



JAMIL GOMES DE ABREU JÚNIOR

**SOLUÇÃO DA CONJECTURA DE WEISS ESTOCÁSTICA
PARA SEMIGRUPOS ANALÍTICOS**

CAMPINAS
2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA**

Jamil Gomes de Abreu Júnior

Solução da Conjectura de Weiss Estocástica para Semigrupos Analíticos

Orientador(a): Prof. Dr. Pedro José Catuogno

Coorientador: Prof. Dr. Johannes Michael Antonius Maria van Neerven

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para
obtenção do título de Doutor em Matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE
DEFENDIDA PELO ALUNO JAMIL GOMES DE ABREU JÚNIOR,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO JOSÉ CATUOGNO.

Assinatura do Orientador

A black ink signature of Prof. Dr. Pedro José Catuogno, written over a horizontal line.

Assinatura do Coorientador

A blue ink signature of Prof. Dr. Johannes Michael Antonius Maria van Neerven, written over a horizontal line.

**CAMPINAS
2013**

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Ab86s Abreu Júnior, Jamil Gomes de, 1981-
Solução da conjectura de Weiss estocástica para semigrupos analíticos / Jamil
Gomes de Abreu Júnior. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Pedro José Catuogno.
Coorientador: Johannes Michael Antonius Maria van Neerven.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações de evolução estocásticas. 2. Medidas invariantes. 3. Teoria de
interpolação. 4. Banach, Espaços de. 5. Operadores radonificantes. I. Catuogno,
Pedro José, 1959-. II. Neerven, Johannes Michael Antonius Maria van, 1964-. III.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Solution of the stochastic Weiss conjecture for bounded analytic semigroups

Palavras-chave em inglês:

Stochastic evolution equations

Invariant measures

Interpolation theory

Banach spaces

Radonifying operators

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Pedro José Catuogno [Orientador]

Alberto Masayoshi Faria Ohashi

Daniel Marinho Pellegrino

Edson Alberto Coayla Teran

Jorge Tulio Mujica Ascui

Data de defesa: 02-05-2013

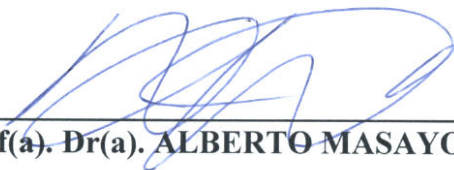
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 02 de maio de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof(a). Dr(a). ALBERTO MASAYOSHI FARIA OHASHI



Prof(a). Dr(a). DANIEL MARINHO PELLEGRINO



Prof(a). Dr(a). EDSON ALBERTO COAYLA TERAN



Prof(a). Dr(a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha filha Sofia.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à minha família, meus pais Jamil e Silma e irmãos Michelle e Murilo, pelo apoio e encorajamento ao longo de todos esses dez anos em que morei em Campinas, desde quando aqui cheguei em fevereiro de 2003 para iniciar minha graduação, até este momento em que concluo o doutorado.

Ainda que provavelmente desnecessário, deixo registrado meus profundos agradecimentos a Rose e Sandra por desempenharem incondicionalmente muitas das minhas funções de pai durante os vários e muitas vezes longos períodos de ausência.

É natural que em dez anos muitas relações de amizade ou coleguismo, profissional e fora deste âmbito, tenham sido construídas. Agradeço em particular aos amigos Franco, Hiro, Julião, Lucas, Luciano, Pablo, Renan Bovió, Roberto José e Vinícius, e também aos amigos e colegas do Imecc, Ângelo, Conrado, Eduardo, Grazziele, Luís Miranda, Luis Roberto e Rafael.

Boa parte do meu tempo, especialmente enquanto aluno de graduação, passou-se na biblioteca do Imecc. Agradeço aos funcionários da Bimecc Osvaldino, Reginaldo, Ruth e Silvânia bem como à diretora Márcia, por contribuírem para um ambiente agradável para os estudos e pelo suporte técnico sempre eficaz. Agradeço também por razões óbvias aos funcionários Tânia, Edinaldo e Lívia da secretaria de pós-graduação, bem como à Ester e Alice, então funcionárias da secretaria de graduação à época em que eu era graduando.

Agradeço aos vários professores do Imecc que direta ou indiretamente contribuíram para meu aperfeiçoamento profissional e pessoal, em particular Jorge Mujica, Luiz San Martin, Paulo Ruffino, Pedro Catuogno e Sérgio Tozoni. Agradeço também a Paulo Ruffino por primeiro me sugerir o doutorado direto do Imecc, e a Pedro Catuogno por me aceitar sob sua orientação e me introduzir nessa fascinante área da matemática moderna que é a análise estocástica em dimensão infinita. Agradeço também a Alberto Ohashi

pelas várias dicas e conversas construtivas que tivemos ao longo desses últimos anos, e cujo entusiasmo pela análise estocástica muito me serve de motivação.

Agradeço a Jan van Neerven pela grande ajuda dispensada desde que o contatei pela primeira vez, em outubro de 2010, e principalmente pela hospitalidade com que me recebeu em Delft, nos meses de abril e maio de 2012. Foi ele quem me sugeriu o problema tratado nesta tese e foi sem dúvida graças a sua perspicácia matemática que progredimos tão rapidamente na solução do problema. Sem sua colaboração este trabalho não seria possível, e é uma honra incluí-lo oficialmente como coorientador desta tese.

Agradeço ainda aos amigos Jonas Teuwen e Leon Luo, ambos doutorandos na TU-Delft, pela ajuda em várias questões de ordem prática e pela agradável companhia durante minha estada em Delft.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro durante os primeiros quatro meses do programa.

Finalmente agradeço à Fapesp (Processo 2007/08220-9) pelo apoio financeiro sem o qual este trabalho não teria sido possível.

Resumo

Nesta tese tratamos o problema de caracterizar a existência de medida invariante para equações de evolução estocásticas lineares com ruído aditivo em termos do resolvente associado ao gerador da equação. Este problema foi proposto recentemente na literatura como uma versão estocástica da célebre conjectura de Weiss em teoria de controle para sistemas lineares, que consiste em relacionar admissibilidade de operadores de controle a certas estimativas envolvendo o resolvente do gerador infinitesimal. No contexto estocástico, e no caso em que o gerador da equação é analítico e admite um cálculo funcional do tipo Dunford-Schwartz num espaço de Banach com a propriedade de Pisier, nosso resultado principal consiste de condições analítico-funcionais necessárias e suficientes para existência de medida invariante para o problema de Cauchy estocástico. Em particular, mostramos que existência de medida invariante é equivalente à convergência em probabilidade de uma certa série Gaussiana cujos termos são os resolventes avaliados nos pontos diádicos positivos da reta real, que consideramos como sendo a condição de Weiss estocástica. Há fortes razões para esperar que, à semelhança do que ocorreu com a conjectura de Weiss clássica, este problema atraia considerável atenção da comunidade acadêmica num futuro próximo.

Abstract

In this thesis we consider the problem of characterizing the existence of invariant measure for linear stochastic evolution equations with additive noise in terms of the resolvent operator associated to the generator of the equation. This problem was recently proposed in the literature as a stochastic version of the celebrated Weiss conjecture in linear systems theory, which relates admissibility of control operators to certain estimates involving the resolvent of the infinitesimal generator. In the stochastic setting and when the generator is analytic and admits a bounded functional calculus in a Banach space with Pisier property, our main result consists of necessary and sufficient functional analytic conditions for the existence of an invariant measure for the stochastic Cauchy problem. In particular, we show that existence of invariant measure is equivalent to convergence in probability of a certain Gaussian series whose terms are the resolvents evaluated at the positive dyadic points of the real line, which we consider as being the stochastic Weiss condition. There are strong reasons to expect that, similarly to what happened to the classical Weiss conjecture, this work will attract considerable attention of the academic community in the near future.

Sumário

0	Introdução	1
0.1	Descrição do Problema e Resultado Principal	1
0.2	Organização da Tese	8
0.3	Notação	10
1	Preliminares	11
1.1	Integração em espaços de Banach	11
1.2	Probabilidade em espaços de Banach	15
1.3	Operadores γ -radonificantes	21
1.4	Algumas Propriedades Geométricas dos Espaços de Banach	27
1.5	Integração Estocástica	34
2	Cálculo-H^∞ e Interpolação	39
2.1	Preliminares em Teoria de Semigrupos	39
2.2	Cálculo- H^∞ limitado	42
2.3	Interpolação	48
3	O Problema de Cauchy Estocástico	57
3.1	O problema de Cauchy estocástico $(PCE)_{(A,B)}$	57
3.2	Existência e unicidade	63
3.3	Medidas invariantes	67
4	Solução da Conjectura de Weiss Estocástica	69

4.1	Resultado Principal	69
4.2	Demonstração do Resultado Principal	71
Referências Bibliográficas		79
Índice Remissivo		89

Capítulo 0

Introdução

Nesta Introdução fornecemos primeiramente uma descrição do problema tratado nesta tese e em seguida um esboço de como a mesma é organizada.

0.1 Descrição do Problema e Resultado Principal

Nesta tese tratamos o problema de caracterizar a existência de medidas invariantes para o problema de Cauchy estocástico

$$(PCE)_{(A,B)} \quad \begin{cases} dU(t) = AU(t) dt + B dW_H(t), & t \in [0, T], \\ U(0) = 0, \end{cases}$$

em termos da família de resolventes

$$\lambda \mapsto \lambda^{\frac{1}{2}} R(\lambda, A)B. \quad (0.1.1)$$

Este problema foi proposto em [40] como uma versão estocástica da célebre *conjectura de Weiss* da teoria de controle para sistemas lineares, onde a assim denominada admissibilidade L^2 do operador de controle B no sistema linear

$$\begin{cases} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) &= x \end{cases} \quad (0.1.2)$$

é caracterizada por condições sobre a família (0.1.1). Essa é de fato a forma que o problema assume para *operadores de controle*, que é uma noção dual à de *operadores de observação*.

Nesse contexto é usual assumir apenas que $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$, onde X_{-1} é o espaço de extrapolação de X em relação a A , cf. [19, 50, 87]. Nesse caso $(S(t))_{t \geq 0}$ se estende a um semigrupo $(S_{-1}(t))_{t \geq 0}$ em X_{-1} com gerador A_{-1} que estende A e por definição B é admissível se existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\left\| \int_0^\infty S_{-1}(t) B u(t) dt \right\|_X^2 \leq M^2 \int_0^\infty \|u(t)\|_U^2 dt. \quad (0.1.3)$$

Isto implica que

$$\sup_{\lambda > 0} \|\lambda^{1/2} R(\lambda, A_{-1}) B\|_{\mathcal{L}(U, X)} \leq \frac{M}{\sqrt{2}}. \quad (0.1.4)$$

De fato, pondo $a_\lambda(t) = \lambda^{1/2} e^{-\lambda t}$ e usando a representação integral do resolvente (2.1.3) obtemos que

$$\lambda^{1/2} R(\lambda, A_{-1}) B x = \int_0^\infty S_{-1}(t) B a_\lambda(t) x dt$$

logo (0.1.4) segue de (0.1.3) com $u = a_\lambda \otimes x$. Essa observação remonta a WEISS [92, 93] que conjecturou a recíproca. Esse problema passou a ser conhecido por *Conjectura de Weiss*, tendo atraído muita atenção desde então. Contra-exemplos para a afirmação geral foram encontrados alguns anos depois (cf. [52, 51, 96, 53]) enquanto resultados positivos em casos específicos foram obtidos em [49, 79].

Em [63], LE MERDY estudou o problema no contexto dos semigrupos analíticos em espaços de Banach usando técnicas do *cálculo- H^∞* . Este cálculo funcional de tipo DUNFORD-SCHWARTZ para operadores setoriais foi introduzido em espaços de Hilbert por MCINTOSH em [68] sob o nome “ H_∞ -calculus”, que o caracterizou por meio de estimativas quadráticas comuns em Análise Harmônica. Esse cálculo funcional foi mais tarde estendido a espaços de Banach em [18], onde os autores novamente caracterizaram a limitação do cálculo em espaços L^p através de estimativas quadráticas. Isso provavelmente motivou LE MERDY [64] a introduzir o conceito de *R-admissibilidade* e a estudar a conjectura de Weiss nesse contexto. Esse conceito está intimamente conectado à noção de *R-limitação*, cf. Seção 1.2 adiante.

A noção de *R-limitação* apareceu inicialmente no trabalho de BOURGAIN [12] e foi posteriormente estudada mais detalhadamente em [8, 16]. A experiência tem mostrado que muitos resultados válidos no contexto dos espaços de Hilbert admitem generalizações a espaços de Banach, contanto que a noção de limitação uniforme seja substituída por *R-limitação* e que se assumam propriedades geométricas apropriadas tais como tipo e/ou co-tipo não triviais, propriedade UMD, propriedade (α) etc. Isso ficou muito bem evidenciado

pelos soluções recentes do problema de regularidade máxima para equações de evolução parabólicas (cf. [90]) e do problema da raiz quadrada de Kato (cf. [47]). Uma importante contribuição a este programa, baseada em noções clássicas da teoria dos espaços de Banach, foi dada por KALTON e WEIS [57] que exploraram a ideia de estudar funções $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ associando-lhes certos operadores integrais; observe primeiramente que para $f \in L^p(\Omega; L^2(\mathbb{R}_+))$ segue da desigualdade de Kahane-Khintchine (cf. também [33, 38]) que

$$\left\| \left(\int_0^\infty |f(\cdot)(t)|^2 dt \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\Omega)} \approx \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^\infty \gamma_n T_f h_n \right\|_{L^p(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (0.1.5)$$

onde o operador limitado $T_f : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^p(\Omega)$ é dado por

$$(T_f h)(\omega) = \int_0^\infty f(\omega)(t) h(t) dt.$$

Operadores para os quais a série Gaussiana no lado direito de (0.1.5) converge são ditos γ -radonificantes e desempenharão um papel crucial nesta tese; dados um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ (separável por hora) com base ortonormal (h_n) e um espaço de Banach X , um operador linear $T : \mathcal{H} \rightarrow X$ é γ -radonificante quando a série Gaussiana $\sum_{n=1}^\infty \gamma_n T h_n$ converge em $L^2(\Omega; X)$. Munido com a norma

$$\|T\|_{\gamma(\mathcal{H}, X)} := \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^\infty \gamma_n T h_n \right\|^2 \right)^{1/2}$$

o espaço $\gamma(\mathcal{H}, X)$ dos operadores γ -radonificantes de $\mathcal{H}$ em X é um espaço de Banach, cf. Seção 1.3 adiante.

Estaremos particularmente interessados no caso em que $\mathcal{H} = L^2(I; H)$ onde $I \subset \mathbb{R}_+$ é um intervalo e H é um outro espaço de Hilbert, grosso modo, o “espaço do ruído”. Nesse caso, há uma classe de funções geradoras no sentido de que uma função $\Phi : I \rightarrow \mathcal{L}(H, X)$ *representa* um operador $T \in \mathcal{L}(L^2(I; H), X)$ se $T^* x^* = \Phi^*(\cdot) x^* \in L^2(I; H)$ para todo $x^* \in X^*$ (cf. Seção 1.1), isto é,

$$\langle T f, x^* \rangle = \int_I \langle \Phi(t) f(t), x^* \rangle dt, \quad f \in L^2(I; H), \quad x^* \in X^*.$$

Se $T \in \gamma(L^2(I; H), X)$ então escrevemos $\Phi \in \gamma(I; H, X)$ e definimos a norma

$$\|\Phi\|_{\gamma(I; H, X)} := \|T\|_{\gamma(L^2(I; H), X)}. \quad (0.1.6)$$

O caso $H = \mathbb{R}$ requer atenção especial e dá origem as normas γ -radonificantes e estimativas quadráticas generalizadas consideradas inicialmente em [57, 33, 38] em conexão com a caracterização do cálculo- H^∞ em espaços de Banach mais gerais, cf. Seção 2.2 adiante ¹. Com estes desenvolvimentos, HAAK e KUNSTMANN [39] introduziram a noção de γ -admissibilidade e estudaram a conjectura de Weiss nesse contexto generalizando os resultados de LE MERDY [64] mencionados.

As ideias de KALTON e WEIS em [57] se mostraram frutíferas ainda em análise estocástica. Usando a linguagem dos operadores γ -radonificantes e normas γ -radonificantes VAN NEERVEN e WEIS [74, 77] reinterpretaram e estenderam trabalhos anteriores em teoria de integração estocástica em espaços de Banach [78, 84, 26]; por exemplo (veja Seção 1.5) uma função $\Phi : (0, T) \rightarrow \mathcal{L}(H, X)$ é estocasticamente integrável em relação a um movimento Browniano cilíndrico W_H se, e somente se o operador integral representado por Φ

$$R_\Phi f = \int_0^T \Phi(t) f(t) dt$$

pertence a $\gamma(L^2(0, T; H), X)$, e nesse caso temos a isometria de Itô

$$\mathbb{E} \left\| \int_0^T \Phi(t) dW_H(t) \right\|^2 = \|R_\Phi\|_{\gamma(L^2(0, T; H), X)}^2 = \|\Phi\|_{\gamma(0, T; H, X)}^2.$$

Esses autores então usaram esta integral para estudar o problema de Cauchy estocástico

$$(PCE)_{(A, B)} \quad \begin{cases} dU(t) = AU(t) dt + B dW_H(t), & t \in [0, T], \\ U(0) = 0, \end{cases}$$

e em consequência das definições este admite solução precisamente quando $S(\cdot)B$ representa um operador em $\gamma(L^2(0, T; H), X)$, e nesse caso essa solução é dada pela convolução estocástica

$$U(t) = \int_0^t S(t-s)B dW_H(s).$$

É bem sabido que o *limite fraco* μ_∞ das distribuições μ_t de $U(t)$ é uma medida invariante para $(PCE)_{(A, B)}$ no sentido de que

$$\int_X P(t)f(x)\mu_\infty(dx) = \int_X f(x)\mu_\infty(dx), \quad f \in C_b(X)$$

¹Cf. também o trabalho recente de HAAK e HAASE [37]

onde $P(t)$ é o semigrupo de transição definido por

$$P(t)f(x) := \mathbb{E}f(S(t)x + U(t)). \quad (0.1.7)$$

Quando uma tal medida existe, é possível estender (P_t) a $L^p(X, \mu_\infty)$, o que permite estudar o comportamento assintótico e ergódico das soluções de $(\text{PCE})_{(A,B)}$, cf. [24, 70, 36, 76, 20]. Como mostrado em [76] uma condição necessária e suficiente para a existência de medida invariante é que $S(\cdot)B \in \gamma(\mathbb{R}_+; H, X)$, ou seja, que o operador integral

$$R_\infty f = \int_0^\infty S(t)Bf(t)dt \quad (0.1.8)$$

pertença a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)$.

É bem sabido que em muitas situações, contudo, o resolvente é um objeto mais acessível do que o próprio semigrupo e é desejável obter uma caracterização semelhante em termos da família de operadores $R(\cdot, A)B$.

Em [40] HAAK e VAN NEERVEN introduziram a noção de γ -radonificação uniforme. Por definição, uma família $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}, X)$ é uniformemente γ -radonificante se para toda sequência $(T_n) \subset \mathcal{T}$ e toda base ortonormal $(h_n) \subset \mathcal{H}$ a série Gaussiana $\sum_{n=1}^\infty \gamma_n T_n h_n$ converge em $L^2(\Omega; X)$. Um número de propriedades comuns às famílias R -limitadas de operadores também valem aqui; por exemplo, o fecho de uma família uniformemente γ -radonificante em relação a topologia forte de operadores também é uniformemente γ -radonificante e consequentemente esta propriedade também é preservada ao se tomar médias integrais, cf. [40, Propositions 2.2, 2.4, 2.5] e a Proposição 1.2.12 adiante. Talvez um pouco mais surpreendente é o fato de que

$$\|\mathcal{T}\|_{\text{unif-}\gamma}^2 := \sup_h \sup_T \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^\infty \gamma_n T_n h_n \right\|_X^2 < \infty,$$

onde o primeiro supremo é tomado sobre todas as bases ortonormais $(h_n) \subset \mathcal{H}$ e o segundo sobre todas as sequências $(T_n) \subset \mathcal{T}$ (cf. [40, Theorem 2.10]), sendo este fato o que na verdade, segundo os autores, justifica a terminologia “uniformemente γ -radonificante”.

Seja $\mathbb{C}_+ := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda > 0\}$ e ponha $e_\lambda(t) := e^{-\lambda t}$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Ainda em [40] os autores definiram a transformada de Laplace de um operador $R \in \gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)$ como a função $\widehat{R} : \mathbb{C}_+ \rightarrow \gamma(H, X)$ definida por

$$\widehat{R}(\lambda)h := R(e_\lambda \otimes h) \quad (0.1.9)$$

e demonstraram γ -radonificação em semiplanos e setores; para todo $b > 0$ a família

$$\mathcal{T}_b := \{\widehat{R}(\lambda) : \operatorname{Re} \lambda \geq b\}$$

é uniformemente γ -radonificante com

$$\|\mathcal{T}_b\|_{\text{unif}-\gamma} \leq \frac{C}{\sqrt{b}} \|R\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)}$$

(cf. [40, Theorem 4.7]) e para todo $0 \leq \theta < \pi/2$ a família

$$\mathcal{T}_\theta := \{\lambda^{1/2} \widehat{R}(\lambda) : \lambda \in \Sigma_\theta\}$$

é uniformemente γ -radonificante com

$$\|\mathcal{T}_\theta\|_{\text{unif}-\gamma} \leq \frac{C'}{\cos \theta} \|R\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)}$$

(cf. [40, Theorem 4.8]), onde C e C' são constantes universais.

Agora, no caso em que $(\text{PCE})_{(A,B)}$ admite uma medida invariante, seja R_∞ o operador em $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)$ representado por $S(\cdot)B$, cf. (0.1.8). Segue de (0.1.9) e da representação integral do resolvente que $\widehat{R}_\infty(\lambda) = R(\lambda, A)B$ quando $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0(S)$ e $\widehat{R}_\infty$ é assim uma extensão analítica de $\lambda \mapsto R(\lambda, A)B$ a $\mathbb{C}_+$. Isso significa que $S(\cdot)B \in \gamma(\mathbb{R}_+; H, X)$ implica que

$$\mathcal{T}_{A,B,\theta} := \{\lambda^{1/2} R(\lambda, A)B : \lambda \in \Sigma_\theta\}$$

é uniformemente γ -radonificante com

$$\|\mathcal{T}_{A,B,\theta}\|_{\text{unif}-\gamma} \leq \frac{C_{A,B}}{\cos \theta}$$

onde $C_{A,B}$ é uma constante que depende apenas de A e B . A questão se a recíproca seria válida foi formulada em [40] como uma versão estocástica da conjectura de Weiss, onde admissibilidade do operador de controle é substituída pela existência de medida invariante.

Conjectura 0.1.1. ([40, Conjecture 5.3]) *Seja X um espaço de Banach com cotipo finito e assuma que o operador $-A$ seja setorial de ângulo $< \pi/2$ e admita um cálculo- H^∞ limitado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *o problema de Cauchy estocástico $(\text{PCE})_{(A,B)}$ admite uma medida invariante em X ;*

2. o operador $(-A)^{-1/2}B$ é γ -radonificante de H em X ;
3. a família $\{\lambda^{1/2}R(\lambda, A)B : \lambda \in \Sigma_\theta\}$ é uniformemente γ -radonificante, para algum/todo $0 \leq \theta < \pi/2$.

Como mostrado em [40] tem-se $(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3)$ em geral e $(3) \Rightarrow (2)$ no caso particular em que A e B são simultaneamente diagonalizáveis, i.e., quando existem uma base ortonormal $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em H e uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tais que

$$Ax_n = -\lambda_n x_n, \quad Bh_n = \beta_n x_n,$$

onde $\lambda_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

No Capítulo 4 provamos o seguinte teorema, que é o resultado principal desta tese.

Teorema 0.1.2. *Seja X um espaço de Banach com a propriedade (α) . Sejam $-A$ um operador setorial em X admitindo um cálculo- H^∞ limitado de ângulo $< \pi/2$ e $B \in \mathcal{L}(H, X_{-1})$ onde X_{-1} é o espaço de extrapolação de X em relação a A . As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $(\text{PCE})_{(A,B)}$ admite uma medida invariante em X ;
2. $(-A)^{-1/2}B \in \gamma(H, X)$;
3. $R(\lambda, A)B \in \gamma(H, X)$ para todo $\lambda > 0$, e a série Gaussiana

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n 2^{n/2} R(2^n, A)B$$

converge em $\gamma(H, X)$, em probabilidade.

O propósito desta tese é descrever em detalhes a demonstração desse resultado. Como se pode observar, o resultado acima é impreciso na forma em que está enunciado, uma vez que B é limitado em X_{-1} e assim a expressão correta para o resolvente no item (3) deveria ser $R(\cdot, A_{-1})B$. Isso é feito preciso na Proposição 4.1.1 adiante.

Os resultados desta tese serão publicados em [1].

0.2 Organização da Tese

Esta tese contém 4 capítulos.

O capítulo 1 é inteiramente dedicado aos pré-requisitos. Na Seção 1.1 relembramos conceitos básicos de integração em espaços de Banach tais como a integral de Bochner, que é uma generalização da integral de Lebesgue para funções $f : \Omega \rightarrow X$ fortemente mensuráveis com valores num espaço vetorial X de dimensão infinita, tipicamente um espaço de Banach, e a provavelmente menos conhecida integral de Pettis. Explicamos também o conceito de representabilidade, já mencionado na seção anterior, e que será crucial em todos os nossos desenvolvimentos. Na Seção 1.2 abordamos as noções de probabilidade em espaços de Banach relevantes para este trabalho; acreditamos que os dois pontos mais relevantes nesta seção são por um lado a relação, resumida na Equação (1.2.6), entre uma variável aleatória Gaussiana, seu operador de covariância e seu núcleo reprodutor, e por outro a noção de R -limitação (Definição 1.2.11) à qual tanto aludimos na seção anterior. Na Seção 1.3 apresentamos a classe dos operadores γ -radonificantes, e a razão pela qual temos interesse nesses operadores já deve ser agora evidente pelo exposto na seção anterior. O leitor pode inferir a relevância desses operadores consultando desde já a Proposição 1.3.6 e para aqueles mais familiarizados com os “operadores absolutamente somantes” da teoria dos espaços de Banach pode ser interessante consultar [72, Section 12] para algumas das conexões entre ambos. Na Seção 1.4 apresentamos algumas noções geométricas básicas da teoria dos Espaços de Banach, e leitores familiarizados com as noções de tipo e cotipo, mas possivelmente não com a propriedade (α) , podem se restringir a ler as Proposições 1.4.2 e 1.4.3 e a Definição 1.4.4, e retornar posteriormente à esta seção à medida que for necessário. A Seção 1.5 contém uma exposição bem concisa de integração estocástica seguindo a linha dos trabalhos de VAN NEERVEN e WEIS [74, 77] mencionados anteriormente. Os pontos importantes aqui são por um lado a compreensão geral da noção de integrabilidade estocástica e sua caracterização por meio de operadores γ -radonificantes contida na Proposição 1.5.3, e por outro o argumento do Exemplo 1.5.4 que será retomado na demonstração do Teorema 3.2.3.

