}\right) &\approx \frac{1}{\lambda T+1} - \frac{E(N+1) - (\lambda T+1)}{(\lambda T+1)^2} + \\
&\quad + \frac{E((N+1 - (\lambda T+1))^2)}{(\lambda T+1)^3} \\
&\approx \frac{1}{\lambda T+1} + \frac{\lambda T}{(\lambda T+1)^3} \\
&\approx \frac{(\lambda T)^2 + 3\lambda T + 1}{(\lambda T+1)^3}, \tag{2.2.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{N-1}\right) &\approx \frac{1}{\lambda T-1} - \frac{E(N-1) - (\lambda T-1)}{(\lambda T-1)^2} + \\
&\quad + \frac{E((N-1 - (\lambda T-1))^2)}{(\lambda T-1)^3} \\
&\approx \frac{1}{\lambda T-1} + \frac{\lambda T}{(\lambda T)^3} \\
&\approx \frac{(\lambda T)^2 - \lambda T + 1}{(\lambda T-1)^3} \tag{2.2.8}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{N(N+1)}\right) &\approx \frac{1}{\lambda T(\lambda T+1)} - \frac{E(N(N+1)) - \lambda T(\lambda T+1)}{(\lambda T)^2(\lambda T+1)^2} + \\
&\quad + \frac{E((N(N+1) - \lambda T(\lambda T+1))^2)}{(\lambda T)^3(\lambda T+1)^3} \\
&\approx \frac{1}{\lambda T(\lambda T+1)} - \frac{\lambda T}{(\lambda T)^2(\lambda T+1)^2} + \frac{4(\lambda T)^3 + 11(\lambda T)^2 + 4\lambda T}{(\lambda T)^3(\lambda T+1)^3} \\
&= \frac{(\lambda T)^4 + 5(\lambda T)^3 + 11(\lambda T)^2 - 4\lambda T}{(\lambda T)^3(\lambda T+1)^3} \\
&\approx \frac{\lambda T + 5}{(\lambda T+1)^3}. \tag{2.2.9}
\end{aligned}$$

### 2.2.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

Iremos, nesta seção, trabalhar com os estimadores de máxima verossimilhança de  $a$  e  $\sigma^2$ . Para isto, definamos:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \{X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_N}\}; \\ \mathbf{B} &= \{\mathbf{A}, \mathcal{W}_N, N\}; \\ \mathcal{T} &= \{\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_N - \tau_{N-1}\}; \\ \mathbf{A}_* &= \{X_{\tau_1}, X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \dots, X_{\tau_N} - X_{\tau_{N-1}}\}; \text{ e} \\ \mathbf{B}_* &= \{\mathbf{A}_*, \mathcal{T}, N\}.\end{aligned}$$

Utilizando-nos do fato de que o uso de  $\mathbf{B}_*$ , ao invés de  $\mathbf{B}$ , não levará à perda de nenhuma informação amostral além de levar à independência dos elementos de  $\mathbf{A}_*$  e também à independência dos elementos de  $\mathcal{T}$  e que as respectivas distribuições de  $\mathcal{T}$  e  $N$  independem de  $(a, \sigma^2)$ , nossa função de verossimilhança fica sendo:

$$\begin{aligned}L(a, \sigma^2 \mid \mathbf{B}_*) &= f_{\mathbf{B}_*}(y; a, \sigma^2) \\ &= f_N(n; a, \sigma^2) f_{\mathcal{T}}(t; a, \sigma^2 \mid N = n) f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2 \mid N = n, \mathcal{T} = t) \\ &= f_N(n) f_{\mathcal{T}}(t \mid N = n) f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2 \mid N = n, \mathcal{T} = t).\end{aligned}$$

Teremos, portanto, estimadores de máxima verossimilhança funcionalmente idênticos aos encontrados na Seção 1.3.

$$\hat{a}_{2,N} = \frac{X_{\tau_N}}{\tau_N}; \quad (2.2.10)$$

$$\hat{\sigma}_{2,N}^2 = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \frac{(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2}{\tau_i - \tau_{i-1}} - \frac{X_{\tau_N}^2}{\tau_N} \right). \quad (2.2.11)$$

**Proposição 38** *A esperança e a variância de  $\hat{a}_{2,N}$  são dadas por:*

$$E(\hat{a}_{2,N}) = a; \quad (2.2.12)$$

$$Var(\hat{a}_{2,N}) \approx \sigma^2 \frac{\lambda((\lambda T)^2 - \lambda T + 1)}{(\lambda T - 1)^3} \quad (2.2.13)$$

Prova: Utilizando-nos do fato de que  $\hat{a}_{2,N}$  é funcionalmente idêntico a  $\hat{a}_2$ , teremos:

$$E(\hat{a}_{2,N} | N = n) = E(\hat{a}_2);$$

$$Var(\hat{a}_{2,N} | N = n) = Var(\hat{a}_2) = \sigma^2 \frac{\lambda}{n-1}.$$

Com isto,

$$E(\hat{a}_{2,N}) = E(E(\hat{a}_{2,N} | N)) = E(a) = a$$

e, através de 2.2.8

$$\begin{aligned} Var(\hat{a}_{2,N}) &= E(Var(\hat{a}_{2,N} | N)) + Var(E(\hat{a}_{2,N} | N)) \\ &= E\left(\sigma^2 \frac{\lambda}{N-1}\right) + Var(a) = \sigma^2 \lambda E\left(\frac{1}{N-1}\right) \\ &\approx \sigma^2 \frac{\lambda((\lambda T)^2 - \lambda T + 1)}{(\lambda T - 1)^3}. \square \end{aligned}$$

Neste caso, em vez de aumentarmos o tamanho da amostra, iremos aumentar a sua expectativa, o que é feito se aumentarmos  $T$ , isto é o tempo que teremos para observar o processo  $\{X_t : t \geq 0\}$ . Faremos isso a fim de obter uma noção análoga à de consistência.

**Proposição 39**  $\hat{a}_{2,N} \xrightarrow{p} a$ , quando  $T \rightarrow \infty$ .

Prova: Temos que  $E(\hat{a}_{2,N}) = a$  e, quando  $T \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{T \rightarrow \infty} Var(\hat{a}_2) = 0$ . Por Tchebyshev,  $\hat{a}_{2,N}$  converge em probabilidade para  $a$  quando  $T \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Proposição 40** A distribuição de  $\hat{a}_{2,N}$  é absolutamente contínua com densidade dada por:

$$\begin{aligned} f_{\hat{a}_{2,N}}(x) &= (2\pi\lambda\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \left( \left(1 + \frac{(x-a)^2}{2\lambda\sigma^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n)} (1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x-a)^2}{2\lambda\sigma^2})^{-n} \frac{(\lambda T)^n \exp(-\lambda T)}{n!} \right) + \\ &\quad + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(1 + \frac{(x-a)^2}{2\lambda\sigma^2}\right)^{-\frac{5}{2}} (\exp(-\lambda T) + \lambda T \exp(-\lambda T)) \end{aligned}$$

Prova: Sendo  $\hat{a}_{2,N}$  funcionalmente idêntico a  $\hat{a}_2$ , temos :

$$f_{\hat{a}_{2,N}}(x | N = n) = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)} (2\pi\lambda\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{(x-a)^2}{2\lambda\sigma^2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Com isto,

$$\begin{aligned} f_{\hat{a}_{2,N}}(x) &= \sum_n P(N = n) f_{\hat{a}_{2,N}}(x | N = n) \\ &= \frac{\Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} (2\pi\lambda\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{(x-a)^2}{2\lambda\sigma^2}\right)^{-2-\frac{1}{2}} (\exp(-\lambda T) + \\ &\quad + \lambda T \exp(-\lambda T) + \frac{(\lambda T)^2 \exp(-\lambda T)}{2}) + \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)} (2\pi\lambda\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{(x-a)^2}{2\lambda\sigma^2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} \frac{(\lambda T)^n \exp(-\lambda T)}{n!} \\ &= (2\pi\lambda\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \left( \left(1 + \frac{(x-a)^2}{2\lambda\sigma^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)} \left(1 + \frac{(x-a)^2}{2\lambda\sigma^2}\right)^{-n} \times \right. \\ &\quad \left. \frac{(\lambda T)^n \exp(-\lambda T)}{n!} \right) + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(1 + \frac{(x-a)^2}{2\lambda\sigma^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \times \\ &\quad (\exp(-\lambda T) + \lambda T \exp(-\lambda T)). \square \end{aligned}$$

Quanto às propriedades de  $\hat{\sigma}_{2,N}^2$ , temos:

**Proposição 41** *A Esperança e a Variância de  $\hat{\sigma}_{2,N}^2$  são dadas por :*

$$E\left(\hat{\sigma}_{2,N}^2\right) \approx \sigma^2 \frac{(\lambda T)^2 - \lambda T - 1}{(\lambda T)^2}; \quad (2.2.14)$$

$$Var\left(\hat{\sigma}_{2,N}^2\right) \approx \sigma^4 \frac{2(\lambda T)^2 + \lambda T - 2}{(\lambda T)^3}. \quad (2.2.15)$$

Prova: Sendo  $\hat{\sigma}_{2,N}^2$  funcionalmente idêntico a  $\hat{\sigma}_2^2$ , temos:

$$E\left(\hat{\sigma}_{2,N}^2 | N = n\right) = E\left(\hat{\sigma}_2^2\right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2;$$

$$Var\left(\hat{\sigma}_{2,N}^2 \mid N = n\right) = Var\left(\hat{\sigma}_2^2\right) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$$

Segue, por 2.2.4 , que:

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\sigma}_{2,N}^2\right) &= E\left(E\left(\hat{\sigma}_{2,N}^2 \mid N\right)\right) = E\left(\frac{N-1}{N}\sigma^2\right) = \sigma^2\left(1 - E\left(\frac{1}{N}\right)\right) \\ &\approx \sigma^2\left(1 - \frac{\lambda T + 1}{(\lambda T)^2}\right) = \sigma^2 \frac{(\lambda T)^2 - \lambda T - 1}{(\lambda T)^2} \end{aligned}$$

e, por 2.2.4 e 2.2.5 ,

$$\begin{aligned} Var\left(\hat{\sigma}_{2,N}^2\right) &= E\left(Var\left(\hat{\sigma}_{2,N}^2 \mid N\right)\right) + Var\left(E\left(\hat{\sigma}_{2,N}^2 \mid N\right)\right) \\ &= E\left(\frac{2(N-1)}{N^2}\sigma^4\right) + Var\left(\frac{N-1}{N}\sigma^2\right) \\ &= \sigma^4\left(2E\left(\frac{1}{N}\right) - 2E\left(\frac{1}{N^2}\right) + Var\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right) \\ &= \sigma^4\left(2\left(\frac{\lambda T + 1}{(\lambda T)^2} - \frac{\lambda T + 3}{(\lambda T)^3}\right) + 1 - \frac{2\lambda T + 2}{(\lambda T)^2} + \frac{\lambda T + 3}{(\lambda T)^3} + \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{\lambda T + 1}{(\lambda T)^2}\right)^2\right) \\ &\approx \sigma^4 \frac{2(\lambda T)^3 + (\lambda T)^2 - 2\lambda T - 1}{(\lambda T)^4} \approx \sigma^4 \frac{2(\lambda T)^2 + \lambda T - 2}{(\lambda T)^3}. \square \end{aligned}$$

**Proposição 42**  $\hat{\sigma}_{2,N}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$  quando  $T \rightarrow \infty$ .

Prova: Note-se, por 2.2.14 e 2.2.15 , que:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} E\left(\hat{\sigma}_{2,N}^2\right) &= \sigma^2; \\ \lim_{T \rightarrow \infty} Var\left(\hat{\sigma}_{2,N}^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

o que nos leva, por Tchebyshev, diretamente à proposição.  $\square$

**Proposição 43** A distribuição de  $\hat{\sigma}_{2,N}^2$  tem função densidade de probabilidade dada por:

$$f_{\hat{\sigma}_{2,N}^2}(x) = (\pi\sigma^2x)^{-\frac{1}{2}}(\lambda T + 1)\exp\left(-\frac{\sigma^2x}{4} - \lambda T\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{\sigma^2x}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{(\lambda T)^n \exp(-\lambda T)}{n!}$$

Prova: Sendo  $\hat{\sigma}_{2,N}^2$  funcionalmente idêntico a  $\hat{\sigma}_2^2$ , temos:

$$f_{\frac{N\sigma_2^2}{\sigma^2}}(y \mid N = n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} y^{\frac{n-1}{2}-1} \exp\left(-\frac{y}{2}\right),$$

o que nos leva a:

$$f_{\hat{\sigma}_{2,N}^2}(x \mid N = n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{\sigma^2x}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}-1} \exp\left(-\frac{\sigma^2x}{2n}\right).$$

Temos, então:

$$\begin{aligned} f_{\hat{\sigma}_{2,N}^2}(x) &= \sum_N P(N = n) f_{\hat{\sigma}_{2,N}^2}(x \mid N = n) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2-1}{2}\right)} \left(\frac{\sigma^2x}{2}\right)^{\frac{2-1}{2}-1} \exp\left(-\frac{\sigma^2x}{2 \times 2}\right) (\exp(-\lambda T) + \\ &\quad + \lambda T \exp(-\lambda T) + \frac{(\lambda T)^2 \exp(-\lambda T)}{2}) + \\ &\quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{\sigma^2x}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}-1} \exp\left(-\frac{\sigma^2x}{2n}\right) \frac{(\lambda T)^n \exp(-\lambda T)}{n!} \\ &= (\pi\sigma^2x)^{-\frac{1}{2}}(\lambda T + 1)\exp\left(-\frac{\sigma^2x}{4} - \lambda T\right) + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{\sigma^2x}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{(\lambda T)^n \exp(-\lambda T)}{n!} \end{aligned}$$

## 2.2.2 Estimação pelo Método dos Momentos

Neste caso, o método dos momentos pode ser parecer inadequado pois, pela sua definição, está explícito na resolução do problema o conhecimento a priori do tamanho de amostra  $n$ . O que propomos é um estimador pelo "Método Condicionado dos Momentos", isto é, o tradicional MM condicionado a um tamanho de amostra conhecido a posteriori.

Desta forma, os EMM's, como acontecido com os EMV's, serão funcionalmente idênticos aos obtidos no caso do tamanho de amostra fixado a priori:

$$\tilde{a}_{2,N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \quad (2.2.16)$$

e

$$\tilde{\sigma}_{2,N}^2 = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \frac{(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2}{\tau_i - \tau_{i-1}} - \frac{1}{N\lambda} \left( \sum_{i=1}^N \frac{X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \right)^2 \right). \quad (2.2.17)$$

**Proposição 44**  $\tilde{a}_{2,N}$  é não-viciado com variância dada por:

$$Var(\tilde{a}_{2,N}) = \infty.$$

Prova: Sendo  $\tilde{a}_{2,N}$  funcionalmente idêntico a  $\tilde{a}_2$ , teríamos:

$$E(\tilde{a}_{2,N} | N = n) = E(\tilde{a}_2) = a$$

e

$$Var(\tilde{a}_{2,N} | N = n) = Var(\tilde{a}_2) = \infty$$

Com isto,

$$E(\tilde{a}_{2,N}) = E(E(\tilde{a}_{2,N} | N)) = E(a) = a.$$

e

$$\begin{aligned} Var(\tilde{a}_{2,N}) &= E(Var(\tilde{a}_{2,N} | N)) + Var(E(\tilde{a}_{2,N} | N)) \\ &= E(\infty) + Var(a) = \infty. \end{aligned}$$

**Proposição 45**  $\tilde{a}_{2,N}$  tem distribuição cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$\begin{aligned} f_{\tilde{a}_{2,N}}(x) = & 2\lambda^2 (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} (\lambda T + 1) \exp(-\lambda T) \int_0^\infty \int_0^\infty (t_1^{-1} + t_2^{-1})^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \exp\left(-\lambda(t_1 + t_2) - \frac{4(x-a)^2}{\sigma^2(t_1^{-1} + t_2^{-1})}\right) dt_2 dt_1 + \\ & + \sum_{n=2}^\infty \frac{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} (\lambda T)^{2n} \exp(-\lambda T)}{(n-1)!} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n t_i^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n^2(x-a)^2}{\sigma^2 \sum_{i=1}^n t_i^{-1}}\right) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 \end{aligned}$$

Prova: Temos, como no caso do cálculo da esperança de nosso estimador que este é funcionalmente idêntico ao obtido pelo método dos momentos na Seção 1.3. Com isto:

$$\begin{aligned} f_{\tilde{a}_{2,N}}(x | N = n) = & n\lambda^n (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n t_i^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n t_i + \right. \\ & \left. - \frac{n^2(x-a)^2}{\sigma^2 \sum_{i=1}^n t_i^{-1}}\right) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1. \end{aligned}$$

Isto nos leva a:

$$\begin{aligned} f_{\tilde{a}_{2,N}}(x) = & \sum_N P(N = n) f_{\tilde{a}_{2,N}}(x | N = n) \\ = & \left( \exp(-\lambda T) + \lambda T \exp(-\lambda T) + \frac{(\lambda T)^2 \exp(-\lambda T)}{2} \right) 2\lambda^2 (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \int_0^\infty \int_0^\infty (t_1^{-1} + t_2^{-1})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\lambda(t_1 + t_2) - \frac{2^2(x-a)^2}{\sigma^2(t_1^{-1} + t_2^{-1})}\right) dt_2 dt_1 + \\ & + \sum_{n=3}^\infty \frac{(\lambda T)^n \exp(-\lambda T)}{n!} n\lambda^n (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n t_i^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n^2(x-a)^2}{\sigma^2 \sum_{i=1}^n t_i^{-1}}\right) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\lambda^2 (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} (\lambda T + 1) \exp(-\lambda T) \int_0^\infty \int_0^\infty (t_1^{-1} + t_2^{-1})^{-\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \exp\left(-\lambda(t_1 + t_2) - \frac{4(x-a)^2}{\sigma^2(t_1^{-1} + t_2^{-1})}\right) dt_2 dt_1 + \\
&\quad + \sum_{n=2}^\infty \frac{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} (\lambda T)^{2n} \exp(-\lambda T)}{(n-1)!} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n t_i^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n^2(x-a)^2}{\sigma^2 \sum_{i=1}^n t_i}\right) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 \square
\end{aligned}$$

**Proposição 46** *A esperança e a variância de  $\tilde{\sigma}_{2,N}^2$  são dadas por:*

$$E(\tilde{\sigma}_{2,N}^2) = -\infty \quad (2.2.18)$$

$$Var(\tilde{\sigma}_{2,N}^2) \text{ indeterminada.} \quad (2.2.19)$$

Prova: Sendo  $\tilde{\sigma}_{2,N}^2$  funcionalmente idêntico a  $\tilde{\sigma}_2^2$ , teríamos:

$$E(\tilde{\sigma}_{2,N}^2 \mid N = n) = E(\tilde{\sigma}_2^2) = -\infty.$$

Dai:

$$E(\tilde{\sigma}_{2,N}^2) = E(E(\tilde{\sigma}_{2,N}^2 \mid N)) = E(-\infty) = -\infty$$

e 2.2.19 segue diretamente de 2.2.18 .

