

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Entropia e Ações de Grupos de Lie

por

Thiago Fanelli Ferraiol [†]

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

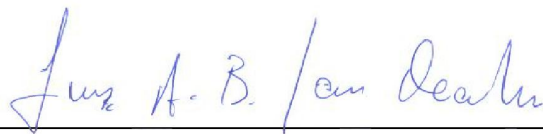
Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio B. San Martin

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes e do CNPq.

Entropia e Ações de Grupos de Lie

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Thiago Fanelli Ferraiol** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 21 de Fevereiro de 2008.



Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin.

Prof. Dr. Mauro Moraes Alves Patrão.

Profa. Dra. Paulo Régis Caron Ruffino.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE em MATEMÁTICA**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

Ferraiol, Thiago Fanelli
F41e Entropia e ações de grupos de Lie / Thiago Fanelli Ferraiol--
Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Entropia. 2. Lie, Grupos de. 3. Teoria ergodica. 4. Espaços
homogeneos. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Entropy and Lie groups actions.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Entropy. 2. Lie groups. 3. Ergodic theory.
4. Homogeneous spaces.

Área de concentração: Geometria / Sistemas Dinâmicos

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Mauro Moraes Alves Patrão (UNB)

Data da defesa: 21/02/2008

Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 21 de fevereiro de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

A handwritten signature in blue ink, reading "Luiz A. B. / San Martin".

Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

A handwritten signature in blue ink, reading "MAA Patrão".

Prof. (a). Dr (a). MAURO MORAES ALVES PATRÃO

A handwritten signature in blue ink, reading "Paulo Regis Caron Ruffino".

Prof. (a). Dr (a). PAULO REGIS CARON RUFFINO

*Ao anjo da minha vida,
minha avó Victória.
(em memória)*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Paulo e Silvia, e à minha avó Victória por terem me dado a educação necessária para a vida com muita conversa, paciência, compreensão, incentivo e apoio nos momentos mais difíceis. Aos meus irmãos Philippe e Lucas pela companhia e amizade.

À minha amada noiva Taty, por ter me acolhido em Campinas, por me compreender em todos os momentos e, principalmente, por me acompanhar nos sonhos e planejamentos de nossas vidas.

Ao meu orientador Luiz San Martin, pelos ensinamentos, dúvidas respondidas e por me mostrar como é o funcionamento da pesquisa em matemática.

Aos membros da banca, os professores Mauro Patrão e Paulo Ruffino, pelos diversos comentários, sugestões e pelas correções que fizeram na versão preliminar dessa dissertação.

Às diretoras do Colégio Monteiro Lobato, de Itu-SP, Cida e Célia, por terem me dado a oportunidade de estudar. Sem essa oportunidade dificilmente teria conhecido a importância da educação.

A todos os amigos que fiz na Unicamp durante os 4 anos de graduação e os 2 anos de mestrado. Em particular, ao meu amigo Lino Grama por me acompanhar em quase todas as disciplinas no mestrado e por me mostrar como a perseverança pode superar tantos obstáculos. Aos meus amigos Luis Roberto Lucinger e Anderson Albuquerque pelas risadas, amizade e auxílio nos estudos.

A todos os meus grandes amigos que fiz em Itu. Em particular, ao meu amigo Vicente

Neto pelas inúmeras conversas sobre a vida, objetivos e sobre como mudar um pouco a realidade em que vivemos.

À Capes e ao Cnpq pelo auxílio financeiro.

Finalmente agradeço a todos aqueles que passaram pela minha vida e que, mesmo que eu não tenha percebido, alteraram o rumo da minha história e fizeram com que eu chegasse aonde cheguei. Não poderia pedir mais nada a todos vocês. Apenas agradeço!

Resumo

Nesta dissertação apresentamos os conceitos fundamentais de entropia em sistemas dinâmicos e algumas relações entre entropia métrica e topológica. O objetivo principal é calcular a entropia de algumas transformações em espaços homogêneos induzidas por ações de Grupos de Lie. Para finalizar, mostramos que a entropia de translações em variedades flag é sempre zero.

Abstract

On this dissertation we present the fundamentals concepts of entropy in dynamical systems and some relations among metric and topological entropy. The main goal is calculate the entropy of some transformations on homogeneous spaces induced by Lie groups actions. About to finalize, we show that the entropy of translations on flag manifolds is always zero.

ÍNDICE

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Teoria Ergódica	4
1.1 Medidas invariantes	4
1.2 Recorrência para transformações mensuráveis	9
2 Entropia	12
2.1 Entropia Métrica	12
2.2 Entropia Topológica	22
2.2.1 Definição de AKM (Adler, Konheim e McAndrew)	22
2.2.2 Definição de Bowen	23
2.2.3 Equivalência das definições	24
2.2.4 Propriedades da Entropia Topológica	27
2.3 Princípio Variacional na Entropia	30
2.4 Entropia e pontos recorrentes	35
3 Entropia em Espaços Homogêneos	36
3.1 Medidas T -homogêneas	36

3.2	Entropia de transformações afins	38
3.3	Entropia em Espaços Homogêneos	44
3.4	Exemplos	49
4	Entropia em Flags	52
4.1	Recorrência em Espaços Projetivos	52
4.2	Entropia em Espaços Projetivos e em Variedades Flag	56
A	Decomposição Multiplicativa de Jordan	60
B	Álgebras e Grupos de Lie	63
B.1	Definições básicas	63
B.2	Álgebras de Lie de um grupo de Lie	65
B.3	Aplicação exponencial	66
B.4	Ação de Grupos e Variedades Homogêneas	67
B.5	Homomorfismos e representações	68
B.6	Grupos e álgebras Semisimples	70
B.7	Subgrupos e Subálgebras Parabólicas	74
B.8	Variedades Flag	76
	Bibliografia	77

Introdução

O conceito de entropia em sistemas dinâmicos foi introduzido inicialmente por Kolmogorov e por Sinai em 1958 e 1959, respectivamente. Eles se basearam nos conceitos de entropia em teoria de informação, introduzidos por Shannon. Há quem diga que a introdução do conceito de entropia foi o maior avanço na teoria de sistemas dinâmicos desde sua fundação por Poincaré. Informalmente falando, a entropia é um número associado a um sistema dinâmico que mede a imprevisibilidade de suas órbitas. A entropia é um invariante útil para determinar se dois sistemas dinâmicos não são conjugados. Sistemas dinâmicos conjugados sempre tem a mesma entropia, mas a recíproca só é verdadeira para alguns sistemas particulares como, por exemplo, para os shifts de Bernoulli.

Em princípio, Kolmogorov introduziu o conceito de entropia de uma transformação $T : X \rightarrow X$, mensurável e que preserva medida. Um conceito de entropia topológica, sem a necessidade de medidas invariantes, foi dado por Adler, Konheim e McAndrew e generalizado por Bowen. Existem ainda outras definições de entropia, mas todas elas coincidem tomando limites adequados. Por exemplo, temos que a entropia topológica para uma transformação contínua num espaço compacto é dada pelo supremo das entropias métricas desta transformação, com o supremo tomado sobre todas as medidas invariantes para o sistema. Esse resultado é conhecido com princípio variacional da entropia. O leitor interessado em conhecer o desenvolvimento histórico do conceito de entropia em sistemas dinâmicos pode consultar [7].

Nesta dissertação, pretendemos fornecer uma introdução básica à entropia, provar suas

principais propriedades e em seguida calcular a entropia de algumas transformações em espaços homogêneos.

No capítulo 1, apresentamos alguns resultados básicos sobre teoria ergódica. Já que a definição de entropia métrica depende da existência de medidas invariantes para o sistema, achamos conveniente fornecer alguns detalhes sobre a existência dessas medidas para transformações contínuas em espaços compactos. Em particular, provamos a compacidade do conjunto $\mathfrak{M}_T(X)$ de todas as medidas invariantes para a transformação contínua $T : X \rightarrow X$, com X compacto. Esse resultado é importante para a demonstração do princípio variacional da entropia, enunciado acima. Ainda nesse capítulo, tratamos de alguns resultados sobre recorrência. Demonstramos o teorema de recorrência de Poincaré, que tem como consequência o fato de que uma medida finita e invariante para uma transformação contínua está suportada no fecho do conjunto dos pontos recorrentes para essa transformação. Isso nos permitirá calcular a entropia métrica restringindo a transformação ao fecho do conjunto dos pontos recorrentes.

No capítulo 2, fornecemos as propriedades principais da entropia. Essas propriedades são fundamentais para se calcular a entropia de algumas transformações e também para se demonstrar resultados importantes como, por exemplo, o princípio variacional da entropia. Nesse capítulo, damos ainda a definição inicial de entropia topológica introduzida por Adler, Konheim e McAndrew para transformações contínuas em espaços compactos, a definição de Bowen para transformações uniformemente contínuas em espaços métricos quaisquer e, em seguida, provamos que a definição de Bowen de fato estende a definição inicial de entropia topológica, ou seja, que as definições coincidem quando o espaço é compacto.

O capítulo 3 é baseado no artigo [2] de Bowen, onde ele estende a definição de entropia topológica e dá algumas propriedades da entropia de transformações em espaços homogêneos. Nesse capítulo fornecemos uma fórmula deduzida por Bowen para o cálculo da entropia de endomorfismo em Grupos de Lie que generaliza a fórmula bem conhecida para endomorfismos do toro. Para finalizar o capítulo, damos um exemplo do cálculo da entropia para as transformações no grupo de Heisenberg generalizado induzidas pela ação canônica do grupo simplético.

O último capítulo desta dissertação é dedicado ao cálculo da entropia de transformações em variedades flag induzidas pela ação de Grupos de Lie. Para desenvolver o capítulo,

foi necessário dar uma caracterização dos pontos recorrentes para transformações nos espaços projetivos induzidas pela ação canônica do grupo linear. Essa caracterização está em função da decomposição multiplicativa de Jordan de uma transformação linear inversível. Mais especificamente, os pontos recorrentes para essas transformações nos espaços projetivos são os pontos fixos das suas partes hiperbólicas e unipotentes. Com essa caracterização, mostramos que a entropia destas transformações nos espaços projetivos é sempre zero. Isso era esperado já que, restringindo aos pontos recorrentes, a transformação coincide com sua parte elíptica que age por isometrias. Utilizamos o mergulho de Plücker das grassmannianas nos Projetivos para mostrar que a entropia da ação canônica do grupo linear na grassmanniana também é zero. E para finalizar, mostramos que a entropia de translações nas variedade flag é zero olhando esta como a órbita da ação adjunta dentro de uma grassmanniana.

O apêndice A tem como objetivo demonstrar a decomposição multiplicativa de Jordan. Preferimos uma abordagem mais detalhada por meio de matrizes para que fique realmente claro quais são as partes elípticas, unipotentes e hiperbólicas dessa decomposição. O apêndice B é um breve resumo de grupos e álgebras de Lie. Além das definições básicas, indicamos como relacionar os grupos e as álgebras de Lie e seus principais “conectores”: a aplicação exponencial e a representação adjunta. Definimos também as subálgebras e os subgrupos parabólicos, necessários para a construção das variedades flag generalizadas.

CAPÍTULO 1

Teoria Ergódica

Neste capítulo apresentamos alguns resultados fundamentais da teoria ergódica que serão úteis para o desenvolvimento do texto. Demonstramos a existência de medidas invariantes para transformações contínuas em espaços compactos e também a compacidade do conjunto de todas as medidas invariantes. Colocamos ainda alguns resultados sobre recorrência, incluindo o teorema de recorrência de Poincaré e sua versão topológica.

1.1 Medidas invariantes

Nesta seção provaremos a existência de medidas invariantes para transformações contínuas em espaços compactos.

Definição 1.1.1. *Sejam (X, Σ, μ) e (Y, Ω, ν) espaços de medida. Dizemos que uma transformação mensurável $T : X \rightarrow Y$ preserva medida se $\mu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$ para todo $A \in \Omega$.*

Observe que se $T : X \rightarrow Y$ é mensurável e μ é uma medida em X , pondo $T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$, temos que $T_*\mu$ define a única medida em Y para qual a transformação T preserva medida. Sendo assim, uma transformação $T : (X, \Sigma, \mu) \rightarrow (Y, \Omega, \nu)$ preserva medida se, e somente se, $T_*\mu = \nu$.

Considere agora (X, d) um espaço métrico compacto e denote por $\mathfrak{M}(X)$ o conjunto de todas as probabilidades sobre os borelianos de X . Seja $C_0(X)$ o espaço das funções

contínuas em X . Se $\mu \in \mathfrak{M}(X)$, definimos um funcional em $C_0(X)$ pondo $\mu(f) = \int f d\mu$. Podemos então considerar a topologia em $\mathfrak{M}(X)$ induzida pela topologia fraca* em $C_0(X)$. Essa topologia tem como subbase de abertos os conjuntos da forma

$$V(\mu, f, \epsilon) = \{\nu \in C_0(X)^* \mid |\mu(f) - \nu(f)| < \epsilon\}$$

Lema 1.1.2. $\mathfrak{M}(X)$ é um espaço métrico compacto na topologia fraca*.

Antes de demonstrarmos esse lema, vamos introduzir uma métrica em $\mathfrak{M}(X)$ que gera a topologia fraca*.

Como X é um espaço métrico compacto, $C_0(X)$ é separável (ver [10] pag. 276). Considere então $\{g_0, g_1, g_2, \dots\} \subset C_0(X)$ um subconjunto enumerável contido e denso em $B = \{f \in C_0(X) \mid \|f\| \leq 1\}$, onde $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Definimos então uma métrica em $\mathfrak{M}(X)$ pondo

$$d(\mu, \nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int g_j d\mu - \int g_j d\nu \right| \quad (1.1)$$

Lema 1.1.3. *Considere uma sequência $\mu_n \in \mathfrak{M}(X)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mu_n, \mu) = 0$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_j d\mu_n = \int g_j d\mu$ para todo $j \geq 1$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g d\mu_n = \int g d\mu$ para todo $g \in C_0(X)$

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) É imediato da seguinte desigualdade

$$\left| \int g_j d\mu_n - \int g_j d\mu \right| \leq 2^j d(\mu_n, \mu)$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Seja $g \in C_0(X)$ e $\epsilon > 0$. Tome g_j tal que $\left\| g_j - \frac{g}{\|g\|} \right\| < \frac{\epsilon}{3\|g\|}$, e também

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\left| \int g_j d\mu_n - \int g_j d\mu \right| < \frac{\epsilon}{3\|g\|}$. Então se $n \geq n_0$ temos que

$$\begin{aligned} \left| \int g d\mu_n - \int g d\mu \right| &\leq \left| \int (g - \|g\|g_j) d\mu_n \right| + \left| \int \|g\|g_j d\mu_n - \int \|g\|g_j d\mu \right| \\ &\quad + \left| \int (\|g\|g_j - g) d\mu \right| \\ &= \|g\| \left| \int \left(\frac{g}{\|g\|} - g_j \right) d\mu_n \right| + \|g\| \left| \int g_j d\mu_n - \int g_j d\mu \right| \\ &\quad + \|g\| \left| \int \left(g_j - \frac{g}{\|g\|} \right) d\mu \right| \\ &\leq \|g\| \frac{\epsilon}{3\|g\|} + \|g\| \frac{\epsilon}{3\|g\|} + \|g\| \frac{\epsilon}{3\|g\|} = \epsilon \end{aligned}$$

(c) $\Rightarrow$ (a) Considere j_0 tal que $\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{\epsilon}{4}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ e $0 \leq j \leq j_0$ então $\left| \int g_j d\mu_n - \int g_j d\mu \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Assim temos que se $n \geq n_0$ então

$$\begin{aligned} d(\mu_n, \mu) &\leq \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} \left| \int g_j d\mu_n - \int g_j d\mu \right| + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\int |g_j| d\mu_n + \int |g_j| d\mu \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot 2 \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} \cdot 2 = \epsilon \end{aligned}$$

■

Lema 1.1.4. *A métrica em 1.1 gera a topologica fraca* em $\mathfrak{M}(X)$.*

Demonstração: Primeiro vejamos que $V(\epsilon, f, \mu)$ é aberto na topologia dada pela métrica d . Para isto, seja $\nu \in V(\epsilon, f, \mu)$ e ν_n uma sequência em $\mathfrak{M}(X)$ tal que $d(\nu, \nu_n) \rightarrow 0$. Pelo lema acima temos que $\int f d\nu_n \rightarrow \int f d\nu$. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \int f d\nu_n - \int f d\nu \right| \leq \epsilon - \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|$, e então $\left| \int f d\mu - \int f d\nu \right| \leq \left| \int f d\mu - \int f d\nu_n \right| + \left| \int f d\nu_n - \int f d\nu \right| < \epsilon$. Assim ν está no interior de $V(\epsilon, f, \mu)$. Logo $V(\epsilon, f, \mu)$ é aberto na topologia dada pela métrica d .

