UNICAMP

Christiane Buffo Rodrigues

O Método Simbólico Aplicado a Problemas de Combinatória

CAMPINAS
2013

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Christiane Buffo Rodrigues

O Método Simbólico Aplicado a Problemas de Combinatória

Orientador: Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de Mestra em Matemática aplicada.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA CHRISTIANE BUFFO RODRIGUES E ORIENTADA PELO PROF. DR. JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

R618m Rodrigues, Christiane Buffo, 1983-
O método simbólico aplicado a problemas de combinatória / Christiane Buffo Rodrigues. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Funções geradoras. 2. Partições (Matemática). 3. Permutações (Matemática). 4. Problemas de enumeração combinatória. I. Santos, José Plínio de Oliveira,1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: The symbolic method applied to combinatorial problems
Palavras-chave em inglês:
Generating functions
Partitions (Mathematics)
Permutations (Mathematics)
Combinatorial enumeration problems
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Mestra em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
José Plínio de Oliveira Santos [Orientador]
Robson da Silva
Carlile Campos Lavor
Data de defesa: 05-04-2013
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 05 de abril de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Prof.(a). Dr(a). ROBSON DA SILVA

Prof.(a). Dr(a). CARLILE CAMPOS LAVOR

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus pela força e sabedoria que me ofereceu nos momentos de aflição e tropeços.

Agradeço também a meus pais Dimas e Enilze que dedicaram tempo e esforços pessoais e financeiros para mais esta conquista. O apoio deles foi o que me manteve firme nos meus objetivos.

Aos meus amigos, agradeço toda a ajuda, compreensão e incentivo, especialmente àqueles que mesmo de longe conseguiram doar um pouquinho da própria experiência para me ajudar a chegar até aqui. Sou muito grata, sobretudo, a Beatriz (Bia), Raphael, Valéria, João Renato, Juliana Lombardi, Rodolfo, Rafael Barbosa e Milton (Bill).

Aos amigos do Laboratório de Matemática Discreta e Códigos os agradecimentos são ainda mais sinceros. Obrigada Bruno, Jorge e Alessandro pela paciência, incentivo e companheirismo durante este período de Mestrado. Tenho vocês como irmãos. Jerry meu agradecimento sincero pelas ajudas com pôster, dissertação e toda a parte técnica mas, sobretudo, pela amizade e respeito que cultivamos. Marcos Vinicius (Marquinho), Luciano Félix e Antonio (Campello), a garantia de entender que a vida sempre nos retorna um bom desfecho para as coisas vem de vocês. Cecilia, amiga para todos os momentos, agradeço todo o esforço, a dedicação, carinho e paciência sempre que necessário. Você foi uma peça essencial neste mestrado. Por fim, Elen, Kenia, Julianna Pineli, Vanessa e Grasiele, muito obrigada pelo carinho, apoio e pela amizade de vocês. Cada um contribuiu à sua maneira mas de um modo especial o suficiente para garantir uma citação aqui.

Agradeço também aos professores Aurelio, Sueli e ao meu orientador José Plínio de Oliveira Santos pela confiança e incentivo à pesquisa.

Agradeço por fim, ao CNPq pelo financiamento deste projeto.

Resumo

Este trabalho trata da aplicação do *Método Simbólico* na resolução de problemas de *Combinatória*. A vantagem desta técnica é o cálculo direto de uma expressão fechada para a *Função Geradora* $F(z)$ do problema, escrita como uma *Série de Potências*. Consequentemente, garantimos a facilidade na enumeração da sequência que queremos a partir do coeficiente de z^n de $F(z)$. O desenvolvimento de nosso estudo foi feito aplicando-se o método a dois tipos de Classes: Rotuladas e não Rotuladas, apontando as diferenças básicas entre elas através de exemplos e resultados teóricos. Ao final, concluímos que a enumeração independe do tipo de modelagem feita para o problema.

Palavras chave: Funções geradoras, Partições (Matemática), Permutações (Matemática), Problemas de enumeração combinatória.

Abstract

This work deals with the application of the Symbolic Method in the solutions of Combinatorial problems. The advantage of this technique is the direct calculus for the exact expression of the Generating Function $F(z)$ of the problem, written as a Power Series. Consequently, we ensure the enumeration of the desired sequence, from the coefficient of z^n of $F(z)$. Our study was developed by applying the method in two types of Classes: Labelled and Unlabelled, pointing the basic differences between them through examples and theoretical results. Finally, we concluded that the enumeration does not depend of the type of the model chosen for the problem.

Key words: Generating functions, Partitions (Mathematics), Permutations (Mathematics), Combinatorial enumeration problems.

Sumário

Introdução

O *Método Simbólico* é uma ferramenta eficaz para tratar qualquer tipo de problema de enumeração, especialmente aqueles sujeitos a restrições. Esta técnica foi desenvolvida por **Philipe Flajolet** e **Robert Sedgewick**, [1], e será a nossa ferramenta para o estudo de problemas de contagem.

O *Método Simbólico* está fundamentado numa teoria algébrica que relaciona *Estruturas Combinatórias* básicas com *Funções Geradoras* pelo estudo da estrutura interna dos elementos que constituem uma *Classe*. Em outras palavras, dada uma *Classe Combinatória*, a ideia é tentar descrevê-la, de acordo com suas propriedades, por meio das principais construções combinatórias de que dispomos: *União Disjunta*, *Produto Cartesiano*, *Sequências* (Seq), *Multiconjuntos* ($\mathcal{M}Set$), *Subconjuntos* ($\mathcal{P}Set$) e *Ciclos* ($\mathcal{C}yc$). Estas construções admitem uma tradução direta para *Funções Geradoras* e, portanto, obter a *Função Geradora* do problema se reduz a um processo puramente mecânico e algébrico de composição de funções.

Toda a teoria e aplicações desenvolvidas nesta dissertação são inteiramente baseadas no estudo dos capítulos 1 e 2 da referência [1].

O objetivo aqui consiste em aplicar o *Método Simbólico* em dois tipos de *Estruturas Combinatórias*:

- *Estruturas não Rotuladas*
- *Estruturas Rotuladas*

A primeira será relacionada às *Funções Geradoras Ordinárias* e a segunda relaciona-se às *Funções Geradoras Exponenciais*. A teoria é basicamente a mesma para ambas, exceto por algumas adaptações que devem ser feitas devido a segunda estrutura levar em consideração a ordem dos elementos.

Capítulo 1

Motivação ao estudo do Método Simbólico

A *Combinatória* é a área da Matemática que trata de objetos discretos, ou seja, aqueles que podem ser definidos por certas regras de construção. Como exemplo, temos palavras, grafos, árvores, permutações, mapeamentos, etc. Quaisquer desses objetos constituem elementos pertencentes a uma *classe* que é caracterizada por certas propriedades particulares, por exemplo, um *padrão*, *tamanho* ou *cor*.

À medida que combinamos objetos pertencentes a uma mesma *classe*, obtemos um novo elemento com nova configuração e novas propriedades que devem ser caracterizadas e também enumeradas. Nosso objetivo é estudar estruturas que quantifiquem essas propriedades em *Classes Combinatórias* e descrevam o problema completamente. A enumeração será feita por uma *Série de Potências* $F(z) = \sum_n F_n z^n$ que chamaremos de *Função Geradora*, uma das ferramentas mais eficazes na resolução de problemas de contagem, especialmente porque descreve problemas gerais, onde as repetições de objetos são também permitidas.

Funções Geradoras podem ser aplicadas em vários ramos da Matemática assim como nas demais grandes áreas, como Biologia, Computação e Estatística. Inicialmente ela foi empregada nos trabalhos de De Moivre. Posteriormente, Euler aplicou esta teoria em problemas da Teoria Aditiva de Números, Laplace na Teoria de Probabilidade e N. Bernoulli no estudo de Permutações Caóticas. A vantagem desta técnica está no fato de conseguirmos enumerar a sequência que queremos simplesmente pelo coeficiente F_n de z^n, no polinômio expandido $F(z)$.

Por exemplo, imagine que queremos retirar sem ordenação exatamente 17 letras do conjunto das 26 letras do nosso alfabeto. Então, o número de maneiras de fazer isto é $\binom{26}{17}$. E se queremos o caso geral, ou seja, retirar n letras, para todo $n \geq 0$? Então, temos $\binom{26}{n}$ maneiras de retirar as n letras.

Responder estas questões é uma tarefa simples, quando temos conhecimento básico em *Análise Combinatória*. Mas, vamos complicar um pouco mais propondo um problema com mais restrições.

Encontrar o número de maneiras de 4 pessoas obterem um total de 15 pontos jogando um único dado. Agora, efetuar cálculos pode se tornar bem mais trabalhoso. No entanto, a solução pode ser expressa, de maneira exata, por meio de polinômios em z que controlam a presença de cada ponto que pode ser obtido com lançamento do dado. Como veremos, $(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6)$ é o polinômio que descreve esta pontuação e, como temos 4 pessoas, o polinômio será o mesmo para todas elas.

Pelo *Princípio Multiplicativo*, o polinômio $F(z)$ que descreve o problema é dado por

$$F(z) = (z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6)^4 = z^4(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5)^4 = z^4 \left(\frac{1 - z^6}{1 - z} \right).$$

Afirmamos que a resposta ao problema é o coeficiente de z^{15}, em $F(z)$. (**Notação:** $[z^{15}]F(z)$) A expressão $F(z)$ é chamada de *Função Geradora*.

A complexidade de resolução de um problema de combinatória pode se tornar grande o suficiente, dependendo das restrições impostas ao problema e, com isso, podemos ter cálculos muito trabalhosos até chegarmos à resposta desejada. A fim de obter uma maneira direta e eficiente de enumeração é que **Philipe Flajolet** e **Robert Sedgewick** desenvolveram o *Método Simbólico*, [1], uma ferramenta capaz de retornar a *Função Geradora* para um dado problema somente pela composição de funções relacionadas às *Estruturas Combinatórias* que o descrevem, tais como Sequências, Ciclos, Conjuntos, etc.

Capítulo 2

Funções Geradoras

Neste capítulo, iremos introduzir os principais conceitos sobre Funções Geradoras e apresentaremos um exemplo que motiva o seu estudo, o *Problema do Troco*, um problema popularmente conhecido e que pode ser encontrado em [2], página 102.

2.1 Funções Geradoras

Definição 2.1.1. *Uma Série de Potências é uma série infinita da forma* $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$*, onde* $a_i \in \mathbb{R}$*, para* $i = 0, 1, 2, 3, ...$ *e* z *é uma variável.*

Pela definição acima, note que qualquer polinômio em z é uma série de potências.

Definição 2.1.2. *Se* $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ *e* $b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$ *são duas séries de potências, então a soma destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de* z^n *é dado por* $(a_n + b_n)$ *e o produto destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de* z^n *é* $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0$.

Definição 2.1.3. *Se* a_n*, para* $n \in \mathbb{N}$*, é o número de soluções de um problema de combinatória, a Função Geradora Ordinária para o problema é a série de potências*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{2.1}$$

ou, de outra forma, dada a sequência (a_n)*, a Função Geradora Ordinária para esta sequência é definida como a série de potências (2.1)*

Suponha que temos um conjunto de n objetos distintos e queremos retirar r objetos desse conjunto, com $r \leq n$. O número de maneiras de fazermos isso é $\binom{n}{r}$ e a Função Geradora Ordinária para este problema é dada por

$$F(z) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} z^n \implies F(z) = (1+z)^n \tag{2.2}$$

Quando trabalhamos com Funções Geradoras, nosso interesse consiste somente em obter os coeficientes a_n de z^n. Por isso, sempre estamos interessados na sequência formada por esses coeficientes na tentativa de encontrarmos uma expressão fechada para os mesmos, algo nem sempre possível.

Neste contexto, a variável z nunca receberá um valor numérico. Considere a função dada por

$$F(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots, \tag{2.3}$$

A equação (2.3) é a Função Geradora Ordinária para a sequência $(a_n) = (1)$ e, para $|z| < 1$, obtemos

$$F(z) = \frac{1}{1-z}. \tag{2.4}$$

Exemplo 2.1.1. *Encontrar a função geradora ordinária para a sequência*

$$(a_n) = (0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots).$$

Inicialmente, escrevemos a série de potências que descreve o problema:

$$F(z) = z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \cdots$$

Queremos uma forma fechada para a função $F(z)$, ou seja, uma fórmula mais simples. Note que

$$F(z) = z^2(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + ...) \overset{(2.4)}{=} z^2\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Seja $F(z) = (1+z)^u$ e considere a expansão em *Série de Taylor*, em torno do zero, para qualquer $u \in \mathbb{R}$. Então, para $|z| < 1$ temos o seguinte resultado ([3], pág. 161):

Teorema 2.1.1. (Teorema Binomial)

$$(1+z)^u = 1 + uz + \frac{u(u-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!}z^r + \cdots$$

Denotamos por

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!}, & se \quad r > 0 \\ 1, & se \quad r = 0 \end{cases}$$

e, portanto, temos

$$(1+z)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} z^r \tag{2.5}$$

O número $\binom{u}{r}$ é chamado de Coeficiente Binomial Generalizado. Se u for igual a um inteiro positivo n, então $\binom{u}{r}$ será o coeficiente binomial usual. Além disso, como para $r \geq n$, $\binom{n}{r} = 0$ a expansão (2.5) será a expansão binomial que conhecemos.

Teorema 2.1.2. *O coeficiente de z^p na expansão de $(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots)^n$ é*

$$\binom{n+p-1}{p}.$$

Demonstração: Primeiramente note que

$$(1+z+z^2+z^3+\cdots)^n \overset{(2.4)}{=} \left(\frac{1}{1-z}\right)^n = (1-z)^{-n} \overset{(2.5)}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r}(-1)^r z^r.$$

Queremos encontrar o coeficiente de z^p no último somatório acima e, portanto, pelo *Teorema Binomial* temos que:

$$\begin{aligned}\binom{-n}{p}(-1)^p &\overset{(2.5)}{=} \frac{(-n)(-n-1)(-n-2).\cdots.(-n-(p-1))(-1)^p}{p!}\\ &= \frac{(-1)^p(n+p-1).\cdots.(n+2)(n+1)n(-1)^p}{p!}\\ &= \frac{(n+p-1).\cdots.(n+2)(n+1)n(n-1)!}{p!(n-1)!}\\ &= \binom{n+p-1}{p}.\end{aligned}$$

■

Definição 2.1.4. *A Série de potências*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} \tag{2.6}$$

é definida como a Função Geradora Exponencial da sequência (a_n).

A diferença entre as *Funções Geradoras Ordinária* e *Exponencial* é que a última leva em conta a ordem de agrupamento dos objetos.

Exemplo 2.1.2. *Encontrar a Função Geradora Exponencial para a sequência*

$$(a_n) = (0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots)$$

Escrevendo a Série de Potências correspondente a esta sequência, temos a função:

$$F(z) = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \implies F(z) = e^z - 1 - z.$$

2.2 O problema do troco

O *Problema do troco* que apresentaremos aqui é inspirado no problema apresentado em [2], página 102.

Problema do troco: De quantas maneiras podemos dar o troco de R\$0.50 usando somente moedas de R\$0.01, R\$0.05, R\$0.10, R\$0.25 e R\$0.50?

Solução: Inicialmente vamos considerar apenas moedas de R\$0.01. Então, um troco de R\$0.50 só pode ser dado de uma única maneira, ou seja, com 50 moedas de R\$0.01. Analogamente, se temos somente moedas de R\$0.25, só podemos devolver o troco de uma maneira, usando 2 dessas moedas. Com as demais moedas, a situação é análoga. Basta dividir R\$0.50 pelo valor da moeda obtendo o número de moedas necessárias. Mas, temos outras possibilidades de dar o troco, envolvendo as moedas disponíveis. Podemos, por exemplo, devolver os R\$0,50 da seguinte forma:

$$10 \text{ moedas de R\$}0,01 + 2 \text{ moedas de R\$}0,05 + 3 \text{ moedas de R\$}0,10.$$

Então, como obter o total de maneiras disto ser feito com todas as moedas que podemos usar? A ideia é construir uma Função Geradora para cada moeda e combinar todas elas de maneira conveniente. Vamos primeiro resolver o problema geral. Note que a ordem que selecionamos as moedas para dar o troco não importa e, portanto, $F(z)$ representa a Função Geradora Ordinária do problema descrevendo todos os possíveis trocos que podem ser dados. O problema geral nos pede de quantas maneiras podemos obter um troco de n centavos, com as moedas que temos, ou seja, queremos calcular $[z^n]F(z)$. Mas isso é igual ao número de partições de n, com partes restritas ao conjunto $\{1, 5, 10, 25, 50\}$ e daí, cada partição representa uma escolha dos expoentes de z em cada uma das funções geradoras que construímos para as moedas. Cada função será uma *Série de Potências* com coeficientes unitários, para todo $n \geq 0$, conforme discutido anteriormente. As *Funções Geradoras* de cada moeda são:

1. *Moedas de R\$0,01:* $A(z) = \dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots$
2. *Moedas de R\$0,05:* $B(z) = \dfrac{1}{1-z^5} = 1 + z^5 + z^{10} + z^{15} + z^{20} + \dots$
3. *Moedas de R\$0,10:* $C(z) = \dfrac{1}{1-z^{10}} = 1 + z^{10} + z^{20} + z^{30} + z^{40} + \dots$
4. *Moedas de R\$0,25:* $D(z) = \dfrac{1}{1-z^{25}} = 1 + z^{25} + z^{50} + z^{75} + z^{100} + \dots$
5. *Moedas de R\$0,50:* $E(z) = \dfrac{1}{1-z^{50}} = 1 + z^{50} + z^{100} + z^{150} + z^{200} + \dots$

Note que os expoentes de cada função geradora são múltiplos do valor de cada moeda e, portanto, indicam quantas moedas de um determinado tipo, serão usadas no troco. Por exemplo, o expoente de z^3, em $A(z)$, significa $z^3 = z^{1+1+1}$, ou seja, estamos usando três moedas de R\$0,01.
Agora, devemos multiplicar as cinco funções acima para obter a Função Geradora Ordinária $F(z)$ do problema. Pelo *Princípio Multiplicativo*, temos

$$F(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^5)(1-z^{10})(1-z^{25})(1-z^{50})} \tag{2.7}$$

Note que, exceto pelo primeiro fator do denominador, $F(z)$ é uma função de z^5. Mas,

$$(1-z)(1+z+z^2+z^3+z^4) = 1 - z^5 \tag{2.8}$$

Substituindo (2.8) em (2.7) obtemos

$$F(z) = \frac{1+z+z^2+z^3+z^4}{(1-z^5)^2(1-z^{10})(1-z^{25})(1-z^{50})}.$$

e, portanto,

$$F(z) = (1+z+z^2+z^3+z^4)\widetilde{F}(z^5) \tag{2.9}$$

Até aqui conseguimos obter uma fórmula fechada para a Função Geradora Ordinária do *Problema do Troco*. Mas, ainda temos que calcular $[z^n]F(z)$. Repare que a expressão (2.9) nos diz que o expoente $n \equiv s(\text{mod}5)$ para $s = 0, 1, 2, 3, 4$, ou seja, $n = 5p+s$, $p \in \mathbb{N}$. De fato, podemos particionar qualquer n com moedas que são de valores múltiplos de 5 e completar o restante com moedas de R\$0,01. Por exemplo, se o troco é de R\$0,64 centavos, temos que $64 \equiv 4(\text{mod}5)$ e $[z^{64}]F(z)$ é igual ao número de maneiras de obter expoente z^{60} em $\widetilde{F}(z^5)$. De fato, os R\$0,04 centavos que faltam para completar o troco serão completados com o termo z^4 da primeira parcela da expressão de $F(z)$. De maneira equivalente, podemos dizer que o que falta para completar o troco será devolvido em moedas de R\$0,01 e, portanto, não devemos nos importar com o fator $(1+z+z^2+z^3+z^4)$ em $F(z)$. Nosso objetivo é procurar os coeficientes de z^n em $\widetilde{F}(z^5)$, para $n \equiv s(\text{mod}5)$. A fim de simplificar os cálculos podemos, sem perda de generalidade, fazer uma mudança de variáveis no polinômio $\widetilde{F}(z^5)$, considerando $z^5 \equiv z$. Portanto, temos

$$\widetilde{F}(z) = \frac{1}{(1-z)^2(1-z^2)(1-z^5)(1-z^{10})} \tag{2.10}$$

Note que todos os fatores do denominador de (2.10) são divisores de $(1-z^{10})$ e isso nos permite reescrever $\widetilde{F}(z)$ como

$$\widetilde{F}(z) = \frac{(1+z+\cdots+z^9)^2(1+z^2+\cdots+z^8)(1+z^5)}{(1-z^{10})^5}. \tag{2.11}$$

Pelo *Teorema Binomial*, temos que:

$$\frac{1}{(1-z^{10})^5} = \sum_{q=0}^{\infty} \binom{-5}{q} (-1)^q z^{10q}. \tag{2.12}$$

Mas, pelo *Teorema 2.1.2*, temos

$$(-1)^q \binom{-5}{q} = \binom{-5+q-1}{q} = \binom{q+4}{q}$$

$$\binom{q+4}{q} = \binom{q+4}{4}.$$

Substituindo estes resultados em (2.12), obtemos:

$$\frac{1}{(1-z^{10})^5} = \sum_{q=0}^{\infty} \binom{q+4}{4} z^{10q} \tag{2.13}$$

Para obter o coeficiente $F_{5p} = \widetilde{F}_p = [z^p]\widetilde{F}(z)$, precisamos considerar o coeficiente do produto $z^p = z^r \cdot z^{10q} = z^{10q+r}$, onde z^r e z^{10q} denotam os expoentes obtidos pelo numerador e denominador de (2.11), respectivamente. Assim, $p = 10q + r$, com $0 \le r \le 31$ e por (2.13) obtemos

$$\widetilde{F}_p = \sum_{r,q} A_r \binom{q+4}{4}, \tag{2.14}$$

onde $A_r = [z^r]A(z)$, sendo $A(z)$ o numerador de (2.11) dado por:

$A(z) = 1 + 2z + 4z^2 + 6z^3 + 9z^4 + 13z^5 + 18z^6 + 24z^7 + 31z^8 + 39z^9 + 45z^{10} + 52z^{11} + 57z^{12} + 63z^{13} + 67z^{14} + 69z^{15} + 69z^{16} + 67z^{17} + 63z^{18} + 57z^{19} + 52z^{20} + 45z^{21} + 39z^{22} + 31z^{23} + 24z^{24} + 18z^{25} + 13z^{26} + 9z^{27} + 6z^{28} + 4z^{29} + 2z^{30} + z^{31}$.

Reescrevemos $r = 10k + j$, com $0 \leq j \leq 9$ e $k = 0, 1, 2, 3$. Então, temos $p = 10q + r$ resultando nas seguintes possibilidades:

- Se $k = 0 : r = j$ e $p = 10q + j \Longrightarrow A_j\binom{q+4}{4}$
- Se $k = 1 : r = j + 10$ e $p = 10(q-1) + j + 10 \Longrightarrow A_{j+10}\binom{q+3}{4}$
- Se $k = 2 : r = j + 20$ e $p = 10(q-2) + j + 20 \Longrightarrow A_{j+20}\binom{q+2}{4}$
- Se $k = 3 : r = j + 30$ e $p = 10(q-3) + j + 30 \Longrightarrow A_{j+30}\binom{q+1}{4}$

Portanto, pela igualdade (2.14) obtemos:

$$\widetilde{F}_p = A_j\binom{q+4}{4} + A_{j+10}\binom{q+3}{4} + A_{j+20}\binom{q+2}{4} + A_{j+30}\binom{q+1}{4} \tag{2.15}$$

e daí chegamos a uma solução geral do *Problema do Troco*, dada por (2.15), conforme pretendíamos. Porém, ainda falta responder à primeira pergunta feita para este problema. Mas, se $n = 50$ temos $n = 5p + s = 50$. Então, temos $s = 0$ e $p = 10$. Como $p = 10q + r$, temos $q = 1$ e $r = 0$ e por (2.15), obtemos:

$$F_{50} = \widetilde{F}_{10} = A_0\binom{5}{4} + A_{10}\binom{4}{4} + A_{20}\binom{3}{4} + A_{30}\binom{2}{4} \Longrightarrow F_{50} = \widetilde{F}_{10} = 50.$$

Portanto, temos 50 maneiras de devolver um troco de R\$0,50 utilizando as moedas dadas no enunciado.

Capítulo 3

Estruturas Não Rotuladas e Funções Geradoras Ordinárias

3.1 Métodos de Enumeração Simbólica

Dado um problema de combinatória, um recurso eficiente para encontrar sua *Função Geradora* é analisar a estrutura interna dos elementos que queremos enumerar, buscando reconhecê-los como objetos pertencentes a uma *Classe Combinatória* $\mathcal{A}$. A partir daí, construções como Sequências, Conjuntos, Multiconjuntos ou Ciclos, com respectivas Funções Geradoras Ordinárias conhecidas, podem ser aplicadas à classe $\mathcal{A}$ para descrever o problema dado por meio de uma *Função Geradora.* Esta técnica é conhecida como *Método de Enumeração Simbólica* e será nosso objeto de estudo a partir de agora.

Definição 3.1.1. *Uma Classe Combinatória $\mathcal{A}$, ou simplesmente classe, é um conjunto enumerável no qual definimos uma função de tamanho satisfazendo as seguintes condições:*
1. O tamanho de um elemento é um inteiro não negativo;
2. O número de elementos de qualquer tamanho dado é finito.

Definição 3.1.2. *Para uma Classe Combinatória $\mathcal{A}$, denotamos o tamanho de um elemento $\alpha \in \mathcal{A}$ por $|\alpha|$ e definimos $\mathcal{A}_n$ como o conjunto $\mathcal{A}_n = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid |\alpha| = n\}$.*

Agora que temos a noção de tamanho de um elemento $\alpha \in \mathcal{A}$, podemos dar uma definição alternativa para Classes Combinatórias, em função do tamanho de seus elementos α:

Definição 3.1.3. *Uma Classe Combinatória $\mathcal{A}$ é um par $(\mathcal{A}, |\bullet|)$ tal que $\mathcal{A}$ é enumerável e a aplicação $|\bullet|\colon \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ possui imagem inversa finita.*

Definição 3.1.4. *A Sequência de Contagem de uma Classe Combinatória $\mathcal{A}$ é a sequência de inteiros (A_n), tal que $A_n = |\mathcal{A}_n|$ é igual ao número de elementos da classe $\mathcal{A}$ cujo tamanho é n.*

Exemplo 3.1.1. ***(Palavras Binárias)*** *Seja $\mathcal{W}$ o conjunto das palavras binárias formadas pelos elementos do alfabeto binário $\mathcal{A} = \{a, b\}$,*

$$\mathcal{W} = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, baa, \ldots\},$$

onde ϵ *é uma palavra vazia. Então* $\mathcal{W}$ *é uma Classe Combinatória e o tamanho de qualquer palavra* $w \in \mathcal{W}$*, é dado pelo número de letras que* w *contém. Uma vez que* $|\mathcal{A}| = 2$ *temos* 2^n *palavras de tamanho* n *e, portanto,* $W_n = 2^n$ *é a Sequência de Contagem do problema, para* $n \geq 0$*.*

Exemplo 3.1.2. ***(Permutações)*** *Seja* $\mathcal{P}$ *o conjunto das permutações dos* n *elementos do intervalo de inteiros* $\mathcal{I}_n = [1, \ldots, n]$*.*

$\mathcal{P}$ *é uma Classe Combinatória e* $\sigma \in \mathcal{P}$ *tal que* $|\sigma| = n$ *é uma aplicação bijetiva* $\sigma : \mathcal{I}_n \longrightarrow \mathcal{I}_n$ *que pode ser representada esquematicamente por*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Assim, para $\sigma \in \mathcal{P}$ *temos* n *possibilidades de imagem para o elemento* 1*,* $(n-1)$ *possibilidades para o* 2*,* $(n-3)$ *possibilidades para o* 3*, e assim por diante. Portanto,* $P_n = n!$ *é a Sequência de Contagem do problema, para* $n \geq 0$*.*

Exemplo 3.1.3. ***(Triangulações)*** *Seja* $\mathcal{T}$ *a Classe Combinatória formada por elementos que são triangulações de um polígono regular convexo de* $n+2$ *lados. Definimos triangulação como a divisão do polígono em triângulos que não se interceptam. O tamanho de uma triangulação* $t \in \mathcal{T}$ *será definido como o número de triângulos que ela possui. A Sequência de Contagem* (T_n) *da classe* $\mathcal{T}$ *será dada por* $T_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$ *e representa o número de maneiras de dividirmos um polígono convexo em* n *triângulos. Assim temos* $(T_n) = (1, 1, 2, 5, 4, 42, \ldots)$ *cujos termos são os Números de Catalan. Mais adiante mostraremos como obtê-lo a partir da Função Geradora Ordinária da classe* $\mathcal{T}$*.*

A Tabela 3.1 mostra os valores iniciais das Sequências de Contagem para as classes $\mathcal{W}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
W_n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
P_n	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320
T_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430

Tabela 3.1: Valores iniciais para as Sequências de Contagem das classes $\mathcal{W}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$

Exemplo 3.1.4. ***(Permutações unimodais)*** *Seja* $\sigma = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ *uma permutação. Dizemos que* σ *é uma permutação unimodal se existe* $k \in [1, n]$ *tal que*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_k = n \quad e \quad \alpha_k = n > \alpha_{k+1} > \ldots > \alpha_n.$$

Por exemplo, considere o conjunto $\mathcal{P}_3$ *formado pelas permutações dos elementos do conjunto* $I_3 = [1, 2, 3]$*:*

$$\mathcal{P}_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

As únicas permutações unimodais que temos no conjunto são $123, 132, 231$ *e* 321*. A Sequência de Contagem desta classe é dada por* $\widetilde{P}_n = 2^{n-1}$*. De fato, note que cada permutação unimodal de tamanho* $(n-1)$ *gera duas novas permutações unimodais de tamanho* n*. Portanto, temos* $\widetilde{P}_n = 2\widetilde{P}_{n-1}$*. Mas isso define uma Progressão Geométrica de razão* 2 *e, portanto, o termo geral será dado por* $\widetilde{P}_n = 2^{n-1}$*, conforme pretendíamos.*

Os exemplos dados anteriormente são fáceis de serem compreendidos e a obtenção das respectivas Sequências de Contagem não foi um trabalho difícil. No entanto, nem sempre temos uma solução direta para o problema. Por isso procuramos generalizar os conceitos de combinatória a fim de obtermos condições de resolver problemas mais complexos a partir dos mais simples. Uma ideia para começarmos a introduzir o *Método Simbólico* é o conceito de isomorfismo entre *Classes Combinatórias*. Este conceito é de grande importância quando reconhecemos uma determinada classe em um problema, com propriedades e características já conhecidas.