## 2.3 Tempos Aleatórios Não-Observáveis Ordenáveis

Nesta seção, consideraremos que as componentes de  $\mathcal{W}_n$  são não-observáveis mas conhecemos em que ordem o processo foi amostrado.

### 2.3.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

Nossa função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned}
L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*) &= f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2) = \int_{\tau} f_{\mathbf{B}_*}(y; a, \sigma^2) dt \\
&= \int_{\tau} f_N(n) f_{\tau}(t | N = n) f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2 | N = n, \tau = t) dt \\
&= \int_{\tau} P(N = n) \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2}\right)(t_i - t_{i-1}) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2}{2\sigma^2(t_i - t_{i-1})} + \frac{a}{\sigma^2}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) d(t_i - t_{i-1})\right) \\
&= P(N = n) \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\right)^k \left(\lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2}\right)^{-\frac{k}{2}} \exp\left(\frac{a}{\sigma^2} X_{\tau_n} - \right. \\
&\quad \left. \left(\lambda + \frac{a^2}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \sum_{i=1}^n |X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}|\right),
\end{aligned}$$

como visto na Seção 1.4.

Esta função de verossimilhança é proporcional à encontrada na Seção 1.4, isto é, existe solução para as equações de verossimilhança não sendo esta solução, entretanto, explícita.

### 2.3.2 Estimação pelo Método dos Momentos

Iremos, novamente, utilizar o "Método dos Momentos Condicionados" como forma de encontrar nossos estimadores. Desta feita, estes serão funcionalmente idênticos aos encontrados na Seção 1.4:

$$\tilde{a}_{3,N} = \frac{\lambda X_{\tau_n}}{N} \quad (2.3.20)$$

e

$$\tilde{\sigma}_{3,N}^2 = \frac{\lambda}{N} \left( \sum_{i=1}^N (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2 - \frac{2X_{\tau_N}}{N} \right), \quad (2.3.21)$$

cuja distribuição, entretanto, não são idênticas às dos respectivos estimadores daquela seção, como ver-se-á em seguida.

**Proposição 47** A Esperança e a Variância de  $\tilde{a}_{3,N}$  são dadas por:

$$E(\tilde{a}_{3,N}) = a$$

$$Var(\tilde{a}_{3,N}) \approx (\lambda\sigma^2 + a^2) \frac{\lambda T + 1}{(\lambda T)^2}.$$

Prova: Sabendo-se ser  $\tilde{a}_{3,N}$  funcionalmenmte idêntico a  $\tilde{a}_3$ , temos:

$$E(\tilde{a}_{3,N} | N = n) = E(\tilde{a}_3) = a$$

$$Var(\tilde{a}_{3,N} | N = n) = Var(\tilde{a}_3) = \frac{\lambda\sigma^2 + a^2}{n}.$$

Com isto:

$$E(\tilde{a}_{3,N}) = E(E(\tilde{a}_{3,N} | N)) = E(a) = a$$

e, por 2.2.4 ,

$$\begin{aligned} Var(\tilde{a}_{3,N}) &= Var(E(\tilde{a}_{3,N} | N)) + E(Var(\tilde{a}_{3,N} | N)) \\ &= Var(a) + E\left(\frac{\lambda\sigma^2 + a^2}{N}\right) = (\lambda\sigma^2 + a^2) E\left(\frac{1}{N}\right) \\ &\approx (\lambda\sigma^2 + a^2) \frac{\lambda T + 1}{(\lambda T)^2}. \end{aligned}$$

**Proposição 48**  $\tilde{a}_{3,N} \xrightarrow{p} a$  quando  $T \rightarrow \infty$

Prova: Temos  $E(\tilde{a}_{3,N}) = a$  e  $\lim_{T \rightarrow \infty} Var(\tilde{a}_{3,N}) = 0$ . Por Tchebyshev, temos provada a proposição.  $\square$

**Proposição 49** A distribuição de  $\tilde{a}_{3,N}$  é de forma que:

$$\begin{aligned} f_{\tilde{a}_{3,N}}(x) &= 2\lambda^2(\lambda T + 1) \exp(-\lambda T) \mathcal{L}\left(v^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{-\lambda^2 a^2 v^3 - 4\lambda a x v^2}{2\lambda^2 \sigma^2}\right)\right) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda T)^{2n} \exp(-\lambda T)}{T^n (n-1)! n!} \mathcal{L}\left(v^{n-1/2} \exp\left(-\frac{-\lambda^2 a^2 v^3 - 2\lambda n a x v^2}{2\lambda^2 \sigma^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Prova: Sendo  $\tilde{a}_{3,N}$  funcionalmente idêntico a  $\tilde{a}_3$ , temos:

$$f_{\tilde{a}_{3,N}}(x | N = n) = \frac{n\lambda^n}{\Gamma(n)} \mathcal{L} \left( v^{n-12} \exp \left( -\frac{-\lambda^2 a^2 v^3 - 2\lambda n a x v^2}{2\lambda^2 \sigma^2} \right) \right).$$

Com isto, temos:

$$\begin{aligned} f_{\tilde{a}_{3,N}}(x) &= \sum_N P(N = n) f_{\tilde{a}_{3,N}}(x | N = n) \\ &= \left( \exp(-\lambda T) + \lambda T \exp(-\lambda T) + \frac{(\lambda T)^2 \exp(-\lambda T)}{2} \right) \times \\ &\quad \mathcal{L} \left( v^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{-\lambda^2 a^2 v^3 - 4\lambda a x v^2}{2\lambda^2 \sigma^2} \right) \right) + \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n \exp(-\lambda T)}{n!} \mathcal{L} \left( v^{n-12} \exp \left( -\frac{-\lambda^2 a^2 v^3 - 2\lambda n a x v^2}{2\lambda^2 \sigma^2} \right) \right) \\ &= 2\lambda^2 (\lambda T + 1) \exp(-\lambda T) \mathcal{L} \left( v^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{-\lambda^2 a^2 v^3 - 4\lambda a x v^2}{2\lambda^2 \sigma^2} \right) \right) + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda T)^{2n} \exp(-\lambda T)}{T^n (n-1)! n!} \mathcal{L} \left( v^{n-12} \exp \left( -\frac{-\lambda^2 a^2 v^3 - 2\lambda n a x v^2}{2\lambda^2 \sigma^2} \right) \right). \square \end{aligned}$$

Quanto a  $\tilde{\sigma}_{3,N}^2$ , temos:

**Proposição 50** A esperança e a Variância de  $\tilde{\sigma}_{3,N}^2$  são dadas por:

$$E(\tilde{\sigma}_{3,N}^2) \approx \sigma^2 \frac{(\lambda T)^2 - 2\lambda T - 2}{(\lambda T)^2} - 2a^2 \frac{\lambda T + 1}{\lambda (\lambda T)^2} \quad (2.3.22)$$

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\sigma}_{3,N}^2) &\approx \sigma^4 \frac{5(\lambda T)^2 + 3\lambda T + 10}{(\lambda T)^3} + 4a^2 \sigma^2 \frac{7(\lambda T)^2 + 4\lambda T + 1}{\lambda (\lambda T)^3} + \\ &\quad + 4a^4 \frac{3(\lambda T)^2 + 5\lambda T + 13}{\lambda^2 (\lambda T)^3}. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Prova: Sendo  $\tilde{\sigma}_{3,N}^2$  funcionalmente idêntico a  $\tilde{\sigma}_3^2$ , temos:

$$E(\tilde{\sigma}_{3,N}^2 | N = n) = E(\tilde{\sigma}_3^2) = \frac{n-2}{n} \sigma^2 - \frac{2}{\lambda n} a^2$$

e

$$\begin{aligned}
Var(\tilde{\sigma}_{3,N}^2 | N = n) &= Var(\tilde{\sigma}_3^2) = \frac{n-2}{n}\sigma^2 - \frac{2}{\lambda n}a^2 + \\
&\quad + \frac{\sigma^4}{n^3}(5n^2 - 2n + 12) + \frac{4a^2\sigma^2}{\lambda n^3}(5n^2 + n + 8) + \\
&\quad + \frac{4a^4}{\lambda^2 n^3}(3n^2 + 2n + 6)
\end{aligned}$$

Segue, por 2.2.4

$$\begin{aligned}
E(\tilde{\sigma}_{3,N}^2) &= E(E(\tilde{\sigma}_{3,N}^2 | N)) = E\left(\frac{N-2}{N}\sigma^2 - \frac{2}{\lambda N}a^2\right) \\
&= \sigma^2\left(1 - 2E\left(\frac{1}{N}\right)\right) - \frac{2a^2}{\lambda}E\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= \sigma^2\frac{(\lambda T)^2 - 2\lambda T - 2}{(\lambda T)^2} - 2a^2\frac{\lambda T + 1}{\lambda(\lambda T)^2}
\end{aligned}$$

e, por 2.2.4 , 2.2.5 e 2.2.6 ,

$$\begin{aligned}
Var(\tilde{\sigma}_{3,N}^2) &= Var(E(\tilde{\sigma}_{3,N}^2 | N)) + E(Var(\tilde{\sigma}_{3,N}^2 | N)) \\
&= Var\left(\frac{N-2}{N}\sigma^2 - \frac{2}{\lambda N}a^2\right) + E\left(\frac{\sigma^4}{N^3}(5N^2 - 2N + 12) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4a^2\sigma^2}{\lambda N^3}(5N^2 + N + 8) + \frac{4a^4}{\lambda^2 N^3}(3N^2 + 2N + 6)\right) \\
&= \sigma^4 E\left(1 - \frac{4}{N} + \frac{4}{N^2}\right) + \frac{4a^4}{\lambda^2}E\left(\frac{1}{N^2}\right) - \frac{4a^2\sigma^2}{\lambda}E\left(\frac{1}{N} - \frac{2}{N^2}\right) + \\
&\quad - \left(\sigma^2 E\left(1 - \frac{2}{N}\right) - \frac{2a^2}{\lambda}E\left(\frac{1}{N}\right)\right)^2 + \\
&\quad + \sigma^4 E\left(\frac{5}{N} - \frac{2}{N^2} + \frac{12}{N^3}\right) + \frac{4a^2\sigma^2}{\lambda}E\left(\frac{5}{N} + \frac{1}{N^2} + \frac{8}{N^3}\right) + \\
&\quad + \frac{4a^4}{\lambda^2}E\left(\frac{3}{N} + \frac{2}{N^2} + \frac{6}{N^3}\right) \\
&= \sigma^4\left(5E\left(\frac{1}{N}\right) + 2E\left(\frac{1}{N^2}\right) + 12E\left(\frac{1}{N^3}\right) - 4\left(E\left(\frac{1}{N}\right)\right)^2\right) + \\
&\quad + \frac{4a^2\sigma^2}{\lambda}\left(7E\left(\frac{1}{N}\right) - E\left(\frac{1}{N^2}\right) + 8E\left(\frac{1}{N^3}\right) - 2\left(E\left(\frac{1}{N}\right)\right)^2\right) + \\
&\quad + \frac{4a^4}{\lambda^2}\left(3E\left(\frac{1}{N}\right) + 3E\left(\frac{1}{N^2}\right) + 6E\left(\frac{1}{N^3}\right) - \left(E\left(\frac{1}{N}\right)\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \sigma^4 \frac{5(\lambda T)^3 + 3(\lambda T)^2 + 10\lambda T - 4}{(\lambda T)^4} + \frac{4a^2\sigma^2}{\lambda} \frac{7(\lambda T)^3 + 4(\lambda T)^2 + \lambda T - 2}{(\lambda T)^4} + \\
&\quad + \frac{4a^4}{\lambda^2} \frac{3(\lambda T)^3 + 5(\lambda T)^2 + 13\lambda T - 1}{(\lambda T)^4} \\
&\approx \sigma^4 \frac{5(\lambda T)^2 + 3\lambda T + 10}{(\lambda T)^3} + 4a^2\sigma^2 \frac{7(\lambda T)^2 + 4\lambda T + 1}{\lambda(\lambda T)^3} + \\
&\quad + 4a^4 \frac{3(\lambda T)^2 + 5\lambda T + 13}{\lambda^2(\lambda T)^3}.
\end{aligned}$$

**Proposição 51**  $\tilde{\sigma}_{3,N}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$  quando  $T \rightarrow \infty$ .

Prova: De 2.3.22 e 2.3.23, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} E\left(\tilde{\sigma}_{3,N}^2\right) &= \sigma^2 \\
\lim_{T \rightarrow \infty} Var\left(\tilde{\sigma}_{3,N}^2\right) &= 0,
\end{aligned}$$

o que nos leva diretamente à proposição, por Tchebyshev.  $\square$

## 2.4 Tempos Aleatórios Não-Ordenáveis

Neste caso, não dispomos dos tempos de observação nem da ordem relativa das variáveis amostradas. Notemos que, como na Seção 1.5, temos, agora, nossa função de verossimilhança proporcional, em relação a  $a$  e  $\sigma^2$ , ou seja, nossos estimadores de máxima verossimilhança são os mesmos da Seção 2.4, isto é, existem sem que, no entanto, nos seja possível encontrá-los sob uma forma explícita.

### 2.4.1 Estimação pelo Método dos Momentos

Novamente, encontraremos nossos estimadores pelo "Método dos Momentos Condiicionados" funcionalmente idênticos aos da Seção 1.5:

$$\tilde{a}_{4,N} = \frac{2\lambda}{N(N+1)} \sum_{j=1}^N X_{\tau_{i_j}} \quad (2.4.24)$$

e

$$\tilde{\sigma}_{4,N}^2 = \frac{2\lambda}{N(N+1)} \sum_{i=1}^N X_{\tau_{i_j}}^2 - \frac{8(N+2)\lambda}{3N^2(N+1)^2} \left( \sum_{i=1}^N X_{\tau_{i_j}} \right)^2. \quad (2.4.25)$$

**Proposição 52**  $\tilde{a}_{4,N}$  é não-viciado com variância dada por:

$$Var(\tilde{a}_{4,N}) \approx \frac{2(\lambda\sigma^2 + a^2)}{3} \frac{2(\lambda T)^2 + 7\lambda T + 7}{(\lambda T + 1)^3}.$$

Prova: Sendo  $\tilde{a}_{4,N}$  funcionalmente idêntico a  $\tilde{a}_4$ :

$$E(\tilde{a}_{4,N} \mid N = n) = E(\tilde{a}_4) = a$$

e

$$Var(\tilde{a}_{4,N} \mid N = n) = Var(\tilde{a}_4) = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} (\lambda\sigma^2 + a^2).$$

Daí:

$$E(\tilde{a}_{4,N}) = E(E(\tilde{a}_{4,N} \mid N)) = E(a) = a$$

e, por 2.2.7 e 2.2.9 ,

$$\begin{aligned} Var(\tilde{a}_{4,N}) &= Var(E(\tilde{a}_{4,N} \mid N)) + E(Var(\tilde{a}_{4,N} \mid N)) \\ &= Var(a) + E\left(\frac{2(2N+1)}{3N(N+1)} (\lambda\sigma^2 + a^2)\right) \\ &= \frac{2(\lambda\sigma^2 + a^2)}{3} \left( E\left(\frac{2}{N+1}\right) + E\left(\frac{1}{N(N+1)}\right) \right) \\ &\approx \frac{2(\lambda\sigma^2 + a^2)}{3} \left( 2\frac{(\lambda T)^2 + 3\lambda T + 1}{(\lambda T + 1)^3} + \frac{\lambda T + 5}{(\lambda T + 1)^3} \right) \\ &= \frac{2(\lambda\sigma^2 + a^2)}{3} \frac{2(\lambda T)^2 + 7\lambda T + 7}{(\lambda T + 1)^3}. \square \end{aligned}$$

**Proposição 53**  $\tilde{a}_{4,N} \xrightarrow{p} a$  quando  $T \rightarrow \infty$

Prova: Como  $E(\tilde{a}_{4,N}) = a$  e  $\lim_{T \rightarrow \infty} Var(\tilde{a}_{4,N}) = 0$ , por Tchebyshev, está provada a proposição.  $\square$

**Proposição 54** A distribuição de  $\tilde{a}_{4,N}$  é tal que sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_{\tilde{a}_{4,N}}(x) = (\lambda T + 1) \exp(-\lambda T) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{3}{\sigma \sqrt{4\pi t_1}} \exp(-\lambda(t_1 + t_2) + \frac{3(3x - \lambda a(2t_1 + t_2))^2}{4\lambda^2 \sigma^2 t_1}) dt_2 dt_1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{(\lambda T)^n \exp(-\lambda T)}{n!} \times \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\lambda n(n+1)}{2\lambda \sigma \sqrt{2\pi} \sum_{i=1}^n 2(n-i) \sum_{j=1}^i t_j} \exp\left(-\frac{n(n+1)}{8\lambda^2 \sigma^2} \times \frac{(n(n+1)x - 2\lambda a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i t_j)^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 2(n-i)t_j}\right) \prod_{k=1}^n \exp(-\lambda t_k) dt_k.$$

Prova: Sendo  $\tilde{a}_{4,N}$  funcionalmente idêntico a  $\tilde{a}_4$ , temos:

$$f_{\tilde{a}_{4,N}}(x | N = n) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\lambda n(n+1)}{2\lambda \sigma \sqrt{2\pi} \sum_{i=1}^n 2(n-i) \sum_{j=1}^i t_j} \exp\left(-\frac{n(n+1)}{8\lambda^2 \sigma^2} \frac{(n(n+1)x - 2\lambda a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i t_j)^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 2(n-i)t_j}\right) \prod_{k=1}^n \exp(-\lambda t_k) dt_k.$$