Reciprocamente, se $U \subset \mathfrak{M}(X)$ é um aberto na topologia dada pela métrica d , para mostrar que ele é aberto na topologica que tem como subbase de abertos os conjuntos

da forma $V(\epsilon, f, \mu)$, basta encontrar, para cada $\mu \in U$, um $\epsilon > 0$ e funções contínuas $f_1, \dots, f_k$ tal que $\cap_{j=1}^k V(\epsilon, f_j, \mu) \subset U$.

Fixe $\mu \in U$, e escolha $r > 0$ tal que $\nu \in U$ se $d(\mu, \nu) \leq r$. Escolha também $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{r}{4}$. Ponha $f_j = g_j$ para $1 \leq j \leq j_0$ e $\epsilon = r/2$. Então se $\nu \in \cap_{j=1}^{j_0} V(\epsilon, f_j, \mu)$ temos que

$$\begin{aligned} d(\nu, \mu) &\leq \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} \left| \int g_j d\mu - \int g_j d\nu \right| + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\int |g_j| d\mu - \int |g_j| d\nu \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{r}{2} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot 2 \\ &\leq \frac{r}{2} + 2 \cdot \frac{r}{4} = r \end{aligned}$$

e assim $\nu \in U$. ■

Demonstração do lema 1.1.2: Como foi visto acima, $\mathfrak{M}(X)$ é um espaço métrico e então para mostrar sua compacidade basta ver que toda sequência admite subsequência convergente. Considere uma sequência $\mu_n \in \mathfrak{M}(X)$. Para cada termo da sequência podemos definir uma função $\mu_n : \mathbb{N} \rightarrow [-1, 1]$ pondo $\mu_n(j) = \int g_j d\mu_n$. Agora pondo $\xi_n = (\mu_n(1), \mu_n(2), \dots) \in [-1, 1]^{\mathbb{N}}$, temos que essa sequência admite uma subsequência convergente, pois $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ é compacto com a topologia produto. Assim ξ_n possui uma subsequência ξ_{n_m} tal que para todo $j \in \mathbb{N}$, a sequência $\mu_{n_m}(j) = \int g_j d\mu_{n_m}$ é convergente. Isso implica que $\int g d\mu_{n_m}$ é uma sequência convergente para toda função $g \in C_0(X)$. De fato, dado $\epsilon > 0$ tome g_j tal que $\left\| \frac{g}{\|g\|} - g_j \right\| < \epsilon$. Então $\left| \int \frac{g}{\|g\|} d\mu_{n_m} - \int g_j d\mu_{n_m} \right| \leq \epsilon$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Seja $c_j = \lim_{m \rightarrow \infty} \int g_j d\mu_{n_m}$. Assim temos que

$$\begin{aligned} c_j - \epsilon &\leq \limsup_m \int \frac{g}{\|g\|} d\mu_{n_m} \leq c_j + \epsilon, \quad \text{e} \\ -c_j - \epsilon &\leq -\liminf_m \int \frac{g}{\|g\|} d\mu_{n_m} \leq -c_j + \epsilon. \end{aligned}$$

Somando as desigualdades obtemos $-2\epsilon \leq \limsup_m \int \frac{g}{\|g\|} d\mu_{n_m} - \liminf_m \int \frac{g}{\|g\|} d\mu_{n_m} \leq 2\epsilon$. Como ϵ é arbitrário concluímos que $\int g d\mu_{n_m}$ converge.

Agora fica bem definido um funcional linear positivo $\phi : C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $\phi(g) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int g d\mu_{n_m}$. Pelo teorema da representação de Riez, segue que existe única medida $\nu \in \mathfrak{M}(X)$ tal que $\phi(g) = \int g d\nu$. Assim $\lim_{m \rightarrow \infty} \int g d\mu_{n_m} = \int g d\nu$, o que pelo lema 1.1.3

implica que $\mu_{n_m} \rightarrow \nu$. ■

Teorema 1.1.5. *Seja (X, d) espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ uma transformação contínua. Então existe uma probabilidade $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ que é invariante para T .*

Demonstração: Encontrar uma medida invariante para $T : X \rightarrow X$ é encontrar um ponto fixo da transformação $T_* : \mathfrak{M}(X) \rightarrow \mathfrak{M}(X)$ definida por $T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$. Como T é contínua, T_* também o é, pois se μ_n é uma sequência em $\mathfrak{M}(X)$ convergindo para μ na topologia fraca*, então para qualquer função contínua $g \in C_0(X)$ temos

$$\int g dT_*\mu_n = \int g \circ T d\mu_n \rightarrow \int g \circ T d\mu = \int g dT_*\mu$$

ou seja, $T_*\mu_n$ converge para $T_*\mu$.

Para construir esse ponto fixo, considere $\mu_0 \in \mathfrak{M}(X)$, defina a sequência

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T_*^i \mu_0$$

e passando a uma subsequência convergente se necessário, podemos supor que μ_n converge para uma medida $\mu \in \mathfrak{M}(X)$. Essa medida μ é invariante para a transformação T . De fato temos que

$$T_*\mu_n - \mu_n = \frac{1}{n} (T_*^n \mu_0 - \mu_0)$$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (T_*^n \mu_0 - \mu_0) = 0$ pois $T_*\mu_0$ e μ_0 são probabilidades. Assim temos que

$$T_*\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} T_*\mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$$
■

Proposição 1.1.6. *O conjunto $\mathfrak{M}_T(X)$ das probabilidades sobre os borelianos de X que são invariantes para a transformação contínua T é fechado (na topologia fraca*). Consequentemente, $\mathfrak{M}_T(X)$ também é compacto.*

Demonstração: Isso é consequência de que $\mathfrak{M}(X)$ é um espaço métrico, a transformação $T_* : \mathfrak{M}(X) \rightarrow \mathfrak{M}(X)$ é contínua e $\mathfrak{M}_T(X)$ é o conjunto dos pontos fixos dessa transformação. ■

1.2 Recorrência para transformações mensuráveis

Seja (X, d) um espaço métrico e $T : X \rightarrow X$ uma transformação qualquer. Dizemos que um ponto $y \in X$ é um ω -limite de um ponto $x \in X$ se existe uma sequência de tempos n_k indo para $+\infty$ tal que $\lim_{n_k \rightarrow +\infty} T^{n_k}(x) = y$, e denotamos por $\omega(x)$ o conjunto de todos os ω -limites do ponto x . Analogamente, se T é uma bijeção, dizemos que y é um α -limite de $x \in X$ se existe uma sequência de tempos n_k indo para $-\infty$ tal que $\lim_{n_k \rightarrow -\infty} T^{n_k}(x) = y$, e denotamos o conjunto desses pontos por $\alpha(x)$.

Um ponto é *recorrente* para uma transformação $T : X \rightarrow X$ se ele está no seu ω -limite. Equivalentemente, $x \in X$ é recorrente se para qualquer vizinhança V de x existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) \in V$.

Teorema 1.2.1 (Teorema de recorrência de Poincaré). *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida finita e $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável que preserva medida. Se $A \in \Sigma$ então quase todo ponto de A retorna para A infinitas vezes. Mais precisamente,*

$$\mu(\{x \in A \mid \exists m \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow T^n(x) \notin A\}) = 0$$

Demonstração: Seja $B_m = \{x \in A \mid n \geq m \Rightarrow T^n(x) \notin A\}$. Observe que $B_m = A \setminus \bigcup_{j \geq m} T^{-j}(A)$. Logo B_m é mensurável. Agora se $j \geq m$ então $B_m \cap T^{-j}(B_m) = \emptyset$. Assim, se $j - k \geq m$ então $T^{-j}(B_m) \cap T^{-k}(B_m) = \emptyset$.

Deste modo segue que a coleção de conjuntos $\{T^{-jm}(B_m)\}_{j \geq 0}$ é disjunta e, como T preserva medida, todos esses conjuntos tem a mesma medida. Como X é um espaço de medida finita, segue que $\mu(B_m) = 0$. ■

Note que o teorema acima não diz respeito à recorrência como definido no início da seção. Para fazer a relação entre os dois tipos de recorrência, precisamos assumir que o espaço métrico (X, d) possui uma base enumerável.

Teorema 1.2.2 (Versão topológica do teorema de recorrência de Poincaré). *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida finita e suponha que X tenha uma base enumerável. Se $T : X \rightarrow X$ é uma transformação mensurável que preserva a medida μ , então quase todo ponto $x \in X$ é recorrente (no sentido topológico) para T .*

Demonstração: Considere $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base enumerável de X . Denotando por R o conjunto de todos os pontos recorrentes, temos que $X \setminus R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$, onde $Y_n = \{x \in$

$U_n \mid \exists k \in \mathbb{N}, m \geq k \Rightarrow T^m(x) \notin U_n\}$. Pela versão mensurável do teorema de recorrência, segue que $\mu(Y_n) = 0$ e assim $\mu(X \setminus R) = 0$. ■

Definição 1.2.3. *Seja (X, d) um espaço métrico com base enumerável e μ uma medida de Borel. Definimos o suporte de μ por*

$$\text{supp}(\mu) = \{x \in X \mid \mu(U) > 0 \text{ para toda vizinhança aberta } U \text{ de } x\}$$

Proposição 1.2.4. *$\text{supp}(\mu)$ é o menor fechado de medida total, ou seja, é o complementar do maior aberto de medida nula. Em particular, qualquer conjunto de medida total é denso em $\text{supp}(\mu)$.*

Demonstração: Se x_n é uma sequência em $\text{supp}(\mu)$ convergindo para x , então para qualquer vizinhança aberta U de x , existe $x_n \in U$. Como $x_n \in \text{supp}(\mu)$ segue que $\mu(U) > 0$ e logo $x \in \text{supp}(\mu)$, provando que $\text{supp}(\mu)$ é fechado. Agora se um aberto U tem medida nula, então $U \subset X \setminus \text{supp}(\mu)$, o que prova que $\text{supp}(\mu)$ é o menor fechado de medida total. ■

Proposição 1.2.5. *Seja (X, d) espaço métrico com base enumerável e μ uma medida de Borel. Se $T : X \rightarrow X$ é uma transformação mensurável que preserva a medida μ , então $\text{supp } \mu$ está contido no fecho do conjunto dos pontos recorrentes.*

Demonstração: Essa proposição é apenas um corolário da versão topológica do teorema de recorrência de Poincaré. De fato, se $x \in \text{supp } \mu$, então qualquer vizinhança U de x tem medida positiva e assim possui pontos recorrentes. ■

Um resultado interessante que iremos utilizar mais a frente e que não envolve medidas invariantes é o seguinte.

Proposição 1.2.6. *Seja X um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ uma imersão isométrica, i.e., $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$ para todos $x, y \in X$. Então todo ponto é recorrente para T .*

Demonstração: Basta mostrarmos que dados $x \in X$ e $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) \in B(x, \epsilon)$. Como X é espaço métrico compacto, existe uma subsequência $T^{n_j}(x)$ de $T^n(x)$ que converge. Logo, existem $n_k < n_l$ tal que $d(T^{n_k}(x), T^{n_l}(x)) < \epsilon$. Pondo $n = n_k - n_l$ temos que $d(T^n(x), x) = d(T^{n_k}(x), T^{n_l}(x)) < \epsilon$, como queríamos. ■

Exemplo 1.2.7. *Um bom exemplo da proposição acima se dá quando tomamos $T \in O(n+1)$ e $\bar{T} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ sua restrição à esfera unitária. A transformação $\bar{T}$ preserva a distância canônica em $\mathbb{S}^n$ dada pelo comprimento de arco, e então todo ponto de $\mathbb{S}^n$ é recorrente para $\bar{T}$*

CAPÍTULO 2

Entropia

Dado um sistema dinâmico $T : X \rightarrow X$, sua entropia mede o quão desordenadas são suas órbitas. O conceito de entropia em sistemas dinâmicos foi introduzido na mesma época por Kolmogorov [9], em 1958, e por Sinai [15], em 1959. A definição dada por eles depende de uma medida invariante para o sistema, e essa entropia é hoje conhecida como *entropia métrica*. Baseados na definição de Kolmogorov, em 1965, Adler, Konheim e McAndrew [1] definiram o conceito de entropia de modo puramente topológico para transformações contínuas em espaços compactos, substituindo o conceito de partição mensurável por coberturas abertas. Em 1971, Bowen [2] estendeu a definição de entropia topológica para espaços não compactos.

Neste capítulo apresentamos uma breve introdução à Entropia, provamos as equivalências das definições de entropia topológica e também o resultado principal que relaciona os conceitos de entropia métrica e topológica, conhecido como *Princípio Variacional da Entropia*, provado em partes por Goodwyn em 1969, Dinaburg em 1970, e por Goodman em 1971.

2.1 Entropia Métrica

Seja (X, μ) um espaço de probabilidade. Dizemos que uma coleção finita ou enumerável de subconjuntos mensuráveis de X , $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$, é uma *partição mensurável* de

X se $\mu(A_\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in I$, $\mu(A_\alpha \cap A_\beta) = 0$ quando $\alpha \neq \beta$ e $\mu(\cup_{\alpha \in I} A_\alpha) = 1$. A *entropia* de uma partição é definida como

$$H_\mu(\mathcal{A}) = H(\mathcal{A}) = - \sum_{\alpha \in I} \mu(A_\alpha) \log \mu(A_\alpha) \quad (2.1)$$

Dadas duas partições $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, dizemos que $\mathcal{A}$ é mais fina do que $\mathcal{B}$ (ou que $\mathcal{B}$ está subordinada a $\mathcal{A}$) e denotamos por $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ se todo elemento de $\mathcal{A}$ está em algum elemento de $\mathcal{B}$ a menos de um conjunto de medida nula. Isto define uma relação de equivalência no conjunto das partições mensuráveis pondo $\mathcal{A} = \mathcal{B} \bmod 0$ se, e somente se, $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$. As partições são independentes se $\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$ para todos $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$. Também podemos formar uma nova partição de X pondo $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \text{ e } \mu(A \cap B) > 0\}$. Com isso definimos a *entropia condicional* da partição $\mathcal{A}$ com relação à $\mathcal{B}$ por

$$H(\mathcal{A} \mid \mathcal{B}) = - \sum_{\alpha \in I, \beta \in J} \mu(A_\alpha \cap B_\beta) \log \frac{\mu(A_\alpha \cap B_\beta)}{\mu(B_\beta)} \quad (2.2)$$

A proposição a seguir fornece as principais propriedades da entropia de uma partição e que serão usadas fortemente no decorrer do texto.

Proposição 2.1.1. *Sejam $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\mathcal{B} = \{B_\beta\}_{\beta \in J}$ e $\mathcal{C} = \{C_\gamma\}_{\gamma \in L}$ partições mensuráveis do espaço de probabilidade (X, μ) . Então*

(a) $0 \leq -\log(\sup_{\alpha \in I} \mu(A_\alpha)) \leq H(\mathcal{A}) \leq \log(\#\mathcal{A})$. Se a partição $\mathcal{A}$ for finita, na última inequação vale a igualdade se, e somente se, todos os elementos de $\mathcal{A}$ tem a mesma medida.