Definição 3.1.5. ***(Isomorfismo entre Classes Combinatórias)*** *Dizemos que duas classes combinatórias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são isomorfas se ambas possuem a mesma sequência de contagem. Denotamos o isomorfismo entre as classes por $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Esta definição é equivalente a dizer que existe uma bijeção entre as classes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ que preserva tamanho.*

Definição 3.1.6. *A Função Geradora Ordinária de uma sequência (A_n) é a série de potências*

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n. \tag{3.1}$$

A Função Geradora Ordinária de uma Classe Combinatória $\mathcal{A}$ é a Função Geradora dos números $A_n = |\mathcal{A}_n|$. De maneira equivalente, podemos escrever a Função Geradora Ordinária de uma classe $\mathcal{A}$ como

$$A(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|}, \tag{3.2}$$

o que significa que a variável z determina tamanho na função geradora. Denotamos por $[z^n]A(z)$ o coeficiente de z^n em $A(z)$, ou seja, A_n.

Note que em (3.1) o expoente de z indica o tamanho n de um elemento da classe $\mathcal{A}$ e o coeficiente A_n indica quantos elementos desse tamanho existem na classe. Por outro lado, em (3.2), a variável z indica tamanho, diretamente, ou seja, cada $\alpha \in \mathcal{A}$ de tamanho n contribui para o aparecimento da variável z. Em outras palavras, não importa a estrutura interna do elemento considerado, mas sim o tamanho que ele tem e essa contagem é feita pela quantidade de átomos que o constitui. Portanto, na Função Geradora Ordinária representada por (3.2), o termo z^n aparece tantas vezes quanto existirem elementos de tamanho n.

Exemplo 3.1.5. *Seja $\mathcal{A} = \{\epsilon, aa, bb, ab, ba, aaa, aab, aba, abb, bbb, bab, baa, bba\}$. Queremos mostrar a equivalência das duas formas de calcular a Função Geradora Ordinária $A(z)$ citadas na definição acima:*

- $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = 1 + 0z + 4z^2 + 8z^3 = 1 + 4z^2 + 8z^3.$

- $$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} \\ &= 1 + zz + zz + zz + zz + zzz + zzz + zzz + zzz + zzz + zzz + zzz + zzz \\ &= 1 + z^2 + z^2 + z^2 + z^2 + z^3 + z^3 + z^3 + z^3 + z^3 + z^3 + z^3 + z^3 \\ &= 1 + 4z^2 + 8z^3. \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.6. *As Funções Geradoras Ordinárias das classes apresentadas nos exemplos* (3.1.1)*,* (3.1.2)*,* (3.1.3) *e* (3.1.4) *são dadas respectivamente por*

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z} \tag{3.3}$$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n \tag{3.4}$$

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} z^n = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} \tag{3.5}$$

$$\widetilde{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2z}\right). \tag{3.6}$$

As expressões para $W(z)$, $P(z)$ e $\widetilde{P}(z)$ são obtidas diretamente da análise do problema. Note que as expressões (3.3) e (3.6) representam a soma de uma *Progressão Geométrica* de razão $2z$. A Função Geradora Ordinária para a classe $\mathcal{T}$ não é imediata e requer certas técnicas e manipulações algébricas para ser obtida.

Primeiramente, deve-se notar que fixando-se um vértice de um polígono de $(n+2)$ lados ele pode ser dividido em exatamente n triângulos que não se interceptam. Por exemplo, se tomarmos um triângulo, existe uma única maneira de triangular este polígono. Analogamente, se considerarmos um quadrado, podemos dividí-lo em 2 triângulos, de duas maneiras distintas. Agora, vamos definir uma outra sequência $(\widetilde{T}_{n+2})$ cujos termos contam o número de maneiras de dividir um polígono de $n+2$ lados em n triângulos. Note que as sequências (T_n) e $(\widetilde{T}_{n+2})$ são equivalentes para $n \geq 0$, já que $(\widetilde{T}_{n+2})$ é a sequência (T_n) deslocada em duas unidades, $\widetilde{T}_1 = 0$ e $\widetilde{T}_2 = 1$. Queremos calcular a Função Geradora Ordinária da classe $\mathcal{T}$. Para isso, vamos encontrar uma expressão fechada para $\widetilde{T}_{n+2}$ e então fazer as considerações necessárias.

Para facilitar os cálculos considere $p = n + 2$ e tome um polígono de p lados. Fixe um dos lados como base, escolha um vértice oposto a ela e una este vértice à base fixada, para formar um triângulo.

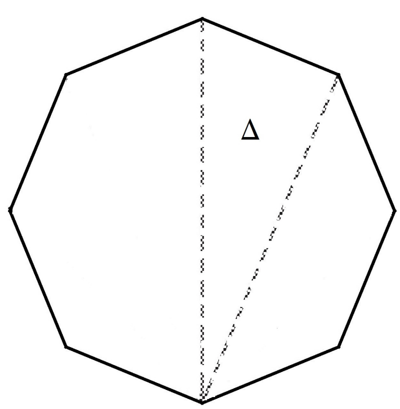


Figura 3.1: Partição do polígono

O polígono fica então dividido em 3 partes:

- o triângulo construído Δ;

- um polígono de l lados à direita de Δ;
- um polígono de k lados à esquerda de Δ.

Esta divisão nos mostra que p é igual à soma do número de lados dos polígonos obtidos durante a divisão, mais a base fixada e menos os dois lados tracejados que formam o triângulo Δ, ou seja,

$$p = k + l - 2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad l = p - k + 1.$$

Pela expressão acima vemos que o polígono de l lados admite $\widetilde{T}_{(p-k+1)}$ maneiras de ser triangulado e o polígono de k lados admite $\widetilde{T}_k$ divisões. Usando o *Princípio Multiplicativo* temos $\widetilde{T}_k\widetilde{T}_{(p-k+1)}$ maneiras de triangular o polígono. Mas, para obtermos o número total de triangulações devemos percorrer todos os vértices do polígono, ou seja, temos que variar o valor de k, para $k \geq 2$. Temos:

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_p &= \widetilde{T}_{p-1} + \widetilde{T}_3\widetilde{T}_{p-2} + \widetilde{T}_4\widetilde{T}_{p-3} + \cdots + \widetilde{T}_{p-2}\widetilde{T}_3 + \widetilde{T}_{p-1} \\ \Rightarrow \widetilde{T}_p &= \sum_{k=2}^{p-1} \widetilde{T}_k\widetilde{T}_{p-k+1}, \;\; p \geq 3, \; \widetilde{T}_2 = 1. \end{aligned}$$

Adicionando $\widetilde{T}_0 = 0, \widetilde{T}_1 = 0$ às condições iniciais do problema, podemos reescrever o último somatório da seguinte forma:

$$\begin{cases} \widetilde{T}_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} \widetilde{T}_k\widetilde{T}_{p-k+1}, \quad p \geq 3 \\ \widetilde{T}_0 = 0, \widetilde{T}_1 = 0, \widetilde{T}_2 = 1. \end{cases} \tag{3.7}$$

Para a relação de recorrência (3.7), multiplicamos ambos os lados da igualdade por z^p e em seguida somamos todas as parcelas para $n \geq 3$:

$$\sum_{p=3}^{\infty} \widetilde{T}_p z^p = \sum_{p=3}^{\infty}\sum_{k=0}^{p+1} \widetilde{T}_k\widetilde{T}_{p-k+1} z^p \tag{3.8}$$

Chamamos de $\widetilde{T}(z) = \sum_p \widetilde{T}_p z^p$ a Função Geradora Ordinária da sequência $(\widetilde{T}_p)$. Então, pela equação (3.8) temos:

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(z) - \widetilde{T}_0 - \widetilde{T}_1 z - \widetilde{T}_2 z^2 &= \frac{\sum_{p=3}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{p+1}\widetilde{T}_k\widetilde{T}_{p-k+1}\right)z^{p+1}}{z} \\ \widetilde{T}(z) - z^2 = \frac{\widetilde{T}(z)^2}{z} \quad &\Longrightarrow \quad \widetilde{T}(z) = \frac{z(1 \pm \sqrt{1-4z})}{2}. \end{aligned}$$

Uma vez que encontramos duas expressões para $\widetilde{T}(z)$, devemos fazer uma análise dos sinais para verificar qual delas atende as condições do problema. Primeiramente, temos que expandir o binômio $\sqrt{1-4z}$:

$$\sqrt{1-4z} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^p z^p. \tag{3.9}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^p z^p = 1+\frac{(\frac{1}{2})}{1!}(-4)z+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-4)^2z^2+\cdots+$$
$$+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-(p-1))}{p!}(-4)^p z^p+\cdots \tag{3.10}$$

Portanto, se tomarmos a expressão $\widetilde{T}(z)$ com sinal positivo, obtemos:

$$\widetilde{T}(z) \;=\; \frac{z(1+\sqrt{1-4z})}{2} \overset{(3.10)}{=} \frac{z}{2}\Bigg[1\;+\;\Bigg(1\;+\;\frac{(\frac{1}{2})}{1!}(-1)^1 4^1 z\;+\;\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{2!}(-1)^3 4^2 z^2\;+\;\cdots$$
$$+\;\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\cdots(\frac{2p-3}{2})}{p!}(-1)^{2p-1}4^p z^p+\cdots\Bigg)\Bigg].$$

$$=\frac{z}{2}\left(2+\frac{(\frac{1}{2})}{1!}(-1)^1 4^1 z+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{2!}(-1)^3 4^2 z^2+\cdots+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\cdots(\frac{2p-3}{2})}{p!}(-1)^{2p-1}4^p z^p+\cdots\right)$$
$$=z+\frac{(\frac{1}{2})}{2\cdot 1!}(-1)^1 4^1 z^2+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{2\cdot 2!}(-1)^3 4^2 z^3+\cdots+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\cdots(\frac{2p-3}{2})}{2\cdot p!}(-1)^{2p-1}4^p z^{p+1}+\cdots.$$

A expressão encontrada acima nos fornece $\widetilde{T}_1 = 1$, contrariando uma das condições iniciais do problema, ou seja, $\widetilde{T}_1 = 0$. Portanto, $\widetilde{T}(z)$ com o sinal negativo é a Função Geradora Ordinária que queremos. Vamos expandir a expressão de $\widetilde{T}(z)$ a fim de obter o coeficiente $\widetilde{T}_p$.

$$\widetilde{T}(z) \;=\; \frac{z(1-\sqrt{1-4z})}{2} \overset{(3.10)}{=} \frac{z}{2}\Bigg[1\;-\;\Bigg(1\;+\;\frac{(\frac{1}{2})}{1!}(-1)^1 4^1 z\;+\;\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{2!}(-1)^3 4^2 z^2\;+\;\cdots$$
$$+\;\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\cdots(\frac{2p-3}{2})}{p!}(-1)^{2p-1}4^p z^p+\cdots\Bigg)\Bigg].$$
$$=\frac{z}{2}\left(\frac{(\frac{1}{2})}{1!}(-1)^2 4^1 z+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{2!}(-1)^4 4^2 z^2+\cdots+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\cdots(\frac{2p-3}{2})}{p!}(-1)^{2p-2}4^p z^p+\cdots\right)$$
$$=\frac{z}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 1!}2^2 z+\frac{1}{2^2\cdot 2!}2^4 z^2+\cdots++\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-3)}{2^p\cdot p!}2^{2p}z^p+\cdots\right)$$
$$=\frac{z^2}{1!}+\frac{1}{2!}2^1 z^3+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-3)}{p!}2^{p-1}z^{p+1}+\cdots$$
$$=\frac{1}{1!}z^2+\frac{2!}{2!\cdot 2}2^1 z^3+\cdots+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2p-3)\cdot(2p-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p-2)p!}2^{p-1}z^{p+1}+\cdots$$
$$=\frac{1}{1!}z^2+\frac{2!}{2!}z^3+\cdots+\frac{(2n-2)!}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 4\cdot 5\cdots(p-1)p!2^{p-1}}2^{p-1}z^{p+1}+\cdots$$
$$=\frac{1}{1!}z^2+\frac{2!}{2!}z^3+\cdots+\frac{(2p-2)!}{(p-1)!p!}z^{p+1}+\cdots \tag{3.11}$$

Uma vez que $T_n = \widetilde{T}_p = \widetilde{T}_{n+2}$, basta tomar $[z^p]\widetilde{T}(z)$. Pela equação (3.11), temos:

$$\widetilde{T}_p = \frac{(2(p-2))!}{(p-2)!(p-1)!} \overset{p=n+2}{=} \frac{(2n)!}{(n)!(n+1)!} = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$$

$$T_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1} \tag{3.12}$$

Note que se dividirmos a expressão de $\widetilde{T}(z)$ por z^2 deslocamos os coeficientes em 2 unidades a menos e, desta forma, teremos diretamente os coeficientes para a sequência (T_n). Consequentemente a equação resultante será a Função Geradora Ordinária $T(z)$ da classe $\mathcal{T}$. Daí, por (3.11) temos

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{\widetilde{T}(z)}{z^2} \\ T(z) &= \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

conforme afirmamos em (3.5).

Definição 3.1.7. *Seja Φ uma construção m-ária que associa a um conjunto qualquer de classes $\mathcal{B}^1, \ldots, \mathcal{B}^m$ uma nova classe*

$$\mathcal{A} = \Phi[\mathcal{B}^1, \ldots, \mathcal{B}^m]$$

A construção Φ é admissível se e somente se a sequência de contagem (A_n), de $\mathcal{A}$, depende somente das sequências de contagem $(B_n^1), \ldots, (B_n^m)$, de $\mathcal{B}^1, \ldots, \mathcal{B}^m$, respectivamente.

Pela *Definição* 3.1.7 *concluímos que existe um operador Ψ, bem definido, que, aplicado nas Funções Geradoras Ordinárias correspondentes às classes $\mathcal{B}^i$, para $i = 1, \ldots, m$, resulta em*

$$A(z) = \Psi[B^1(z), \ldots, B^m(z)],$$

ou seja, a Função Geradora Ordinária da classe $\mathcal{A}$.

Definição 3.1.8. *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ duas classes combinatórias. O produto cartesiano entre elas define uma classe $\mathcal{A}$ tal que*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C} = \{\alpha = (\beta, \gamma) \mid \beta \in \mathcal{B}, \gamma \in \mathcal{C}\}, \tag{3.14}$$

e $|\alpha|$ é definido por

$$|\alpha|_{\mathcal{A}} = |\beta|_{\mathcal{B}} + |\gamma|_{\mathcal{C}} \tag{3.15}$$

Exemplo 3.1.7. ***(Produto Cartesiano)*** *Considere a classe $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Pela definição dada para o Produto Cartesiano e pela equação (3.15) um elemento $\alpha \in \mathcal{A}$ de tamanho n é obtido combinando-se elementos $\beta \in \mathcal{B}$ e $\gamma \in \mathcal{C}$ com respectivos tamanho k e $(n-k)$. Assim, A_n será a soma de todas as possíveis combinações desses tamanhos, com a variação de k. Daí, podemos relacionar as sequências de contagem das classes $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ da seguinte forma:*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} B_k C_{n-k} \tag{3.16}$$

Note que a sequência (A_n) depende somente das sequências de contagem das classes usadas na construção de $\mathcal{A}$. Além disso, utilizando (3.16)

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} B_k C_{n-k}\Big) z^n \\ A(z) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n\Big) = B(z)C(z). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Portanto, o Produto Cartesiano é uma construção admissível e pode ser escrito como o produto das respectivas Funções Geradoras Ordinárias das classes que o compõe.

Exemplo 3.1.8. ***(União Disjunta)*** *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ classes tais que*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \;\; e \;\; \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$$

Defina o tamanho de $\alpha \in \mathcal{A}$ como

$$|\alpha|_{\mathcal{A}} = \begin{cases} |\alpha|_{\mathcal{B}}, & se \quad \alpha \in \mathcal{B} \\ |\alpha|_{\mathcal{C}}, & se \quad \alpha \in \mathcal{C} \end{cases} \tag{3.18}$$

Um elemento $\alpha \in \mathcal{A}$ de tamanho n é obtido quando escolhemos $\beta \in \mathcal{B}$ ou $\gamma \in \mathcal{C}$, de tamanho n. Uma vez que B_n e C_n denotam a quantidade de elementos de tamanho n nas classes $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente, então, a soma dessas quantidades nos retorna A_n, ou seja,

$$A_n = B_n + C_n \tag{3.19}$$

Além disso, pela equação (3.19), temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \Longrightarrow A(z) = B(z) + C(z) \tag{3.20}$$

Como a Sequência de Contagem depende somente das Sequências de Contagem das classes que definem $\mathcal{A}$ concluímos que a União Disjunta é uma construção admissível e pode ser escrita como a soma das Funções Geradoras das classes que definem $\mathcal{A}$.

3.2 Construções Admissíveis e Especificação

Definição 3.2.1. *A Classe Neutra $\mathcal{E} = \{\epsilon\}$ é formada por um único elemento neutro ϵ de tamanho 0. A Função Geradora Ordinária desta classe é $E(z) = 1$.*

Definição 3.2.2. *A Classe Atômica $\mathcal{Z}$ é formada por um único elemento de tamanho 1 ao qual chamamos de átomo. A Função Geradora Ordinária desta classe é $Z(z) = z$.*

Exemplo 3.2.1. *Cada letra de uma palavra ou um nó de um grafo é um exemplo de átomo.*

Classes Atômicas e Neutras podem ser representadas com subíndices, a fim de serem distinguíveis entre si. Por exemplo $\mathcal{Z}_a = \{a\}$ e $\mathcal{Z}_b = \{b\}$ são classes atômicas que formam o alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b\}$ e, consequentemente, formam as palavras binárias construídas a partir dele. Além disso, $\mathcal{E}_1 = \{\epsilon_1\}$, $\mathcal{E}_2 = \{\epsilon_2\}$ denotam Classes Neutras distintas.

Pela definição da Classe Neutra, podemos concluir que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A} \times \mathcal{E} \cong \mathcal{E} \times \mathcal{A}$.

Agora que temos as estruturas básicas para a construção de uma Classe Combinatória, vamos formalizar o conceito de soma de Classes também conhecida como União Disjunta. Este conceito já foi abordado no *Exemplo 3.1.8*.

Suponha duas classes $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ cuja interseção é não vazia. Então, podemos construir cópias disjuntas destas classes a partir do Produto Cartesiano de cada uma delas com um elemento neutro.

Definição 3.2.3. *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ duas classes combinatórias. A Soma Combinatória ou União Disjunta entre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é definida como a união de duas cópias disjuntas, $\mathcal{B}^1$ e $\mathcal{C}^2$, das classes $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente, ou seja,*

$$\mathcal{B} + \mathcal{C} := \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{C}^2,$$

onde $\mathcal{B}^1 = (\{\epsilon_1\} \times \mathcal{B})$, $\mathcal{C}^2 = (\{\epsilon_2\} \times \mathcal{C})$ e ϵ_1, ϵ_2 são elementos neutros. Denotamos $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$.

A União Disjunta é sempre uma estrutura bem definida. Assim, vamos definir o tamanho de um elemento $\alpha \in \mathcal{A}$. Uma vez que essa soma define uma união disjunta entre classes, temos que o tamanho de um elemento α é dado pela equação (3.18). Além disso, por (3.16) as Sequências de Contagem para as classes $\mathcal{B}^1 = (\{1\} \times \mathcal{B})$ e $\mathcal{C}^2 = (\{2\} \times \mathcal{C})$ são, respectivamente, B_n e C_n. Portanto, $A_n = B_n + C_n$ define a Sequência de Contagem para a classe $\mathcal{A}$ e $A(z) = B(z) + C(z)$ é a Função Geradora associada. Estes resultados estão em concordância com o que já tínhamos visto no *Exemplo 3.1.8* e com as equações (3.18)-(3.20). Logo, a União Disjunta é uma construção admissível pela definição.

Proposição 3.2.1. *Para a Soma Combinatória e o Produto Cartesiano valem as seguintes propriedades:*

1. $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C})$
2. $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C} = \mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C})$
3. $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \times \mathcal{C} = (\mathcal{A} \times \mathcal{C}) + (\mathcal{B} \times \mathcal{C})$

Demonstração: Basta aplicar as definições de cada estrutura.

Apresentaremos agora outras construções admissíveis de grande importância para o estudo de problemas de combinatória, especialmente porque a composição delas nos permite resolver problemas de maior complexidade.

Definição 3.2.4. ***(Sequência:)*** *Seja $\mathcal{B}$ uma classe. Definimos a Classe sequência da classe $\mathcal{B}$ como a soma infinita:*

$$Seq\{\mathcal{B}\} = \{\epsilon\} + \mathcal{B} + (\mathcal{B} \times \mathcal{B}) + (\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}) + ...$$

sendo ϵ o elemento neutro da classe. Em outras palavras, temos

$$Seq\{\mathcal{B}\} = \{(\beta_1, ..., \beta_l) \mid l \geq 0 \quad e\ \beta_j \in \mathcal{B}\},$$

tal que $l = 0$ *define a sequência vazia* $\{\epsilon\}$.

Note que $\mathcal{A} = Seq\{\mathcal{B}\}$ é uma *Classe Combinatória* própria que satisfaz a condição de finitude se, e somente se, a classe $\mathcal{B}$ não possui elemento de tamanho 0. De fato, se existe um elemento de tamanho 0 em $\mathcal{B}$ podemos produzir infinitos elementos $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $|\alpha| = 0$ o que contraria a definição de classe. Sendo assim, dado $\alpha \in \mathcal{A}$ definimos seu tamanho como

$$\alpha = (\beta_1, ..., \beta_l) \quad \Rightarrow |\alpha| = \sum_{i=0}^{l} |\beta_i| \tag{3.21}$$

Definição 3.2.5. ***(Ciclos)*** *Dada uma classe* $\mathcal{B}$ *definimos um ciclo como uma sequência não vazia de elementos* $\beta \in \mathcal{B}$ *de maneira que ele é obtido pelo deslocamento circular de suas componentes. A classe dos ciclos será denotada por* $Cyc\{\mathcal{B}\}$. *Em outras palavras,*

$$Cyc\{\mathcal{B}\} := \Big(Seq\{\mathcal{B}\} \setminus \{\epsilon\}\Big)/\boldsymbol{S},$$

onde $\boldsymbol{S}$ *é a relação de equivalência definida entre duas sequências por*

$$(\beta_1, ..., \beta_r)\boldsymbol{S}(\beta_1^{'}, ..., \beta_r^{'})$$

se, e somente se, existe algum deslocamento circular τ *do intervalo* $I = [1, ..., r]$ *tal que para todo* $j \in I$, $\beta_j^{'} = \beta_{\tau(j)}$.

Exemplo 3.2.2. *Considere o alfabeto binário* $\mathcal{A} = \{a, b\}$. *As sequências de tamanho 3 que podem ser formadas com esse conjunto de elementos são:*

$$\underbrace{aaa}_{1^o\ ciclo} \quad \underbrace{aab \quad aba \quad baa}_{2^o\ ciclo} \quad \underbrace{abb \quad bab \quad bba}_{3^o\ ciclo} \quad \underbrace{bbb}_{4^o\ ciclo}$$

Temos então um total de 8 sequências mas somente 4 ciclos podem ser formados com elas.

Definição 3.2.6. ***(Multiconjuntos)*** *Dada uma classe* $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}Set\{\mathcal{B}\}$ *representa a classe dos conjuntos finitos formados com os elementos de* $\mathcal{B}$ *que podem ou não se repetir dentro do conjunto. Formalmente, um multiconjunto é definido como*

$$\mathcal{M}Set\{\mathcal{B}\} := Seq\{\mathcal{B}\}/\boldsymbol{R},$$

onde $\boldsymbol{R}$ *é a relação de equivalência definida entre sequências por*

$$(\alpha_1, ..., \alpha_r)\boldsymbol{S}(\beta_1, ..., \beta_r)$$

se, e somente se, existe alguma permutação σ *de* $I = [1, \ldots, r]$ *tal que para todo* $j \in I$, $\beta_j = \alpha_{\sigma(j)}$.

Definição 3.2.7. ***(Powerset)*** *Dada uma classe* $\mathcal{B}$, $\mathcal{P}Set\{\mathcal{B}\}$ *representa a classe dos multiconjuntos finitos formados por elementos distintos de* $\mathcal{B}$. *Além disso, vale a inclusão*

$$PSet\{\mathcal{B}\} \subset \mathcal{M}Set\{\mathcal{B}\}.$$

Definição 3.2.8. *O tamanho de um elemento* $\alpha \in \mathcal{A}$ *sendo* $\mathcal{A}$ *a Classe dos Ciclos, Multiconjuntos ou Powersets é dado pela soma dos tamanhos de suas componentes.*

Exemplo 3.2.3. ***(Números Naturais)*** *Seja $\mathcal{Z}_\bullet = \{\bullet\}$ uma classe atômica e considere a classe dos números naturais, denotada por $\mathcal{I}$. Suponha que queremos representar $\mathcal{I}$, na notação unária, ou seja,*

$$\mathcal{I} = \{\bullet, \bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet\bullet, ...\}$$

Para encontrar a Função Geradora desta classe basta pensar que cada elemento $i \in \mathcal{I}$ de tamanho n possui uma única representação nesta notação e, portanto, temos $(I_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, a Função Geradora Ordinária associada à classe é dada por

$$I(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \Longrightarrow I(z) = \frac{z}{1-z}. \tag{3.22}$$

Exemplo 3.2.4. ***(Cobertura de Intervalos)*** *Seja $\mathcal{Z}_\bullet = \{\bullet\}$ a classe atômica do exemplo anterior e considere outra classe $\mathcal{A} = \mathcal{Z} + (\mathcal{Z} \times \mathcal{Z})$. Então, os elementos de $\mathcal{A}$ são representados por $\{\bullet, \bullet{-}\bullet\}$. Suponha que queremos construir uma classe $\mathcal{F} = Seq\{\mathcal{A}\}$. Então $\mathcal{F}$ contém elementos do tipo*

$$\mathcal{F} = \{\bullet, \bullet\bullet, \bullet{-}\bullet, \bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet{-}\bullet, \bullet{-}\bullet\bullet, \bullet{-}\bullet\bullet{-}\bullet, \bullet\bullet\bullet\bullet, \ldots\}$$

Utilizando a noção de tamanho de elemento definido no exemplo anterior o conjunto de elementos de tamanho n em $\mathcal{F}$ é isomorfo às coberturas de $[0, n]$ com intervalos fechados de tamanhos 1 ou 2. Daí, a Função Geradora associada à classe será dada por

$$F(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + \cdots,$$

de maneira que a Sequência de Contagem $(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$, ou seja é a sequência formada pelos Números de Fibonacci.

3.2.1 O teorema da admissibilidade para Funções Geradoras Ordinárias

A seção anterior nos apresentou certas construções admissíveis de grande importância na resolução de problemas de Combinatória. Agora apresentamos cada uma delas com uma fórmula fechada para suas respectivas Funções Geradoras Ordinárias através de um teorema central, o *Teorema da Admissibilidade para Funções Geradoras Ordinárias.*

Teorema 3.2.1. *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ classes combinatórias. As construções União Disjunta, Produto Cartesiano, Sequência, Ciclo, Multiconjunto e Powerset são construções admissíveis e suas respectivas Funções Geradoras Ordinárias são:*

1. *União:* $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = B(z) + C(z)$
2. *Produto Cartesiano:* $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = B(z) \cdot C(z)$
3. *Sequência:* $\mathcal{A} = Seq\{\mathcal{B}\} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = \dfrac{1}{1 - B(z)}$
4. *Ciclo:* $\mathcal{A} = Cyc\{\mathcal{B}\} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} ln\Big(\frac{1}{1 - B(z^k)}\Big)$

5. *Multiconjunto:* $\mathcal{A} = \mathcal{M}Set\{\mathcal{B}\} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)^{-B_n} \\ \exp\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}B(z^k)\Big) \end{cases}$

6. *Powerset:* $\mathcal{A} = \mathcal{P}Set\{\mathcal{B}\} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n)^{B_n} \\ \exp\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}B(z^k)\Big) \end{cases}$

onde $\varphi(k)$ denota a Função de Euler, [3]. Considere $B_0 = 0$ para Sequências, Ciclos, Multiconjuntos e Powersets.