Segue que:

$$f_{\tilde{a}_{4,N}}(x) = \sum_N P(N = n) f_{\tilde{a}_{4,N}}(x | N = n) = (\exp(-\lambda T) + \lambda T \exp(-\lambda T) + \frac{(\lambda T)^2 \exp(-\lambda T)}{2}) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{3}{\sigma \sqrt{4\pi t_1}} \exp(-\lambda(t_1 + t_2) + \frac{3(3x - \lambda a(2t_1 + t_2))^2}{4\lambda^2 \sigma^2 t_1}) dt_2 dt_1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{(\lambda T)^n \exp(-\lambda T)}{n!} \times$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\lambda n (n+1)}{2\lambda\sigma\sqrt{2\pi} \sum_{i=1}^n 2(n-i) \sum_{j=1}^i t_j} \exp\left(-\frac{n(n+1)}{8\lambda^2\sigma^2} \times \right. \\
& \left. \frac{(n(n+1)x - 2\lambda a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i t_j)^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 2(n-i)t_j}\right) \prod_{k=1}^n \exp(-\lambda t_k) dt_k \\
& = (\lambda T + 1) \exp(-\lambda T) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{3}{\sigma\sqrt{4\pi t_1}} \exp(-\lambda(t_1 + t_2) + \\
& \quad - \frac{3(3x - \lambda a(2t_1 + t_2))^2}{4\lambda^2\sigma^2 t_1}) dt_2 dt_1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{(\lambda T)^n \exp(-\lambda T)}{n!} \times \\
& \quad \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\lambda n (n+1)}{2\lambda\sigma\sqrt{2\pi} \sum_{i=1}^n 2(n-i) \sum_{j=1}^i t_j} \exp\left(-\frac{n(n+1)}{8\lambda^2\sigma^2} \times \right. \\
& \quad \left. \frac{(n(n+1)x - 2\lambda a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i t_j)^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 2(n-i)t_j}\right) \prod_{k=1}^n \exp(-\lambda t_k) dt_k. \square
\end{aligned}$$

Quanto a  $\tilde{\sigma}_{4,N}^2$ , temos, por 2.2.7 e 2.2.9 :

$$\begin{aligned}
E(\tilde{\sigma}_{4,N}^2) &= E(E(\tilde{\sigma}_{4,N}^2 | N)) \\
&= E\left(\sigma^2 \left(1 - \frac{4(N+2)(2N-1)}{3N(N+1)}\right) - \frac{4(N+2)(2N-1)}{3N(N+1)\lambda} a^2\right) \\
&= \sigma^2 - \frac{4(\lambda\sigma^2 + a^2)}{3\lambda} E\left(\frac{(N+2)(2N-1)}{N(N+1)}\right) \\
&= \sigma^2 - \frac{4(\lambda\sigma^2 + a^2)}{3\lambda} E\left(2 + \frac{1}{N+1} - \frac{2}{N(N+1)}\right) \\
&\approx \sigma^2 - \frac{4(\lambda\sigma^2 + a^2)}{3\lambda} \left(2 + \frac{(\lambda T)^2 + 3\lambda T + 1}{(\lambda T + 1)^3} - 2\frac{\lambda T + 5}{(\lambda T + 1)^3}\right) \\
&= \sigma^2 \left(-\frac{5}{3} - 4\frac{(\lambda T)^2 + \lambda T - 9}{3(\lambda T + 1)^3}\right) - \frac{4a^2}{3\lambda} \left(2 + \frac{(\lambda T)^2 + \lambda T - 9}{(\lambda T + 1)^3}\right).
\end{aligned}$$

Note-se que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E(\tilde{\sigma}_{4,N}^2) \approx -\frac{5}{3}\sigma^2 - \frac{8}{3}a^2,$$

o que é um resultado inadmissível para um pretendo estimador de  $\sigma^2$ , um parâmetro positivo.

## 2.5 Conclusões

Apesar de alguns dos resultados do Capítulo 1 serem mais expressivos do que os obtidos neste capítulo, como por exemplo as distribuições, pela utilização do Teorema da Convergência Dominada, os estimadores de  $a$  e  $\sigma^2$  obtidos neste capítulo se equivalem, em suas propriedades assintóticas, aos respectivos estimadores do Capítulo 1.

## Capítulo 3

# Processo de Ornstein-Uhlenbeck com função média linear

### 3.1 Introdução

Seja  $U = \{U_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  um processo de Ornstein-Uhlenbeck, ou seja, um processo gaussiano que, sendo  $W = \{W_t : t \in \mathbb{R}_+\}$  um processo de Wiener padrão, satisfaz:

$$dU_t = -\theta U_t dt + \sqrt{2\theta} dW_t,$$

conhecida equação de Langevin cuja solução, para  $s \leq t$ , é

$$U_t = \exp(-\theta(t-s)) U_s + \sqrt{2\theta} \sigma \int_s^t \exp(-\theta(t-u)) dW_u.$$

Desta forma,  $\{U_t : t \geq 0\}$ , é um processo de Markov e, mais ainda: se tomarmos  $W_n$  da forma da Seção 1.2 e  $\theta = \sigma = 1$ , teremos que  $U_{t_1}$ ,  $U_{t_2} - \exp(-(t_2 - t_1)) U_{t_1}, \dots$  e  $U_{t_n} - \exp(-(t_n - t_{n-1})) U_{t_{n-1}}$  formam um conjunto de variáveis aleatórias independentes. Temos, além disto, as seguintes propriedades:

$$E(U_t) = 0 \quad \forall t;$$

$$Var(U_t) = 1 \quad \forall t;$$

$$Cov(U_t, U_s) = \exp(-|t-s|) \quad \forall t, s;$$

$$E(U_t - \exp(-(t-s)) U_s) = 0 \quad \forall s < t;$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(U_t - \exp(-(t-s))U_s) &= 1 - \exp(-2(t-s)) \quad \forall s < t, \\ \text{Cov}(U_t - \exp(-(t-s))U_s, U_s) &= 0 \quad \forall s < t. \end{aligned}$$

Assim,

$$(U_{t_1}, U_{t_2} - \exp(-(t_2 - t_1))U_{t_1}, \dots, U_{t_n} - \exp(-(t_n - t_{n-1}))U_{t_{n-1}}) \sim N(\mathbf{0}_n, \Sigma_0),$$

onde  $\Sigma_0 = \text{diag}(1, 1 - \exp(-2(t_2 - t_1)), \dots, 1 - \exp(-2(t_n - t_{n-1})))$ .

De forma análoga à do caso anterior, definamos  $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  como:

$$X_t = at + \sigma U_t.$$

Teremos que  $X_t \sim N(at, \sigma^2)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  e, por hereditariedade de independência,  $X_{t_1}$ ,  $X_{t_2} - \exp(-(t_2 - t_1))X_{t_1}$ , ... e  $X_{t_n} - \exp(-(t_n - t_{n-1}))X_{t_{n-1}}$  são independentes.

## 3.2 Tempos de Observação Determinísticos

### 3.2.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

Seja  $\mathbf{A}$  nossa amostra. Como nos casos anteriores, utilizar-nos-emos de alguma função da amostra que ortogonalize as relações entre as variáveis amostradas, sem que, no entanto, haja perda de informação amostral sobre os nossos parâmetros. Note-se que estas características são atendidas por:

$$\mathbf{A}_* = (X_{t_1}, X_{t_2} - \exp(-(t_2 - t_1))X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - \exp(-(t_n - t_{n-1}))X_{t_{n-1}})'$$

Encontremos, a seguir, o nosso estimador de máxima verossimilhança de  $a$  e  $\sigma^2$ . Seja  $L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*)$  nossa função de verossimilhança:

$$\begin{aligned}
L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*) &= f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2) \\
&= f_{X_{t_1}}(x_{t_1}; a, \sigma^2) \prod_{i=2}^n f_{X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1}))X_{t_{i-1}}}(x_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1}))x_{t_{i-1}}; a, \sigma^2) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(X_{t_1} - at_1)^2}{2\sigma^2}\right) \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2(1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1})))}} \pi \\
&\quad \exp\left(-\frac{(X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1}))X_{t_{i-1}} - a(t_i - t_{i-1}\exp(-(t_i - t_{i-1}))))^2}{2\sigma^2(1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1})))}\right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=2}^n (1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1})))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left((X_{t_1} - at_1)^2 + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \sum_{j=2}^n \frac{(X_{t_j} - \exp(-(t_j - t_{j-1}))X_{t_{j-1}} - a(t_j - t_{j-1}\exp(-(t_j - t_{j-1}))))^2}{1 - \exp(-2(t_j - t_{j-1}))}\right)\right)
\end{aligned}$$

Temos, então:

$$\begin{aligned}
\ln L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*) &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \\
&\quad + \ln\left(\prod_{i=2}^n (1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1})))^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2\sigma^2} \left((X_{t_1} - at_1)^2 + \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=2}^n \frac{(X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1}))X_{t_{i-1}} - a(t_i - t_{i-1}\exp(-(t_i - t_{i-1}))))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))}\right)
\end{aligned}$$

Com isto, podemos calcular os estimadores de máxima verossimilhança de  $a$  e  $\sigma^2$ . Derivando em relação a  $a$  e a  $\sigma^2$ , obtemos :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a} \ln L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*) &= -\frac{(-2)}{2\sigma^2} (t_1 X_{t_1} + \\
&\quad + \sum_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1}))) (X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1}))X_{t_{i-1}})}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} + \\
&\quad - a \left( t_1^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \right)
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(a, \sigma^2 | \mathbf{A}_*) = -\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{(-1)}{2\sigma^4} ((X_{t_1} - at_1)^2$$

$$+ \sum_{i=2}^n \frac{\left( X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}} - a(t_i - t_{i-1}) \exp(-(t_i - t_{i-1}))) \right)^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \Bigg).$$

Tem-se, então:

$$t_1 X_{t_1} + \sum_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1}) \exp(-(t_i - t_{i-1})) \left( X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}} \right)}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} =$$

$$\hat{a}_1 \left( t_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1}) \exp(-(t_i - t_{i-1}))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \right)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^2 = & \frac{1}{n} \left( (X_{t_1} - at_1)^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=2}^n \frac{\left( X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}} - \hat{a}_1(t_i - t_{i-1}) \exp(-(t_i - t_{i-1}))) \right)^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \right), \end{aligned}$$

o que nos leva a:

$$\hat{a}_1 = \frac{t_1 X_{t_1} + \sum_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1}) \exp(-(t_i - t_{i-1})) \left( X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}} \right)}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))}}{t_1^2 + \sum_{j=2}^n \frac{(t_j - t_{j-1}) \exp(-(t_j - t_{j-1}))^2}{1 - \exp(-2(t_j - t_{j-1}))}} \quad (3.2.1)$$

e

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n} \left( X_{t_1}^2 + \sum_{i=2}^n \frac{\left( X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}} \right)^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} - c_1 \hat{a}_1^2 \right), \quad (3.2.2)$$

onde:

$$c_1 = t_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1}) \exp(-(t_i - t_{i-1}))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \quad (3.2.3)$$

**Proposição 55** *A distribuição de  $\hat{a}_1$  é tal que:*

$$\hat{a}_1 \sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{c_1}\right).$$

Prova: Temos que:

$$\begin{aligned} E(\hat{a}_1) &= \frac{1}{c_1} \left( t_1 E(X_{t_1}) + \sum_{i=2}^n \frac{t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1}))}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \times \right. \\ &\quad \left. E(X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}}) \right) \\ &= \frac{a}{c_1} \left( t_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \right) = a \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Var(\hat{a}_1) &= \frac{1}{c_1^2} \left( t_1^2 Var(X_{t_1}) + \sum_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{(1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1})))^2} \times \right. \\ &\quad \left. Var(X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}}) \right) \\ &= \sigma^2 \left( t_1^2 + \frac{\sum_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))}}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \right)^2} \right) = \frac{\sigma^2}{c_1}. \end{aligned}$$

Além disso, sendo  $\hat{a}_1$  uma combinação linear de v.a.s normais,  $\hat{a}_1$  é normal.  $\square$

Outra propriedade importante de  $\hat{a}_1$  é descrita na seguinte proposição:

**Proposição 56**  *$\hat{a}_1$  é consistente se e somente se a seguinte condição for satisfeita:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_1 = \infty \quad (3.2.4)$$

Prova: Temos que  $E(\hat{a}_1) = a$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{a}_1) = 0$ , o que, por Tchebyshev, é suficiente para que a consistência de  $\hat{a}_1$  ocorra. Resta-nos provar a necessidade.

Para isto, note-se que, sendo  $\hat{a}_1$  normal, sua função característica é:

$$\phi_{\hat{a}_1}(s) = \exp\left(ias - \frac{\sigma^2 s^2}{2c_1}\right).$$

Temos que, caso  $\hat{a}_1$  não convirja em distribuição para  $a$ , não convergirá tampouco em probabilidade para  $a$ . Como, entretanto, nosso estimador converge em distribuição para  $a$  se e somente se:

$$\phi_{\hat{a}_1}(s) \rightarrow \exp(ias) \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.2.5)$$

e 3.2.5 ocorre se e somente se 3.2.4 é satisfeita, está provada a necessidade.  $\square$

Quanto a  $\sigma^2$ , temos:

**Proposição 57** *A Esperança e a Variância de  $\hat{\sigma}_1^2$  são dadas por:*

$$E(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \quad (3.2.6)$$

$$Var(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4. \quad (3.2.7)$$

Prova: Para o cálculo de  $E(\hat{\sigma}_1^2)$  e  $Var(\hat{\sigma}_1^2)$ , necessitaremos de alguns momentos de nossas variáveis e de  $\hat{a}_1$ , onde  $X_i = X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1}))X_{t_{i-1}}$   $i = 2, \dots, n$ . Temos:

$$\begin{aligned} E(X_i^2) &= Var(X_i) + (E(X_i))^2 = \sigma^2(1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))) + \\ &\quad + a^2(t_i - t_{i-1}\exp(-(t_i - t_{i-1})))^2 \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

$$E(X_{t_1}^2) = Var(X_{t_1}) + (E(X_1))^2 = \sigma^2 + a^2 t_1^2$$

$$E(\hat{a}_1^2) = Var(\hat{a}_1) + (E(\hat{a}_1))^2 = \frac{\sigma^2}{c_1} + a^2,$$

$$Cov(X_i, \hat{a}_1) = Cov\left(X_i, \frac{1}{c_1} \left(t_1 X_{t_1} + \sum_{j=2}^n \frac{t_j - t_{j-1} \exp(-(t_j - t_{j-1}))}{1 - \exp(-2(t_j - t_{j-1}))} X_j\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c_1} \frac{t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1}))}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \text{Var}(X_i) \\
&= \frac{\sigma^2}{c_1} (t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1}))) \quad i = 2, \dots, n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X_{t_1}, \hat{a}_1) &= \text{Cov}\left(X_{t_1}, \frac{1}{c_1} \left(t_1 X_{t_1} + \sum_{j=2}^n \frac{t_j - t_{j-1} \exp(-(t_j - t_{j-1}))}{1 - \exp(-2(t_j - t_{j-1}))} X_j\right)\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{c_1} t_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\hat{a}_1 X_i) &= \text{Cov}(\hat{a}_1, X_i) + E(\hat{a}_1) E(X_i) \\
&= \frac{\sigma^2}{c_1} (t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1}))) + a^2 (t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1}))) \\
&\quad i = 2, \dots, n,
\end{aligned}$$

$$E(\hat{a}_1 X_{t_1}) = \text{Cov}(\hat{a}_1, X_{t_1}) + E(\hat{a}_1) E(X_{t_1}) = \frac{\sigma^2}{c_1} t_1 + a^2 t_1,$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X_i^2) &= 2(\text{Var}(X_i))^2 + 4\text{Var}(X_i)(E(X_i))^2 \\
&= 2\sigma^4 (1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1})))^2 + \\
&\quad + 4a^2 \sigma^2 (t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2 (1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))) \\
&\quad i = 2, \dots, n,
\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X_{t_1}^2) = 2(\text{Var}(X_{t_1}))^2 + 4\text{Var}(X_{t_1})(E(X_{t_1}))^2 = 2\sigma^4 + 4a^2 \sigma^2 t_1^2,$$

$$\text{Var}(\hat{a}_1^2) = 2(\text{Var}(\hat{a}_1))^2 + 4\text{Var}(\hat{a}_1)(E(\hat{a}_1))^2 = \frac{2\sigma^4}{c_1^2} + \frac{4a^2 \sigma^2}{c_1},$$

$$\begin{aligned}
Cov(X_i^2, \hat{a}_1^2) &= Cov\left(X_i^2, \frac{1}{c_1^2} \left( t_1^2 X_{t_1}^2 + \sum_{j=2}^n \frac{(t_j - t_{j-1} \exp(-(t_j - t_{j-1})))^2}{(1 - \exp(-2(t_j - t_{j-1})))^2} X_j^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + t_1 X_{t_1} \sum_{j \neq 1}^n \frac{t_j - t_{j-1} \exp(-(t_j - t_{j-1}))}{1 - \exp(-2(t_j - t_{j-1}))} X_j + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{1 \neq j \neq k \neq 1}^n \frac{(t_j - t_{j-1} \exp(-(t_j - t_{j-1}))) (t_k - t_{k-1} \exp(-(t_k - t_{k-1})))}{(1 - \exp(-2(t_j - t_{j-1}))) (1 - \exp(-2(t_k - t_{k-1})))} X_j X_k \right) \right) \\
&= \frac{1}{c_1^2} \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{(1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1})))^2} \left( 2\sigma^4 (1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1})))^2 \right. \\
&\quad \left. + 4a^2 \sigma^2 (t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2 (1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4a^2 \sigma^2}{c_1^2} (t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2 \left( t_1^2 + \sum_{1 \neq j \neq i}^n \frac{(t_j - t_{j-1} \exp(-(t_j - t_{j-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_j - t_{j-1}))} \right) \right) \\
&= \frac{2\sigma^4}{c_1^2} (t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2 + \frac{4a^2 \sigma^2}{c_1^2} \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^4}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} + \\
&\quad + \frac{4a^2 \sigma^2}{c_1} (t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2 - \frac{4a^2 \sigma^2}{c_1^2} \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^4}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \\
&= \left( \frac{2\sigma^4}{c_1^2} + \frac{4a^2 \sigma^2}{c_1} \right) (t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2 \quad i = 2, \dots, n
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Cov(X_{t_1}^2, \hat{a}_1^2) &= Cov\left(X_{t_1}^2, \frac{1}{c_1^2} \left( t_1^2 X_{t_1}^2 + \sum_{j=2}^n \frac{(t_j - t_{j-1} \exp(-(t_j - t_{j-1})))^2}{(1 - \exp(-2(t_j - t_{j-1})))^2} X_j^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + t_1 X_{t_1} \sum_{j=2}^n \frac{t_j - t_{j-1} \exp(-(t_j - t_{j-1}))}{1 - \exp(-2(t_j - t_{j-1}))} X_j + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{1 \neq j \neq k \neq 1}^n \frac{(t_j - t_{j-1} \exp(-(t_j - t_{j-1}))) (t_k - t_{k-1} \exp(-(t_k - t_{k-1})))}{(1 - \exp(-2(t_j - t_{j-1}))) (1 - \exp(-2(t_k - t_{k-1})))} X_j X_k \right) \right) \\
&= \frac{t_1^2}{c_1^2} (2\sigma^4 + 4a^2 \sigma^2 t_1^2) + \frac{4a^2 \sigma^2 t_1^2}{c_1^2} \sum_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \\
&= \left( \frac{2\sigma^4}{c_1^2} + \frac{4a^2 \sigma^2}{c_1} \right) t_1^2.
\end{aligned}$$