O capítulo 2 ainda é, em sua maior parte, constituído de pré-requisitos em teoria de semigrupos, cálculo- H^∞ e teoria de interpolação. Nesta tese estaremos particularmente interessados na classe dos assim denominados semigrupos analíticos, e a Seção 2.1 é dedi-

cada a fixar a notação, terminologia e fatos mais básicos da teoria. A Seção 2.2 trata do cálculo- H^∞ . Esse é um tópico bem extenso, como o leitor pode perceber consultando por exemplo as referências [59, 42, 91] e nos restringimos apenas ao essencial; estamos aqui realmente interessados apenas, por um lado, nos resultados de KALTON e WEIS sobre a relação entre a limitação do cálculo- H^∞ e as normas γ -radonificantes que mencionamos anteriormente, e por outro, nas conexões com a teoria de interpolação abordadas na Seção 2.3. Acreditamos que uma breve leitura até o parágrafo anterior à Proposição 2.2.4 já é suficiente para prosseguir para a Seção 2.3, devendo o leitor retornar à medida que necessário. Começamos a Seção 2.3 motivando a relação entre o cálculo- H^∞ e teoria de interpolação, e indicamos porque, diferentemente do que acontece em espaços de Hilbert, os métodos de interpolação complexa e real não são apropriados em espaços de Banach. O método de interpolação de Rademacher (cf. Proposição 2.3.2) contorna essas dificuldades e o utilizamos para provar o importante Teorema 2.3.6 que é a ferramenta fundamental para demonstrar as equivalências (1) $\Leftrightarrow$ (2) do nosso resultado principal.

No capítulo 3 definimos rigorosamente o que entendemos por solução e medida invariante em X do problema $(\text{PCE})_{(A,B)}$ no caso em que $B \in \mathcal{L}(H, X_{-1})$ e obtemos caracterizações análogas ao caso clássico em que $B \in \mathcal{L}(H, X)$. Começamos a Seção 3.1 revisando os resultados principais de [74, 76] referentes a existência e unicidade de soluções e a medidas invariantes para $(\text{PCE})_{(A,B)}$ no caso clássico em que $B \in \mathcal{L}(H, X)$ e ao final indicamos porque é conveniente formular a noção de solução em X no caso em que $B \in \mathcal{L}(H, X_{-1})$. Tal formulação é feita na Seção 3.2, onde consideramos a realização $(\text{PCE})_{(A_{-1},B)}$ do problema de Cauchy estocástico em X_{-1} e definimos naturalmente uma solução de $(\text{PCE})_{(A,B)}$ em X como sendo um processo U tomando valores em X tal que $\iota_{-1}U$ é solução de $(\text{PCE})_{(A_{-1},B)}$ no sentido usual. Aqui, $\iota_{-1} : X \hookrightarrow X_{-1}$ é a inclusão canônica. Como esperado, nosso resultado afirma que $(\text{PCE})_{(A,B)}$ admite solução em X se, e somente se existe um operador γ -radonificante $R_T : L^2(0, T; H) \rightarrow X$ tal que $\iota_{-1} \circ R_T$ é representado por $S_{-1}(\cdot)B$, valendo também o análogo referente à existência de medida invariante, cf. Teoremas 3.2.3 e 3.3.2.

Finalmente, o capítulo 4 é dedicado à demonstração do resultado principal. A Seção 4.1 começa com a Proposição 4.1.1, cujo objetivo é tornar preciso o enunciado do Teorema 0.1.2, cf. o penúltimo parágrafo da seção anterior. Com isto claro em mente, enunciamos o Teorema 4.1.2 que é uma versão ligeiramente expandida do Teorema 0.1.2 e que

reformulamos com o propósito de tornar a demonstração mais didática. Na Seção 4.2 provamos alguns resultados técnicos de interesse próprio dentre os quais destacamos o Lema 4.2.1 acerca da limitação de uma certa transformada de Laplace, bem como o Lema 4.2.3 sobre a limitação do operador $f \in H^2(S_\eta) \rightarrow (f(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$. Em seguida consideramos as extensões de Kalton-Weis desses operadores, e os Exemplos 1.4.6 e 1.4.7, assim como o Lema 4.2.2 foram especialmente formulados de modo a explicitar o efeito de tais extensões sobre os operadores representáveis. Provamos primeiramente as equivalências $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$ e em seguida as implicações $(3) \Rightarrow (4)$ e $(4) \Rightarrow (3)$.

0.3 Notação

Nesta tese, seguimos a notação mais ou menos padrão na literatura.

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotam respectivamente, como é usual, os conjuntos dos números naturais, inteiros, reais e complexos, e $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$;
- espaços de Hilbert serão usualmente denotados por H ou $\mathcal{H}$;
- $\mathcal{L}(X, Y)$ denota a álgebra dos operadores limitados de X em Y (espaços de Banach) e X^* denota o espaço dual (topológico) de X ;
- para um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e um espaço de Banach X , $L^p(\Omega, \mu; X)$ (ou $L^p(\Omega; X)$ quando a medida μ estiver subentendida) denota o espaço de Lebesgue-Bochner correspondente;
- “ $\triangle$ ” indica o fim de um Exemplo.

Outras notações e terminologias serão explicitadas tão logo sejam introduzidas pela primeira vez e um índice remissivo ao final da tese contém uma pequena lista de símbolos com a indicação da página onde o mesmo é definido.

Escrevemos $A \lesssim B$ quando existe uma constante C , independente dos parâmetros relevantes, tal que $A \leq CB$. Admitindo que o termo “parâmetros relevantes” é um tanto vago, mas intuitivamente claro, indicamos sempre que necessário, a dependência explícita das constantes em relação aos parâmetros envolvidos. Analogamente, escrevemos $A \asymp B$ quando existe uma constante C tal que $\frac{1}{C}B \leq A \leq CB$.

Capítulo 1

Preliminares

“The beginner ... should not be discouraged if ... he finds that he does not have the prerequisites for reading the prerequisites”.

Paul R. Halmos em [44]

1.1 Integração em espaços de Banach

Nesta seção, apresentamos os conceitos de mensurabilidade apropriados para funções $f : \Omega \rightarrow X$, onde $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é um espaço de medida σ -finito e X é um espaço de Banach. Fornecemos também uma breve descrição da integral de Bochner, que é uma extensão da integral de Lebesgue à dimensão infinita, e da integral de Pettis [81]. Seguimos a exposição padrão na literatura; cf. por exemplo [71, Lecture 1], [29, Chapter II] ou [4, Section 1.1].

Uma função $f : \Omega \rightarrow X$ é dita $\mathcal{F}$ -simples quando é da forma¹

$$f = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{E_n} x_n, \quad (1.1.1)$$

onde $E_n \in \mathcal{F}$ e $x_n \in X$. Quando $\mu(E_n) < \infty$ para todo $n = 1, \dots, N$ então dizemos que f é μ -simples². Na definição abaixo resumimos os conceitos de mensurabilidade mais utilizados na análise vetorial em dimensão infinita.

¹É também comum escrever $f = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{E_n} \otimes x_n$. Em geral, se $f \in L^p(\Omega)$ e $x \in X$, usaremos a notação $f \otimes x$ para denotar o elemento de $L^p(\Omega; X)$ definido por $f \otimes x(\omega) := f(\omega)x$.

²Ou que f é *simples*.

Definição 1.1.1. Uma função $f : \Omega \rightarrow X$ é dita

- (i) $\mathcal{F}$ -mensurável ³ se $f^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ para todo $S \in \mathcal{B}(X)$;
- (ii) fortemente $\mathcal{F}$ -mensurável se existe uma sequência (f_n) de funções $\mathcal{F}$ -simples com $\lim f_n = f$ pontualmente;
- (iii) fortemente μ -mensurável ⁴ se existe uma sequência (f_n) de funções simples com $\lim f_n = f$ quase em todo ponto (μ -q.t.p.).

Uma função $f : \Omega \rightarrow X$ é μ -separável se existe um subespaço fechado e separável X_0 tal que $f(\omega) \in X_0$ para quase todo $\omega \in \Omega$. Duas funções $f, g : \Omega \rightarrow X$ são versões uma da outra se $f = g$ μ -q.t.p. A proposição seguinte resume as conexões entre esses diferentes conceitos, cf. [71, Propositions 1.8, 1.10].

Proposição 1.1.2. Para uma função $f : \Omega \rightarrow X$ as seguintes afirmações são equivalentes:

1. f é fortemente $\mathcal{F}$ -mensurável;
2. f é μ -separável e $\mathcal{F}$ -mensurável;
3. f tem uma versão fortemente mensurável.

Como mostra a experiência, o conceito de mensurabilidade forte (Definição 1.1.1(iii)) é o mais apropriado para a análise vetorial em espaços de Banach. O seguinte teorema de Pettis fornece um critério simples e eficiente. Relembremos que um subespaço $Z \subset X^*$ é *normante* para $S \subset X$ (ou simplesmente *normante* se $S = X$) se

$$\|x\| = \sup_{x^* \in Z \cap B_{X^*}} |\langle x, x^* \rangle|$$

para todo $x \in S$ (B_{X^*} denota a bola unitária em X^*).

Teorema 1.1.3. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito, X um espaço de Banach, e $Z \subset X^*$ um subespaço normante. Para uma função $f : \Omega \rightarrow X$ as seguintes afirmações são equivalentes:

³Ou mensurável.

⁴Ou fortemente mensurável.

1. f é fortemente μ -mensurável;
2. f é μ -separável e $\langle f, x^* \rangle$ é mensurável para todo $x^* \in X^*$;
3. f é μ -separável e $\langle f, x^* \rangle$ é mensurável para todo $x^* \in Z$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração de $(1) \Rightarrow (2)$ (e portanto de $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$) é realmente trivial; se (f_n) é uma sequência de funções μ -simples aproximando f então basta tomar $X_0 = \overline{\text{lin}\{f_n(\omega) : \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}\}}$. Além disso, $\langle f_n, x^* \rangle \rightarrow \langle f, x^* \rangle$ quase em todo ponto. A demonstração de $(3) \Rightarrow (1)$ é mais envolvente e o leitor deve consultar uma das referências acima citadas se desejar. $\square$

Uma consequência importante do teorema de Pettis acima é que duas funções f, g fortemente mensuráveis são iguais q.t.p. (i.e., são versões uma da outra) se, e somente se $\langle f, x^* \rangle = \langle g, x^* \rangle$ q.t.p. para todo $x^* \in X^*$, cf. [71, Corollary 1.14].

Uma função $f : \Omega \rightarrow X$ fortemente mensurável é *Bochner-integrável* se existe uma sequência (f_n) de funções simples com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

É claro então que funções μ -simples são Bochner-integráveis e para f da forma (1.1.1) definimos

$$\int f d\mu := \sum_{n=1}^N \mu(E_n) x_n.$$

Em geral, se f é Bochner integrável então o limite

$$\int f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

existe e independe da aproximação (f_n) . É elementar verificar que uma função $f : \Omega \rightarrow X$ fortemente μ -mensurável é Bochner-integrável se e somente se

$$\int \|f\| d\mu < \infty,$$

e nesse caso $\|\int f d\mu\| \leq \int \|f\| d\mu$. Além disso,

$$\left\langle \int f d\mu, x^* \right\rangle = \int \langle f, x^* \rangle d\mu \tag{1.1.2}$$

para todo $x^* \in X^*$.

Para $1 \leq p \leq \infty$, uma função $f : \Omega \rightarrow X$ é *fracamente- L^p* quando $\langle f, x^* \rangle$ é mensurável e pertence a $L^p(\Omega)$ para cada $x^* \in X^*$. Nesse caso, o operador $x^* \mapsto \langle f, x^* \rangle$ é fechado de X^* em $L^p(\Omega)$ e portanto limitado pelo teorema do gráfico fechado. Assim, se $f : \Omega \rightarrow X$ é fracamente- L^1 então para cada $E \in \mathcal{F}$, a aplicação

$$x^* \mapsto \int_E \langle f, x^* \rangle d\mu$$

define um funcional linear $x_E^{**} \in X^{**}$ (cf. [29, Lemma II.3.1]). Dizemos que f é *Pettis-integrável* quando $x_E := x_E^{**} \in X$ para todo $E \in \mathcal{F}$ e que x_Ω é a *integral de Pettis* de f , que denotamos por $x_\Omega =: \int f d\mu$. Em resumo, uma função $f : \Omega \rightarrow X$ fracamente- L^1 é Pettis-integrável se, e somente se para todo $E \in \mathcal{F}$ existe $x_E \in X$ tal que

$$\langle x_E, x^* \rangle = \int_E \langle f, x^* \rangle d\mu, \quad x^* \in X^*.$$

O leitor pode encontrar em [74, Subsection 1.3] uma breve lista de condições suficientes para integrabilidade segundo Pettis, importantes do ponto de vista da integração estocástica em espaços de Banach, que não serão contudo utilizadas diretamente nesta tese.

Quando X e Y são espaços de Banach, denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares limitados de X em Y . Dizemos que uma função $\Psi : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ é *X -fortemente mensurável*⁵ quando $\Psi(\cdot)x : \Omega \rightarrow Y$ for fortemente μ -mensurável para todo $x \in X$.

Quando H é um espaço de Hilbert (e X é um espaço de Banach), uma função fortemente mensurável $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H, X)$ é *fracamente- L_H^2* quando $\Phi^*(\cdot)x^* \in L^2(\Omega; H)$ para todo $x^* \in X^*$. Nesse caso, o operador $x^* \mapsto \Phi^*(\cdot)x^*$ é fechado de X^* em $L^2(\Omega; H)$ e portanto limitado pelo teorema do gráfico fechado e seu adjunto $T_\Phi : L^2(\Omega; H) \rightarrow X^{**}$ satisfaz

$$\langle x^*, T_\Phi f \rangle = \int_\Omega [\Phi^*(\omega)x^*, f(\omega)]_H d\mu(\omega). \quad (1.1.3)$$

Dizemos que Φ *representa* um operador $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega; H), X)$ quando o operador T_Φ dado pela equação (1.1.3) assume valores em X e $T = T_\Phi$, ou seja, $T^*x^* = \Phi^*(\cdot)x^*$ em $L^2(\Omega; H)$ para todo $x^* \in X^*$. Nesse caso (1.1.3) pode ser reescrita como

$$\langle Tf, x^* \rangle = \int \langle \Phi f, x^* \rangle d\mu, \quad f \in L^2(\Omega; H), \quad x^* \in X^*,$$

⁵Ou que $\Psi : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ é *fortemente mensurável*.

de modo que $Tf = \int \Phi f d\mu$ (integral de Pettis), ou seja, T é um *operador integral de Pettis com núcleo Φ* .

No caso em que $H = \mathbb{R}$, e tomando por exemplo o espaço de medida $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$ essas considerações se resumem em dizer que uma função $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ representa o operador $T_\phi : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow X$ se ϕ é fracamente- L^2 , isto é, $\langle \phi, x^* \rangle \in L^2(\mathbb{R}_+)$ para todo $x^* \in X^*$ e

$$\langle T_\phi f, x^* \rangle = \int_0^\infty \langle \phi(t), x^* \rangle f(t) dt, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad x^* \in X^*.$$

1.2 Probabilidade em espaços de Banach

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e X um espaço de Banach. Uma *variável aleatória em X* é uma função $\chi : \Omega \rightarrow X$ fortemente $\mathbb{P}$ -mensurável. Pela Proposição 1.1.2 existe uma versão $\tilde{\chi} : \Omega \rightarrow X$ que é $\mathcal{F}$ -mensurável e então a medida de probabilidade μ_χ definida por

$$\mu_\chi(S) := \mathbb{P}(\tilde{\chi} \in S), \quad S \in \mathcal{B}(X)$$

está bem-definida (não depende da versão $\tilde{\chi}$ escolhida) e é denominada a *distribuição* da variável aleatória χ . Um conjunto de variáveis aleatórias é *identicamente distribuído* (ou as variáveis são *identicamente distribuídas*) quando todas tem a mesma distribuição. Uma variável aleatória χ é *simétrica* se χ e $-\chi$ são identicamente distribuídas.

Exemplo 1.2.1. Uma *variável de Rademacher* é uma variável aleatória $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbb{P}(r = 1) = \mathbb{P}(r = -1) = \frac{1}{2}.$$

Uma *sequência de Rademacher* é uma sequência (r_n) de variáveis de Rademacher independentes. Uma realização concreta é dada pelas funções de Rademacher definidas no intervalo $[0, 1]$ por $r_n(t) = \text{sin} \text{sen}(2^n \pi t)$. Exemplos elementares de variáveis aleatórias simétricas, num espaço de Banach X , são as da forma $\sum_{n=1}^N r_n x_n$, onde $(x_n) \subset X$. $\triangle$

O seguinte célebre resultado de ITÔ e NISIO assegura a equivalência entre vários modos de convergência de variáveis aleatórias em espaços de Banach.

Proposição 1.2.2. ([48]) *Seja $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias simétricas e independentes assumindo valores num espaço de Banach X . Para as somas parciais*

$S_N := \sum_{n=1}^N \chi_n$ e para uma variável aleatória S com valores em X , as seguintes afirmações são equivalentes:

1. para todo $x^* \in X^*$ temos $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N, x^* \rangle = \langle S, x^* \rangle$ quase sempre;
2. para todo $x^* \in X^*$ temos $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N, x^* \rangle = \langle S, x^* \rangle$ em probabilidade;
3. $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$ quase sempre;
4. $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$ em probabilidade;

Em qualquer caso, se $\mathbb{E}\|S\|^p < \infty$ para algum $1 \leq p < \infty$ então

$$\mathbb{E} \sup_{N \in \mathbb{N}} \|S_N\|^p \leq 2 \sup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \|S_N\|^p \leq 2 \mathbb{E} \|S\|^p$$

e $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \|S - S_N\|^p = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Veja [71, Theorem 2.17]. □

Pelo teorema de mensurabilidade de Pettis (cf. Teorema 1.1.3) toda variável aleatória assume valores, quase certamente, num subespaço X_0 separável, e além disso $\langle \chi, x^* \rangle$ é mensurável para todo $x^* \in X^*$.

Definição 1.2.3. Uma variável aleatória $\chi : \Omega \rightarrow X$ é Gaussiana se $\langle \chi, x^* \rangle$ é uma variável Gaussiana real para todo $x^* \in X^*$.

Nesse caso, o teorema de Fernique [32] afirma que existe $\beta > 0$ tal que $\mathbb{E} e^{\beta \|\chi\|^2} < \infty$ e em particular $\mathbb{E} \|\chi\|^2 < \infty$, cf. também [43, Theorem 3.11].

Aplicaremos o teorema de Itô-Nisio acima às séries Gaussianas da forma $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x_n$, como a que aparece no item (3) do Teorema 0.1.2, cf. também o Exemplo 1.2.7 adiante. O teorema de Itô-Nisio afirma então que convergência quase certa equivale a convergência em probabilidade e como nesse caso $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x_n$ define uma variável Gaussiana teremos necessariamente $\mathbb{E} \|\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x_n\|^2 < \infty$ pelo teorema de Fernique e portanto essa série convergirá também em $L^2(\Omega; X)$.

Proposição 1.2.4 (Princípio da contração). *Seja $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Rademacher. Então, para quaisquer sequências finitas $(a_n)_{n=1}^N \subset \mathbb{R}$ com $|a_n| \leq 1$ e $(x_n)_{n=1}^N$ temos*

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N a_n r_n x_n \right\|^2 \leq \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|^2. \quad (1.2.1)$$

DEMONSTRAÇÃO. Veja [28, 12.2] ou [59, Proposition 2.5]. $\square$

O princípio da contração acima admite certas generalizações. Em primeiro lugar a estimativa (1.2.1) vale com a potência 2 substituída por qualquer $1 \leq p < \infty$. Isso é consequência das *desigualdades de Kahane-Khintchine*; dados $1 \leq p, q < \infty$ existe uma constante $K_{p,q}$ tal que

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|^p \right)^{1/p} \leq K_{p,q} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|^q \right)^{1/q} \quad (1.2.2)$$

para quaisquer seqüências finitas $(x_n)_{1 \leq n \leq N} \subset X$. Um argumento com base no teorema central do limite permite estender (1.2.2) a somas Gaussianas da forma $\sum_{n=1}^N \gamma_n x_n$, cf. [71, Lecture 3] e como consequência da assim chamada *expansão de Karhunen-Loève* essa estimativa vale de fato para variáveis aleatórias Gaussianas quaisquer, cf. [71, Theorem 4.12]; em resumo, as normas $\|\chi\|_{L^p(\Omega; X)}$ são equivalentes para variáveis Gaussianas χ . Em segundo lugar, o princípio da contração vale para qualquer seqüência $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variáveis simétricas e independentes, não somente para as da forma $\chi_n = r_n x_n$, cf. [71, Theorem 3.1] para essa formulação.

Seja X um espaço de Banach real. Um operador $Q \in \mathcal{L}(X^*, X)$ é *positivo* se $\langle Qx^*, x^* \rangle \geq 0$ para todo $x^* \in X^*$, e *simétrico* se $\langle Qx^*, y^* \rangle = \langle Qy^*, x^* \rangle$ para quaisquer $x^*, y^* \in X^*$. Nesse caso, a fórmula

$$[Qx^*, Qy^*]_{\mathcal{H}_Q} := \langle Qx^*, y^* \rangle \quad (1.2.3)$$

define um produto interno na imagem $\mathcal{R}(Q)$ de Q .

Definição 1.2.5. O núcleo reprodutor associado a Q é o espaço de Hilbert real $\mathcal{H}_Q$ obtido completando-se $\mathcal{R}(Q)$ em relação ao produto interno (1.2.3).

Segue de (1.2.3) que $\|Qx^*\|_{\mathcal{H}_Q}^2 \leq \|Q\|_{\mathcal{L}(X^*, X)} \|x\|^2$, o que mostra que Q é contínuo como operador de X^* em $\mathcal{H}_Q$ de norma $\leq \|Q\|_{\mathcal{L}(X^*, X)}^{1/2}$. Podemos então deduzir (por Hahn-Banach) que $\|Qx^*\| \leq \|Q\|_{\mathcal{L}(X^*, \mathcal{H}_Q)} \|Qx^*\|_{\mathcal{H}_Q}$, o que mostra que a inclusão $\iota_Q : \mathcal{R}(Q) \hookrightarrow X$ é contínua, admitindo portanto uma extensão contínua $\mathcal{H}_Q \hookrightarrow X$, que ainda denotamos por ι_Q , de norma $\leq \|Q\|_{\mathcal{L}(X^*, \mathcal{H}_Q)}$. Além disso, $\iota_Q : \mathcal{H}_Q \hookrightarrow X$ é injetora e $Q = \iota_Q \circ \iota_Q^*$, cf. por exemplo [70].

Exemplo 1.2.6. Se $B \in \mathcal{L}(H, X)$ então $Q := BB^* \in \mathcal{L}(X^*, X)$ é positivo e simétrico. Como subconjuntos de X temos $\mathcal{H}_Q = \mathcal{R}(B)$, com produto interno

$$[Bg, Bh]_{\mathcal{H}_Q} = [Pg, Ph]_H, \quad g, h \in H$$

onde $P : H \rightarrow \mathcal{N}(B)^\perp$ é projeção ortogonal. Além disso, $B : \mathcal{N}(B)^\perp \rightarrow \mathcal{H}_Q$ é uma isometria, cf. [9, Remark 3.3.8] ou [88, Exercise III.1.6]. $\triangle$

Nesta tese, estaremos particularmente interessados no caso em que Q é o *operador de covariância* de uma variável aleatória Gaussiana. Assim, dada uma variável Gaussiana $\chi : \Omega \rightarrow X$, o operador de covariância $Q : X^* \rightarrow X$ definido por

$$Qx^* = \mathbb{E}\langle \chi, x^* \rangle \chi$$

está bem definido e satisfaz

$$\mathbb{E}\langle \chi, x^* \rangle \langle \chi, y^* \rangle = \langle Qx^*, y^* \rangle. \quad (1.2.4)$$

Em termos do operador de covariância a transformada de Fourier de χ é dada por

$$\mathbb{E}e^{-i\langle \chi, x^* \rangle} = e^{-\frac{1}{2}\langle Qx^*, x^* \rangle}. \quad (1.2.5)$$

Reciprocamente, se a transformada de Fourier de uma variável aleatória χ satisfaz (1.2.5) para algum operador simétrico e positivo Q então χ é Gaussiana com operador de covariância Q , cf. [71, Proposition 4.6], e por (1.2.4) obtemos

$$\mathbb{E}\langle \chi, x^* \rangle^2 = \langle Qx^*, x^* \rangle = \|\iota_Q^* x^*\|_{\mathcal{H}_Q}^2. \quad (1.2.6)$$

Uma consequência simples porém muito importante é que a lei Gaussiana é preservada por operadores limitados: se X e Y são espaços de Banach, $T : X \rightarrow Y$ é limitado e μ é uma medida Gaussiana em X com covariância Q , então a medida $T(\mu) := \mu \circ T^{-1}$ em Y é Gaussiana com covariância TQT^* , cf. por exemplo [71, Proposition 4.9].

Exemplo 1.2.7. Uma *sequência Gaussiana* é uma sequência (γ_n) de variáveis $N(0, 1)$ independentes. Exemplos elementares de variáveis aleatórias Gaussinas num espaço de Banach X são as da forma $\sum_{n=1}^N \gamma_n x_n$, onde $(x_n) \subset X$. É elementar verificar que o operador de covariância nesse caso é dado por

$$Qx^* = \sum_{n=1}^N \langle x_n, x^* \rangle x_n. \quad (1.2.7)$$

Agora, seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável com base ortonormal (h_n) e considere um operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, X)$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ a variável aleatória $\sum_{n=1}^N \gamma_n Th_n$ é Gaussiana e seu operador de covariância $Q_{T,N}$ satisfaz, por (1.2.7) e pela identidade de Parseval,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle Q_{T,N} x^*, y^* \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle Th_n, x^* \rangle \langle Th_n, y^* \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [h_n, T^* x^*] [h_n, T^* y^*] \\ &= \langle TT^* x^*, y^* \rangle, \quad x^*, y^* \in X^*. \end{aligned}$$

Assim, se $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n Th_n$ converge em $L^2(\Omega; X)$ então a variável resultante é Gaussiana com operador de covariância TT^* , cf. [71, Proposition 4.11]. Operadores com essa propriedade são ditos γ -radonificantes e serão tratados na próxima seção, cf. Definição 1.3.4. $\triangle$

O seguinte resultado mostra que, de modo a verificar se uma variável χ com valores em X é Gaussiana, é suficiente considerar as variáveis $\langle \chi, x^* \rangle$ para elementos x^* num subespaço de X^* que seja denso na topologia fraca-estrela.

Proposição 1.2.8. ([13, Corollary 1.3]) *Seja μ uma medida Boreleana de probabilidade num espaço de Banach separável X , e seja $Z \subset X^*$ num subespaço denso na topologia fraca-estrela. Se $\langle \mu, x^* \rangle$ é Gaussiana para todo $x^* \in Z$ então μ é Gaussiana.*

Esse resultado será utilizado nas demonstrações dos Teoremas 3.2.3 e 3.3.2. O seguinte exemplo ilustra de que forma o faremos.

Exemplo 1.2.9. Seja χ uma variável aleatória num espaço de Banach X que está imerso num outro espaço de Banach X_{-1} por meio de uma inclusão contínua $\iota_{-1} : X \hookrightarrow X_{-1}$. Passando a um subespaço fechado separável contendo a imagem de χ podemos assumir que X é separável. Como

$$Z := \{\iota_{-1}^* x_{-1}^* : x_{-1}^* \in X_{-1}^*\} = \mathcal{R}(\iota_{-1}^*)$$

é denso em X^* na topologia fraca-estrela⁶, segue que se $\langle \chi, \iota_{-1}^* x_{-1}^* \rangle$ é Gaussiana para todo $x_{-1}^* \in X_{-1}^*$ então χ é Gaussiana. Esse é o caso, por exemplo, se sabemos *a priori* que $\iota_{-1} \circ \chi$ é uma variável Gaussiana em X_{-1} . $\triangle$

⁶Se X e Y são espaços de Banach e T é um operador de X em Y , possivelmente não-limitado mas densamente definido e fechado, então $\overline{\mathcal{R}(T^*)}^{\sigma(X^*, X)} = \mathcal{N}(T)^\perp$, cf. [14, Chapter 2, Remark 17].