Demonstração:

1. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$ e considere $A(z)$ a Função Geradora Ordinária da classe $\mathcal{A}$. Temos:

$$A(z) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} z^{|\alpha|} = \sum_{\alpha\in\mathcal{B}} z^{|\alpha|} + \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} z^{|\alpha|} \quad \Rightarrow \quad A(z) = B(z) + C(z)$$

2. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{B}\times\mathcal{C}$ e considere $A(z)$ a Função Geradora Ordinária de $\mathcal{A}$ e $\alpha = (\beta,\gamma)$ tal que

$$A(z) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} z^{|\alpha|} = \sum_{(\beta,\gamma)\in\mathcal{A}} z^{|\beta|+|\gamma|} = \sum_{(\beta,\gamma)\in\mathcal{A}} z^{|\beta|}z^{|\gamma|} = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} z^{|\beta|}\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{C}} z^{|\gamma|} = B(z)\cdot C(z)$$

3. Seja $\mathcal{A} = Seq\{\mathcal{B}\}$, $B_0 = 0$. Então

$$\mathcal{A} \stackrel{def}{=} \{\epsilon\} + \mathcal{B} + (\mathcal{B}\times\mathcal{B}) + (\mathcal{B}\times\mathcal{B}\times\mathcal{B}) + ...$$

Aplicando os resultados obtidos em 1 e 2, a Função Geradora Ordinária da classe $\mathcal{A}$ é facilmente obtida:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B(z)^n \quad \Longrightarrow \quad A(z) = \frac{1}{1-B(z)},$$

pois assumimos $B_0 = 0$ e $A(z)$ é uma *Série Geométrica* de razão $B(z)$ e, portanto, converge.

4. Seja $\mathcal{A} = Cyc\{\mathcal{B}\}$. A demonstração deste item baseia-se na aplicação do Método Simbólico utilizando-se uma Função Geradora de duas variáveis u e z. A variável u conta o número de componentes que o elemento da classe possui e a z especifica o tamanho do elemento. Seja $\mathcal{S} = Seq_{\geq 1}(\mathcal{B})$ uma classe formada a partir de uma classe inicial $\mathcal{B}$. Dizemos que uma sequência $s \in \mathcal{S}$ é primitiva se ela não representa a repetição de uma outra sequência. Por exemplo, $\alpha\beta\beta\alpha\alpha$ é uma sequência primitiva enquanto que $\alpha\beta\alpha\beta = (\alpha\beta)^2$ não é. Denotamos por $\mathcal{PS}$ a

classe das sequências primitivas. Então, podemos reescrever a Função Geradora da classe $\mathcal{S}$ como

$$S(z,u) = \frac{uB(z)}{1-uB(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} PS(z^k,u^k). \tag{3.23}$$

A equação (3.23) nos diz que toda sequência $s \in \mathcal{S}$ possui uma sequência primitiva. Aplicando a *Fórmula da Inversão de Möbius* ([5], página 81) à Função Geradora $S(z,u)$, obtemos:

$$PS(z,u) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) S(z^k,u^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \frac{u^k B(z^k)}{1-u^k B(z^k)}. \tag{3.24}$$

Agora, temos que relacionar sequências e ciclos. Note que um ciclo é primitivo se todas as suas representações lineares são primitivas. A classe dos ciclos primitivos será denotada por $\mathcal{PC}$. Então, a relação entre uma k-sequência primitiva e um k-ciclo primitivo é de 1 pra k, ou seja, cada k-sequência primitiva possui k k-ciclos relacionados a ela. Uma vez que a variável u conta o número de componentes da sequência, para obtermos a Função Geradora $PC(z,u)$ dos ciclos primitivos, basta fazer uma transformação de variáveis na Função Geradora (3.24) e substituir u^k por $\frac{u^k}{k}$, que é equivalente a fazer

$$PC(z,u) = \int_0^u PS(z,\xi)\frac{d\xi}{\xi}. \tag{3.25}$$

Substituímos a equação (3.24) em (3.25) e obtemos:

$$PC(z,u) = \int_0^u \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \frac{\xi^k B(z^k)}{1-\xi^k B(z^k)} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Fazemos uma mudança de variáveis $\omega = \xi^k B(z^k)$ e, portanto, $d\omega = k\xi^{k-1}B(z^k)d\xi$. Temos então:

$$\begin{aligned} PC(z,u) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left(\int_0^{u^k B(z^k)} \frac{\omega}{1-\omega} \frac{d\omega}{k\xi^k B(z^k)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \left(\int_0^{u^k B(z^k)} \frac{1}{1-\omega} d\omega \right) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \Big[ln(1-\omega) \Big]_0^{u^k B(z^k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} ln \left(\frac{1}{1-u^k B(z^k)} \right) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Note que um ciclo pode ser obtido por uma repetição arbitrária de ciclos primitivos. Portanto, a Função Geradora associada é dada por

$$C(z,u) = \sum_{k=1}^{\infty} PC(z^k, u^k).$$

Sabemos que

$$\sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(k)}{k}.$$

$$PC(z^k, u^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} ln\left(\frac{1}{1-u^{k^2}B(z^{k^2})}\right)$$

Portanto,

$$C(z,u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} ln\left(\frac{1}{1-u^k B(z^k)}\right). \tag{3.27}$$

Se tomarmos $u = 1$ em (3.27) obtemos diretamente a expressão para a Função Geradora Ordinária da classe $\mathcal{A} = Cyc\{B\}$ conforme pretendíamos, ou seja,

$$C(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} ln\left(\frac{1}{1-B(z^k)}\right).$$

5. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{P}Set\{\mathcal{B}\}$. Suponha que $\mathcal{B}$ é finita e $B_0 = 0$. Então, a classe $\mathcal{A}$ de todos os subconjuntos finitos de $\mathcal{B}$ satisfaz:

$$\mathcal{A} \cong \prod_{\beta \in \mathcal{B}} (\{\epsilon\} + \{\beta\}), \tag{3.28}$$

onde ϵ é o elemento neutro e $|\epsilon| = 0$.

De fato, o produto acima, quando escrito como produto de fatores distintos gera todos os conjuntos finitos de $\mathcal{B}$, garantindo que todos os elementos presentes nos conjuntos são também distintos.

Por exemplo, suponha que $\mathcal{B} = \{a, b, c\}$, com $\epsilon = 1$. Então,

$$\prod_{\beta \in \mathcal{B}} (\{\epsilon\} + \{\beta\}) = (1+a)(1+b)(1+c) = 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc = \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow A(z) \stackrel{def}{=} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} = 1 + 3z + 3z^2 + z^3 = \prod_{\beta \in \mathcal{B}} (1 + z^{|\beta|}).$$

Pelos resultados obtidos nos itens 1 e 2, a Função Geradora Ordinária (3.28) pode ser escrita como:

$$A(z) = \prod_{\beta \in \mathcal{B}} (1 + z^{|\beta|}). \tag{3.29}$$

Mas, se $|\beta| = n$ o termo $(1 + z^{|\beta|})$ aparece B_n vezes. Assim,

$$A(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^n)^{B_n}. \tag{3.30}$$

Por outro lado, $A(z) = e^{lnA(z)}$ e

$$\begin{aligned} A(z) &\overset{(3.30)}{=} \exp\Big(ln\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n)^{B_n}\Big) \\ &= \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n ln(1+z^n)\Big). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Expandindo a expressão de ln:

$$ln(1+z^n) = \Big(z^n - \frac{z^{2n}}{2} + \frac{z^{3n}}{3} - \cdots\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{nk}}{k}. \tag{3.32}$$

Substituindo (3.32) em (3.31), temos:

$$\begin{aligned} A(z) &= \exp\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(z^n)^k \\ &= \exp\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{n=1}^{\infty}B_n(z^k)^n \\ &= \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}B(z^k)\Big). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Agora, suponha que $\mathcal{B}$ é infinita e $B_0 = 0$. Neste caso, devemos observar que cada $\mathcal{A}_n$ depende somente das classes $\mathcal{B}_j$, para $j \leq n$. De fato, seja $\alpha = (\beta_1, ..., \beta_m) \in \mathcal{A}$. Então,

$$\begin{aligned} |\alpha| = n \iff \sum_{i=1}^{m}|\beta_i| = n \;\Rightarrow |\beta_i| \leq n,\ 1 \leq i \leq m \\ \Longrightarrow \mathcal{B}^{(\leq m)} = \sum_{j=1}^{m}\mathcal{B}_j. \end{aligned}$$

Note que se selecionamos os elementos de $\mathcal{B}$, com tamanho menor do que ou igual a m, os subconjuntos formados por eles terão sempre tamanho menor do que ou igual a m. Portanto, $\mathcal{A}^{(\leq m)} = \mathcal{P}Set\{\mathcal{B}^{(\leq m)}\}$. Agora, considere $O(z^{m+1})$ denotando uma série qualquer, composta de termos com grau maior do que ou igual a $m+1$. As Funções Geradoras Ordinárias para as classes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são

$$A(z) = A^{(\leq m)} + O(z^{m+1}) \;\text{ e }\; B(z) = B^{(\leq m)} + O(z^{m+1}).$$

Por outro lado, $A^{(\leq m)}$ e $B^{(\leq m)}$ estão relacionadas pela expressão (3.33), já que $\mathcal{B}^{(\leq m)}$ é uma classe finita. Portanto,

$$\begin{aligned} A^{(\leq m)} &= \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}B^{\leq m}(z^k)\Big) \\ \lim_{m\to\infty}A^{(\leq m)}(z) &= \lim_{m\to\infty}\exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}B^{\leq m}(z^k)\Big) \\ &= \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}B(z^k)\Big) \overset{(3.30)}{=} A(z). \end{aligned}$$

6. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{M}Set\{\mathcal{B}\}$. Suponha que $\mathcal{B}$ é finita e $B_0 = 0$. Então, a classe $\mathcal{A} = \mathcal{M}Set\{\mathcal{B}\}$ de todos os subconjuntos finitos de $\mathcal{B}$ satisfaz:

$$\mathcal{A} \cong \prod_{\beta \in \mathcal{B}} Seq\{\beta\}. \tag{3.34}$$

De fato, se distribuímos o produto definido acima, obtemos um multiconjunto $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que α é formado por uma sequência de elementos $\beta_1 \in \mathcal{B}$, seguido de uma sequência de elementos $\beta_2 \in \mathcal{B}$ e assim por diante. Pelos resultados obtidos em 1 e 2, podemos escrever a Função Geradora Ordinária da classe $\mathcal{A}$ como

$$A(z) = \prod_{\beta \in \mathcal{B}} (1 - z^{|\beta|})^{-1}. \tag{3.35}$$

No entanto, se $|\beta| = n$ o fator $(1 - z^{|\beta|})^{-1}$ aparece B_n vezes, já que esta quantidade define quantos elementos em $\mathcal{B}$ possuem tamanho n. Portanto, podemos reescrever (3.35) como:

$$A(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{-B_n}. \tag{3.36}$$

Mas, podemos considerar $A(z) = e^{lnA(z)}$. Então,

$$A(z) \overset{(3.36)}{=} \exp\Big(ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{-B_n}\Big) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} B_n ln(1 - z^n)^{-1}\Big). \tag{3.37}$$

Expandindo a expressão de ln:

$$ln(1 - z^n)^{-1} = -\Big(-z^n - \frac{z^{2n}}{2} - \frac{z^{3n}}{3} - \cdots\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{nk}}{k}. \tag{3.38}$$

Substituindo (3.38) em (3.37), temos:

$$\begin{aligned} A(z) &= \exp \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{nk}}{k} \\ &= \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{nk} \\ &= \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} B(z^k)\Big). \end{aligned}$$

Suponha agora que $\mathcal{B}$ é infinita. A demonstração, para este caso, é análoga a que foi feita para o caso de Powersets. Basta calcular o limite.

Exemplo 3.2.5. ***(Identidade de Valée)*** *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ Classes Combinatórias de maneira que a classe $\mathcal{C}$ foi dividida de acordo com a paridade de seus elementos, ou seja, de acordo com o número de vezes que cada elemento aparece no multiconjunto. Simbolicamente, o que temos é*

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}Set\{\mathcal{C}\} \text{ e } \mathcal{B} = \mathcal{P}Set\{\mathcal{C}\}$$

O objetivo é encontrar a Função Geradora Ordinária $A(z)$ para a classe $\mathcal{A}$, de acordo com a construção dada.

Note que um multiconjunto contém elementos com multiplicidade par ou ímpar. Chamamos de $B(z) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} z^{|\beta|}$ a Função Geradora Ordinária da classe $\mathcal{B}$. Cada termo dessa série possui expoente que determina o tamanho de um conjunto finito $\beta \in \mathcal{B}$, cujos elementos são todos distintos. No entanto, queremos permitir que os elementos se repitam dentro do conjunto, já que nosso objetivo é encontrar uma expressão para $A(z)$. Considere então

$$A(z^2) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{2|\alpha|}$$

Cada expoente de z indica uma dupla de um mesmo elemento $\alpha \in \mathcal{A}$, com tamanho $|\alpha|$. Em outras palavras, dado um subconjunto de $\mathcal{C}$, podemos torná-lo um multiconjunto se consideramos as repetições dos elementos. Se, para isso, considerarmos o produto das Funções Geradoras Ordinárias $B(z)A(z^2)$ vamos concluir que o expoente de z em $A(z^2)$ controlará todas as repetições considerando todos os tamanhos de multiconjuntos. Assim, $A(z) = B(z)A(z^2)$ é a Função Geradora Ordinária para a classe dos multiconjuntos finitos formados com os elementos da classe $\mathcal{C}$.

Por exemplo, considere $\mathcal{C} = \{a, b, c, d\}$. Suponha que queremos formar multiconjuntos de 3 elementos. Temos

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}Set\{\mathcal{C}\} = \{a, b, c, d, ab, ac, ad, bc, bd, cd, abc, abd, acd, bcd, abcd\}$$

Os multiconjuntos, de tamanho 3 da classe $\mathcal{C}$ são:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \mathcal{M}Set\{\mathcal{C}\} = \{&aaa, abb, acc, add, baa, bbb, bcc, bdd, caa, cbb, ccc, cdd,\\ &daa, dbb, dcc, ddd, abc, abd, acd, bcd\}. \end{aligned}$$

Note que este processo de formar os multiconjuntos de $\mathcal{C}$ é equivalente a selecionar um subconjunto de tamanho 1 em $\mathcal{B}$ e completar com conjuntos de tamanho 2 de $\mathcal{A}$, sendo que tais conjuntos são repetições de um dado elemento da classe $\mathcal{C}$. Também podemos selecionar subconjuntos de tamanho 3 em $\mathcal{B}$ e nenhum elemento em $\mathcal{A}$. Com isso, iremos produzir todos os multiconjuntos da classe $\mathcal{A}$ cujo tamanho é 3, conforme pretendíamos.

Até aqui estudamos as construções admissíveis sem que fossem impostas quaisquer restrições ao número de componentes de seus elementos. No entanto, há casos em que considerar o tamanho de uma construção é necessário, por exemplo, quando queremos trabalhar com a diagonal de um *Produto Cartesiano* entre k Classes Combinatórias.

Definição 3.2.9. *Seja Γ uma construção básica admissível (que pode ser qualquer entre Sequências, Multiconjuntos, Powersets e Ciclos) e $k \geq 0$. Chamamos de construção restrita àquela cujo tamanho está limitado pelo número de suas componentes, ou seja,*

1. $\Gamma_k :=$ *construção com exatamente k componentes.*

2. $\Gamma_{(>k)} :=$ *construção com mais de k componentes.*

3. $\Gamma_{(1,\ldots,k)} :=$ *construção com componentes restritas ao intervalo $[1, k]$.*

Exemplo 3.2.6. *Seja $\mathcal{B}$ uma classe. Então, podemos construir as seguintes classes a partir de $\mathcal{B}$:*

1. $Seq_k\{\mathcal{B}\} := \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times ... \times \mathcal{B} \equiv \mathcal{B}^k$
2. $\mathcal{M}Set_k\{\mathcal{B}\} := Seq_k\{\mathcal{B}\}/R$
3. $Seq_{\geq k}\{\mathcal{B}\} \cong \mathcal{B}^k \times Seq\{\mathcal{B}\}$
4. $Seq_{(par)}$:= *sequência com um número par de componentes.*
5. $Seq_{(impar)}$:= *sequência com um número ímpar de componentes.*

Exemplo 3.2.7. ***(Diagonal de um Produto Cartesiano)*** *A diagonal* Δ *de um produto cartesiano* $(\mathcal{B} \times \mathcal{B})$ *é definida como*

$$\mathcal{A} \equiv \Delta(\mathcal{B} \times \mathcal{B}) := \{(\beta, \beta) : \beta \in \mathcal{B}\}$$

Queremos calcular a Função Geradora Ordinária $A(z)$ *para a classe* $\mathcal{A}$.

Seja $(\beta, \beta) \in \mathcal{A}$. *Uma vez que* $B_n = card\Big(\{\beta \in \mathcal{B} : |\beta| = n\}\Big)$, *então para todo* $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$|\alpha| = |(\beta, \beta)| \overset{def}{=} 2\,|\beta| = 2n.$$

Portanto, a Sequência de Contagem da classe $\mathcal{A}$ *é dada por* $(A_{2n}) = (B_n)$ *já que cada elemento de* B_n *define um elemento de* $\mathcal{A}$, *cujo tamanho é* $2n$. *Daí,*

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (z^2)^n = B(z^2) \tag{3.39}$$

Segue que $\mathcal{A} = \Delta(\mathcal{B} \times \mathcal{B})$ *é uma Construção Admissível.*

Esta construção pode ser aplicada para obter todos os pares não ordenados de elementos distintos de $\mathcal{B}$, *ou seja,* $\mathcal{C} = \mathcal{P}Set_2\{\mathcal{B}\}$. *Para* $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$, *cada par não ordenado* $\{\alpha, \beta\}$ *associa-se a dois pares ordenados* (α, β), $(\beta, \alpha) \in (\mathcal{B} \times \mathcal{B})$, *com* $\alpha \neq \beta$. *Este Produto Cartesiano pode então ser descrito, em termos das Classes* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{C}$, *da seguinte forma:*

$$\mathcal{B} \times \mathcal{B} \cong \mathcal{P}Set_2\{\mathcal{B}\} + \Delta(\mathcal{B} \times \mathcal{B}) + \mathcal{P}Set_2\{\mathcal{B}\} \tag{3.40}$$

Definindo $B(z)$ *e* $C(z)$ *como as respectivas Funções Geradoras das classes* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$, *o Teorema da Admissibilidade e a equação 3.40 garantem que a Função Geradora Ordinária para a classe* $\mathcal{C}$ *é dada por:*

$$(B(z))^2 = 2C(z) + B(z^2) \quad \Rightarrow C(z) = \frac{(B(z))^2 - B(z^2)}{2}$$

Os cálculos são análogos para um Produto Cartesiano envolvendo mais classes combinatórias.

A seguir apresentamos um teorema que assegura o cálculo de Funções Geradoras Ordinárias para construções restritas, ou seja, com um número fixo de componentes.

Teorema 3.2.2. ***(Teorema de Construções com componentes restritas):*** *Seja* $\mathcal{B}$ *uma classe combinatória e* $k \geq 0$ *a restrição ao número de componentes de uma construção. Então, para cada construção abaixo, temos as respectivas Funções Geradoras Ordinárias:*

1. $\mathcal{A} = Seq_k\{\mathcal{B}\} \implies A(z) = B(z)^k$

2. $\mathcal{A} = \mathcal{P}Set_k\{\mathcal{B}\} \implies A(z) = [u^k]\exp\left(\frac{uB(z)}{1} - \frac{u^2B(z^2)}{2} + \frac{u^3B(z^3)}{3} - ...\right)$

3. $\mathcal{A} = \mathcal{M}Set_k\{\mathcal{B}\} \implies A(z) = [u^k]\exp\left(\frac{uB(z)}{1} + \frac{u^2B(z^2)}{2} + \frac{u^3B(z^3)}{3} + ...\right)$

4. $\mathcal{A} = Cyc_k\{\mathcal{B}\} \implies A(z) = [u^k]\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\varphi(l)}{l}ln\left(\frac{1}{1-u^lB(z^l)}\right)$

Demonstração:

1. Seja $\mathcal{A} = Seq_k\{\mathcal{B}\} \cong (B(z))^k$.

   Então, pelo item 1 do *Exemplo 3.2.6* e pelo *Teorema 3.2.1*, o resultado é obtido diretamente:

$$A(z) = (B(z))^k.$$

   Para demonstrar os próximos itens, é necessário introduzir uma nova variável, u, na Função Geradora. Esta variável será responsável por controlar o número de componentes da construção que estamos trabalhando. Sejam $\mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathcal{A}$. Definimos $\mathcal{X}(\alpha)$ como um parâmetro indicador do número de componentes e

$$A_{n,k} = \{\alpha \in \mathcal{A} \,:\, |\alpha| = n,\ \mathcal{X}(\alpha) = k\}$$

$$A(z,u) = \sum_{n,k} u^k z^n = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} z^{|\alpha|}u^{\mathcal{X}(\alpha)} \tag{3.41}$$

   A equação (3.41) nos retorna uma fórmula fechada para as Funções Geradoras de construções restritas por um número k de componentes. Basta tomar o coeficiente de u^k, ou seja, $[u^k]A(z,u)$.

2. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{P}Set_k\{\mathcal{B}\}$.

   Conforme visto no item 5 da demonstração do *Teorema 3.2.1*, vale o isomorfismo, já considerando a variável u,

$$\mathcal{A} \cong \prod_{\beta\in\mathcal{B}}(\{\epsilon\} + u\{\beta\})$$

   Daí,

$$A(z) = \prod_{\beta\in\mathcal{B}}(1 + uz^{|\beta|}) \Rightarrow A(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + uz^n)^{B_n}. \tag{3.42}$$

   Sabendo que

$$A(z) = \exp^{lnA(z)} \quad \text{e} \quad ln(1 + uz^n) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}u^k\frac{(z^n)^k}{k}, \tag{3.43}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
A(z) &= \exp\Bigg(ln\prod_{n=1}^{\infty}(1+uz^n)^{B_n}\Bigg) = \exp\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty}B_n ln(1+uz^n)\Bigg)\\
&\overset{(3.43)}{=} \exp\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty}B_n\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}u^k\frac{(z^n)^k}{k}\Bigg) = \exp\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}u^k\sum_{n=0}^{\infty}B_n(z^k)^n\Bigg)\\
&= [u^k]\exp\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}u^kB(z^k)\Bigg).
\end{aligned}$$

3. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{M}Set_k\{\mathcal{B}\}$.

   Pelo item 6 da demonstração do *Teorema 3.2.1*, $\mathcal{A} \cong \prod_{\beta\in\mathcal{B}} Seq_k\{u\beta\}$. Segue que

$$A(z) = \prod_{\beta\in\mathcal{B}}(1-uz^{|\beta|})^{-1} \Rightarrow A(z) = \prod_{n\geq 1}(1-uz^n)^{-B_n}. \tag{3.44}$$

   Análogo ao item anterior, usamos (3.43), com as devidas alterações para o item em questão, e obtemos que

$$A(z) = [u^k]\exp\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^k}{k}B(z^k)\Bigg).$$

4. Seja $\mathcal{A} = Cyc_k\{\mathcal{B}\}$.

   A demonstração deste item considera uma Função Geradora Ordinária de duas variáveis, ou seja, $C(z,u)$ dada por (3.27). Portanto, para obter a Função Geradora para a classe dos ciclos com k componentes, basta extrair o coeficiente $[u^k]C(z,u)$ ■

3.2.2 Construtibilidade e Especificações Combinatórias

Seja $\mathcal{W}$ a classe de todas as palavras binárias obtidas a partir de um alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b\}$. Este exemplo foi o primeiro que apresentamos para introduzir o conceito de Classe Combinatória (Ver *Exemplo 3.1.1*). Queremos encontrar a Função Geradora da classe $\mathcal{W}$ por meio do Método Simbólico, utilizando as construções admissíveis definidas nas sessões anteriores. A ideia é compor estas construções para formar novas classes e assim, termos condições de resolver uma grande variedade de problemas de Combinatória. A esta composição em termos de construções básicas damos o nome de *Especificação*. Considere o seguinte isomorfismo:

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{Z}_a + \mathcal{Z}_b,$$

onde $\mathcal{Z}_a = \{a\}$ e $\mathcal{Z}_b = \{b\}$ e recorde que o tamanho de uma palavra $\omega \in \mathcal{W}$ é dado pelo número de letras que ela contém. Então podemos considerar cada palavra como uma sequência de átomos obtidos de $\mathcal{A}$. Assim, podemos descrever $\mathcal{W}$ como

$$\mathcal{W} = Seq\{\mathcal{Z}_a + \mathcal{Z}_b\} = Seq\{\mathcal{A}\}.$$

Definição 3.2.10. *Chamamos de especificação iterativa (ou não recursiva) à descrição de uma classe combinatória envolvendo somente a composição de construções básicas aplicadas às classes atômicas e neutra.*

Exemplo 3.2.8. *A classe $\mathcal{I}$ de números naturais, Exemplo 3.2.3, admite especificação $\mathcal{I} = Seq_{\geq 1}\{\mathcal{Z}_{\bullet}\}$.*

Exemplo 3.2.9. *A classe dos multiconjuntos de números naturais $\mathcal{M}Set\{\mathcal{I}\}$ é isomorfa à classe das partições de inteiros $\mathcal{P}$.*

Especificações também podem ser recursivas. Por exemplo, a especificação para a classe $\mathcal{G}$ das Árvores Gerais Planas é dada por $\mathcal{G} = \mathcal{Z} \times Seq\{\mathcal{G}\}$. Abaixo algumas definições para chegarmos nesta afirmação.

Definição 3.2.11. *Uma árvore é definida como um grafo não orientado, conexo e acíclico. Ela é dita com raiz se possui um de seus vértices diferenciado.*

Definição 3.2.12. *Uma Árvore Plana é uma árvore com raiz e tal que a ordem das subárvores ligadas a qualquer um dos nós importa. Chamaremos de Árvores Planas Gerais àquelas em que não há restrições quanto ao grau de seus nós.*

Definimos $\mathcal{G}$ como a Classe das Árvores Planas Gerais. O tamanho de um elemento $g \in \mathcal{G}$ será dado pelo número de vértices que a árvore possui.

Exemplo 3.2.10. *Seja τ uma árvore com raiz denotada por $\bullet$ e subárvores $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. A representação dada para a árvore τ é:*

$$\tau = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{tikzcd}$$

Note que se permutarmos quaisquer das subárvores de τ obtemos uma nova árvore que não é equivalente à original. Um exemplo típico deste tipo de árvore é a Árvore Genealógica.

Qualquer árvore plana possui uma representação linear. Para o exemplo acima a representação linear da árvore τ é dada por

$$\tau = \bullet \ \boxed{\tau_1, \tau_2, \tau_3}$$

para a qual a caixa inclui representações semelhantes aplicadas às subárvores. Em outras palavras, subárvores são também árvores com raiz e portanto, admitem representação linear.

A melhor maneira de representar árvores é por meio de recursão. De fato, uma árvore plana τ pode ser vista como uma estrutura formada por uma raiz que está ligada a uma sequência de r subárvores, $\tau_1, ..., \tau_r$, cada uma destas respeitando a mesma regra estrutural. Portanto, a classe $\mathcal{G}$ pode ser descrita pela especificação recursiva a seguir

$$\mathcal{G} = \mathcal{Z} \times Seq(\mathcal{G}) \tag{3.45}$$

onde $\mathcal{Z}$ é a classe atômica que representa a raiz $\{\bullet\}$ da árvore $\tau \in \mathcal{G}$. Chega-se então ao resultado que afirmamos inicialmente.

Definição 3.2.13. *Considere a r-upla* $\vec{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}^{(1)}, ..., \mathcal{A}^{(r)})$. *A especificação para esta estrutura é dada por um conjunto de r equações*

$$\begin{cases} \mathcal{A}^{(1)} = \Phi_1(\mathcal{A}^{(1)}, ..., \mathcal{A}^{(r)}) \\ \mathcal{A}^{(2)} = \Phi_2(\mathcal{A}^{(1)}, ..., \mathcal{A}^{(r)}) \\ \qquad\qquad\qquad (...) \\ \mathcal{A}^{(r)} = \Phi_r(\mathcal{A}^{(1)}, ..., \mathcal{A}^{(r)}) \end{cases} \tag{3.46}$$

onde cada operador Φ_i, *com* $1 \leq i \leq r$ *denota um termo construído a partir de* $\mathcal{A}$ *usando as construções admissíveis básicas e as classes iniciais das classes neutra e atômica.*

O sistema (3.46) corresponde a uma especificação iterativa se ele é triangular superior pois $\mathcal{A}^{(r)}$ fica definido em termos das classes atômica e neutra. Substituindo $\mathcal{A}^{(r)}$ em $\mathcal{A}^{(r-1)}$, teremos $\mathcal{A}^{(r-1)}$ em termos das classes iniciais. Continuando o processo, obtemos $\mathcal{A}^{(1)}$ dependente de um único termo envolvendo construções básicas e as classes iniciais. Este sistema é chamado recursivo e segue a seguinte regra

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{A}}^{[0]} = (\emptyset, \ldots, \emptyset) \\ \vec{\mathcal{A}}^{[j+1]} = \vec{\Phi}(\mathcal{A}^{[j]}) \end{cases} \tag{3.47}$$

Basta tomar o limite.