(b) $0 \leq H(\mathcal{A} \mid \mathcal{B}) \leq H(\mathcal{A})$; $H(\mathcal{A} \mid \mathcal{B}) = H(\mathcal{A})$ se, e somente se, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são partições independentes; $H(\mathcal{A} \mid \mathcal{B}) = 0$ se, e somente se, $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.

(c) $H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \mid \mathcal{C}) = H(\mathcal{A} \mid \mathcal{C}) + H(\mathcal{B} \mid \mathcal{A} \vee \mathcal{C})$.

(d) se $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ então $H(\mathcal{A} \mid \mathcal{C}) \leq H(\mathcal{B} \mid \mathcal{C})$ e $H(\mathcal{C} \mid \mathcal{A}) \geq H(\mathcal{C} \mid \mathcal{B})$.

(e) $H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \mid \mathcal{C}) \leq H(\mathcal{A} \mid \mathcal{C}) + H(\mathcal{B} \mid \mathcal{C})$

(f) $H(\mathcal{A} \mid \mathcal{B}) \leq H(\mathcal{A} \mid \mathcal{C}) + H(\mathcal{C} \mid \mathcal{B})$

(g) Se λ é outra medida em X tal que a coleção $\mathcal{A}$ é uma partição mensurável para λ , então para todo $t \in [0, 1]$ vale $tH_\mu(\mathcal{A}) + (1-t)H_\lambda(\mathcal{A}) \leq H_{t\mu+(1-t)\lambda}(\mathcal{A})$.

Demonstração: (a) É claro que

$$\sum_{\alpha \in I} \mu(A_\alpha) \log \frac{1}{\mu(A_\alpha)} \geq \sum_{\alpha \in I} \mu(A_\alpha) \log \frac{1}{\sup_{\gamma \in I} \mu(A_\gamma)} \geq -\log \left(\sup_{\alpha \in I} \mu(A_\alpha) \right)$$

o que mostra a primeira desigualdade. Para a segunda, observe que a função $\phi(x) = x \log x$ é estritamente convexa, e logo $\phi \left(\sum_{i=1}^k a_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^k a_i \phi(x_i)$ se $\sum_{i=1}^k a_i = 1$ e $a_i \geq 0$, com a igualdade se, e somente se, $x_i = x_j$ para todos i, j . Assim, pondo $k = \#\mathcal{A}$, $a_i = 1/k$ e $x_i = \mu(A_i)$, segue que

$$-\frac{1}{k} \log k = \phi \left(\frac{1}{k} \right) = \phi \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu(A_i) \right) \leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} \phi(\mu(A_i)) = -\frac{1}{k} H(\mathcal{A})$$

com a igualdade se, e somente se, $\mu(A_i) = \frac{1}{k}$ para todo i .

(b) A primeira parte segue da convexidade da função $\phi(x) = x \log x$. De fato

$$\begin{aligned} H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) &= - \sum_{\alpha \in I} \sum_{\beta \in J} \mu(B_\beta) \phi(\mu(A_\alpha | B_\beta)) \\ &\leq - \sum_{\alpha \in I} \phi \left(\sum_{\beta \in J} \mu(B_\beta) \mu(A_\alpha | B_\beta) \right) \\ &= - \sum_{\alpha \in I} \phi(\mu(A_\alpha)) = H(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são independentes, então a fórmula $H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) = H(\mathcal{A})$ segue facilmente da definição de entropia condicional em 2.2. Por outro lado, pela convexidade de ϕ temos que, para todo α , vale

$$- \sum_{\beta \in J} \mu(B_\beta) \phi(\mu(A_\alpha | B_\beta)) \leq -\phi \left(\sum_{\beta \in J} \mu(B_\beta) \mu(A_\alpha | B_\beta) \right) = -\phi(\mu(A_\alpha))$$

com a igualdade se, e somente se, $\mu(A_\alpha | B_\beta)$ não depende de β . Mas pela hipótese de que $H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) = H(\mathcal{A})$, vale a igualdade na desigualdade acima, e então, para todo $\alpha \in I$ e $\beta \in J$ temos que $\mu(A_\alpha | B_\beta) = \mu(A_\alpha)$, ou seja, as partições são independentes.

Para a última parte, é claro que se $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ então $H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) = 0$, pois para cada $\alpha \in I$ e $\beta \in J$, temos que ou $\mu(A_\alpha \cap B_\beta) = \mu(B_\beta)$, ou $\mu(A_\alpha \cap B_\beta) = 0$. Por outro lado, se $H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) = 0$ então para todos α e β temos que $\mu(A_\alpha \cap B_\beta) \log \mu(A_\alpha | B_\beta) = 0$, e assim ou $\mu(A_\alpha \cap B_\beta) = \mu(B_\beta)$ ou $\mu(A_\alpha \cap B_\beta) = 0$. Isso implica que cada B_β está contido (a menos de um conjunto de medida nula) em algum A_α , ou seja $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.

(c)

$$\begin{aligned}
H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B} | \mathcal{C}) &= - \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \mu(A_\alpha \cap B_\beta \cap C_\gamma) \log \frac{\mu(A_\alpha \cap B_\beta \cap C_\gamma)}{\mu(C_\gamma)} \\
&= - \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \mu(A_\alpha \cap B_\beta \cap C_\gamma) \log \frac{\mu(A_\alpha \cap B_\beta \cap C_\gamma)}{\mu(A_\alpha \cap C_\gamma)} \\
&\quad - \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \mu(A_\alpha \cap B_\beta \cap C_\gamma) \log \frac{\mu(A_\alpha \cap C_\gamma)}{\mu(C_\gamma)} \\
&= H(\mathcal{B} | \mathcal{A} \vee \mathcal{C}) + H(\mathcal{A} | \mathcal{C})
\end{aligned}$$

(d) Se $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ então $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \mathcal{B}$. Assim temos que

$$H(\mathcal{B} | \mathcal{C}) = H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B} | \mathcal{C}) = H(\mathcal{B} | \mathcal{A} \vee \mathcal{C}) + H(\mathcal{A} | \mathcal{C}) \geq H(\mathcal{A} | \mathcal{C})$$

e também

$$\begin{aligned}
H(\mathcal{C} | \mathcal{B}) &= - \sum_{\beta, \gamma} \mu(C_\gamma \cap B_\beta) \cdot \log \frac{\mu(C_\gamma \cap B_\beta)}{\mu(B_\beta)} \\
&= - \sum_{\alpha} \mu(A_\alpha) \sum_{\substack{\gamma \\ B_\beta \subset A_\alpha}} \frac{\mu(B_\beta)}{\mu(A_\alpha)} \cdot \frac{\mu(C_\gamma \cap B_\beta)}{\mu(B_\beta)} \cdot \log \frac{\mu(C_\gamma \cap B_\beta)}{\mu(B_\beta)} \\
&= - \sum_{\alpha, \gamma} \mu(A_\alpha) \sum_{B_\beta \subset A_\alpha} \frac{\mu(B_\beta)}{\mu(A_\alpha)} \cdot \phi \left(\frac{\mu(C_\gamma \cap B_\beta)}{\mu(B_\beta)} \right) \\
&\leq - \sum_{\alpha, \gamma} \mu(A_\alpha) \cdot \phi \left(\sum_{B_\beta \subset A_\alpha} \frac{\mu(C_\gamma \cap B_\beta)}{\mu(A_\alpha)} \right) \\
&= - \sum_{\alpha, \gamma} \mu(A_\alpha) \cdot \phi \left(\frac{\mu(C_\gamma \cap A_\alpha)}{\mu(A_\alpha)} \right) \\
&= - \sum_{\alpha, \gamma} \mu(C_\gamma \cap A_\alpha) \cdot \log \frac{\mu(C_\gamma \cap A_\alpha)}{\mu(A_\alpha)} \\
&= H(\mathcal{C} | \mathcal{A})
\end{aligned}$$

(e) Como $\mathcal{C} \leq \mathcal{A} \vee \mathcal{C}$, temos que

$$H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B} | \mathcal{C}) = H(\mathcal{A} | \mathcal{C}) + H(\mathcal{B} | \mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \leq H(\mathcal{A} | \mathcal{C}) + H(\mathcal{B} | \mathcal{C})$$

(f) Utilizando sucessivamente o item (c) com $\mathcal{C}$ sendo a partição trivial temos

$$\begin{aligned}
 H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) &= H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - H(\mathcal{B}) \\
 &\leq H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vee \mathcal{C}) - H(\mathcal{B}) \\
 &\leq H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vee \mathcal{C}) - H(\mathcal{B}) - (H(\mathcal{B} | \mathcal{A} \vee \mathcal{C}) - H(\mathcal{B} | \mathcal{C})) \\
 &= H(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) + H(\mathcal{B} | \mathcal{C}) - H(\mathcal{B}) \\
 &= H(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) + H(\mathcal{C} \vee \mathcal{B}) - H(\mathcal{C}) - H(\mathcal{B}) \\
 &= H(\mathcal{A} | \mathcal{C}) + H(\mathcal{C} | \mathcal{B})
 \end{aligned}$$

(g) Isso segue diretamente da convexidade de $\phi(x) = x \log x$. De fato

$$\begin{aligned}
 -t \sum_{\alpha} \phi(\mu(A_{\alpha})) - (1-t) \sum_{\alpha} \phi(\lambda(A_{\alpha})) &\leq -\phi\left(\sum_{\alpha} t\mu(A_{\alpha}) + (1-t)\lambda(A_{\alpha})\right) \\
 &= H_{t\mu+(1-t)\lambda}(\mathcal{A})
 \end{aligned}$$

■

Um corolário importante dessas propriedades é que podemos munir o conjunto de todas as partições mensuráveis de X com uma métrica.

Corolário 2.1.2. $d_R(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) + H(\mathcal{B} | \mathcal{A})$ é uma métrica no conjunto de todas as classes de equivalência mod 0 das partições mensuráveis de (X, μ) . Essa é a chamada métrica de Rokhlin.

Agora seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação que preserva medida. Então a coleção $T^{-1}\mathcal{A} = \{T^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ é ainda uma partição de X . É fácil ver que $T^{-1}(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = T^{-1}\mathcal{A} \vee T^{-1}\mathcal{B}$ e como T preserva medida também vale que $H(T^{-1}\mathcal{A}) = H(\mathcal{A})$.

Definimos uma nova partição pondo $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \vee T^{-1}\mathcal{A} \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{A}$. Segue das observações acima e da parte (e) da proposição 2.1.1 que a sequência $H(\mathcal{A}^n)$ é subaditiva. De fato, $H(\mathcal{A}^{n+m}) = H(\mathcal{A}^n \vee T^{-n}\mathcal{A}^m) \leq H(\mathcal{A}^n) + H(\mathcal{A}^m)$

Lema 2.1.3. Se a_n é uma sequência subaditiva de números reais positivos ($a_{n+m} \leq a_n + a_m$) então existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$

Demonstração: Fixado m , escreva, para cada $n > 0$, $n = km + r$, com $0 \leq r < m$. Assim temos

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{km+r}}{km+r} \leq \frac{a_r}{km} + \frac{a_{km}}{km} \leq \frac{a_r}{km} + \frac{ka_m}{km} = \frac{a_r}{km} + \frac{a_m}{m}$$

Se $n \rightarrow \infty$ então também $k \rightarrow \infty$ e assim temos, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}$$

e assim

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_m \frac{a_m}{m} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m}$$

■

Assim definimos a entropia métrica da transformação T com respeito à partição $\mathcal{A}$ por

$$h(T, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{A}^n) \quad (2.3)$$

A proposição a seguir fornece algumas das principais propriedades da entropia métrica de uma transformação com respeito a uma partição.

Proposição 2.1.4. *Sejam $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável que preserva a medida do espaço de probabilidade (X, μ) e $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ duas partições mensuráveis com entropia finita. Então*

- (a) $h(T, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(\mathcal{A} | T^{-1}\mathcal{A} \vee \dots \vee T^{-n}\mathcal{A})$.
- (b) A sequência $\frac{1}{n} H(\mathcal{A}^n)$ é decrescente.
- (c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log(\sup_{A \in \mathcal{A}^n} \mu(A)) \leq h(T, \mathcal{A}) \leq H(\mathcal{A})$.
- (d) $h(T, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq h(T, \mathcal{A}) + h(T, \mathcal{B})$.
- (e) $h(T, \mathcal{B}) \leq h(T, \mathcal{A}) + H(\mathcal{B} | \mathcal{A})$.
- (f) $|h(T, \mathcal{A}) - h(T, \mathcal{B})| \leq H(\mathcal{B} | \mathcal{A}) + H(\mathcal{A} | \mathcal{B})$.
- (g) $h(T, T^{-1}\mathcal{A}) = h(T, \mathcal{A})$
- (h) $h(T, \mathcal{A}) = h(T, \mathcal{A}^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (i) Se λ é outra medida invariante para T e $\mathcal{A}$ é uma partição mensurável com respeito a λ , então para $t \in [0, 1]$, vale que

$$th_\mu(T, \mathcal{A}) + (1-t)h_\lambda(T, \mathcal{A}) \leq h_{t\mu+(1-t)\lambda}(T, \mathcal{A})$$

Demonstração: (a) Utilizando a propriedade (c) da proposição 2.1.1 e que $H(T^{-1}(\mathcal{A})) =$

$H(\mathcal{A})$ temos

$$\begin{aligned}
 H(\mathcal{A}^{n+1}) &= H\left(\bigvee_{j=1}^n T^{-j}(\mathcal{A})\right) + H\left(\mathcal{A} \mid \bigvee_{j=1}^n T^{-j}(\mathcal{A})\right) \\
 &= H(\mathcal{A}^n) + H\left(\mathcal{A} \mid \bigvee_{j=1}^n T^{-j}(\mathcal{A})\right) \\
 &= H(\mathcal{A}^{n-1}) + H\left(\mathcal{A} \mid \bigvee_{j=1}^{n-1} T^{-j}(\mathcal{A})\right) + H\left(\mathcal{A} \mid \bigvee_{j=1}^n T^{-j}(\mathcal{A})\right)
 \end{aligned}$$

e, prosseguindo indutivamente, concluimos que

$$H(\mathcal{A}^{n+1}) = H(\mathcal{A}) + \sum_{k=1}^n H\left(\mathcal{A} \mid \bigvee_{j=1}^k T^{-j}(\mathcal{A})\right).$$

Assim segue que

$$h(T, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n H\left(\mathcal{A} \mid \bigvee_{j=1}^k T^{-j}(\mathcal{A})\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} H\left(\mathcal{A} \mid \bigvee_{j=1}^n T^{-j}(\mathcal{A})\right).$$

(b) Como no item anterior temos

$$\begin{aligned}
 H(\mathcal{A}^{n+1}) &= H\left(\bigvee_{j=1}^n T^{-j}(\mathcal{A})\right) + H\left(\mathcal{A} \mid \bigvee_{j=1}^n T^{-j}(\mathcal{A})\right) \quad \text{e} \\
 H(\mathcal{A}^{n+1}) &= H(\mathcal{A}) + \sum_{k=1}^n H\left(\mathcal{A} \mid \bigvee_{j=1}^k T^{-j}(\mathcal{A})\right) \geq (n+1) H\left(\mathcal{A} \mid \bigvee_{j=1}^n T^{-j}(\mathcal{A})\right).
 \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por $(n+1)$ e substituindo na desigualdade acima temos

$$\begin{aligned}
 (n+1) H(\mathcal{A}^{n+1}) &\leq (n+1) H\left(\bigvee_{j=1}^n T^{-j}(\mathcal{A})\right) + H(\mathcal{A}^{n+1}) \\
 &= (n+1) H(\mathcal{A}^n) + H(\mathcal{A}^{n+1})
 \end{aligned}$$

e então segue que $\frac{1}{n+1} H(\mathcal{A}^{n+1}) \leq \frac{1}{n} H(\mathcal{A}^n)$.