Se (r_n) é uma sequência de Rademacher e (γ_n) é uma sequência Gaussiana independente de (r_n) então as sequências (γ_n) e $(r_n|\gamma_n|)$ são identicamente distribuídas (cf. [71, Lemma 3.5]). Resulta disto que somas de Rademacher sempre podem ser estimadas por somas Gaussianas. Destacamos esse fato na proposição seguinte, e fornecemos a demonstração com o propósito de ilustrar o assim chamado *argumento de randomização*.

Proposição 1.2.10. *Seja X um espaço de Banach. Para quaisquer $x_1, \dots, x_N \in X$,*

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|_X^2 \leq \frac{\pi}{2} \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n x_n \right\|_X^2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Considerando que (r_n) e (γ_n) estejam definidas em espaços de probabilidade $(\Omega, \mathbb{P})$ e $(\Omega', \mathbb{P}')$ distintos, podemos assumir que elas são independentes no espaço de probabilidade $(\Omega \times \Omega', \mathbb{P} \times \mathbb{P}')$. Como $\mathbb{E}|\gamma_n| = \sqrt{2/\pi}$ temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|^2 &= \frac{\pi}{2} \mathbb{E} \left\| \mathbb{E}' \sum_{n=1}^N r_n |\gamma_n| x_n \right\|^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{n=1}^N r_n |\gamma_n| x_n \right\|^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \mathbb{E}' \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n x_n \right\|^2. \end{aligned}$$

□

Definição 1.2.11. *Uma família de operadores $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ é R -limitada se existe uma constante $C \geq 0$ tal que para quaisquer sequências finitas $(x_n)_{1 \leq n \leq N}$ em X e $(T_n)_{1 \leq n \leq N}$ em $\mathcal{T}$ temos*

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n T_n x_n \right\|_Y^2 \leq C^2 \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|_X^2.$$

Uma família de operadores $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ é γ -limitada se existe uma constante $C \geq 0$ tal que para quaisquer sequências finitas $(x_n)_{1 \leq n \leq N}$ em X e $(T_n)_{1 \leq n \leq N}$ em $\mathcal{T}$ temos

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n T_n x_n \right\|_Y^2 \leq C^2 \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n x_n \right\|_X^2.$$

Em qualquer caso, a menor constante para a qual vale a respectiva estimativa é denominada o R -limitante ou o γ -limitante de $\mathcal{T}$, e denotada por $R(\mathcal{T})$ ou $\gamma(\mathcal{T})$ conforme o caso.

Por *randomização* (como na demonstração da Proposição 1.2.10), pode-se verificar que toda família R -limitada é γ -limitada, e tomando $N = 1$ vê-se que toda família γ -limitada é uniformemente limitada. É fácil ver que todas essas noções são equivalentes em espaços de Hilbert (veja também a Proposição 1.4.2) mas se X é um espaço de Banach não isomórfico a um espaço de Hilbert então existem famílias limitadas em $\mathcal{L}(X)$ que não são R -limitadas, cf. [5, Proposition 1.13].

Sejam X e Y espaços de Banach. A *topologia forte* em $\mathcal{L}(X, Y)$ é a menor topologia para a qual as aplicações $T \mapsto Tx$ de $\mathcal{L}(X, Y)$ em Y são contínuas para todo $x \in X$. É fácil ver que $T_n \rightarrow T$ na topologia forte se, e somente se $T_n x \rightarrow Tx$ em Y para todo $x \in X$ (cf. [83, Section VI.1]). São de grande relevância os fatos de que, em relação a topologia forte, tanto o *fecho* quanto o *fecho convexo* e o *fecho absolutamente convexo* de uma família R -limitada são também R -limitados (cf. [59, Theorem 2.13]). Disto pode-se deduzir que R -limitação é preservada ao se tomar médias integrais (cf. [59, Corollary 2.14]). Tudo isso continua válido para famílias γ -limitadas e é essa a formulação que utilizaremos nesta tese, cf. [71, Lecture 9].

Proposição 1.2.12. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito, sejam X e Y espaços de Banach e seja $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ uma família γ -limitada. Suponha que a aplicação fortemente mensurável $\Psi : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ assuma valores em $\mathcal{T}$ quase certamente. Para cada $f \in L^1(\Omega)$ defina*

$$T_\Psi^f x := \int_{\Omega} f(\omega) \Psi(\omega) x \, d\mu(\omega), \quad x \in X.$$

Então $\mathcal{T}_\Psi := \{T_\Psi^f : \|f\|_{L^1(\Omega)} \leq 1\}$ é γ -limitada com $\gamma(\mathcal{T}_\Psi) \leq \gamma(\mathcal{T})$.

Para aplicações desse fato veja [90, 59, 25].

1.3 Operadores γ -radonificantes

Nesta seção introduzimos, seguindo a abordagem de [71], o espaço dos operadores γ -radonificantes. Veja, contudo, os comentários ao final da seção.

Nesta seção, e a bem da verdade, em todo o restante desta tese, (r_n) denotará uma sequência de Rademacher e (γ_n) denotará uma sequência Gaussiana.

Definição 1.3.1. O espaço $\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)$ dos operadores γ -somantes consiste de todos os operadores lineares $T : \mathcal{H} \rightarrow X$ tais que

$$\|T\|_{\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)}^2 := \sup \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^k \gamma_j T h_j \right\|^2 < \infty, \quad (1.3.1)$$

onde o supremo é tomado sobre todos os conjuntos ortonormais finitos $\{h_1, \dots, h_k\}$ em $\mathcal{H}$.

Considerando conjuntos unitários $\{h\}$ segue de imediato que operadores γ -somantes são limitados, com $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, X)} \leq \|T\|_{\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)}$, e disto não é difícil verificar que munido da norma em (1.3.1), $\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)$ é um espaço de Banach (cf. [71, Proposition 5.2]).

Para cada $h \in \mathcal{H}$ e $x \in X$, seja $h \otimes x$ o operador em $\mathcal{L}(\mathcal{H}, X)$ definido por

$$(h \otimes x)h' := [h, h']x, \quad h' \in \mathcal{H}. \quad (1.3.2)$$

Um operador é dito *de posto finito* se for uma combinação linear de operadores (de posto um) do tipo acima. É fácil verificar que essas definições coincidem com a noção usual de operador de posto finito como sendo aquele cuja imagem é um subespaço de dimensão finita.

Denotamos o espaço dos operadores de posto finito de $\mathcal{H}$ em X por $\mathcal{H} \otimes X$.

Proposição 1.3.2 ([71, Lemma 5.7]). Se $T \in \mathcal{H} \otimes X$ é da forma $\sum_{n=1}^N h_n \otimes x_n$, onde $h_1, \dots, h_N$ são ortonormais, então $T \in \gamma^\infty(\mathcal{H}, X)$ e

$$\|T\|_{\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)}^2 = \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n x_n \right\|^2. \quad (1.3.3)$$

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável com base ortonormal $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dado $T \in \gamma^\infty(\mathcal{H}, X)$ defina para cada $N \in \mathbb{N}$ os operadores $T_N := \sum_{n=1}^N h_n \otimes T h_n$. Por (1.3.3)

$$\sup_{N \geq 1} \|T_N\|_{\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)}^2 = \sup_{N \geq 1} \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n T h_n \right\|^2 \leq \|T\|_{\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)}^2$$

e além disso

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle T_N h, x^* \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N [h_n, h] \langle T h_n, x^* \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [h_n, h] [h_n, T^* x^*] \\ &= \langle T h, x^* \rangle \end{aligned}$$

para quaisquer $h \in \mathcal{H}$ e $x^* \in X^*$. O seguinte *lema de Fatou* fornece um resultado recíproco, cf. [75, Theorem 4.1] ou [72, Proposition 3.18].

Proposição 1.3.3 (Lema de Fatou para espaços γ). *Sejam $(T_n)_{n \geq 1}$ uma sequência limitada em $\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)$ e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, X)$ um operador tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n h, x^* \rangle = \langle Th, x^* \rangle$$

para quaisquer $h \in \mathcal{H}$ e $x^ \in X^*$. Então $T \in \gamma^\infty(\mathcal{H}, X)$ e*

$$\|T\|_{\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)}.$$

Definição 1.3.4. *O espaço $\gamma(\mathcal{H}, X)$ dos operadores γ -radonificantes de $\mathcal{H}$ em X é o fecho de $\mathcal{H} \otimes X$ em $\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)$.*

O exemplo clássico de LINDE e PIETSCH [65] de um operador γ -somante que não é γ -radonificante é o operador $T : \ell^2 \rightarrow c_0$ definido por

$$T((\alpha_n)_{n \geq 1}) := \left(\frac{\alpha_n}{\sqrt{\log(n+1)}} \right)_{n \geq 1}.$$

A verificação disto depende de certas estimativas para séries Gaussianas e pode ser encontrada também em [72, Example 4.4]. Por outro lado, o seguinte teorema devido essencialmente a HOFFMANN-JORGENSEN [46] e KWAPIEŃ [62] caracterizam os espaços de Banach X para os quais $\gamma^\infty(\mathcal{H}, X) = \gamma(\mathcal{H}, X)$. Veja também [72, Theorem 4.3].

Teorema 1.3.5. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de dimensão infinita. Para um espaço de Banach X , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\gamma^\infty(\mathcal{H}, X) = \gamma(\mathcal{H}, X)$;
2. X não contém um subespaço fechado isomórfico a c_0 .

O espaço $\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)$ tem a seguinte *propriedade de ideal*, cf. [72, Theorem 6.2]: se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ são espaços de Hilbert, X e X' são espaços de Banach, $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, $T \in \gamma^\infty(\mathcal{H}, X)$ e $U \in \mathcal{L}(X, X')$, então $UTS \in \gamma^\infty(\mathcal{H}', X')$ e

$$\|UTS\|_{\gamma^\infty(\mathcal{H}', X')} \leq \|U\|_{\mathcal{L}(X, X')} \|T\|_{\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)} \|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})}.$$

Além disso, se $T \in \gamma(\mathcal{H}, X)$ então $UTS \in \gamma(\mathcal{H}', X')$ e

$$\|UTS\|_{\gamma(\mathcal{H}', X')} \leq \|U\|_{\mathcal{L}(X, X')} \|T\|_{\gamma(\mathcal{H}, X)} \|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})}.$$

Enunciamos a seguir um resultado já bem conhecido que indica a relevância da classe dos operadores radonificantes na análise Gaussiana em dimensão infinita.

Proposição 1.3.6. *Para um operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, X)$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $T \in \gamma(\mathcal{H}, X)$;
2. $\mathcal{N}(T)^\perp$ é separável e a série $\sum_{n=1}^\infty \gamma_n T h_n$ converge quase sempre para alguma (toda) base ortonormal (h_n) de $\mathcal{N}(T)^\perp$;
3. TT^* é um operador de covariância Gaussiana.

Nesta situação, a série em (2) converge em L^p e em probabilidade e TT^* é o operador de covariância da variável Gaussiana $\sum_{n=1}^\infty \gamma_n T h_n$ e além disso

$$\|T\|_{\gamma(\mathcal{H}, X)}^2 = \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^\infty \gamma_n T h_n \right\|^2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Veja [71, Theorems 5.15, 5.16], [72, Theorem 7.4]; cf. também [77, Proposition 3.2]. $\square$

É comum, na teoria de semigrupos e áreas correlatas, considerar extensões tensoriais de operadores positivos $S : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega')$, onde Ω e Ω' são espaços de medida σ -finitos. Dado um espaço de Banach X , a extensão tensorial dada por

$$\tilde{S}(f \otimes x) := Sf \otimes x$$

se estende a um operador limitado $\tilde{S} : L^p(\Omega; X) \rightarrow L^p(\Omega'; X)$ de norma $\|\tilde{S}\| = \|S\|$, cf. por exemplo [59, Lemma 10.14]. Um exemplo relevante para a análise estocástica é o operador *esperança condicional*, cf. [71, Lecture 11].

Agora, se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ espaços de Hilbert, $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ é um operador limitado e X é um espaço de Banach então é fácil verificar que analogamente

$$\tilde{S} : h \otimes x \mapsto Sh \otimes x, \quad h \in \mathcal{H}, \quad x \in X, \quad (1.3.4)$$

se estende unicamente a um operador limitado $\tilde{S} : \gamma(\mathcal{H}, X) \rightarrow \gamma(\mathcal{H}', X)$ com norma $\|\tilde{S}\| = \|S\|$. Esse procedimento de extensão tensorial foi introduzido por KALTON e WEIS (cf. [57, Proposition 4.4] ou [72, Corollary 6.3]) e será útil na demonstração do Teorema 4.1.2. Observemos que se $R = h \otimes x$ então para todo $h' \in \mathcal{H}'$

$$\begin{aligned}\tilde{S}(R)h' &= [Sh, h']x \\ &= [h, S^*h']x \\ &= RS^*h',\end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{S}(R) = R \circ S^*$. Resumimos essa discussão no seguinte teorema para posterior referência.

Teorema 1.3.7 (Teorema de extensão de Kalton-Weis). *Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ espaços de Hilbert. Dado um espaço de Banach X , todo operador $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ induz um operador $\tilde{S} \in \mathcal{L}(\gamma(\mathcal{H}, X), \gamma(\mathcal{H}', X))$ pela fórmula*

$$\tilde{S} : R \mapsto R \circ S^*, \quad R \in \gamma(\mathcal{H}, X). \quad (1.3.5)$$

e além disso $\|\tilde{S}\| = \|S\|$.

Suponha que $\Phi : \Omega \rightarrow \gamma(H, X)$ seja fortemente mensurável e uniformemente limitada. Então

$$R_\Phi f := \int_{\Omega} \Phi(\omega) f(\omega) d\mu(\omega)$$

existe como integral de Bochner em X e o operador $R_\Phi : L^2(\Omega; H) \rightarrow X$ assim obtido é limitado. É imediato ver que se

$$\Phi = \mathbf{1}_E \otimes (h \otimes x) \quad (1.3.6)$$

então

$$R_\Phi = (1_E \otimes h) \otimes x \quad (1.3.7)$$

e pode-se verificar que o subespaço gerado por esses operadores é denso em $\gamma(L^2(\Omega; H), X)$. Agora, se $M : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ também é fortemente mensurável e uniformemente limitada então $M\Phi : \Omega \rightarrow \gamma(H, Y)$ também o é, e se Φ é da forma (1.3.6) então $M\Phi = \mathbf{1}_E \otimes (h \otimes Mx)$ e portanto $R_{M\Phi} = (1_E \otimes h) \otimes Mx$. Mais pode ser dito no caso em que $M(\Omega) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ é γ -limitada, como mostra o seguinte resultado. Em poucas palavras ele afirma que funções com imagem γ -limitada agem como “multiplicadores de Fourier” em espaços de operadores γ -radonificantes.

Teorema 1.3.8 (Teorema dos γ -multiplicadores). *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito, e seja $M : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ uma aplicação fortemente mensurável cuja imagem $\mathcal{M} = M(\Omega)$ é γ -limitada. Então, para toda função simples de posto finito $\Phi : \Omega \rightarrow \gamma(H, X)$, o operador $R_{M\Phi}$ pertence a $\gamma^\infty(L^2(\Omega; H), Y)$ e*

$$\|R_{M\Phi}\|_{\gamma^\infty(L^2(\Omega; H), Y)} \leq \gamma(\mathcal{M}) \|R_\Phi\|_{\gamma(L^2(\Omega; H), X)}. \quad (1.3.8)$$

Consequentemente, a aplicação $\widetilde{M} : R_\Phi \mapsto R_{M\Phi}$ se estende unicamente a um operador limitado

$$\widetilde{M} : \gamma(L^2(\Omega; H), X) \rightarrow \gamma^\infty(L^2(\Omega; H), Y)$$

de norma $\|\widetilde{M}\| \leq \gamma(\mathcal{M})$.

DEMONSTRAÇÃO. Veja [57, Proposition 4.11], ou [72, Theorem 5.2] para a formulação dada aqui. Cf. também [71, Section 9.3]. $\square$

É um problema em aberto, mesmo no caso em que $H = \mathbb{R}$, determinar se $\widetilde{M}$ assume valores em $\gamma(L^2(\Omega; H), Y)$, o que é certamente trivial quando Y não contém c_0 , pelo Teorema 1.3.5. Em outras palavras, para um espaço de Banach X qualquer, se $\phi : (0, 1) \rightarrow X$ representa um operador em $\gamma(L^2(0, 1), X)$ e $M : (0, 1) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é fortemente mensurável, então $M\phi$ representa um operador em $\gamma^\infty(L^2(0, 1), X)$ pelo Teorema 1.3.8. É possível provar que $M\phi$ na verdade sempre representa um operador em $\gamma(L^2(0, 1), X)$, ou existem exemplos onde $M\phi$ é γ -somante mas não γ -radonificante?

No caso em que $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H, X)$ representa um operador $R_\Phi \in \gamma(L^2(\Omega; H), X)$ denotaremos a norma $\|\Phi\|_{\gamma(\Omega; H, X)}$ em (0.1.6) por

$$\|\omega \mapsto \Phi(\omega)\|_{\gamma(L^2(\Omega; H), X)} := \|R_\Phi\|_{\gamma(L^2(\Omega; H), X)}. \quad (1.3.9)$$

Nesta tese estaremos particularmente interessados em espaços de medida (I, dt) ou $(I, \frac{dt}{t})$ onde $I \subset \mathbb{R}_+$ é um intervalo finito ou infinito. Retomando as considerações no último parágrafo da Seção 1.1 mas agora na situação em que $\phi : I \rightarrow X$ representa um operador $T_\phi \in \gamma(L^2(I), X)$ a norma (1.3.9) assume a forma

$$\|t \mapsto \phi(t)\|_{\gamma(L^2(I), X)} := \|T_\phi\|_{\gamma(L^2(I), X)} \quad (1.3.10)$$

e coincide, no caso em que $X = L^p(\Omega)$, com (0.1.5). Além disso, para espaços de Banach Y não contendo uma cópia de c_0 , e com a notação em (1.3.9), a estimativa (1.3.8) no

teorema dos γ -multiplicadores assume a forma

$$\|t \mapsto M(t)\Phi(t)\|_{\gamma(L^2(I;H),Y)} \leq \gamma(\mathcal{M})\|t \mapsto \Phi(t)\|_{\gamma(L^2(I;H),X)}. \quad (1.3.11)$$

Terminamos esta seção comentando sobre uma outra forma de abordar o espaço dos operadores γ -radonificantes, apresentada em [72]. Nessa abordagem, o espaço $\gamma(\mathcal{H}, X)$ é introduzido como o completamento do produto tensorial abstrato $H \otimes X$ em relação à norma (1.3.3), e a fórmula (1.3.2) estabelece uma imersão de $H \otimes X$ em $\mathcal{L}(H, X)$ que se estende a uma contração $\gamma(\mathcal{H}, X) \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}, X)$. Os desenvolvimentos posteriores, por exemplo os resultados mencionados nesta seção, são provados de modo análogo. Entretanto, a identidade (1.3.1) ou mais precisamente a igualdade

$$\|T\|_{\gamma(\mathcal{H},X)}^2 = \sup \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^k \gamma_j T h_j \right\|^2$$

deve ser provada como teorema e o espaço $\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)$ é então introduzido como o subespaço de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, X)$ para os quais esse supremo é finito e consequentemente temos $\gamma(\mathcal{H}, X) \hookrightarrow \gamma^\infty(\mathcal{H}, X)$ isometricamente.

1.4 Algumas Propriedades Geométricas dos Espaços de Banach

Nesta seção apresentamos as noções geométricas de tipo, cotipo e a propriedade (α) .

Definição 1.4.1. *Um espaço de Banach X tem tipo $p \in [1, 2]$ se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{n=1}^N \|x_n\|^p \right)^{1/p}$$

para qualquer sequência finita $(x_n)_{n=1}^N$ em X . Um espaço de Banach X tem cotipo $q \in [2, \infty]$ se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{n=1}^N \|x_n\|^q \right)^{1/q} \leq C \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|^2 \right)^{1/2}$$

para qualquer sequência finita $(x_n)_{n=1}^N$ em X . As menores constantes para as quais valem as estimativas acima são usualmente denotadas por $T_p(X)$ e $C_p(X)$ respectivamente.

Todo espaço de Banach tem tipo 1 e cotipo ∞ . Assim, dizemos que X tem *tipo não-trivial* se tem tipo $p \in (1, 2]$, e que tem *cotipo não-trivial* (ou *cotipo finito*) se tem cotipo $q \in [2, \infty)$. Substituindo a sequência de Rademacher (r_n) por uma sequência Gaussiana (γ_n) na Definição 1.4.1 obtemos a noção (equivalente) de *tipo Gaussiano* e *cotipo Gaussiano*, cf. [28, Theorems 12.26, 12.28].

- É fácil verificar que todo espaço de Hilbert tem tipo 2 e cotipo 2, e um resultado célebre de KWAPIEŃ [61] assegura a recíproca: se um espaço de Banach X tem tipo 2 e cotipo 2 então X é isomórfico a um espaço de Hilbert, cf. também [2, Problem 7.6];
- se $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é um espaço de medida σ -finito, $1 \leq p < \infty$ e X tem tipo p , então $L^r(\Omega; X)$ tem tipo $\min\{p, r\}$; se X tem cotipo q então $L^r(\Omega; X)$ tem cotipo $\max\{q, r\}$, cf. [72, Example 11.5]. Em particular, $L^p(\Omega)$ tem tipo $\min\{p, 2\}$ e cotipo $\max\{p, 2\}$, cf. também [2, Theorem 6.2.14]. Por outro lado, nenhum L^∞ tem cotipo finito, em particular c_0 não tem cotipo finito, cf. [28, Corollary 11.7];
- se X tem tipo p então seu dual X^* tem cotipo p' (onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), cf. [2, Proposition 6.2.12].

Muitas outras informações sobre tipo e cotipo podem ser encontradas em [2, Section 6.2] ou [28, Chapters 11, 12]. As noções de tipo e cotipo desempenham ainda papel essencial em alguns teoremas de mergulho [75, 73, 56], importantes do ponto de vista das equações de evolução estocásticas. Não insistiremos mais nessa discussão uma vez que ela aparecerá apenas superficialmente quando discutirmos existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy estocástico na Seção 3.1.

Proposição 1.4.2. *Seja X um espaço de Banach com cotipo finito. Então*

1. *X não contém c_0 , e em particular $\gamma^\infty(H, X) = \gamma(H, X)$;*
2. *existe uma constante $C \geq 0$ tal que para quaisquer $x_1, \dots, x_N \in X$,*

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n x_n \right\|_X^2 \leq C^2 \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \right\|_X^2;$$

3. se Y é algum outro espaço de Banach então $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ é R -limitada se, e somente se é γ -limitada.

DEMONSTRAÇÃO. A primeira afirmação já foi notada anteriormente (cf. a discussão sobre tipo e cotipo para os espaços L^p acima) e do Teorema 1.3.5. Para a demonstração da segunda afirmação veja [28, Theorem 12.27]. A terceira afirmação segue da segunda juntamente com a Proposição 1.2.10. $\square$

O próximo resultado é já considerado folclórico e fornecemos, para a conveniência do leitor, sua demonstração elementar, cf. [77, Proposition 2.1].

Proposição 1.4.3. *Sejam (r'_m) e (r''_n) seqüências de Rademacher independentes uma da outra definidas em espaços de probabilidade $(\Omega', \mathbb{P}')$ e $(\Omega'', \mathbb{P}'')$ respectivamente, e seja (r_{mn}) uma seqüência de Rademacher duplamente indexada definida num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{P})$. Para um espaço de Banach X as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. existe uma constante $C \geq 0$ tal que para quaisquer seqüências finitas $(a_{mn})_{m,n=1}^N$ em $\mathbb{R}$ com $|a_{mn}| \leq 1$ e $(x_{mn})_{m,n=1}^N$ em X

$$\mathbb{E}' \mathbb{E}'' \left\| \sum_{m,n=1}^N a_{mn} r'_m r''_n x_{mn} \right\|^2 \leq C^2 \mathbb{E}' \mathbb{E}'' \left\| \sum_{m,n=1}^N r'_m r''_n x_{mn} \right\|^2. \quad (1.4.1)$$

2. existe uma constante $C \geq 0$ tal que para qualquer seqüência $(x_{mn})_{m,n=1}^N$ em X

$$\frac{1}{C^2} \mathbb{E} \left\| \sum_{m,n=1}^N r_{mn} x_{mn} \right\|^2 \leq \mathbb{E}' \mathbb{E}'' \left\| \sum_{m,n=1}^N r'_m r''_n x_{mn} \right\|^2 \leq C^2 \mathbb{E} \left\| \sum_{m,n=1}^N r_{mn} x_{mn} \right\|^2.$$

Nesse caso, X tem cotipo finito e as afirmações (1) e (2) acima são equivalentes as mesmas afirmações com seqüências Gaussianas em vez de seqüências de Rademacher.

DEMONSTRAÇÃO. Vejamos que (1) $\Rightarrow$ (2). Pelo princípio da contração temos

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r'_n(\omega') r''_n(\omega'') r_{nn} x_{nn} \right\|^2 \leq \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_{nn} x_{nn} \right\|^2, \quad \omega' \in \Omega', \quad \omega'' \in \Omega'',$$

o que dá, após integração, a estimativa

$$\mathbb{E}' \mathbb{E}'' \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r'_n r''_n r_{nn} x_{nn} \right\|^2 \leq \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_{nn} x_{nn} \right\|^2. \quad (1.4.2)$$

Por outro lado, segue de (1.4.1) que

$$\mathbb{E}'\mathbb{E}''\left\|\sum_{m,n=1}^N r_{mn}(\omega)r'_m r''_n x_{mn}\right\|^2 \lesssim \mathbb{E}'\mathbb{E}''\left\|\sum_{m,n=1}^N r'_m r''_n x_{mn}\right\|^2, \quad \omega \in \Omega,$$

o que, após integração, fornece

$$\mathbb{E}\mathbb{E}'\mathbb{E}''\left\|\sum_{m,n=1}^N r_{mn}r'_m r''_n x_{mn}\right\|^2 \lesssim \mathbb{E}'\mathbb{E}''\left\|\sum_{m,n=1}^N r'_m r''_n x_{mn}\right\|^2. \quad (1.4.3)$$

Como na demonstração da Proposição 1.2.10, podemos passar ao espaço produto $\Omega \times \Omega' \times \Omega''$ e, por independência, supor que $(r_{mn}r'_m r''_n)$ e (r_{mn}) são identicamente distribuídas. Segue, pois, de (1.4.2) e (1.4.3) que

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{m,n=1}^N r_{mn}x_{mn}\right\|^2 = \mathbb{E}\mathbb{E}'\mathbb{E}''\left\|\sum_{m,n=1}^N r_{mn}r'_m r''_n x_{mn}\right\|^2 \approx \mathbb{E}'\mathbb{E}''\left\|\sum_{m,n=1}^N r'_m r''_n x_{mn}\right\|^2.$$

Reciprocamente, se (a_n) é como no enunciado do item (1) então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}'\mathbb{E}''\left\|\sum_{m,n=1}^N a_{mn}r'_m r''_n x_{mn}\right\|^2 &\approx \mathbb{E}\left\|\sum_{m,n=1}^N a_{mn}r_{mn}x_{mn}\right\|^2 \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \mathbb{E}\left\|\sum_{m,n=1}^N r_{mn}x_{mn}\right\|^2 \\ &\approx \mathbb{E}'\mathbb{E}''\left\|\sum_{m,n=1}^N r'_m r''_n x_{mn}\right\|^2, \end{aligned}$$

onde $(*)$ segue do princípio da contração.