Definição 3.2.14. *Uma Classe de estruturas combinatórias é dita Construtível se e somente se ela admite uma especificação (que pode ser recursiva) em termos das construções básicas União Disjunta, Produto Cartesiano, Sequência, Powersets, Multiconjuntos e Ciclos.*

Uma vez que classes construtíveis são resultado da descrição via construções básicas, pelo *Teorema 3.2.1*, concluímos que cada classe construtível possui uma Função Geradora Ordinária para a qual podemos obter, sistematicamente, equações funcionais.

Teorema 3.2.3. *A Função Geradora Ordinária de uma classe construtível é uma componente de um sistema de equações funcionais cujos termos são construídos a partir de*

$$1, z, +, \times, \underbrace{\Phi_{Seq}, \Phi_{Cyc}, \Phi_{\mathcal{M}Set}, \Phi_{\mathcal{P}Set}}_{Operadores \quad de \quad Polya},$$

onde

1. $\Phi_{Seq}[f] = \dfrac{1}{1-f}$ *(Quase inversa)*
2. $\Phi_{Cyc}[f] = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} ln\Big(\frac{1}{1-f(z^k)}\Big)$ *(Logaritmo de Polya)*
3. $\Phi_{\mathcal{M}Set}[f] = \exp\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(z^k)}{k}\Big)$ *(Exponencial de Polya)*
4. $\Phi_{\mathcal{P}Set}[f] = \exp\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{f(z^k)}{k}\Big)$ *(Exponencial Modificada de Polya)*

Assim, Classes iterativas têm Função Geradora Ordinária explícita envolvendo somente composições de operadores básicos enquanto estruturas recursivas têm Função Geradora Ordinária que são acessíveis indiretamente por um sistema de equações funcionais. Como exemplos de classes construtíveis temos:

Exemplo 3.2.11. *A Classe $\mathcal{W} = Seq(2\mathcal{Z})$ é uma Classe Construtível pois admite uma especificação iterativa obtida em termos das construções básicas. Desta forma, a Função Geradora Ordinária é obtida diretamente pelo Teorema 3.2.1, ou seja,*

$$W(z) = \frac{1}{1-2z} \quad \Rightarrow \quad W_n = 2^n,$$

conforme concluímos no Exemplo 3.1.1.

Exemplo 3.2.12. *A classe $\mathcal{G} = \mathcal{Z} \times Seq\{\mathcal{G}\}$ é uma classe construtível com especificação recursiva. Pelo Teorema 3.2.3 a Função Geradora Ordinária desta classe é dada por*

$$G(z) = z\Phi_{Seq}[G(z)] = \frac{z}{1-G(z)} \quad \Longrightarrow \quad -G^2 + G - z = 0$$

A solução para $G(z)$ é dada por $G(z) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2}$ e por (3.13) concluímos que

$$G(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}.$$

Portanto, a classe das Árvores Gerais é construtível e enumerada pelos Números de Catalan.

Exemplo 3.2.13. ***(Triangulação)*** *Conforme vimos no Exemplo 3.1.3, a classe $\mathcal{T}$ das triangulações é enumerada pelos Números de Catalan e o processo de triangulação é recursivo, ou seja, para um dado triângulo base obtemos dois polígonos que devem ser triangulados. Se denotarmos o triângulo base pela classe $\bigtriangledown$ a especificação para a classe $\mathcal{T}$ é dada por*

$$\mathcal{T} = \{\epsilon\} + (\mathcal{T} \times \bigtriangledown \times \mathcal{T}).$$

Aplicando o Teorema 3.2.3, obtemos a Função Geradora associada à classe $\mathcal{T}$, ou seja,

$$T(z) = 1 + zT(z)^2 \quad \Longrightarrow \quad T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z},$$

conforme já sabíamos.

Exemplo 3.2.14. *Considere um n-ágono e $\mathcal{U} = (\mathcal{T} \setminus \{\epsilon\})$ a classe das triangulações não vazias. Temos 3 casos para considerar:*

1. *Se $n = 3$, $\mathcal{U} = \bigtriangledown$, ou seja, só possui o triângulo base.*
2. *Se o triângulo base possui dois lados do polígono, temos que triangular um polígono de $(n-1)$ lados e este pode estar à direita ou à esquerda do triângulo base. Portanto, $\mathcal{U} = (\bigtriangledown \times \mathcal{U}) + (\mathcal{U} \times \bigtriangledown)$.*
3. *Se o triângulo base tem um lado do polígono, então o n-ágono foi dividido em dois novos polígonos que devem ser triangulados. Portanto, $\mathcal{U} = (\mathcal{U} \times \bigtriangledown \times \mathcal{U})$.*

Portanto,

$$\mathcal{U} = \nabla + (\nabla \times \mathcal{U}) + (\mathcal{U} \times \nabla) + (\mathcal{U} \times \nabla \times \mathcal{U}).$$

Pelo Teorema 3.2.3, a Função Geradora Ordinária da classe $\mathcal{U}$ *será dada por:*

$$\begin{aligned} U(z) \equiv U &= z + zU + zU + zU^2 \\ &= zU^2 + 2zU + z \\ &= \frac{1 - 2z - \sqrt{1-4z}}{2z} \\ U(z) &= T(z) - 1, \end{aligned}$$

conforme esperávamos.

3.3 Composições e Partições de Inteiros

3.3.1 Composições e Partições

Definição 3.3.1. *Uma composição de um inteiro* n *é uma sequência* $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *de inteiros,* $k \geq 0$ *tal que*

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, \quad x_j \geq 1,$$

onde cada x_i *é chamado de parte de* n *e* n *é o tamanho da composição.*

Uma composição é representada graficamente pela separação de suas partes com barras verticais. Podemos ainda representar cada parte verticalmente, gerando uma figura irregular. Cada parte x_i será representada pela notação unária, ou seja, $\bullet$.

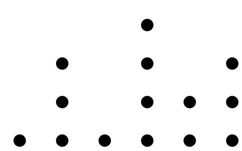


Figura 2: Representação gráfica da composição de $n = 14$.

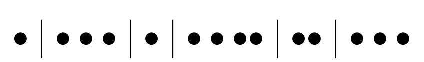


Figura 3: Representação gráfica da composição de $n = 14$, com barras verticais.

Definição 3.3.2. *Uma partição de* n *é uma sequência* $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *de inteiros,* $k \geq 0$ *tal que*

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k \quad e \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1,$$

onde cada x_i *é chamado de parte de* n *e* n *é o tamanho da partição.*

As partições são representadas pelo *Gráfico de Ferrers* o qual representa cada parte da partição verticalmente e em ordem não crescente. Teremos, então, um formato de escada.

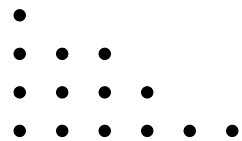


Figura 4: Representação gráfica da partição de $n = 14$.

Graficamente, composições e partições diferem somente pela ordem em que suas partes estão dispostas. Por exemplo, $4+1$ e $1+4$ são composições diferentes para $n = 5$, mas representam a mesma partição. Denotamos por $\mathcal{C}$ a classe das composições, descrita como a classe das sequências aplicada à dos números inteiros $\mathcal{I}$ reforçando assim a importância da ordem das partes. Já a classe $\mathcal{P}$ das partições será descrita como a classe dos conjuntos de elementos de $\mathcal{I}$, ou seja, sem levar em conta a ordem das partes. Daí,

$$\mathcal{C} = Seq\{\mathcal{I}\} \ \text{ e } \ \mathcal{P} = \mathcal{M}Set\{\mathcal{I}\}. \tag{3.48}$$

Voltando ao *Exemplo 3.2.3* recorde que a especificação dada para a classe $\mathcal{I}$, é $\mathcal{I} = Seq_{\geq 1}\{\mathcal{Z}\}$. Portanto, por (3.48), (3.22) e o *Teorema 3.2.1* a Função Geradora Ordinária para a classe das *Composições* é dada por

$$C(z) = \frac{1}{1 - I(z)} \overset{(3.22)}{=} \frac{1-z}{1-2z}. \tag{3.49}$$

Analogamente, a Função Geradora Ordinária para a classe das *Partições* é dada por

$$P(z) \overset{(3.22)}{=} \exp\Big(I(z) + \frac{I(z^2)}{2} + \frac{I(z^3)}{3} + ...\Big). \tag{3.50}$$

Afirmamos que a sequência de contagem para composições é dada por

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_n &= 2^{n-1}, n \geq 1. \end{aligned} \tag{3.51}$$

De fato, considere um vetor de $1's$, de tamanho n. Suponha que nos $(n-1)$ espaços entre eles queiramos alocar os sinais $'+'$ e $','$ do vetor. Isso gera uma única composição de n. Por outro lado, cada composição de n determina uma sequência de $'+'$ e $','$. Como temos $(n-1)$ espaços para alocar dois símbolos, temos 2^{n-1} composições e o resultado segue.

Proposição 3.3.1. *Seja $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{I}$ um subconjunto de números inteiros positivos. Sejam as classes $\mathcal{C}^{\mathcal{T}} := Seq\{Seq_{\mathcal{T}}\{\mathcal{Z}\}\}$ e $\mathcal{P}^{\mathcal{T}} := \mathcal{M}Set\{Seq_{\mathcal{T}}\{\mathcal{Z}\}\}$ de composições e partições, respectivamente, com partes restritas a $\mathcal{T} \subset \mathcal{Z}_{\geq 1}$. Então, as Funções Geradoras Ordinárias são dadas por:*

$$C^{\mathcal{T}}(z) = \frac{1}{1 - T(z)} \quad e \quad P^{\mathcal{T}}(z) = \prod_{n \in \mathcal{T}} \frac{1}{1 - z^n}.$$

Demonstração: A demonstração segue do *Teorema 3.2.1* restrita ao conjunto $\mathcal{T}$. Temos inicialmente que

$$I_{\mathcal{T}}(z) = \sum_{n\in\mathcal{T}} z^n = T(z),$$

pois $I_n = 1$, para todo $n \geq 0$. Então,

$$C^{\mathcal{T}}(z) = \frac{1}{1 - I_{\mathcal{T}}(z)} = \frac{1}{1 - \sum\limits_{n\in\mathcal{T}} z^n} = \frac{1}{1 - T(z)}.$$

$$P^{\mathcal{T}}(z) = \exp\Big(\sum_{n\in\mathcal{T}} \frac{1}{n} B(z^n)\Big) = \prod_{n\in\mathcal{T}} (1 - z^n)^{-I_n} = \prod_{n\in\mathcal{T}} \frac{1}{1 - z^n}.$$

Exemplo 3.3.1. *Considere a classe das composições de n restritas a $\mathcal{T} = \{1, 2\}$. Queremos calcular a Função Geradora Ordinária desta classe. A especificação é dada por:*

$$\mathcal{C}^{\mathcal{T}} = \mathcal{C}^{\{1,2\}} = Seq(\mathcal{I}^{\{1,2\}})$$

$$\Rightarrow C^{\mathcal{T}}(z) = \frac{1}{1 - I^{\mathcal{T}}(z)} = \frac{1}{1 - (z + z^2)} = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

O coeficiente $C_n^{\mathcal{T}}$ representa o número de composições de n na classe $\mathcal{C}^{\mathcal{T}}$ e estes números determinam a Sequência dos Números de Fibonacci, ou seja,

$$C_n^{\mathcal{T}} = F_{n+1} \quad e \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big].$$

Analogamente, se $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, \ldots, r\}$, temos a seguinte generalização para $C^{\mathcal{T}}(z)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\mathcal{T}} &= \mathcal{C}^{\{1,2,3,\ldots,r\}} = Seq(\mathcal{I}^{\{1,2,3,\ldots,r\}}) \\ \Longrightarrow C^{\mathcal{T}}(z) &= \frac{1}{1 - I^{\mathcal{T}}(z)} = \frac{1}{1 - (z + z^2 + \cdots + z^r)} \\ &= \frac{1}{1 - z(1 + z + \cdots + z^{r-1})} \\ &= \frac{1}{1 - z\Big(\frac{1 - z^r}{1 - z}\Big)} \\ &= \frac{1 - z}{1 - 2z + z^{r+1}}. \end{aligned}$$

A Sequência de Contagem correspondente é dada pelos Números de Fibonacci Generalizados:

$$C_n^{\{1,2,3,\ldots,r\}} = [z^n] \sum_j \Big(\frac{z(1 - z^r)}{1 - z}\Big)^j = \sum_{j,k} (-1)^k \binom{j}{k} \binom{n - rk - 1}{j - 1}.$$

Exemplo 3.3.2. ***(Partições com partes restritas)*** *O problema do troco, (seção 2.2) é um bom exemplo de partições de n com partes restritas. A ideia é calcular o número de maneiras de devolver um troco de R\$0,50, usando moedas de R\$0,01, R\$0,05, R\$0,10, R\$0,25 e R\$0,50. Uma vez que a ordem na qual selecionamos as moedas não importa e podemos repeti-las, temos um caso de partição restrita ao conjunto moedas $\mathcal{T} = \{1, 5, 1, 25, 50\}$. Portanto, pela Proposição 3.3.1 temos:*

$$P^{\mathcal{T}}(z) = \prod_{n\in\mathcal{T}} \frac{1}{1 - z^n} = \frac{1}{(1 - z)(1 - z^5)(1 - z^{10})(1 - z^{25})(1 - z^{50})}$$

$$\Rightarrow [z^{50}]P^{\mathcal{T}}(z) = 50.$$

3.3.2 Composição com um número fixo de partes

Considere $\mathcal{C}^{(k)}$ a classe das composições com exatamente k partes, $k \geq 1$. Então, temos

$$\mathcal{C} = Seq(\mathcal{I}) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}^{(k)} = Seq_k(\mathcal{I}) = \mathcal{I}^k.$$

$$C^{(k)}(z) = [I(z)]^k \overset{(3.22)}{=} \frac{z^k}{(1-z)^k}. \tag{3.52}$$

O número de composições de n em exatamente k partes, é dado pelo coeficiente

$$C_n^{(k)} = [z^n]C^{(k)}(z) = [z^n]\frac{z^k}{(1-z)^k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

que é um refinamento de 2^{n-1}, conforme visto em (3.51).

3.3.3 Partição com um número fixo de partes

Seja $\mathcal{P}^{(\leq k)} = \mathcal{M}Set_{\leq k}(\mathcal{I})$ a classe das partições com no máximo k partes, $k \geq 1$. Então, temos $\mathcal{T} = \{1, 2, \ldots, k\}$ e pela *Proposição 3.3.1* temos

$$P^{(\leq k)}(z) = \prod_{n \in \mathcal{T}} (1 - z^n)^{-1} = \prod_{n=1}^{k} \frac{1}{1 - z^n}. \tag{3.53}$$

Considere agora o *Gráfico de Ferrers* de uma partição de n. Então, a conjugada desta partição transforma o número de partes na maior parte do novo gráfico. Portanto, o número de partições com no máximo k partes, é igual ao número de partições com partes menores do que ou iguais a k. Denotando por $\mathcal{P}^{(k)}$ a classe das partições com exatamente k partes, temos

$$\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}^{(\leq k)} - \mathcal{P}^{(\leq (k-1))}.$$

e daí, pelo *Teorema 3.2.1* segue que a Função Geradora Ordinária para a classe $\mathcal{P}^{(k)}$ é dada por:

$$\begin{aligned}
P^{(k)}(z) &= P^{(\leq k)}(z) - P^{(\leq (k-1))}(z) \\
&= \prod_{n=1}^{k} \frac{1}{1-z^n} - \prod_{n=1}^{k-1} \frac{1}{1-z^n} \\
&= \left(\frac{1}{1-z^k} - 1 \right) \prod_{n=1}^{k-1} \frac{1}{1-z^n} \\
&= \left(\frac{1 - 1 + z^k}{1-z^k} \right) \prod_{n=1}^{k-1} \frac{1}{1-z^n}. \\
P^{(k)}(z) &= \prod_{n=1}^{k} \frac{z^k}{1-z^n}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.3.3. ***(Composições Cíclicas)*** *Seja $\mathcal{D}$ a classe formada pelas composições cíclicas, ou seja, aquelas definidas por um deslocamento circular de suas partes. Por exemplo $2+3+1+2+5$ e $3+1+2+5+2$. Uma vez que estamos construindo ciclos formados por componentes inteiras, a especificação para a classe $\mathcal{D}$ é dada por $\mathcal{D} = Cyc(\mathcal{I})$. Aplicando o Teorema 3.2.1, a Função Geradora Ordinária e a Sequência de Contagem associadas são dadas por*

$$\begin{aligned} D(z) &\overset{(3.22)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} ln\Big(1 - \frac{z^k}{1-z^k}\Big)^{-1} \\ &= z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 7z^5 + 13z^6 + \cdots \end{aligned}$$

Os coeficientes são formados pela expressão

$$D_n = \frac{1}{n}\sum_{k|n} \varphi(k)(2^{n/k} - 1) = -1 + \frac{1}{n}\sum_{k|n}\varphi(k)2^{n/k}, \tag{3.54}$$

*ver (EIS **A008965**), em [6].*

3.4 Palavras e Linguagem Regular

Seja $\mathcal{A}$ um alfabeto finito e fixo cujas letras são átomos e, portanto, todas com tamanho 1.

Definição 3.4.1. *Uma palavra é uma sequência finita de letras, normalmente escrita sem separações. O conjunto de todas as palavras será denotado por $\mathcal{W}$ e qualquer subconjunto de $\mathcal{W}$ é chamado de linguagem.*

Exemplo 3.4.1. *Seja $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. As sequências* 00011110*,* 011 *e* 110000 *são exemplos de palavras formadas com as letras de $\mathcal{A}$.*

Dado um alfabeto $\mathcal{A}$ de cardinalidade m, a definição da classe $\mathcal{W}$ nos permite especificá-la como $\mathcal{W} = Seq\{\mathcal{A}\}$ de maneira que a Função Geradora Ordinária associada é obtida diretamente pelo Teorema 3.2.1, ou seja,

$$W(z) = \frac{1}{1-mz}.$$

Para obter a *Sequência de Contagem* (W_n) basta pensar que uma palavra de tamanho n possui n posições que devem ser preenchidas com cada uma das m letras do alfabeto $\mathcal{A}$. Portanto, para cada posição, temos m possibilidades de escolha e daí segue que $W_n = m^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, temos m^n palavras de tamanho n.

Nosso objetivo nesta seção é estudar as linguagens da classe $\mathcal{W}$ por meio de dois métodos: o Iterativo e o Recursivo. O *Método Iterativo* baseia-se no uso das *Especificações Regulares*, aquelas que envolvem Somas, Produtos Cartesianos e Sequências de classes. Já o *Método Recursivo* utiliza o conceito de *Autômatos Finitos*, uma técnica equivalente a *Sistemas Lineares*.

Apesar desses dois métodos serem construídos com diferentes conceitos e teorias eles definem a mesma família de Linguagens Regulares. Portanto, a escolha do método é feita de acordo com a conveniência de cada problema. Neste trabalho o foco será o uso do *Método Iterativo*.

3.4.1 Especificações Regulares

Sejam $\mathcal{A} = \{a, b\}$ um alfabeto binário e $\mathcal{W}$ a classe de todas as palavras que podem ser construídas a partir de $\mathcal{A}$. Cada palavra pode ser construída de uma maneira alternativa através de sua partição em blocos sucessivos, cada um formado por um único b no início do bloco, junto com uma sequência de $a's$.

Exemplo 3.4.2. *Considere a sequência* ***aaabaababaabbabbaaa****. A decomposição, em blocos, desta sequência é dada por:*

$$aaa||baa|ba|baa|b|ba|b|baaa.$$

A decomposição por blocos constituídos por um único elemento b nos permite especificar a classe $\mathcal{W}$ da seguinte forma:

$$\mathcal{W} = Seq\{a\} \times Seq\{b \times Seq\{a\}\} \tag{3.55}$$

Pelo *Teorema 3.2.1*, obtemos a Função Geradora para a classe $\mathcal{W}$:

$$W(z) = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-z\frac{1}{1-z}} = \frac{1}{1-2z} \tag{3.56}$$

conforme obtivemos na equação (3.3).

Este tipo de decomposição é de grande utilidade e interesse quando estudamos longas sequências de elementos.

Seja $a^{<k} = Seq_{<k}\{a\}$ o conjunto das palavras formadas apenas com a letra a e cujo tamanho é menor do que um dado $k \in \mathbb{N}$. Uma vez que as palavras são compostas somente por $a's$ e o tamanho de cada uma delas não é maior do que k, para cada tamanho n temos somente uma palavra, com $n \in [1, k-1]$. Neste caso, a Função Geradora associada a este conjunto é naturalmente obtida:

$$a^{<k}(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{k-1} = \frac{1-z^k}{1-z} \tag{3.57}$$

Agora, vamos complicar um pouco mais este problema e impor mais uma condição. Queremos descrever o conjunto $\mathcal{W}^{<k>}$ das palavras que não possuem k letras $a's$ consecutivas. Mas este problema se reduz a particionar a sequência de $a's$ em blocos, cada vez que o tamanho dela for ultrapassar k. Particionar a sequência, neste contexto, significa introduzir um b no ponto conveniente. Em outras palavras, a especificação para $\mathcal{W}^{<k>}$ é dada por:

$$\mathcal{W}^{<k>} = a^{<k} \times Seq\{b \times a^{<k}\} \tag{3.58}$$

Daí, segue que a Função Geradora associada é:

$$W^{<k>}(z) \overset{(3.57)}{=} \frac{1-z^k}{1-z}\frac{1}{1-z\frac{1-z^k}{1-z}} \implies W^{<k>}(z) = \frac{1-z^k}{1-2z+z^{k+1}} \tag{3.59}$$

Uma outra maneira de interpretar a expressão (3.59) é dizer que ela é a Função Geradora do conjunto das palavras cuja maior sequência de $a's$ tem tamanho menor do que k.

Agora, vamos generalizar este problema considerando o conjunto $\mathcal{W}^{<k>}$, das palavras formadas por um alfabeto arbitrário $\mathcal{A}$, com cardinalidade m, e tal que nenhuma palavra de $\mathcal{W}^{<k>}$ possui uma sequência de $a's$ com tamanho maior do que k. Então, a especificação para $\mathcal{W}^{<k>}$ será dada por:

$$\mathcal{W}^{<k>} = a^{<k} \times Seq\{\alpha \times a^{<k}\}, \tag{3.60}$$

onde α é qualquer das $m-1$ letras diferentes de a no alfabeto $\mathcal{A}$.

Daí, a Função Geradora associada será dada por:

$$\begin{aligned} W^{<k>}(z) &\overset{(3.57)}{=} \frac{1-z^k}{1-z}\frac{1}{1-(m-1)z\dfrac{1-z^k}{1-z}} \\ \Rightarrow \quad W^{<k>}(z) &= \frac{1-z^k}{1-mz+(m-1)z^{k+1}} \end{aligned} \tag{3.61}$$

Definição 3.4.2. *Uma especificação iterativa que envolve somente átomos associados a Somas Combinatórias, Produtos Cartesianos e Sequências é chamada de especificação regular. Uma linguagem $\mathcal{L}$ é chamada de* ***S-regular*** *(especificação regular) se existe uma classe $\mathcal{M}$ descrita por uma especificação regular tal que $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ são isomorfas: $\mathcal{L} \cong \mathcal{M}$.*

A definição de Especificação regular associada ao teorema de Admissibilidade leva ao seguinte resultado:

Proposição 3.4.1. *Qualquer linguagem* ***S-regular*** *possui uma função racional como Função Geradora Ordinária que é obtida de uma especificação regular da linguagem traduzindo cada letra pela variável z, união disjunta em somas, produtos cartesianos em produtos e sequências em quase-inversas $(1-.)^{-1}$.*

Exemplo 3.4.3. ***(Combinações e Espaçamentos)*** *Seja $\mathcal{L}$ o conjunto das palavras formadas pelos elementos do alfabeto binário $\mathcal{W} = \{a, b\}$, tal que cada palavra de $\mathcal{L}$ contém exatamente k letras b. Uma especificação regular para este conjunto é dada por:*

$$\mathcal{L} = Seq\{a\} \times (b \times Seq\{a\})^k$$

Pelo Teorema 3.2.1 a Função Geradora associada à classe $\mathcal{L}$ é dada por:

$$L(z) = \frac{1}{1-z}\left(z\frac{1}{1-z}\right)^k = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}.$$

Considere uma palavra em $\mathcal{L}$ de tamanho n. Temos que escolher k posições das n possíveis para alocar as letras b. Portanto, a Sequência de Contagem para a classe $\mathcal{L}$ fica definida pelo coeficiente binomial

$$L_n = [z^n]L(z) = \binom{n}{k}.$$

Exemplo 3.4.4. *Considere agora que para o conjunto $\mathcal{L}$ do exemplo anterior façamos a seguinte restrição: nenhum elemento pode estar a uma distância maior do que ou igual a d, do seu sucessor. Defina*

- $\binom{n}{k}_{<d}$ *:= número de maneiras de combinar k elementos entre $[1, n]$, sujeitas a esta restrição.*

A classe composta por esses elementos será denotada por $\mathcal{L}^{[d]}$ *e possui a seguinte especificação regular*

$$\mathcal{L}^{[d]} = Seq\{a\} \times (b \times Seq_{<d}\{a\})^{k-1} \times (b \times Seq\{a\})$$

Daí, a Função Geradora Ordinária associada à classe $\mathcal{L}^{[d]}$ *será dada por:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{[d]}(z) &\overset{(3.57)}{=} \frac{1}{1-z}\left(z\frac{1-z^d}{1-z}\right)^{k-1}\frac{z}{1-z} \\ \mathcal{L}^{[d]}(z) &= \frac{z^k(1-z^d)^{k-1}}{(1-z)^{k+1}}. \end{aligned}$$

com Sequência de Contagem dada por:

$$L_n = \binom{n}{k}_{<d} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{k-1}{j}\binom{n-dj}{k}.$$

O último exemplo acima é análogo ao problema de resolver composições com partes restritas. No caso acima, o que acabamos de analisar é o maior espaçamento (restrito a uma distância no máximo d), em subconjuntos.

3.4.2 Padrões

Padrões são sequências ordenadas de elementos que aparecem separados ou não. A procura de certos padrões significativos em textos ou em sequências de elementos tem se tornado de grande importância na ciência. Por exemplo, considere uma sequência genômica de tamanho 100.000 na qual procuramos o padrão TAGATAA. Neste caso, o alfabeto para formar a sequência é $\mathcal{A} = \{A, G, C, T\}$. A pergunta é: este padrão é significativo ou não nessa sequência? A resposta depende da probabilidade dele ocorrer. Nas redes de segurança para computadores, invasões podem ser detectadas por algumas sequências de alarmes de eventos bem definidos. Quantificar os fenômenos probabilísticos correspondentes é um problema de enumeração. No contexto que queremos, trataremos especialmente de dois tipos de padrões p:

a) ***Padrão subsequência (ou Padrão Oculto):*** Este tipo de padrão ocorre quando suas letras aparecem na ordem correta mas não necessariamente num bloco só.

b) ***Padrão fator (ou Padrão de Blocos):*** Caracteriza-se por suas letras aparecerem na ordem correta e de forma contígua.

Considerando a noção de padrão definida, teremos duas categorias de problemas para resolver. Um deles tem como objetivo determinar a probabilidade de uma palavra conter ou não um padrão p. Este problema enumera todas as palavras em que o padrão ocorre, independente da frequência em que isso acontece. O outro tipo de problema determina a esperança do número de ocorrências de um padrão em um texto aleatório enumerando palavras cada uma com um padrão distinto.

Exemplo 3.4.5. *Sejam $\mathcal{A}$ um alfabeto finito com m letras e $p = p_1p_2...p_k$ uma palavra de tamanho k. Definimos $\mathcal{L}$ como a classe de todas as palavras que contém p como um padrão oculto. Assim, cada palavra em $\mathcal{L}$ pode ser escrita como uma sucessão de bloco de sequências de letras tais que o primeiro bloco é uma sequência de letras que não contém p_1 seguido do bloco com a letra p_1, outro bloco com uma sequência de letras que não contém p_2 seguido do bloco com a letra p_2, etc. A especificação da classe $\mathcal{L}$ é dada por:*

$$\mathcal{L} = Seq\{\mathcal{A} \setminus p_1\} \times p_1 \times Seq\{\mathcal{A} \setminus p_2\} \times p_2 \times ... \times Seq\{\mathcal{A} \setminus p_k\} \times p_k$$

Aplicando o Teorema 3.2.1 a Função Geradora Ordinária da classe é dada por:

$$\begin{aligned} L(z) &= \frac{z}{1-(m-1)z} \cdots \frac{z}{1-(m-1)z} \\ &= \frac{z^k}{(1-(m-1)z)^k} \frac{1}{1-mz}. \end{aligned}$$

Note que para uma palavra de tamanho n devemos escolher k posições para alocar as letras do padrão p. Isso pode ser feito de $\binom{n}{k}$ maneiras. Restam agora $(n-k)$ posições para serem preenchidas com as $m-1$ letras do alfabeto $\mathcal{A} \setminus p_i$, com $i \in [1,k]$. Pelo Princípio Multiplicativo, obtemos então que o número de palavras de tamanho n que contém o padrão p é

$$L_n = (m-1)^{n-k}\binom{n}{k},$$

sendo L_n a Sequência de Contagem para a classe $\mathcal{L}$.