(c) Pelo item (a) de 2.1.1 segue que $-\log(\sup_{A \in \mathcal{A}^n} \mu(A)) \leq H(\mathcal{A}^n)$ e assim obtemos a primeira desigualdade. A segunda desigualdade segue do item (b) acima.

(d) Como $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})^n = \mathcal{A}^n \vee \mathcal{B}^n$, a desigualdade segue do item (e) de 2.1.1.

(e) Pelo item (c) de 2.1.1 temos que $H(\mathcal{B}^n) \leq H(\mathcal{B}^n \vee \mathcal{A}^n) = H(\mathcal{A}^n) + H(\mathcal{B}^n | \mathcal{A}^n)$. Agora utilizando sucessivamente os itens (c) e (d) de 2.1.1 temos que

$$\begin{aligned} H(\mathcal{B}^n | \mathcal{A}^n) &= H(\mathcal{B} | \mathcal{A}^n) + H(T^{-1}(\mathcal{B}^{n-1}) | \mathcal{B} \vee \mathcal{A}^n) \\ &\leq H(\mathcal{B} | \mathcal{A}) + H(T^{-1}(\mathcal{B}^{n-1}) | T^{-1}(\mathcal{A}^{n-1})) \\ &= H(\mathcal{B} | \mathcal{A}) + H(\mathcal{B}^{n-1} | \mathcal{A}^{n-1}) \\ &\leq 2H(\mathcal{B} | \mathcal{A}) + H(\mathcal{B}^{n-2} | \mathcal{A}^{n-2}) \\ &\leq nH(\mathcal{B} | \mathcal{A}) \end{aligned}$$

Assim $\frac{1}{n}H(\mathcal{B}^n) \leq \frac{1}{n}H(\mathcal{A}^n) + H(\mathcal{B} | \mathcal{A})$.

(f) É imediato a partir do item anterior.

(g) Como $(T^{-1}(\mathcal{A}))^n = T^{-1}(\mathcal{A}^n)$ e $H(T^{-1}(\mathcal{B})) = H(\mathcal{B})$, temos que

$$H((T^{-1}(\mathcal{A}))^n) = H(T^{-1}(\mathcal{A}^n)) = H(\mathcal{A}^n)$$

(h) Como $(\bigvee_{i=0}^k T^{-i}(\mathcal{A}))^n = \mathcal{A}^{n+k}$, segue que

$$h\left(T, \bigvee_{i=0}^k T^{-i}(\mathcal{A})\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{A}^{n+k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+k} H(\mathcal{A}^{n+k}) = h(T, \mathcal{A})$$

(i) É imediato a partir do item (g) da proposição 2.1.1. ■

Definimos a entropia métrica de um transformação mensurável $T : X \rightarrow X$ por

$$h(T) = \sup_{\mathcal{A}} h(T, \mathcal{A}) \quad (2.4)$$

com o supremo tomado sob todas as partições mensuráveis finitas de X .

O supremo na definição acima pode ser tomado com relação a famílias menores do que a família de todas as partições mensuráveis, como veremos a seguir.

Definição 2.1.5. *Uma família $\mathfrak{P}$ de partições mensuráveis é dita suficiente com relação a uma transformação mensurável $T : X \rightarrow X$ que preserva medida se*

(i) *para T não inversível, o conjunto das partições subordinadas às partições da forma $\bigvee_{i=0}^k T^{-i}(\mathcal{A})$ com $k \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{A} \in \mathfrak{P}$ é denso no conjunto de todas as partições mensuráveis com a métrica de Rokhlin, dada no corolário 2.1.2.*

(ii) *para T inversível, o mesmo vale para partições subordinadas às partições da forma $\bigvee_{i=-k}^k T^i(\mathcal{A})$.*

Teorema 2.1.6. *Se $\mathfrak{P}$ é uma família suficiente de partições mensuráveis para $T : X \rightarrow X$, então $h(T) = \sup_{\mathcal{A} \in \mathfrak{P}} h(T, \mathcal{A})$*

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ uma partição mensurável de X com $H_\mu(\mathcal{C}) < \infty$. Dado $\epsilon > 0$, tome $\mathcal{A} \in \mathfrak{P}$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$d_R(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) + H(\mathcal{B} | \mathcal{A}) < \epsilon$$

para alguma partição $\mathcal{B} \leq \bigvee_{i=0}^k T^{-i}(\mathcal{A})$ se T não é inversível e $\mathcal{B} \leq \bigvee_{i=-k}^k T^i(\mathcal{A})$ se T é inversível. Assim, utilizando (f), (e) e (h) da proposição 2.1.4, temos

$$h(T, \mathcal{C}) \leq h(T, \mathcal{B}) + \epsilon \leq h\left(T, \bigvee_{i=0}^k T^{-i}(\mathcal{A})\right) + \epsilon = h(T, \mathcal{A}) + \epsilon$$

Como ϵ é arbitrário, o Teorema segue ■

Como corolário, temos o importante Teorema de Kolmogorov-Sinai.

Corolário 2.1.7. *Se $\mathcal{A}$ é uma partição geradora (i.e., $\mathfrak{P} = \{\mathcal{A}\}$ é uma família suficiente) para $T : X \rightarrow X$ então $h(T) = h(T, \mathcal{A})$.*

Proposição 2.1.8. *Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços de probabilidade, $T : X \rightarrow X$ e $S : Y \rightarrow Y$ transformações mensuráveis que preservam medida.*

(a) *Se existe $f : X \rightarrow Y$ mensurável que preserva medida ($f_*\mu = \nu$) tal que $S \circ f = f \circ T$ então $h_\nu(S) \leq h_\mu(T)$.*

(b) *Se $A \subset X$ é invariante para T e $\mu(A) > 0$ então $h_\mu(T) = \mu(A) h_{\mu_A}(T) + \mu(X \setminus A) h_{\mu_{X \setminus A}}(T)$, onde μ_A é a probabilidade condicional em A .*

(c) *Se λ é outra probabilidade em X invariante para T então para qualquer $t \in [0, 1]$ temos que $h_{t\mu + (1-t)\lambda}(T) = th_\mu(T) + (1-t)h_\lambda(T)$.*

(d) *$h_\mu(T^m) = mh_\mu(T)$. Se T for bijetiva e T^{-1} for mensurável e preservar μ então $h_\mu(T^{-1}) = h_\mu(T)$.*

(e) *Definindo $T \times S : X \times Y \rightarrow X \times Y$ por $(T \times S)(x, y) = (T(x), S(y))$ e $\mu \times \nu$ a medida produto em $X \times Y$, temos que*

$$h_{\mu \times \nu}(T \times S) = h_\mu(T) + h_\nu(S)$$

Demonstração: (a) Se $\mathcal{B}$ é uma partição de Y , então $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ é uma partição de X . Como f preserva medida, segue das definições de entropia de uma partição e do fato que $S \circ f = f \circ T$ que $H_\mu(f^{-1}(\mathcal{B})) = H_\nu(\mathcal{B})$ e $h_\mu(T, f^{-1}(\mathcal{B})) = h_\nu(S, \mathcal{B})$. Logo, para toda partição de Y , existe uma partição de X com a mesma entropia. Assim $h_\nu(S) = \sup_{\mathcal{B}} h_\nu(S, \mathcal{B}) = \sup_{\mathcal{B}} h_\mu(T, f^{-1}(\mathcal{B})) \leq h_\mu(T)$.

(b) Seja $\mathcal{A}$ uma partição mensurável. Sem perda de generalidade podemos supor que $\mathcal{B} = \{A, X \setminus A\}$ é uma partição com $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$, pois caso contrário definimos uma nova partição pondo $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. Agora como A é T -invariante, é imediato que $H_\mu(\mathcal{A}^n) = \mu(A) H_{\mu_A}(\mathcal{A}^n) + \mu(X \setminus A) H_{\mu_{X \setminus A}}(\mathcal{A}^n)$. E o resultado segue tomando-se os limites.

(c) É imediato aplicando-se o item (g) da proposição 2.1.1 à partição $\mathcal{A}^n$.

(d) Primeiro observe que

$$\frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-kj} \left(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}(\mathcal{A}) \right) \right) = \frac{k}{nk} H_\mu \left(\bigvee_{j=0}^{nk-1} T^{-j}(\mathcal{A}) \right)$$

assim $h_\mu \left(T^k, \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}(\mathcal{A}) \right) = kh_\mu(T, \mathcal{A})$ e então $kh_\mu(T) \leq h_\mu(T^k)$.

Por outro lado, como $\mathcal{A} \leq \bigvee_{j=0}^{k-1} T^{-j}(\mathcal{A})$, segue que $h_\mu(T^k, \mathcal{A}) \leq h_\mu \left(T^k, \bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}(\mathcal{A}) \right)$ e então $h_\mu(T^k, \mathcal{A}) \leq kh_\mu(T, \mathcal{A})$.

(e) Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ partições de X e Y e $\mathcal{X} = \{X\}$ e $\mathcal{Y} = \{Y\}$ partições triviais. Assim $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} = (\mathcal{A} \times \mathcal{Y}) \vee (\mathcal{X} \times \mathcal{B})$. Além disso $\mathcal{A} \times \mathcal{Y}$ e $\mathcal{X} \times \mathcal{B}$ são partições independentes. Logo

$$\begin{aligned} H_{\mu \times \lambda}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) &= H_{\mu \times \lambda}(\mathcal{A} \times \mathcal{Y}) + H_{\mu \times \lambda}(\mathcal{X} \times \mathcal{B}) \\ &= H_\mu(\mathcal{A}) + H_\lambda(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

Como $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^n = \mathcal{A}^n \times \mathcal{B}^n$, segue que $h_{\mu \times \lambda}(T \times S, \mathcal{A} \times \mathcal{B}) = h_\mu(T, \mathcal{A}) + h_\lambda(S, \mathcal{B})$ e assim $h_\mu(T) + h_\lambda(S) \leq h_{\mu \times \lambda}(T \times S)$.

Por outro lado, a família das partições de $X \times Y$ da forma $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, com $\mathcal{A}$ partição de X e $\mathcal{B}$ partição de Y é suficiente com relação a qualquer transformação mensurável em $X \times Y$. Logo, utilizando o Teorema 2.1.6 temos $h_\mu(T) + h_\lambda(S) = h_{\mu \times \lambda}(T \times S)$. ■

2.2 Entropia Topológica

2.2.1 Definição de AKM (Adler, Konheim e McAndrew)

Seja (X, d) um espaço métrico compacto e α uma cobertura aberta de X . Definimos o número da cobertura α , $N(\alpha)$, como sendo a menor cardinalidade de uma subcobertura de α . Se α e β são coberturas de X , então definimos uma nova cobertura $\alpha \vee \beta$ cujos elementos são da forma $A \cap B$, com $A \in \alpha$ e $B \in \beta$. Denotamos por $T^{-1}(\alpha)$ a cobertura cujos elementos são da forma $T^{-1}(A)$, com $A \in \alpha$. Essa cobertura é ainda uma cobertura aberta, pois T é contínua. Tendo isso definimos $\alpha^n = \alpha \vee T^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee T^{-(n-1)}(\alpha)$.

Com esses ingredientes, definimos então a entropia topológica da transformação T com relação à cobertura α por

$$h(T, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\alpha^n) \quad (2.5)$$

Para verificar que o limite utilizado nesta definição realmente existe, pelo Lema 2.1.3 basta verificar que a sequência $\log N(\alpha^n)$ é subaditiva, isto é, que $\log N(\alpha^{n+m}) \leq \log N(\alpha^n) + \log N(\alpha^m)$. Equivalentemente, basta ver que $N(\alpha^{n+m}) \leq N(\alpha^n) \cdot N(\alpha^m)$.

Para verificar essa desigualdade, observe primeiro que se α e β são duas coberturas de X , então $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha) \cdot N(\beta)$. De fato, se α' e β' são subcoberturas de finitas de α e β respectivamente, então $\#(\alpha' \vee \beta') \leq \#\alpha' \cdot \#\beta'$. Também é fácil ver que $N(T^{-1}(\alpha)) \leq N(\alpha)$.

Agora temos que

$$\begin{aligned} \alpha^{n+m} &= \alpha \vee \dots \vee T^{-(n-1)}(\alpha) \vee T^{-n}(\alpha) \vee \dots \vee T^{-(n+m-1)}(\alpha) \\ &= \alpha^n \vee T^{-n}(\alpha \vee \dots \vee T^{-(m-1)}(\alpha)) \\ &= \alpha^n \vee T^{-n}(\alpha^m) \end{aligned}$$

E então segue das observações feitas que

$$N(\alpha^{n+m}) \leq N(\alpha^n) \cdot N(T^{-n}(\alpha^m)) \leq N(\alpha^n) \cdot N(\alpha^m).$$

E finalmente temos a seguinte definição

Definição 2.2.1. A entropia topológica de uma transformação contínua $T : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico compacto, é dada por

$$h_{top}(T) = \sup_{\alpha} h(T, \alpha)$$

com o supremo tomado sobre todas as coberturas abertas de X .

2.2.2 Definição de Bowen

Seja (X, d) um espaço métrico e $T : X \rightarrow X$ uma transformação uniformemente contínua. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $d_n^T(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(T^i(x), T^i(y))$. Essa é uma métrica em X chamada de *métrica dinâmica*. Para essa métrica, temos o conceito de *bola dinâmica*, que é dada por $B_n^T(x, \epsilon) = \{y \in X \mid d_n^T(x, y) < \epsilon\}$.

Definição 2.2.2. (a) Um subconjunto $E \subset X$ é dito (n, ϵ) -separado se para todos $x, y \in E$, com $x \neq y$, $d_n(x, y) > \epsilon$.

(b) Dado $K \subset X$, um subconjunto $F \subset X$ é dito (n, ϵ) -gerador de K se para todo $x \in K$ existe $y \in F$ tal que $d_n(x, y) \leq \epsilon$.

Informalmente falando, em um conjunto (n, ϵ) -separado, a órbita de dois pontos quaisquer sempre se distanciam mais do que ϵ antes da n -ésima iterada de T . E F é um (n, ϵ) -gerador de K se a órbita de qualquer ponto de K está a uma distância menor ou igual a ϵ da órbita de algum ponto de F antes da n -ésima iterada de T .

Agora dado um subconjunto $K \subset X$ compacto, denotamos por $s_n^T(\epsilon, K)$ a maior cardinalidade de um conjunto (n, ϵ) -separado contido em K , e por $r_n^T(\epsilon, K)$ a menor cardinalidade de um conjunto que (n, ϵ) -gera K . Para medir a taxa de crescimento exponencial dessa quantidade, definimos

$$\bar{s}_T(\epsilon, K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_n^T(\epsilon, K) \quad (2.6)$$

e

$$\bar{r}_T(\epsilon, K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n^T(\epsilon, K) \quad (2.7)$$

observação: Quando não se fizer confusão, omitiremos T nas notações das definições acima.

Lema 2.2.3. (a) $r_n(\epsilon, K) \leq s_n(\epsilon, K) \leq r_n(\frac{1}{2}\epsilon, K) < \infty$

(b) Se $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$ então $\bar{r}(\epsilon_1, K) \geq \bar{r}(\epsilon_2, K)$ e $\bar{s}(\epsilon_1, K) \geq \bar{s}(\epsilon_2, K)$

Demonstração: (a) Se E é um conjunto (n, ϵ) -separado máximo em K , então ele (n, ϵ) -gera K , pois caso contrário, deverá existir $y \in K$ tal que $d_n(x, y) > \epsilon$ para todo $x \in E$, e logo $\{y\} \cup E$ será um conjunto (n, ϵ) -separado maior que E . Logo $r_n(\epsilon, K) \leq s_n(\epsilon, K)$.