Em qualquer dos casos, X não contém ℓ_∞^n 's uniformemente (cf. [82, Remark 2.2]) e portanto tem cotipo finito (cf. [28, Theorem 14.1]). Mas então somas Gaussianas podem ser estimadas por somas de Rademacher (cf. Proposição 1.4.2). $\square$

Definição 1.4.4. *Um espaço de Banach X tem a propriedade (α) se satisfaz qualquer uma das condições equivalentes da Proposição 1.4.3.*

Essa propriedade foi introduzida por PISIER [82], que provou que um reticulado de Banach tem a propriedade (α) se, e somente se tem cotipo finito. Comparando (1.4.1) com (1.2.1), vemos que a propriedade (α) é precisamente um princípio de contração para somas duplas de Rademacher. Pode-se mostrar, usando as desigualdades de Kahane-Khintchine, que a propriedade (α) independe do expoente $p = 2$ em (1.4.1), cf. [72, p. 57].

- É fácil verificar que espaços de Hilbert tem a propriedade (α) ;
- se X tem a propriedade (α) , $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é um espaço de medida σ -finito e $1 \leq p < \infty$, então $L^p(\Omega; X)$ tem a propriedade (α) , cf. [72, Example 13.13]. Em particular, os espaços $L^p(\Omega)$ tem a propriedade (α) , cf. também [71, Exercise 3.3.3];
- vale mencionar que um espaço de Banach K -convexo (veja [28, Chapter 13]) tem a propriedade (α) se, e somente se seu dual tem a propriedade (α) , cf. [77, Proposition 2.2]).

Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ espaços de Hilbert e X um espaço de Banach com a propriedade (α) . Pela Proposição 1.3.2, a aplicação $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}') \otimes X \rightarrow \mathcal{H} \otimes (\mathcal{H}' \otimes X)$ definida por

$$\sum_{\substack{1 \leq m \leq M \\ 1 \leq n \leq N}} (h_m \otimes h'_n) \otimes x_{mn} \mapsto \sum_{1 \leq m \leq M} h_m \otimes \sum_{1 \leq n \leq N} h'_n \otimes x_{mn},$$

onde $(h_m)_{1 \leq m \leq M} \subset \mathcal{H}$ e $(h'_n)_{1 \leq n \leq N} \subset \mathcal{H}'$ são ortonormais e $(x_{mn})_{1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N} \subset X$, satisfaz

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{1 \leq m \leq M} h_m \otimes \sum_{1 \leq n \leq N} h'_n \otimes x_{mn} \right\|_{\gamma(\mathcal{H}, \gamma(\mathcal{H}', X))}^2 &= \mathbb{E} \left\| \sum_{1 \leq m \leq M} \gamma_m \sum_{1 \leq n \leq N} h'_n \otimes x_{mn} \right\|_{\gamma(\mathcal{H}', X)}^2 \\ &= \mathbb{E} \left\| \sum_{1 \leq n \leq N} h'_n \otimes \sum_{1 \leq m \leq M} \gamma_m x_{mn} \right\|_{\gamma(\mathcal{H}', X)}^2 \\ &= \mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{1 \leq n \leq N} \gamma'_n \sum_{1 \leq m \leq M} \gamma_m x_{mn} \right\|_{\gamma(\mathcal{H}', X)}^2 \\ &\stackrel{(*)}{\approx} \mathbb{E}'' \left\| \sum_{\substack{1 \leq m \leq M \\ 1 \leq n \leq N}} \gamma''_{mn} x_{mn} \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{\substack{1 \leq m \leq M \\ 1 \leq n \leq N}} (h_m \otimes h'_n) \otimes x_{mn} \right\|_{\gamma(\mathcal{H} \widehat{\otimes} \mathcal{H}', X)}^2, \end{aligned}$$

onde, no passo $(*)$, usamos a propriedade (α) .

Proposição 1.4.5. *Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ espaços de Hilbert e X um espaço de Banach. Se X tem a propriedade (α) , então a aplicação $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}') \otimes X \rightarrow \mathcal{H} \otimes (\mathcal{H}' \otimes X)$ definida no nível dos tensores elementares por $(h \otimes h') \otimes x \mapsto h \otimes (h' \otimes x)$, se estende a um isomorfismo*

$$\gamma(\mathcal{H} \widehat{\otimes} \mathcal{H}', X) \cong \gamma(\mathcal{H}, \gamma(\mathcal{H}', X)). \quad (1.4.4)$$

Estaremos interessados no caso em que um dos espaços de Hilbert no isomorfismo acima é um espaço L^2 . Os dois exemplos seguintes, que formulamos por razões didáticas, encerram os passos essenciais de argumentos elaborados mais adiante no Capítulo 4. No primeiro exemplo, é importante observar que a imagem de $T \in \gamma(\mathcal{H} \widehat{\otimes} \mathcal{H}', X)$ em $\gamma(\mathcal{H}, \gamma(\mathcal{H}', X))$ via (1.4.4) é o operador, que ainda denotamos por T , dado por

$$(Th)h' = T(h \otimes h'), \quad h \in \mathcal{H}, \quad h' \in \mathcal{H}'. \quad (1.4.5)$$

Exemplo 1.4.6. Seja H um espaço de Hilbert e seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de funções $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow H$ tal que $\Theta : f \in \mathcal{H} \mapsto (f(n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(H)$ é um operador bem-definido e limitado⁷. Pelo procedimento de extensão de Kalton-Weis (Teorema 1.3.7) essa aplicação se estende a um operador $\tilde{\Theta} : \gamma(\mathcal{H}, X) \rightarrow \gamma(\ell^2(H), X)$ dado por $\tilde{\Theta}(T) = T \circ \Theta^*$. Agora, suponha que $T_\Phi \in \gamma(\mathcal{H}, X)$ seja representado por $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \gamma(H, X)$ no sentido de que $T_\Phi^* x^* = \Phi^*(\cdot) x^*$ em $\mathcal{H}$ para todo $x^* \in X^*$. Então, para quaisquer $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(H)$ e $x^* \in X^*$ temos

$$\begin{aligned} \langle T_\Phi \circ \Theta^*(h_n)_{n \in \mathbb{N}}, x^* \rangle &= [\Theta \Phi^*(\cdot) x^*, (h_n)_{n \in \mathbb{N}}]_{\ell^2(H)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \Phi(n) h_n, x^* \rangle, \end{aligned}$$

ou seja $\tilde{\Theta}(T_\Phi)(h_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi(n) h_n$. Pelo que já observamos, cf. (1.4.5), se X tem a propriedade (α) então a imagem de $\tilde{\Theta}(T_\Phi)$ em $\gamma(\ell^2(H), X) \cong \gamma(\ell^2, \gamma(H, X))$ será o operador

$$\begin{aligned} (\tilde{\Theta}(T_\Phi)(a_n)_{n \in \mathbb{N}})h &= \tilde{\Theta}(T_\Phi)(a_n h)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \Phi(n) h, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2, \quad h \in H. \end{aligned}$$

Denotando por $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a base canônica de ℓ^2 , temos $\tilde{\Theta}(T_\Phi)e_n = \Phi(n)$ e concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \Phi(n)$ converge em probabilidade no espaço $\gamma(H, X)$. $\triangle$

Exemplo 1.4.7. Seja H um espaço de Hilbert, e X um espaço de Banach com a propriedade (α) . Então $(f \otimes h) \otimes x \mapsto f \otimes (h \otimes x)$ se estende a um isomorfismo

$$\gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X) \cong \gamma(L^2(\mathbb{R}_+), \gamma(H, X)).$$

⁷Cf. Lema 4.2.3.

Suponha que $T_\Phi \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)$ seja representado por $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \gamma(H, X)$. Se $(I_m)_{1 \leq m \leq M}$ são subconjuntos disjuntos em $\mathbb{R}_+$ e $(h_n)_{1 \leq n \leq N}$ são ortonormais em H então

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{\substack{1 \leq m \leq M \\ 1 \leq n \leq N}} \gamma_{mn} T_\Phi(|I_m|^{-1/2} \mathbf{1}_{I_m} \otimes h_n) \right\|_X^2 \right)^{1/2} \lesssim \left\| \sum_{1 \leq m \leq M} \mathbf{1}_{I_m} \otimes S_m \right\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+), \gamma(H, X))}$$

onde S_m é a média integral de Φ sobre I_m , i.e.

$$S_m h := \int_{I_m} \Phi(t) h \, dt.$$

De fato, usando a propriedade (α) e (1.3.3) temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \sum_{\substack{1 \leq m \leq M \\ 1 \leq n \leq N}} \gamma_{mn} T_\Phi(|I_m|^{-1/2} \mathbf{1}_{I_m} \otimes h_n) \right\|_X^2 &= \mathbb{E} \left\| \sum_{\substack{1 \leq m \leq M \\ 1 \leq n \leq N}} \gamma_{mn} \frac{1}{|I_m|^{1/2}} \int_{I_m} \Phi(t) h_n \, dt \right\|_X^2 \\ &\approx \mathbb{E}' \mathbb{E}'' \left\| \sum_{1 \leq n \leq N} \gamma_n'' \left(\sum_{1 \leq m \leq M} \gamma_m' |I_m|^{1/2} S_m \right) h_n \right\|_X^2 \\ &\leq \mathbb{E}' \left\| \sum_{1 \leq m \leq M} \gamma_m' |I_m|^{1/2} S_m \right\|_{\gamma(H, X)}^2 \\ &= \left\| \sum_{1 \leq m \leq M} \mathbf{1}_{I_m} \otimes S_m \right\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+), \gamma(H, X))}^2. \end{aligned}$$

△

Um estudo mais detalhado do isomorfismo (1.4.4), com aplicações em equações de evolução estocásticas, foi realizado por VAN NEERVEN e WEIS em [77], onde o seguinte resultado, aqui numa formulação ligeiramente mais fraca, pode ser encontrado.

Proposição 1.4.8. *Sejam X um espaço de Banach com a propriedade (α) , $\Psi : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X)$ fortemente mensurável e Γ uma medida Gaussiana em X com núcleo reprodutor $(\iota_\Gamma, \mathcal{H}_\Gamma)$. Então $\Psi(\cdot) \circ \iota_\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Gamma, X)$ representa um operador $T_\Gamma \in \gamma(L^2(\Omega; \mathcal{H}_\Gamma), X)$ se, e somente se $\Psi(\cdot)x : \Omega \rightarrow X$ representa um operador $T_x \in \gamma(L^2(\Omega), X)$ para quase todo $x \in X$ (i.e., Γ -q.t.p.), e nesse caso*

$$\int_X \|T_x\|_{\gamma(L^2(\Omega), X)}^2 \Gamma(dx) \approx \|T_\Gamma\|_{\gamma(L^2(\Omega; \mathcal{H}_\Gamma), X)}^2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Veja [77, Theorem 5.2, Theorem 5.3]. □

Em vista do Exemplo 1.2.6 obtemos de imediato o seguinte.

Corolário 1.4.9. *Sejam X um espaço de Banach com a propriedade (α) , $\Psi : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X)$ fortemente mensurável, seja $B \in \gamma(H, X)$ e seja Γ a medida Gaussiana em X com covariância BB^* . Então $\Psi(\cdot) \circ B : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H, X)$ representa um operador $T \in \gamma(L^2(\Omega; H), X)$ se, e somente se $\Psi(\cdot)x : \Omega \rightarrow X$ representa um operador $T_x \in \gamma(L^2(\Omega), X)$ para Γ -q.t.p. $x \in X$, e nesse caso*

$$\int_X \|T_x\|_{\gamma(L^2(\Omega), X)}^2 \Gamma(dx) \approx \|T\|_{\gamma(L^2(\Omega; H), X)}^2. \quad (1.4.6)$$

1.5 Integração Estocástica

Definição 1.5.1. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Um processo isonormal sobre $\mathcal{H}$ é uma aplicação $W : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Omega)$ tal que $W(h)$ é Gaussiana para todo $h \in \mathcal{H}$ e*

$$\mathbb{E}[W(h_1)W(h_2)] = [h_1, h_2]_{\mathcal{H}}, \quad \forall h_1, h_2 \in \mathcal{H}. \quad (1.5.1)$$

Segue de (1.5.1) que

$$\mathbb{E}|W(a_1h_1 + a_2h_2) - [a_1W(h_1) + a_2W(h_2)]|^2 = 0$$

e daí concluímos que W é linear. Consequentemente $(Wh)_{h \in \mathcal{H}}$ é um processo Gaussiano e $W(h_1), \dots, W(h_N)$ são independentes se $h_1, \dots, h_N$ são ortogonais. Para a teoria de integração estocástica, estamos particularmente interessados no caso em que $\mathcal{H} = L^2(0, T; H)$ para algum espaço de Hilbert H .

Definição 1.5.2. *Seja H um espaço de Hilbert. Um movimento Browniano cilíndrico sobre H é um processo isonormal sobre $L^2(0, T; H)$, que denotamos por W_H . Equivalentemente, é uma família $(W_H(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares $H \rightarrow L^2(\Omega)$ tais que $(W_H(t)h)_{t \geq 0}$ é um movimento Browniano para todo $h \in H$ e*

$$\mathbb{E}[W_H(t)h_1 \cdot W_H(s)h_2] = t \wedge s [h_1, h_2]_H, \quad \forall t, s \in [0, T], \quad \forall h_1, h_2 \in H.$$

Essas diferentes definições estão relacionadas pela identidade

$$W_H(t)h = W_H(\mathbf{1}_{(0,t)} \otimes h)$$

e na verdade a equivalência entre ambas parece não ser um fato realmente óbvio e depende de hipóteses adicionais, cf. [72, Remark 3.5].

Para uma função escada $f \in L^2(0, T; H)$ da forma

$$f = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{(t_{n-1}, t_n)} \otimes h_n$$

define-se

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) dW_H(t) &:= \sum_{n=1}^N W_H(\mathbf{1}_{(t_{n-1}, t_n)} \otimes h_n) \\ &= \sum_{n=1}^N W_H(t_n) h_n - W_H(t_{n-1}) h_n. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Usando as propriedades elementares da distribuição normal podemos verificar a seguinte Isometria de Itô

$$\mathbb{E} \left| \int_0^T f(t) dW_H(t) \right|^2 = \|f\|_{L^2(0, T; H)}^2, \quad (1.5.3)$$

e assim a definição da integral estocástica (1.5.2) pode ser estendida a todo $L^2(0, T; H)$ por um argumento usual de densidade.

Essa integral pode ser usada para se definir uma integral estocástica para funções $\Phi : (0, T) \rightarrow \mathcal{L}(H, X)$ via dualidade. Se $\Phi : (0, T) \rightarrow \mathcal{L}(H, X)$ é de posto finito da forma

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{(t_{n-1}, t_n)} \otimes U_n \\ &= \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{(t_{n-1}, t_n)} \otimes \sum_{j=1}^k (h_j \otimes x_{jn}) \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

então define-se

$$\int_0^T \Phi(t) dW_H(t) := \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^k W_H(\mathbf{1}_{(t_{n-1}, t_n)} \otimes h_j) \otimes x_{jn} \quad (1.5.5)$$

É fácil ver⁸ que a função Φ em (1.5.4) representa o operador $R_\Phi : L^2(0, T; H) \rightarrow X$ de posto finito dado por

$$R_\Phi := \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^k (\mathbf{1}_{(t_{n-1}, t_n)} \otimes h_j) \otimes x_{jn} \quad (1.5.6)$$

⁸Cf. (1.3.6) e (1.3.7)

e usando (1.3.3) temos a isometria de Itô

$$\mathbb{E} \left\| \int_0^T \Phi dW_H \right\|^2 = \|R_\Phi\|_{\gamma(L^2(0,T;H),X)}^2.$$

Como os operadores em (1.5.6) são densos em $\gamma(L^2(0,T;H),X)$, é natural estender a integral estocástica (1.5.5) às funções que representam um elemento desse espaço. A noção de integrabilidade estocástica introduzida em [74] consiste numa versão estocástica da integral de Pettis; por definição uma função $\Phi : (0,T) \rightarrow \mathcal{L}(H,X)$ é *estocasticamente integrável* se for fracamente- L_H^2 e para cada subconjunto mensurável $I \subset (0,T)$ existe uma variável aleatória $\chi_{\Phi,I}$ tal que para todo $x^* \in X^*$

$$\langle \chi_{\Phi,I}, x^* \rangle = \int_0^T \mathbf{1}_I(t) \Phi^*(t) x^* dW_H(t)$$

quase certamente. O resultado principal de [74], que reproduzimos a seguir, consiste em caracterizar a classe das funções estocasticamente integráveis como sendo precisamente aquelas funções $\Phi : (0,T) \rightarrow \mathcal{L}(H,X)$ que representam um operador em $\gamma(L^2(0,T;H),X)$.

Proposição 1.5.3. ([74, Theorem 4.2]) *Para uma função $\Phi : (0,T) \rightarrow \mathcal{L}(H,X)$ fracamente- L_H^2 as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. Φ é estocasticamente integrável;
2. existe uma variável aleatória $\chi_\Phi := \int_0^T \Phi(t) dW_H(t)$ tal que para todo $x^* \in X^*$ temos

$$\langle \chi_\Phi, x^* \rangle = \int_0^T \Phi^*(t) x^* dW_H(t)$$

quase certamente;

3. $\Phi \in \gamma(0,T;H,X)$, isto é, Φ representa um operador γ -radonificante de $L^2(0,T;H)$ em X , cf. (1.1.3).

Nesse caso, para todo $h \in H$ a função $\Phi(\cdot)h$ é Pettis-integrável e estocasticamente integrável em relação a $W_H(\cdot)h$, e para qualquer base ortonormal $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ (se H é separável) temos

$$\int_0^T \Phi(t) dW_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \Phi(t) h_n dW_H(t) h_n \quad (1.5.7)$$

com convergência incondicional em $L^2(\Omega;X)$. Além disso, vale a isometria de Itô

$$\mathbb{E} \left\| \int_0^T \Phi(t) dW_H(t) \right\|^2 = \|\Phi\|_{\gamma(0,T;H,X)}^2.$$

Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, X)$ então sempre temos a decomposição $\mathcal{H} = \mathcal{N}(T) \oplus \overline{\mathcal{R}(T^*)}$ ⁹. Para operadores $T \in \gamma(\mathcal{H}, X)$, segue de imediato da Definição 1.3.4 que o subespaço $\overline{\mathcal{R}(T^*)}$ é separável (cf. [72, p. 16] ou [71, Proposition 5.10]). Com base nessa observação, o exemplo seguinte contém um refinamento da demonstração de [74, Theorem 4.2, (5) $\Rightarrow$ (1)] (implicação (3) $\Rightarrow$ (1) acima) que será útil na demonstração da implicação (3) $\Rightarrow$ (2) do Teorema 3.2.3 no capítulo 3.

Exemplo 1.5.4. Seja $R : L^2(0, T; H) \rightarrow X$ um operador γ -radonificante representado por $\Phi : (0, T) \rightarrow \mathcal{L}(H, X)$. Seja $(x_n^*) \subset X^*$ tal que

$$(f_n) := (R^* x_n^*) = (\Phi(\cdot) x_n^*)$$

é uma base ortonormal de $\overline{\mathcal{R}(R^*)}$ (cf. [14, Exercise 5.5.28]). Pela isometria de Itô (1.5.3), as variáveis Gaussianas

$$\gamma_n = \int_0^T \Phi^*(t) x_n^* dW_H(t)$$

são independentes, logo a série $\sum_{n \geq 1} \gamma_n R f_n$ converge em $L^2(\Omega; X)$ e

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{n \geq 1} \gamma_n R f_n, x^* \right\rangle &= \sum_{n \geq 1} \langle R f_n, x^* \rangle \int_0^T f_n(t) dW_H(t) \\ &= \int_0^T \sum_{n \geq 1} [R^* x^*, f_n] f_n dW_H \\ &= \int_0^T \Phi^*(t) x^* dW_H(t) \end{aligned}$$

com igualdades em $L^2(\Omega)$, e deduzimos daí que

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n R f_n = \int_0^T \Phi(t) dW_H(t).$$

△

A cada movimento Browniano cilíndrico W_H sobre H e $B \in \gamma(H, X)$ podemos associar um movimento Browniano em X . Se $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{N}(B)^\perp$ então

$$\begin{aligned} W_H^B(t) &:= \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{(0,t)} \otimes B dW_H(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} W_H(t) h_n \otimes B h_n \end{aligned}$$

⁹ $\mathcal{H} = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T)^\perp$, e $\mathcal{N}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T^*)}$ pois $\mathcal{H}$ é reflexivo, cf. [14, Chapter 2, Remark 17].

define um movimento Browniano em X com variância

$$\mathbb{E}\langle W_H^B(t), x^* \rangle^2 = t\langle BB^*x^*, x^* \rangle, \quad t \geq 0, x^* \in X^*.$$

Seja $(\mathcal{H}, \iota)$ o núcleo reprodutor associado a BB^* (cf. Exemplo 1.2.6). Digamos que um operador $R \in \gamma(L^2(0, T; \mathcal{H}), X)$ é *representável sobre X* se existe uma função $\Psi : (0, T) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ tal que $\Psi \circ \iota : (0, T) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}, X)$ representa R . Nesse caso definimos

$$\begin{aligned} \int_0^T \Psi(t) dW_H^B(t) &:= \int_0^T \Psi(t) \circ \iota dW_{\mathcal{H}}(t) \\ &= \int_0^T \Psi(t) \circ B dW_H(t). \end{aligned}$$

O seguinte resultado é consequência direta da Proposição 1.4.9 (cf. também [77, Theorems 6.3, 6.4]).

Proposição 1.5.5. *Seja H um espaço de Hilbert e seja X um espaço de Banach com a propriedade (α) . Dado $B \in \gamma(H, X)$, seja Γ a medida Gaussiana em X com covariância BB^* . Seja w um movimento Browniano real. Para uma função $\Psi : (0, T) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. Ψ é estocasticamente integrável em relação a W_H^B ;
2. Ψx é estocasticamente integrável em relação a w para Γ -q.t.p. $x \in X$.

Nessa situação temos

$$\mathbb{E} \left\| \int_0^T \Psi dW_H^B \right\|^2 \approx \int_X \mathbb{E} \left\| \int_0^T \Psi x dw \right\|^2 d\Gamma(x)$$

com constantes dependendo apenas de X .

Capítulo 2

Cálculo- H^∞ e Interpolação

“In books on semigroup theory, the usual theory of analytic semigroups ... are proved with methods that we now can recognize as special cases of the functional calculus approach.”

Peer Kunstmann e Lutz Weis em [59]

2.1 Preliminares em Teoria de Semigrupos

A seguinte definição é padrão na literatura, cf. por exemplo [80, 30, 31].

Definição 2.1.1. *Uma família de operadores lineares limitados $(S(t))_{t \geq 0}$ num espaço de Banach X é um semigrupo- C_0 se satisfaz as seguintes três propriedades:*

- (i) $S(0) = 1$, onde 1 denota o operador identidade I_X , e mais geralmente λ denota o múltiplo escalar $\lambda \cdot I_X$ da identidade;*
- (ii) $S(t)S(s) = S(t+s)$ para quaisquer $t, s \geq 0$, isto é, vale a propriedade de semigrupo;*
- (iii) $\lim_{t \downarrow 0} S(t)x = x$ para todo $x \in X$, isto é, os operadores $S(t)$ são fortemente contínuos.*

Mencionaremos agora um certo número de propriedades básicas dos semigrupos- C_0 cujas demonstrações o leitor interessado pode providenciar por conta própria ou consultar nas referências citadas acima.

As órbitas $t \mapsto S(t)x$ são contínuas para todo $x \in X$ e $t \geq 0$. Isso segue de imediato dos itens (ii) e (iii) da Definição 2.1.1.

O *gerador infinitesimal* é o operador (em geral não-limitado) A com domínio

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

definido por

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}.$$

O subespaço $\mathcal{D}(A)$ consiste precisamente dos pontos onde as órbitas são diferenciáveis à direita em $t = 0$ (e consequentemente diferenciável em todo $t \geq 0$) e é invariante pelo semigrupo no sentido de que $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e $t \geq 0$, e nesse caso $AS(t)x = S(t)Ax$. Segue também de imediato das definições que

$$\int_0^t S(s)x ds \in \mathcal{D}(A), \quad x \in X, \quad t \geq 0, \quad (2.1.1)$$

com $A \int_0^t S(s)x ds = S(t)x - x$, sendo ambos os lados iguais a $\int_0^t S(s)Ax ds$ se $x \in \mathcal{D}(A)$. Daí não é difícil ver que A é um operador densamente definido (isto é, $\mathcal{D}(A)$ é denso em X) e fechado.

O *conjunto resolvente*¹ $\rho(A)$ consiste por definição de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda - A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ é uma bijeção; assim o (operador) *resolvente* de A que denotamos por $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$ é fechado e portanto limitado em X . O conjunto $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ é aberto e $\rho(A) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$ é uma aplicação localmente analítica. O complemento $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é denominado o *espectro* de A .

Dado um semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ num espaço de Banach X , é consequência do princípio da limitação uniforme que sempre existem $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0. \quad (2.1.2)$$

O ínfimo dos $\omega \in \mathbb{R}$ para os quais vale (2.1.2) para algum $M \geq 1$ é denominado a abscissa de crescimento² de $(S(t))_{t \geq 0}$ (ou de A), denotada usualmente por $\omega_0(A)$. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0(A)$ temos a representação integral do resolvente

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt, \quad x \in X. \quad (2.1.3)$$

¹Esta definição faz sentido para qualquer operador fechado, não necessariamente um gerador infinitesimal.

²Do Ing. “growth bound”.

É elementar verificar a seguinte *identidade do resolvente*: para quaisquer $\lambda, \mu \in \rho(A)$ temos

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A). \quad (2.1.4)$$

Nesta tese estaremos particularmente interessados nos semigrupos analíticos. Seguindo a literatura usual (cf. por exemplo [59]) adotamos a seguinte definição.

Definição 2.1.2. *Um operador $-A$ fechado é setorial de tipo $0 \leq \omega < \pi$ se*

(i) $\sigma(-A) \subset \overline{\Sigma_\omega}$, onde

$$\Sigma_\omega := \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |\arg z| < \omega\}$$

é o setor com ângulo de abertura 2ω simétrico em relação ao eixo positivo $(0, \infty)$;

(ii) *para todo $\omega' > \omega$*

$$\sup_{z \notin \overline{\Sigma_{\omega'}}} \|zR(z, -A)\| < \infty,$$

isto é, o conjunto $\{z(z+A)^{-1} : z \notin \overline{\Sigma_{\omega'}}\}$ é uniformemente limitado. Como é usual, $R(z, -A) := (z+A)^{-1}$ denota o resolvente de $-A$ em z .

A conexão entre operadores setoriais e semigrupos analíticos é que um operador densamente definido $-A$ é setorial de tipo $\omega < \pi/2$ se, e somente se A gera um semigrupo analítico $\{e^{zA} : |\arg(z)| < \pi/2 - \omega\}$, cf. [30, Section II.4.a] ou [42, Section 3.4]. Mais precisamente, observe que quando $\omega < \pi/2$ a condição (i) da Definição 2.1.2 equivale a $\Sigma_{\pi-\omega} \subset \rho(A)$ e assim, $-A$ é setorial de tipo ω se, e somente se A é setorial de ângulo $\delta = \pi/2 - \omega$ no sentido de [30, Definition II.4.1]. Nesse caso, a fórmula

$$S(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} e^{z\lambda} R(z, A) dz, \quad \lambda \in \Sigma_\delta \cup \{0\} \quad (2.1.5)$$

define um semigrupo analítico em X , ou seja, (i) $\lambda \mapsto S(\lambda)$ é uniformemente limitado e fortemente contínuo em $\Sigma_{\delta'} \cup \{0\}$ para todo $\delta' < \delta$, e (ii) $\lambda \mapsto T(\lambda)$ é analítica e satisfaz a propriedade de semigrupo em Σ_δ , cf. [30, Proposition II.4.3]. O caminho de integração Υ acima é a fronteira³ de $\Sigma_{\pi-\omega'} \setminus B(0; r)$ com $\omega' > \omega$ e $\lambda \in \Sigma_{\pi/2-\omega'}$ (isto é, $\omega < \omega' < \pi/2 - |\arg \lambda|$) e $r < 1/|\lambda|$, orientado de baixo para cima, cf. por exemplo [30, p. 91, Figure 1]. A seguinte caracterização de semigrupos analíticos será suficiente para nossos propósitos nesta tese.