Podemos, então calcular:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\sigma}_1^2) &= E\left(\frac{1}{n}\left(X_{t_1}^2 + \sum_{i=2}^n \frac{X_i^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} - c_1 \hat{a}_1^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}(n\sigma^2 + c_1 a^2 - \sigma^2 - c_1 a^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\sigma}_1^2) &= Var\left(\frac{1}{n}\left(X_{t_1}^2 + \sum_{i=2}^n \frac{X_i^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} - c_1 \hat{a}_1^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(2\sigma^4 + 4a^2\sigma^2 t_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{(1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1})))^2} \times \right. \\
&\quad \left(2\sigma^4(1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1})))^2 + 4a^2\sigma^2(t_i - t_{i-1})\exp(-(t_i - t_{i-1})))^2 \times \right. \\
&\quad \left.(1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1})))\right) + \\
&\quad \left.+ c_1^2\left(\frac{2\sigma^4}{c_1^2} + \frac{4a^2\sigma^2}{c_1}\right) - 2c_1\left(\frac{2\sigma^4}{c_1^2} + \frac{4a^2\sigma^2}{c_1}\right)(t_1^2 + \right. \\
&\quad \left.+ \sum_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1})\exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{(1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1})))}\right)\Bigg) \\
&= \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4. \square
\end{aligned}$$

Outra propriedade de  $\hat{\sigma}_1^2$  é dada pela proposição:

**Proposição 58**  $\hat{\sigma}_1^2$  é consistente.

Prova: Sabemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\sigma}_1^2) = \sigma^2 \quad (3.2.8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\sigma}_1^2) = 0, \quad (3.2.9)$$

o que, por Tchebyshev, nos leva diretamente à proposição.  $\square$

Quanto à distribuição de  $\hat{\sigma}_1^2$ , temos:

**Proposição 59**  $\hat{\sigma}_1^2$  é tal que sua distribuição é dada por:

$$\frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}_1^2 \sim \chi_{(n-1)}^2$$

Prova: Para provarmos esta proposição, utilizar-nos-emos de Searle (1971) pág. 57 e das seguintes definições:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \left( X_{t_1}, \dots, \frac{X_{t_n} - \exp(-(t_n - t_{n-1})) X_{t_{n-1}}}{\sqrt{1 - \exp(-2(t_n - t_{n-1}))}} \right)' \\ q_1 &= t_1 \\ q_i &= \frac{t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1}))}{\sqrt{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))}} \quad i = 2, \dots, n \\ \mathbf{Q} &= \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n). \end{aligned}$$

Note-se que  $\sum_{i=1}^n q_i^2 = c_1$ . Podemos representar  $\hat{\sigma}_1^2$  como:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n} \mathbf{Z}' \mathbf{D} \mathbf{Z},$$

onde

$$\mathbf{D} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{c} \mathbf{Q} \mathbf{I} \mathbf{I}' \mathbf{Q}$$

Isto nos leva a:

$$\frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}_1^2 = \frac{\mathbf{Z}'}{\sigma} \mathbf{D} \frac{\mathbf{Z}}{\sigma}.$$

$\mathbf{D}_{n \times n} = [d_{ij}]$  é simétrica, de forma que:

$$d_{ij} = \begin{cases} \frac{c_1 - q_i^2}{c_1} & i = j \\ -\frac{q_i q_j}{c_1} & i \neq j \end{cases} \quad (3.2.10)$$

$\mathbf{F}_{n \times n} = [f_{ij}] = \mathbf{D}^2$  é composta por:

$$\begin{aligned} c_1^2 f_{ii} &= \sum_{k=1}^n d_{ik}^2 = d_{ii}^2 + \sum_{k \neq i}^n d_{ik}^2 = (c_1 - q_i^2) + \sum_{k \neq i}^n q_k^2 q_i^2 \\ &= c_1^2 - 2q_i^2 c_1 + q_i^4 + q_i^2 \sum_{k \neq i}^n q_k^2 = c_1^2 - q_i^2 c_1 = c_1^2 d_{ii} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_1^2 f_{ij} &= \sum_{k=1}^n d_{ik} d_{kj} = d_{ii} d_{ij} + d_{ij} d_{jj} + \sum_{k \neq i,j}^n d_{ik} d_{kj} \\ &= - (c_1 - q_i^2) q_i q_j - (c_1 - q_j^2) q_i q_j + \sum_{k \neq i,j}^n q_i q_k q_k q_j \\ &= -q_i q_j c_1 = c_1^2 d_{ij} \quad i \neq j, \end{aligned}$$

ou seja,  $\mathbf{D}$  é idempotente. Além disso, notemos que:

$$\begin{aligned} c_1 \mu_Z' \mathbf{D} \mu_Z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j d_{ij} = \sum_{i=1}^n q_i^2 (c_1 - q_i^2) - \sum_{i \neq j}^n q_i^2 q_j^2 \\ &= c_1^2 - \sum_{i=1}^n q_i^4 - \sum_{i \neq j}^n q_i^2 q_j^2 = 0. \end{aligned}$$

Temos, então:

$$\frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}_1^2 \sim \chi^2(r(\mathbf{D}), 0). \quad (3.2.11)$$

Temos que  $E(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$ . Assim,  $r(\mathbf{D}) = n - 1$ , estando provada a proposição.  $\square$

Uma outra proposição muito importante para a construção de intervalos de confiança é a seguinte:

**Proposição 60**  $\hat{\alpha}_1$  e  $\hat{\sigma}_1^2$  são independentes.

Prova:  $\hat{a}_1$  e  $\hat{\sigma}_1^2$  podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1^2 &= \mathbf{Z}'\mathbf{D}\mathbf{Z} \\ \hat{a}_1 &= \mathbf{B}'\mathbf{Z},\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathbf{Z}} &= \sigma^2 \mathbf{I}_n \\ b_i &= \frac{q_i}{c_1} \\ d_{ij} &= \begin{cases} \frac{c_1 - q_i^2}{c_1} & i = j \\ -\frac{q_i q_j}{c_1} & i \neq j \end{cases}\end{aligned}$$

Com isto, analogamente ao Capítulo 1, temos que provar que  $\mathbf{B}'\mathbf{D} =$

$\mathbf{0}_n$ :

$$\begin{aligned}[\mathbf{B}'\mathbf{D}]_i &= \sum_{j=1}^n b_j d_{ij} \\ &= \frac{1}{c_1} \left( q_i \frac{c_1 - q_i^2}{c_1} - \sum_{j \neq i}^n q_j \frac{q_i q_j}{c_1} \right) \\ &= \frac{1}{c_1^2} \left( c q_i - q_i \sum_{j=1}^n q_j^2 \right) = 0,\end{aligned}$$

estando, portanto, provada a proposição.  $\square$

Sendo as distribuições dos estimadores conhecidas e estando provada a independência de  $\hat{a}_1$  e  $\hat{\sigma}_1^2$ , podemos construir nossos intervalos de confiança, de forma análoga à utilizada na Seção 1.2. Temos, caso ambos os parâmetros sejam desconhecidos, dois intervalos de confiança de  $100(1 - \alpha)\%$  de confiança para  $a$  e  $\sigma^2$  são dados respectivamente por:

$$\left( \hat{a}_1 - \frac{\hat{\sigma}_1}{\sqrt{c_1}} s_{\frac{n}{2}}, \hat{a}_1 + \frac{\hat{\sigma}_1}{\sqrt{c_1}} s_{\frac{n}{2}} \right)$$

e

$$\left( 0, \frac{n\hat{\sigma}_1^2}{q_\alpha} \right).$$

Caso  $\sigma^2$  seja conhecido, temos o intervalo de confiança para  $a$ :

$$\left( \hat{a}_1 - \frac{\sigma}{\sqrt{c_1}} s_{\frac{\alpha}{2}}, \hat{a}_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{c_1}} s_{\frac{\alpha}{2}} \right).$$

### 3.2.2 Estimação pelo Método de Momentos

Novamente, para encontrar os estimadores por momentos de  $a$  e  $\sigma^2$ , devemos encontrar funções de nossas amostras de forma a igualar os momentos amostrais aos momentos teóricos. Notemos que:

$$E \left( \frac{X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1}))} \right) = a \quad i = 2, \dots, n$$

e

$$E \left( \frac{X_{t_1}}{t_1} \right) = a.$$

Ainda:

$$Var \left( \frac{X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}}}{\sqrt{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))}} \right) = \sigma^2 \quad i = 2, \dots, n$$

e

$$Var(X_{t_1}) = \sigma^2,$$

o que nos leva a

$$E \left( \frac{(X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}})^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \right) = \sigma^2 + a^2 \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))},$$

se  $i = 2, \dots, n$  e

$$E(X_{t_1}^2) = \sigma^2 + at_1^2$$

Com isto:

$$\tilde{a}_1 = \frac{1}{n} \left( X_{t_1} + \sum_{i=2}^n \frac{X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1}))} \right) \quad (3.2.12)$$

e

$$X_{t_1}^2 + \sum_{i=2}^n \frac{(X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}})^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} =$$

$$n\hat{\sigma}_1^2 + \tilde{a}_1^2 \left( t_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \right),$$

chegando-se a:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n} \left( X_{t_1}^2 + \sum_{i=2}^n \frac{(X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}})^2 - \tilde{a}_1^2 (t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \right).$$

Finalmente, temos:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{(X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}})^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} - c_1 \tilde{a}_1^2 \right). \quad (3.2.13)$$

Seja:

$$d = \frac{1}{t_1^2} + \sum_{i=2}^n \frac{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))}{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}. \quad (3.2.14)$$

Temos, quanto à distribuição de  $\tilde{a}_1$ :

**Proposição 61**

$$\tilde{a}_1 \sim N \left( a, \frac{\sigma^2}{n^2} d \right)$$

Prova: Pelas propriedades dos estimadores de momentos,  $E(\tilde{a}_1) = a$ . Quanto à variância de nosso estimador,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{a}_1) &= \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{t_1^2} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2} \times \right. \\ &\quad \left. \text{Var}(X_{t_i} - \exp(-(t_i - t_{i-1})) X_{t_{i-1}}) \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} \left( \frac{1}{t_1^2} + \sum_{i=2}^n \frac{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))}{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2} \right) = \frac{d\sigma^2}{n^2} \end{aligned}$$

Note-se que  $\tilde{a}_1$  é uma combinação linear de v.a.s normais e, assim,  $\tilde{a}_1$  é normal com parâmetros  $E(\tilde{a}_1)$  e  $\text{Var}(\tilde{a}_1)$ .  $\square$

Sobre a consistência de  $\tilde{a}_1$ , temos a seguinte proposição:

**Proposição 62**  $\tilde{a}_1$  é consistente se e somente se a seguinte condição for satisfeita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{n^2} = 0. \quad (3.2.15)$$

Prova: Temos que  $E(\tilde{a}_1) = a$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\tilde{a}_1) = 0$ . Por Tchebyshev, isto é suficiente para que nosso estimador seja consistente. Para provar a necessidade, note-se que  $\tilde{a}_1$  converge em distribuição para  $a$  se e somente se 3.2.15 ocorrer.  $\square$

Temos as seguintes proposições sobre as propriedades de  $\tilde{\sigma}_1^2$ :

**Proposição 63** A Esperança e a Variância de  $\tilde{\sigma}_1^2$  são dadas por :

$$E(\tilde{\sigma}_1^2) = \sigma^2 \left( 1 - \frac{c_1 d}{n^3} \right) \quad (3.2.16)$$

$$\text{Var}(\tilde{\sigma}_1^2) = \frac{2\sigma^4}{n} \left( 1 + \frac{c_1^2 d^2}{n^5} - \frac{2c_1 d}{n^2} \right) + \frac{4a^2 \sigma^2 c_1}{n^2} \left( \frac{c_1 d}{n^2} - 1 \right). \quad (3.2.17)$$

Prova: Calculemos os seguintes momentos das variáveis envolvidas:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{X_i^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))}\right) &= \\ &= \sigma^2 + a^2 \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

$$E\left(\tilde{a}_1^2\right)=a^2+\frac{\sigma^2 d}{n^2},$$

$$\begin{aligned} Var\left(\frac{X_i^2}{1-\exp(-2(t_i-t_{i-1}))}\right) &= \\ &= 2\sigma^4+4a^2\sigma^2\frac{(t_i-t_{i-1}\exp(-(t_i-t_{i-1})))^2}{1-\exp(-2(t_i-t_{i-1}))} \quad i=2,\dots,n, \end{aligned}$$

$$Var\left(X_{t_1}^2\right)=2\sigma^4+4a^2\sigma^2t_1^2,$$

$$Var\left(\tilde{a}_1^2\right)=2\frac{\sigma^4d^2}{n^4}+\frac{4a^2\sigma^2d}{n^2},$$

$$\begin{aligned} Cov\left(X_i^2,\tilde{a}_1^2\right) &= \frac{1}{n^2}Cov\left(X_i^2,\sum_{j=2}^n\frac{X_j^2}{(t_i-t_{i-1}\exp(-(t_j-t_{j-1})))^2}+\right. \\ &\quad \left.+\frac{2X_i}{(t_i-t_{i-1}\exp(-(t_i-t_{i-1})))}\left(\frac{X_{t_1}}{t_1}+\sum_{1\neq j\neq i}^n\frac{X_j}{(t_j-t_{j-1}\exp(-(t_j-t_{j-1})))}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{(t_i-t_{i-1}\exp(-(t_i-t_{i-1})))^2}\left(2\sigma^4(1-\exp(-2(t_i-t_{i-1})))^2\right.\right. \\ &\quad \left.+4a^2\sigma^2(t_i-t_{i-1}\exp(-(t_i-t_{i-1})))^2(1-\exp(-2(t_i-t_{i-1})))\right) \\ &\quad \left.+\frac{2}{t_i-t_{i-1}\exp(-(t_i-t_{i-1}))}2a\sigma^2(1-\exp(-2(t_i-t_{i-1})))\times\right. \\ &\quad \left.(t_i-t_{i-1}\exp(-(t_i-t_{i-1})))\sum_{j\neq i}^na\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(2\sigma^4\frac{(1-\exp(-2(t_i-t_{i-1})))^2}{(t_i-t_{i-1}\exp(-(t_i-t_{i-1})))^2}+4a^2\sigma^2n(1-\exp(-2(t_i-t_{i-1})))\right) \end{aligned}$$

e

$$Cov\left(X_{t_1}^2,\tilde{a}_1^2\right)=Cov\left(X_{t_1}^2,\frac{1}{n^2}\left(\frac{X_{t_1}^2}{t_1^2}+2\frac{X_{t_1}}{t_1}\sum_{j=2}^n\frac{X_{t_i}-\exp(-(t_i-t_{i-1}))}{t_i-t_{i-1}\exp(-(t_i-t_{i-1}))}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2 t_1^2} (2\sigma^4 + 4a^2 \sigma^2 t_1^2) + \frac{2}{n^2 t_1} \sum_{i=2}^n 2a^2 \sigma^2 t_i = \frac{2\sigma^4}{n^2 t_1^2} + \frac{4a^2 \sigma^2}{n}.$$

Com estes momentos calculados, teríamos:

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_1^2) &= \frac{1}{n} \left( E(X_{t_1}^2) + \sum_{i=2}^n E\left(\frac{X_i^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))}\right) - c_1 E(\tilde{a}_1^2) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sigma^2 + a^2 t_1^2 + \sum_{i=2}^n \left( \sigma^2 + a^2 \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \right) - c_1 \left( a^2 + \frac{d\sigma^2}{n^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( n\sigma^2 + a^2 c_1 - c_1 a^2 - \frac{c_1 d\sigma^2}{n^2} \right) = \sigma^2 \left( 1 - \frac{c_1 d}{n^3} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Var(\hat{\sigma}_1^2) &= \frac{1}{n^2} \left( Var(X_{t_1}^2) + \sum_{i=2}^n Var\left(\frac{X_i^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))}\right) + \right. \\ &\quad \left. + c_1^2 Var(\tilde{a}_1^2) - 2c_1 \left( Cov(X_{t_1}^2, \tilde{a}_1^2) + \sum_{i=2}^n \frac{1}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} Cov(X_i^2, \tilde{a}_1^2) \right) \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left( 2\sigma^4 + 4a^2 \sigma^2 t_1^2 + \sum_{i=2}^n \left( 2\sigma^4 + 4a^2 \sigma^2 \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \right) + \right. \\ &\quad \left. + c_1^2 \left( 2\frac{\sigma^4 d^2}{n^4} + \frac{4a^2 \sigma^2 d}{n^2} \right) - 2c_1 \left( \frac{2\sigma^4}{n^2 t_1^2} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \frac{1}{n^2} \left( 2\sigma^4 \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \frac{(1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1})))^2}{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2} + 4a^2 \sigma^2 n (1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))) \right) \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left( 2\sigma^4 + 4a^2 \sigma^2 t_1^2 + \sum_{i=2}^n \left( 2\sigma^4 + 4a^2 \sigma^2 \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \right) + c_1^2 \left( 2\frac{\sigma^4 d^2}{n^4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{4a^2 \sigma^2 d}{n^2} \right) - \frac{2c_1}{n^2} \left( \frac{2\sigma^4}{t_1^2} + \sum_{i=2}^n \left( 2\sigma^4 \frac{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))}{(t_i - t_{i-1})^2} + 4a^2 \sigma^2 n \right) \right) \right) \\ &= \frac{2\sigma^4}{n} \left( 1 + \frac{c_1^2 d^2}{n^5} - \frac{2c_1 d}{n^2} \right) + \frac{4a^2 \sigma^2 c_1}{n^2} \left( \frac{c_1 d}{n^2} - 1 \right). \square \end{aligned}$$