Agora seja E um (n, ϵ) -separado em K e F um $(n, \frac{1}{2}\epsilon)$ -gerador de K . Então para todo $x \in E$, existe $g(x) \in F$ tal que $d_n(x, g(x)) \leq \frac{1}{2}\epsilon$. Assim, se $g(x) = g(y)$, então $d_n(x, y) \leq d_n(x, g(x)) + d_n(y, g(y)) \leq \epsilon$. Como E é (n, ϵ) -separado, segue que $x = y$ quando $g(x) = g(y)$. Assim, existe uma função injetora de E em F . Logo $\#E \leq \#F$ e então $s_n(\epsilon, K) \leq r_n(\frac{1}{2}\epsilon, K)$.

(b) Se $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$ então conjuntos (n, ϵ_1) -geradores são (n, ϵ_2) -geradores. Logo $r_n(\epsilon_1, K) \geq r_n(\epsilon_2, K)$. Do mesmo modo, conjuntos (n, ϵ_2) -separados são (n, ϵ_1) -separados, e logo $s_n(\epsilon_1, K) \geq s_n(\epsilon_2, K)$. ■

Definição 2.2.4. *Seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação uniformemente contínua do espaço métrico (X, d) e $K \subset X$ compacto. Definimos*

$$h_d(T, K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \bar{r}_T(\epsilon, K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \bar{s}_T(\epsilon, K)$$

e então definimos a entropia topológica de T por

$$h_d(T) = \sup\{h_d(T, K) \mid K \subset X, K \text{ compacto}\}$$

É importante observar que se $K_1 \subset K_2$ então $h_d(T, K_1) \leq h_d(T, K_2)$ e assim, se (X, d) é compacto então $h_d(T, X) = h_d(T)$.

2.2.3 Equivalência das definições

Provaremos a seguir que, para o caso de um espaço métrico compacto, a definição de entropia topológica dada por Bowen é equivalente àquela dada por AKM.

Considere então (X, d) um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ uma transformação contínua (e logo uniformemente contínua pela compacidade de X). Somente nesta subseção iremos denotar por $h_{top}(T)$ a entropia topológica definida por AKM e por $h^*(T)$ a entropia definida por Bowen. Com essas notações iremos provar o seguinte Teorema:

Teorema 2.2.5. $h_{top}(T) = h^*(T)$.

Dividiremos a prova em alguns lemas.

Lema 2.2.6. *Se α é uma cobertura aberta de X e $|\alpha| = \sup\{\text{diam}(A) \mid A \in \alpha\}$ então $r_n(|\alpha|, X) \leq N(\alpha^n)$.*

Demonstração: Os elementos de $\alpha^n = \alpha \vee \dots \vee T^{-(n-1)}(\alpha)$ são da forma $A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(A_{n-1})$, com $A_i \in \alpha$. Seja então β uma subcobertura de α^n . Para cada $B \in \beta$, tome $x \in B$ e considere S o conjunto de todos esses pontos. Afirmamos que S é um (n, ϵ) -gerador. De fato, seja $y \in X$ e tome $A_0 \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(A_{n-1}) \in \beta$ contendo y . Tomando $x \in S$ tal que $x \in A_0 \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(A_{n-1})$ teremos que $d(T^i(y), T^i(x)) < |\alpha|$, para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$ pois $T^i(x), T^i(y) \in A_i$.

Logo, para toda subcobertura β de $\alpha \vee \dots \vee T^{-(n-1)}(\alpha)$ existe um conjunto $(n, |\alpha|)$ -gerador S com $\#\beta = \#S$. Assim $N(\alpha \vee \dots \vee T^{-(n-1)}(\alpha)) \geq r_n(|\alpha|, X)$ ■

Tomando logaritmos e limites, segue do lema acima que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(|\alpha|, X) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\alpha^{n+1}) = h(T, \alpha) \quad (2.8)$$

Lema 2.2.7. Se α_ϵ é uma cobertura de X formada por bolas de raio ϵ então $N(\alpha_\epsilon^n) \leq r_n(\epsilon, X)$.

Demonstração: Se $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ é um conjunto (n, ϵ) -gerador de X , então $\beta = \{B(x_i, \epsilon) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(B(T^{n-1}(x_i), \epsilon)) \mid x_i \in S\}$ é uma subcobertura de α_ϵ^n . De fato, dado $z \in X$, existe $x_i \in S$ tal que $d(T^l(z), T^l(x_i)) < \epsilon$ para $0 \leq l \leq n-1$, isto é, $z \in T^{-l}(B(T^l(x_i), \epsilon))$ para $0 \leq l \leq n-1$.

Logo, dado qualquer conjunto S que é (n, ϵ) -gerador de X , existe β uma subcobertura de $\alpha_\epsilon^n = \alpha_\epsilon \vee \dots \vee T^{-(n-1)}(\alpha_\epsilon)$ tal que $\#S = \#\beta$. Assim $r_n(\epsilon, X) \geq N(\alpha_\epsilon^n)$. ■

Novamente tomando logaritmos e limites temos que

$$h(T, \alpha_\epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\alpha_\epsilon^{n+1}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, X) . \quad (2.9)$$

Agora se α_ϵ é uma cobertura de X por bolas de raio ϵ então $|\alpha_\epsilon| \leq 2\epsilon$. Assim segue de 2.8 e 2.9 que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(2\epsilon, X) \leq h(T, \alpha_\epsilon) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, X) \quad (2.10)$$

e então, fazendo $\epsilon \rightarrow 0^+$ nas desigualdades acima,

$$h^*(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} h(T, \alpha_\epsilon) . \quad (2.11)$$

Para completar a prova, basta demonstrar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} h(T, \alpha_\epsilon) = \sup\{h(T, \alpha) \mid \alpha \text{ é cobertura aberta de } X\}$$

Lema 2.2.8. *Para toda cobertura aberta β de X , existe $\epsilon > 0$ tal que a cobertura α_ϵ formada pelas bolas de raio ϵ satisfaz $N(\beta^n) \leq N(\alpha_\epsilon^n)$.*

Demonstração: Tome ϵ um número de Lebesgue da cobertura β . Então a cobertura α_ϵ formada pelas bolas de raio ϵ satisfaz a desigualdade enunciada neste lema. De fato, se $A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap \dots \cap T^{-n}(A_n)$ é um elemento da cobertura α_ϵ^{n+1} , então existem $B_0, \dots, B_n \in \beta$ tais que $A_i \subset B_i$ para $0 \leq i \leq n$. Consequentemente teremos $A_0 \cap \dots \cap T^{-n}(A_n) \subset B_0 \cap \dots \cap T^{-n}(B_n)$.

Deste modo, para cada subcobertura α' de α_ϵ^{n+1} , existe uma subcobertura β' de β^{n+1} tal que $\#\beta' \leq \#\alpha'$, e assim segue que $N(\beta^{n+1}) \leq N(\alpha_\epsilon^{n+1})$. ■

Tomando logaritmos e limites na desigualdade do lema acima temos que

$$h_{top}(T) = \sup_{\epsilon > 0} h(T, \alpha_\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(T, \alpha_\epsilon) \quad (2.12)$$

e logo, por 2.11 e 2.12, segue que $h_{top}(T) = h^*(T)$, demonstrando o Teorema 2.2.5. ■

Um corolário útil dos lemas acima diz que se X é um espaço métrico compacto, então é possível substituir os limites superiores da definição de entropia topológica dada por Bowen por limites inferiores, isto é:

Corolário 2.2.9. *Se (X, d) é espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ é uma transformação contínua então*

$$h^*(T) = h_{top}(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\epsilon, X)$$

Demonstração: Primeiro observe que se α é uma cobertura de X por bolas de raio 2ϵ e β é cobertura por bolas de raio $\epsilon/2$ então os lemas 2.2.6 e 2.2.7 e a parte (a) do lema 2.2.3 fornecem que

$$N(\alpha^n) \leq r_n(2\epsilon, X) \leq s_n(2\epsilon, X) \leq r_n(\epsilon, X) \leq N(\beta^n)$$

e assim temos

$$h(T, \alpha) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(2\epsilon, X) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_n(2\epsilon, X) \leq h(T, \beta)$$

Tomando $\epsilon \rightarrow 0$, o resultado então segue da equação 2.12. ■

2.2.4 Propriedades da Entropia Topológica

Apresentaremos a seguir as principais propriedades da Entropia Topológica de uma transformação uniformemente contínua $T : X \rightarrow X$. No que segue, utilizaremos a definição de Bowen (onde (X, d) é um espaço métrico não necessariamente compacto), e quando necessário explicitaremos nas hipóteses a compacidade de X .

Definição 2.2.10. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Uma transformação $T : X \rightarrow X$ é um fator de uma transformação $S : Y \rightarrow Y$ se existe uma transformação contínua e sobrejetora $f : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ S = T \circ f$. A transformação f é dita uma semiconjugação entre T e S .*

Proposição 2.2.11. *Se (X, d) e (Y, d') são espaços métricos compactos e $T : X \rightarrow X$ é um fator de $S : Y \rightarrow Y$ então $h_d(T) \leq h_{d'}(S)$*

Demonstração: Seja $f : Y \rightarrow X$ uma semiconjugação entre S e T . Como Y é compacto, f é uniformemente contínua, e assim temos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(y_1, y_2) < \delta \Rightarrow d'(f(y_1), f(y_2)) < \epsilon$ para quaisquer $y_1, y_2 \in Y$. Assim, se $\{y_1, \dots, y_k\}$ é um conjunto (n, δ) -gerador de Y , então $\{f(y_1), \dots, f(y_k)\}$ é um conjunto (n, ϵ) -gerador de X . Com isso temos que $r_n^S(\delta, Y) \geq r_n^T(\epsilon, X)$ e logo, tomando logaritmos e limites, $h_{d'}(S) \geq h_d(T)$. ■

Corolário 2.2.12. *Sejam $T : X \rightarrow X$ e $S : Y \rightarrow Y$ transformações uniformemente contínuas, (X, d) compacto e $f : X \rightarrow Y$ contínua e injetiva tal que $f \circ T = S \circ f$. Então $h_d(T) \leq h_{d'}(S)$*

Demonstração: Como X é compacto, a transformação T é um homeomorfismo de X sobre sua imagem $f(X)$. Pela proposição 2.2.11 acima temos que $h_d(T, X) = h_{d'}(S, f(X))$. Por outro lado, é claro que $h_{d'}(S, f(X)) \leq h_{d'}(S)$ e o resultado segue. ■

Definição 2.2.13. Duas métricas d e d' em X são uniformemente equivalentes se as transformações identidade $\text{id} : (X, d) \rightarrow (X, d')$ e $\text{id} : (X, d') \rightarrow (X, d)$ são uniformemente contínuas.

Proposição 2.2.14. Se $T : X \rightarrow X$ é uniformemente contínua e d e d' são duas métricas uniformemente equivalentes em X então $h_d(T) = h_{d'}(T)$

Demonstração: A demonstração segue as mesmas linhas da proposição acima. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que $d'(x, y) < \delta \Rightarrow d(x, y) < \epsilon$ para qualquer $x \in X$. Agora dado K compacto, pela implicação acima temos que todo (n, δ) -gerador de K com respeito a d' é um (n, ϵ) -gerador de K com respeito a d . Assim temos $r_n(\epsilon, K, d) \leq r_n(\delta, K, d')$ e logo $h_d(T, K) \leq h_{d'}(T, K)$. Com o mesmo argumento conseguimos a desigualdade contrária. ■

Proposição 2.2.15. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos e $T : X \rightarrow X$ e $S : Y \rightarrow Y$ transformações uniformemente contínuas. Então:

(a) $h_d(T^m) = m h_d(T)$. Se X for compacto e T um homeomorfismo então $h_d(T^{-1}) = h_d(T)$

(b) Definindo $T \times S : X \times Y \rightarrow X \times Y$ por $(T \times S)(x, y) = (T(x), S(y))$ e

$$d''((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$$

temos que

$$h_{d''}(T \times S) \leq h_d(T) + h_{d'}(S)$$

com a igualdade valendo se X ou Y é um espaço métrico compacto.

Demonstração: (a) Fixe $m > 0$. Então

$$d_n^{T^m}(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(T^{im}(x), T^{im}(y)) \leq \max_{0 \leq i \leq m(n-1)} d(T^i(x), T^i(y)) = d_{mn-m+1}^T(x, y)$$

e assim

$$B_{mn-m+1}^T(x, \epsilon) \subset B_n^{T^m}(x, \epsilon)$$

Logo, para qualquer K compacto,

$$r_n^{T^m}(\epsilon, K) \leq r_{mn-m+1}^T(\epsilon, K) \leq r_{mn}^T(\epsilon, K)$$

e assim, tomando logaritmos e limites, $h_d(T^m) \leq m \cdot h_d(T)$.

Por outro lado, segue da continuidade uniforme da transformação T que dados $m > 0$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset B_m^T(x, \epsilon)$ para qualquer $x \in X$. Assim temos que

$$\begin{aligned}
 B_n^{T^m}(x, \delta) &= \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-im} (B(T^{im}(x), \delta)) \\
 &\subset \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-im} (B_m^T(T^{im}(x), \epsilon)) \\
 &= \bigcap_{i=0}^{n-1} \left(\bigcap_{j=0}^{m-1} T^{-im} (T^{-j} (B(T^j(T^{im}(x)), \epsilon))) \right) \\
 &= \bigcap_{i=0}^{n-1} \left(\bigcap_{j=0}^{m-1} T^{-(im+j)} (B(T^{im+j}(x), \epsilon)) \right) \\
 &= \bigcap_{k=0}^{nm-1} T^{-k} (B(T^k(x), \epsilon)) \\
 &= B_{mn}^T(x, \epsilon)
 \end{aligned}$$

e então $r_{mn}^T(\epsilon, K) \leq r_n^{T^m}(\delta, K)$ para qualquer K compacto. Tomando logaritmos e limite segue então que $m \cdot h_d(T) \leq h_d(T^m)$, como queríamos.

Agora se T é inversível, então $B_n^T(x, \epsilon) = B_n^{T^{-1}}(T^{n-1}(x), \epsilon)$. Assim temos que, se X é compacto, então $r_n^T(\epsilon, X) = r_n^{T^{-1}}(\epsilon, X)$ e logo $h_d(T) = h_d(T^{-1})$.

(b) Considere $K \subset X$ e $L \subset Y$ compactos. Se E é uma conjunto (n, ϵ) -gerador de K e F é (n, ϵ) -gerador de L então $E \times F$ é um (n, ϵ) -gerador de $K \times L$. Assim temos $r_n^{T \times S}(\epsilon, K \times L) \leq r_n^T(\epsilon, K) \cdot r_n^S(\epsilon, L)$ e assim $\bar{r}_{T \times S}(\epsilon, K \times L) \leq \bar{r}_T(\epsilon, K) + \bar{r}_S(\epsilon, L)$.