³Ou seja, é a fronteira de $\Sigma_{\pi/2+\delta'} \setminus B(0; r)$ onde $\lambda \in \Sigma_{\delta'}$ (isto é, $|\arg \lambda| < \delta' < \delta$).

Proposição 2.1.3. [30, Theorem II.4.6] *Para um operador $-A$ setorial de tipo ω num espaço de Banach X , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $-A$ é densamente definido e setorial de tipo $\omega < \pi/2$;
2. A gera um semigrupo analítico $S(\lambda)_{\lambda \in \Sigma_{\pi/2-\omega} \cup \{0\}}$ em X ;
3. existe $\eta > 0$ com $\eta + \omega < \pi/2$ tal que $e^{\pm i\eta}A$ gera um semigrupo- C_0 em X .

2.2 Cálculo- H^∞ limitado

Definição 2.2.1. Denotaremos por $\mathcal{S}(X, \omega)$ o conjunto dos operadores setoriais $-A$ de tipo ω num espaço de Banach X (cf. Definição 2.1.2), e tais que

- (iii) $-A$ é injetivo;
- (iv) $\mathcal{D}(-A)$ e $\mathcal{R}(-A)$ são densos.

As condições (iii) e (iv) da Definição 2.2.1 não são de fato muito restritivas uma vez que um operador fechado satisfazendo as condições (i) e (ii) da Definição 2.1.2 sempre admite restrições satisfazendo todas as condições (i)-(iv) de ambas as definições, cf. [18, Theorem 3.8] ou [59, Proposition 15.2]. Em espaços de Hilbert (iv) segue de (i)-(iii), cf. [18, Theorem 2.3]. O ínfimo dos ω tais que $-A$ é setorial de tipo ω é denotado por $\omega(-A)$.

Dicutiremos agora a construção do cálculo- H^∞ para operadores $-A \in \mathcal{S}(X, \omega)$. O leitor que desejar se aprofundar nesse assunto pode consultar as notas de MCINTOSH ET AL [3], os trabalhos de HAASE [41, 42] e as notas de KUNSTMANN e WEIS [59].

Denotamos por $H^\infty(\Sigma_\theta)$ a álgebra das funções analíticas limitadas no setor Σ_θ munidas com a norma do supremo. Dizemos que uma função $\phi \in H^\infty(\Sigma_\theta)$ tem decaimento regular em 0 se $f(z) = O(|z|^\epsilon)$ quando $z \rightarrow 0$ para algum $\epsilon > 0$, e que tem decaimento regular em ∞ se $f(z) = O(|z|^{-\epsilon})$ quando $z \rightarrow \infty$ para algum $\epsilon > 0$. A classe de Dunford-Riesz

$$H_0^\infty(\Sigma_\theta) = \{\phi \in H^\infty(\Sigma_\theta) : \phi \text{ tem decaimento regular em } 0 \text{ e em } \infty\}$$

fora introduzida por MCINTOSH [68] equivalentemente como as funções $\phi \in H^\infty(\Sigma_\theta)$ tais que

$$\text{“existem } s, C > 0 \text{ tais que } |\phi(z)| \leq C \frac{|z|^s}{1 + |z|^{2s}} \text{ para todo } z \in \Sigma_\theta\text{”}. \quad (2.2.1)$$

Com efeito, várias outras descrições equivalentes são possíveis, cf. [42, Lemma 2.2.2].

Se $-A \in \mathcal{S}(X, \omega)$ e $\omega < \theta' < \theta$ então o operador

$$\phi(-A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Sigma_{\theta'}} \phi(z)(z + A)^{-1} dz \quad (2.2.2)$$

está bem definido como integral de Bochner em $\mathcal{L}(X)$ para $\phi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)$. Isso segue de (2.2.1) e do fato de que

$$\int_{\partial \Sigma_{\theta'}} \frac{|z|^s}{1 + |z|^{2s}} \frac{|dz|}{|z|} < \infty.$$

Exemplo 2.2.2. Seja $0 < \theta < \pi$. Para todo $\alpha > 0$ a função $\varphi(z) = z^\alpha e^{-z}$ pertence a $H_0^\infty(\Sigma_\theta)$. Se $-A \in \mathcal{S}(X, \omega)$ com $\omega < \pi/2$, ou seja, se $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(S(t))_{t \geq 0}$, então a definição em (2.2.2) é compatível com as definições das potências fracionárias $(-A)^\alpha$ e a notação de semigrupo $S(t) = e^{tA}$ no sentido de que

$$\varphi(-tA) = t^\alpha (-A)^\alpha S(t).$$

△

É elementar verificar que $H_0^\infty(\Sigma_\theta)$ é uma subálgebra de $H^\infty(\Sigma_\theta)$, e a aplicação

$$H_0^\infty(\Sigma_\theta) \ni \phi \mapsto \phi(-A) \in \mathcal{L}(X) \quad (2.2.3)$$

é um homomorfismo de álgebras, cf. [59, theorem 9.2]. O próximo passo na construção do cálculo- H^∞ consiste em estender (2.2.3) a um operador fechado $H^\infty(\Sigma_\theta) \rightarrow \mathcal{L}(X)$; seguindo a exposição em [59, Section 9] defina para cada $\phi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)$ a norma

$$|||\phi|||_A := \|\phi\|_{H^\infty(\Sigma_\theta)} + \|\phi(-A)\|_{\mathcal{L}(X)}$$

e considere a subálgebra

$$H_A^\infty(\Sigma_\theta) = \left\{ \phi \in H^\infty(\Sigma_\theta) : \text{existe } (\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^\infty(\Sigma_\theta) \text{ tal que} \right. \\ \left. \sup_n |||\phi_n|||_A < \infty \text{ e } \phi_n(z) \rightarrow \phi(z) \text{ para todo } z \in \Sigma_\theta \right\}.$$

Pode-se mostrar que $\mathbf{1}_{\Sigma_\theta} \in H_A^\infty(\Sigma_\theta)$ e que $H_A^\infty(\Sigma_\theta)$ inclui as funções racionais $z \mapsto (\lambda - z)^{-1}$ para $\lambda \notin \Sigma_\theta$, de modo que a extensão de (2.2.3) em ambos os casos é dada por

$$\mathbf{1}_{\Sigma_\theta} \mapsto I_X \quad \text{e} \quad (\lambda - \cdot)^{-1} \mapsto R(\lambda, -A).$$

Pode-se mostrar também que $H_A^\infty(\Sigma_\theta)$ inclui certas funções analíticas na origem e com decaimento regular em ∞ de modo que $f(-A) \in \mathcal{L}(X)$ é dado por uma integral como em (2.1.5), cf. [59, Example 9.8(a)]; de fato a própria fórmula (2.1.5) que define o semi-grupo analítico gerado por A se encaixa nesse contexto e resultados básicos da teoria de semigrupos tais como a representação integral do resolvente (2.1.3) podem ser deduzidas por argumentos abstratos, cf. [59, Illustration 9.9]. Finalmente vale ressaltar que quando $H_A^\infty(\Sigma_\theta)$ contém as funções $z \mapsto z^{it}$ para $t \in \mathbb{R}$, de modo que $(-A)^{it} \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, dizemos que $-A$ tem *potências imaginárias limitadas* e escrevemos $-A \in BIP$ ⁴.

Definição 2.2.3. *Um operador $-A \in \mathcal{S}(X, \omega)$ admite um cálculo- H^∞ limitado de ângulo $\theta \in (\omega, \pi)$ quando o homomorfismo (2.2.3) pode ser estendido a $H^\infty(\Sigma_\theta)$, ou seja, quando $H_A^\infty(\Sigma_\theta) = H^\infty(\Sigma_\theta)$.*

É elementar ver que $-A \in \mathcal{S}(X)$ admite um cálculo- H^∞ limitado se e somente se existe uma estimativa

$$\|\phi(-A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\theta \|\phi\|_{H^\infty(\Sigma_\theta)}, \quad \forall \phi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta) \quad (2.2.4)$$

onde C_θ é uma constante independente de ϕ , cf. [59, Remark 9.11]. O ínfimo dos θ tais que $-A$ admite um cálculo- H^∞ limitado de ângulo θ é denotado por $\omega_{H^\infty}(-A)$.

Atualmente, já é bem sabido que muitas classes de operadores diferenciais, bem como operadores de Schrödinger e muitos operadores de Stokes admitem um cálculo- H^∞ limitado. Para uma introdução a essas aplicações, consulte por exemplo [59, 91].

O seguinte resultado formaliza a idéia intuitiva de inserir operadores em expressões integrais. Para a demonstração, veja [59, Lemma 9.12].

Proposição 2.2.4. *Suponha que $-A$ admita um cálculo- H^∞ limitado, seja $\theta > \omega_{H^\infty}(-A)$ e assumamos que $f : (a, b) \times \Sigma_\theta \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaça as seguintes condições:*

- $f(\cdot, z) : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua para todo $z \in \Sigma_\theta$;
- $f(t, \cdot) \in H^\infty(\Sigma_\theta)$ para todo $t \in (a, b)$, e $t \mapsto \|f(t, \cdot)\|_{H^\infty(\Sigma_\theta)}$ é integrável.

Então $g(\lambda) = \int_a^b f(t, \lambda) dt$ pertence a $H^\infty(\Sigma_\theta)$ e

$$g(-A)x = \int_a^b f(t, -A)x dt, \quad x \in X.$$

⁴Do Ing. “Bounded Imaginary Powers”.

Enquanto que $\omega_{H^\infty}(-A) = \omega(-A)$ em espaços de Hilbert, o mesmo não vale em espaços de Banach, cf. [59, p. 254, N 12.8]. Resultados positivos nessa direção usualmente exigem que $-A$ seja R -setorial e que X tenha propriedades geométricas adicionais; cf. [57, Remark 7.1], [54, Theorem 5.3] e a Proposição 2.2.7 adiante. Ressaltamos que um operador fechado $-A$ é R -setorial de tipo ω se valem (i), (iii) e (iv) e para todo $\omega' > \omega$ o conjunto $\{z(z + A) : z \notin \overline{\Sigma_{\omega'}}\}$ é R -limitado. O ínfimo dos ω tais que $-A$ é R -setorial de tipo ω é denotado por $\omega_R(-A)$. Por exemplo, se $-A$ é R -setorial e admite um cálculo- H^∞ limitado num espaço de Banach X com a propriedade (Δ) então $\omega_{H^\infty}(-A) = \omega_R(-A)$.

Retomando a discussão ao final da Seção 1.3, KALTON e WEIS consideraram em [57] funções quadráticas generalizadas da forma

$$\|t \mapsto \varphi(-tA)x\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}), X)}, \quad \varphi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)$$

em termos das quais obtiveram caracterizações do cálculo- H^∞ similares as de [68] para espaços de Hilbert e [18] para espaços L^p (lembremos que (0.1.5) e (1.3.10) são equivalentes para $X = L^p$), mas agora em contextos mais gerais. Seja $X^\# := \mathcal{D}(A^*) \cap \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ e $A^\#$ a parte de A^* em $X^\#$; então $A^\#$ é setorial em $X^\#$ e $\mathcal{D}(A^\#) \cap \mathcal{R}(A^\#)$ é denso em $A^\#$, e num espaço de Banach X com cotipo finito, $-A$ admite um cálculo- H^∞ limitado se, e somente se $-A$ e $-A^\#$ satisfazem as estimativas quadráticas generalizadas

$$\|t \mapsto \varphi(-tA)x\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}), X)} \leq C\|x\|_X \quad (2.2.5)$$

e

$$\|t \mapsto \varphi(-tA^\#)x^*\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}), X^\#)} \leq C\|x^*\|_{X^\#}. \quad (2.2.6)$$

para alguma (equivalentemente, toda) $\varphi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)$. A proposição seguinte contém uma formulação mais fraca desse resultado, suficiente para nossos propósitos nesta tese, cf. [57, 33, 38, 37], em particular [57, Proposition 7.7].

Proposição 2.2.5. *Se $-A$ admite um cálculo- H^∞ limitado e $\psi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)$ onde $\theta > \omega_{H^\infty}(-A)$ então $t \mapsto \psi(-tA)x$ pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}), X)$ para todo $x \in X$. Além disso, para quaisquer $\phi, \psi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)$ temos*

$$\|t \mapsto \phi(-tA)x\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}), X)} \approx \|t \mapsto \psi(-tA)x\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}), X)} \quad (2.2.7)$$

com constantes dependendo de ϕ e ψ , mas independentes de $x \in X$.

Proposição 2.2.6. *Suponha que $-A$ admita um cálculo- H^∞ limitado, $\psi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)$ com $\theta > \omega_{H^\infty}(-A)$, e seja $B \in \gamma(H, X)$. Então $t \mapsto \psi(-tA)B$ representa um operador em $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)$. Além disso, para quaisquer $\phi, \psi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)$ temos*

$$\|t \mapsto \phi(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)} \approx \|t \mapsto \psi(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)} \quad (2.2.8)$$

com constantes dependendo de ϕ e ψ .

DEMONSTRAÇÃO. A primeira afirmação segue do Corolário 1.4.9 com $\Psi = \psi(-tA)$ e da primeira parte da Proposição 2.2.5. Denotando por Γ_B a medida Gaussiana em X com covariância BB^* obtemos por (1.4.6) e (2.2.7) que

$$\begin{aligned} \|t \mapsto \phi(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)} &\approx \int_X \|t \mapsto \phi(-tA)x\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}), X)} \Gamma_B(dx) \\ &\approx \int_X \|t \mapsto \psi(-tA)x\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}), X)} \Gamma_B(dx) \\ &\approx \|t \mapsto \psi(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)}. \end{aligned}$$

□

Quando $-A$ admite um cálculo- H^∞ limitado então a estimativa (2.2.4) vale na verdade para toda $f \in H^\infty(\Sigma_\theta)$ e em particular o conjunto

$$\{f(-A) : \|f\|_{H^\infty(\Sigma_\theta)} \leq 1\} \quad (2.2.9)$$

é uniformemente limitado em $\mathcal{L}(X)$. Quando o conjunto em (2.2.9) é γ -limitado dizemos que $-A$ admite um cálculo- H^∞ γ -limitado, e definimos $\omega_{H^\infty}^\gamma(-A)$ analogamente. O resultado seguinte mostra que ambas as noções (cálculo- H^∞ limitado e cálculo- H^∞ γ -limitado) são equivalentes em espaços de Banach com a propriedade (α) .

Proposição 2.2.7. *Suponha que $-A$ admita um cálculo- H^∞ num espaço de Banach X com a propriedade (α) . Então para todo $\theta > \omega_{H^\infty}(-A)$ o conjunto*

$$\{f(-A) : \|f\|_{H^\infty(\Sigma_\theta)} \leq 1\}$$

é R -limitado. Em particular $-A$ é R -setorial de qualquer tipo $\theta > \omega_{H^\infty}(-A)$ com $\omega_R(-A) \leq \omega_{H^\infty}(-A)$.

DEMONSTRAÇÃO. [59, Theorem 12.8] ou [54, Theorem 5.3, Corollary 5.4].

□

Esse resultado é evidentemente muito útil e em particular nesta tese será usado em conjunto com o teorema dos γ -multiplicadores (Teorema 1.3.8) como ilustrado no seguinte exemplo.

Exemplo 2.2.8. Dada $\phi \in H^\infty(\Sigma_\theta)$ defina $\phi_t(z) = \phi(tz)$. É claro que $(\phi_t)_{t>0} \subset H^\infty(\Sigma_\theta)$ e esta família é uniformemente limitada, com

$$\sup_{t>0} \|\phi_t\|_{H^\infty(\Sigma_\theta)} = \|\phi\|_{H^\infty(\Sigma_\theta)}.$$

Assim, se $-A$ é um operador setorial admitindo um cálculo- H^∞ limitado num espaço de Banach X com a propriedade (α) e se definirmos $M : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ por

$$M(t) := \phi(-tA)$$

então a família $\{M(t) : t > 0\}$ é γ -limitada pela Proposição 2.2.7. Agora, suponha que para alguma $\psi \in H^\infty(\Sigma_\theta)$ a função $t \mapsto \psi(-tA)B$ pertença a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)$; note que isso é necessariamente válido se $\psi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)$ e $B \in \gamma(H, X)$ pela Proposição 2.2.6. Pondo $\varphi = \phi\psi$, segue do Teorema 1.3.8

$$t \mapsto M(t)\psi(-tA)B = \varphi(-tA)B$$

pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)$ e

$$\|t \mapsto \varphi(tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)} \lesssim \|t \mapsto \psi(tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)}.$$

△

Encerramos esta seção com uma técnica de aproximação introduzida por McINTOSH em [68] ao estudar a relação entre o cálculo funcional e estimativas quadráticas.

Proposição 2.2.9 (Aproximação de McIntosh). *Seja $-A \in \mathcal{S}(X, \omega)$ e $\phi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)$ com $\omega < \theta$ e tal que $\int_0^\infty \phi(t)dt/t = 1$. Então*

$$\int_0^\infty \phi(-tA)x \frac{dt}{t} = x \tag{2.2.10}$$

para todo $x \in X$.

DEMONSTRAÇÃO. Veja [59, Lemma 9.13, Remark 9.14] ou [42, Theorem 5.2.6] e note que temos $\overline{\mathcal{D}(A)} \cap \mathcal{R}(A) = X$, cf. [59, Proposition 9.4(c)]. □

2.3 Interpolação

É bem sabido que a teoria de interpolação é essencial no estudo de equações de evolução, principalmente pelas conexões com semigrupos analíticos e potências fracionárias de operadores fechados, cf. por exemplo [66, 67]. A teoria das potências fracionárias de operadores tem uma longa tradição, associada aos nomes de BALAKRISHNAN, KATO, KOMATSU e outros de igual relevância, e seria inútil aqui tentar fornecer uma lista de referências sobre o assunto; vale dizer contudo que esta teoria pode ser abordada do ponto de vista do cálculo funcional mencionado na seção anterior, cf. por exemplo [42, Chapter 3] ou [59, Section 15]; grosso modo esse procedimento consiste em definir

$$(-A)^\alpha = f_\alpha(-A), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

onde $f_\alpha(z) = z^\alpha$. Para nossos propósitos aqui, vale notar por exemplo que

$$\frac{z^\alpha}{(1+z)^\beta}(-A) = (-A)^\alpha(1-A)^{-\beta}, \quad 0 \leq \alpha \leq \beta.$$

Para a discussão a seguir, ainda que dispensável, é desejável alguma familiaridade com o *método de interpolação real* e com o *método de interpolação complexa*; referências clássicas sobre o assunto incluem [86] e [7]. Por exemplo, YAGI [95] provou que para “operadores de tipo ω ” tais que $0 \in \rho(-A)$ num espaço de Hilbert, $-A \in BIP$ se, e somente se os domínios das potências fracionárias de $-A$ e $-A^*$ podem ser obtidas por interpolação complexa,

$$\mathcal{D}((-A)^\alpha) = [X, \mathcal{D}(-A)]_\alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

com uma igualdade similar para $-A^*$. Por outro lado, um resultado de MCINTOSH [68, Section 8] assegura que em espaços de Hilbert a limitação do cálculo- H^∞ equivale a BIP e então temos uma caracterização do cálculo- H^∞ via interpolação. Trabalhos subsequentes exploraram essa idéia usando outras escalas de interpolação e extrapolação.

Definição 2.3.1. ([59, Definition 15.21]) *Seja $-A \in \mathcal{S}(X)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos $\dot{X}_\alpha$ como o complemento de $\mathcal{D}(-A)^\alpha$ em relação a norma $\|x\|_{\dot{X}_\alpha} := \|(-A)^\alpha x\|$. Definimos X_α como o domínio $\mathcal{D}(-A)^\alpha$ munido com a norma $\|x\|_{X_\alpha} := \|(1-A)^\alpha x\|$ se $\alpha \geq 0$, e como o complemento de X em relação a norma $\|x\|_{X_\alpha} := \|(1-A)^\alpha x\|$ se $\alpha < 0$.*

Em geral essas duas escalas diferem, sendo iguais se, e somente se $0 \in \rho(-A)$; neste caso elas coincidem com as *torres de Sobolev* da teoria de semigrupos, cf. [30, Section

II.5.a]. Por exemplo, se $A = \Delta$ em $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ então $\dot{X}_\alpha$ são espaços de potenciais de Riesz enquanto X_α são espaços de potenciais de Bessel.

Foi mostrado em [6] que em espaços de Hilbert um operador setorial $-A$ injetivo admite um cálculo- H^∞ limitado se, e somente se para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha < \beta$ e $\theta \in (0, 1)$, o método de interpolação complexa fornece

$$\dot{X}_{(1-\theta)\alpha+\theta\beta} = [\dot{X}_\alpha, \dot{X}_\beta]_\theta. \quad (2.3.1)$$

e além disso o mesmo resultado é obtido por interpolação real. Em espaços de Banach essa caracterização parece não ser possível. Por um lado, o método de interpolação complexa, que é na verdade uma abstração da demonstração de THORIN para o teorema de interpolação de RIESZ baseada no teorema das três retas, está diretamente relacionado com a propriedade BIP , que é em geral mais fraca em espaços de Banach. Por outro lado, sabe-se que uma igualdade do tipo (2.3.1) não vale para o método de interpolação real; no caso em que $A = \Delta$ em $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ os espaços de interpolação reais $(L^p, \mathcal{D}(\Delta))_{\alpha,r}$ são espaços de Besov e não espaços de potenciais de Bessel, cf. também [58].

Em [55] os autores introduziram o *método de interpolação de Rademacher*. Sejam (Y_0, Y_1) um par de interpolação de espaços de Banach. Para $0 < \theta < 1$ o *espaço de interpolação de Rademacher* $\langle Y_0, Y_1 \rangle_\theta$ consiste de todos os elementos $y \in Y_0 + Y_1$ que podem ser representados como uma soma

$$y = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n, \quad y_n \in Y_0 \cap Y_1 \quad (2.3.2)$$

convergente em $Y_0 + Y_1$ e tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0((y_n)_{n \in \mathbb{Z}}) &= \sup_{N \geq 1} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=-N}^N r_n 2^{-n\theta} y_n \right\|_{Y_0}^2 \right)^{1/2} < \infty, \\ \mathcal{C}_1((y_n)_{n \in \mathbb{Z}}) &= \sup_{N \geq 1} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=-N}^N r_n 2^{n(1-\theta)} y_n \right\|_{Y_1}^2 \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

A norma de $y \in \langle Y_0, Y_1 \rangle_\theta$ é dada por

$$\|y\|_{\langle Y_0, Y_1 \rangle_\theta} = \inf \left\{ \max \left(\mathcal{C}_0((y_n)_{n \in \mathbb{Z}}), \mathcal{C}_1((y_n)_{n \in \mathbb{Z}}) \right) : \text{representações (2.3.2) de } y \right\}.$$

Com esse método, os autores obtiveram uma caracterização análoga a de [6] no caso em $-A$ é *quase R -setorial* e X é B -convexo, cf. [55, Theorem 7.4, Corollary 7.7]. Esse resultado pode de fato ser considerado uma extensão do resultado para espaços de Hilbert uma vez que neste caso ambos os métodos de interpolação coincidem.

Proposição 2.3.2. ([55, Theorem 7.4]) *Se $-A \in \mathcal{S}(X)$ admite um cálculo- H^∞ limitado então, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha < \beta$ e $\theta \in (0, 1)$, o método de interpolação de Rademacher fornece*

$$\dot{X}_{(1-\theta)\alpha+\theta\beta} = \langle \dot{X}_\alpha, \dot{X}_\beta \rangle_\theta.$$

A seguinte versão vetorial desse resultado de interpolação será mais apropriada para a demonstração do Teorema 2.3.6 adiante, onde as sequências duplas de Rademacher podem ser facilmente manuseadas com o auxílio da propriedade (α) .

Proposição 2.3.3. *Se $-A \in \mathcal{S}(X)$ admite um cálculo- H^∞ limitado então para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha < \beta$ e $\theta \in (0, 1)$ temos*

$$\langle L^2(\Omega; \dot{X}_\alpha), L^2(\Omega; \dot{X}_\beta) \rangle_\theta = L^2(\Omega; \dot{X}_{(1-\theta)\alpha+\theta\beta}).$$

DEMONSTRAÇÃO. Em vista da Proposição 2.3.2 é suficiente mostrar que

$$L^2(\Omega; \dot{X}_\alpha) = (L^2(\Omega; X))_\alpha^\bullet, \tag{2.3.3}$$

pois então

$$\begin{aligned} \langle L^2(\Omega; \dot{X}_\alpha), L^2(\Omega; \dot{X}_\beta) \rangle_\theta &= \langle (L^2(\Omega; X))_\alpha^\bullet, (L^2(\Omega; X))_\beta^\bullet \rangle_\theta \\ &= (L^2(\Omega; X))_{(1-\theta)\alpha+\theta\beta}^\bullet \\ &= L^2(\Omega; \dot{X}_{(1-\theta)\alpha+\theta\beta}). \end{aligned}$$

Agora, (2.3.3) segue de aplicar a Proposição 2.3.2 ao operador $I \otimes A$ induzido em $L^2(\Omega; X)$ pela fórmula $I \otimes A(f \otimes x) = f \otimes Ax$ se $x \in \mathcal{D}(A)$. Para os detalhes deste procedimento, veja [86]. $\square$

Como um caso especial de [59, Proposition 15.23(b)] observemos que o operador $1 - A : X_1 \rightarrow X$ é uma isometria cuja inversa $(1 - A)^{-1} : X \rightarrow X$ se estende a uma isometria $J_{-1} : X_{-1} \rightarrow X$ e $(J_{-1})^{-1}$ é uma extensão de $1 - A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$. Isto sugere o seguinte.

Proposição 2.3.4. *Se $-A \in \mathcal{S}(X)$ então*

$$X + \dot{X}_{-1} = X_{-1} \quad (2.3.4)$$

com equivalência de normas.

DEMONSTRAÇÃO. É óbvio por definição que $X \hookrightarrow X_{-1}$. Por outro lado, não é difícil ver que também $\dot{X}_{-1} \hookrightarrow X_{-1}$; de fato $\dot{X}_{-1}$ é o completamento da imagem $\mathcal{R}(A)$ em relação a norma $\|Ax\|_{\dot{X}_{-1}} = \|x\|$ e para elementos $\dot{x}_{-1} = Ax \in \mathcal{R}(A)$ temos

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_{-1}\|_{X_{-1}} &= \|(1-A)^{-1}Ax\| \\ &\leq \|A(1-A)^{-1}\| \|x\| \\ &\leq \|A(1-A)^{-1}\| \|\dot{x}_{-1}\|_{\dot{X}_{-1}}. \end{aligned}$$

Consequentemente temos uma inclusão contínua

$$X + \dot{X}_{-1} \hookrightarrow X_{-1} \quad (2.3.5)$$

que é de fato uma bijeção; dado $x_{-1} \in X_{-1}$ existe uma sequência $(y_n) \subset X$ tal que $y_n \rightarrow x_{-1}$ em X_{-1} . Pondo $x_n = (1-A)^{-1}y_n$ temos pela definição da norma em X_{-1} que

$$\|y_n - y_m\|_{X_{-1}} = \|x_n - x_m\|,$$

o que implica que (x_n) é de Cauchy em X e portanto converge a um elemento x em X . Temos também por definição da norma em $\dot{X}_{-1}$ que

$$\|Ax_n - Ax_m\|_{\dot{X}_{-1}} = \|x_n - x_m\|,$$

o que implica que Ax_n converge a um elemento $\dot{x}_{-1}$ em $\dot{X}_{-1}$. Mas então $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow \dot{x}_{-1}$ em X_{-1} e portanto

$$x_{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-A)x_n = x - \dot{x}_{-1}.$$

Assim, a inclusão (2.3.5) é sobrejetiva e a equivalência das normas em (2.3.4) segue do teorema da aplicação aberta. $\square$

Aplicando este resultado ao operador $I \otimes A$ induzido em $L^2(\Omega; X)$ como na demonstração da Proposição 2.3.3 obtemos o seguinte.