**Proposição 64** Temos, para que  $\tilde{\sigma}_1^2$  seja consistente, como condições suficientes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 d}{n^3} = 0 \quad (3.2.18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1}{n} = 0. \quad (3.2.19)$$

Prova: Temos como condições suficientes para que  $\tilde{\sigma}_1^2$  seja consistente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left( \tilde{\sigma}_1^2 \right) = \sigma^2 \quad (3.2.20)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var \left( \tilde{\sigma}_1^2 \right) = 0.. \quad (3.2.21)$$

Note-se que 3.2.20 segue diretamente de 3.2.18 enquanto 3.2.21 segue de 3.2.18 e 3.2.19 conjuntamente.  $\square$

**Proposição 65**  $\tilde{\sigma}_1^2 \sim \chi_{(n-1)}^2$  se e somente se a seguinte condição for satisfeita:

$$c_1 d = n^2 \quad (3.2.22)$$

Prova: Tomemos:

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{1}{q_i} \\ \mathbf{R} &= diag(r_1, r_2, \dots, r_n) \end{aligned}$$

e  $\mathbf{Z}$  definida na sub-seção anterior. Note-se que  $\sum_{i=1}^n r_i^2 = d$ . Podemos representar  $\tilde{\sigma}_1^2$  por :

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \mathbf{Z}' \mathbf{E} \mathbf{Z},$$

onde  $\mathbf{E} = \mathbf{I}_n - \frac{c_1}{n^2} \mathbf{R} \mathbf{1} \mathbf{1}' \mathbf{R} = [e_{ij}]$  de forma que:

$$e_{ij} = \begin{cases} \frac{n^2 - c_1 r_i^2}{n^2} & i = j \\ -\frac{c_1 r_i r_j}{n^2} & i \neq j \end{cases}$$

Com isto:

$$\frac{n}{\sigma^2} \tilde{\sigma}_1^2 = \frac{\mathbf{Z}'}{\sigma} n \mathbf{E} \frac{\mathbf{Z}}{\sigma}$$

Seja  $\mathbf{F} = \mathbf{E}^2 = [f_{ij}]$ :

$$n^4 f_{ii} = \sum_{k=1}^n e_{ik}^2 = (n^2 - c_1 r_i^2)^2 + \sum_{j \neq i}^n c_1^2 r_i^2 r_j^2 = n^4 - 2n^2 c_1 r_i^2 + c_1^2 r_i^2 d$$

e

$$n^4 f_{ij} = \sum_{k=1}^n e_{ik} e_{jk} = - (n^2 - c_1 r_i^2) c_1 r_i r_j - (n^2 - c_1 r_j^2) c_1 r_i r_j + \sum_{k \neq i, j}^n c_1^2 r_i r_j r_k^2,$$

ou seja, tomando-se 3.2.22, teríamos  $n^4 f_{ij} = e_{ij}$ . Assim,  $n^2 \mathbf{E}$  é simétrica, ou seja, por Searle (1971) pág. 57,  $\frac{n}{\sigma^2} \tilde{\sigma}_1^2$  tem distribuição qui-quadrado. Falta-nos achar os graus de liberdade e o parâmetro de não-centralidade. Temos:

$$\begin{aligned} n^2 \mu_Z' \mathbf{E} \mu_Z &= n^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j e_{ij} \\ &= \frac{a^2}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i^2} (n^2 - c_1 r_i^2) - \sum_{i \neq j}^n \frac{1}{r_i r_j} c_1 r_{ij} \right) = 0 \end{aligned}$$

Assim, sabemos ser  $\frac{n}{\sigma^2} \tilde{\sigma}_1^2$  central. Basta-nos provar ter ela  $(n-1)$  graus de liberdade. Tomemos como verdadeira 3.2.22. Temos, por 3.2.16 que  $E(\tilde{\sigma}_1^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$  e, por Searle (1971) pág. 57, que  $\tilde{\sigma}_1^2 \sim \chi^2(r(\mathbf{A}))$ , ou seja,  $\tilde{\sigma}_1^2$  tem distribuição qui-quadrado central com  $(n-1)$  graus de liberdade se e somente se 3.2.22 for satisfeita.  $\square$

Outra proposição interessante sobre nossos estimadores de momentos é a seguinte:

**Proposição 66**  $\tilde{a}_1$  e  $\tilde{\sigma}_1^2$  são independentes se e somente se  $c_1 d = n^2$ .

Prova: Temos  $\tilde{a}_1$  e  $\tilde{\sigma}_1^2$  sob a forma matricial:

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \mathbf{M}' \mathbf{Z} \\ \tilde{\sigma}_1^2 &= \mathbf{Z}' \mathbf{E} \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\Sigma_Z &= \sigma^2 I_n \\ m_i &= \frac{r_i}{n} \\ e_{ij} &= \begin{cases} \frac{n^2 - c_1 r_i^2}{n^2} & i = j \\ -\frac{c_1 r_i r_j}{n^2} & i \neq j \end{cases}\end{aligned}$$

Temos, então, que provar que  $\mathbf{M}'\mathbf{E} = \mathbf{0}_n$ :

$$\begin{aligned}[\mathbf{M}'\mathbf{E}]_i &= \sum_{j=1}^n m_j e_{ji} \\ &= \frac{1}{n} \left( r_i \frac{n^2 - c_1 r_i^2}{n^2} - \sum_{j \neq i}^n r_j \frac{c_1 r_i r_j}{n^2} \right) \\ &= \frac{r_i}{n^3} (n^2 - c_1 d)\end{aligned}$$

Como  $r_i > 0$ , para que esta expressão seja nula para todo  $i$ , faz-se necessário e suficiente que  $c_1 d = n^2$ .  $\square$

Com isto, podemos, agora, montar os intervalos de confiança para  $\alpha$  e  $\sigma^2$ . Caso ambos os parâmetros sejam desconhecidos, não conseguiremos montar intervalos de confiança para  $\alpha$  e  $\sigma^2$  a menos que  $c_1 d = n^2$ , pois, sob esta hipótese,  $n\hat{\sigma}_1^2/\sigma^2$  terá distribuição qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade, sendo além disto independente de  $\hat{\alpha}_1$ . Neste caso, os intervalos de confiança de  $\alpha$  e  $\sigma^2$  serão idênticos aos construídos baseados nos estimadores de máxima verossimilhança:

$$\left( \hat{\alpha}_1 - \frac{\hat{\sigma}_1}{\sqrt{c_1}} s_{\frac{\alpha}{2}}, \hat{\alpha}_1 + \frac{\hat{\sigma}_1}{\sqrt{c_1}} s_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

e

$$\left( 0, \frac{n\hat{\sigma}_1^2}{q_\alpha} \right).$$

Caso  $\sigma^2$  seja conhecido, temos, para  $a$ :

$$\left( \tilde{a}_1 - \frac{\sigma\sqrt{d}}{n} z_{\frac{\alpha}{2}}, \tilde{a}_1 + \frac{\sigma\sqrt{d}}{n} z_{\frac{\alpha}{2}} \right).$$

### 3.2.3 Conclusões do Caso Determinístico

Já descobrimos que, sob a hipótese 3.2.22, os dois estimadores de  $\sigma^2$  têm a mesma distribuição. Vejamos o que ocorre com os estimadores de  $a$ . Tomando-se  $c_1 d = n^2$ , temos  $E(\tilde{a}_1) = a$  e  $Var(\tilde{a}_1) = \frac{\sigma^2}{c_1}$ . Assim, por serem ambos normais, os dois métodos dar-nos-iam estimadores de mesma distribuição para ambos os parâmetros, respectivamente.

Um ponto interessante seria descobrir se há relação entre a condição  $c_1 d = n^2$  e o equi-espaçamento dos  $t_i$ 's. Recordemos que:

$$\begin{aligned} c_1 &= t_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))} \\ d &= \frac{1}{t_1^2} + \sum_{i=2}^n \frac{1 - \exp(-2(t_i - t_{i-1}))}{(t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1})))^2}. \end{aligned}$$

Tome-se a hipótese de equi-espaçamento, denominando-se  $\Delta = t_i - t_{i-1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$  e  $\delta = \exp(-\Delta)$ . Sob esta hipótese,

$$\begin{aligned} c_1 &= \Delta^2 + \sum_{i=2}^n \frac{(i\Delta - (i-1)\Delta\delta)^2}{1 - \delta^2} \\ &= \Delta^2 + \frac{\Delta^2}{1 - \delta^2} \sum_{i=2}^n (i - \delta(i-1)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{\Delta^2} + \sum_{j=2}^n \frac{1 - \delta^2}{(j\Delta - (j-1)\Delta\delta)^2} \\ &= \frac{1}{\Delta^2} + \frac{1 - \delta^2}{\Delta^2} \sum_{j=2}^n \frac{1}{(j - \delta(j-1))^2}, \end{aligned}$$

resultando em que, tomando-se  $c_1 d = n^2$ , teríamos:

$$\begin{aligned}
n^2 &= 1 + \Delta^2 \frac{1 - \delta^2}{\Delta^2} \sum_{j=2}^n \frac{1}{(j - \delta(j-1))^2} + \frac{1}{\Delta^2} \frac{\Delta^2}{1 - \delta^2} \sum_{i=2}^n (i - \delta(i-1))^2 + \\
&\quad + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \frac{(i - \delta(i-1))^2}{(j - \delta(j-1))^2} \\
&= 1 + (1 - \delta^2) \sum_{j=2}^n (j(1 - \delta) + \delta)^{-2} + (1 - \delta^2)^{-1} \sum_{i=2}^n (i(1 - \delta) + \delta)^2 + \sum_{i=2}^n 1 + \\
&\quad + \sum_{1 \neq i \neq j \neq 1}^n \frac{(i(1 - \delta) + \delta)^2}{(j(1 - \delta) + \delta)^2} \\
&= n + (1 - \delta^2) \sum_{j=2}^n (j(1 - \delta) + \delta)^{-2} + \frac{1}{1 - \delta^2} \left( (1 - \delta^2) \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta^2 + 2\delta(1 - \delta) \left( \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \right) + \sum_{1 \neq i, j \neq 1}^n \frac{(i(1 - \delta) + \delta)^2}{(j(1 - \delta) + \delta)^2} \\
&= n + \frac{2\delta^2 - 1}{1 - \delta^2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \delta(1 - \delta)n(n+1) - 2\delta(1 - \delta) + \\
&\quad (1 - \delta^2) \sum_{j=2}^n (j(1 - \delta) + \delta)^{-2} + \sum_{1 \neq i, j \neq 1}^n \frac{(i(1 - \delta) + \delta)^2}{(j(1 - \delta) + \delta)^2}.
\end{aligned}$$

Assim, para que as duas hipóteses não sejam conflitantes, temos que atender à condição:

$$\begin{aligned}
&\frac{2n^3(\delta(1 - \delta) - 1) + 3n^2 - n(7 + 2\delta(1 - \delta)) + 6 - 2\delta^2}{6} = \\
&= 2 \sum_{1 < i < j}^n \frac{(i(1 - \delta) + \delta)^2}{(j(1 - \delta) + \delta)^2}.
\end{aligned}$$

Isto, entretanto, para  $n$  grande, é um absurdo visto que o primeiro termo da igualdade é negativo e o segundo positivo. Logo, as duas hipóteses são incompatíveis.

### 3.3 Tempos Aleatórios Observáveis

Nesta seção, os resultados não serão tão completos como na anterior, devido, principalmente, à estrutura de covariância de nosso processo, que levar-nos-á a cálculos de momentos dos tempos aleatórios cujas soluções não serão encontradas.

#### 3.3.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

Tomemos, aqui, notação análoga à da seção anterior, ou seja  $\mathbf{A}$  representa o vetor de observação do processo e  $\mathbf{A}_*$  representa:

$$\left( X_{\tau_1}, X_{\tau_2} - \exp(-(\tau_2 - \tau_1)) X_{\tau_1}, \dots, X_{\tau_n} - \exp(-(\tau_n - \tau_{n-1})) X_{\tau_{n-1}} \right)'.$$

Se tomarmos  $\mathbf{A}_*$  ao invés de  $\mathbf{A}$ , não perderemos nenhuma informação amostral para o cálculo de nossos estimadores de máxima verossimilhança e conseguiremos uma função da amostra composta unicamente por variáveis aleatórias independentes. Definamos ainda  $\mathbf{B}_* = (\mathbf{A}_*; \mathcal{W}_n)'$ .

Encontremos, a seguir, o nosso estimador de máxima verossimilhança de  $a$  e  $\sigma^2$ . Seja  $L(a, \sigma^2 | \mathbf{B}_*)$  nossa função de verossimilhança. Note-se que:

$$\begin{aligned} L(a, \sigma^2 | \mathbf{B}_*) &= f_{\mathbf{B}_*}(y; a, \sigma^2) \\ &= f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2 | \mathcal{W}_n = w) f_{\mathcal{W}_n}(w) \end{aligned}$$

visto que a distribuição dos elementos de nossa janela aleatória independe dos parâmetros a serem estimados. Assim, maximizar nossa função de verossimilhança em relação a  $a$  e  $\sigma^2$  equivale a fazê-lo para  $f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2 | \mathcal{W}_n)$ . Com isto, os estimadores de  $a$  e  $\sigma^2$  serão funcionalmente idênticos, respectivamente, aos estimadores de  $a$  e  $\sigma^2$  encontrados na seção anterior:

$$\hat{a}_2 = \frac{\tau_1 X_{\tau_1} + \sum_{i=2}^n \frac{(\tau_i - \tau_{i-1} \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1}))) (X_{\tau_i} - \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})) X_{\tau_{i-1}})}{1 - \exp(-2(\tau_i - \tau_{i-1}))}}{\tau_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{(\tau_i - \tau_{i-1} \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(\tau_i - \tau_{i-1}))}} \quad (3.3.23)$$

e

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n} \left( X_{\tau_1}^2 + \sum_{i=2}^n \frac{(X_{\tau_i} - \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})) X_{\tau_{i-1}})^2}{1 - \exp(-2(\tau_i - \tau_{i-1}))} - c_2 \hat{a}_1^2 \right), \quad (3.3.24)$$

onde

$$c_2 = \tau_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{(\tau_i - \tau_{i-1} \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(\tau_i - \tau_{i-1}))}. \quad (3.3.25)$$

**Proposição 67**  $\hat{a}_2$  é não-viciado.

Prova: Temos que:

$$\begin{aligned} E(\hat{a}_2) &= E(E(\hat{a}_2 \mid \mathcal{W}_n)) = E\left(\frac{1}{c_2} \left( \tau_1 E(X_{\tau_1} \mid \mathcal{W}_n) + \sum_{i=2}^n \frac{\tau_i - \tau_{i-1} \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1}))}{1 - \exp(-2(\tau_i - \tau_{i-1}))} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. E(X_{\tau_i} - \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})) X_{\tau_{i-1}} \mid \mathcal{W}_n) \right) \right) \\ &= E\left(\frac{a}{c_2} \left( \tau_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{(\tau_i - \tau_{i-1} \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})))^2}{1 - \exp(-2(\tau_i - \tau_{i-1}))} \right) \right) = E(a) = a \square \end{aligned}$$

Quanto à sua variância, não nos foi possível calculá-la, como vê-se em:

$$\begin{aligned} Var(\hat{a}_2) &= E(Var(\hat{a}_2 \mid \mathcal{W}_n)) + Var(E(\hat{a}_2 \mid \mathcal{W}_n)) \\ &= E\left(\frac{\sigma^2}{c_2}\right) + Var(a) = \sigma^2 E\left(\frac{1}{c_2}\right) \end{aligned}$$

Quanto a  $\hat{\sigma}_2^2$ , temos:

**Proposição 68**  $\hat{\sigma}_2^2$  têm as mesmas propriedades de  $\hat{\sigma}_1^2$ , ou seja:  $\frac{n\hat{\sigma}_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$  e  $\hat{\sigma}_2^2$  é consistente.

Prova: Sendo  $\hat{\sigma}_2^2$  funcionalmente idêntico a  $\hat{\sigma}_1^2$ , temos:

$$\frac{n\hat{\sigma}_2^2}{\sigma^2} \mid \mathcal{W}_n \sim \chi^2(n-1),$$

isto é, independentemente da janela de observação,  $\frac{n\hat{\sigma}_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ . Assim,  $\hat{\sigma}_1^2$  e  $\hat{\sigma}_2^2$  são identicamente distribuídos o que nos leva a consistência de  $\hat{\sigma}_2^2$  visto ser aquele consistente.  $\square$

## 3.4 Tempos Aleatórios Não-Observáveis Ordenáveis

### 3.4.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

Tomaremos a mesma notação da seção anterior para o vetor de observação,  $\mathbf{A}$ , e para o vetor transformado,  $\mathbf{A}_*$ . Neste caso, como em todos os anteriores onde os  $\tau$ 's eram não-amostráveis, não nos será possível o cálculo dos EMV's de uma forma explícita, como ver-se-á em seguida. Sabemos que:

$$\begin{aligned} L(a, \sigma^2 \mid \mathbf{A}_*) &= f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2) \\ &= \int_{\mathcal{W}_n} f_{\mathbf{A}_*, \mathcal{W}_n}(x, w; a, \sigma^2) dw \\ &= \int_{\mathcal{W}_n} f_{\mathbf{A}_*}(x; a, \sigma^2 \mid w) f_{\mathcal{W}_n}(w) dw \end{aligned}$$

Temos, então:

$$\begin{aligned} L(a, \sigma^2 \mid \mathcal{W}_n, \mathbf{A}_*) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=2}^n (1 - \exp(-2(\tau_i - \tau_{i-1})))^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}((X_{\tau_1} - a\tau_1))^2\right) \\ &\quad + \sum_{i=2}^n \frac{\left(X_{\tau_i} - \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1}))X_{\tau_{i-1}} - a(\tau_i - \tau_{i-1}\exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})))\right)^2}{1 - \exp(-2(\tau_i - \tau_{i-1}))} \times \\ &\quad \prod_{j=1}^n \lambda \exp(-\lambda(\tau_i - \tau_{i-1})) \end{aligned}$$

$$= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} \lambda^n \prod_{i=2}^n \left(1 - \exp(-2(\tau_i - \tau_{i-1}))\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\lambda\tau_n - \frac{1}{2\sigma^2} \left((X_{\tau_i} - a\tau_i)^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \sum_{i=2}^n \frac{\left(X_{\tau_i} - \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})) X_{\tau_{i-1}} - a(\tau_i - \tau_{i-1} \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})))\right)^2}{1 - \exp(-2(\tau_i - \tau_{i-1}))}\right)\right).$$

Sabendo-se que deveríamos integrar tal expressão para obter a função de verossimilhança de  $a$  e  $\sigma^2$  baseada em  $\mathbf{A}_n$ , não nos parece possível o cálculo explícito dos estimadores de máxima verossimilhança de  $a$  e  $\sigma^2$ .