Agora tomando $M \subset X \times Y$ compacto e pondo $K = \pi_X(M)$ e $L = \pi_Y(M)$, onde π_X e π_Y são as projeções de $X \times Y$ em X e Y respectivamente, teremos que $M \subset K \times L$ e assim $\bar{r}_{T \times S}(\epsilon, M) \leq \bar{r}_T(\epsilon, K) + \bar{r}_S(\epsilon, L)$. Logo $h_{d''}(T \times S, M) \leq h_d(T, K) + h_{d'}(S, L)$ e assim

$$h_{d''}(T \times S) = \sup_{\substack{M \subset X \times Y \\ \text{compacto}}} h_{d''}(T \times S, M) \leq \sup_{\substack{K \subset X \\ \text{compacto}}} h_d(T, K) + \sup_{\substack{L \subset Y \\ \text{compacto}}} h_{d'}(S, L) = h_d(T) + h_{d'}(S)$$

Se X for compacto (o caso Y compacto é idêntico), então qualquer subconjunto compacto de $X \times Y$ é um subconjunto de $X \times L$ para algum $L \subset Y$ compacto (basta por $L = \pi_Y(M)$). Assim temos que

$$h_{d''}(T \times S) = \sup_{\substack{L \subset Y \\ \text{compacto}}} h_{d''}(T \times S, X \times L) \quad (2.13)$$

Agora seja E um conjunto (n, ϵ) -separado em X e F um (n, ϵ) -separado em $L \subset Y$. Então $E \times F$ é (n, ϵ) -separado em $X \times L$. Segue então que $s_n^{T \times S}(\epsilon, X \times L) \geq s_n^T(\epsilon, X) \cdot s_n^S(\epsilon, L)$ e assim

$$\begin{aligned} \bar{s}_{T \times S}(\epsilon, X \times L) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\log s_n^T(\epsilon, X) + \log s_n^S(\epsilon, L)] \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_n^T(\epsilon, X) + \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n^S(\epsilon, L) \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon \rightarrow 0$ temos, utilizando o corolário 2.2.9, que

$$h_{d''}(T \times S, X \times L) \geq h_d(T) + h_{d'}(S, L) \quad (2.14)$$

e a proposição segue de 2.13 e 2.14. ■

Observação 2.2.16. *A segunda parte do item (a) da proposição acima não é verdadeira se X não for compacto. Um contra exemplo simples se dá pondo $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = 2x$. T é uma função uniformemente contínua da reta e, pelos resultados do capítulo 3 sobre entropia de transformações lineares, temos que $h(T) = \log 2$ enquanto que $T^{-1} = \frac{1}{2}x$ tem entropia $h(T^{-1}) = 0$.*

Observação 2.2.17. *Existem exemplos onde vale a desigualdade estrita $h_{d''}(T \times S) < h_d(T) + h_{d'}(S)$ na proposição acima. Um exemplo pode ser encontrado no artigo de P. Hulse, [6].*

2.3 Princípio Variacional na Entropia

O princípio variacional da entropia fornece a principal relação entre a entropia topológica e a entropia métrica. Ele estabelece que a entropia topológica de uma transformação contínua num espaço métrico compacto é o supremo das entropias métricas tomado sobre todas as probabilidades invariantes para essa transformação.

Ainda hoje existem pesquisas para se saber sobre quais condições esse supremo é atingido e encontrar tais medidas. As medidas que satisfazem essa condição são chamadas de medidas de entropia máxima. Mais a frente (capítulo 3) apresentaremos o conceito definido por Bowen de medida homogênea para uma transformação contínua e mostraremos que essa é uma medida de entropia máxima.

O objetivo desta seção é provar o Princípio Variacional da Entropia. Esse resultado nos ajudará a calcular a entropia topológica de algumas transformações nos Espaços Projetivos (capítulo 4) apenas caracterizando seus pontos recorrentes. Apresentaremos nesta seção uma demonstração devida a Misiurewicz.

Lema 2.3.1. *Seja (X, d) espaço métrico compacto e $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Então para todo $\delta > 0$, existe uma partição mensurável $\mathcal{A} = \{C_1, \dots, C_k\}$ tal que $\text{diam}(C_i) < \delta$ e $\mu(\partial C_i) = 0$*

Demonstração: Primeiro observe que dado $\delta > 0$ existe δ' com $0 < \delta' < \delta$ tal que $\mu(\partial B(x, \delta')) = 0$. De fato, $\bigcup_{\delta' \in (0, \delta)} \partial B(x, \delta')$ é uma união disjunta, não enumerável, com medida finita, e logo deve existir δ' tal que $\mu(\partial B(x, \delta')) = 0$.

Considere então $\{B_1, \dots, B_k\}$ uma cobertura finita de X por bolas de raio menor que $\delta/2$ e tal que $\mu(\partial B_i) = 0$. Pondo $C_1 = B_1$ e $C_i = \overline{B_i} \setminus \bigcap_{0 \leq j \leq i-1} \overline{B_j}$ temos que $\mathcal{A} = \{C_1, \dots, C_k\}$ é uma partição como no enunciado. ■

Lema 2.3.2. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Se μ_n é uma sequência de probabilidades sobre os borelianos de X que converge (na topologia fraca*) para a probabilidade μ , então para todo boreliano A com $\mu(\partial A) = 0$ temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.*

Demonstração: Primeiro mostraremos que se F é um conjunto fechado então $\limsup \mu_n(F) \leq \mu(F)$. Tomando complementares, temos da desigualdade acima que $\liminf \mu_n(A) \geq \mu(A)$ se A é aberto.

Para mostrar isso, seja F fechado e defina, para cada $m \in \mathbb{N}$, a função

$$f_m(x) = g(m \cdot d(x, F))$$

onde $d(x, F) = \sup\{d(x, y) \mid y \in F\}$ e g é definida por

$$g(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

Definindo $B_m = \{x \in X \mid d(x, F) < 1/m\}$ temos que $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} B_m = F$ e logo $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_m) = \mu(F)$. Observe ainda que $\chi_F \leq f_m$, onde χ_F é a função característica do conjunto F .

Assim temos:

$$\limsup_n \mu_n(F) \leq \limsup_n \int f_m d\mu_n = \int f_m d\mu \leq \mu(B_m)$$

e logo $\limsup_n \mu_n(F) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_m) = \mu(F)$.

Agora a desigualdade $\limsup \mu_n(A) \leq \limsup \mu_n(\overline{A}) \leq \mu(\overline{A}) = \mu(A)$ junto com $\liminf \mu_n(A) \geq \liminf \mu_n(A^\circ) \geq \mu(A^\circ) = \mu(A)$ implicam que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$. ■

Segue do lema acima que se $\mathcal{A}$ é uma partição mensurável de X por conjuntos de fronteira com medida μ nula, e μ_n é uma sequência de probabilidades convergindo (na topologia fraca*) para μ , então $\lim_{n \rightarrow \infty} H_{\mu_n}(\mathcal{A}) = H_\mu(\mathcal{A})$.

Lema 2.3.3. *Seja (X, d) um espaço métrico, $T : X \rightarrow X$ contínua e $E_n \subset X$ um conjunto (n, ϵ) -separado. Seja δ_x a medida de Dirac suportada em x (i.e., $\delta_x(A) = 1 \rightarrow x \in A$). Defina as seguintes probabilidades*

$$\nu_n := \frac{1}{\#E_n} \sum_{x \in E_n} \delta_x,$$

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T_*^i \nu_i$$

Então existe um ponto de acumulação de $\{\mu_n\}$ (na topologia fraca) que é T -invariante e satisfaz*

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \#E_n \leq h_\mu(T)$$

Demonstração: Seja n_k uma sequência de índices tal que

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \log \#E_{n_k} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \#E_n$$

e seja μ um ponto de acumulação qualquer da sequência μ_{n_k} (que existe pois $\mathfrak{M}(T)$ é um conjunto compacto na topologia fraca*). Então μ é T -invariante pois $T_*\mu_n - \mu_n = \frac{1}{n}(T_*^n \nu_n - \nu_n)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(T_*^n \nu_n - \nu_n) = 0$ pois ν_n são probabilidades e assim se $\mu = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}$ então $T_*\mu = \lim_{n_k \rightarrow \infty} T_*\mu_{n_k} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \mu_{n_k} = \mu$.

Para mostrar a desigualdade do lema, seja $\epsilon > 0$ considere $\mathcal{A} = \{C_1, \dots, C_k\}$ uma partição de X com $\text{diam}(C_i) < \epsilon$ e $\mu(\partial C_i) = 0$ para $1 \leq i \leq k$. Então cada elemento C de $\mathcal{A}^n$ contém no máximo um elemento de E_n pois como $\text{diam}(C_i) < \epsilon$ quaisquer dois pontos de C não podem ser (n, ϵ) -separados. Assim existem exatamente $\#E_n$ elementos em $\mathcal{A}^n$ com medida ν_n igual a $\frac{1}{\#E_n}$. Logo temos que $H_{\nu_n}(\mathcal{A}^n) = \log \#E_n$.

Agora fixe n e q tais que $0 < q < n$. Para cada k , $0 \leq k < q$ defina $a(k) = \left\lfloor \frac{n-k}{q} \right\rfloor$, isto é, $a(k)$ é a parte inteira do número $\frac{n-k}{q}$. Pondo

$$S = \{0, 1, \dots, k, k + a(k)q + 1, \dots, n - 1\}$$

conseguimos uma partição do conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ na seguinte união disjunta:

$$\{0, 1, 2, \dots, n - 1\} = \{k + rq + i \mid 0 \leq r \leq a(k) - 1, 0 < i \leq q\} \cup S$$

Observe ainda que $\#S \leq 2q$. De fato temos que $\#S = n - a(k)q \leq k + q \leq 2q$.

Assim temos

$$\mathcal{A}^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\mathcal{A}) = \left(\bigvee_{r=0}^{a(k)-1} T^{-(k+rq)}(\mathcal{A}^q) \right) \vee \left(\bigvee_{i \in S} T^{-i}(\mathcal{A}) \right)$$

e então, utilizando os itens (e) e (a) da Proposição 2.1.1 segue que

$$\begin{aligned} \log \#E_n = H_{\nu_n}(\mathcal{A}^n) &\leq \sum_{r=0}^{a(k)-1} H_{\nu_n}(T^{-(k+rq)}(\mathcal{A}^q)) + \sum_{i \in S} H_{\nu_n}(T^{-i}(\mathcal{A})) \\ &\leq \sum_{r=0}^{a(k)-1} H_{T^{k+rq} \ast \nu_n}(\mathcal{A}^q) + 2q \log \#\mathcal{A} \end{aligned}$$

Da desigualdade acima temos que

$$\begin{aligned} q \log \#E_n = \sum_{k=0}^{q-1} H_{\nu_n}(\mathcal{A}^n) &\leq \sum_{k=0}^{q-1} \left(\sum_{r=0}^{a(k)-1} H_{T^{k+rq} \ast \nu_n}(\mathcal{A}^q) + 2q \log \#\mathcal{A} \right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} H_{T^i \ast \nu_n}(\mathcal{A}^q) + 2q^2 \log \#\mathcal{A} \\ &\leq n H_{\mu_n}(\mathcal{A}^q) + 2q^2 \log \#\mathcal{A} \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue do item (g) de 2.1.1. E com isso concluímos que

$$\limsup \frac{1}{n} \log \#E_n \leq \lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{1}{q} H_{\mu_{n_k}}(\mathcal{A}^q) = \frac{1}{q} H_{\mu}(\mathcal{A}^q)$$

e assim

$$\limsup \frac{1}{n} \log \#E_n \leq h_\mu(T, \mathcal{A}) \leq h_\mu(T)$$

■

E finalmente temos o princípio variacional da entropia

Teorema 2.3.4. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ contínua. Então*

$$h_d(T) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(T)} h_\mu(T) .$$

Demonstração: Seja $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ uma partição de X . Como X é um espaço métrico, uma medida μ nos borelianos de X é regular e assim $\mu(C_i) = \sup\{\mu(B) \mid B \subset C_i \text{ fechado}\}$. Com isso podemos tomar uma partição $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, \dots, B_k\}$, com $B_0 = X \setminus \cup_{i=1}^k B_i$ tal que cada B_i é um fechado contido em C_i e $H(\mathcal{C} \mid \mathcal{B}) < 1$. Assim temos pelo item (e) da Proposição 2.1.4 que

$$h_\mu(T, \mathcal{C}) \leq h_\mu(T, \mathcal{B}) + H_\mu(\mathcal{C} \mid \mathcal{B}) \leq h_\mu(T, \mathcal{B}) + 1$$

Ponha $\alpha = \{A_1, \dots, A_k\}$, com $A_i = B_0 \cup B_i$. Como $B_0 \cup B_i = X \setminus \cup_{j \neq i} B_j$ e cada B_j é fechado, temos que α é uma cobertura aberta de X . Por 2.1.1(a) temos que $H_\mu(\mathcal{B}^n) \leq \log \#\mathcal{B}^n$. Mas como $\#\mathcal{B}^n \leq \#\alpha^n \cdot 2^n$, temos que $H_\mu(\mathcal{B}^n) \leq \log(\#\alpha^n \cdot 2^n)$ e então $h_\mu(T, \mathcal{B}) \leq h(T, \alpha) + \log 2 \leq h_d(T) + \log 2$. As desigualdades acima junto com 2.1.4(e) implicam que

$$h_\mu(T, \mathcal{C}) \leq h_\mu(T, \mathcal{B}) + H_\mu(\mathcal{C} \mid \mathcal{B}) \leq h_d(T) + \log 2 + 1$$

Assim temos que

$$h_\mu(T) = \frac{h_\mu(T^n)}{n} \leq \frac{h_d(T^n) + \log 2 + 1}{n}$$

e então $h_\mu(T) \leq h_d(T)$.

Por outro lado, fixado $\epsilon > 0$ e escolhendo para cada $n \in \mathbb{N}$ um conjunto E_n que é (n, ϵ) -separado de cardinalidade máxima ($\#E_n = s_n^T(\epsilon, X)$), temos pelo lema anterior que

$$\limsup \frac{1}{n} \log s_n^T(\epsilon, X) \leq h_\mu(T)$$

para alguma medida invariante $\mu \in M(T)$. Assim temos que $\bar{s}_T(\epsilon, X) \leq \sup_\mu h_\mu(T)$ e logo

$$h_d(T) \leq \sup_\mu h_\mu(T).$$

■

2.4 Entropia e pontos recorrentes

Essa seção é apenas para observar que para se calcular a entropia de uma transformação contínua $T : X \rightarrow X$, com (X, d) espaço métrico compacto e com base enumerável, basta restringir a transformação T ao fecho do conjunto dos pontos recorrentes.

De fato, é fácil ver que para calcular a entropia métrica de T com respeito a uma medida invariante μ , basta calcular a entropia de T restrita ao suporte de μ . E pela Proposição 1.2.5, um corolário da versão topológica do Teorema de recorrência de Poincaré, o suporte de uma medida invariante μ está contido no fecho de conjunto dos pontos recorrentes. Assim, a observação desta seção segue do princípio variacional da entropia.

CAPÍTULO 3

Entropia em Espaços Homogêneos

Neste capítulo apresentamos uma fórmula geral para o cálculo da entropia de transformações afins em Grupos de Lie. Como caso particular obtemos a clássica fórmula para a entropia de endomorfismos no toro. Em seguida mostraremos como calcular a entropia de algumas transformações em espaços homogêneos da forma G/Γ , com Γ um reticulado uniforme. Isso nos fornecerá a entropia de algumas transformações interessantes, como as provenientes da ação dos elementos do grupo simplético no grupo de Heisenberg que fixam as coordenadas inteiras desse grupo.

3.1 Medidas T -homogêneas

Definição 3.1.1. *Uma medida de Borel μ em X é dita T -homogênea se satisfaz as seguintes condições:*

- (i) $\mu(K) < \infty$ se K é compacto;
- (ii) $\mu(K) > 0$ para algum K compacto;
- (iii) Para todo $\epsilon > 0$, existem números positivos δ e c tais que

$$\mu(B_n(y, \delta)) \leq c \cdot \mu(B_n(x, \epsilon))$$

para todos $x, y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.