Proposição 2.3.5. *Se $-A \in \mathcal{S}(X)$ então*

$$L^2(\Omega; X) + L^2(\Omega; \dot{X}_{-1}) = L^2(\Omega; X_{-1}) \quad (2.3.6)$$

com equivalência de normas.

Estamos agora em posição de provar o principal resultado deste capítulo, que será fundamental para a demonstração da equivalência (1) $\Leftrightarrow$ (2) do resultado principal.

Teorema 2.3.6. *Suponha que $-A \in \mathcal{S}(X)$ admita um cálculo- H^∞ limitado de ângulo $\omega_{H^\infty}(-A) < \pi/2$ num espaço de Banach X que tenha a propriedade (α) . Então, para todo $B \in \mathcal{L}(H, X_{-1})$ e $\omega_{H^\infty}(-A) < \theta < \pi$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $(-A)^{-1/2}B \in \gamma(H, X)$;
2. $t \mapsto \phi(-tA)B$ pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})$ para toda $\phi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)$;
3. $t \mapsto \psi(-tA)B$ pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})$, onde

$$\psi(z) = \frac{z^{1/2}}{(1+z)^{3/2}}. \quad (2.3.7)$$

Nesse caso, para quaisquer $\phi, \tilde{\phi} \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)$ temos a equivalência das normas

$$\|t \mapsto \phi(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})} \approx \|t \mapsto \tilde{\phi}(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})}. \quad (2.3.8)$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos demonstrar as implicações (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2): A condição $(-A)^{-1/2}B \in \gamma(H, X)$ é equivalente a $B \in \gamma(H, \dot{X}_{-1/2})$, logo a conclusão segue imediatamente da Proposição 2.2.6.

(2) $\Rightarrow$ (3): Essa implicação é trivial, uma vez que $\psi \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Fixemos as funções em $H_0^\infty(\Sigma_\theta)$

$$\phi_0(z) = \frac{z}{(1+z)^3}, \quad \phi_1(z) = \frac{z^2}{(1+z)^3}, \quad \psi_0(z) = \psi(z), \quad \text{e} \quad \psi_1(z) = \frac{z^{3/2}}{(1+z)^{3/2}},$$

onde ψ é dada por (2.3.7) e observe que $\phi_j = \psi_j \psi$, $j = 0, 1$.

Seja $(r_j)_{1 \leq j \leq k}$ uma sequência de Rademacher num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{P})$ e seja $(h_j)_{1 \leq j \leq k}$ um conjunto ortonormal em H . Tomando aproximações de McIntosh de

Bh_j com $\phi(z) = z^{3/2}/(1+z)^3$ (cf. Proposição 2.2.9) temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k r_j Bh_j &\approx \sum_{j=1}^k r_j \int_0^\infty (-tA)^{3/2} (1-tA)^{-3} Bh_j \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_j \int_{2^n}^{2^{n+1}} (-tA)^{3/2} (1-tA)^{-3} Bh_j \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

com convergência em

$$L^2(\Omega; X_{-1}) = L^2(\Omega; \dot{X}_{-1}) + L^2(\Omega; X).$$

Defina os vetores $y_n \in L^2(\Omega; \dot{X}_{-1}) \cap L^2(\Omega; X)$ por

$$y_n = \sum_{j=1}^k r_j \int_{2^n}^{2^{n+1}} (-tA)^{3/2} (1-tA)^{-3} Bh_j \frac{dt}{t}$$

e defina funções m_N por

$$m_N(t) := \begin{cases} (2^{-n}t)^{1/2}, & \text{se } t \in [2^n, 2^{n+1}) \text{ e } n = -N, \dots, N; \\ 0, & \text{se } t \notin [2^{-N}, 2^{N+1}). \end{cases}$$

Vamos aplicar o método de interpolação de Rademacher relativamente ao par de espaços $Y_0 = L^2(\Omega; \dot{X}_{-1})$ e $Y_1 = L^2(\Omega; X)$. Assim

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_0((y_n)_{n \in \mathbb{Z}})^2 \\ &= \sup_{N \geq 1} \mathbb{E}' \left\| \sum_{n=-N}^N r'_n 2^{-n/2} y_n \right\|_{Y_0}^2 \\ &= \sup_{N \geq 1} \mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{j=1}^k \sum_{n=-N}^N r_j r'_n 2^{-n/2} \int_{2^n}^{2^{n+1}} (-tA)^{3/2} (1-tA)^{-3} Bh_j \frac{dt}{t} \right\|_{\dot{X}_{-1}}^2 \\ &= \sup_{N \geq 1} \mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{j=1}^k \sum_{n=-N}^N r_j r'_n \int_{2^n}^{2^{n+1}} (2^{-n}t)^{1/2} (-tA) (1-tA)^{-3} Bh_j \frac{dt}{t} \right\|_{\dot{X}_{-1/2}}^2 \\ &\approx \sup_{N \geq 1} \mathbb{E}'' \left\| \sum_{j=1}^k \sum_{n=-N}^N r''_{jn} \int_0^\infty m_N(t) \phi_0(-tA) B f_{jn}(t) \frac{dt}{t} \right\|_{\dot{X}_{-1/2}}^2, \end{aligned}$$

onde no último passo usamos a propriedade (α) para passar de seqüências duplas de Rademacher para seqüências de Rademacher duplamente indexadas. As funções $f_{jn} =$

$\mathbf{1}_{[2^n, 2^{n+1})} \otimes h_j$ são ortonormais em $L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H)$ (a não ser por uma constante numérica $(\ln 2)^{1/2}$) e os operadores

$$M_0(t) := \psi_0(-tA) = (-tA)^{1/2}(1-tA)^{-3/2}$$

são γ -limitados pela Proposição 2.2.7, logo

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) &\lesssim \|t \mapsto m_N(t)\phi_0(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})} \\ &\lesssim \|t \mapsto m_N(t)M_0(t)\psi(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})} \\ &\lesssim \|t \mapsto \psi(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})} \end{aligned}$$

pelo teorema dos γ -multiplicadores (Teorema 1.3.8).

De modo similar temos

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_1((y_n)_{n \in \mathbb{Z}})^2 \\ &= \sup_{N \geq 1} \mathbb{E}' \left\| \sum_{n=-N}^N r'_n 2^{n/2} y_n \right\|_{Y_1}^2 \\ &= \sup_{N \geq 1} \mathbb{E}' \left\| \sum_{j=1}^k \sum_{n=-N}^N r_j r'_n 2^{n/2} \int_{2^n}^{2^{n+1}} (-tA)^{3/2} (1-tA)^{-3} B h_j \frac{dt}{t} \right\|_X^2 \\ &= \sup_{N \geq 1} \mathbb{E}' \left\| \sum_{j=1}^k \sum_{n=-N}^N r_j r'_n \int_{2^n}^{2^{n+1}} (2^{-n}t)^{-1/2} (-tA)^2 (1-tA)^{-3} B h_j \frac{dt}{t} \right\|_{\dot{X}_{-1/2}}^2 \\ &\approx \sup_{N \geq 1} \mathbb{E}'' \left\| \sum_{j=1}^k \sum_{n=-N}^N r''_{jn} \int_0^\infty m_N(t) \phi_1(-tA) B f_{jn}(t) \frac{dt}{t} \right\|_{\dot{X}_{-1/2}}^2. \end{aligned}$$

Novamente pela Proposição 2.2.7 os operadores

$$M_1(t) := \psi_1(-tA) = (-tA)^{3/2}(1-tA)^{-3/2}$$

são γ -limitados, logo

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) &\lesssim \|t \mapsto m_N(t)\phi_1(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})} \\ &\lesssim \|t \mapsto m_N(t)M_1(t)\psi(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})} \\ &\lesssim \|t \mapsto \psi(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.3.3 e estimando somas Gaussianas por somas de Rademacher (cf. Proposição 1.4.2) temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^k \gamma_j B h_j \right\|_{L^2(\Omega; \dot{X}_{-\frac{1}{2}})} &\approx \left\| \sum_{j=1}^k r_j B h_j \right\|_{L^2(\Omega; \dot{X}_{-\frac{1}{2}})} \\ &\lesssim \|t \mapsto \psi(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-\frac{1}{2}})} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Tomando o supremo sobre todos os conjuntos ortonormais em H concluímos que $B \in \gamma(H, \dot{X}_{-\frac{1}{2}})$ com

$$\|B\|_{\gamma(H, \dot{X}_{-\frac{1}{2}})} \lesssim \|t \mapsto \psi(-tA)B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-\frac{1}{2}})}.$$

Finalmente, (2.3.8) segue de (2.2.8). $\square$

A relevância do resultado que acabamos de provar reside de fato na equivalência (1) $\Leftrightarrow$ (3), conforme veremos adiante na Seção 4.2.

Vemos assim que a estimativa (2.3.9) segue na verdade de uma versão bem mais fraca da Proposição 2.3.3, a saber, que temos a imersão

$$\langle L^2(\Omega; \dot{X}_{-1}), L^2(\Omega; X) \rangle_{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^2(\Omega; \dot{X}_{-\frac{1}{2}}),$$

e uma inspeção em [55] mostra que essa imersão vale na presença de hipóteses mais fracas do que a limitação do cálculo- H^∞ , cf. também [1, Remark 3.3].

Outrossim, vale mencionar que nos trabalhos mais recentes [10, 11] os autores obtiveram essencialmente os mesmos resultados de LE MERDY através de uma abordagem mais direta e elementar, sem os recursos do cálculo funcional. Pode ser interessante indagarmos até que ponto pode-se abordar o caso estocástico de modo similar. Isso contudo seria objeto de pesquisas futuras.

Capítulo 3

O Problema de Cauchy Estocástico

“... semilinear parabolic problems driven by additive noise ... can be treated as stochastic evolution equations in some infinite-dimensional Banach or Hilbert space ... and they already form (in my humble opinion) a very rich class of problems with many interesting properties”.

Martin Hairer em [43]

A abordagem via semigrupos desenvolvida por DA PRATO e ZABCZYK [22] para equações diferenciais parciais estocásticas (EDPE's) consiste em reformular tais equações como um problema de Cauchy estocástico. Nesta tese consideramos equações de evolução estocásticas *lineares* com ruído *aditivo* da forma

$$(PCE)_{(A,B)} \quad \begin{cases} dU(t) = AU(t) dt + B dW_H(t), & t \in [0, T], \\ U(0) = 0, \end{cases}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo- C_0 de operadores lineares $(S(t))_{t \geq 0}$ num espaço de Banach X , $B \in \mathcal{L}(H, X)$ e W_H é um movimento Browniano cilíndrico sobre H (cf. Definição 1.5.2).

3.1 O problema de Cauchy estocástico $(PCE)_{(A,B)}$

Por definição, um processo U fracamente progressivamente mensurável é uma *solução fraca* de $(PCE)_{(A,B)}$ se para todo $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$ as seguintes duas condições são satisfeitas:

- as trajetórias $t \mapsto \langle U(t), A^*x^* \rangle$ são quase sempre integráveis;
- para cada $t \in [0, T]$,

$$\langle U(t), x^* \rangle = \int_0^t \langle U(s), A^*x^* \rangle ds + W_H(t)B^*x^*$$

quase sempre.

A teoria de integração estocástica desenvolvida por VAN NEERVEN e WEIS [74] que esboçamos na Seção 1.5, quando aplicada a função $\Phi = S(\cdot)B$, permite estudar a solubilidade de $(\text{PCE})_{(A,B)}$ através do correspondente operador integral associado.

Proposição 3.1.1. ([74, Theorem 7.1]) *Para um processo U com valores em X as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. U é solução fraca de $(\text{PCE})_{(A,B)}$;
2. U é solução “mild” de $(\text{PCE})_{(A,B)}$, isto é, $t \mapsto S(t)B$ é estocasticamente integrável em relação a W_H e

$$U(t) = \int_0^t S(t-s)B dW_H(s)$$

quase sempre;

3. existe um operador $R_T \in \gamma(L^2(0, T; H), X)$ tal que para todo $x^* \in X^*$

$$R_T^*x^* = B^*S^*(\cdot)x^* \text{ em } L^2(0, T; H). \quad (3.1.1)$$

Como consequência deste resultado, $(\text{PCE})_{(A,B)}$ pode não ter solução mesmo quando $H = \mathbb{R}$; se $A = \frac{d}{d\theta}$ é o gerador do grupo de rotação em $X = L^p(\mathbb{T})$ onde $\mathbb{T}$ é o círculo unitário e $1 \leq p < 2$, então

$$\begin{cases} dU(t) = AU(t) dt + \phi dw(t), & t \in [0, 2\pi], \\ U(0) = 0, \end{cases}$$

possui solução se, e somente se $\phi \in L^2(\mathbb{T})$, cf. [74, Example 7.3].

Contudo, $(\text{PCE})_{(A,B)}$ sempre admite solução em qualquer uma das seguintes situações:

- B é γ -radonificante e X tem tipo 2, cf. [75, Theorem 5.1];
- B é γ -radonificante e A gera um semigrupo analítico, e nesse caso se $\eta, \theta \geq 0$ e $\eta + \theta < \frac{1}{2}$ então U tem uma modificação com trajetórias em $C^\eta(0, T; X_\theta)$, cf. [27, Proposition 3.2, Theorem 4.1];
- B é γ -radonificante, X tem a propriedade (α) e $(\text{PCE})_{(A,C)}$ admite solução para todo $C : H \rightarrow X$ de posto 1, cf. [77, Theorem 6.4].

As variáveis $U(t)$ são Gaussianas com distribuição μ_t cujo operador de covariância $Q_t : X^* \rightarrow X$ é dado pela integral de Bochner

$$Q_t x^* = \int_0^t S(t) B B^* S^*(t) x^* dt.$$

É elementar verificar que

$$\mu_{t+s} = \mu_t * S(t) \mu_s, \quad (3.1.2)$$

ou seja o par $((S(t))_{t \geq 0}, (\mu_t)_{t \geq 0})$ constitui um semigrupo de Mehler¹. Uma medida de probabilidade μ_∞ de Radon² é *invariante* para $(\text{PCE})_{(A,B)}$ se μ_t converge a μ_∞ fracamente no sentido de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_X f(x) d\mu_t(x) = \int_X f(x) d\mu_\infty(x)$$

para toda $f \in C_b(X)$. Nesse caso, tomando o limite em (3.1.2) quando $s \rightarrow +\infty$ obtemos $\mu_\infty = \mu_t * S(t) \mu_\infty$ e daí é fácil deduzir que

$$\int_X P(t) f(x) d\mu_\infty(x) = \int_X f(x) d\mu_\infty(x), \quad t \geq 0, f \in C_b(X), \quad (3.1.3)$$

onde $(P(t))_{t \geq 0}$ é o semigrupo de transição definido por (0.1.7). Além disso, pode-se mostrar que uma tal medida invariante é *minimal* no sentido de que qualquer outra medida

¹Cf. [69] para uma introdução a esse tópico.

²Uma medida finita μ em $\mathcal{B}(X)$ é “de Radon” se para todo $S \in \mathcal{B}(X)$ e todo $\epsilon > 0$ existe um compacto $K_\epsilon \subset B$ tal que $\mu(B \setminus K_\epsilon) < \epsilon$. Essa propriedade é satisfeita por exemplo por distribuições de variáveis aleatórias em X , cf. [71, Proposition 2.3]. Estendida à uma família de medidas, essa propriedade leva à definição de “família uniformemente ‘tight’”: uma família $\mathcal{M}$ de medidas finitas é *uniformemente ‘tight’* se para todo $S \in \mathcal{B}(X)$ e todo $\epsilon > 0$ existe um compacto $K_\epsilon \subset B$ tal que $\mu(B \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ para todo $\mu \in \mathcal{M}$. Essas são hipóteses de regularidade frequentemente comuns em questões relacionadas à convergência fraca de medidas; cf. [9, 88].

μ satisfazendo (3.1.3) se escreve como $\mu = \nu * \mu_\infty$, onde ν é uma medida invariante por $(S(t))_{t \geq 0}$, cf. [76, Proposition 4.2]. O seguinte resultado é uma adaptação de resultados em [76] onde a noção mais geral de (3.1.3) para medida invariante é considerada. Por conveniência fornecemos a demonstração com o intuito de ilustrar os argumentos que serão utilizados mais a frente na demonstração do Teorema 3.3.2.

Proposição 3.1.2. *Suponha que $(\text{PCE})_{(A,B)}$ admita solução. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $(\text{PCE})_{(A,B)}$ admite uma medida invariante;
2. $S(\cdot)B$ representa um operador em $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)$, isto é, existe um operador $R \in \gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)$ tal que para todo $x^* \in X^*$

$$R^* x^* = B^* S^*(\cdot) x^* \text{ em } L^2(\mathbb{R}_+; H);$$

3. o limite fraco $Q_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_t$ existe e é o operador de covariância de uma medida Gaussiana μ_∞ .

Nessa situação, a medida invariante é a medida Gaussiana μ_∞ com operador de covariância $Q_\infty = R \circ R^*$ onde $R \in \gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)$ é representado por $S(\cdot)B$.

DEMONSTRAÇÃO. Vejamos que $(1) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (2)$.

$(1) \Leftrightarrow (3)$: Cf. [70, Proposition 3.1]. Vejamos primeiro que $(1) \Rightarrow (3)$; considerando as partes reais e imaginárias de $f(x) = e^{-i\langle x, x^* \rangle}$ segue de (1.2.5) que

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(x^*) &= \int_X e^{-i\langle x, x^* \rangle} d\mu(x) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_X e^{-i\langle x, x^* \rangle} d\mu_t(x) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-1/2 \langle Q_t x^*, x^* \rangle} \\ &=: e^{-1/2 \langle Q_\infty x^*, x^* \rangle} \end{aligned}$$

onde $\langle Q_\infty x^*, x^* \rangle := \lim_{t \rightarrow \infty} \langle Q_t x^*, x^* \rangle$ define um operador simétrico e positivo que é assim o operador de covariância Gaussiana de μ .

Reciprocamente, a família $(\mu_t)_{t \geq 0}$ é uniformemente “tight” e as contas acima mostram que

$$\hat{\mu}(x^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mu}_t(x^*)$$

e isto implica (1), cf. [74, Proposition 1.2] e [9, Corollary 3.8.5].

(3) $\Leftrightarrow$ (2): Cf. [76, Propositions 4.4]. Vejamos primeiro que (3) $\Rightarrow$ (2); como

$$\langle Q_\infty x^*, x^* \rangle = \int_0^\infty \langle S(t) B B^* S^*(t) x^*, x^* \rangle dt = \int_0^\infty \|B^* S^*(t) x^*\|^2 dt$$

temos $B^* S^*(\cdot) x^* \in L^2(\mathbb{R}_+; H)$ e o operador $R : L^2(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow X^{**}$ correspondente a (1.1.3) definido por

$$\langle x^*, Rf \rangle = \int_0^\infty [B^* S^*(t) x^*, f(t)]_H dt, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+; H), \quad x^* \in X^* \quad (3.1.4)$$

é dado, no caso em que $f \in L^2(\mathbb{R}_+; H)$ tem suporte num intervalo limitado $[0, r]$, pela integral de Bochner

$$Rf = \int_0^r S(t) B f(t) \in X.$$

Como as funções de suporte limitado são densas em $L^2(\mathbb{R}_+; H)$ concluímos que R assume valores em X , e (3.1.4) expressa que R é representado por $S(\cdot)B$ e exhibe $R \circ R^* = Q_\infty$ como um operador de covariância Gaussiana o que significa dizer, pela Proposição 1.3.6, que R é γ -radonificante.

Reciprocamente, seja $R \in \gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)$ o operador representado por $S(\cdot)B$. Para todo $x^* \in X^*$ temos $Rx^* = B^* S^*(\cdot) x^*$ em $L^2(\mathbb{R}_+; H)$, isto é

$$\langle Rf, x^* \rangle = \int_0^\infty [B^* S^*(t) x^*, f(t)]_H dt, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+; H), \quad x^* \in X^*$$

e portanto

$$\langle RR^* x^*, y^* \rangle = \int_0^\infty \langle S(t) B B^* S^*(t) x^*, y^* \rangle dt$$

é o operador de covariância Gaussiana de (3). $\square$

Agora, no caso em que $H = L^2(\mathcal{O})$, onde $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ é um domínio aberto, a identidade

$$W_H(t) \mathbf{1}_{\mathcal{O}'} = w([0, t] \times \mathcal{O}')$$

conecta os conceitos de movimento Browniano cilíndrico e ruído branco (no sentido de WALSH [89]) e isto permite reformular EDPE's dirigidas por ruído branco na forma de um problema de Cauchy estocástico.

É natural contudo que na formulação usual de uma EDPE em termos de (PCE)_(A,B), o operador B não seja γ -radonificante ou mesmo limitado. Considere por exemplo a seguinte a equação do calor estocástica com ruído branco aditivo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \xi) = \Delta u(t, \xi) + \frac{\partial w}{\partial t}(t, \xi), & t \in [0, T], \quad \xi \in (0, 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t \in [0, T], \\ u(0, \xi) = u_0(\xi), & \xi \in (0, 1) \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Uma solução de (3.1.5) é um processo adaptado $u : [0, T] \times \Omega \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\xi \mapsto u(t, \omega, \xi) \text{ pertence a } L^p(0, 1) \text{ para todo } (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$$

e o processo resultante com valores em $X = L^p(0, 1)$ é uma solução de

$$\begin{cases} dU(t) = AU(t) dt + dW_{L^2(0,1)}(t), & t \in [0, T], \\ U(0) = u_0, \end{cases}$$

onde A é a realização do Laplaciano com condições de Dirichlet em $X := L^p(0, 1)$, isto é

$$\mathcal{D}(A) = W^{2,p}(0, 1) \cap W_0^{1,p}(0, 1).$$

Como explicado em [27, Section 5] e de acordo com os resultados desse artigo citados acima, para $p \geq 2$ a identidade $H \rightarrow X$ não é limitada, mas resultados bem conhecidos em interpolação e caracterização de normas γ -radonificantes em L^p garantem que $H \hookrightarrow X_{-\delta}$ é γ -radonificante (para $\delta > \frac{1}{4}$). Consequentemente o problema (PCE)_(A_{-\delta}, I_{-\delta}) extrapolado a $X_{-\delta}$ tem solução que tem uma modificação com trajetórias Hölder contínuas em $(X_{-\delta})_\theta = X_\kappa$, $\kappa = \theta - \delta > 0$. Se p é suficientemente grande então $X_\kappa = H_0^{2\kappa,p} \hookrightarrow L^p$ pelo teorema de imersão de Sobolev, e assim U assume valores de fato em $X = L^p(0, 1)$.

Motivados por essa situação, e também porque a conjectura de Weiss é um problema em teoria de controle para sistemas lineares (0.1.2) onde em geral B é suposto limitado apenas em relação ao espaço de extrapolação X_{-1} , elaboramos nas seções seguintes a noção de solução e medida invariante em X para (PCE)_(A,B) no caso em que $B \in \mathcal{L}(H, X_{-1})$ e provamos versões das Proposições 3.1.1 e 3.1.2.

3.2 Existência e unicidade

No caso em que A é gera um semigrupo- C_0 em X e $B \in \mathcal{L}(H, X_{-1})$ a teoria da seção anterior se aplica ao problema de Cauchy estocástico realizado em X_{-1}

$$(PCE)_{(A_{-1}, B)} \quad \begin{cases} dU_{-1}(t) = A_{-1}U_{-1}(t) dt + B dW_H(t), & t \in [0, T], \\ U_{-1}(0) = 0. \end{cases}$$

Nesse contexto, as seguintes definições formalizam a noção de solução para o problema “(PCE) $_{(A, B)}$ ” em X .

Definição 3.2.1. *Um processo U com valores em X é uma solução fraca de $(PCE)_{(A, B)}$ se o processo $\iota_{-1}U$ é uma solução fraca de $(PCE)_{(A_{-1}, B)}$, i.e., $\iota_{-1}U$ é fracamente progressivamente mensurável, ou seja, para todo $x_{-1}^* \in X_{-1}^*$ o processo real $\langle \iota_{-1}U, x_{-1}^* \rangle$ é progressivamente mensurável, e para todo $x_{-1}^* \in \mathcal{D}(A_{-1}^*)$ as duas condições seguintes são satisfeitas:*

(i) *as trajetórias $t \mapsto \langle \iota_{-1}U(t), A_{-1}^*x_{-1}^* \rangle$ são quase sempre integráveis;*

(ii) *para cada $t \in [0, T]$,*

$$\langle \iota_{-1}U(t), x_{-1}^* \rangle = \int_0^t \langle \iota_{-1}U(s), A_{-1}^*x_{-1}^* \rangle ds + W_H(t)B^*x_{-1}^*$$

quase sempre.

Definição 3.2.2. *Um processo U com valores em X é uma solução “mild” de $(PCE)_{(A, B)}$ se o processo $\iota_{-1}U$ é uma solução “mild” de $(PCE)_{(A_{-1}, B)}$, i.e.,*

(i) *a função $t \mapsto S_{-1}(t)B$ é estocasticamente integrável em X_{-1} , em relação a W_H ;*

(ii) *para cada $t \in [0, T]$,*

$$\iota_{-1}U(t) = \int_0^t S_{-1}(t-s)B dW_H(s) \quad (3.2.1)$$

quase sempre.

O seguinte resultado conecta os dois conceitos de solução acima e estende a Proposição 3.1.1.

Teorema 3.2.3. *Para um processo U em X as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. U é solução fraca de $(\text{PCE})_{(A,B)}$;
2. U é solução mild de $(\text{PCE})_{(A,B)}$;
3. existe um operador $R_T \in \gamma(L^2(0, T; H), X)$ tal que para todo $x_{-1}^* \in X_{-1}^*$ temos

$$R_T^*(\iota_{-1}^* x_{-1}^*) = B^* S_{-1}^*(\cdot) x_{-1}^* \quad \text{em } L^2(0, T; H). \quad (3.2.2)$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração segue as ideias daquela em [74, Theorem 7.1], cf. Proposição 3.1.1 acima.

(1) $\Leftrightarrow$ (2): A demonstração desta equivalência é análoga a sua correspondente em [74, Theorem 7.1].

(2) $\Rightarrow$ (3): Por hipótese,

$$\iota_{-1} U(t) = \int_0^t S_{-1}(t-s) B dW_H(s)$$

logo

$$\langle U(t), \iota_{-1}^* x_{-1}^* \rangle = \int_0^t B^* S_{-1}^*(t-s) x_{-1}^* dW_H(s)$$

é Gaussiana para todo $x_{-1}^* \in X_{-1}^*$. Como ι_{-1} é injetiva, e o subespaço

$$Z := \{\iota_{-1}^* x_{-1}^* : x_{-1}^* \in X_{-1}^*\} = \mathcal{R}(\iota_{-1}^*) \quad (3.2.3)$$

é assim denso em X^* na topologia fraca-estrela (cf. Exemplo 1.2.9), e $U(t)$ é separável, segue da Proposição 1.2.8 que $U(t)$ é Gaussiana.