### 3.4.2 Estimação pelo Método dos Momentos

Ao contrário do ocorrido na seção anterior, ser-nos-á possível encontrar os estimadores pelo método dos momentos tendo eles inclusive algumas propriedades interessantes. Temos, por exemplo:

$$\begin{aligned} E(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}) &= E(E(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} | \mathcal{W}_n)) = E(a(\tau_i - \tau_{i-1})) \\ &= \frac{a}{\lambda} \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

$$E(X_{\tau_1}) = E(E(X_{\tau_1} | \mathcal{W}_n)) = E(a\tau_1) = \frac{a}{\lambda},$$

$$Var(X_{\tau_i}) = E(\sigma^2) + Var(a\tau_i) = \sigma^2 + a^2 \frac{i}{\lambda^2},$$

$$\begin{aligned} Cov(X_{\tau_i}, X_{\tau_{i-1}}) &= E(Cov(X_{\tau_i}, X_{\tau_{i-1}} | \mathcal{W}_n)) + Cov(E(X_{\tau_i} | \mathcal{W}_n), E(X_{\tau_{i-1}} | \mathcal{W}_n)) \\ &= E(\sigma^2 \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1}))) + Cov(a\tau_i, a\tau_{i-1}) = \sigma^2 \frac{\lambda}{\lambda + 1} + a^2 \frac{i-1}{\lambda} \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Var(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}) &= Var(X_{\tau_i}) + Var(X_{\tau_{i-1}}) - 2Cov(X_{\tau_i}, X_{\tau_{i-1}}) \\
&= a^2 \frac{i}{\lambda^2} + \sigma^2 + a^2 \frac{i-1}{\lambda^2} + \sigma^2 + \\
&\quad - 2a^2 \frac{i-1}{\lambda^2} - 2 \frac{\lambda}{\lambda+1} \sigma^2 \\
&= \frac{a^2}{\lambda^2} + 2\sigma^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+1}\right) \quad i = 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Com isto, teríamos:

$$E(X_{\tau_i}^2) = \sigma^2 + \frac{a^2}{\lambda^2} + \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 = \sigma^2 + 2\frac{a^2}{\lambda^2}$$

e

$$\begin{aligned}
E\left((X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2\right) &= 2\sigma^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+1}\right) + \frac{a^2}{\lambda^2} + \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \\
&= 2\sigma^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+1}\right) + 2\frac{a^2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Em termos de momentos amostrais e teóricos, temos:

$$\sum_{i=1}^n (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}) = \frac{n}{\lambda} \tilde{a}_3$$

e

$$X_{\tau_1}^2 + \sum_{i=2}^n (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2 = \tilde{\sigma}_3^2 \frac{\lambda + 2n - 1}{\lambda + 1} + \tilde{a}_3^2 \frac{n + 1}{\lambda^2}.$$

Podemos, então, escrever:

$$\tilde{a}_3 = \frac{\lambda}{n} X_{\tau_n} \quad (3.4.26)$$

e

$$\tilde{\sigma}_3^2 = \frac{\lambda + 1}{\lambda + 2n - 1} \left( X_{\tau_1}^2 + \sum_{i=2}^n (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2 - \frac{n + 1}{n^2} X_{\tau_n}^2 \right) \quad (3.4.27)$$

Temos, com relação aos momentos de  $\tilde{a}_3$ :

**Proposição 69**  $\tilde{a}_3$  é não-viciado com variância dada por:

$$Var(\tilde{a}_3) = \frac{a^2}{n} + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{n^2}.$$

Prova: A esperança de  $\tilde{a}_3$  segue diretamente das propriedades dos estimadores de momentos. Quanto à variância, temos:

$$\begin{aligned} Var(\tilde{a}_3) &= \frac{\lambda^2}{n^2} (Var(a\tau_n) + E(\sigma^2)) = \frac{\lambda^2 a^2 n}{n^2 \lambda^2} + \frac{\lambda^2}{n^2} \sigma^2 \\ &= \frac{a^2}{n} + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{n^2} \square \end{aligned}$$

Temos, quanto ao seu comportamento assintótico,

**Proposição 70**  $\tilde{a}_3$  é consistente.

Prova: Sendo  $E(\tilde{a}_3) = a$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\tilde{a}_3) = 0$ , por Tchebyshev, nosso estimador é consistente.  $\square$

**Proposição 71**  $\tilde{a}_3$  tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$\begin{aligned} f_{\tilde{a}_3}(x) &= \frac{n(-\lambda)^{n-1}}{\sqrt{2\pi}\sigma\Gamma(n)} \exp\left(-\frac{n^2 x^2}{2\lambda^2 \sigma^2}\right) \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \left( \sqrt{\frac{\pi}{4b}} \exp\left(\frac{s^2}{4b}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{s}{2\sqrt{b}}} \exp(-u^2) du \right) \right) \end{aligned}$$

onde  $s = \lambda - \frac{nax}{\lambda\sigma^2}$  e  $b = \frac{n^2}{2\lambda^2\sigma^2}$ .

Prova: Temos que  $\tilde{a}_3$  dado  $\tau_n$  tem distribuição normal com os seguintes parâmetros:

$$E(\tilde{a}_3 \mid \tau_n = t) = \frac{\lambda at}{n}$$

$$Var(\tilde{a}_3 \mid \tau_n = t) = \frac{\lambda^2 \sigma^2}{n^2}$$

Tem-se, então:

$$\begin{aligned} f_{\tilde{a}_3}(x) &= \int_0^\infty f_{\tilde{a}_3}(x \mid \tau_n = t) f_{\tau_n}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{n}{\sqrt{2\pi}\lambda\sigma} \exp\left(-\frac{n^2}{2\lambda^2\sigma^2} \left(x - \frac{\lambda at}{n}\right)^2\right) \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} \exp(-\lambda t) dt \\ &= \frac{n\lambda^{n-1}}{\sqrt{2\pi}\sigma\Gamma(n)} \exp\left(-\frac{n^2 x^2}{2\lambda^2\sigma^2}\right) \int_0^\infty v^{n-1} \exp\left(-\left(\lambda - \frac{nax}{\lambda\sigma^2}\right)v - \frac{a^2}{2\sigma^2}v^2\right) dv. \end{aligned}$$

Esta integral está sempre bem-definida nos reais pois o coeficiente de  $t^2$  na exponencial é sempre negativo, sendo ela uma transformada de Laplace :

$$\mathcal{L}\left(v^{n-1} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}v^2\right)\right).$$

Temos que:

$$\mathcal{L}(v^m f(v)) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial s^m} \mathcal{L}(f(v)),$$

caso  $m$  seja inteiro. Além disso,

$$\mathcal{L}(\exp(-bv^2)) = \sqrt{\frac{\pi}{4b}} \exp\left(\frac{s^2}{4b}\right) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{s}{2\sqrt{b}}} \exp(-u^2) du\right).$$

Segue que a solução de nossa integral, sendo  $b = \frac{n^2}{2\lambda^2\sigma^2}$ , é:

$$\mathcal{L}(v^{n-1} \exp(-bv^2)) = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \sqrt{\frac{\pi}{4b}} \exp\left(\frac{s^2}{4b}\right) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{s}{2\sqrt{b}}} \exp(-u^2) du\right). \quad \square$$

**Proposição 72** A Esperança de  $\tilde{\sigma}_3^2$  é dada por:

$$E(\tilde{\sigma}_3^2) = \sigma^2 \left( 1 - \frac{(n+1)(\lambda+1)}{n^2(\lambda+2n-1)} \right) - a^2 \frac{(n+1)(\lambda+1)}{n\lambda^2(\lambda+2n-1)}.$$

Prova: Temos:

$$\begin{aligned} E(\tilde{\sigma}_3^2) &= \frac{\lambda+1}{\lambda+2n-1} \left( \sigma^2 + 2\frac{a^2}{\lambda^2} + \sum_{i=2}^n \left( \frac{2\sigma^2}{\lambda+1} + \frac{a^2}{\lambda^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{n+1}{n^2} \left( \sigma^2 + a^2 \frac{n}{\lambda^2} + \left( \frac{an}{\lambda} \right)^2 \right) \right) \\ &= \sigma^2 \left( 1 - \frac{(n+1)(\lambda+1)}{n^2(\lambda+2n-1)} \right) - a^2 \frac{(n+1)(\lambda+1)}{n\lambda^2(\lambda+2n-1)}. \quad \square \end{aligned}$$

Ser-nos-ia interessante mostrar que  $\tilde{\sigma}_3^2$  é consistente. Para isso, a maneira mais usual é provar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\tilde{\sigma}_3^2) = \sigma^2 \quad (3.4.28)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\tilde{\sigma}_3^2) = 0. \quad (3.4.29)$$

Temos que 3.4.28 segue diretamente de  $E(\tilde{\sigma}_3^2)$ . Não obtivemos, entretanto,  $Var(\tilde{\sigma}_3^2)$ , devido à complexidade dos momentos envolvidos nos seus cálculos. Mesmo assim, provaremos 3.4.29 utilizando um limite superior desta variância.

Sabemos que:

$$Var(\tilde{\sigma}_3^2) = \frac{(\lambda+1)^2}{(\lambda+2n-1)^2} Var \left( X_{\tau_1}^2 + \sum_{i=2}^n (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2 - \frac{n+1}{n^2} X_{\tau_n}^2 \right).$$

Note que há três termos aleatórios dentro desta expressão. Iremos, a seguir, calcular as variâncias destes três termos. Temos:

$$\begin{aligned} Var(X_{\tau_1}^2 | \mathcal{W}_n) &= 2(Var(X_{\tau_1} | \mathcal{W}_n))^2 + 4Var(X_{\tau_1} | \mathcal{W}_n)(E(X_{\tau_1} | \mathcal{W}_n))^2 \\ &= 2\sigma^4 + 4a^2\sigma^2\tau_1^2 \end{aligned}$$

e

$$E\left(X_{\tau_i}^2 \mid \mathcal{W}_n\right) = Var\left(X_{\tau_i}\right) + \left(E\left(X_{\tau_i} \mid \mathcal{W}_n\right)\right)^2 = \sigma^2 + a^2 \tau_i^2.$$

Com isto, teríamos:

$$\begin{aligned} Var\left(X_{\tau_i}^2\right) &= E\left(Var\left(X_{\tau_i}^2 \mid \mathcal{W}_n\right)\right) + Var\left(E\left(X_{\tau_i}^2 \mid \mathcal{W}_n\right)\right) \\ &= 2\sigma^4 + \frac{8a^2\sigma^2}{\lambda^2} + \frac{20a^4}{\lambda^4}. \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

Quanto à  $Var\left(X_{\tau_n}^2\right)$ , temos:

$$Var\left(X_{\tau_n}^2 \mid \mathcal{W}_n\right) = 2\sigma^4 + 4a^2\sigma^2\tau_n^2$$

e

$$E\left(X_{\tau_n}^2 \mid \mathcal{W}_n\right) = \sigma^2 + a^2\tau_n^2.$$

Teríamos, assim:

$$\begin{aligned} Var\left(X_{\tau_n}^2\right) &= E\left(Var\left(X_{\tau_n}^2 \mid \mathcal{W}_n\right)\right) + Var\left(E\left(X_{\tau_n}^2 \mid \mathcal{W}_n\right)\right) \\ &= 2\sigma^4 + \frac{4a^2\sigma^2}{\lambda^2}n(n+1) + \frac{2a^4}{\lambda^4}n(n+1)(n+3) \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

Falta-nos calcular  $Var\left(\sum_{i=2}^n \left(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}\right)^2\right)$ . Sejam:

$$\mathbf{Y} = \left(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \dots, X_{\tau_n} - X_{\tau_{n-1}}\right)'$$

$$\mu = a\left(\tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_{n-1}\right)'$$

$$\sigma_{i,j}^2 = \sigma^2 \left( \exp\left(-\left(\tau_j - \tau_i\right)\right) + \exp\left(-\left(\tau_{j-1} - \tau_{i-1}\right)\right) - \exp\left(-\left(\tau_{j-1} - \tau_i\right)\right) - \exp\left(-\left(\tau_j - \tau_{j-1}\right)\right) \right) \quad i < j$$

$$\sigma_n^2 = 2\sigma^2 \left(1 - \exp\left(-\left(\tau_i - \tau_{i-1}\right)\right)\right)$$

Temos que  $\mathbf{Y}$  dado  $\mathcal{W}_n$  tem distribuição  $N(\mu, \Sigma)$ , onde  $\Sigma = [\sigma_{i,j}^2]$ . Sabemos, por

Searle (1982) pág. 355, que:

$$Var(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} \mid \mathcal{W}_n) = 2tr(\Sigma^2) + 4\mu'\Sigma\mu.$$

Seja  $\mathbf{Q} = \Sigma^2$ :

$$q_{ii} = \sum_{j=2}^n \sigma_{ij}^2 \sigma_{ji}^2 = (\sigma_{ii}^2)^2 + 2 \sum_{1 < i < j}^n (\sigma_{ij}^2)^2.$$

Além disso, temos:

$$\mu'\Sigma\mu = \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \mu_i \mu_j \sigma_i^2 = \sum_{i=2}^n \mu_i^2 \sigma_{ii}^2 + 2 \sum_{1 < i < j}^n \mu_i \mu_j \sigma_{ij}^2$$

Com isto, teríamos:

$$Var(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} \mid \mathcal{W}_n) = 2 \sum_{i=2}^n \left( (\sigma_{ii}^2)^2 + 2 \sum_{1 < j < i}^n (\sigma_{ij}^2)^2 \right) + 4 \sum_{i=2}^n \mu_i^2 \sigma_{ii}^2 + 8 \sum_{2 < i < j}^n \mu_i \mu_j \sigma_{ij}^2.$$

Necessitamos da esperança desta variância condicional. Para isto, faremos os cálculos de cada termo separadamente:

$$\begin{aligned} E\left((\sigma_{ij}^2)\right) &= E\left(4\sigma^4(1 + \exp(-2(\tau_i - \tau_{i-1})) - 2\exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})))\right) \\ &= 4\sigma^4 \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda+2} - 2\frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{8\sigma^4}{(\lambda+2)(\lambda+1)}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{j>i>1}^n (\sigma_{ij}^2)^2\right) &= \sum_{j>i>1}^n E((\sigma_{ij}^2)^2) = \sigma^4 \sum_{j>i>1}^n E(\exp(-2(\tau_j - \tau_i)) + \\ &\quad + \exp(-2(\tau_{j-1} - \tau_{i-1})) + \exp(-2(\tau_{j-1} - \tau_i)) + \exp(-2(\tau_j - \tau_{i-1})) + \\ &\quad + 2\exp(-(\tau_j - \tau_i)) \exp(-(\tau_{j-1} - \tau_{i-1})) - 2\exp(-(\tau_j - \tau_i)) \exp(-(\tau_{j-1} - \tau_i)) + \\ &\quad - 2\exp(-(\tau_j - \tau_i)) \exp(-(\tau_j - \tau_{i-1})) - 2\exp(-(\tau_{j-1} - \tau_{i-1})) \times \\ &\quad \exp(-(\tau_{j-1} - \tau_i)) - 2\exp(-(\tau_{j-1} - \tau_{i-1})) \exp(-(\tau_j - \tau_{i-1})) + \\ &\quad + 2\exp(-(\tau_{j-1} - \tau_i)) \exp(-(\tau_j - \tau_{i-1}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^4 \sum_{j>i>1}^n \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{j-i} + \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{j-i} + \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{j-i-1} + \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{j-i-1} + \right. \\
&\quad + 2 \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{j-i-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^2 - 2 \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{j-i-1} \frac{\lambda}{\lambda+1} + \\
&\quad - 2 \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{j-i} \frac{\lambda}{\lambda+1} - 2 \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{j-i-1} \frac{\lambda}{\lambda+1} - 2 \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{j-i} \frac{\lambda}{\lambda+1} + \\
&\quad \left. + 2 \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{j-i-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^2 \right) \\
&= \sigma^4 \sum_{j>i>1}^n \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^j \left( 2 \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{-i} + \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{-i-1} + \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{-i+1} + \right. \\
&\quad \left. + 4 \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{-i-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^2 - 4 \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{-i-1} \frac{\lambda}{\lambda+1} - 4 \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{-i} \frac{\lambda}{\lambda+1} \right) \\
&= \sigma^4 \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{-i} \left( 2 + \frac{\lambda+2}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda+2} + 4 \frac{\lambda+2}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^2 - 4 \frac{\lambda+2}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda+1} - 4 \frac{\lambda}{\lambda+1} \right) \\
&\quad \frac{\left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{i+1} \left( 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{n-i} \right)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda+2}} \\
&= \sigma^4 \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{-i} \frac{12\lambda^3 + 16\lambda^2 + 4}{\lambda(\lambda+1)^2(\lambda+2)} \frac{\lambda+2}{2} \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{i+1} - \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{n+1} \right) \\
&= \sigma^4 \frac{6\lambda^3 + 8\lambda^2 + 2}{\lambda(\lambda+1)^2} \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} - \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{n-i+1} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\mu_i^2 \sigma_n^2) &= E(2a^2 \sigma^2 (\tau_i - \tau_{i-1})^2 (1 - \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})))) \\
&= 2a^2 \sigma^2 \left( \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2\lambda}{(\lambda+1)^3} \right) = 4a^2 \sigma^2 \frac{(\lambda+1)^3 + \lambda^3}{\lambda^2 (\lambda+1)^3}
\end{aligned}$$

e

$$E(\mu_i \mu_j \sigma_{i,j}^2) = E(a^2 \sigma^2 (\tau_i - \tau_{i-1}) (\exp(-(\tau_j - \tau_i))) +$$

$$\begin{aligned}
& + \exp(-(\tau_{j-1} - \tau_{i-1})) - \exp(-(\tau_{j-1} - \tau_i)) - \exp(-(\tau_j - \tau_{i-1})) \\
= & a^2 \sigma^2 \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2} \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^{j-i-1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2} \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^{j-i-1} + \right. \\
& \left. - \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^{j-i-1} - \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2} \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2} \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^{j-i-1} \right) \\
= & -a^2 \sigma^2 \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^{j-i-1} \left( \frac{4\lambda^2 + 4\lambda + 1}{\lambda^2 (\lambda+1)^4} \right).
\end{aligned}$$