A partir de uma medida T -homogênea, definimos

$$k(\mu, T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(y, \epsilon)) \quad (3.1)$$

Como μ é T -homogênea, então a quantidade $k(\mu, T)$ não depende de y . De fato, se x é outro ponto de X , então dado $\epsilon > 0$, existem c_1, c_2, δ_1 e δ_2 , com $\delta_2 < \delta_1 < \epsilon$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$c_2 \cdot \mu(B_n(y, \delta_2)) \leq c_1 \cdot \mu(B_n(x, \delta_1)) \leq \mu(B_n(y, \epsilon))$$

e logo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(y, \epsilon)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, \delta_1)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(y, \delta_2))$$

Assim, tomando $\epsilon \rightarrow 0$, segue que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(y, \epsilon)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, \epsilon))$$

Proposição 3.1.2. *Seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação uniformemente contínua e μ uma medida T -homogênea em X . Então $h_d(T) = k(\mu, T)$. Mais ainda, se X é compacto, $\mu(X) = 1$ e μ é T -invariante então também vale que $h_\mu(T) = k(\mu, T)$. Em particular essa é uma medida de entropia máxima.*

Demonstração: Seja K compacto e U uma vizinhança de K com $\mu(U) < \infty$, que existe pois X é localmente compacto e medidas de compactos são finitas.

Seja $\epsilon > 0$ tal que $B(K, \epsilon) \subset U$. Se $E \subset K$ é um conjunto (n, ϵ) -separado então $\cup_{x \in E} B_n^T(x, \frac{1}{2}\epsilon)$ é uma união disjunta contida em U . Tome δ e $c > 0$ tais que $\mu(B_n(y, \delta)) \leq c \cdot \mu(B_n(x, \frac{1}{2}\epsilon))$ para quaisquer $x, y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} \mu(B_n(y, \delta)) \cdot s_n(\epsilon, K) &\leq c \cdot \mu(B_n(x, \epsilon/2)) \cdot s_n(\epsilon, K) \\ &\leq c \cdot \mu(U) \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(\epsilon, K) &\leq \limsup_n \frac{1}{n} \log \frac{c \cdot \mu(U)}{\mu(B_n(y, \delta))} \\ &= \limsup_n -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(y, \delta)) \end{aligned}$$

e conseqüentemente $h_d(T, K) \leq k(\mu, T)$.

Por outro lado, seja K compacto com $\mu(K) > 0$. Se F é um conjunto (n, δ) -gerador de K então $K \subset \cup_{x \in F} B_n(x, 2\delta)$.

Dado $\epsilon > 0$, tome δ e c tais que $\mu(B_n(x, 2\delta)) \leq c \cdot \mu(B_n(y, \epsilon))$ para todos $x, y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim temos

$$\begin{aligned} c \cdot \mu(B_n(y, \epsilon)) \cdot r_n(\delta, K) &\geq \mu(B_n(x, 2\delta)) \cdot r_n(\delta, K) \\ &\geq \mu(K) \end{aligned}$$

e do mesmo modo feito acima, tomando limites e logaritmos, concluimos que $h_d(T, K) \geq k(\mu, T)$.

Para provar a segunda parte da proposição, suponha X compacto e μ T -invariante. Então já sabemos pelo princípio variacional que $h_\mu(T) \leq h_d(T) = k(\mu, T)$.

Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta > 0$ e $c \geq 1$ tais que $\mu(B_n(x, \delta)) \leq c \cdot \mu(B_n(y, \epsilon))$ para todos $x, y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Seja $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ uma partição mensurável de X com $\text{diam}(A_i) < \delta$

Os conjuntos de $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \vee T^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee T^{-(n-1)}(\mathcal{A})$ são da forma $A_I := A_{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}} := \cap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(A_{i_k})$. Se $x \in A_I$ então $A_I \subset B_n(x, \delta)$ e assim $\mu(A_I) \leq c \cdot \mu(B_n(y, \epsilon))$ para quaisquer $y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim temos

$$\begin{aligned} H(\mathcal{A}^n) &= - \sum_{I=i_0, \dots, i_{n-1}} \mu(A_I) \log \mu(A_I) \\ &\geq c \cdot r^n \cdot \log \frac{1}{c \cdot \mu(B_n(y, \epsilon))} \\ &\geq \log \frac{1}{c \cdot \mu(B_n(y, \epsilon))} \\ &= -\log c \cdot \mu(B_n(y, \epsilon)) \end{aligned}$$

e assim $h(T, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{A}^n) \geq \limsup_n -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(y, \epsilon))$, provando que $h_\mu(T) \geq k(\mu, T) = h_d(T)$. ■

3.2 Entropia de transformações afins

Definição 3.2.1. Uma transformação $T : G \rightarrow G$ de um grupo G é dita *afim* se é a composta de um endomorfismo com uma translação. Mais especificamente $T = R_g \circ A$, onde $A : G \rightarrow G$ é um endomorfismo do grupo e $R_g : G \rightarrow G$ é a aplicação $R_g(x) = xg$.

Proposição 3.2.2. *Seja G um grupo metrizável, localmente compacto com métrica invariante à direita d e $T : G \rightarrow G$ uma transformação afim. Então a medida de Haar invariante à direita em G é T -homogênea.*

Demonstração: Seja $A : G \rightarrow G$ endomorfismo e $g \in G$ tal que $T = R_g \circ A$. Como μ é invariante à direita, é suficiente mostrar que $B_n^T(x, \epsilon) = B_n^A(e, \epsilon) \cdot x$ para qualquer $x \in X$, pois assim teremos que $\mu(B_n^T(x, \epsilon)) = \mu(B_n^A(e, \epsilon))$, para quaisquer $x, y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.

Como $B_n^T(x, \epsilon) = \cap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(B(T^k(x), \epsilon))$, basta mostrar que

$$T^{-k}(B(T^k(x), \epsilon)) = A^{-k}(B(e, \epsilon)) \cdot x$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Por indução, se $k = 0$ então a igualdade acima é óbvia pois d é invariante à direita. Agora

$$\begin{aligned} T^{-(k+1)}(B(T^{k+1}(x), \epsilon)) &= T^{-1}(T^{-k}(B(T^k(T(x)), \epsilon))) \\ &= T^{-1}(A^{-k}(B(e, \epsilon) \cdot T(x))) \\ &= A^{-1} \circ R_{g^{-1}}(A^{-k}(B(e, \epsilon) \cdot A(x)g)) \\ &= A^{-1}(A^{-k}(B(e, \epsilon)) \cdot A(x)) \\ &= A^{-(k+1)}(B(e, \epsilon)) \cdot x \end{aligned}$$

■

Como consequência dessa proposição, temos o corolário abaixo afirmando que a medida de Haar para grupos compactos é uma medida de entropia máxima para os endomorfismos sobrejetores desse grupo.

Corolário 3.2.3. *Seja G um grupo compacto, d uma métrica invariante à direita e μ a medida de Haar em G invariante à direita com $\mu(G) = 1$. Se $A : G \rightarrow G$ é um endomorfismo sobrejetor então*

$$h_\mu(R_g \circ A) = h_\mu(A) = k(\mu, A) = h_d(A)$$

Demonstração: A medida de Haar num grupo compacto é invariante para qualquer endomorfismo sobrejetor do grupo. De fato, se μ é a medida de Haar invariante à direita

e $A : X \rightarrow X$ é endomorfismo sobrejetor, então a medida definida por $\nu = A_*\mu$ é uma medida de Haar invariante à direita, pois $\nu(Cg) = \mu(A^{-1}(Cg)) = \mu(A^{-1}(CA(h))) = \mu(A^{-1}(C)h) = \mu(A^{-1}(C)) = \nu(C)$. Assim $\nu = A_*\mu = \mu$ pela unicidade da medida de Haar.

Pelas proposições 3.1.2 e 3.2.2 acima segue imediatamente que $h_\mu(A) = k(\mu, A) = h_d(A)$. ■

A seguir apresentamos uma proposição que nos permitirá calcular a entropia de endomorfismos em Grupos de Lie conhecendo apenas a entropia dos homomorfismos correspondentes na álgebra de Lie.

Proposição 3.2.4. *Sejam N e M variedades diferenciáveis, $T : N \rightarrow N$, $S : M \rightarrow M$ e $\pi : N \rightarrow M$ mapas diferenciáveis que comutam (i.é. $\pi \circ T = S \circ \pi$). Considere μ_N uma medida (diferenciável) em N que é T -homogênea com relação a uma métrica d_N e μ_M uma medida (diferenciável) em M que é S -homogênea com relação a uma métrica d_M .*

Se $T(x) = x$ e π é um difeomorfismo local numa vizinhança U de x então $k(\mu_N, T) = k(\mu_M, S)$.

Demonstração: Seja $U_1 \subset U$ uma vizinhança de x tal que $T(U_1) \subset U$, $\overline{U_1}$ é compacto e $\overline{U_1} \subset U$. Considere ϵ tal que $B(x, \epsilon) \subset U_1$. Como π é difeomorfismo em U , existem a_ϵ e b_ϵ tais que

$$B(\pi(x), a_\epsilon) \subset \pi(B(x, \epsilon)) \subset B(\pi(x), b_\epsilon)$$

o que implica em

$$B_n^S(\pi(x), a_\epsilon) \subset \pi(B_n^T(x, \epsilon)) \subset B_n^S(\pi(x), b_\epsilon)$$

Como μ_N e μ_M são medidas diferenciáveis (provenientes de uma forma volume), π é difeomorfismo em U e $\overline{U_1} \subset U$ é compacto, segue que existem constantes C_1 e C_2 tais que para todo conjunto mensurável $E \subset U_1$ vale

$$C_1\mu_M(\pi(E)) \leq \mu_N(E) \leq C_2\mu_M(\pi(E))$$

Assim temos que

$$\begin{aligned}
 C_1 \cdot \mu_M(B_n^S(\pi(x), a_\epsilon)) &\leq C_1 \cdot \mu_M(\pi(B_n^T(x, \epsilon))) \\
 &\leq \mu_N(B_n^T(x, \epsilon)) \\
 &\leq C_2 \cdot \mu_M(\pi(B_n^T(x, \epsilon))) \\
 &\leq C_2 \cdot \mu_M(B_n^S(\pi(x), b_\epsilon))
 \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
 \limsup_n -\frac{1}{n} \log \mu_M(B_n^S(\pi(x), a_\epsilon)) &\geq \limsup_n -\frac{1}{n} \log \mu_N(B_n^T(x, \epsilon)) \\
 &\geq \limsup_n -\frac{1}{n} \log \mu_M(B_n^S(\pi(x), b_\epsilon))
 \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon \rightarrow 0$ concluímos a proposição. ■

Corolário 3.2.5. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Considere $A : G \rightarrow G$ um endomorfismo e $dA_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ o homomorfismo na sua álgebra dado pela diferencial de A na identidade. Se d é uma métrica invariante à direita em G então*

$$h_d(R_g \circ A) = h_d(A) = h(dA_e)$$

Demonstração: Pela proposição 3.2.2 a medida de Haar em G é A -homogênea com relação à métrica invariante à direita d em G , e a medida usual de Lebesgue em $\mathfrak{g}$ é dA_e -homogênea com relação a qualquer norma em $\mathfrak{g}$. A aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ é um difeo local numa vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$ e satisfaz $A \circ \exp = \exp \circ dA_e$ (ver B.5.3). Logo, o corolário é imediato da proposição acima e da Proposição 3.1.2. ■

A seguir calcularemos a entropia topológica de transformações lineares explicitamente a partir dos seus autovalores. Com a ajuda do corolário acima obteremos a entropia topológica de qualquer transformação afim num grupo de Lie G .

Vejamos primeiramente a seguinte proposição.

Proposição 3.2.6. *Seja M uma variedade diferencial de dimensão m e $f : M \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Se d é uma métrica em M determinada por uma métrica*

Riemanniana então

$$h_d(f) \leq \max\{0, m \cdot \log(\sup_{x \in M} \|df|_{T_x M}\|)\}$$

Demonstração: Seja $a = \sup_{x \in M} \|df|_{T_x M}\|$. Suponha que $a < \infty$ (o caso $a = \infty$ é óbvio). Se $a < 1$, pela desigualdade do valor médio, temos que $d(f(x), f(y)) \leq a \cdot d(x, y)$ e logo f não expande distâncias, implicando que os conjuntos $(1, \epsilon)$ -geradores são (n, ϵ) -geradores para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim $h_d(f) = 0$.

Suponha então que $1 < a < \infty$. Seja $K \subset M$ compacto e $\epsilon > 0$. Considere $\|\cdot\|_m$ a norma do máximo em $\mathbb{R}^m$ e $B(0, r)$ a bola em $\mathbb{R}^m$ nessa norma. Escolha agora sistemas de coordenadas $\varphi_1, \dots, \varphi_r : B(0, 1/2) \rightarrow M$ em M de forma que $K \subset \cup_{i=1}^r \varphi_i(B(0, 1/2))$. Tome c tal que $d(\varphi_i(p), \varphi_i(q)) \leq c \cdot \|p - q\|_m$ para todos $p, q \in B(0, 1/2)$ e $1 \leq i \leq r$.

Agora para cada $\delta \in (0, 1)$, ponha $E(\delta) = \{(k_1\delta, \dots, k_m\delta) \in \mathbb{R}^m \mid k_i \in \mathbb{Z} \text{ e } k_i\delta < 1/2\}$. Então $\#E(\delta) \leq (1/\delta)^m$ e qualquer ponto de $B(0, 1/2)$ está a uma distância $\leq \delta$ de algum ponto de $E(\delta)$.

O conjunto $F(\delta) = \cup_{j=1}^r \varphi_j(E(\delta))$ é $(n, a^n b \delta)$ -gerador de K . De fato, seja $x = \varphi_i(p) \in K$ com $p \in B(0, 1/2)$ e considere $q \in E(\delta)$ tal que $\|p - q\| \leq \delta$. Ponha $y = \varphi_i(q) \in F(\delta)$. Se $0 \leq k \leq n$ então

$$\begin{aligned} d(f^k(x), f^k(y)) &\leq a^k \cdot d(x, y) \\ &\leq a^n \cdot d(\varphi_i(p), \varphi_i(q)) \\ &\leq a^n \cdot c \cdot \|p - q\| \\ &\leq a^n \cdot c \cdot \delta \end{aligned}$$

Agora dado $\epsilon > 0$, ponha $\delta = \frac{\epsilon}{a^n \cdot c}$. Assim

$$r_n(\epsilon, K) \leq \#F(\delta) \leq r \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^m = r \cdot \left(\frac{a^n \cdot c}{\epsilon}\right)^m = \frac{a^{n \cdot m} \cdot r}{c \cdot \epsilon}$$

e logo $\bar{r}_f(\epsilon, K) \leq m \cdot \log a$, como queríamos. ■

Corolário 3.2.7. *Seja $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e λ o autovalor de maior módulo. Então*

$$h_d(T) \leq \max\{0, m \log |\lambda|\}$$

Demonstração: $h_d(T) = \frac{1}{n} h_d(T^n) \leq \frac{1}{n} \max\{0, m \log \|T^n\|\} = \max\{0, m \log \|T^n\|^{\frac{1}{n}}\}$. E como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = |\lambda|$, segue que $h_d(T) \leq \max\{0, m \log |\lambda|\}$. ■

Proposição 3.2.8. *Seja $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ seus autovalores (possivelmente repetidos). Então*

$$h_d(T) = \sum_{|\lambda_i| > 1} \log |\lambda_i|$$

Demonstração: Pela decomposição de Jordan do operador T , conseguimos uma decomposição $\mathbb{R}^m = E_1 \times \dots \times E_k$, onde cada E_j é invariante por T e cada $T_j = T|_{E_j}$ tem todos os autovalores com módulo α_j . Então podemos escrever $T = T_1 \times \dots \times T_k$. Assim, pela parte (b) da proposição 2.2.15 segue que $h_d(T) \leq \sum_{j=1}^k h_d(T_j)$. Pelo corolário 3.2.7 acima, $h_d(T_j) \leq \max\{0, \dim E_j \log \alpha_j\}$, e logo $h_d(T) \leq \sum_{|\lambda_i| > 1} \log |\lambda_i|$.