Por [74, Theorem 7.1] o operador $R_{-1,T} : L^2(0, T; H) \rightarrow X_{-1}$ definido por

$$R_{-1,T} f := \int_0^T S_{-1}(t) B f(t) dt \quad (3.2.4)$$

pertence a $\gamma(L^2(0, T; H), X_{-1})$ e satisfaz

$$\begin{aligned} \|R_{-1,T}^* x_{-1}^*\|_{L^2(0,T;H)}^2 &= \int_0^T \|B^* S_{-1}^*(T-s) x_{-1}^*\|_H^2 ds \\ &= \mathbb{E} \langle \iota_{-1} U(T), x_{-1}^* \rangle^2 \\ &= \|\iota_T^* \iota_{-1}^* x_{-1}^*\|_{\mathcal{H}_T}^2, \end{aligned}$$

onde $(\iota_T, \mathcal{H}_T)$ é o núcleo reprodutor associado a $U(T)$. Acima, a primeira igualdade segue de (3.2.4), a segunda é consequência da integrabilidade estocástica de S_{-1} e (3.2.1), e a terceira segue de (1.2.6).

Antes de continuar com a demonstração rigorosa, tentaremos motivar heurísticamente a nossa construção. Observe que, pela definição de $R_{-1,T}$ em (3.2.4), o operador “ $R_T \in \gamma(L^2(0, T; H), X)$ ” que procuramos, se existe, necessariamente satisfaz

$$R_T^* \iota_{-1}^* x_{-1}^* = R_{-1,T}^* x_{-1}^*. \quad (3.2.5)$$

A ideia então é *definir* um operador “ $R_T^* : Z \rightarrow L^2(0, T; H)$ ” por (3.2.5), estendê-lo a X^* usando um argumento de densidade, e verificar que na verdade $(R_T^*)^* : L^2(0, T; H) \rightarrow X^{**}$ assume valores em X , de modo que $R_T := (R_T^*)^*$ seja o operador que procuramos. O argumento de densidade deve ser um pouco mais cuidadoso que o usual, visto que Z é denso somente na topologia fraca-estrela. Isso pode ser contornado usando o núcleo reprodutor $\mathcal{H}_T$.

Assim, defina o operador $R_T^* : Z \rightarrow L^2(0, T; H)$ por (3.2.5), i.e.

$$R_T^* \iota_{-1}^* x_{-1}^* := R_{-1,T}^* x_{-1}^*. \quad (3.2.6)$$

Então

$$\|R_T^* \iota_{-1}^* x_{-1}^*\|_{L^2(0,T;H)} = \|\iota_T^* \iota_{-1}^* x_{-1}^*\|_{\mathcal{H}_T}^2, \quad (3.2.7)$$

o que mostra que R_T^* é bem-definido e limitado em Z .

Como $\iota_{-1} \circ \iota_T$ é injetiva, a imagem de X_{-1}^* por $\iota_T^* \circ \iota_{-1}^*$ é densa em $\mathcal{H}_T^* \simeq \mathcal{H}_T$ na topologia fraca-estrela. Como $\mathcal{H}_T$ é reflexivo, essa imagem é densa na topologia fraca e consequentemente denso (na topologia da norma), por Hahn-Banach. Assim, dado $x^* \in X^*$, podemos escolher uma sequência $(x_{-1,n}^*) \subset X_{-1}^*$ tal que $\iota_T^* \iota_{-1}^* x_{-1,n}^* \rightarrow \iota_T^* x^*$ em $\mathcal{H}_T$. Por (3.2.7) a sequência $(R_T^* \iota_{-1}^* x_{-1,n}^*)$ é de Cauchy em $L^2(0, T; H)$, e portanto converge a um elemento $f_{x^*} \in L^2(0, T; H)$. É elementar verificar que f_{x^*} não depende de qualquer escolha particular da sequência $(x_{-1,n}^*)$ em X_{-1}^* e que

$$R_T^* x^* := f_{x^*}$$

estende R_T^* a um operador limitado de X^* em $L^2(0, T; H)$ para o qual

$$\|R_T^* x^*\|_{L^2(0,T;H)} = \|\iota_T^* x^*\|_{\mathcal{H}_T} \quad (3.2.8)$$

para todo $x^* \in X^*$.

Agora, vejamos que $R_T^{**} : L^2(0, T; H) \rightarrow X^{**}$ de fato assume valores em X . Para elementos $f \in L^2(0, T; H)$ da forma

$$f = \mathbf{1}_{(a,b)} \otimes h, \quad 0 \leq a < b \leq T, \quad h \in H \quad (3.2.9)$$

e $x^* \in Z$, digamos $x^* = \iota_{-1}^* x_{-1}^*$, temos

$$\begin{aligned} \langle x^*, R_T^{**} f \rangle &= [R_T^* x^*, f]_{L^2(0,T;H)} \\ &= [f, R_{-1,T}^* x_{-1}^*]_{L^2(0,T;H)} \\ &= [\mathbf{1}_{(a,b)} \otimes h, B^* S_{-1}^* x_{-1}^*]_{L^2(0,T;H)} \\ &= \int_a^b \langle S_{-1}(t) B h, x_{-1}^* \rangle dt \\ &= \langle x, x^* \rangle \end{aligned}$$

onde $x = \int_a^b S_{-1}(t) B x_{-1}^* dt \in \mathcal{D}(A_{-1}) = X$. Mas então $R_T^{**} f = x \in X$ e como os elementos f em (3.2.9) são densos em $L^2(0, T; H)$ concluimos que R_T^{**} leva todo o $L^2(0, T; H)$ em X .

Finalmente, segue de (3.2.8) que $R_T \circ R_T^* = \iota_T \circ \iota_T^*$ é o operador de covariância de uma medida Gaussiana em X , o que implica $R_T \in \gamma(L^2(0, T; H), X)$ pela Proposição 1.3.6, e (3.2.2) é consequência imediata de (3.2.4) e (3.2.6).

(3) $\Rightarrow$ (2): A demonstração se baseia no argumento exposto no Exemplo 1.5.4. A identidade (3.2.2) significa que $\iota_{-1} \circ R_T \in \gamma(L^2(0, T; H), X_{-1})$ é representado por $S_{-1}(\cdot)B$. Considerando a decomposição $L^2(0, T; H) = \mathcal{N}(R_T) \oplus \overline{\mathcal{R}(R_T^*)}$ onde o subespaço $\overline{\mathcal{R}(R_T^*)}$ é separável, podemos extrair uma sequência $(x_{-1,n}^*)$ em X_{-1}^* tal que $(f_n) := (R_T^* \iota_{-1}^* x_{-1,n}^*)$ é uma base ortonormal de $\overline{\mathcal{R}(R_T^*)}$. Então as variáveis aleatórias

$$\gamma_n := \int_0^t B^* S_{-1}^*(t-s) x_{-1,n}^* dW_H(s)$$

são normais e independentes, a variável

$$U(t) := \sum_{n \geq 1} \gamma_n R_t f_n$$

é bem-definida e satisfaz

$$\langle \iota_{-1} U(t), x_{-1}^* \rangle = \int_0^t B^* S_{-1}^*(t-s) x_{-1}^* dW_H(s)$$

o que implica integrabilidade estocástica de $S_{-1}(\cdot)B$ bem como (3.2.1). $\square$

3.3 Medidas invariantes

Suponha que $(\text{PCE})_{(A-1,B)}$ possua uma solução “mild”. De acordo com o exposto na seção anterior, as variáveis $U_{-1}(t)$ são Gaussianas e o limite fraco $\mu_{-1,\infty}$ das distribuições $\mu_{-1,t}$, quando existe no sentido de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{X_{-1}} f(x) d\mu_{-1,t}(x) = \int_{X_{-1}} f(x) d\mu_{-1,\infty}(x), \quad f \in C_b(X_{-1}). \quad (3.3.1)$$

é uma medida invariante minimal.

Definição 3.3.1. *Seja $B \in \mathcal{L}(H, X_{-1})$. Uma medida de probabilidade de Radon μ em X é invariante para $(\text{PCE})_{(A,B)}$ se a medida $\iota_{-1}(\mu)$ em X_{-1} é invariante para $(\text{PCE})_{(A-1,B)}$, no sentido de (3.3.1).*

O resultado seguinte estende a Proposição 3.1.2 ao contexto da definição anterior.

Teorema 3.3.2. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $(\text{PCE})_{(A,B)}$ admite uma medida invariante em X ;
2. existe um operador $R_\infty \in \gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)$ tal que para todo $x_{-1}^* \in X_{-1}^*$ temos

$$R_\infty^*(\iota_{-1}^* x_{-1}^*) = B^* S_{-1}^*(\cdot) x_{-1}^* \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}_+; H). \quad (3.3.2)$$

Nessa situação, a medida invariante μ é tal que $\iota_{-1}(\mu)$ é a medida Gaussiana em X_{-1} com operador de covariância $Q_{-1,\infty} = \iota_{-1} R_\infty R_\infty^* \iota_{-1}^*$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é análoga a do Teorema 3.2.3 e se baseia em resultados e ideias de [76] expostos na Proposição 3.1.2.

(1) $\Rightarrow$ (2): Seja μ uma medida invariante para $(\text{PCE})_{(A,B)}$. Então $\mu_{-1,\infty} := \iota_{-1}(\mu)$ é a medida Gaussiana e invariante para $(\text{PCE})_{(A-1,B)}$, com operador de covariância $Q_{-1,\infty} = R_{-1,\infty} \circ R_{-1,\infty}^*$, onde o operador $R_{-1,\infty} : L^2(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow X_{-1}$ é dado por

$$R_{-1,\infty} f := \int_0^\infty S_{-1}(t) B f(t) dt \quad (3.3.3)$$

e pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X_{-1})$. Observemos que

$$\langle \mu, \iota_{-1}^* x_{-1}^* \rangle = \langle \mu_{-1,\infty}, x_{-1}^* \rangle$$

é Gaussiana para todo $x_{-1}^* \in X_{-1}^*$, logo μ é Gaussiana pela Proposição 1.2.8. Sendo Q a covariância de μ e $(\iota_Q, \mathcal{H}_Q)$ seu núcleo reprodutor temos $Q_{-1,\infty} = \iota_{-1}Q\iota_{-1}^*$, logo

$$\begin{aligned} \|R_{-1,\infty}^*x_{-1}^*\|_{L^2(0,T;H)}^2 &= \langle Q_{-1,\infty}x_{-1}^*, x_{-1}^* \rangle^2 \\ &= \|\iota_Q^*\iota_{-1}^*x_{-1}^*\|_{\mathcal{H}_Q}^2, \end{aligned}$$

e a demonstração prossegue da mesma forma como feito na implicação (2) $\Rightarrow$ (3) do Teorema 3.2.3.

(2) $\Rightarrow$ (1): Seja μ_∞ a medida Gaussiana em X com covariância $R_\infty R_\infty^*$. Então $\iota_{-1}(\mu_\infty)$ é uma medida Gaussiana em X_{-1} com covariância³

$$\iota_{-1}(R_\infty R_\infty^*)\iota_{-1}^* = \iota_{-1}R_\infty(\iota_{-1}R_\infty)^*.$$

Por hipótese, $\iota_{-1}R_\infty \in \gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X_{-1})$ é representado por $S_{-1}(\cdot)B$, logo $\iota_{-1}(\mu_\infty)$ é uma medida invariante para $(\text{PCE})_{(A_{-1}, B)}$ pela Proposição 3.1.2. $\square$

Como escrevemos no início deste capítulo, nosso propósito nesta tese é caracterizar existência de medida invariante para equações lineares com ruído aditivo. Ao menos em espaços de Hilbert X , alguns autores, por exemplo [23, 15, 34, 21], consideraram o problema para equações semilineares, da forma

$$\begin{cases} dU(t) = (AU(t) + F(U(t))) dt + B dW_H(t), & t \geq 0, \\ U(0) = x, \end{cases} \quad (3.3.4)$$

onde A e B são como antes e $F : X \rightarrow X$ é, digamos, contínua. Além de existência, uma questão típica considerada por tais autores é a da regularidade da medida invariante μ_F da equação (3.3.4) em relação à medida invariante μ da equação linear $(\text{PCE})_{(A, B)}$ associada (isto é, com $F = 0$). Regularidade aqui significa se $\mu_F \ll \mu$, ou seja, se μ_F é absolutamente contínua em relação à μ e, nesse caso, se temos, digamos,

$$\frac{d\mu_F}{d\mu} \in W^{1,2}(X, \mu), \quad (3.3.5)$$

onde $W^{1,2}(X, \mu)$ são certos espaços de Sobolev abstratos.

Acreditamos que essas questões podem ser investigadas em espaços de Banach a partir dos artigos de KUNZE [60], sobre o semigrupo de transição associado a equações semilineares em espaços de Banach, e [35], que trata dentre outros assuntos dos espaços de Sobolev que aparecem em (3.3.5).

³Cf. o parágrafo anterior ao Exemplo 1.2.7.

Capítulo 4

Solução da Conjectura de Weiss Estocástica

“There are good reasons why the theorems should all be easy and the definitions hard. . . . the proofs of many theorems involve merely stripping away the disguise.”

Michael Spivak em [85]

4.1 Resultado Principal

Pela teoria geral de semigrupos o resolvente $R(\lambda, A_{-1})$ leva X_{-1} em $\mathcal{D}(A_{-1}) = X$ e portanto $R(\lambda, A_{-1})B$ pode ser visto como operador de H em X . A proposição seguinte mostra que, quando $(\text{PCE})_{(A,B)}$ admite uma medida invariante e visto como operador de H em X , $R(\lambda, A_{-1})B$ é de fato radonificante. Este é o operador denotado por $R(\lambda, A)B$ no Teorema 4.1.2.

Proposição 4.1.1. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 em X e assumamos que as condições equivalentes do Teorema 3.3.2 sejam satisfeitas. Então, para todo $\lambda \in \rho(A)$ existe um operador $\widehat{S}_{\lambda,B} \in \gamma(H, X)$ tal que*

$$\iota_{-1} \circ \widehat{S}_{\lambda,B} = R(\lambda, A_{-1}) \circ B. \quad (4.1.1)$$

DEMONSTRAÇÃO. Observe primeiro que, se um tal operador existe então para todo $h \in H$

e $\lambda > \omega_0(S_{-1})$

$$\begin{aligned}\iota_{-1} \circ \widehat{S}_{\lambda,B}h &= R(\lambda, A_{-1})Bh \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_{-1}(t)Bh \, dt \\ &= \int_0^\infty S_{-1}(t)B(e^{-\lambda t}h) \, dt \\ &= \iota_{-1} \circ R_\infty(e^{-\lambda(\cdot)} \otimes h)\end{aligned}$$

portanto $\widehat{S}_{\lambda,B}h = R_\infty(e^{-\lambda(\cdot)} \otimes h)$. Essa é a receita para definir $\widehat{S}_{\lambda,B}$ e agora podemos prosseguir com a demonstração formal.

Suponha primeiro que $\lambda \in \rho(A)$, com $\lambda > \omega_0(S_{-1})$. Por hipótese existe um operador $R_\infty \in \gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)$ tal que para todo $x_{-1}^* \in X_{-1}^*$ temos $R_\infty^*(\iota_{-1}^* x_{-1}^*) = B^* S_{-1}^*(\cdot) x_{-1}^*$ em $L^2(\mathbb{R}_+; H)$. O operador $\widehat{S}_{\lambda,B} : H \rightarrow X$ definido por

$$\widehat{S}_{\lambda,B}h := R_\infty(e^{-\lambda(\cdot)} \otimes h)$$

é γ -radonificante pela propriedade de ideal e satisfaz

$$\begin{aligned}\langle \iota_{-1} \widehat{S}_{\lambda,B}h, x_{-1}^* \rangle &= [e^{-\lambda(\cdot)} \otimes h, B^* S_{-1}^*(\cdot) x_{-1}^*]_{L^2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \langle S_{-1}(t)Bh, x_{-1}^* \rangle \, dt \\ &= \langle R(\lambda, A_{-1})Bh, x_{-1}^* \rangle\end{aligned}$$

para todo $x_{-1}^* \in X_{-1}^*$. Por Hahn-Banach, $\widehat{S}_{\lambda,B}$ satisfaz a identidade (4.1.1).

Para $\mu \in \rho(A)$ qualquer, definimos

$$\widehat{S}_{\mu,B} := \widehat{S}_{\lambda,B} + (\lambda - \mu)R(\mu, A)\widehat{S}_{\lambda,B}.$$

É claro que $\widehat{S}_{\mu,B} \in \gamma(H, X)$, e pela identidade do resolvente (2.1.4) temos

$$\begin{aligned}\iota_{-1} \widehat{S}_{\mu,B} &= \iota_{-1} \widehat{S}_{\lambda,B} + (\lambda - \mu)\iota_{-1} R(\mu, A)\widehat{S}_{\lambda,B} \\ &= \iota_{-1} \widehat{S}_{\lambda,B} + (\lambda - \mu)R(\mu, A_{-1})\iota_{-1} \widehat{S}_{\lambda,B} \\ &= R(\lambda, A_{-1})B + (\lambda - \mu)R(\mu, A_{-1})R(\lambda, A_{-1})B \\ &= R(\mu, A_{-1})B.\end{aligned}$$

Como $R(\lambda, A_{-1})$ leva X_{-1} em $\mathcal{D}(A_{-1}) = X$, podemos interpretar $R(\lambda, A_{-1})B$ como um operador de H em X . Como ι_{-1} é injetiva, esse operador coincide com $\widehat{S}_{\lambda, B}$. De agora em diante escreveremos

$$R(\lambda, A)B := \widehat{S}_{\lambda, B}$$

para denotar este operador. □

O teorema abaixo é o resultado principal desta tese. No enunciado abaixo, como sempre, $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência Gaussiana definida num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{P})$.

Teorema 4.1.2. *Seja X um espaço de Banach com a propriedade (α) . Sejam $-A$ um operador setorial em X admitindo um cálculo- H^∞ limitado de ângulo $< \pi/2$ e $B \in \mathcal{L}(H, X_{-1})$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $(\text{PCE})_{(A, B)}$ admite uma medida invariante em X ;
2. $(-A)^{-1/2}B \in \gamma(H, X)$;
3. $\lambda \mapsto \lambda^{1/2}R(\lambda, A)B$ representa um operador em $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{d\lambda}{\lambda}; H), X)$;
4. para todo $\lambda > 0$ temos $R(\lambda, A)B \in \gamma(H, X)$ e a série Gaussiana

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n 2^{n/2} R(2^n, A)B \tag{4.1.2}$$

converge em $L^2(\Omega; \gamma(H, X))$, ou equivalentemente, no espaço $\gamma(H, X)$ em probabilidade.

4.2 Demonstração do Resultado Principal

Como é usual, denotaremos por $\mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty e^{-ts} f(s) ds$ a transformada de Laplace clássica de uma função f .

Lema 4.2.1 (Transformada de Laplace). *Se $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H)$ então $Lf(t) := t\mathcal{L}f(t)$ pertence a $L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H)$ e*

$$\|Lf\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H)}.$$

Consequentemente a aplicação $L : f \mapsto Lf$ é uma contração linear em $L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H)$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $te^{ts}ds$ é uma medida de probabilidade em $\mathbb{R}_+$ para cada $t > 0$ segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|Lf(t)\|_H^2 \frac{dt}{t} &= \int_0^\infty t^2 \|\mathcal{L}f(t)\|_H^2 \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left\| \int_0^\infty f(s)te^{-ts}ds \right\|_H^2 \frac{dt}{t} \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \|f(s)\|_H^2 te^{-ts}ds \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \|f(s)\|_H^2 \int_0^\infty e^{-ts}dt ds \\ &= \int_0^\infty \|f(s)\|_H^2 \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

□

Pelo procedimento de extensão de Kalton-Weis (cf. Teorema 1.3.7) a transformada de Laplace L induz uma transformada de Laplace $\tilde{L}$ em $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), Y)$, qualquer que seja o espaço de Banach Y , que é ainda uma contração. Por outro lado, é fácil verificar que L é auto-adjunto, isto é,

$$[Lf, g]_{L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H)} = [f, Lg]_{L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H)}, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H),$$

portanto $\tilde{L}(T) = T \circ L$ para todo $T \in \gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), Y)$.

Lema 4.2.2. *Seja Y um espaço de Banach qualquer. Se $R_\Phi \in \gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), Y)$ é representado por Φ então $\tilde{L}(R_\Phi)$ é representado por*

$$\mathcal{L}\Phi(t)h := t \int_0^\infty e^{-ts}\Phi(s)hds, \quad h \in H.$$

DEMONSTRAÇÃO. Como $\tilde{L}(R_\Phi) = R_\Phi \circ L$, é elementar verificar, usando (1.1.2) e o teorema de Fubini, que

$$[\tilde{L}(R_\Phi)^* y^*, f]_{L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H)} = \int_0^\infty \langle \mathcal{L}\Phi(t)f(t), y^* \rangle \frac{dt}{t}$$

para quaisquer $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H)$ e $y \in Y^*$. □

DEMONSTRAÇÃO DAS EQUIVALÊNCIAS (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Vamos demonstrar que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). Observemos primeiro que Φ pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)$ se, e

somente se $t \mapsto t^{1/2}\Phi(t)$ pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)$; de fato este último é a extensão de Kalton-Weis da isometria

$$f \in L^2(\mathbb{R}_+, dt) \mapsto (\cdot)^{1/2} f(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}).$$

Para o restante da demonstração fixamos as funções

$$\varphi_0(z) = z^{1/2}e^{-z}, \quad \varphi(z) = \frac{z^{1/2}}{(1+z)} \quad \text{e} \quad \phi(z) = \frac{1}{(1+z)^{1/2}}.$$

(1) $\Rightarrow$ (2): Pelo Teorema 3.3.2 temos que $t \mapsto S(t)B$ pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)$, o que significa dizer que

$$t \mapsto \varphi_0(-tA) = (-tA)^{1/2}S(t)B$$

pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})$. A transformada de Laplace (clássica) de $s \mapsto \varphi_0(sz)$ é igual a

$$\mathcal{L}\{s \mapsto (sz)^{1/2}e^{-sz}\}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{z^{1/2}}{(t+z)^{3/2}}$$

logo pela Proposição 2.2.4 temos que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}(-A)^{1/2}(t-A)^{-3/2}B = \int_0^\infty e^{-ts}(-sA)^{1/2}S(s)B \, ds$$

ou equivalentemente

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}(-t^{-1}A)^{1/2}(1-t^{-1}A)^{-3/2}B = t \int_0^\infty e^{-ts}\varphi_0(-sA)B \, ds.$$

Assim, pelos comentários feitos após o Lema 4.2.1 deduzimos que

$$t \mapsto (-t^{-1}A)^{1/2}(1-t^{-1}A)^{-3/2}B = \psi(-t^{-1}A)B$$

pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})$, o que implica (2) pelo Teorema 2.3.6.

(2) $\Rightarrow$ (3): Por (1) $\Rightarrow$ (2) do Teorema 2.3.6 resulta que

$$s \mapsto \varphi(-sA)B = (-sA)^{1/2}(1-sA)^{-1}B$$

pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})$, e isto equivale a dizer que

$$s \mapsto s^{1/2}(1-sA)^{-1}B$$

pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)$. Substituindo $s = \frac{1}{t}$ obtemos que

$$t \mapsto t^{1/2}(t - A)^{-1}B$$

pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{ds}{s}; H), X)$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Substituindo $t = \frac{1}{s}$ vemos que (3) equivale a dizer que

$$s \mapsto s^{1/2}(1 - sA)^{-1}B$$

pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{ds}{s}; H), X)$ e isto equivale a dizer que

$$s \mapsto (-sA)^{1/2}(1 - sA)^{-1}B = \varphi(-sA)B$$

pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{ds}{s}; H), \dot{X}_{-1/2})$. Pela Proposição 2.2.7 os operadores

$$M(s) := \phi(-sA) = (1 - sA)^{-1/2}$$

são γ -limitados para $s > 0$, e daí resulta pelo teorema dos γ -multiplicadores que

$$s \mapsto M(s)\varphi(-sA)B = \psi(-sA)B$$

pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{ds}{s}; H), \dot{X}_{-1/2})$. A conclusão segue da equivalência (1) $\Leftrightarrow$ (3) do Teorema 2.3.6.

(2) $\Rightarrow$ (1): Por (1) $\Rightarrow$ (2) do Teorema 2.3.6 deduzimos que

$$t \mapsto \varphi_0(-tA) = (-tA)^{1/2}S(t)B$$

pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), \dot{X}_{-1/2})$, o que equivale a dizer que $t \mapsto S(t)B$ pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+; H), X)$, e isto implica (1) pelo Teorema 3.3.2. $\square$

Para o nosso próximo resultado, comecemos observando que a imagem da medida de Lebesgue pela aplicação exponencial $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é a medida $\frac{dt}{t}$. Assim, se $g = f \circ \exp$ então $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})$ se, e somente se $g \in L^2(\mathbb{R}, dt)$. Seja S_θ a faixa $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \theta\}$ e denote por μ a imagem da medida de Lebesgue de S_θ , pela aplicação exponencial, no setor Σ_θ . Seguindo a literatura (cf. [45, p. 114]) definimos o espaço de Hardy $H^2(\Sigma_\theta, \mu; H)$ como o espaço das funções analíticas limitadas $f : \Sigma_\theta \rightarrow H$ tais que as funções $t \mapsto f(te^{\pm i\eta})$ pertencem a $L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H)$ para todo $0 < \eta < \theta$ e

$$\sup_{0 < \eta < \theta} \int_0^\infty \|f(te^{\pm i\eta})\|^2 \frac{dt}{t} < \infty.$$

Lema 4.2.3. *Seja $f : \Sigma_\theta \rightarrow H$ uma função analítica limitada tal que para algum $0 < \eta < \theta$ as funções $t \mapsto f(te^{\pm i\eta})$ pertencem a $L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H)$. Então $f \in H^2(\Sigma_\eta, \mu; H)$ e*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f(2^n)\|_H^2 \lesssim \|f\|_{H^2(\Sigma_\eta, \mu; H)}^2.$$

Em outras palavras, o operador $f \in H^2(\Sigma_\eta, \mu; H) \mapsto (f(2^n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(H)$ é limitado.

DEMONSTRAÇÃO. Considerando uma base ortonormal do subespaço fechado separável $\overline{\text{lin}(f(2^n))_{n \in \mathbb{Z}}}$ podemos supor que $H = \mathbb{R}$ e que f é harmônica. Assim, a questão é equivalente a mostrar que se $g : S_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica e as funções $s \mapsto g(s \pm i\eta)$ pertencem a $L^2(\mathbb{R})$ então $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(n \ln 2)|^2 \lesssim \|g|_{S_\eta}\|_{L^2(S_\eta)}^2$. Pela fórmula de Poisson para faixas [94] temos, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|\beta| < \eta$,

$$g(\alpha + i\beta) = \sum_{j=0,1} \int_{-\infty}^{\infty} P_j(\alpha, \beta - s) g(s + (-1)^j i\eta) ds$$

onde os P_j são núcleos de Poisson apropriados com propriedades de integrabilidade suficientes para concluirmos que

$$\sup_{|\beta| \leq \eta} \|g(\cdot + i\beta)\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$$

de modo que, por Fubini

$$\int_{S_\eta} g^2 = \int_{-\eta}^{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} g(s + it)^2 ds dt \leq 2\eta \sup_{|\beta| \leq \eta} \|g(\cdot + i\beta)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

ou seja $g|_{S_\eta} \in L^2(S_\eta)$. Para $0 < \delta < \eta$ suficientemente pequeno, os discos

$$D_n := \{z \in \mathbb{C} : |z - n \ln 2| < \delta\}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

são disjuntos e assim as funções $\phi_n := |D_n|^{-1/2} \mathbf{1}_{D_n}$ são ortonormais em $L^2(S_\eta)$. Pelo teorema do valor médio (cf. [17, Lemma 1.11])

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(n \ln 2)|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{|D_n|} \int_{D_n} g(x + iy) dx dy \right|^2 \\ &= \frac{1}{\pi \delta^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \int_{S_\eta} g(x + iy) \phi_n(x + iy) dx dy \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{\pi \delta^2} \|g|_{S_\eta}\|_{L^2(S_\eta)}^2. \end{aligned}$$

□

O procedimento de extensão de Kalton-Weis (cf. Teorema 1.3.7) permite estender o operador acima a um operador $\gamma(H^2(\Sigma_\eta, \mu; H), X) \rightarrow \gamma(\ell^2(H), X)$. Pelo mesmo argumento do Exemplo 1.4.6 podemos ver que a restrição desse operador aos elementos representáveis por funções $\Phi : \Sigma_\eta \rightarrow \gamma(H, X)$ é dada por

$$I_\Phi \in \gamma(H^2(\Sigma_\eta, \mu; H), X) \mapsto (\Phi(2^n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \gamma(\ell^2, \gamma(H, X)),$$

o que significa dizer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n \Phi(2^n)$ converge em probabilidade no espaço $\gamma(H, X)$.