Assim, teríamos:

$$\begin{aligned}
E(Var(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} \mid \mathcal{W}_n)) &= \frac{8\sigma^4(n-1)}{(\lambda+2)(\lambda+1)} + \\
& + \sigma^4 \frac{24\lambda^3 + 32\lambda^2 + 8}{\lambda(\lambda+1)^2} \left( (n-1) \frac{\lambda}{\lambda+2} - \frac{\left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{n-1} \left( 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda+2} \right)^{n-1} \right)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda+2}} \right) + \\
& + 16a^2 \sigma^2 (n-1) \frac{(\lambda+1)^2 + \lambda^3}{\lambda^2 (\lambda+1)^3} + \\
& - 8a^2 \sigma^2 \frac{4\lambda^2 + 4\lambda + 1}{\lambda^2 (\lambda+1)^4} (\lambda+1) \left( n-1 - \lambda^{n-2} (\lambda+1)^{-n+4} \left( 1 - (\lambda+1)^{-n+1} \lambda^{n-1} \right) \right).
\end{aligned}$$

Para completarmos os cálculos da variância de  $\mathbf{Y}'\mathbf{Y}$ , temos:

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{Y}'\mathbf{Y}) &= \sum_{i=2}^n E\left(\left(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}\right)^2 \mid \mathcal{W}_n\right) \\
&= \sum_{i=2}^n \left( 2\sigma^2 (1 - \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1}))) + a^2 (\tau_i - \tau_{i-1})^2 \right) \\
&= 2\sigma^2 \left( n-1 - \sum_{i=2}^n \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})) \right) + a^2 \sum_{i=2}^n \sum_{i=2}^n (\tau_i - \tau_{i-1})^2.
\end{aligned}$$

Para calcular a variância deste termo, o que irá completar o cálculo de  $Var(\mathbf{Y}'\mathbf{Y})$ , iremos, a seguir, calcular alguns momentos dos termos da expressão acima:

$$Var(\exp(-(\tau_i - \tau_{i-1}))) = \frac{\lambda}{\lambda+2} - \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^2 = \frac{\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+1)^2},$$

$$Var\left((\tau_i - \tau_{i-1})^2\right) = \frac{20}{\lambda^4}$$

e

$$Cov\left(\exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})), (\tau_i - \tau_{i-1})^2\right) = \frac{2\lambda}{(\lambda+1)^3} - \frac{\lambda}{\lambda+1} \frac{2}{\lambda^2} = -\frac{4\lambda+2}{\lambda(\lambda+1)^3}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} Var(E(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} \mid \mathcal{W}_n)) &= 4\sigma^4 \sum_{i=2}^n Var(\exp(-(\tau_i - \tau_{i-1}))) + a^4 \sum_{i=2}^n Var((\tau_i - \tau_{i-1})^2) + \\ &\quad - 4a^2\sigma^2 \sum_{i=2}^n \sum_{i=2}^n Cov(\exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})), (\tau_i - \tau_{i-1})^2) \\ &= \frac{4\sigma^4\lambda(n-1)}{(\lambda+2)(\lambda+1)^2} + \frac{20a^4(n-1)}{\lambda^4} + \frac{8a^2\sigma^2(2\lambda+1)}{\lambda(\lambda+1)^3} \end{aligned}$$

Temos que  $Var(\tilde{\sigma}_3^2)$  pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\sigma}_3^2) &= \left(\frac{\lambda+1}{\lambda+2n-1}\right)^2 \left(Var(X_{\tau_1}^2) + Var\left(\sum_{i=2}^n (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+1)^2}{n^4} Var(X_{\tau_n}^2) + Cov\left(X_{\tau_1}^2, \sum_{i=2}^n (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2\right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{n+1}{n^2} Cov(X_{\tau_1}^2) - \frac{n+1}{n^2} Cov\left(\sum_{i=2}^n (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2, X_{\tau_n}^2\right)\right) \end{aligned}$$

Definamos  $o(b)$  de forma que, se  $a = o(b)$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b} =$

0. Note-se que:

$$\begin{aligned} Var(X_{\tau_1}^2) &= o(n) \\ Var(X_{\tau_n}^2) &= o(n^4) \\ Var\left(\sum_{i=2}^n (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2\right) &= o(n^2). \end{aligned}$$

Sabemos que , por Cauchy-Schwarz, teríamos:

$$\begin{aligned} Cov \left( X_{\tau_1}^2, X_{\tau_n}^2 \right) &= o \left( n^{\frac{5}{2}} \right) \\ Cov \left( X_{\tau_1}^2, \sum_{i=2}^n \left( X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} \right) \right)^2 &= o \left( n^{\frac{5}{2}} \right) \\ Cov \left( X_{\tau_n}^2, \sum_{i=2}^n \left( X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}} \right)^2 \right) &= o \left( n^3 \right). \end{aligned}$$

Assim , obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var \left( \hat{\sigma}_3^2 \right) = 0.$$

Temos, portanto, provada, a seguinte proposição:

**Proposição 73**  $\hat{\sigma}_3^2$  é consistente.

## 3.5 Tempos Aleatórios Não-Ordenáveis

Agora, além de não sabermos, nem a posteriori, os tempos em que foram tomadas as componentes da nossa amostra, desconhecemos inclusive a ordem em que elas foram observadas. Nossa amostra será denotada por  $A = \left( X_{\tau_{i_1}}, X_{\tau_{i_2}}, \dots, X_{\tau_{i_n}} \right)'$ , onde:  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  é uma permutação de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Como nossa amostra atual nada mais é do que um permutação da anterior, sabemos que, se existe o vetor de estimadores de máxima verossimilhança, ele só tem solução sob análise numérica, por analogia à Seção 1.5, baseado na Seção 3.4.

### 3.5.1 Estimação pelo Método dos Momentos

Como sempre, para que encontremos estimadores de momentos de  $a$  e  $\sigma^2$ , devemos igualar os momentos amostrais e teóricos de funções de nossa

amostra. Temos:

$$\begin{aligned} E(X_{\tau_j}) &= E(E(X_{\tau_j} | X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n})) \\ &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\tau_i}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_{\tau_i}) \\ &= \frac{a}{n\lambda} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2\lambda} a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X_{\tau_i}^2) &= E(E(X_{\tau_i}^2 | \mathcal{W}_n)) = E(a^2 \tau_i^2 + \sigma^2) \\ &= a^2 \frac{(i+1)i}{\lambda^2} + \sigma^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E(X_{\tau_j}^2) &= E(E(X_{\tau_j}^2 | X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n})) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{\tau_i}^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(a^2 \frac{(i+1)i}{\lambda^2} + \sigma^2\right) \\ &= a^2 \frac{(n+1)(n+2)}{3\lambda^2} + \sigma^2. \end{aligned}$$

Com isto, igualando os momentos amostrais aos teóricos:

$$\sum_{j=1}^n X_{\tau_j} = \frac{n(n+1)}{2\lambda} \tilde{a}_4$$

e

$$\sum_{j=1}^n X_{\tau_j}^2 = \tilde{a}_4^2 \frac{n(n+1)(n+2)}{3\lambda^2} + n\tilde{\sigma}_4^2.$$

Finalmente:

$$\tilde{a}_4 = \frac{2\lambda}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n X_{\tau_j} \quad (3.5.32)$$

e

$$\tilde{\sigma}_4^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n X_{\tau_j}^2 - \frac{n(n+1)(n+2)\tilde{a}_4^2}{3\lambda^2} \right)$$

ou

$$\tilde{\sigma}_4^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n X_{\tau_j}^2 - \frac{4(n+2)}{3n(n+1)} \left( \sum_{i=1}^n X_{\tau_i} \right)^2 \right). \quad (3.5.33)$$

**Proposição 74** *A esperança e a variância de  $\tilde{a}_4$  são dadas por:*

$$E(\tilde{a}_4) = a \quad (3.5.34)$$

$$\begin{aligned} Var(\tilde{a}_4) = & \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( \sigma^2 \left( n(\lambda+1) + \lambda \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^n - 1 \right) \right) + \right. \\ & \left. + a^2 \frac{n(n+1)(n+2)}{6\lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (3.5.35)$$

Prova: 3.5.34 segue diretamente das propriedades dos estimadores de momentos. Para provar 3.5.35, necessitaremos de alguns momentos amostrais que foram calculados na seção anterior:

$$Var(X_{\tau_i}) = \sigma^2 + \frac{a^2}{\lambda^2} i,$$

$$Cov(X_{\tau_i}, X_{\tau_j} | \mathcal{W}_n) = \sigma^2 \exp(-( \tau_j - \tau_i )) \quad i < j,$$

$$E(Cov(X_{\tau_i}, X_{\tau_j} | \mathcal{W}_n)) = \sigma^2 \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^{j-i} \quad i < j,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n Var(X_{\tau_i}) &= \sum_{i=1}^n \left( \sigma^2 + \frac{a^2}{\lambda^2 i} \right) \\
&= n\sigma^2 + \frac{n(n+1)a^2}{2\lambda^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i < j}^n Cov(X_{\tau_i}, X_{\tau_j}) &= \sum_{i < j}^n \left( \frac{a^2 i}{\lambda^2} + \sigma^2 \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^{j-i} \right) \\
&= \frac{a^2}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n i(n-i) + \sigma^2 \sum_{i=1}^n \frac{\left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^{-i} \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^{i+1} \left( 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^{n-i} \right)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda+1}} \\
&= \frac{a^2}{\lambda^2} \frac{n(n-1)(n+1)}{6} + \sigma^2 (\lambda+1) \left( n \frac{\lambda}{\lambda+1} - \lambda \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^n - 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
Var(\tilde{a}_4) &= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} Var \left( \sum_{j=1}^n X_{\tau_j} \right) \\
&= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( E \left( Var \left( \sum_{j=1}^n X_{\tau_j} \mid X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + Var \left( E \left( \sum_{j=1}^n X_{\tau_j} \mid X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n} \right) \right) \right) \\
&= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( E \left( Var \left( \sum_{i=1}^n X_{\tau_i} \mid X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + Var \left( E \left( \sum_{i=1}^n X_{\tau_i} \mid X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_n} \right) \right) \right) \\
&= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} Var \left( \sum_{i=1}^n X_{\tau_i} \right) = \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( \sum_{i=1}^n Var(X_{\tau_i}) + \sum_{i < j}^n Cov(X_{\tau_i}, X_{\tau_j}) \right) \\
&= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( n\sigma^2 + \frac{n(n+1)a^2}{2\lambda^2} + \sigma^2 (\lambda+1) \left( n \frac{\lambda}{\lambda+1} + \lambda \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^n - 1 \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^2}{6\lambda^2} n(n+1)(n-1) \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left( \sigma^2 \left( n(\lambda+1) + \lambda \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^n - 1 \right) \right) + a^2 \frac{n(n+1)(n+2)}{6\lambda^2} \right). \square$$

**Proposição 75**  $\tilde{a}_4$  é consistente.

Prova: Sendo  $\tilde{a}_4$  não-viciado e tomando-se o limite de sua variância quando  $n$  vai para o infinito, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E(\tilde{a}_4) &= a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} Var(\tilde{a}_4) &= 0. \end{aligned}$$

De forma análoga às anteriores, temos, por Tchebyshev, provada a nossa consistência.  $\square$

Temos, ainda, que:

**Proposição 76** A função densidade de probabilidade de  $\tilde{a}_4$  é dada por:

$$\begin{aligned} f_{\tilde{a}_4}(x) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{n(n+1)}{\lambda \sigma \sqrt{8\pi \left( n + \sum_{i < j}^n \exp(-(t_j - t_i)) \right)}} \times \\ &\quad \exp \left( - \frac{n^2(n+1)^2}{8\lambda^2 \sigma^2 \left( n + \sum_{i < j}^n \exp(-(t_j - t_i)) \right)} \left( x - \frac{2\lambda a}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n t_i \right)^2 \right) \times \\ &\quad \prod_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} t_k^{k-1} \exp(-\lambda t_k) dt_k. \end{aligned}$$

Prova: Temos que  $\tilde{a}_4$  dado  $\mathcal{W}_n$  tem distribuição normal com os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} E(\tilde{a}_4 | \mathcal{W}_n) &= \frac{2\lambda}{n(n+1)} E \left( \sum_{j=1}^n X_{\tau_j} | \mathcal{W}_n \right) \\ &= \frac{2\lambda}{n(n+1)} E \left( \sum_{i=1}^n X_{\tau_i} | \mathcal{W}_n \right) \\ &= \frac{2\lambda a}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \tau_i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 Var(\tilde{a}_4 \mid \mathcal{W}_n) &= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} Var\left(\sum_{j=1}^n X_{\tau_j} \mid \mathcal{W}_n\right) \\
 &= \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} Var\left(\sum_{i=1}^n X_{\tau_i} \mid \mathcal{W}_n\right) \\
 &= \frac{4\lambda^2\sigma^2}{n^2(n+1)^2} \left(n + 2 \sum_{i < j}^n \exp(-(\tau_j - \tau_i))\right).
 \end{aligned}$$

Temos, então caracterizada a distribuição de  $\tilde{a}_4$  condicionada à janela. Tomando-se a distribuição da janela, chegamos à proposição.  $\square$

Quanto a  $\sigma^2$ , temos:

**Proposição 77** *Esperança de  $\tilde{\sigma}_4^2$  é dada por:*

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{\sigma}_4^2) &= \sigma^2 \left(1 - \frac{4\lambda^2(\lambda+1)}{n(n+1)^2} - \frac{4\lambda^3}{n^3(n+1)^2} \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^n - 1\right)\right) + \\
 &\quad - a^2 \frac{2(n+2)}{3(n+1)}
 \end{aligned}$$

Prova: Temos:

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{\sigma}_4^2) &= E\left(\frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n X_{\tau_j}^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3\lambda^2} \tilde{a}_4^2\right)\right) \\
 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sigma^2 + a^2 \frac{(n+1)(n+2)}{3\lambda^2}\right)\right) - \frac{n(n+1)(n+2)}{3\lambda^2} \left(a^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4\lambda^2}{n^2(n+1)^2} \left(\sigma^2 \left(n(\lambda+1) + \lambda \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^n - 1\right)\right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + a^2 \frac{n(n+1)(n+2)}{6\lambda^2}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \left( 1 - \frac{4\lambda^2(\lambda+1)}{n(n+1)^2} - \frac{4\lambda^3}{n^3(n+1)^2} \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^n - 1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + a^2 \left( \frac{(n+1)(n+2)}{3\lambda^2} - \frac{(n+1)(n+2)}{3\lambda^2} - \frac{2(n+2)}{3(n+1)} \right) \right) \\
&= \sigma^2 \left( 1 - \frac{4\lambda^2(\lambda+1)}{n(n+1)^2} - \frac{4\lambda^3}{n^3(n+1)^2} \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^n - 1 \right) \right) + \\
&\quad - a^2 \frac{2(n+2)}{3(n+1)}
\end{aligned}$$

Note-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\tilde{\sigma}_4^2) = \sigma^2 - \frac{2a^2}{3},$$

isto é,  $\tilde{\sigma}_4^2$  é assintoticamente viciado.

### 3.6 Conclusões do Processo de Ornstein-Uhlenbeck

Como no Capítulo 1, é-nos interessante comparar as variâncias dos estimadores obtidos com os respectivos limites inferiores de Cramer-Rao. Neste caso, temos  $g_1 = h_1 = 1$  e  $g_i = t_i - t_{i-1} \exp(-(t_i - t_{i-1}))$  e  $h_i = 1 - \exp(-(t_i - t_{i-1}))$  se  $i = 2, 3, \dots, n$ . Com isto, a informação de Fischer de  $a$  no caso determinístico é:

$$I_{A.}(a) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{g_i^2}{h_i} = \frac{c_1}{\sigma^2},$$

ou seja, sendo ambos os estimadores de  $a$  não-viciados, têm limite inferior de Cramer-Rao dado por:

$$LCR_1(a) = \frac{\sigma^2}{c_1}.$$

Assim, novamente, apenas o estimador de máxima verossimilhança consegue atingir este limite em qualquer esquema amostral enquanto o de momentos o atinge se e somente  $c_1 d = n^2$ . Para os casos aleatórios, o limite inferior de Cramer-Rao é dado para estimadores não-viciados por:

$$LCR_1(a) = \frac{\sigma^2}{E(c_2)},$$

o que não ajuda muito na comparação dos estimadores visto não conhecermos solução para esta esperança.

Quanto aos limites das variâncias dos estimadores de  $\sigma^2$ , serão os mesmos do Capítulo 1 para os casos determinísticos e aleatórios com tempos observáveis visto serem os estimadores obtidos de mesma distribuição, qui-quadrado com  $n - 1$  graus de liberdade, valendo, então, as observações do Capítulo 1, isto é, as variâncias desses estimadores não atingem o limite inferior de Cramer-Rao mas são assintoticamente equivalentes a este.

# Observações Finais

Há algumas observações a serem feitas sobre os resultados obtidos nesta monografia. Sem dúvida, os resultados mais expressivos, se comparados os três capítulos, foram os obtidos no Capítulo 1, principalmente no que se refere às distribuições dos estimadores de  $a$ .

No Capítulo 2, os estimadores de  $a$  têm, a menos das distribuições, propriedades semelhantes às dos estimadores equivalentes no Capítulo 1.

No Capítulo 3, em alguns casos, não nos foi possível nem encontrar os estimadores de momentos de  $a$ , fato que não havia ocorrido em nenhum dos dois capítulos anteriores. Para alguns dos estimadores encontrados, não conseguimos calcular os momentos, mostrando-se assim, de certa forma, que a estrutura do processo de Ornstein-Uhlenbeck reduz as condições de estimação de  $a$  se comparado com o processo de Wiener.