Por exemplo, tome $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ e $p = p_1p_2p_3p_4$. Então, um elemento $l \in \mathcal{L}$ pode ser dado por

$$l = (p_2p_2p_3)p_1(p_4p_1)p_2(p_1)p_3(p_3p_2)p_4 = p_2p_2p_3\boxed{p_1}p_4p_1\boxed{p_2}p_1\boxed{p_3}p_3p_2\boxed{p_4}.$$

Neste caso, note que o padrão p aparece com suas letras ordenadas e totalmente separadas.

Exemplo 3.4.6. *Considere a especificação regular para a classe $\mathcal{O}$, dada por:*

$$\mathcal{O} = Seq\{\mathcal{A}\} \times p_1 \times Seq\{\mathcal{A}\} \times p_2 \times \ldots \times Seq\{\mathcal{A}\} \times p_{k-1} \times Seq\{\mathcal{A}\} \times p_k \times Seq\{\mathcal{A}\}.$$

Note que $w \in \mathcal{O}$ é uma $(2k+1)-$upla cuja primeira componente é uma palavra arbitrária, a segunda componente é p_1, a terceira é uma palavra arbitrária, etc. Dessa forma, obtemos o padrão $p = p_1p_2...p_k$ em blocos livres e alternados. Por outro lado, qualquer $w \in \mathcal{O}$ representa uma possível ocorrência de p em um texto construído com o alfabeto $\mathcal{A}$.

De acordo com a especificação dada para a classe $\mathcal{O}$, a Função Geradora associada é dada por

$$O(z) = \frac{z^k}{(1-mz)^{k+1}}$$

Note que para uma palavra de tamanho n *devemos escolher* k *posições para alocar as letras do padrão* p*. Isso pode ser feito de* $\binom{n}{k}$ *maneiras. Restam agora* $(n-k)$ *posições para serem preenchidas com quaisquer das* m *letras do alfabeto* $\mathcal{A}$*. Pelo Princípio Multiplicativo, obtemos então que o número de palavras de tamanho* n *que contém o padrão* p *é*

$$O_n = m^{n-k}\binom{n}{k},$$

sendo O_n *a Sequência de Contagem para a classe* $\mathcal{O}$*.*

Uma vez que o número total de palavras de tamanho n *é* m^n *podemos calcular a razão entre o número de palavras que contém o padrão* p *e o número de palavras de tamanho* n*, ou seja,*

$$\Omega_n = \frac{[z^n]O(z)}{m^n} = m^{-k}\binom{n}{k}$$

A razão Ω_n *pode ser interpretada como a esperança do número de ocorrências de* p *em uma palavra aleatória de tamanho* n*, assumindo que as palavras são igualmente prováveis.*

Por exemplo, tome $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ *e* $p = p_1p_2p_3p_4$*. Então, um elemento* $o \in \mathcal{O}$ *pode ser representado por*

$$o = (p_1p_2p_3)p_1(p_3p_1)p_2(p_4)p_3(p_1p_4) = \boxed{p_1p_2p_3}\,{\color{red}p_1}p_3p_1{\color{red}p_2}\boxed{p_4}\,{\color{red}p_3}p_1{\color{red}p_4}.$$

Note que o padrão aparece dividido em blocos dentro da palavra e mantém a ordem dos seus elementos. E, além disso, o padrão ocorre duas vezes na mesma palavra, conforme mostrado nos blocos e em vermelho.

Exemplo 3.4.7. *Suponha, agora, que queremos descrever o conjunto* $\widehat{\mathcal{O}}$ *composto de todas as palavras que contém o padrão* $p = p_1p_2...p_k$ *em um único bloco, ou seja, queremos encontrar um padrão de blocos. Para garantir que isso ocorra numa palavra, basta que ela contenha uma sequência de letras no início e no final do padrão* p*. Desta forma, a especificação da classe* $\widehat{\mathcal{O}}$ *resume-se a:*

$$\widehat{\mathcal{O}} = Seq\{A\}(p_1p_2...p_k)Seq\{A\}$$

Pelo Teorema 3.2.1 obtemos a Função Geradora associada:

$$\widehat{O}(z) = \frac{1}{1-mz}z^k\frac{1}{1-mz} = \frac{z^k}{(1-mz)^2}$$

Exemplo 3.4.8. ***(Padrões com intervalos)*** *Seja* $\mathcal{A}$ *um alfabeto finito de cardinalidade* m *e considere novamente o padrão* $p = p_1p_2...p_k$*. Suponha que menos de* d *letras do alfabeto separe as letras de* p*. O que queremos é determinar uma especificação e uma Função geradora para a classe* $\mathcal{J}$ *composta destes elementos. A especificação é dada por:*

$$\mathcal{J} = Seq\{\mathcal{A}\} \times p_1 \times Seq_{<d}\{\mathcal{A}\} \times p_2 \times Seq_{<d}\{\mathcal{A}\} \times p_3 \times \ldots Seq_{<d}\{\mathcal{A}\} \times p_k \times Seq\{\mathcal{A}\}$$

A Função Geradora para a classe $Seq_{<d}\{\mathcal{A}\}$ *é dada por*

$$1 + mz + m^2z^2 + ... + m^{d-1}z^{d-1} = \frac{1 - m^d z^d}{1 - mz}$$

e, portanto, a Função Geradora para a classe $\mathcal{J}$ é dada por:

$$J(z) = \frac{1}{(1-mz)} z \frac{1 - m^d z^d}{1 - mz} z ... z \frac{1 - m^d z^d}{1 - mz} z \frac{1}{(1-mz)}$$

$$J(z) = \frac{z^k (1 - m^d z^d)^{k-1}}{(1-mz)^{k+1}}$$

3.4.3 Construção de Palavra Relacionada

Palavras são elementos úteis para codificar qualquer estrutura combinatória. Nesta seção usaremos palavras para codificar *Partições de Conjuntos* e *Números de Stirling.*

Definição 3.4.3. *Uma partição do conjunto $\mathcal{D}$ é uma coleção de subconjuntos dois a dois disjuntos e não vazios, denominados blocos, cuja união é $\mathcal{D}$.*

Exemplo 3.4.9. *Considere o conjunto $\mathcal{D} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Podemos particionar este conjunto da seguinte forma:*

$$\boxed{\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}}, \boxed{\{\alpha,\beta\},\{\gamma,\delta\}}, \boxed{\{\alpha,\gamma\},\{\beta,\delta\}}, \boxed{\{\alpha,\delta\},\{\beta,\gamma\}}, \boxed{\{\alpha\}\{\beta,\gamma,\delta\}},$$
$$\boxed{\{\beta\},\{\alpha,\gamma,\delta\}}, \boxed{\{\gamma\},\{\alpha,\beta,\delta\}}, \boxed{\{\delta\},\{\alpha,\beta,\gamma\}}, \boxed{\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma,\delta\}},$$
$$\boxed{\{\alpha\},\{\gamma\},\{\beta,\delta\}}, \boxed{\{\alpha\},\{\delta\},\{\beta,\gamma\}}, \boxed{\{\beta\},\{\gamma\},\{\alpha,\delta\}}, \boxed{\{\beta\},\{\delta\},\{\alpha,\gamma\}},$$
$$\boxed{\{\gamma\},\{\delta\},\{\alpha,\beta\}}, \boxed{\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\},\{\delta\}}$$

Temos, portanto, um total de 15 partições de $\mathcal{D}$.

Definição 3.4.4. *Definimos $\mathcal{S}_n^{(r)}$ como o conjunto de todas as partições de $\{1, 2, \ldots, n\}$ em r blocos não vazios e $S_n^{(r)} = card(\mathcal{S}_n^{(r)})$.*

Exemplo 3.4.10. *Para o exemplo anterior, temos*

$$S_4^{(1)} = 1,\ S_4^{(2)} = 7,\ S_4^{(3)} = 6,\ S_4^{(4)} = 1.$$

Dado um alfabeto de r letras $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, ..., b_r\}$ é possível codificar as partições de $\mathcal{S}_n^{(r)}$ a partir das letras de $\mathcal{B}$. Dado um conjunto de tamanho n seja ω uma partição deste conjunto formada por r blocos. Defina os *blocos líderes* identificando cada bloco pelo seu menor elemento. Ordene os blocos líderes em ordem crescente e defina o índice j de um bloco como a classificação de seu líder entre todos os r líderes, $j \in [1, r]$. Percorra sequencialmente os elementos de 1 até n codificando cada elemento por uma das letras do alfabeto $\mathcal{B}$. Assim, cada elemento pertencente ao bloco de índice j será codificado por b_j. Vamos aplicar este método em um exemplo:

Exemplo 3.4.11. *Suponha $n = 8$ e $r = 3$. Denotamos por*

$$\omega = \{\{6, 4\}, \{5, 1, 2\}, \{3, 7, 8\}\}$$

a partição do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ em 3 blocos não vazios. Buscamos uma codificação de ω pelas letras do alfabeto $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

Primeiramente, identificamos, em vermelho, o menor elemento de cada bloco de ω. Fazemos a ordenação dos blocos líderes e definimos o índice j de cada bloco classificando cada menor elemento da caixa entre $\{1, 2, 3\}$. Daí, montamos a codificação, atribuindo a cada elemento do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ uma letra de $\mathcal{B}$, referente ao índice do bloco em que o elemento se encontra. Abaixo seguem os passos feitos:

$$\omega = \Big\{\{6, 4\}, \{5, 1, 2\}, \{3, 7, 8\}\Big\} = \Big\{\{4, 6\}, \{1, 2, 5\}, \{3, 7, 8\}\Big\}$$

$$1 < 3 < 4 \Longrightarrow \Big\{\overbrace{\{1, 2, 5\}}^{b_1}, \overbrace{\{3, 7, 8\}}^{b_2}, \overbrace{\{4, 6\}}^{b_3}\Big\}$$

A matriz correspondente a codificação do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ b_1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_3 & b_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, a partição ω é codificada pela palavra $b_1b_1b_2b_3b_1b_3b_2b_2$ de comprimento n, formada pelas letras do alfabeto $\mathcal{B}$.

Dado um conjunto de tamanho n a codificação de uma partição deste conjunto, a partir de um alfabeto $\mathcal{B}$ com r letras, satisfaz as seguintes propriedades:

1. Cada partição é codificada por uma palavra de tamanho n.
2. Cada palavra que codifica a partição contém as r letras de $\mathcal{B}$, já que cada letra pertence a um dos r blocos.
3. A primeira ocorrência de b_1 precede a primeira ocorrência de b_2, etc, pois os blocos líderes são ordenados de maneira crescente.

Graficamente, a codificação de um conjunto pode ser representada por uma "escada irregular"tal que a escada tem comprimento n e altura r. Além disso, cada coluna contém exatamente um elemento e cada linha corresponde a uma classe na partição.

Exemplo 3.4.12. *Para o exemplo anterior, temos*

$$\begin{array}{cccccccc} & & & 4 & - & 6 & - & - \\ & & 3 & - & - & - & 7 & 8 \\ 1 & 2 & - & - & 5 & - & - & - \end{array}$$

Pelas propriedades 2 e 3 dadas acima a especificação da classe $\mathcal{S}_n^{(r)}$ é dada por:

$$\mathcal{S}_n^{(r)} = b_1 \times Seq(b_1) \times b_2 \times Seq(b_1 + b_2) \times b_3 \times \ldots \times b_r \times Seq(b_1 + b_2 + ... + b_r)$$

significando que a primeira ocorrência de b_1 precede a primeira ocorrência de b_2. Então, entre b_1 e b_2 pode ou não ter mais $b_1's$. Depois da primeira ocorrência de b_2 posso ter uma sequência de b_1 e b_2 ou só de b_1 ou só de b_2. Com as demais letras acontece o mesmo processo.

Pela especificação dada acima, a Função Geradora associada à classe $\mathcal{S}_n^{(r)}$ é obtida diretamente pelo *Teorema 3.2.1*:

$$S^{(r)}(z) = \frac{z^r}{(1-z)(1-2z)(1-3z)...(1-rz)} \tag{3.62}$$

A decomposição de (3.62), em *Frações Parciais* é dada por:

$$\begin{aligned} S^{(r)}(z) &= \frac{1}{r!}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\frac{(-1)^{r-j}}{1-jz} \\ S_n^{(r)} &= \frac{1}{r!}\sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}j^n. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Em particular, temos:

$$S_n^{(1)} = 1,\ S_n^{(2)} = \frac{1}{2!}(2^n - 2),\ S_n^{(3)} = \frac{1}{3!}(3^n - 32^n + 3)$$

Os números obtidos pela expressão (3.63) são conhecidos como *Números de Stirling de segundo tipo* e são denotados por $\left\{ {n \atop r} \right\}$.

Exemplo 3.4.13. ***(Palavras circulares)*** *Seja $\mathcal{A} = \{\bullet, \circ\}$ um alfabeto binário composto por contas de duas cores distintas. Definimos a classe $\mathcal{N}$ como a classe das palavras circulares formadas pelos elementos de $\mathcal{A}$. Então, $\mathcal{N} = Cyc\{\mathcal{A}\}$ e pelo Teorema 3.2.1 temos*

$$\begin{aligned} N(z) &\overset{(3.3)}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k}ln\Big(\frac{1}{1-2z^k}\Big) \\ &= 2z + 3z^2 + 4z^3 + 6z^4 + 8z^5 + 14z^6 + \cdots \end{aligned}$$

Os coeficientes são dados por

$$N_n = \frac{1}{n}\sum_{k|n}\varphi(k)2^{n/k} \overset{(3.54)}{=} D_n + 1,$$

*(ver EIS **A000031**), em [6]), onde $\varphi(k)$ denota a Função de Euler, [3], e D_n é a Sequência de Contagem para a classe das Composições Cíclicas dada pelo Exemplo 3.3.3.*

A generalização deste problema para um alfabeto $\mathcal{A}$ com cardinalidade m é dada por:

$$N(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k}ln\Big(\frac{1}{1-mz^k}\Big) \tag{3.64}$$

$$N_n = \frac{1}{n}\sum_{k|n}\varphi(k)m^{n/k} \tag{3.65}$$

3.5 Árvores como estrutura combinatória

Nesta seção trataremos de uma estrutura combinatória recursiva a qual denominamos Árvores. Assim como fizemos com as demais estruturas, iremos definir, especificar e obter a Função Geradora associada de maneira que consigamos enumerar os elementos desta classe de acordo com as propriedades desejadas.

3.5.1 Árvores Planas

Conforme vimos na *Definição 3.2.13*, Árvores planas possuem raiz e subárvores ordenadas entre si. Uma árvore plana pode ser vista como uma estrutura abstrata da Teoria de Grafos. Seja $\mathcal{G}$ a classe das Árvores Planas Gerais para as quais todos os graus de nós são permitidos. Pela expressão (3.45) e pelo *Teorema 3.2.1*, temos

$$\mathcal{G} = \mathcal{Z} \times Seq\{\mathcal{G}\} \implies G(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$$

e

$$G_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n} = C_{n-1},$$

ou seja, a enumeração da classe é dada pelos *Números de Catalan*. (Vide Exemplo 3.2.13) O intuito de relembrar essas propriedades centrais da classe $\mathcal{G}$ é dar início ao estudo desta classe sujeita a restrições, ou seja, restringindo as árvores gerais quanto ao grau de um nó, por exemplo.

Definição 3.5.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{N}$ um subconjunto dos números naturais, tal que $0 \in \Omega$. Definimos $\mathcal{T}^{\Omega}$ como a classe constituída por árvores $\Omega-$restritas com graus de seus nós restritos a Ω. Definimos*

$$\Phi(u) = \sum_{\omega \in \Omega} u^{\omega} \tag{3.66}$$

como a função característica (ordinária) de Ω.

Exemplo 3.5.1. *Como exemplos de árvores $\Omega-$restritas temos:*

1. *$\Omega = \{0,2\}$ a classe das árvores binárias onde cada nó possui grau 0 ou 2;*
2. *$\Omega = \{0,1,2\}$ determina a classe das árvores unárias-binárias;*
3. *$\Omega = \{0,3\}$ a classe das árvores ternárias;*
4. *Para o caso das árvores gerais, temos $\Omega = \mathbb{N}$.*

Teorema 3.5.1. ***(Teorema de Inversão de Lagrange)*** *Os coeficientes de uma função inversa e de todas as suas potências são determinados pelos coeficientes das potências da função direta. Se $z = \dfrac{T}{\Phi(T)}$ então*

$$[z^n]T(z) = \frac{1}{n}[w^{n-1}]\Phi(\omega)^n \tag{3.67}$$

$$[z^n]T(z)^k = \frac{k}{n}[w^{n-k}\Phi(\omega)^n, \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{3.68}$$

As árvores $\Omega-$restritas podem ser enumeradas em termos da função característica de Ω.

Proposição 3.5.1. *A Função Geradora Ordinária $T^{\Omega}(z)$ da classe $\mathcal{T}^{\Omega}$ de árvores $\Omega-$restritas é determinada implicitamente por*

$$T(z) = z\Phi(T(z)),$$

onde ϕ é a função característica ordinária de Ω. A sequência de contagem para esta classe é dada por:

$$T_n^{\Omega} \equiv [z^n]T^{\Omega}(n) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\Phi(u)^n \tag{3.69}$$

Demonstração: Seja $\mathcal{G} = \mathcal{Z} \times Seq\{\mathcal{G}\}$ a especificação para árvores gerais. Para a classe $\mathcal{T}^{\Omega} = \mathcal{Z} \times Seq_{\Omega}(\tau^{\Omega})$ temos a Função Geradora Ordinária $T^{\Omega}(z) = z\Phi(T^{\Omega}(z))$. Por (3.67) a expressão para T_n^{Ω} é obtida diretamente.

Exemplo 3.5.2. *Seja $\Omega = \{0, 2\}$ e $\mathcal{T}^{\Omega}$ a classe das árvores restritas a Ω. Neste caso, Ω determina a classe $\mathcal{T}^{\Omega}$ das Árvores Binárias e*

$$\phi(u) = \sum_{\omega \in \Omega} u^{\omega} = u^0 + u^2 = 1 + u^2 \tag{3.70}$$

Assim,

$$T(z) \equiv T^{\Omega}(z) = z\Phi(T(z)) \Longrightarrow T(z) = z\Phi(T(z)) \overset{(3.70)}{\Rightarrow} T(z) = z(1 + (T(z))^2)$$

$$\Rightarrow z(T(z))^2 - T(z) + z = 0 \Longrightarrow T(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z}.$$

A Sequência de Contagem para a classe $\mathcal{T}^{\Omega}$ é dada por $(T_n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, veja Exemplo 3.1.2 e a equação (3.12). Portanto, a classe das Árvores Binárias é enumerada pela sequência (C_n) dos Números de Catalan.

3.6 Construções Adicionais

Esta seção é dedicada a dois outros tipos de construções admissíveis denominadas *Apontamento* e *Substituição*. Dada uma classe $\mathcal{B}$ o *apontamento* em $\mathcal{B}$ significa apontar para um átomo em particular de um elemento β de $\mathcal{B}$ que, por sua vez, é diferenciado dos demais. Já a *substituição* é o resultado de compor duas *Classes Combinatórias* $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, de maneira que alguns elementos de $\mathcal{C}$ sejam substituídos por átomos de $\mathcal{B}$.

3.6.1 Apontamento e Substituição

Definição 3.6.1. *Seja $\mathcal{B}$ uma classe e $\{\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n\}$ um conjunto formado de elementos neutros distintos todos de tamanho* 0. *O Apontamento de uma classe $\mathcal{B}$ é denotado por $\theta\mathcal{B}$ e constitui uma classe $\mathcal{A}$ tal que*

$$\mathcal{A} = \theta\mathcal{B} := \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \times \{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}.$$

Definição 3.6.2. *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ duas classes. A Substituição de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{B}$ é denotada por $\mathcal{B} \circ \mathcal{C}$ e tal que*

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{C} \equiv \mathcal{B}[\mathcal{C}] := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k \times Seq_k(\mathcal{C}).$$

Sabemos que $\mathcal{B}_n = \{\beta \in \mathcal{B} : |\beta| = n\}$ e $B_n = |\mathcal{B}_n|$.

Pela definição de *Apontamento*, concluímos que a Sequência de Contagem da classe $\mathcal{A}$ é dada por $A_n = nB_n$. De fato, quando fazemos o Produto Cartesiano $\mathcal{B}_n \times \{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$, cada elemento de $\mathcal{B}_n$ formará um produto cartesiano com $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$ de maneira que este produto se divide ainda em outros n, cada um indicando o apontamento para um dos n átomos do elemento escolhido em $\mathcal{B}_n$. Como $B_n = |\mathcal{B}_n|$, teremos um total de nB_n elementos de tamanho n, com um dos n átomos diferenciado. Portanto, $A_n = |\mathcal{A}_n| = nB_n$. Já no caso da *Substituição*, seja $\beta \in \mathcal{B}$ um elemento tal que $|\beta| = n$. Então, para a classe $\mathcal{A} = \mathcal{B} \circ \mathcal{C}$, temos que a sequência de contagem A_n é dada pelo número de maneiras de escolhermos um elemento $\beta \in \mathcal{B}$ e substituir seus átomos por um elemento arbitrário de $\mathcal{C}$, preservando a estrutura interna de β.

As interpretações para as Sequências de Contagem feitas acima baseiam-se no fato de os átomos de um elemento poderem ser diferenciados entre si por alguma ”regra”de construção, chamada canonicalização de representações de objetos. Esta técnica consiste em definir uma ordem lexicográfica induzida para produtos e sequências de classes. A representação de Multiconjuntos e Powersets será feita com sequências crescentes usando-se a ordem lexicográfica. Isso garante que qualquer objeto construtível admite uma única representação na qual cada átomo é determinado pela posição que ocupa na estrutura do elemento.

Teorema 3.6.1. ***(Apontamento e Substituição)*** *As construções Apontamento e Substituição são admissíveis e*

1. $\mathcal{A} = \theta\mathcal{B} \Longrightarrow A(z) = z\dfrac{d}{dz}(B(z))$
2. $\mathcal{A} = \mathcal{B} \circ \mathcal{C} \Longrightarrow A(z) = B(C(z))$

Demonstração:

1. Conforme vimos anteriormente $A_n = nB_n$ e a Função Geradora Ordinária para a classe $\mathcal{B}$ é dada por:

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n \Rightarrow \frac{d}{dz}(B(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} nB_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{n-1}$$
$$\Longrightarrow A(z) = z\frac{d}{dz}(B(z))$$

2. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{B} \circ \mathcal{C} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \times Seq_n\{\mathcal{C}\}$ e $C(z)$ a Função Geradora Ordinária para a classe $\mathcal{C}$. Então,

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (C(z))^n = B(C(z))$$

Exemplo 3.6.1. ***(Pointing)*** *Seja $\mathcal{P}$ a classe das permutações e seja $p \in \mathcal{P}$ uma palavra formada pelos elementos da classe $\mathcal{Z}_{\geq 1}$. Suponha que $|p| = n - 1$. Podemos obter uma permutação de tamanho n a partir do elemento p. Para isso, basta inserir o valor n em todas as possíveis posições, entre os elementos de p. Por exemplo, considere $n = 4$ e $p = 132$. Então, aplicando o Apontamento no Produto Cartesiano $4 \times p$, obtemos as seguintes permutações de tamanho 4:*

$$4132 \quad 1432 \quad 1342 \quad 1324$$

Portanto, para obter toda a classe $\mathcal{P}$ devemos fazer o apontamento sobre o produto $\mathcal{Z} \times \mathcal{P}$ de maneira que

$$\mathcal{P} = \mathcal{E} + \theta(\mathcal{Z} \times \mathcal{P}),$$

onde $\mathcal{E} = \epsilon$ é a permutação vazia. Segue que

$$\Rightarrow P(z) = 1 + z\frac{d}{dz}(zP(z))$$

A solução da Equação Diferencial Ordinária acima é $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$.

Exemplo 3.6.2. ***(Substituição)*** *Seja $\mathcal{B}$ a classe das árvores binárias planas e com raiz de maneira que todos os nós que constituem tais árvores contribuem para medir seu tamanho. Suponha que cada nó é substituído por uma cadeia linear de átomos contendo números inteiros. Então, essa substituição nos retorna elementos da classe $\mathcal{M}$ compreendendo as árvores unárias-binárias.*

3.6.2 Estruturas Implícitas

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ classes combinatórias conhecidas e $\mathcal{X}$ uma classe qualquer. Chamamos de *Equações Implícitas* às expressões que obtemos quando relacionamos as classes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{X}$ a fim de obtermos as propriedades desta última.

Teorema 3.6.2. ***(Especificações Implícitas)*** *As funções geradoras associadas às equações implícitas envolvendo a classe $\mathcal{X}$ são:*

1. $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{X} \quad \Longrightarrow X(z) = A(z) - B(z)$
2. $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{X} \quad \Longrightarrow X(z) = \dfrac{A(z)}{B(z)}$
3. $\mathcal{A} = Seq\{\mathcal{X}\} \quad \Longrightarrow X(z) = 1 - \dfrac{1}{A(z)}$
4. $\mathcal{A} = \mathcal{M}Set\{\mathcal{X}\} \quad \Longrightarrow X(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} lnA(z^k),$

onde $\mu(k)$ é a Função de Möbius, [5].

Demonstração: Inicialmente, vamos definir as notações para as *Funções Geradoras* de cada classe:

- $A(z)$ é a função geradora da classe $\mathcal{A}$.
- $B(z)$ é a função geradora da classe $\mathcal{B}$.
- $X(z)$ é a função geradora da classe $\mathcal{X}$.

Os três primeiros itens são resultados diretos do Teorema 3.2.3:

1. $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{X} \implies X(z) = B(z) - A(z)$.

2. $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{X} \implies X(z) = \dfrac{A(z)}{B(z)}$.

3. $\mathcal{A} = Seq\{\mathcal{X}\} \implies X(z) = \dfrac{1}{1 - X(z)} \Rightarrow X(z) = 1 - \dfrac{1}{A(z)}$.

4. $\mathcal{A} = \mathcal{M}Set\{\mathcal{X}\} \implies A(z) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} X(z^k) \Rightarrow lnA(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} X(z^k)$.

   Chamamos $L(z) = lnA(z)$. Daí, temos:

$$L_n = [z^n]L(z) \Rightarrow nL_n = \sum_{d|n} (dX_d)$$

   Agora, basta aplicar a *Inversão de Möbius*, (ver [5]), para concluir que

$$X(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} lnA(z^k)$$

Exemplo 3.6.3. ***(Permutações Indecomponíveis)*** *Seja $\mathcal{P}$ a classe das permutações e considere $\sigma \in \mathcal{P}$ tal que $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ é uma palavra escrita sequencialmente e com elementos distintos entre si. Dizemos que σ é uma permutação decomponível se para algum $k < n$, $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_k$ é uma permutação do conjunto $\{1, \ldots, k\}$. Qualquer permutação pode ser decomposta num produto de permutações indecomponíveis.*

Por exemplo, tome $n = 10$ e $\sigma = (2\,5\,4\,1\,3\,6\,8\,10\,7\,9)$.

Note que se tomarmos $k = 6$, teremos a permutação $\sigma' = (2\,5\,4\,1\,3\,6)$, do conjunto $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Portanto, σ é uma permutação decomponível e pode ser escrita como um produto de permutações indecomponíveis. Considerando σ', tome $k = 5$. Novamente temos uma permutação dos 5 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e daí concluímos que a permutação σ' é decomponível e pode ser escrita como $\sigma' = \boxed{2\,5\,4\,1\,3}\,\boxed{6}$, que é o produto de indecomponíveis. Agora, falta verificar a sequência $(8\,10\,7\,9)$ da permutação σ. Mas, esta sequência forma uma permutação do conjunto $\{7, 8, 9, 10\}$ que não pode mais ser decomposta pois para cada $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ não obtemos uma permutação do conjunto $\{1, \ldots, k\}$. Daí, obtemos σ como o produto de suas permutações indecomponíveis:

$$\sigma = \boxed{2\,5\,4\,1\,3}\,\boxed{6}\,\boxed{8\,10\,7\,9}$$

A Tabela 3.2 representa graficamente as permutações indecomponíveis.