DEMONSTRAÇÃO DA IMPLICAÇÃO (3) $\Rightarrow$ (4). É claro que $(-A)^{-1/2}B \in \gamma(H, X)$ implica $(-e^{\pm i\eta}A)^{-1/2}B \in \gamma(H, X)$ para todo $\eta > 0$ suficientemente pequeno. Pela implicação (2) $\Rightarrow$ (3) deduzimos que

$$t \mapsto t^{1/2}R(t, e^{\pm i\eta}A)B = e^{\mp i\eta/2}(te^{\mp i\eta})^{1/2}R(te^{\mp i\eta}, A)B$$

pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)$. É óbvio então que $t \mapsto (te^{\pm i\eta})^{1/2}R(te^{\pm i\eta}, A)B$ pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)$ o que implica, pelo Lema 4.2.3 e pelo procedimento de Kalton-Weis, que a sequência $(2^{n/2}R(2^n, A)B)_{n \in \mathbb{Z}}$ pertence a $\gamma(\ell^2, \gamma(H, X))$ no sentido de que a série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n 2^{n/2}R(2^n, A)B$ converge como na afirmação (4). $\square$

O próximo lema assegura que certas somas Gaussianas de resolventes da forma

$$\sum_{n \in F} \gamma_n s_n^{1/2} R(s_n, A)B$$

podem ser estimadas independentemente de escolhas arbitrárias, contanto que restrinjamos as escolhas a certos intervalos diádicos fixos. Mais precisamente, um intervalo em $\mathbb{R}_+$ será dito *diádico* (em relação a medida $\frac{dt}{t}$) se for da forma

$$[2^{k/2^M}, 2^{(k+1)/2^M}), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad M \in \mathbb{N}. \quad (4.2.1)$$

Estes são as imagens dos intervalos diádicos usuais $[k/2^M, (k+1)/2^M) \subset \mathbb{R}$ pela aplicação exponencial (a menos de um fator $\ln 2$).

Lema 4.2.4. *Seja A γ -setorial, e sejam $I_1, \dots, I_N$ intervalos diádicos. Para quaisquer escolhas $s_n, t_n \in I_n$ temos*

$$\left\| \sum_{n \in F} \gamma_n s_n^{1/2} R(s_n, A)B \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))} \simeq \left\| \sum_{n \in F} \gamma_n t_n^{1/2} R(t_n, A)B \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))}$$

com constantes independentes do subconjunto finito $F \subset \mathbb{Z}$, dos intervalos I_n e dos pontos $s_n, t_n \in I_n$.

DEMONSTRAÇÃO. Usando a identidade do resolvente, temos

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n \in F} \gamma_n (s_n^{1/2} R(s_n, A) - t_n^{1/2} R(t_n, A)) B \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))} \\ & \leq \left\| \sum_{n \in F} \gamma_n \frac{t_n - s_n}{t_n^{1/2} s_n^{1/2}} s_n R(s_n, A) t_n^{1/2} R(t_n, A) B \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))} \\ & \quad + \left\| \sum_{n \in F} \gamma_n \frac{s_n^{1/2} - t_n^{1/2}}{t_n^{1/2}} t_n^{1/2} R(t_n, A) B \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))}. \end{aligned}$$

Agora, se t_n, s_n pertencem a intervalos da forma (4.2.1) então

$$\left| \frac{t_n - s_n}{t_n^{1/2} s_n^{1/2}} \right| \leq 2^{1/2^M} - 1 \leq 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{s_n^{1/2} - t_n^{1/2}}{t_n^{1/2}} \right| \leq 2^{1/2^{M+1}} - 1 \leq 1$$

logo segue do princípio da contração (Proposição 1.2.4) e da γ -limitação dos operadores $tR(t, A)$ para $t > 0$ que ambos os termos no lado direito da desigualdade acima podem ser estimados por $\left\| \sum_{n \in F} \gamma_n t_n^{1/2} R(t_n, A) B \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))}$. Pela desigualdade triangular em $L^2(\Omega; \gamma(H, X))$ temos portanto que

$$\left\| \sum_{n \in F} \gamma_n s_n^{1/2} R(s_n, A) B \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))} \lesssim \left\| \sum_{n \in F} \gamma_n t_n^{1/2} R(t_n, A) B \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))}$$

com uma constante que depende apenas do γ -limitante de $\{tR(t, A) : t > 0\}$. A desigualdade contrária é obtida substituindo s_n por t_n e vice-versa. $\square$

DEMONSTRAÇÃO DA IMPLICAÇÃO (4) $\Rightarrow$ (3). Seja $S_{nm}^{(M)} B$ a média integral em relação a medida $\frac{dt}{t}$ da função $t \mapsto t^{1/2} R(t, A) B$ sobre o intervalo diádico

$$I_{nm}^{(M)} = [2^{n+m/2^M}, 2^{n+(m+1)/2^M})$$

e seja $t_{nm}^{(M)} = 2^{n+m/2^M}$ o extremo esquerdo do intervalo $I_{nm}^{(M)}$. Então

$$\begin{aligned} S_{nm}^{(M)} B &= \int_{I_{nm}^{(M)}} t^{1/2} R(t, A) B \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{|I_{nm}^{(M)}|} \int_0^\infty \mathbf{1}_{I_{nm}^{(M)}}(t) t^{1/2} R(t, A) (t_{nm}^{(M)} - A) R(t_{nm}^{(M)}, A) B \frac{dt}{t} \\ &= U_{nm}^{(M)} \circ [(t_{nm}^{(M)})^{1/2} R(t_{nm}^{(M)}, A) B] \end{aligned}$$

onde $|I_{nm}^{(M)}| = 2^M \ln 2$ é a medida $\frac{dt}{t}$ de $I_{nm}^{(M)}$ e

$$U_{nm}^{(M)} := \int_0^\infty \frac{(t_{nm}^{(M)})^{1/2}}{t^{1/2}} \frac{1}{|I_{nm}^{(M)}|} \mathbf{1}_{I_{nm}^{(M)}}(t) t R(t, A) \frac{dt}{t} - \int_0^\infty \frac{t^{1/2}}{(t_{nm}^{(M)})^{1/2}} \frac{1}{|I_{nm}^{(M)}|} \mathbf{1}_{I_{nm}^{(M)}}(t) A R(t, A) \frac{dt}{t}.$$

Como $t/t_{nm}^{(M)} \in [1, 2]$ em $I_{nm}^{(M)}$ e tanto $tR(t, A)$ quanto $AR(t, A)$ são γ -limitados para $t > 0$ (cf. Proposição 2.2.7) concluímos pelo Teorema 1.2.12 que os $U_{nm}^{(M)}$ são γ -limitados. Mas então

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{n \in F} \sum_{m=0}^{2^M-1} \mathbf{1}_{I_{nm}^{(M)}} \otimes S_{nm}^{(M)} B \right\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}), \gamma(H, X))} \\
& \stackrel{(1)}{\sim} \frac{1}{2^{M/2}} \left\| \sum_{n \in F} \sum_{m=0}^{2^M-1} \gamma_{nm} S_{nm}^{(M)} B \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))} \\
& \sim \frac{1}{2^{M/2}} \left\| \sum_{n \in F} \sum_{m=0}^{2^M-1} \gamma_{nm} U_{nm}^{(M)} \circ [(t_{nm}^{(M)})^{1/2} R(t_{nm}^{(M)}, A) B] \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))} \\
& \stackrel{(2)}{\lesssim} \frac{1}{2^{M/2}} \left\| \sum_{n \in F} \sum_{m=0}^{2^M-1} \gamma_{nm} (t_{nm}^{(M)})^{1/2} R(t_{nm}^{(M)}, A) B \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))} \\
& \stackrel{(3)}{\sim} \frac{1}{2^{M/2}} \left\| \sum_{n \in F} \sum_{m=0}^{2^M-1} \gamma_{nm} 2^{n/2} R(2^n, A) B \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))} \\
& \stackrel{(4)}{=} \left\| \sum_{n \in F} \sum_{m=0}^{2^M-1} \mathbf{1}_{I_{nm}^{(M)}} \otimes 2^{n/2} R(2^n, A) B \right\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}), \gamma(H, X))} \\
& = \left\| \sum_{n \in F} \mathbf{1}_{I_n} \otimes 2^{n/2} R(2^n, A) B \right\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}), \gamma(H, X))} \\
& \stackrel{(5)}{\sim} \left\| \sum_{n \in F} \gamma_n 2^{n/2} R(2^n, A) B \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))}
\end{aligned}$$

com constantes independentes de F e M . Acima os passos (1), (4) e (5) seguem de (1.3.3), o passo (2) segue da γ -limitação dos operadores $U_{nm}^{(M)}$ e o passo (3) segue do Lema 4.2.4 aplicado aos pontos $s_n = 2^n$ e $t_n = t_{nm}^{(M)}$ em $I_n = [2^n, 2^{n+1})$.

Pela Proposição 1.3.3 (cf. também Exemplo 1.4.7) concluímos que $t \mapsto t^{1/2} R(t, A) B$ pertence a $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)$ e

$$\|t \mapsto t^{1/2} R(t, A) B\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}; H), X)} \lesssim \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n 2^{n/2} R(2^n, A) B \right\|_{L^2(\Omega; \gamma(H, X))}$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] J.G. Abreu, Jr., B. Haak, and J.M.A.M. van Neerven. The stochastic Weiss conjecture for bounded analytic semigroups. *J. London math. Soc.*, 2013.
- [2] F. Albiac and N.J. Kalton. *Topics in Banach space theory*, volume 233 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2006.
- [3] David Albrecht, Xuan Duong, and Alan McIntosh. Operator theory and harmonic analysis. In *Instructional Workshop on Analysis and Geometry, Part III (Canberra, 1995)*, volume 34 of *Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ.*, pages 77–136. Austral. Nat. Univ., Canberra, 1996.
- [4] W. Arendt, C. J. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander. *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*, volume 96 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, second edition, 2011.
- [5] W. Arendt and S. Bu. The operator-valued Marcinkiewicz multiplier theorem and maximal regularity. *Math. Z.*, **240**(2):311–343, 2002.
- [6] Pascal Auscher, Alan McIntosh, and Andrea Nahmod. Holomorphic functional calculi of operators, quadratic estimates and interpolation. *Indiana Univ. Math. J.*, **46**(2):375–403, 1997.
- [7] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces. An introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.
- [8] E. Berkson and T.A. Gillespie. Spectral decompositions and harmonic analysis on UMD spaces. *Studia Math.*, **112**(1):13–49, 1994.

- [9] V.I. Bogachev. *Gaussian Measures*, volume 62 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [10] H. Bounit, A. Driouich, and O. El-Mennaoui. On the Weis conjecture for analytic semigroups. *Int. Math. Forum*, **3**(8):363–374, 2008.
- [11] H. Bounit, A. Driouich, and O. El-Mennaoui. A direct approach to the Weiss conjecture for bounded analytic semigroups. *Czech. Math. J.*, **60**(135):527–539, 2010.
- [12] J. Bourgain. Vector-valued singular integrals and the H^1 -BMO duality. In *Probability Theory and Harmonic Analysis (Cleveland, Ohio, 1983)*, volume 98 of *Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.*, pages 1–19. Dekker, New York, 1986.
- [13] Z. Brzeźniak and J.M.A.M. van Neerven. Stochastic convolution in separable Banach spaces and the stochastic linear Cauchy problem. *Studia Math.*, **143**(1):43–74, 2000.
- [14] Haïm Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, 2011.
- [15] A. Chojnowska-Michalik and B. Goldys. Existence, uniqueness and invariant measures for stochastic semilinear equations on Hilbert spaces. *Probab. Theory Relat. Fields*, **102**:331–356, 1995.
- [16] P. Clément, B. de Pagter, F.A. Sukochev, and H. Witvliet. Schauder decompositions and multiplier theorems. *Studia Math.*, **138**(2):135–163, 2000.
- [17] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1985.
- [18] M. Cowling, I. Doust, A. McIntosh, and A. Yagi. Banach space operators with a bounded H^∞ functional calculus. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **60**(1):51–89, 1996.
- [19] R.F. Curtain and H.J. Zwart. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, volume 21 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [20] G. Da Prato. *Introduction to Stochastic Analysis and Malliavin Calculus*. Scuola Normale Superiore Pisa, 2008.

- [21] G. Da Prato, A. Debussche, and B. Goldys. Some properties of invariant measures of non symmetric dissipative stochastic systems. *Probab. Theory Relat. Fields*, **123**:355–380, 2002.
- [22] G. Da Prato and J. Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [23] G. Da Prato and J. Zabczyk. Regular densities of invariant measures in Hilbert spaces. *J. Funct. Anal.*, **130**:427–449, 1995.
- [24] G. Da Prato and J. Zabczyk. *Ergodicity for infinite-dimensional systems*, volume 229 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [25] R. Denk, M. Hieber, and J. Prüss. R -boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **166**(788), 2003.
- [26] E. Dettweiler. Stochastic integration relative to Brownian motion on a general Banach space. *Doga Math.*, **15**(2):58–97, 1991.
- [27] J. Dettweiler, J.M.A.M. van Neerven, and L. Weis. Space-time regularity of solutions of the parabolic stochastic Cauchy problem. *Stoch. Anal. Appl.*, **24**(2):843–869, 2006.
- [28] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge. *Absolutely Summing Operators*, volume 43 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [29] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr. *Vector Measures*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977. With a foreword by B. J. Pettis, Mathematical Surveys, No. 15.
- [30] K.-J. Engel and R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [31] K.-J. Engel and R. Nagel. *A Short Course on Operators Semigroups*. Universitext. Springer-Verlag, 2006.

- [32] X. Fernique. Intégrabilité des vecteurs Gaussiens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **270**:A1698–A1699, 1970.
- [33] Andreas Fröhlich. *H^∞ -Kalkül und Dilatationen*. PhD thesis, Universität Karlsruhe, 2003.
- [34] D. Gatarek and B. Goldys. On invariant measures for diffusions on Banach spaces. *Potential Anal.*, **7**:539–553, 1997.
- [35] B Goldys, F. Gozzi, and J.M.A.M. van Neerven. On closability of directional gradients. *Potential Anal.*, **18**:289–310, 2003.
- [36] B. Goldys and J.M.A.M. van Neerven. Transition semigroups of Banach space-valued Ornstein-Uhlenbeck processes. *Acta Appl. Math.*, **76**(3):283–330, 2003.
- [37] B. Haak and M. Haase. Square functions estimates and functional calculus. Preprint, 2013.
- [38] B.H. Haak. *Kontrolltheorie in Banachräumen und quadratische Abschätzungen*. PhD thesis, Karlsruhe, 2004.
- [39] B.H. Haak and P.C. Kunstmann. Admissibility of unbounded operators and wellposedness of linear systems in Banach spaces. *Integr. Equ. Oper. Theory*, **55**:497–533, 2006.
- [40] B.H. Haak and J.M.A.M. van Neerven. Uniformly γ -radonifying families of operators and the stochastic Weiss conjecture. *Operators and Matrices*, **6**(14):767–792, 2012.
- [41] M.H.A. Haase. *The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods*. PhD thesis, Universität Ulm, 2003.
- [42] M.H.A. Haase. *The functional calculus for sectorial operators*, volume 169 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [43] M. Hairer. An Introduction to Stochastic PDEs. Lecture Notes, 2009.
- [44] P. R. Halmos. *Measure Theory*, volume 18 of *Graduate Studies in Mathematics*. Springer, 1974.

- [45] K. Hoffman. *Banach Spaces of Analytic Functions*. Prentice-Hall, Inc., 1962.
- [46] J. Hoffmann-Jørgensen. Sums of independent Banach space valued random variables. *Studia Math.*, **52**:159–186, 1974.
- [47] T. Hytönen, A. McIntosh, and P. Portal. Kato’s square root problem in Banach spaces. *J. Funct. Anal.*, **254**:675–726, 2008.
- [48] K. Itô and M. Nisio. On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables. *Osaka J. Math.*, **5**:35–48, 1968.
- [49] B. Jacob and J.R. Partington. The Weiss conjecture on admissibility of observation operators for contraction semigroups. *Integral Eq. Operator Th.*, **40**(2):231–243, 2001.
- [50] B. Jacob and J.R. Partington. Admissibility of control and observation operators for semigroups: a survey. In *Current trends in operator theory and its applications*, volume 149 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 199–221. Birkhäuser, Basel, 2004.
- [51] B. Jacob, J.R. Partington, and S. Pott. Admissible and weakly admissible observation operators for the right shift semigroup. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, **45**(2):353–362, 2002.
- [52] B. Jacob and H. Zwart. Disproof of two conjectures of George Weiss. preprint, 2000.
- [53] B. Jacob and H.J. Zwart. Counterexamples concerning observation operators for C_0 -semigroups. *SIAM J. Control Optim.*, **43**(1):137–153, 2004.
- [54] N. J. Kalton and L. Weis. The H^∞ -calculus and sums of closed operators. *Math. Ann.*, **321**(2):319–345, 2001.
- [55] N.J. Kalton, P.C. Kunstmann, and L. Weis. Perturbation and interpolation theorems for the H^∞ -calculus with applications to differential operators. *Math. Ann.*, **336**:747–801, 2006.
- [56] N.J. Kalton, J.M.A.M. van Neerven, M.C. Veraar, and L. Weis. Embedding vector-valued besov spaces into spaces of γ -radonifying operators. *Math. Nachr.*, **281**:238–252, 2008.

- [57] N.J. Kalton and L. Weis. The H^∞ -calculus and square function estimates. Unpublished manuscript.
- [58] T. Kucherenko and L. Weis. Real interpolation of domains of sectorial operators on L_p -spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, **310**:278–285, 2005.
- [59] P.C. Kunstmann and L. Weis. Maximal L_p -regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞ -functional calculus. In *Functional Analytic Methods for Evolution Equations*, volume 1855 of *Lecture Notes in Math.*, pages 65–311. Springer, Berlin, 2004.
- [60] M. Kunze. Perturbation of strong Feller semigroups and well-posedness of semilinear stochastic equations on Banach spaces. *Stochastics*, 2012.
- [61] S. Kwapien. Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector-valued coefficients. *Studia Math.*, **44**:583–595, 1972.
- [62] S. Kwapien. On Banach spaces containing c_0 . *Studia Math.*, **52**:187–188, 1974. A supplement to the paper by J. Hoffmann-Jørgensen: “Sums of independent Banach space valued random variables” (*Studia Math.* **52** (1974), 159–186).
- [63] C. Le Merdy. The Weiss conjecture for bounded analytic semigroups. *J. London Math. Soc. (2)*, **67**(3):715–738, 2003.
- [64] C. Le Merdy. On square functions associated to sectorial operators. *Bull. Soc. Math. France*, **132**(1):137–156, 2004.
- [65] V. Linde and A. Pietsch. Mappings of Gaussian measures of cylindrical sets in Banach spaces. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, **19**:472–487, 1974. English translation in: *Theory Probab. Appl.* **19** (1974), 445–460.
- [66] Alessandra Lunardi. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 16. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [67] Alessandra Lunardi. An Introduction to Interpolation Theory. Dottorato di Ricerca in Matematica, consorzio Milano-Insubria-Parma-Trieste, 2007.

- [68] A. McIntosh. Operators which have an H_∞ functional calculus. In *Miniconference on operator theory and partial differential equations (North Ryde, 1986)*, volume **14** of *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.*, pages 210–231. Austral. Nat. Univ., Canberra, 1986.
- [69] J.M.A.M. van Neerven. Continuity and representation of Gaussian Mehler semi-groups. *Potential Anal.*, **13**:199–211, 2000.
- [70] J.M.A.M. van Neerven. Uniqueness of invariant measures for the stochastic cauchy problem in banach spaces. In “*Recent advances in operator theory and related topics*”, *Oper. Theory Adv. Appl.*, volume 127, pages 491–517. Birkhäuser Verlag, 2001.
- [71] J.M.A.M van Neerven. Stochastic evolution equations. ISEM Lecture Notes, 2008.
- [72] J.M.A.M. van Neerven. γ -Radonifying operators—a survey. In *The AMSI-ANU Workshop on Spectral Theory and Harmonic Analysis*, volume 44 of *Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ.*, pages 1–61. Austral. Nat. Univ., Canberra, 2010.
- [73] J.M.A.M. van Neerven, M.C. Veraar, and L. Weis. Conditions for stochastic integrability in UMD Banach spaces. In *Banach Spaces and their Applications in Analysis*, De Gruyter Proceedings in Mathematics, pages 125–146, 2007.
- [74] J.M.A.M. van Neerven and L. Weis. Stochastic integration of functions with values in a Banach space. *Studia Math.*, **166**(2):131–170, 2005.
- [75] J.M.A.M. van Neerven and L. Weis. Weak limits and integrals of Gaussian covariances in Banach spaces. *Probab. Math. Statist.*, **25**(1):55–74, 2005.
- [76] J.M.A.M. van Neerven and L. Weis. Invariant measures for the linear stochastic Cauchy problem and R -boundedness of the resolvent. *J. Evolution Equ.*, **6**(2):205–228, 2006.
- [77] J.M.A.M. van Neerven and L. Weis. Stochastic integration of operator-valued functions with respect to Banach space-valued Brownian motion. *Potential Anal.*, **29**(1):65–88, 2008.
- [78] A.L. Neidhardt. *Stochastic Integrals in 2-Uniformly Smooth Banach Spaces*. PhD thesis, University of Wisconsin, 1978.

-
- [79] J. R. Partington and G. Weiss. Admissible observation operators for the right shift semigroup. *Math. Control Signals Systems*, **13**:179–192, 2000.
- [80] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [81] B.J. Pettis. On integration in vector spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44**:277–304, 1938.
- [82] G. Pisier. Some results on Banach spaces without local unconditional structure. *Compositio Math.*, **37**(1):3–19, 1978.
- [83] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics, vol. I: Functional Analysis*. Academic Press, 1980.
- [84] J. Rosiński and Z. Suchanecki. On the space of vector-valued functions integrable with respect to the white noise. *Colloq. Math.*, **XLIII**:183–281, 1980.
- [85] M. Spivak. *Calculus on Manifolds*. Addison-Wesley Publishing Company, 1965.
- [86] Hans Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, second edition, 1995.
- [87] Marius Tucsnak and George Weiss. *Observation and Control for Operator Semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts. Birkhäuser, 2009.
- [88] N.N. Vakhania, V.I. Tarieladze, and S.A. Chobanyan. *Probability Distributions on Banach Spaces*, volume **14** of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
- [89] J.B. Walsh. An introduction to stochastic partial differential equations. In “*École d’Été de Probabilités de Saint Flour*”, XIV – 1984, volume **1180** of *Lecture Notes in Math.*, pages 265–439. Springer, Berlin, 1986.
- [90] L. Weis. Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p -regularity. *Math. Ann.*, **319**(4):735–758, 2001.

- [91] L. Weis. The H^∞ Holomorphic Functional Calculus for Sectorial Operators – a Survey. In *Operator Theory: Advances and Applications*, volume **168**, pages 263–294. Birkhäuser Verlag, 2006.
- [92] G. Weiss. Admissibility of unbounded control operators. *SIAM J. Control Optim.*, **27**(3):527–545, 1989.
- [93] G. Weiss. Two conjectures on the admissibility of control operators. In *Estimation and Control of Distributed Parameter Systems (Vorau, 1990)*, volume **100** of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 367–378. Birkhäuser, Basel, 1991.
- [94] D.V. Widder. Functions harmonic in a strip. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12**:67–72, 1961.
- [95] A. Yagi. Coïncidence entre des espaces d’interpolation et des domaines de puissances fractionnaires d’opérateurs. *C. R. Acad. Sci. Paris (Sér. I) Math.*, **299**:173–176, 1984.
- [96] H. Zwart, B. Jacob, and O. Staffans. Weak admissibility does not imply admissibility for analytic semigroups. *Systems Control Lett.*, **48**(3-4):341–350, 2003.

Índice Remissivo

- $(S(t))_{t \geq 0}$, 39
- (γ_n) , 18
- (r_n) , 15
- $H^\infty(\Sigma_\theta)$, 42
- $H_0^\infty(\Sigma_\theta)$, 42
- $R(\lambda, A)$, 40
- W_H , 34
- X_α , 48
- $\mathcal{H} \otimes X$, 22
- $\mathcal{L}(X, Y)$, 10, 14
- $(\text{PCE})_{(A, B)}$, 56
- $\mathcal{S}(X, \omega)$, 42
- Σ_ω , 41
- $\dot{X}_\alpha$, 48
- $\gamma(\mathcal{H}, X)$, 23
- $\gamma^\infty(\mathcal{H}, X)$, 22
- $\omega_0(A)$, 40
- $\omega_{H^\infty}(-A)$, 44
- $\rho(A)$, 40
- $\sigma(A)$, 40
- $f \otimes x$, 11
- $h \otimes x$, 22
- cálculo- H^∞ limitado, 44
- cotipo, 27
- desigualdade de Kahane-Khintchine, 17
- distribuição, 15
- EDPE's, 56
- espaço
 - de extrapolação, 48
 - dos operadores γ -radonificantes, 23
- espectro, 40
- família
 - R -limitada, 20
 - γ -limitada, 20
 - uniformemente γ -radonificante, 5
- fortemente mensurável, 12
- fracamente
 - $-L_H^2$, 14
 - $-L^p$, 14
- Gaussiana
 - sequência, 18
 - variável aleatória, 16
- gerador infinitesimal, 40
- integrável
 - Bochner-, 13
 - estocasticamente, 36
 - Pettis-, 14
- medida invariante, 58, 66
- movimento Browniano cilíndrico, 34
- núcleo reprodutor, 17

- operador
 - γ -radonificante, 24
 - γ -somante, 22
 - de covariância, 18
 - de posto finito, 22
 - setorial, 41
 - de Fourier, 18
 - de Laplace, 70
- princípio da contração, 16
- processo isonormal, 34
- propriedade (α) , 30
- Rademacher
 - espaço de interpolação de, 49
 - método de interpolação de, 49
 - sequência de, 15
- randomização, 20
- resolvente
 - conjunto, 40
 - identidade do, 41
 - operador, 40
 - representação integral, 40
- semigrupo- C_0 , 39
- solução
 - “mild”, 57, 62
 - fraca, 57, 62
- teorema
 - de extensão de Kalton-Weis, 25
 - de Fernique, 16
 - de Itô-Nisio, 15
 - dos γ -multiplicadores, 26
- tipo, 27
- transformada