Quanto aos estimadores de  $\sigma^2$ , é interessante notar que, tanto no Capítulo 1 quanto no Capítulo 3, basta-nos conhecer os tempos em que amostremos o processo, sendo estes aleatórios ou determinísticos, para que tenhamos nosso estimador de  $\sigma^2$  com distribuição qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade. Para o Capítulo 2, por ser o tamanho da amostra aleatório, isto não seria possível.

Assim, os estimadores de  $\sigma^2$  mostraram-se muito menos dependentes das diversas janelas de observação do que os estimadores de  $a$ , sendo os estimadores de  $\sigma^2$  por máxima verossimilhança dependentes apenas do tamanho da amostra, tanto no caso determinístico como aleatório.

Mesmo com os resultados do Capítulo 1 sendo mais satisfatórios do que os dos outros capítulos, não nos pareceu ser inviável a extensão de grande parte dos resultados obtidos para o processo de Wiener para uma classe maior de processos gaussianos. Parecer-nos-ia também interessante uma análise mais apurada das propriedades dos estimadores de máxima verossimilhança nos casos em que não houve uma solução explícita.

## APÊNDICES

## Apêndice A - Notação

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
- $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$
- $X \sim F_X \Leftrightarrow$  a v.a.  $X$  segue a distribuição  $F_X$
- $f_X$  - função-densidade de  $X$
- $A \propto B \Leftrightarrow A$  proporcional a  $B$
- Evento *a.s.*  $\Leftrightarrow P(\text{Evento}) = 1$
- $\text{Mín}(t, s) = \begin{cases} t & \text{se } t \leq s \\ s & \text{se } t > s; \end{cases}$
- $\text{Máx}(t, s) = \begin{cases} s & \text{se } t \leq s \\ t & \text{se } t > s; \end{cases}$
- $\mathbb{1}_n = (1, 1, \dots, 1)'$
- $\mathbf{0}_n = (0, 0, \dots, 0)'$
- $e_n = (1, 0, \dots, 0)'$
- $\mathbb{I}_n$  - matriz identidade  $n \times n$
- $L(a, \sigma^2 \mid X) = f_X(X; a, \sigma^2)$  - função de verossimilhança
- $\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty \exp(-st) g(t) dt$  - Transformada de Laplace de  $g$
- $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \exp(-x) dx$  - Função Gama
- $a_{(n)} = a(a-1) \cdots (a-n+1)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_{(0)} = 1$
- $E(X)$  - Esperança de  $X$
- $\text{Var}(X)$  - Variância de  $X$
- $\text{Cov}(X, Y)$  - Covariância entre  $X$  e  $Y$
- $X \perp Y \Leftrightarrow X$  é independente de  $Y$

- $E_1(s) = \int_0^\infty \frac{\lambda \exp(-\lambda t)}{t} dt$
- $\phi_X(t)$  - função característica de  $X$
- $a = o(b) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b} = 0$

## Apêndice B - Definições e Propriedades

Iremos, agora, fazer uma breve revisão de algumas distribuições e técnicas muito utilizadas durante o texto. Assumiremos a notação de  $f$  e  $F$  em vez de  $f$  e  $F$  quando não houver possibilidades de confusão.

**Definição 2** *Seja  $X$  uma v.a. absolutamente contínua de forma que:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Dizemos ser  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , isto é,  $X$  segue uma distribuição normal de parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$ , cujas principais propriedades são:*

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu; \\ \text{Var}(X) &= \sigma^2; \\ E((X-\mu)^p) &= 0, \quad p \text{ ímpar}; \\ \text{Cov}((X-\mu)^2, X-\mu) &= 0; \quad e \\ \phi_X(t) &= \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

*Caso  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$  diz-se ser  $X$  uma normal padrão.*

**Definição 3**  *$X \sim \Gamma(p, q)$ , ou seja  $X$  segue uma distribuição gama de parâmetros positivos  $p$  e  $q$ , se e somente se:*

$$f(x) = \frac{p^q}{\Gamma(q)} x^{q-1} \exp(-px), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

*onde  $p$  e  $q$  são parâmetros estritamente positivos.*

*Algumas das principais propriedades desta variável são:*

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{q}{p}; \\ \text{Var}(X) &= \frac{q}{p^2}; \\ E(X^n) &= \frac{(q+n-1)_{(n)}}{p^n}; \end{aligned}$$

se  $q = 1$ , então  $X \sim \text{Exp}(p)$ , ou seja,  $X$  segue dist. Exponencial;  
 se  $q = \frac{n}{2}$  e  $p = \frac{1}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , então  $X \sim \chi^2(n)$ ,  
 ou seja,  $X$  é qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade.

**Definição 4** Seja  $X$  uma v.a. de forma que, sendo  $k$  um parâmetro positivo:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

$X \sim t(k)$ , isto é,  $X$  segue uma distribuição  $t$  de Student com  $k$  graus de liberdade.  $X$  tem uma propriedade muito interessante. Sendo  $Z$  e  $Y$  v.a.s independentes,  $Z$  uma normal padrão e  $Y$  uma qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade, teríamos:

$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

segundo uma distribuição  $t$  de Student. Além disso, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $X$  converge em distribuição para um normal padrão.

**Definição 5** Seja  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  um vetor  $n$ -dimensional.  $X$  é dito ser uma v.a. normal  $n$ -variada se e somente se qualquer combinação linear de suas componentes for normal univariada. Em particular, basta que se prove que cada uma das componentes é uma normal univariada. Assim,  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ , onde  $\mu$  é o vetor  $n$ -dimensional que reúne as respectivas médias,  $\mu_i$ 's, das componentes e  $\Sigma = [\sigma_{ij}]$  é a chamada matriz de covariância, onde  $\sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$ . Três das principais propriedades da normal  $n$ -variada são:

$\Sigma$  é simétrica e definida-positiva;

$X_i \perp X_j \Leftrightarrow \sigma_{ij} = 0$ ;

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{ii} + \sum_{i < j}^n a_i a_j \sigma_{ij}\right)$$

Além destas propriedades, temos o seguinte teorema de Searle (1982)

pág. 57:

**Teorema 1** *Seja  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ .  $X'AX \sim \chi^2(r(A), \mu' A \mu / 2)$  se e somente se  $A\Sigma$  for idempotente, onde  $\mu' A \mu / 2$  é o parâmetro de não-centralidade.*

**Definição 6** *Um processo estocástico  $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  é dito ser um processo de Poisson se e somente se:*

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \text{ a.s;} \\ P(X_t - X_s = k) &= P(X_{t-s} = k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, t, s, t-s \in \mathbb{R}_+; \\ P(X_t - X_s = k, X_v - X_u = l) &= P(X_t - X_s = k) P(X_v - X_u = l), \\ &\quad \forall t, s, t-s, u, v, v-u, u-t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall k, l \in \mathbb{N}; e \\ \lim_{t \rightarrow 0} P(X_t \geq 2 \mid X_t \geq 1) &= 0. \end{aligned}$$

**Definição 7** *Sejam  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)' \in \Theta$  um vetor de parâmetros e  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$  uma amostra aleatória que segue uma distribuição com parâmetro  $\theta$ . Diz-se ser  $\hat{\theta}$  o estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$  dada a amostra  $X$  se e somente se:*

$$L(\hat{\theta} \mid X) = \text{Máx}_{\theta \in \Theta} (L(\theta \mid X)).$$

**Definição 8** *Sejam  $\theta_1$  e  $\theta_2$  parâmetros unidimensionais,  $X$  como na definição anterior e  $g_i, h_i, i = 1, 2, \dots, n$  de forma que  $E(g_i(X_i)) = c_i \theta_1 + d_i \theta_2$  e  $E(h_i(X_i)) = e_i \theta_2 + f_i \theta_1$  para todo  $i$  sendo que tenhamos algum  $c_i$  e algum  $e_i$  não nulos, sem restrições quanto a  $d_i$  e  $f_i$ . Assim,  $\tilde{\theta}_1$  e  $\tilde{\theta}_2$  são estimadores de momentos de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente se e somente se forem solução para as equações:*

$$\sum_{i=1}^n g_i(X_i) = \sum_{i=1}^n (c_i \theta_1 + d_i \theta_2)$$

e

$$\sum_{i=1}^n h_i(X_i) = \sum_{i=1}^n (e_i \theta_2 + f_i \theta_1).$$

Notemos que, caso  $d_i$  seja nulo para todo  $i$ , temos, como solução para a primeira das equações apresentadas:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n c_i} \left( \sum_{i=1}^n g_i(X_i) \right).$$

Neste caso, temos o estimador de momentos de  $\theta_1$  não-viciado.

**Definição 9** Uma técnica simples, em Apostol (1977) págs. 380 e 381, para que se maximize uma determinada função  $f(x, y)$  em relação a  $(x, y)$ , seria a de se encontrar a solução, de ponto interior, caso exista,  $(\hat{x}, \hat{y})$  do sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0, \end{cases}$$

de forma que:

$$\begin{aligned} D_{11} &< 0; e \\ \Delta &> 0, \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\hat{x}, \hat{y}); \\ D_{22} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(\hat{x}, \hat{y}); \\ D_{12} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(\hat{x}, \hat{y}); e \\ \Delta &= D_{11}D_{22} - D_{12}^2. \end{aligned}$$

**Definição 10** Seja  $\mathbf{Y}$  um vetor de  $n$  observações de uma variável para a qual se pretende fazer uma regressão em  $\mathbf{X}$ , matriz  $n \times p$ . Supõe-se que entre  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{X}$  exista a seguinte relação:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\theta + \epsilon,$$

onde  $\epsilon \sim N(0_n, \sigma^2 \Sigma)$  e  $\theta$  é um vetor de  $p$  parâmetros. Pela teoria de estimadores lineares de Gauss-Markov, o estimador de mínimos quadrados de  $\theta$  seria dado por:

$$\bar{\theta} = (\mathbf{X}\Sigma^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{Y}.$$

Este estimador tem a propriedade de ser, na classe dos não-viciados, de mínima variância. Para  $\sigma^2$ , teríamos como estimador de mínimos quadrados:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\bar{\theta})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\bar{\theta})}{n - p}.$$

Com isto,

$$\frac{n - p}{\sigma^2} \bar{\sigma}^2 \sim \chi_{(n-p)}^2$$

**Definição 11** Sejam  $X$  uma variável aleatória tal que  $E(X) < \infty$  e  $m \in \mathbb{R}_+$ . É sua propriedade, sendo conhecida como Desigualdade de Tchebyshev:

$$P(|X - E(X)| > m) \leq \frac{Var(X)}{m^2}.$$

**Definição 12** Sejam  $X_n : n \geq 1$  uma seqüência de v.a.s e  $X$  uma variável aleatória que não seja relacionada com  $n$ . Temos:

Convergência Quase Certa:  $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1$ ;

Convergência em Probabilidade:  $X_n \xrightarrow{p} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0, \forall \epsilon > 0$ ;

Convergência em Distribuição:  $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq x) = P(X \leq x)$ ,  
em todo ponto de continuidade  $x$ ;

$X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$ ;

$X_n \xrightarrow{d} X \in \mathbb{R} \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$

**Definição 13** Seja  $\bar{\theta}_n$  um estimador de  $\theta$ , sendo  $n$  o tamanho da amostra. Temos, então:

Consistência Forte:  $\bar{\theta}_n \xrightarrow{a.s.} \theta$

Consistência Fraca:  $\bar{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$

Convergência em Distribuição:  $\bar{\theta}_n \xrightarrow{d} \theta$

Consistência Forte  $\Rightarrow$  Consistência Fraca  $\Rightarrow$  Convergência em Distribuição ;

Por Tchebyshev,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\bar{\theta}_n) = \theta$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\bar{\theta}_n) = 0 \Rightarrow \bar{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$ ;

Vício:  $B(\bar{\theta}_n) = E(\bar{\theta}_n) - \theta$ ; e

Erro Quadrático Médio:  $EQM(\bar{\theta}_n) = B^2(\bar{\theta}_n) + Var(\bar{\theta}_n)$ .

**Definição 14** Seja  $\mathbf{A} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$  uma amostra cujas componentes sejam independentes com distribuição absolutamente contínua com funções de densidade paramétricas respectivamente  $f_{X_i}$ . A informação de Fischer que  $\mathbf{A}$  proporciona sobre um parâmetro  $\theta$  é dada por:

$$I_{\mathbf{A}}(\theta) = \sum_{i=1}^n I_{X_i}(\theta),$$

onde

$$I_{X_i}(\theta) = E \left( \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_{X_i}(X_i) \right)^2 \right) = -E \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_{X_i}(X_i) \right).$$

Seja  $\bar{\theta}$  um estimador de  $\theta$ . Sendo  $c(\bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta} B(\bar{\theta})$  e  $d(\bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta} E(\bar{\theta})$ , temos que a variância de  $\bar{\theta}$  não pode ser menor do que:

$$LCR_{\bar{\theta}}(\theta) = \frac{(c(\bar{\theta}) + d(\bar{\theta}))^2}{I_{\mathbf{A}}(\theta)},$$

conhecido como limite inferior de Cramer-Rao.

**Resultado 1** Na situação exposta na definição 14, tomemos cada um dos  $X_i$ 's seguindo a distribuição normal com média e variância respectivamente  $ag_i$  e  $\sigma^2 h_i$ . Teríamos:

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f_{X_i}(x) = \frac{g_i}{\sigma^2 h_i} (x - ag_i),$$

o que nos leva a:

$$I_{X_i}(a) = E \left( \left( \frac{g_i}{\sigma^2 h_i} (X - ag_i) \right)^2 \right) = \frac{g_i^2}{\sigma^2 h_i}.$$

Temos, finalmente:

$$I_{\mathbf{A}}(a) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{g_i^2}{h_i}.$$

Para  $\sigma^2$ , teríamos:

$$\frac{\partial^2}{\partial (\sigma^2)^2} \ln f_{X_i}(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{(x - ag_i)^2}{\sigma^6 h_i}.$$

Com isto,

$$I_{X_i}(a) = -E \left( \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{(x - ag_i)^2}{\sigma^6 h_i} \right) = \frac{1}{2\sigma^4},$$

levando-nos, finalmente, a:

$$I_A(\sigma^2) = \frac{n}{2\sigma^4}.$$

## Bibliografia

- APOSTOL, T.M. (1973) *Calculus*. 2ª ed. Barcelona, Editorial Reverté.
- BEUTLER, F.J. (1970) Alias Free Randomly Timed Sampling of Stochastic Process. *IEEE Transactions on Information Theory* 16:147-152.
- BLUM, J.R. & BOYLES, R.A. (1981) Random Sampling from a Continuous Parameter Process. *Lecture Notes in Mathematics* 861:15-24. Springer-Verlag.
- BLUM, J.R. & ROSENBLATT, J. (1964) On Random Sampling from a Stochastic Process. *Annals of Mathematical Statistics* 35:1713-1717.
- IBRAGIMOV, I.A. & HAS'MINSKII, R.Z. (1981) *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*. New York, Springer-Verlag.
- JAMES, B.R. (1981) *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- MASRY, E. (1978) Poisson Sampling and Spectral Estimation of Continuous-Time Processes. *IEEE Transactions on Information Theory* 24:173-183.
- MASRY, E. (1980) Discrete-Time Spectral Estimation of Continuous-Time Process. The Orthogonal Series Method. *Annals of Statistics* 8:1100-1109.
- RAO, C.R. (1983) *Linear Statistical Inference and Its Applications*. New York, John Wiley & Sons.
- ROBINSON, P.M. (1977) Estimation of a Time Series Model from Unequally Spaced Data. *Stochastic Process Applications* 6:9-24.
- SEARLE, S.R. (1971) *Linear Models*. New York, John Wiley & Sons.
- SEARLE, S.R. (1982) *Matrix Algebra Useful for Statistics*. New York, John Wiley & Sons.
- STOYANOV, J.M. & VLADEVA, D.I. (1982) Estimation of Unknown Parameters of Continuous Time Stochastic Process by Observations at Random Moments. *Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences* Tome 35 N° 2.
- YING, Z. (1991) Asymptotic Properties of a Maximum Likelihood Estimator with Data from a Gaussian Process. *Journal of Multivariate Analysis* 36:280-296.

## Bibliografia Complementar

ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A. (1972) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. 10<sup>th</sup> ed. New York, John Wiley & Sons.

BASAWA, I.V. & RAO, B.L.S.P (1980) *Statistical Inference for Stochastic Process*. London, Academic Press.

BURINGTON, R.S. (1973) *Handbook of Mathematical Tables and Formulas*. 5<sup>th</sup> ed. New York, McGraw-Hill Book Company.

DOETSCH, G. & HERSCHEL, R. (1971) *Guide to the Applications of the Laplace and Z Transforms*. London, Van Nostrand Reinhold Company.

DOOB, J.L. (1937) Stochastic Process Depending on a Continuous Parameter. *Transactions of the American Mathematical Society* 42:107-140.

GREENWOOD, J.A. & HARTLEY, H.O. (1962) *Guide to Tables in Mathematical Statistics*. Princeton University Press.

KARLIN, S. & TAYLOR, H.M. (1975) *A First Course in Stochastic Processes*. New York, Academic Press.

LEHMAN, E.L. (1983) *Theory of Point Estimation*. New York, John Wiley & Sons.

LIPSTER, R.S. & SHIRYAEYEV, A.N. (1977) *Statistics of Random Process I: General Theory*. New York, Springer-Verlag.

LIPSTER, R.S. & SHIRYAEYEV, A.N. (1978) *Statistics of Random Process II: Applications*. New York, Springer-Verlag.

MARDIA, K.V.; KENT, J.T. and BIBBY, J.M. (1979) *Multivariate Analysis*. London, Academic Press.

PRAKASA RAO, B.L.S. *Asymptotic Theory of Statistical Inference*. New York, John Wiley & Sons.

PRUDNIKOV, A.P.; BRYCHKOV, Yu.A. and MARICHEV, O.I. (1990) *Integrals and Series vol.1: Elementary Functions*. New York, Gordon and Breach Science Publishers

PRUDNIKOV, A.P.; BRYCHKOV, Yu.A. and MARICHEV, O.I. (1990) *Integrals*

*and Series vol.2: Special Functions.* New York, Gordon and Breach Science Publishers

PRUDNIKOV, A.P.; BRYCHKOV, Yu.A. and MARICHEV, O.I. (1990) *Integrals and Series vol.3: More Special Functions.* New York, Gordon and Breach Science Publishers

ROUSSAS, G.G. (1973) *A First Course in Mathematical Statistics.* Massachusetts, Addison-Wesley.