Definimos $\mathcal{P}_I$ a classe das permutações indecomponíveis. Uma vez que toda permutação pode ser escrita como um produto de permutações indecomponíveis, podemos relacionar a classe $\mathcal{P}$ com $\mathcal{P}_I$ pela seguinte especificação implícita:

$$\mathcal{P} = Seq\{\mathcal{P}_I\}.$$

Daí, pelo *Teorema 3.6.2*, temos a Função Geradora associada:

$$I(z) = 1 - \frac{1}{P(z)}, \text{ onde } P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n!z^n. \text{ já é uma série conhecida.}$$

10								•		
9										•
8							•			
7									•	
6						•				
5		•								
4			•							
3					•					
2	•									
1				•						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tabela 3.2: $\sigma = \boxed{2\ \ 5\ \ 4\ \ 1\ \ 3}\ \boxed{6}\ \boxed{8\ \ 10\ \ 7\ \ 9}$

Fazendo a expansão de $I(z)$ obtemos:

$$I(z) = z + z^2 + 3z^3 + 13z^4 + 71z^5 + 461z^6 + 3447z^7 + \cdots$$

e cada coeficiente I_n é dado por:

$$I_n = n! - \sum_{n_1+n_2=n} (n_1!n_2!) + \sum_{n_1+n_2+n_3=n} (n_1!n_2!n_3!) + \cdots$$

Exemplo 3.6.4. ***(Polinômios irredutíveis sobre corpos finitos)*** *Sejam p um número primo fixado e a base do corpo finito F_p formada pelos números inteiros módulo p. O anel polinomial $F_p[X]$ é o anel de polinômios em X cujos coeficientes estão em F_p.*

O objetivo aqui é trabalhar com polinômios mônicos e consideramos o conjunto $\mathcal{P}$ dos polinômios mônicos em $F_p[X]$ como uma classe combinatória. Definimos o tamanho de um polinômio p como o sendo o seu grau. Uma vez que um polinômio é especificado pela sequência de seus coeficientes, podemos tratar $\mathcal{A} = F_p$ como um alfabeto de coeficientes todos objetos atômicos. Daí, $card(A) = p$ e $\mathcal{P} = Seq\{A\}$. Portanto, a Função Geradora Ordinária associada à classe é dada por

$$P(z) = \frac{1}{1-A(z)} = \frac{1}{1-pz} = \sum_{n\geq 0} p^n z^n \quad \Longrightarrow \quad [z^n]P(z) = P_n = p^n$$

A sequência de contagem está de acordo com o que esperávamos já que um polinômio de grau n deve ter n coeficientes, cada um escolhido entre as p opções. Portanto, temos p^n polinômios mônicos de grau n.

Agora, vamos agregar ao nosso estudo o conceito de polinômio irredutível. Dizemos que $p \in \mathcal{P}$ é um polinômio irredutível se ele não pode ser fatorado como um produto de polinômios de graus menores do que n. A fatoração de um polinômio, quando existe, é única. Isso se deve ao fato de conseguirmos realizar a divisão Euclideana entre polinômios. Portanto, um polinômio, quando é redutível, pode ser decomposto unicamente como um produto de polinômios mônicos irredutíveis, que podem se repetir na decomposição.

Por exemplo, considere o corpo F_3 e o polinômio $p = x^{10} + x^8 + 1$. Então,

$$x^{10} + x^8 + 1 = (x+1)^2(x+2)^2(x^6 + 2x^2 + 1)$$

é decomposto, de maneira única, como produto de polinômios mônicos irredutíveis, sendo que dois deles aparecem como fatores repetidos, com multiplicidade 2.

Compreendidos os conceitos até aqui, definimos $\mathcal{I}$ *como a classe dos polinômios mônicos irredutíveis. Devido à fatoração única de um polinômio e também ao fato de serem permitidas repetições de fatores na decomposição, a especificação para a classe* $\mathcal{P}$ *pode ser escrita como* $\mathcal{P} = \mathcal{M}Set\{\mathcal{I}\}$*, de onde concluímos que a classe* $\mathcal{I}$ *é obtida implicitamente pela relação acima e pela classe* $\mathcal{P}$*. Do Teorema 3.6.2 segue que*

$$I(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} ln\Big(\frac{1}{1-pz^k}\Big) \quad \Longrightarrow \quad I_n = \frac{1}{n}\sum_{k|n} \mu(k) p^{n/k}.$$

Exemplo 3.6.5. ***(Polinômios livres de quadrados)*** *Seja* $f \in F_p[X]$*. Dizemos que* f *é um polinômio livre de quadrados se não existe* $g \in F_p[X]$ *tal que* $g^2|f$*. Em outras palavras, se*

$$f = \alpha p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k},$$

com $\alpha \in F_p$*, é a única fatoração de* f *em potências de polinômios mônicos irredutíveis então* $n_i = 1,\ i = 1, \dots, k$.

Sejam $\mathcal{I}$ *e* $\mathcal{P}$ *as classes definidas no Exemplo 3.6.4 e defina* $\mathcal{Q}$ *como a classe dos polinômios mônicos livres de quadrados. Então, as especificações são dadas por* $\mathcal{P} = \mathcal{M}Set\{\mathcal{I}\}$ *e* $\mathcal{Q} = \mathcal{P}\{\mathcal{I}\}$ *e* $P(z)$, $Q(z)$ *são definidas como as respectivas Funções Geradoras Ordinárias. Pela Identidade de Valée Exemplo 3.2.5, obtemos:*

$$Q(z) = \frac{P(z)}{P(z^2)} \quad \Rightarrow Q(z) = \frac{1-pz^2}{1-pz}$$

Note que a expressão acima é coerente com o que desejamos para descrever a classe $\mathcal{P}$*. De fato, a classe* $\mathcal{I}$ *foi dividida de acordo com a multiplicidade dos polinômios mônicos:* $\mathcal{Q}$ *compreende apenas polinômios decompostos em polinômios mônicos de multiplicidade* 1*. Para completar esta classe e obter todos os elementos de* $\mathcal{P}$*, necessitamos garantir que possa haver repetições de cada um dos polinômios mônicos numa decomposição. Daí, vem a Função Geradora* $P(z^2)$ *que garante que cada tipo de polinômio mônico aparece em pares e, combinando cada um deles com um polinômio de* $\mathcal{Q}$*, compomos toda a classe* $\mathcal{P}$*, já que isso nos garante as repetições de cada fator mônico, sempre que for necessário.*
Para obter a sequência de contagem, $(Q_n)_{n\geq 0}$*, temos:*

$$\begin{aligned}
Q(z) &= (1-pz^2)\frac{1}{1-pz} \\
&= (1-pz^2)\sum_{n=0}^{\infty} p^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} p^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} p^{n+1} z^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p^n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} p^{n-1} z^n \\
&= 1 + pz + \sum_{n=2}^{\infty} (p^n - p^{n-1}) z^n.
\end{aligned}$$

Portanto, a Sequência de Contagem para a classe é dada por $Q_n = p^n - p^{n-1}, n \geq 2.$

Capítulo 4

Estruturas Rotuladas e Funções Geradoras Exponenciais

4.1 Classes Rotuladas

O estudo dos objetos de uma *Classe*, vistos como *Estruturas Rotuladas*, usa as mesmas definições e conceitos de *Classe* e finitude vistos no capítulo anterior, onde os objetos não eram *Rotulados*. Assim, conforme a *Definição 3.1.1*, uma classe $\mathcal{A}$ é um conjunto de objetos de tamanho finito, rotulados e para os quais definimos uma função de tamanho. Cada objeto é composto por uma estrutura atômica na qual cada átomo carrega uma identificação (cor ou numeração, por exemplo) que o distingue dos demais átomos da estrutura.

Definição 4.1.1. *Um objeto fracamente rotulado, de tamanho n, é um grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto dos inteiros. Uma forma equivalente desta definição é dizer que os vértices do grafo contém identificações que são inteiros distintos de $\mathbb{Z}$.*

Definição 4.1.2. *Um objeto de tamanho n é bem rotulado, ou simplesmente rotulado, se ele é fracamente rotulado e o conjunto de suas identificações formam o intervalo completo* $[1, \ldots, n]$.

Definição 4.1.3. *Dizemos que uma classe $\mathcal{A}$ é rotulada se ela é composta de objetos rotulados.*

Exemplo 4.1.1. *Considere a classe $\mathcal{G}$ dos grafos rotulados não orientados, ou seja, grafos cujos vértices são numerados de maneira distinta com os elementos do intervalo $[1, \ldots, n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Seja $g \in \mathcal{G}$ um elemento de tamanho 4 e suponha que g seja determinado pelo conjunto de arestas $A = \Big\{\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{1,4\}\Big\}$. Então, g pode ser representado de diferentes maneiras, conforme listado na Figura 4.1.

A partir do exemplo acima, vemos que um mesmo grafo pode ser representado de diferentes maneiras, a partir de um dado conjunto de arestas. Concluímos então que para um *Grafo Rotulado* de tamanho n o que importa é a estrutura que o determina, ou seja, o seu conjunto de arestas. Por exemplo, se considerarmos o grafo

$$h = \begin{tikzcd}[arrows=-] 1 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[d] \\ 2 \arrow[r] & 4 \end{tikzcd}$$

$$g \; = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 4 \arrow[d, dash] \\ 3 \arrow[r, dash] & 2 \end{tikzcd} \quad \text{ou} \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 3 \arrow[d, dash] \\ 4 \arrow[r, dash] & 2 \end{tikzcd} \quad \text{ou} \quad \begin{tikzcd} 3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 2 \arrow[d, dash] \\ 1 \arrow[r, dash] & 4 \end{tikzcd}$$

Figura 4.1: Grafos Rotulados de tamanho 4 com mesmo conjunto de arestas A

então, $h \neq g$ já que o conjunto de arestas de h é $A' = \Big\{\{1,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2\}\Big\}$ e $A' \neq A$.

Observação: Os grafos considerados em nosso estudo podem ser orientados ou não.

Uma vez que os objetos rotulados são compostos de elementos identificados com inteiros distintos, a ordem destes elementos na formação de um objeto importa e deve ser considerada. Portanto, a enumeração de objetos rotulados será feita através de Funções Geradoras Exponenciais.

Definição 4.1.4. *A Função Geradora Exponencial de uma sequência* (A_n) *é a série de potências*

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{z^n}{n!}. \tag{4.1}$$

A Função Geradora Exponencial de uma classe $\mathcal{A}$ *é a Função Geradora Exponencial dos números* A_n *tal que* $A_n = |\mathcal{A}_n|$. *Daí,*

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!}$$

Neste último caso, dizemos que a variável z *marca tamanho. O coeficiente de* $A(z)$ *é dado por* $A_n = n![z^n]A(z)$.

As definições para *Sequência de Contagem* e *Isomorfismo entre Classes Combinatórias* são as mesmas utilizadas para Estruturas Não Rotuladas, conforme visto no Capítulo 3, *Definições 3.1.4* e *3.1.5.*

Definição 4.1.5. *Definimos a Classe Neutra* $\mathcal{E} = \{\epsilon\}$ *como a classe formada por um elemento sem identificação e de tamanho* 0.

Definição 4.1.6. *Definimos a Classe Atômica Rotulada* $\mathcal{Z} = \Big\{1\Big\}$ *como a classe formada por um único elemento identificado por* 1 *e de tamanho* 1.

Pelas definições das Classes Neutra e Atômica, as respectivas Funções Geradoras Exponenciais destas classes são dadas por $E(z) = 1$ e $Z(z) = z$.

4.2 Permutações, Urnas e Grafos Circulares

Esta seção é dedicada a estruturas de grande importância na enumeração de objetos rotulados já que elas constituem a base da construção de estruturas rotuladas mais complexas.

4.2.1 Permutações ($\mathcal{P}$)

A Classe $\mathcal{P}$ representa o conjunto de todas as permutações e (P_n) denota sua *Sequência de Contagem*. Assim, $\sigma \in \mathcal{P}$ tal que $|\sigma| = n$ é um elemento composto por n átomos identificados por números inteiros e distintos pertencentes ao intervalo $[1, \ldots, n]$. Esquematicamente, podemos representar linearmente uma permutação σ como uma sequência tal que $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ cujas coordenadas representam as respectivas imagens de uma aplicação $\varphi : [1, \ldots, n] \longrightarrow [1, \ldots, n]$, ou seja, $\varphi(i) = \sigma_i$ para todo $i \in [1, \ldots, n]$. Esquematicamente, o que acabamos de definir pode ser representado matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \end{pmatrix}.$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos P_n permutações de tamanho n e a união de todas elas forma a classe

$$\mathcal{P} = \Big\{\epsilon, 1, 12, 21, 123, 132, 231, 213, \ldots\Big\}.$$

Exemplo 4.2.1. *As permutações de* n *e respectivos* P_n *para* $n = 0, 1, 2, 3$ *estão listados abaixo:*

- $n = 0 : \Big\{\epsilon\Big\} \Longrightarrow \quad \boxed{P_0 = 0!}$
- $n = 1 : \Big\{1\Big\} \Longrightarrow \quad \boxed{P_1 = 1!}$
- $n = 2 : \Big\{12, 21\Big\} \Longrightarrow \quad \boxed{P_2 = 2!}$
- $n = 3 : \Big\{123, 132, 231, 213, 312, 321\Big\} \Rightarrow \boxed{P_3 = 3!}$

Pelo exemplo anterior observamos que cada permutação $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ de tamanho n é um enfileiramento de n elementos distintos, escolhidos no intervalo $[1, \ldots, n]$. Para obter a *Sequência de Contagem* P_n devemos notar que σ_1 pode assumir qualquer um dos n valores do intervalo $[1, \ldots, n]$. Para σ_2 temos $(n - 1)$ opções de escolha, para σ_3 temos $(n - 2)$ opções até que σ_n seja preenchido com a única opção que resta dentre os números de 1 a n. Pelo *Princípio Multiplicativo* temos que $P_n = n!$ e pela *Definição 4.1.4* a Função Geradora Exponencial associada à classe $\mathcal{P}$ é dada por

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}. \tag{4.2}$$

4.2.2 Urnas ($\mathcal{U}$)

A classe $\mathcal{U}$ representa o conjunto de todos os grafos rotulados que não possuem vértices conectados entre si. Uma outra maneira de definir esta classe é considerar $\mathcal{U} = \bigcup_n u_n$ onde $u_n \in \mathcal{U}$ representa uma urna (conjunto) com n bolas distintas e numeradas por inteiros $i \in [1, \ldots, n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que a ordem das bolas dentro de u_n é irrelevante, temos uma única urna de cada tamanho n e, portanto, a *Sequência de Contagem* da Classe $\mathcal{U}$ é dada por $U_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

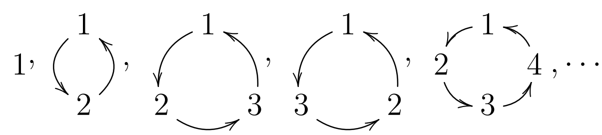
$$\mathcal{U} = \left\{ \epsilon, 1, \boxed{1\ 2}, \boxed{1\ 2\ 3}, \boxed{1\ 2\ 3\ 4}, \dots \right\}$$

Portanto, a Função Geradora Exponencial associada à classe $\mathcal{U}$ é

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z. \tag{4.3}$$

4.2.3 Grafos Circulares ($\mathcal{C}$)

A classe $\mathcal{C}$ é composta por ciclos orientados positivamente que correspondem bijetivamente a permutações cíclicas. Assim, temos

$\mathcal{C} = \Bigg\{$  $\Bigg\}.$

A *Sequência de Contagem* desta classe é dada pelo número de permutações circulares para cada tamanho n. Daí, temos $C_n = (n-1)!$ e a Função Geradora Exponencial é dada por

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)! \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} = ln\left(\frac{1}{1-z}\right). \tag{4.4}$$

4.3 Construções Rotuladas Admissíveis

Nesta seção apresentaremos Construções Admissíveis importantes pelo fato de serem ferramentas essenciais na descrição de *Classes Combinatórias* mais complexas a partir das classes elementares. Para cada construção apresentaremos a Função Geradora Exponencial associada.

A definição de *Construção Admissível* é a mesma que utilizamos para o caso de *Estruturas não Rotuladas*, conforme a *Definição 3.1.7.* Para iniciar este estudo precisamos de dois conceitos importantes: a *Fórmula da Convolução Binomial* e o *Produto Rotulado.*

- ***Convolução Binomial:***

Sejam $A(z)$,$B(z)$ e $C(z)$ Funções Geradoras Exponenciais. Queremos obter o coeficiente A_n do produto $A(z) = B(z)C(z)$. Primeiramente vemos que

$$A(z) = B(z)C(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{z^l}{l!}\right) \overset{j=k+l}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_k C_{j-k}}{k!(j-k)!} z^j. \tag{4.5}$$

O coeficiente $A_n = n![z^n]A(z)$ será obtido quando $j = n$ na equação (4.5), ou seja, quando a soma dos índices de B_k e C_{j-k} for n. Portanto temos:

$$A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \frac{z^j}{j!} \overset{(4.5)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_k C_{j-k}}{k!(j-k)!} z^j \quad \overset{j=n}{\Longrightarrow} \quad \frac{A_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k C_{n-k}}{k!(n-k)!}$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k C_{n-k}, \tag{4.6}$$

onde $\binom{n}{k}$ é o *Coeficiente Binomial* usual. A equação (4.6) é chamada *Fórmula da Convolução Binomial*.

A generalização deste resultado é obtida de forma análoga, ou seja, se $A(z)$ é dado pelo produto de r Funções Geradoras Exponenciais, $A(z) = A^1(z)A^2(z)\dots A^r(z)$, então o coeficiente A_n deste produto é dado por

$$A_n = \sum_{n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} A^1_{n_1} A^2_{n_2} \dots A^r_{n_r}, \tag{4.7}$$

onde $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$. O coeficiente $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ é chamado *Coeficiente Multinomial*.

- ***União Disjunta:***

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ duas classes rotuladas tais que $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$. Então, como no caso de Estruturas não Rotuladas, a Função Geradora Exponencial para a classe $\mathcal{A}$ é a soma das Funções Geradoras das classes $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

De fato,

$$B(z) + C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n + C_n) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{z^n}{n!} = A(z)$$

Portanto,

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = B(z) + C(z). \tag{4.8}$$

- ***Produto Rotulado:***

Considere um objeto fracamente rotulado. Podemos refazer a identificação de seus átomos de uma maneira consistente, ou seja, preservando a ordem relativa entre as identificações dos átomos do objeto. A remarcação pode ser feita por *Redução* ou *Expansão*.

- ***Redução:*** Considere uma estrutura α fracamente rotulada de tamanho n. A redução ρ remarca α reduzindo suas identificações ao intervalo $[1, \dots, n]$ de maneira que a ordem relativa entre elas seja preservada. Denotamos por $\rho(\alpha)$ a redução de α ao intervalo $[1, \dots, n]$, $\rho : \mathbb{Z} \longrightarrow [1, \dots, n]$.

- ***Expansão:*** A expansão é um método de remarcação associado à função $e : [1, \dots, n] \longrightarrow \mathbb{Z}$. Esta função é estritamente crescente e associa uma estrutura bem rotulada α a uma outra estrutura $\widetilde{\alpha}$ cuja identificação i de α é substituída por $e(i) \in \mathbb{Z}$ em $\widetilde{\alpha}$.

Exemplo 4.3.1. *Abaixo um exemplo de Redução e Expansão.*

1. *Seja* $\alpha = (7, 3, 9, 2)$. *Então,* $|\alpha| = 4$ *e* $\rho(\alpha) = (3, 2, 4, 1)$ *é a redução de* α *associada ao intervalo* $[1, 2, 3, 4]$.

2. *Seja* $\alpha = (3, 2, 4, 1)$. *Então,* $|\alpha| = 4$ *e* $e(\alpha) = (30, 20, 40, 10)$ *ou* $(11, 9, 15, 3)$ *são exemplos de expansões associadas a* α. *Note que em ambos os casos,* $e(1)$, $e(2)$, $e(3)$ *e* $e(4)$ *mostram que a função é crescente.*

A noção de remarcação nos permite definir o produto entre objetos rotulados. Este produto difere do produto cartesiano devido às identificações presentes nos átomos dos objetos. De fato, se α e β são dois objetos rotulados, o produto entre eles pode gerar um elemento com identificações repetidas e isso iria contrariar a definição de objeto rotulado. Neste caso, devemos definir o *Produto Rotulado* a partir de remarcações que evitam este tipo de problema.

Definição 4.3.1. *Dados dois objetos rotulados* $\alpha \in \mathcal{A}$ *e* $\beta \in \mathcal{B}$ *definimos o Produto Rotulado por*

$$\alpha \star \beta = \Big\{(\alpha', \beta') \mid (\alpha', \beta') \text{ é bem rotulado, } \rho(\alpha') = \alpha \text{ e } \rho(\beta') = \beta\Big\}. \tag{4.9}$$

Definição 4.3.2. *Dados dois objetos rotulados* $\alpha \in \mathcal{A}$ *e* $\beta \in \mathcal{B}$ *definimos o Produto Rotulado por*

$$\alpha \star \beta = \Big\{(e(\alpha), f(\beta)) \mid Im(e) \cap Im(f) = \emptyset, Im(e) \cup Im(f) = [1, \ldots, |\alpha| + |\beta|]\Big\} \tag{4.10}$$

sendo e, f *duas funções remarcação com imagens* $Im(e)$ *e* $Im(f)$, *respectivamente.*

Pela definição do *Produto Rotulado* os elementos do conjunto são bem rotulados. Além disso, se $|\alpha| = n_1$ e $|\beta| = n_2$, com $n = n_1 + n_2$, então o *Produto Rotulado* $\alpha \star \beta$ é um conjunto de cardinalidade

$$|\alpha \star \beta| = \binom{n}{n_1, n_2} \equiv \binom{n}{n_1}, \tag{4.11}$$

pois consideramos todas as possíveis combinações de elementos cujos tamanhos somam n.

Exemplo 4.3.2. *Sejam* $\alpha \in \mathcal{A}$ *e* $\beta \in \mathcal{B}$ *tais que*

$$\alpha = \begin{array}{c} 1 \\ / \ \ \backslash \\ 2 \text{ —— } 3 \end{array} \qquad e \qquad \beta = 1 - 2\,.$$

O produto $\alpha \star \beta$ *será um conjunto com* $\binom{5}{2} = 10$ *elementos, já que* $|\alpha| = 3$ *e* $|\beta| = 2$. *Abaixo estão listados os elementos deste conjunto, obtidos por Redução.*

$$\begin{array}{c} 1 \\ / \ \ \backslash \\ 2 \text{ —— } 3 \end{array}\ \ 4-5\,,\quad \begin{array}{c} 1 \\ / \ \ \backslash \\ 2 \text{ —— } 4 \end{array}\ \ 3-5\,,\quad \begin{array}{c} 1 \\ / \ \ \backslash \\ 3 \text{ —— } 4 \end{array}\ \ 2-5\,,\quad \begin{array}{c} 1 \\ / \ \ \backslash \\ 2 \text{ —— } 5 \end{array}\ \ 3-4$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ / \ \ \backslash \\ 3 \text{ —— } 5 \end{array}\ \ 2-4\,,\quad \begin{array}{c} 1 \\ / \ \ \backslash \\ 4 \text{ —— } 5 \end{array}\ \ 2-3\,,\quad \begin{array}{c} 2 \\ / \ \ \backslash \\ 3 \text{ —— } 4 \end{array}\ \ 1-5\,,\quad \begin{array}{c} 2 \\ / \ \ \backslash \\ 3 \text{ —— } 5 \end{array}\ \ 1-4$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ / \ \ \backslash \\ 4 \text{ —— } 5 \end{array}\ \ 1-3\,,\quad \begin{array}{c} 3 \\ / \ \ \backslash \\ 4 \text{ —— } 5 \end{array}\ \ 1-2$$

Definição 4.3.3. *Dadas duas classes $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, o Produto Rotulado $\mathcal{B} \star \mathcal{C}$ define uma nova classe $\mathcal{A}$ formada de pares ordenados de $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ que são remarcados de maneira consistente e de todas as formas possíveis, ou seja,*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \star \mathcal{C} = \bigcup (\beta \star \gamma), \quad \beta \in \mathcal{B} \ \text{ e } \gamma \in \mathcal{C}. \tag{4.12}$$

Sejam $\beta \in \mathcal{B}$ e $\gamma \in \mathcal{C}$ tais que $|\beta| = n_1$ e $|\gamma| = n_2$. Então a Sequência de Contagem do *Produto Rotulado* $\mathcal{A} = \mathcal{B} \star \mathcal{C}$ é dada por

$$A_n = \sum_{|\beta|+|\gamma|=n} \binom{n}{|\beta|\,, |\gamma|} B_{|\beta|} C_{|\gamma|} = \sum_{n_1+n_2=n} \binom{n}{n_1, n_2} B_{n_1} C_{n_2}. \tag{4.13}$$

De fato, o termo $B_{n_1} C_{n_2}$ controla todas as possíveis escolhas de elementos das classes $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, com tamanhos n_1 e n_2 e o *Coeficiente Binomial* conta o número de remarcações consistentes possíveis. Além disso, pela fórmula da *Convolução Binomial* e por (4.11) a Função Geradora Exponencial para a classe $\mathcal{A}$ é dada por

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \star \mathcal{C} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = B(z)C(z), \tag{4.14}$$

onde $B(z)$ e $C(z)$ são as respectivas Funções Geradoras Exponenciais das classes $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Portanto, o *Produto Rotulado* entre duas classes é uma *Construção Admissível* já que a *Sequência de Contagem* desta classe depende somente das sequências de contagem das classes $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Proposição 4.3.1. *Dadas as classes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, o Produto Rotulado entre classes é associativo, ou seja,*

$$\mathcal{A} \star (\mathcal{B} \star \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \star \mathcal{B}) \star \mathcal{C}.$$

Demonstração: Basta aplicar a definição e a Fórmula da Convolução Binomial. ■

O *Produto Rotulado* pode ser generalizado para um número r de classes, $r \geq 0$. Assim, se temos $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2 \star \ldots \star \mathcal{A}_r$, a Função Geradora Exponencial associada é dada por

$$A(z) = A_1(z) A_2(z) \ldots A_r(z) \tag{4.15}$$

e a *Sequência de Contagem* correspondente será dada em função do *Coeficiente Multinomial* dado por (4.7).

4.3.1 Construções Rotuladas

Definição 4.3.4. ***(k-Sequências)*** *Seja $\mathcal{B}$ uma classe. Definimos a k-ésima potência de $\mathcal{B}$ como*

$$\mathcal{B}^k = \mathcal{B} \star \mathcal{B} \star \cdots \star \mathcal{B}.$$

A definição acima equivale a dizer que $\mathcal{B}^k$ corresponde às k-sequências de $\mathcal{B}$ que, sujeitas a todas as possíveis remarcações consistentes, resulta em $Seq_k\{\mathcal{B}\} \equiv \mathcal{B}^k$. A variação do parâmetro k nos permite definir a classe das *Sequências Rotuladas*.

Definição 4.3.5. ***(Sequências)*** *Seja $\mathcal{B}$ uma classe. Definimos a Sequência Rotulada de $\mathcal{B}$ como*

$$Seq\{\mathcal{B}\} = \{\epsilon\} + \mathcal{B} + (\mathcal{B} \star \mathcal{B}) + (\mathcal{B} \star \mathcal{B} \star \mathcal{B}) + \cdots = \bigcup_{k=0}^{\infty} Seq_k\{\mathcal{B}\}.$$

Por definição e conforme visto em (4.15) e (4.8), as Funções Geradoras Exponenciais associadas respectivamente a cada uma das classes definidas acima são dadas por:

$$\mathcal{A} = Seq_k\{\mathcal{B}\} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = [B(z)]^k, \;\; B_0 \neq 0.$$

$$\mathcal{A} = Seq\{\mathcal{B}\} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [B(z)]^k = \frac{1}{1 - B(z)}$$

As próximas construções serão definidas a partir de *Relações de Equivalência*, assim como no caso de *Estruturas não Rotuladas.*

Definição 4.3.6. ***(k-Conjuntos)*** *Sejam $\mathcal{B}$ uma classe e R uma relação de equivalência que relaciona duas sequências $\alpha, \beta \in Seq_k\{\mathcal{B}\}$ quando uma é permutação da outra. Denotamos $Set_k\{\mathcal{B}\}$ como a classe dos conjuntos formados por k elementos rotulados de $\mathcal{B}$ e definimos a classe como*

$$Set_k\{\mathcal{B}\} := Seq_k\{\mathcal{B}\}/R.$$

Esta definição nos diz que podemos considerar conjuntos como sequências formadas por elementos dispostos em ordens aleatórias. Por isso a classe $Seq_k\{\mathcal{B}\}$ fica definida em termos do quociente por R. A relação de equivalência elimina as redundâncias.

Definição 4.3.7. ***(Conjuntos)*** *Seja $\mathcal{B}$ uma classe. Definimos o Conjunto Rotulado de $\mathcal{B}$ como*

$$Set\{\mathcal{B}\} = \{\epsilon\} + Set\{\mathcal{B}\} + Set_2\{\mathcal{B}\} + \cdots = \bigcup_{k=0}^{\infty} Set_k\{\mathcal{B}\}.$$

Note que cada k-conjunto está associado a $k!$ diferentes sequências.

Exemplo 4.3.3. *Seja $C = \{2, 3, 5\}$ um conjunto pertencente a $Set_3\{\mathbb{Z}\}$. Temos um total de 3! sequências associadas ao conjunto C. São elas:*

$$(2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2).$$

Considerando as redundâncias e as definições as Funções Geradoras Exponenciais associadas respectivamente a cada uma das classes definidas acima são dadas por:

$$\mathcal{A} = Set_k\{\mathcal{B}\} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = \frac{[B(z)]^k}{k!}$$

$$\mathcal{A} = Set\{\mathcal{B}\} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[B(z)]^k}{k!} = e^{B(z)}.$$

No caso das Estruturas não Rotuladas, estudadas no capítulo anterior, as construções *Multiconjuntos* e *Powersets* eram distintas, já que a primeira delas permitia a repetição dos elementos. No caso de Estruturas Rotuladas os átomos são identificados e, portanto, distintos. Portanto, não há distinção entre essas construções, ou seja $\mathcal{M}Set \approx \mathcal{P}Set$.

Temos ainda uma última classe, a classe dos *Ciclos.*

Definição 4.3.8. ***(k-Ciclos)*** *Seja $\mathcal{B}$ uma classe e S uma relação de equivalência que relaciona duas sequências $\alpha, \beta \in Seq_k\{\mathcal{B}\}$ quando uma é permutação cíclica da outra. Denotamos $Cyc_k\{\mathcal{B}\}$ como a classe dos ciclos formados por k elementos rotulados de $\mathcal{B}$ e definimos a classe como*

$$Cyc_k\{\mathcal{B}\} := Seq_k\{\mathcal{B}\}/S.$$

A definição acima nos permite considerar um ciclo como uma sequência de elementos que se deslocam de maneira circular.

Definição 4.3.9. ***(Ciclos)*** *Seja $\mathcal{B}$ uma classe. Definimos um Ciclo Rotulado, formado por elementos de $\mathcal{B}$, como*

$$Cyc\{\mathcal{B}\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} Cyc_k\{\mathcal{B}\}.$$

Note que cada k-ciclo está associado a k diferentes sequências.

Exemplo 4.3.4. *Seja $C = (2, 3, 5)$ um ciclo pertencente a $Cyc_3\{\mathbb{Z}\}$. Temos um total de 3 sequências associadas ao ciclo C. São elas:*

$$(2, 3, 5), (5, 2, 3), (3, 5, 2).$$

Por definição as Funções Geradoras Exponenciais associadas respectivamente a cada uma das classes definidas acima são dadas por:

$$\mathcal{A} = Cyc_k\{\mathcal{B}\} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = \frac{[B(z)]^k}{k}$$
$$\mathcal{A} = Cyc\{\mathcal{B}\} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[B(z)]^k}{k} = ln\left(\frac{1}{1 - B(z)}\right).$$

Teorema 4.3.1. ***(Teorema da Admissibilidade para Construções Rotuladas)*** *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ classes combinatórias. As construções União Disjunta, Produto Rotulado, Sequência, Conjunto e Ciclos são Construções Admissíveis e suas respectivas Funções Geradoras Exponenciais são:*

1. *União Disjunta:* $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = B(z) + C(z).$
2. *Produto Rotulado:* $\mathcal{A} = \mathcal{B} \star \mathcal{C} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = B(z)C(z).$
3. *Sequência:* $\mathcal{A} = Seq\{\mathcal{B}\} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = \dfrac{1}{1 - B(z)}.$
4. *Conjunto:* $\mathcal{A} = Set\{\mathcal{B}\} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = e^{B(z)}.$
5. *Ciclo:* $\mathcal{A} = Cyc\{\mathcal{B}\} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = ln\left(\dfrac{1}{1 - B(z)}\right).$

Teorema 4.3.2. ***(Teorema para Construções Rotuladas com componentes restritas)*** *Seja $\mathcal{B}$ uma classe combinatória e $k \geq 0$ a restrição ao número de componentes de uma construção. Então, para cada construção abaixo temos as respectivas Funções Geradoras Exponenciais:*

1. *k-sequência:* $\mathcal{A} = Seq_k\{\mathcal{B}\} \implies A(z) = [B(z)]^k.$

2. *k-conjunto:* $\mathcal{A} = Set_k\{\mathcal{B}\} \implies A(z) = \dfrac{[B(z)]^k}{k!}.$

3. *k-ciclo:* $\mathcal{A} = Cyc_k\{\mathcal{B}\} \implies A(z) = \dfrac{[B(z)]^k}{k}.$

Para finalizar esta seção, vamos definir *Classes Construtíveis* e apresentar aplicações que justificam sua importância em nosso estudo.

Definição 4.3.10. *Dizemos que uma Classe de objetos rotulados é construtível se ela admite uma especificação em termos de Somas (Uniões Disjuntas), Produto Rotulado, Sequências, Conjuntos, Ciclos e as Classes Neutra e Atômica.*

Exemplo 4.3.5. *As classes Permutações, Urnas e Grafos, definidas na Seção 4.2, são Classes Construtíveis por definição e*

1. ***Permutações*** $\mathcal{P} = Seq\{\mathcal{Z}\}$

2. ***Urnas*** $\mathcal{U} = Set\{\mathcal{Z}\}$

3. ***Ciclos*** $\mathcal{C} = Cyc\{\mathcal{Z}\}$

são as especificações para cada uma delas.

As classes do exemplo acima são de grande importância na construção de classes mais complexas, tais como:

- **Sobrejeções:** $\mathcal{R} = Seq\{Set_{\geq 1}(\mathcal{Z})\}$
- **Partição de Conjuntos:** $\mathcal{S} = Set\{Set_{\geq 1}(\mathcal{Z})\}$
- **Alinhamentos:** $\mathcal{O} = Seq\{Cyc(\mathcal{Z})\}$
- **Permutações:** $\mathcal{P} = Set\{Cyc(\mathcal{Z})\}$

Estas classes serão estudadas em sessões posteriores e são chamadas de *Estruturas de Nível 2*, já que são obtidas pela composição de construções admissíveis aplicadas à classe atômica.

Uma consequência imediata dos *Teoremas 4.3.1* e *4.3.2* é que podemos obter diretamente uma equação funcional para a Função Geradora Exponencial de uma Classe Construtível, conforme apresentado no teorema abaixo.

Teorema 4.3.3. ***(Método Simbólico)*** *A Função Geradora Exponencial de uma Classe Construtível formada por objetos rotulados é uma componente de um sistema de equações de Funções Geradoras cujos termos são construídos a partir de* 1 *e* z *usando os operadores*

$$+, \ \times, \ Q(f) = \frac{1}{1-f}, \ E(f) = e^f, \ L(f) = ln\left(\frac{1}{1-f}\right).$$

Quando permitirmos restrições em construções compostas, os operadores f^k, $\frac{f^k}{k!}$, $\frac{f^k}{k}$, *para* Seq_k, Set_k *e* Cyc_k, *respectivamente, são adicionados à lista.*

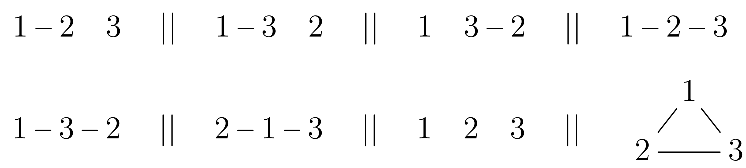


Figura 4.2: Grafos rotulados de tamanho 3

Figura 4.3: Grafos não rotulados de tamanho 3

4.4 Enumeração Rotulada × não Rotulada

Toda Classe Rotulada $\mathcal{A}$ possui uma Classe não Rotulada correspondente (contraparte) $\widehat{\mathcal{A}}$ na qual os elementos são obtidos de $\mathcal{A}$ ignorando-se as identificações. (Esta ideia é formalizada através da identificação de dois objetos rotulados se houver uma nova remarcação arbitrária que transforme um em outro. Para um objeto de tamanho n cada classe de equivalência tem a priori entre 1 e $n!$ elementos). Daí, segue o seguinte resultado:

Proposição 4.4.1. *As sequências de contagem da classe rotulada $\mathcal{A}$ e da classe correspondente $\widehat{\mathcal{A}}$ estão relacionadas pela seguinte desigualdade:*

$$\widehat{A}_n \leq A_n \leq n!\widehat{A}_n \quad \longleftrightarrow \quad 1 \leq \frac{A_n}{\widehat{A}_n} \leq n!. \tag{4.16}$$

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ uma classe rotulada e $A_n = \{\alpha \in \mathcal{A} : |\alpha| = n\}$. Suponha que retiramos as identificaçoes de cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Então, teremos a classe não rotulada $\widehat{\mathcal{A}}$ e $\widehat{\mathcal{A}}_n = \{\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathcal{A}} : |\widehat{\alpha}| = n\}$. O máximo valor que teremos para $\frac{A_n}{\widehat{A}_n}$ é $n!$ e neste caso $\mathcal{A}$ é uma classe formada por permutações de n elementos, $n \in \mathbb{N}$ e $\widehat{\mathcal{A}}_n = 1$. Todos as outras possíveis classes levarão à desigualdade que queremos. ■

Exemplo 4.4.1. *Seja $\mathcal{G}$ a classe dos grafos rotulados e $\widehat{\mathcal{G}}$ a classe dos grafos não rotulados. Afirmamos que $G_n = 2^{\binom{n}{2}}$.*

De fato, seja $g \in \mathcal{G}$ um grafo com n vértices identificados por números inteiros e distintos pertencentes ao intervalo $[1, \ldots, n]$. Cada vértice de g pode ou não estar conectado a qualquer outro dentre os $(n-1)$ vértices restantes. Uma vez que $\binom{n}{2}$ conta o número total de arestas que podemos formar com um grafo de n vértices, então cada possível aresta pode ou não existir, ou seja, temos 2 opções e daí obtemos $\widehat{G_n}$.

Por exemplo, se $n = 3$ temos $\mathcal{G}_3 = 8$ e $\widehat{\mathcal{G}}_3 = 4$ e facilmente vemos que $\widehat{\mathcal{G}}_3 \leq \mathcal{G}_3 \leq 3! \cdot \widehat{\mathcal{G}}_3$, satisfazendo a Proposição 4.4.1. Os grafos de tamanho 3 estão representados nas figuras 4.2 e 4.3, respectivamente.

Exemplo 4.4.2. *Para as classes de Permutações, Ciclos e Urnas, temos:*

- **Permutações:** $P_n = n!$ **e** $\widehat{P}_n = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq n!$
- **Ciclos:** $C_n = (n-1)!$ **e** $\widehat{C}_n = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq (n-1)! \leq n!$

- **Urnas:** $U_n = 1$ **e** $\widehat{U}_n = 1 \implies 1 = \frac{U_n}{\widehat{U}_n} \leq n!$,

todas satisfazendo a Proposição 4.4.1.

Os exemplos anteriores nos mostram que apesar do resultado dado pela *Proposição 4.4.1* não há uma maneira direta para enumerar classes rotuladas e não rotuladas. Mas, se $\mathcal{A}$ é uma Classe Construtível, podemos obter a contraparte $\widehat{\mathcal{A}}$ considerando todas as construções não rotuladas possíveis, conforme visto no *Capítulo 3*. Assim, as respectivas Funções Geradoras podem ser obtidas e seus coeficientes comparados para se obter as relações entre $\mathcal{A}_n$ e $\widehat{\mathcal{A}}_n$.

4.5 Sobrejeções, Partições de Conjuntos e Palavras

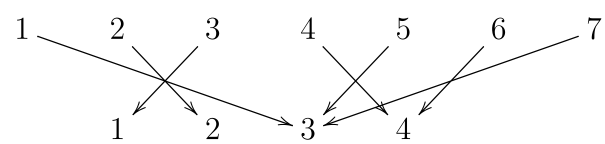
Nesta seção estudaremos estruturas não recursivas resultantes da combinação de dois tipos de construções combinatórias. Tais estruturas são denominadas *Estruturas de Nível 2*. Por exemplo, $\mathcal{R} = Seq\{Set_{\geq 1}\{\mathcal{Z}\}\}$ é uma classe obtida pela composição das construções sequência e conjuntos aplicadas à classe atômica.

As *Estruturas de Nível 2* nos auxiliam na construção das classes de *Sobrejeções, Partições de conjuntos* e *Palavras*. A classe das palavras obtidas a partir de um alfabeto finito é de grande importância na enumeração da frequência com que uma dada palavra aparece em um texto ou a frequência de uma letra em uma palavra.

4.5.1 Sobrejeções

Definição 4.5.1. *Seja $r \geq 1$ um número inteiro, $n \geq r$. Definimos $\mathcal{R}_n^{(r)}$ como a classe de todas as sobrejeções $\varphi : [1, \ldots, n] \longrightarrow [1, \ldots, r]$. Todo elemento $\varphi \in \mathcal{R}_n^{(r)}$ é chamado de r-sobrejeção.*

Exemplo 4.5.1. *Suponha que $r = 4$ e $n = 7$. Então, um exemplo de uma 4-sobrejeção $\varphi \in \mathcal{R}_7^{(4)}$ é $\varphi : [1, 2, \ldots, 7] \longrightarrow [1, 2, 3, 4]$ tal que*



A variação de n leva à classe $\mathcal{R}^{(r)}$ de todas as sobrejeções com imagem $[1, \ldots, r]$, ou seja,

$$\mathcal{R}^{(r)} = \bigcup_n \mathcal{R}_n^{(r)}. \tag{4.17}$$

Nosso objetivo é enumerar esta classe a partir de sua Função Geradora Exponencial $R^{(r)}(z)$.

Note que se tomarmos qualquer $\varphi \in \mathcal{R}_n^{(r)}$, as pré imagens $\varphi^{-1}(i)$, $i \in [1, \ldots, r]$ determinam uma r-upla $\left(\varphi^{-1}(1), \ldots, \varphi^{-1}(r)\right)$ com componentes que são conjuntos disjuntos, não vazios e cuja união resulta no intervalo completo $[1, \ldots, n]$. Assim, φ fica bem determinada por esta $r - upla$ ordenada.

Exemplo 4.5.2. *Para a 4-sobrejeção $\varphi \in \mathcal{R}_7^{(4)}$ do Exemplo 4.5.1 obtemos a 4-upla*

$$\varphi : \Big(\{3\}, \{2\}, \{1,5,7\}, \{4,6\}\Big).$$

Note ainda que cada pré imagem $\varphi^{-1}(i)$ pode ser vista como urna não vazia, para todo $i \in [1, \dots, r]$. Então, a classe $\mathcal{R}^{(r)}$ tem especificação

$$\mathcal{R}^{(r)} = Seq_r\{\mathcal{U}\}, \tag{4.18}$$

A Função Geradora Exponencial associada à classe $\mathcal{R}^{(r)}$ é dada pelo *Teorema 4.3.2* e obtemos

$$R^{(r)}(z) \overset{(4.3)}{=} (e^z - 1)^r. \tag{4.19}$$

A expressão (4.19) pode ser expandida pelo *Teorema Binomial* e obtemos

$$R^{(r)}(z) = (e^z - 1)^r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^j e^{z(r-j)}. \tag{4.20}$$

Portanto, o coeficiente $R_n^{(r)} = n![z^n]R^{(r)}(z)$ será dado por

$$e^{z(r-j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r-j)^n z^n}{n!} \implies n![z^n]e^{z(r-j)} = (r-j)^n. \tag{4.21}$$

$$R_n^{(r)} \overset{(4.21)}{=} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^j (r-j)^n. \tag{4.22}$$

Exemplo 4.5.3. *Considere $r = 2$, fixo. Então, por (4.20) a Função Geradora Exponencial associada à classe $\mathcal{R}^{(2)}$ é dada por $R^{(2)}(z) = (e^z - 1)^2 = e^{2z} - 2e^z + 1$. Daí, obtemos $[z^n]R^{(2)}(z) = R_n^{(2)} = 2^n - 2$. Agora tome, por exemplo, $n = 3$. Então $R_3^{(2)} = 6$ sobrejeções $\varphi : [1,2,3] \longrightarrow [1,2]$. São elas:*

$$\Big(\{1\}, \{2,3\}\Big), \Big(\{1,2\}, \{3\}\Big), \Big(\{1,3\}, \{2\}\Big),$$

$$\Big(\{2\}, \{1,3\}\Big), \Big(\{2,3\}, \{1\}\Big), \Big(\{3\}, \{1,2\}\Big).$$

A variação de r leva à classe $\mathcal{R}$ de todas as sobrejeções. Assim, a especificação e a respectiva Função Geradora Exponencial, obtida pelo *Teorema 4.3.1*, são dadas por

$$\mathcal{R} = Seq\{\mathcal{U}\} \implies R(z) = \frac{1}{1 - U(z)} \overset{(4.3)}{=} \frac{1}{2 - e^z}. \tag{4.23}$$

A fim de obter o coeficiente $\mathcal{R}_n = n![z^n]R(z)$ reescrevemos a expressão (4.23) como uma série de potências, ou seja,

$$R(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^z}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^z}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{zk}}{2^{k+1}}. \tag{4.24}$$

Mas,

$$e^{zk} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \frac{z^n}{n!}. \tag{4.25}$$

Substituindo (4.25) em (4.24), temos:

$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k^n}{2^{k+1}} \right) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^k} \right)}_{R_n} \frac{z^n}{n!}$$

$$\Longrightarrow \quad R_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^k}. \tag{4.26}$$

Portanto, a classe das sobrejeções fica inteiramente determinada por sua Função Geradora Exponencial e seus coeficientes.

Apresentaremos agora um resultado útil para sobrejeções com restrições em suas pré imagens.

Proposição 4.5.1. *A classe $\mathcal{R}^{(A,B)}$ das sobrejeções tais que a cardinalidade de cada pré imagem de B pertence a um conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e a cardinalidade da imagem pertence a B possui Função Geradora Exponencial dada por*

$$R^{(A,B)}(z) = \beta(\alpha(z)), \quad \textit{onde} \quad \alpha(z) = \sum_{a \in A} \frac{z^a}{a!}, \quad \beta(z) = \sum_{b \in B} z^b.$$

Demonstração: A demonstração segue direto da especificação

$$\mathcal{R}^{(A,B)} = Seq_B\{Set_A\{\mathcal{Z}\}\}.$$

De fato, quando construímos $\mathcal{R}^{(A,B)}$ estamos restringindo a classe aos conjuntos com blocos de tamanhos contidos em A. A reunião desses conjuntos restritos a A têm Função Geradora Exponencial dada por

$$\alpha(z) = \sum_{a \in A} \frac{z^a}{a!}.$$

Em seguida, tomamos elementos de A para formar sequências de tamanhos variados pertencentes a B. A reunião das sequências nos fornece a Função Geradora Exponencial

$$\beta(z) = \sum_{b \in B} z^b.$$

Portanto, $R^{(A,B)}(z) = \beta(\alpha(z))$. ■

4.5.2 Partições de Conjuntos

Definição 4.5.2. *Seja $r \geq 1$ um número inteiro fixo. Definimos $\mathcal{S}_n^{(r)}$ como a classe de todas as partições do conjunto $I = [1, \ldots, n]$ em exatamente r blocos disjuntos e não vazios. Cada partição de $\mathcal{S}_n^{(r)}$ é chamada de r-partição.*

Exemplo 4.5.4. *Seja* $r = 2$ *e considere* $I = [1, 2, 3]$. *Temos* $\mathcal{S}_3^{(2)} = 3$ *partições de* I *em exatamente* 2 *blocos. São elas:*

$$\Big\{\{1\}, \{2, 3\}\Big\}, \Big\{\{2\}, \{1, 3\}\Big\}, \Big\{\{3\}, \{1, 2\}\Big\}.$$

A variação de n nos leva à classe $\mathcal{S}^{(r)}$ de todas as r-partições, ou seja,

$$\mathcal{S}^{(r)} = \bigcup_n \mathcal{S}_n^{(r)}. \tag{4.27}$$

Cada r-partição pode ser interpretada como um conjunto de r urnas não vazias e, portanto, a especificação para a classe $\mathcal{S}^{(r)}$ é dada por

$$\mathcal{S}^{(r)} = Set_r\{\mathcal{U}\}. \tag{4.28}$$

Pela especificação dada por (4.28) e pelo *Teorema 4.3.2* a Função Geradora Exponencial associada à classe $\mathcal{S}^{(r)}$ é dada por

$$\mathcal{S}^{(r)}(z) \overset{(4.3)}{=} \frac{(e^z - 1)^r}{r!}. \tag{4.29}$$

A fim de calcular o coeficiente $S_n^{(r)} = n![z^n]S^{(r)}(z)$, reescrevemos a expressão (4.29) como uma *Série de Potências*:

$$\begin{aligned} S^{(r)}(z) &\overset{(4.20)}{=} \frac{1}{r!}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j e^{z(r-j)} \\ &\overset{(4.21)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{r!}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j (r-j)^n\right)}_{S_n^{(r)}}\frac{z^n}{n!}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Portanto, o coeficiente $S_n^{(r)}$ é dado por

$$S_n^{(r)} = \frac{1}{r!}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j (r-j)^n \tag{4.31}$$

Por (4.22) e (4.31) obtemos $R_n^{(r)} = r!S_n^{(r)}$, ou seja, cada r-partição de $S_n^{(r)}$ está associada a um grupo de $r!$ r-sobrejeções distintas de $R_n^{(r)}$. De fato, uma r-partição gera $r!$ r-sobrejeções obtidas quando os r blocos são permutados entre si.

Os números $S_n^{(r)}$ são conhecidos como *Números de Stirling de segundo tipo* ou *Números de partição de Stirling*, onde

$$S_n^{(r)} = \left\{ {n \atop r} \right\} = \frac{1}{r!}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j (r-j)^n. \tag{4.32}$$

Reescrevemos então

$$R_n^{(r)} = r!\left\{ {n \atop r} \right\} \quad \text{e} \quad S_n^{(r)} = \left\{ {n \atop r} \right\}.$$

Quando consideramos todos os valores possíveis de r, obtemos a classe de todas as partições de $I = [1, \ldots, n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta classe será denotada por $\mathcal{S}$ e

$$\mathcal{S} = \bigcup_r \mathcal{S}^{(r)}. \tag{4.33}$$

Portanto, pelo *Teorema 4.3.1* a especificação e a Função Geradora Exponencial desta classe serão dadas respectivamente por

$$\mathcal{S} = Set\{Set_{\geq 1}\mathcal{Z}\} \quad \Longrightarrow \quad S(z) = e^{U(z)-1} \overset{(4.3)}{=} e^{e^z - 1}, \tag{4.34}$$

Reescrevendo a expressão de $S(z)$ como uma *Série de Potências*, obtemos:

$$S(z) = \frac{1}{e}e^{e^z} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{zk}}{k!} \overset{(4.25)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\right)}_{S_n}\frac{z^n}{n!}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{S}_n \quad = \quad \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!} \tag{4.35}$$

Exemplo 4.5.5. *As partições de* $[1, \ldots, n]$ *para* $n = 1, 2, 3, 4$ *estão listadas abaixo:*

- $n = 1:$

  $\{1\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{S}_1 = 1}$

- $n = 2:$

  $\Big\{\big\{\{1\}, \{2\}\big\}, \big\{1, 2\big\}\Big\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{S}_2 = 2}$

- $n = 3:$

  $\Big\{\big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\big\}, \big\{\{1\}, \{2, 3\}\big\}, \big\{\{2\}, \{1, 3\}\big\}, \big\{\{3\}, \{1, 2\}\big\}, \big\{1, 2, 3\big\}\Big\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{S}_3 = 5}$

- $n = 4:$

  $\Big\{\big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\big\}, \big\{\{1\}, \{3, 4\}, \{2\}\big\}, \big\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\big\}, \big\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\big\},$
  $\big\{\{2\}, \{1, 4\}, \{3\}\big\}, \big\{\{2\}, \{1, 3\}, \{4\}\big\}, \big\{\{3\}, \{1, 2\}, \{4\}\big\}, \big\{\{2, 3, 4\}, \{1\}\big\},$
  $\big\{\{1, 3, 4\}, \{2\}\big\}, \big\{\{1, 2, 4\}, \{3\}\big\}, \big\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\big\}, \big\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\big\},$
  $\big\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\big\}, \big\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\big\}, \big\{1, 2, 3, 4\big\}\Big\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{S}_4 = 15}$

Conforme vimos na classe das sobrejeções, quando impomos restrições temos condições de enumerar a classe. Assim, temos o seguinte resultado

Proposição 4.5.2. *A classe* $\mathcal{S}^{(A,B)}$ *das partições de conjuntos tais que os tamanhos dos blocos pertencem a um conjunto* $A \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 1}$ *e o número de blocos pertence a* B *possui Função Geradora Exponencial dada por*

$$S^{(A,B)}(z) = \beta(\alpha(z)), \quad onde \;\; \alpha(z) = \sum_{a \in A}\frac{z^a}{a!}, \quad \beta(z) = \sum_{b \in B}\frac{z^b}{b!}.$$

Demonstração: A demonstração segue direto da especificação

$$\mathcal{S}^{(A,B)} = Set_B\{Set_A\{\mathbb{Z}\}\}.$$

De fato, quando construímos $\mathcal{S}^{(A,B)}$ estamos restringindo a classe aos conjuntos com blocos de tamanhos contidos em A. A reunião desses conjuntos restritos a A têm Função Geradora Exponencial dada por

$$\alpha(z) = \sum_{a \in A} \frac{z^a}{a!}.$$

Em seguida, tomamos elementos de A para formar conjuntos com números de blocos pertencentes a B. A reunião dos conjuntos nos fornece a Função Geradora Exponencial

$$\beta(z) = \sum_{b \in B} \frac{z^b}{b!}.$$

Portanto, $S^{(A,B)}(z) = \beta(\alpha(z))$. ■

Exemplo 4.5.6. *Seja $B = \{1, 2, \ldots, b\}$ um conjunto e*

$$e_b(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^b}{b!}$$

a função exponencial restrita ao conjunto B. Definimos $\mathcal{S}^{(\leq b)}$ a classe das partições do conjunto $[1, \ldots, n]$ em blocos de tamanhos menores do que ou iguais a b.

A especificação desta classe é dada por $\mathcal{S}^{(\leq b)} = Set\{Set_B\{\mathbb{Z}\}\}$ e, portanto, a Função Geradora Exponencial associada é facilmente obtida pelo Teorema 4.3.1, ou seja,

$$S^{(\leq b)}(z) = e^{e_b(z)-1}.$$

A condição complementar seria a classe $\mathcal{S}^{(>b)}$ das partições de $[1, \ldots, n]$ em blocos de tamanhos maiores do que b. Neste caso, temos $\mathcal{S}^{(>b)} = Set\{Set_{B^c}\{\mathbb{Z}\}\}$ e a Função Geradora Exponencial é dada por

$$S^{(>b)}(z) = e^{(e^z - e_b(z))}.$$

Exemplo 4.5.7. ***(Quadrado de Comtet)*** *Uma aplicação do Método Simbólico bastante interessante é enumerar partições de conjuntos com a restrição de paridade no número de blocos e/ou no tamanho deles (número de elementos em cada bloco).*

Sejam $m, r \in \mathbb{N}$. Queremos obter a Função Geradora Exponencial para a classe $S^{(A,B)}$, das partições de conjuntos em r blocos, com m elementos cada, tal que $S^{(A,B)}$ é uma classe sujeita às condições impostas em cada item da Tabela 4.1. Todas as Funções Geradoras serão obtidas por aplicação direta da Proposição 4.5.2 e do Teorema 4.3.1. A Tabela 4.1 resume todos os resultados obtidos.

4.5.3 Aplicações a Palavras e Alocações Aleatórias

Esta seção trata dos problemas de enumeração de palavras restritas à frequência com que dada letra presente na palavra aparece. Trata-se de uma estatística feita sobre

n	r	r *é par*	r *é ímpar*
m	e^{e^z-1}	$cosh(e^z-1)$	$senh(e^z-1)$
m *é par*	$e^{coshz-1}$	$cosh(coshz-1)$	$senh(coshz-1)$
m *é ímpar*	e^{senhz}	$cosh(senhz)$	$senh(senhz)$

Tabela 4.1: Funções Geradoras Exponenciais para Partições de Conjuntos com restrições

a classe de palavras mas também há aplicação na Ciência da Computação quando se estuda algoritmos de hashing e também no estudo de alocações aleatórias.

Sejam $\mathcal{X} = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ um alfabeto fixo com cardinalidade r e $\mathcal{W}$ a classe de todas as palavras que podem ser obtidas a partir das letras do alfabeto $\mathcal{X}$. Considere o tamanho de uma palavra $\omega \in \mathcal{W}$ como sendo seu comprimento. Então, podemos considerar cada palavra ω de tamanho n como uma função

$$f : [1, \ldots, n] \longrightarrow [1, \ldots, r]$$

que associa cada posição de ω com um valor correspondente à letra do alfabeto $\mathcal{X}$ que ocupa esta posição. Para determinar este valor, basta atribuir às letras do alfabeto os valores correspondentes às ordens em que elas aparecem no conjunto, da esquerda para a direita.

Exemplo 4.5.8. *Seja* $\mathcal{X} = \{a, b, d, e, g, m, o, r, s, t, v\}$ *e atribua às letras a numeração canônica:*

$$a = a_1, b = a_2, d = a_3, e = a_4, g = a_5, m = a_6, o = a_7, r = a_8, s = a_9, t = a_{10}, v = a_{11}.$$

Para a palavra ***mestrado*** *, temos* $n = 8$ *e definimos*

$$f : [1, 2, ..., 8] \longrightarrow [1, 2, ..., 11]$$

A tabela 4.2 correspondente às imagens de f *é dada por:*

palavra	m	e	s	t	r	a	d	o
posição	1	2	3	4	5	6	7	8
imagem	6	4	9	10	8	1	3	7

Tabela 4.2: Posição de letra x valor de letra

Uma vez relacionadas as posições das letras com seus respectivos valores, no alfabeto $\mathcal{X}$, podemos pensar no caminho inverso, ou seja, dada uma sequência de pré imagens de f, conseguimos construir todas as palavras de tamanho n com as r letras de $\mathcal{X}$, uma vez que as pré imagens dos valores das letras nos retornam as posições em que elas estão, na palavra. Para o exemplo anterior, a palavra **mestrado** seria obtida pela Tabela 4.2, da seguinte forma:

Exemplo 4.5.9. *As pré imagens de cada* $i \in [1, ..., 11]$ *são:*

$$\underbrace{\{6\}}_{a_1}, \ \underbrace{\{\ \}}_{a_2}, \ \underbrace{\{7\}}_{a_3}, \ \underbrace{\{2\}}_{a_4}, \ \underbrace{\{\ \}}_{a_5}, \ \underbrace{\{1\}}_{a_6}, \ \underbrace{\{8\}}_{a_7}, \ \underbrace{\{5\}}_{a_8}, \ \underbrace{\{3\}}_{a_9}, \ \underbrace{\{4\}}_{a_{10}}, \ \underbrace{\{\ \}}_{a_{11}}$$

Temos, portanto, uma sequência de 11 urnas (conjuntos), cada uma contendo as posições em que uma dada letra de valor i aparece, $i = 1, 2, ..., 11$, sendo permitida que uma pré imagem seja um conjunto vazio. Segue que a ***primeira*** *posição da palavra codificada é ocupada pela letra* **m**, *a* ***segunda*** *é ocupada pela letra* **e** *e assim por diante. Ao final, temos a palavra:*

$$\underset{1}{\underline{\mathbf{m}}} \quad \underset{2}{\underline{\mathbf{e}}} \quad \underset{3}{\underline{\mathbf{s}}} \quad \underset{4}{\underline{\mathbf{t}}} \quad \underset{5}{\underline{\mathbf{r}}} \quad \underset{6}{\underline{\mathbf{a}}} \quad \underset{7}{\underline{\mathbf{d}}} \quad \underset{8}{\underline{\mathbf{o}}}$$

conforme era esperado. Note que se trocarmos quaisquer duas urnas de posição, teremos uma nova palavra, de mesmo tamanho.

As pré imagens são urnas ordenadas e disjuntas que definem as componentes de uma r-sequência, ou seja,

$$\mathcal{W} \cong Seq_r\mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad W(z) = e^{zr}.$$

Portanto, $W_n = r^n$.

Concluímos então que palavras formadas por um alfabeto $\mathcal{X}$ de cardinalidade r são equivalentes a funções em um conjunto de cardinalidade também r e são descritas por um r-fold Produto Rotulado. Quando impomos restrições na frequência em que cada letra aparece então a especificação para a classe $\mathcal{W}$ e Função Geradora Exponencial associada podem ser generalizadas.

Proposição 4.5.3. *Suponha $\mathcal{W}^{(A)}$ a família de palavras formadas por um alfabeto $\mathcal{X}$ de cardinalidade r e tal que o número de ocorrências de cada letra pertença ao conjunto A. Então, a Função Geradora Exponencial associada à classe é dada por:*

$$W^{(A)}(z) = (\alpha(z))^r, \quad \alpha(z) = \sum_{a\in\mathcal{A}} \frac{z^a}{a!}.$$

Demonstração: Note que se a ocorrência de cada letra é um número pertencente ao conjunto A, então, cada pré imagem $\varphi^{-1}(i)$, com $i = 1, 2, \ldots, r$ é uma urna de cardinalidade igual a algum $a \in \mathcal{A}$. Portanto, a especificação da classe é dada por

$$\mathcal{W}^{(A)} = Seq_r\{\mathcal{U}_A\},$$

onde $\mathcal{U}_A = Set_A\{\mathcal{Z}\}$ e o resultado segue. ■

Exemplo 4.5.10. ***(Palavras Restritas)*** *Seja $\mathcal{W}^{(\leq b)}$ a classe de palavras obtidas por um alfabeto fixo $\mathcal{X}$ de cardinalidade r. Suponha que as palavras desta classe estejam restritas à condição que cada letra aparece no máximo b vezes na palavra. Então, temos como restrição o conjunto $B = \{1, 2, 3, \ldots, b\}$ ou seja, as urnas estarão restritas a tamanhos pertencentes a B e a Função Geradora Exponencial associada é dada por*

$$e_b(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^b}{b!}.$$

Uma aplicação direta da Proposição 4.5.3 resulta em:

$$\mathcal{W}^{(\leq b)} = Seq_r(Set_B(\mathbb{Z})) \quad \Longrightarrow \quad W^{(\leq b)}(z) = (e_b(z))^r$$

Se agora mudarmos a restrição para o conjunto $B^c = \{b+1, b+2, \ldots\}$ então a Função Geradora associada à classe é $\mathcal{W}^{(\geq b)}$ é $W(z) = (e^z - e_b(z))^r$. Note a analogia entre este exemplo e o Exemplo 4.5.6.

4.5.4 Palavras modeladas com Estruturas Rotuladas e não Rotuladas

Antes de prosseguirmos com as definições de novas estruturas vamos fazer uma comparação entre o que diferencia Estruturas Rotuladas das não Rotuladas.

O que diferencia uma Estrutura Rotulada de uma não Rotulada é simplesmente a modelagem escolhida para resolver um problema de enumeração. Para esclarecer melhor esta questão, mostraremos um exemplo que já estudamos que define a classe das palavras $\mathcal{W}$ sobre um alfabeto $\mathcal{X}$ de cardinalidade r. Podemos especificar esta mesma classe como

1. $\widehat{\mathcal{W}} = Seq(\mathcal{X})$

2. $\mathcal{W} = Seq_r(\mathcal{U})$

A especificação **1** trata de definir a classe $\mathcal{W}$ como uma sequência não rotulada aplicada sobre o alfabeto $\mathcal{X}$, ou seja, basta escolher elementos do alfabeto e distribuir nas posições da palavra $\omega \in \mathcal{W}$. A sequência por si só trata de diferenciar a ordenação. A especificação **2** define a classe $\mathcal{W}$ como uma sequência de urnas e, portanto, a ordem das urnas para compor a sequência, está sendo levada em consideração. No entanto, as Funções Geradoras Ordinária e Exponencial, são respectivamente,

$$\widehat{W}(z) = \frac{1}{1 - rz} \quad \text{e} \quad W(z) = e^{rz}.$$

Note que ambas as Funções Geradoras retornam a mesma *Sequência de Contagem* $W_n = r^n$ e, portanto, não importa a maneira como o modelo é feito. Basta descrever simbolicamente o problema, da maneira mais conveniente.

4.6 Alinhamentos, Permutações e Estruturas Relacionadas

4.6.1 Alinhamentos

Definição 4.6.1. *Um alinhamento é uma sequência bem rotulada composta por ciclos. A classe dos alinhamentos é denotada por $\mathcal{O}$.*

Por definição, a especificação da classe $\mathcal{O}$ é obtida diretamente, ou seja,

$$\mathcal{O} = Seq\{Cyc\{\mathbb{Z}\}\}.$$

Portanto, pelo *Teorema 4.3.1*, a Função Geradora Exponencial associada à classe $\mathcal{O}$ é dada por

$$O(z) = \frac{1}{1 - ln\left(\frac{1}{1-z}\right)}. \tag{4.36}$$

Uma representação esquemática para alinhamentos pode ser feita enfileirando-se, em sequência, os ciclos orientados conforme mostra o exemplo da Figura 4.4.

Abaixo mostramos um resultado para *Alinhamentos* cujos ciclos e tamanho da sequência estão restritos a conjuntos contidos em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

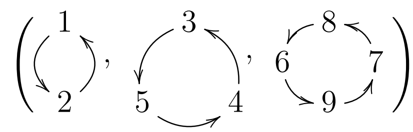


Figura 4.4: Exemplo de Alinhamento.

Proposição 4.6.1. *A classe $\mathcal{O}^{(A,B)}$ dos alinhamentos cujos ciclos têm tamanhos pertencentes a $A \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e tal que o tamanho das sequências pertence a $B \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ possui Função Geradora Exponencial dada por*

$$O^{(A,B)}(z) = \beta(\alpha(z)), \quad \textit{com} \;\; \alpha(z) = \sum_{a \in A} \frac{z^a}{a}, \; \beta(z) = \sum_{b \in B} z^b.$$

Demonstração: A demonstração segue direto da especificação

$$\mathcal{O}^{(A,B)} = Seq_B\{Cyc_A\{\mathbb{Z}\}\}.$$

De fato, quando construímos $\mathcal{O}^{(A,B)}$ estamos restringindo a classe aos ciclos de tamanhos contidos em A. A reunião desses ciclos de componentes restritas a A tem Função Geradora Exponencial dada por

$$\alpha(z) = \sum_{a \in A} \frac{z^a}{a}.$$

Em seguida, tomamos elementos de A para formar sequências de tamanhos variados pertencentes a B. A reunião das sequências nos fornece a Função Geradora Exponencial

$$\beta(z) = \sum_{b \in B} z^b.$$

Portanto, $O^{(A,B)}(z) = \beta(\alpha(z))$. ■

4.6.2 Permutações e Decomposição Cíclica

Seja σ uma permutação de tamanho $n \in \mathbb{N}$. Então, σ admite uma única decomposição cíclica. A construção de um ciclo é resultado de conectar as imagens dos elementos sob a ação de σ a partir de um ponto inicial, por exemplo, o 1. Então, a aplicação sucessiva de σ neste elemento inicial vai compondo o ciclo até que ele é fechado ao retornar à posição inicial, ou seja, em 1.

Esquematicamente um ciclo começando em 1 é dado por:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \sigma(1) \arrow[r] & \sigma^2(1) \arrow[r] & \sigma^3(1) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \sigma^k(1) \arrow[lllll, bend left] \end{tikzcd}.$$

Note que o fechamento de um ciclo ocorre em no máximo n passos, que é exatamente o tamanho da permutação. Portanto, $k \leq n$. Supondo que $k < n$ existem elementos de σ que não pertencem ao ciclo construído. Assim, devemos repetir o processo de construção cíclica até que todos os elementos da permutação estejam contidos em algum ciclo. Ao final, teremos um conjunto de ciclos independentes e, portanto, disjuntos, constituindo o que chamamos de *Decomposição Cíclica de σ*.

Seja $\mathcal{D}$ a classe de todas *Decomposições Cíclicas*, ou seja, de todos os conjuntos de ciclos formados a partir de permutações. Afirmamos que $\mathcal{D} \cong \mathcal{P}$. De fato, a especificação da classe $\mathcal{D}$ é dada por $\mathcal{D} = Set\{Cyc\{\mathbb{Z}\}\}$ e, pelo *Teorema 4.3.1* a Função Geradora Exponencial associada é dada por

$$D(z) = e^{ln\frac{1}{1-z}} = \frac{1}{1-z}. \tag{4.37}$$

Comparando as expressões (4.37) e (4.2) concluímos que as Funções Geradoras Exponenciais para as classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{D}$ são iguais e, portanto, as respectivas *Sequências de Contagem* também são. Logo, o isomorfismo entre as classes está garantido, ou seja, $\mathcal{D} \cong \mathcal{P}$, conforme afirmamos. (*Ver Definição 3.1.5*)

A restrição das permutações a conjuntos que limitam número de ciclos assim como o tamanho deles também pode ser enumerada, conforme mostra a proposição a seguir.

Proposição 4.6.2. *A classe $\mathcal{P}^{(A,B)}$ de permutações cujos ciclos têm comprimentos pertencentes a $A \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e tal que o número de ciclos pertence a $B \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ possui Função Geradora Exponencial dada por*

$$P^{(A,B)}(z) = \beta(\alpha(z)), \quad com \quad \alpha(z) = \sum_{a \in A} \frac{z^a}{a!}, \; \beta(z) = \sum_{b \in B} \frac{z^b}{b!}.$$

Demonstração: A demonstração segue direto da especificação $\mathcal{P}^{(A,B)} = Set_B\{Cyc_A\{\mathbb{Z}\}\}$. De fato, quando construímos $\mathcal{P}^{(A,B)}$ estamos restringindo a classe aos ciclos de tamanhos contidos em A. A reunião desses ciclos de componentes restritas a A tem Função Geradora Exponencial dada por

$$\alpha(z) = \sum_{a \in A} \frac{z^a}{a!}.$$

Em seguida, tomamos elementos de A para formar conjuntos de tamanhos variados pertencentes a B. A reunião desses conjuntos restritos a B nos fornece a Função Geradora Exponencial

$$\beta(z) = \sum_{b \in B} \frac{z^b}{b!}.$$

Portanto, $P^{(A,B)}(z) = \beta(\alpha(z))$. ■

Exemplo 4.6.1. ***(Números de Ciclos de Stirling)*** *Seja $\mathcal{P}^{(r)}$ a classe das permutações que se decompõe em r ciclos. Então, a especificação desta classe é dada por*

$$\mathcal{P}^{(r)} = Set_r(Cyc(\mathcal{Z})) \quad \Longrightarrow \quad P^{(r)}(z) = \frac{\left[ln\left(\frac{1}{1-z}\right)\right]^r}{r!}.$$

Daí,

$$P_n^{(r)} = \frac{n!}{r!}[z^n]\left[ln\left(\frac{1}{1-z}\right)\right]^r = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}.$$

Estes números são conhecidos como Números de Stirling de Primeiro tipo e denotados por $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$.

Se considerarmos a classe $\mathcal{O}^{(r)}$ dos alinhamentos com exatamente r ciclos, temos:

$$\mathcal{O}^{(r)} = Seq_r(Cyc(\mathcal{Z})) \quad \Longrightarrow \quad O^{(r)}(z) = \left[ln\left(\frac{1}{1-z}\right)\right]^r$$

Então,

$$O_n^{(r)} = r! \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}.$$

Suponha agora uma permutação aleatória de tamanho n. Note que quando a distribuição uniforme é feita sobre todos os elementos de $\mathcal{P}_n$, cada permutação $p \in \mathcal{P}_n$ tem probabilidade $\mathbb{P}(p) = \frac{1}{n!}$. Chame E o evento igual ao conjunto das permutações de $\mathcal{P}_n$ com exatamente k-ciclos. Então,

$$\mathbb{P}(E) = \frac{P_n^{(k)}}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{P}(E) = \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Um exemplo numérico pode ser feito para $n = 100$ e alterando-se os valores de k conforme mostra a tabela abaixo, temos:

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$P(E)$	0.01	0.05	0.12	0.19	0.21	0.17	0.11	0.06	0.03	0.01

Tabela 4.3: Probabilidades para uma decomposição de permutação em r ciclos.

Calculando a média deste modelo probabilístico obtemos 5.18 e, portanto, concluímos que em uma permutação cíclica aleatória com 100 elementos temos em média 5 ciclos na sua decomposição e raramente mais do que 10 ciclos.

Exemplo 4.6.2. ***(Involuções e permutações sem ciclos longos)*** *Dizemos que $\sigma \in \mathcal{P}$ é uma involução se $\sigma^2 = id$, onde id representa a permutação identidade. A classe das involuções será denotada por $\mathcal{I}$ e possui especificação dada por*

$$\mathcal{I} = Set\{Cyc_B\{\mathbb{Z}\}\},$$

onde $B = \{1, 2\}$ representa o conjunto dos possíveis tamanhos de ciclos numa involução. A Função Geradora Exponencial associada à classe é dada por

$$I(z) = e^{z+\frac{z^2}{2}}.$$

Para obter a Sequência de Contagem (I_n), para a classe $\mathcal{I}$, reescrevemos $I(z)$ como uma Série de Potências:

$$I(z) = e^z \cdot e^{\frac{z^2}{2}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}_{A(z)} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n n!}}_{B(z)}$$

Note que o expoente de z^{2n} em $B(z)$ é diferente do fatorial no denominador da fração. Portanto, devemos fazer uma manipulação algébrica para colocar essas duas quantidades em concordância:

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)z^{2n}}{2^n(2n)!} \qquad e \qquad B_{2n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{2^n}$$

Pela Convolução Binomial temos

$$I_n \overset{(4.6)}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} A_{n-2k} B_{2k}.$$

Mas, $A_{n-2k} = (n-2k)![z^{n-2k}]A(z) = 1$. *Portanto,*

$$I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(k+1)(k+2)\dots(2k)}{2^k} \cdot \frac{k!}{k!} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!2^k}$$

$$\Longrightarrow I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!} \tag{4.38}$$

Assim, a equação (4.38) determina quantas involuções de tamanho n *podemos obter, para cada* $n \in \mathbb{N}$.

4.6.3 Estruturas de Nível 2

As Estruturas de Nível 2 são assim denominadas porque resultam da composição de *Construções Rotuladas Elementares: Sequências, Conjuntos e Ciclos.* Se considerarmos todas as formas possíveis de compor estas construções, obtemos 9 novas estruturas, conforme mostramos na Tabela 4.4.

$\circ$	$Seq_{\geq 1}$	$Set_{\geq 1}$	Cyc
Seq	$\frac{1-z}{1-2z}$	$\frac{1}{2-e^z}$	$\frac{1}{1-ln(1-z)^{-1}}$
Set	$e^{\frac{z}{1-z}}$	$e^{e^{z-1}}$	$\frac{1}{1-z}$
Cyc	$ln\left(\frac{1-z}{1-2z}\right)$	$ln(2-e^z)^{-1}$	$ln\left(\frac{1}{1-ln(1-z)^{-1}}\right)$

Tabela 4.4: Construções de Nível 2

Cada construção define uma classe. Abaixo listamos cada uma delas dando a descrição de seus elementos.

1. A classe $\mathcal{L} = Seq(Seq_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$ define as *Composições Rotuladas*, ou seja, seus elementos são composições de elementos rotulados. Outra interpretação que podemos dar a esta classe é ver cada elemento como uma sequência ordenada de grafos lineares. A sequência de contagem associada a esta classe é dada por $L_n = n!2^{n-1}$.

2. A classe $\mathcal{R} = Seq(Set_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$ define a classe das *Sobrejeções.*

3. A classe $\mathcal{O} = Seq(Cyc(\mathcal{Z}))$ define a classe dos *Alinhamentos.*

4. A classe $\mathcal{F} = Set(Seq_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$ define as *Permutações Fragmentadas*, ou seja, seus elementos formam um conjunto de permutações que são "quebradas"em pedaços não vazios.

5. A classe $\mathcal{P} = Set(Cyc(\mathcal{Z}))$ define a classe das *Permutações*.

6. As classes $\mathcal{S} = Set(Set_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$, $\mathcal{S}^{I} = Cyc(Seq_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$, $\mathcal{S}^{II} = Cyc(Set_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$ e $\mathcal{S}^{III} = Cyc(Cyc(\mathcal{Z}))$ definem as classes das *Supernecklaces*.

4.7 Construções Adicionais

4.7.1 Apontamento e Substituição

A operação de *Apontamento* é semelhante à que definimos para Estruturas não Rotuladas, ou seja, sua função também será apontar para um átomo dentre todos os que formam um elemento de tamanho n. A *Substituição*, também denominada *Composição* para Estruturas Rotuladas é um pouco mais sutil em seus conceitos.

Definição 4.7.1. *Seja $\mathcal{B}$ uma Classe Rotulada. O Apontamento de $\mathcal{B}$ é definido por*

$$\mathcal{A} = \Theta\mathcal{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A}_n = [1, \ldots, n] \times \mathcal{B}_n.$$

A definição acima nos diz que para gerar um elemento $\alpha \in \mathcal{A}$ devemos escolher um dos n rótulos e apontar para o átomo correspondente em $\mathcal{B}_n$. Neste caso temos:

$$A_n = nB_n \quad \Longrightarrow \quad A(z) = z\frac{d}{dz}(B(z)). \tag{4.39}$$

De fato, $B(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$. Então,

$$\frac{d}{dz}(B(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \frac{z^{n-1}}{n!} \quad \Rightarrow \quad z\frac{d}{dz}(B(z)) \overset{(4.39)}{=} A(z).$$

Definição 4.7.2. *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ classes rotuladas. A Substituição destas classes é definida por*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \circ \mathcal{C} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k \times Set_k(\mathcal{C}).$$

Pelo *Teorema 4.3.1* , a Função Geradora Exponencial associada à classe é dada por

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{(C(z))^k}{k!} = B(C(z)).$$

Uma maneira combinatória de compreender esta definição é a seguinte: escolha uma base em $\mathcal{B}$, ou seja, um elemento $\beta \in \mathcal{B}$ de tamanho k. Então, tome um k-conjunto de elementos de $\mathcal{C}$ e ordene estes elementos pelo valor de seus líderes, ou seja, pelo valor do menor rótulo contido em cada elemento do conjunto. O elemento com líder de valor r será substituído pelo nó rotulado de valor r de β.

Teorema 4.7.1. *As construções combinatórias Pointing e Substituição são admissíveis e*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \Theta\mathcal{B} &\implies& \quad A(z) = z\frac{d}{dz}(B(z)) \\ \mathcal{A} &= \mathcal{B}\circ\mathcal{C} &\implies& \quad A(z) = B(C(z)). \end{aligned}$$

Exemplo 4.7.1. *A Função Geradora Exponencial dos pares (rotulados) de elementos obtidos de $\mathcal{C}$ é dada por $e^{C(z)^2/2}$, pois a Função Geradora Exponencial das involuções sem pontos fixos é dada por $e^{z^2/2}$. (Vide Exemplo 4.6.3)*

Exemplo 4.7.2. *Construções padrão baseadas em Substituição:*

- $Seq(\mathcal{A}) \cong \mathcal{P}\circ\mathcal{A}$, *onde $\mathcal{P}$ é a classe de todas as permutações.*
- $Set(\mathcal{A}) \cong \mathcal{U}\circ\mathcal{A}$, *onde $\mathcal{U}$ é a classe de todas as urnas.*
- $Cyc(\mathcal{A}) \cong \mathcal{C}\circ\mathcal{A}$, *onde $\mathcal{C}$ é a classe de todos os grafos circulares.*

4.7.2 Estruturas Implícitas

Dizemos que uma classe $\mathcal{X}$ é uma Estrutura Implícita quando ela é definida por uma equação combinatória envolvendo outras classes. A Função Geradora Exponencial associada também fica determinada em termos das classes que definem $\mathcal{X}$.

Seja $\mathcal{X}$ uma *Classe Rotulada* caracterizada implicitamente pelas equações

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{X} \quad \text{e} \quad \mathcal{A} = \mathcal{B}\star\mathcal{X}.$$

Então, pelo *Teorema 4.3.1* as respectivas Funções Geradoras Exponenciais associadas à classe $\mathcal{X}$ são dadas por:

$$X(z) = A(z) - B(z) \quad \text{e} \quad X(z) = \frac{A(z)}{B(z)}.$$

Para as demais construções usaremos um Teorema que define as Funções Geradoras Exponenciais de Estruturas Implícitas.

Teorema 4.7.2. *Seja $\mathcal{X}$ uma Classe Rotulada. Então, as Funções Geradoras Exponenciais associadas às Equações Combinatórias Implícitas em $\mathcal{X}$ são dadas respectivamente por*

1. $\mathcal{A} = Set(\mathcal{X}) \implies X(z) = ln(A(z)).$
2. $\mathcal{A} = Cyc(\mathcal{X}) \implies X(z) = 1 - e^{-A(z)}.$
3. $\mathcal{A} = Seq(\mathcal{X}) \implies X(z) = 1 - \dfrac{1}{A(z)}.$

Demonstração: Basta usar o *Teorema 4.3.1.*

4.7.3 Restrição de Ordem

A construção adequada para tratar propriedades de ordem em estruturas combinatórias é o *Produto Rotulado* modificado, também chamado de *Produto Embalado*. Dadas classes $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, o *Produto Embalado* é representado por

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}^{\square} \star \mathcal{C}.$$

Esta estrutura é um subconjunto de $\mathcal{B} \star \mathcal{C}$ restrito à regra que o menor rótulo deve pertencer a uma componente de $\mathcal{B}$.

A fim de construir uma estrutura bem definida e consistente, devemos assumir $B_0 = 0$.

Teorema 4.7.3. *O Produto Embalado é uma Construção Admissível e*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}^{\square} \star \mathcal{C} \quad \Longrightarrow \quad A(z) = \int_0^z \left(\frac{d}{dt}B(t)\right) C(t)dt.$$

Demonstração: Por definição, como já definimos que o menor rótulo deve estar em uma k-componente de $\mathcal{B}$. Devemos distribuir $(n-1)$ elementos em $(k-1)$ componentes de $\mathcal{B}$. Consequentemente restarão $(n-k)$ elementos de $\mathcal{C}$. Portanto, a *Sequência de Contagem* associada é dada por

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B_k C_{n-k} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(kB_k)C_{n-k} \end{aligned}$$

O resultado segue quando tomamos as Funções Geradoras Exponenciais por integração. ∎

O conceito de *Produto Embalado* pode ser também definido quando restringimos o produto $\mathcal{B} \star \mathcal{C}$ com o rótulo máximo pertencente a uma componente de $\mathcal{B}$. Neste caso, denotamos o produto por

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}^{\blacksquare} \star \mathcal{C}.$$

Exemplo 4.7.3. *Dada uma permutação $p \in \mathcal{P}$ de tamanho n dizemos que um "pico" em p é um elemento maior que todos os elementos que o antecedem. Por exemplo, se $p = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$, σ_k é um pico se $\sigma_j < \sigma_k$ para todo $j < k$.*

Quantas permutações de n possuem k "picos"?

Considere inicialmente a classe $\mathcal{Q} = (\mathcal{Z}^{\blacksquare} \star \mathcal{P})$. Esta classe é composta pelas permutações que possuem um "pico" na primeira componente. Então, pelo Teorema 4.7.3 a Função Geradora Exponencial associada é dada por

$$Q(z) = \int_0^z \left(\frac{d}{dt}t\right)P(t)dt = \int_0^z \frac{1}{1-t}dt = ln\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Segue que $Q_n = (n-1)!$, para todo $n \geq 1$, retorna o número de permutações de tamanho n com exatamente 1 "pico" .

Suponha agora que montamos conjuntos com k elementos da classe $\mathcal{Q}$. A ordem é aleatória entre esses elementos e denotamos a classe formada por todos os k-conjuntos por

$$\mathcal{P}^{(k)} = Set_k(\mathcal{Q}).$$

Defina o elemento líder de qualquer componente de $\mathcal{P}^{(k)}$ como o valor do seu elemento máximo. Então, se tomamos as componentes em sequência de líderes e ordenada de maneira crescente, então a sequência resultante terá exatamente k picos.

Seja $\mathcal{P}^{(3)} = Set_3(\mathcal{Q})$ e considere o conjunto

$$\{(\underline{7}, 2, 6, 1), (\underline{4}, 3), (\underline{9}, 8, 5)\} \in \mathcal{P}^{(3)}.$$

Então, pelo que discutimos acima, a sequência resultante será uma permutação com 3 *"picos" dada por*

$$(\underline{4}, 3, \underline{7}, 2, 6, 1, \underline{9}, 8, 5).$$

Pelo Teorema 4.3.1 a Função Geradora Exponencial associada à classe $\mathcal{P}^{(k)}$ é dada por

$$P^{(k)}(z) = \frac{1}{k!}\left(ln\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)^k \quad \Longrightarrow \quad P_n^{(k)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix},$$

pelo Exemplo 4.6.1. Portanto, temos $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ permutações de tamanho n com k "picos".

Conclusão

Conforme o título desta dissertação propõe, este trabalho reúne uma grande quantidade de aplicações para o Método Simbólico em Problemas de Combinatória. Esta grande variedade, aplicada a diferentes contextos e restrições de um problema torna clara a vantagem do método comparado ao estudo de Funções Geradoras da maneira clássica, ou seja, quando obtemos uma Função Geradora por meio da multiplicação de polinômios que descrevem cada restrição imposta no problema.

A vantagem do método está inteiramente ligada à maneira direta como podemos obter tal Função Geradora $F(z)$, uma vez que o método permite encontrar $F(z)$ por uma composição de Funções Geradoras associadas a estruturas combinatórias que descrevem a classe de elementos que queremos enumerar. A partir desta composição obtemos uma expressão fechada para $F(z)$ e, portanto, enumerar elementos de um dado tamanho n é justamente extrair de $F(z)$ o coeficiente F_n da n-ésima potência de z.

Obter este coeficiente pode exigir o auxílio de um software matemático que faça a expansão da Função Geradora como uma Série de Potências. No entanto, ainda assim, o método é eficaz dado que $F(z)$ já foi encontrada.

Além disso, o Método Simbólico foi apresentado neste trabalho com aplicações que podem ser levadas às demais áreas tais como a Computação, no estudo de Árvores Gerais e Grafos, na busca de padrões codificados por letras, sem contar a própria matemática, onde o Método Simbólico representa em sua totalidade a essência para a solução de Problemas de Contagem.

Por fim, concluímos ainda que a modelagem de um problema, como composição de Estruturas Combinatórias, deve ser feita da maneira mais conveniente, ou seja, podemos descrever um problema sob o ponto de vista de Construções Rotuladas ou não Rotuladas. A resposta independe da modelagem.

Referências Bibliográficas

[1] FLAJOLET, P., SEDGEWICK R. *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2009;

[2] WILF, H.S. *Generatingfunctionology*, A K Peters, Ltd., Third Edition, 2006;

[3] SANTOS, J.P.O., MELLO, M.P., MURARI I.T.C. *Introdução à Análise Combinatória*, Editora Ciência Moderna Ltda., 2007;

[4] STANLEY, R.P. *Enumerative Combinatorics, vol. I*, Cambridge University Press, 1997;

[5] SANTOS, J.P.O. *Introdução à Teoria de Números*, IMPA, 2003 (Coleção Matemática Universitária);

[6] SLOANE, N.J.A. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, publicada eletronicamente em www.oeis.org.

Índice Remissivo