Para a outra desigualdade, considere o subspaço V de $\mathbb{R}^m$ formado pelo produto dos subspaços E_j tais que $\alpha_j > 1$ e μ a medida de Lebesgue em V . Então pelas proposições 3.1.2 e 3.2.2, segue que $h_d(T|_V) = k(\mu, T|_V)$. Mas como $B_n^{T|_V}(0, \epsilon) \subset (T|_V)^{-n}(B(0, \epsilon))$, segue que

$$\begin{aligned} \mu(B_n^{T|_V}(0, \epsilon)) &\leq \mu((T|_V)^{-n}(B(0, \epsilon))) \\ &= \mu(B(0, \epsilon)) \cdot |\det(T|_V)|^{-n} \\ &= \frac{\mu(B(0, \epsilon))}{|\det T|_V|^n} \end{aligned}$$

e assim

$$h_d(T) \geq h_d(T|_V) = k(\mu, T|_V) \geq \log |\det T|_V| = \sum_{|\lambda_j| > 1} \log |\lambda_j|$$

■

Temos a seguir, como resultado imediato das proposições acima, uma fórmula para o calculo da entropia topológica de transformações afins num grupo de Lie.

Corolário 3.2.9. *Seja G grupo de Lie, $A : G \rightarrow G$ um endomorfismo e $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ os autovalores do homomorfismo $dA_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Se d é uma métrica invariante à direita em*

G então

$$h_d(R_g \circ A) = h_d(A) = \sum_{|\lambda_j| > 1} \log |\lambda_j|$$

Demonstração: É consequência imediata do corolário 3.2.5 e da proposição 3.2.8. ■

3.3 Entropia em Espaços Homogêneos

Para começar o estudo da entropia em espaços homogêneos, vejamos a seguinte proposição que fornece uma relação entre a entropia de uma transformação num fibrado em termos da transformação induzida na base.

Proposição 3.3.1. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métrico compactos, $T : X \rightarrow X$, $S : Y \rightarrow Y$ e $\pi : X \rightarrow Y$ transformações contínuas com π sobrejetora e $\pi \circ T = S \circ \pi$. Então*

$$h_d(T) \leq h_{d'}(S) + \sup_{y \in Y} h_d(T, \pi^{-1}(y))$$

Demonstração: Suponha que $a = \sup_{y \in Y} h_d(T, \pi^{-1}(y)) < \infty$ (o caso $a = \infty$ é trivial) e seja $\epsilon > 0$. Fixado $\alpha > 0$, para cada $y \in Y$ escolha um número $m(y) \in \mathbb{N}$ tal que

$$a + \alpha \geq h_d(T, \pi^{-1}(y)) + \alpha \geq \frac{1}{m(y)} \log r_{m(y)}^T(\epsilon, \pi^{-1}(y)) \quad (3.2)$$

Esse número existe pois $\bar{r}_T(\epsilon, \pi^{-1}(y)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n^T(\epsilon, \pi^{-1}(y))$ cresce quando ϵ decresce e $h_d(T, \pi^{-1}(y)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{r}_T(\epsilon, \pi^{-1}(y))$.

Para cada $y \in Y$ seja $E_y \subset X$ um conjunto $(m(y), \epsilon)$ -gerador minimal de $\pi^{-1}(y)$, i.é., com $r_{m(y)}^T(\epsilon, \pi^{-1}(y))$ elementos. Então $U_y = \cup_{z \in E_y} B_{m(y)}^T(z, 2\epsilon)$ é uma vizinhança aberta de $\pi^{-1}(y)$ e contém $\cap_{\gamma > 0} \pi^{-1}(\overline{B(y, \gamma)})$. Assim, temos que $(X \setminus U_y) \cap (\cap_{\gamma > 0} \pi^{-1}(\overline{B(y, \gamma)})) = \emptyset$ e então, pela propriedade da intersecção finita em conjuntos compactos, existe $W_y = B(y, \gamma)$ tal que $\pi^{-1}(W_y) \subset U_y$.

Considere $W_{y_1}, \dots, W_{y_r}$ uma cobertura de Y e δ seu número de Lebesgue. Seja E_n um conjunto (n, δ) -gerador de Y com $r_n^S(\delta, Y)$ elementos. Para cada $x \in E_n$ e $0 \leq j \leq n$, escolha um $c_j(x) \in \{y_1, \dots, y_r\}$ tal que $B(S^j(x), \delta) \subset W_{c_j(x)}$.

Construa, para cada $x \in E_n$, a seguinte sequência por indução

$$\begin{aligned} t_0(x) &= 0 \\ t_{s+1}(x) &= t_s(x) + m(c_{t_s(x)}(x)) \end{aligned}$$

e pare quando $t_{q+1}(x) \geq n$. Escreva $q = q(x)$ para expressar que q depende x .

Para $x \in E_n$, $z_1 \in E_{c_{t_1(x)}(x)}, \dots, z_{q(x)} \in E_{c_{t_{q(x)}(x)}(x)}$, defina

$$\begin{aligned} V(x; z_1, \dots, z_{q(x)}) &= \{u \in X \mid d(T^{t+t_s(x)}(u), T^t(z_s)) < 2\epsilon, \\ &\text{para todo } 0 \leq t \leq m(c_{t_s(x)}(x)) \text{ e } 0 \leq s \leq q(x)\} \end{aligned}$$

• **Afirmção 1:** $\bigcup_{(x; z_1, \dots, z_{q(x)})} V(x; z_1, \dots, z_{q(x)}) = X$

De fato, dado $u \in X$, tome $x \in E_n$ que (n, δ) -acompanha $\pi(u)$. Fixado s , $0 \leq s \leq q(x)$, temos que $0 \leq t_s(x) \leq n-1$ e então $d'(S^{t_s(x)}(\pi(u)), S^{t_s(x)}(x)) < \delta$. Daí segue que

$$\pi(T^{t_s(x)}(u)) = S^{t_s(x)}(\pi(u)) \in B(S^{t_s(x)}(x), \delta) \subset W_{c_{t_s(x)}}(x)$$

e assim

$$T^{t_s(x)}(u) \in \pi^{-1}(W_{c_{t_s(x)}(x)}) \subset U_{c_{t_s(x)}(x)} = \bigcup_{z \in E_{c_{t_s(x)}(x)}} B_{m(c_{t_s(x)}(x))}^T(z, 2\epsilon)$$

Logo existe $z_s \in E_{c_{t_s(x)}(x)}$ tal que $d(T^j(T^{t_s(x)}(u)), T^j(z_s)) < 2\epsilon$ para $0 \leq t < m(c_{t_s(x)}(x))$, demonstrando a afirmação.

Agora se F é um conjunto $(n, 4\epsilon)$ -separado então $F \cap V(x; z_1, \dots, z_{q(x)})$ tem no máximo um elemento, pois para quaisquer dois pontos $u, v \in V(x; z_1, \dots, z_{q(x)})$ temos que

$$d(T^t(T^{t_s(x)}(u)), T^t(T^{t_s(x)}(v))) < 4\epsilon \quad \text{se } 0 \leq t < m(c_{t_s(x)}(x)) \text{ e } 1 \leq s \leq q(x)$$

e assim, $d(T^j(u), T^j(v)) < 4\epsilon$ para $j \in \{0, 1, \dots, n\} \subset \{t+t_s(x) \mid 0 \leq t < m(c_{t_s(x)}(x)) \text{ e } 1 \leq s \leq q(x)\}$.

Como $\#E_{c_{t_s(x)}(x)} = r_{m(c_{t_s(x)}(x))}(\epsilon, \pi^{-1}(c_{t_s(x)}(x)))$ temos que para cada $x \in E_n$, a quantidade máxima de $q(x)$ -uplas é

$$N_x = \prod_{s=0}^{q(x)} \#E_{c_{t_s(x)}(x)}$$

e então

$$\log N_x = \sum_{s=0}^{q(x)} \log \#E_{c_{t_s(x)}(x)} \leq (a + \alpha) \sum_{s=0}^{q(x)} m(c_{t_s(x)}(x)). \quad (3.3)$$

Agora observe que $t_{q(x)} = \sum_{s=0}^{q(x)-1} m(c_{t_s(x)}(x))$ e então, pondo $M = \max\{m(y_1), \dots, m(y_r)\}$ temos que

$$\sum_{s=0}^{q(x)} m(c_{t_s(x)}(x)) = t_{q(x)} + m(c_{t_{q(x)}(x)}(x)) \leq n + M. \quad (3.4)$$

Segue então das desigualdades 3.3 e 3.4 que $\log N_x \leq (a + \alpha)(n + M)$ e assim $N_x \leq e^{(a+\alpha)(n+M)}$. A partir dessa desigualdade e lembrando que para cada $x \in E_n$ os conjuntos $V(x; z_1, \dots, z_{q(x)})$ tem no máximo um elemento de qualquer conjunto $(n, 4\epsilon)$ -separado temos que

$$s_n^T(4\epsilon, X) \leq \#E_n \cdot e^{(a+\alpha)(n+M)}$$

Deste modo segue que

$$\frac{1}{n} \log s_n^T(4\epsilon, X) \leq \frac{1}{n} \log \#E_n + \frac{1}{n} (a + \alpha)(n + M)$$

e assim

$$\limsup \frac{1}{n} \log s_n^T(4\epsilon, X) \leq \bar{r}_S(\delta, Y) + a + \alpha \leq h_{d'}(S) + a + \alpha$$

Tomando $\epsilon \rightarrow 0$ na desigualdade acima e como α é arbitrário, temos então

$$h_d(T) \leq h_{d'}(S) + a$$

■

Observação 3.3.2. A hipótese da compacidade na proposição acima é necessária. Em [16], Ssembatya constrói um exemplo de uma transformação uniformemente contínua T com entropia positiva mas que $h_{d'}(S) = \sup_{y \in Y} h_d(T, \pi^{-1}(y)) = 0$.

Considere agora (X, d_X) , (Y, d_Y) e (G, d_G) espaços métricos compactos, $\pi : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e sobrejetora e $p : X \times G \rightarrow X$ uma aplicação contínua, denotada por $p(x, g) = xg$ e com as seguintes propriedades:

- (i) $\pi^{-1}(\pi(x)) = xG = p(x, G)$
- (ii) $xg = xg' \Rightarrow g = g'$

Sejam ainda $T : X \rightarrow X$, $S : Y \rightarrow Y$ e $\tau : G \rightarrow G$ aplicações contínuas e suponha que T é uma (G, τ) -extensão de S , isto é, $S \circ \pi = \pi \circ T$ e $T(xg) = T(x)\tau(g)$ para todos $x \in X$ e $g \in G$. Com essas hipóteses temos a seguinte proposição

Proposição 3.3.3. $h_{d_X}(T) = h_{d_Y}(S) + h_{d_G}(\tau)$

Demonstração: Mostraremos primeiro que $h_{d_X}(T, \pi^{-1}(y)) \leq h_{d_G}(\tau)$ para todo $y \in Y$. Para isso, fixe $y \in Y$, $z \in \pi^{-1}(y)$ e $\epsilon > 0$. Pela continuidade uniforme de p , escolha $\delta > 0$ tal que $d_X(xg, xg') < \epsilon$ se $d_G(g, g') < \delta$.

Se E_n é um conjunto (n, δ) -gerador de G com respeito a τ , então zE_n é um (n, ϵ) -gerador de $\pi^{-1}(y) = \pi^{-1}(\pi(z)) = zG$ com respeito a T . De fato, se $d(\tau^k(g), \tau^k(g')) < \delta$ então $d_X(T^k(zg), T^k(zg')) = d(T^k(z)\tau^k(g), T^k(z)\tau^k(g')) < \epsilon$. Logo $r_n^T(\epsilon, \pi^{-1}(y)) \leq r_n^\tau(\delta, G)$ e assim $h_{d_X}(T, \pi^{-1}(y)) \leq h_{d_G}(\tau)$. Pela proposição anterior 3.3.1, segue que $h_{d_X}(T) \leq h_{d_Y}(S) + h_{d_G}(\tau)$.

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, existe δ tal que:

- (a) $d_X(x, z) \leq \delta \Rightarrow d_Y(\pi(x), \pi(z)) \leq \epsilon$ e
- (b) $d_G(g, g') > \epsilon \Rightarrow d_X(xg, xg') > \delta$ para qualquer $x \in X$

A afirmação (a) segue da continuidade uniforme de π . Agora para ver que vale (b), supondo o contrário temos que existem sequências $x_n \in X$ e $g_n, g'_n \in G$ tais que $d_G(g_n, g'_n) > \epsilon$ mas $d_X(x_n g_n, x_n g'_n) \rightarrow 0$. Passando a subsequências se necessário, podemos supor que $x_n \rightarrow x$, $g_n \rightarrow g$ e $g'_n \rightarrow g'$. Com isso teremos que $d_X(xg, xg') = 0$ ($xg = xg'$) mas $d_G(g, g') \geq \epsilon$ ($g \neq g'$), contradizendo a hipótese (ii) feita acima. Logo, também existe δ de forma que (b) é válida.

Tome agora G_n um conjunto (n, ϵ) -separado em G com respeito a τ e Y_n um conjunto (n, ϵ) -separado em Y com respeito a S . Escolha $X_n \subset X$ tal que π fornece uma bijeção entre X_n e Y_n . Temos então que

• **Afirmção :** $X_n G_n$ é um conjunto (n, δ) -separado em X com respeito a T

De fato, sejam $xg \neq x'g'$ dois elementos de $X_n G_n$. Supondo primeiro que $x \neq x'$, pela escolha de X_n temos que $\pi(x) \neq \pi(x')$. Logo existe $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que

$$\begin{aligned} d_S(\pi(T^k(xg)), \pi(T^k(x'g'))) &= d_S(S^k(\pi(xg)), S^k(\pi(x'g'))) \\ &= d_S(S^k(\pi(x)), S^k(\pi(x'))) \\ &> \epsilon \end{aligned}$$

e por (b) acima, temos que $d_X(T^k(xg), T^k(x'g')) > \delta$. Agora se $x = x'$ então $g \neq g'$. Então existe $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $d_G(\tau^k(g), \tau^k(g')) > \epsilon$ e assim, por (a) acima, segue que $d_X(T^k(xg), T^k(x'g')) = d_X(T^k(x)\tau^k(g), T^k(x)\tau^k(g')) > \delta$. Como isso concluímos que $X_n G_n$ é (n, δ) -separado em X com respeito a T .

Deste modo segue que $s_n^T(\delta, X) \geq s_n^S(\epsilon, Y) \cdot s_n^\tau(\epsilon, G)$ e, tomando logaritmos e limites inferiores temos

$$\liminf \frac{1}{n} \log s_n^T(\delta, X) \geq \liminf \frac{1}{n} \log s_n^S(\epsilon, Y) + \liminf \frac{1}{n} \log s_n^\tau(\epsilon, G)$$

Como X , Y e G são compactos, tomando $\epsilon \rightarrow 0$ e utilizando o corolário 2.2.9 segue que $h_{d_X}(T) \geq h_{d_Y}(S) + h_{D_G}(\tau)$. ■

Agora suponha que G é um grupo localmente compacto e metrizável. Seja d uma métrica invariante à direita e μ a medida de Haar invariante à direita. Considere Γ um reticulado uniforme em G , isto é, Γ é um subgrupo discreto de G de forma que o espaço homogêneo G/Γ é compacto.

Seja $A : G \rightarrow G$ um endomorfismo e $T : G \rightarrow G$ a transformação afim dada por $T(x) = g \cdot A(x)$. Se A preserva Γ , isto é, se $A(\Gamma) \subset \Gamma$, então fica bem definida uma transformação no quociente a partir da transformação afim T . Basta definir $S : G/\Gamma \rightarrow G/\Gamma$ pondo $S(x\Gamma) = T(x)\Gamma = g \cdot A(x)\Gamma$. Se $\pi : G \rightarrow G/\Gamma$ denota a projeção canônica, então pela definição de S temos que $S \circ \pi = \pi \circ T$.

Como Γ é um subgrupo discreto de G , podemos definir uma medida μ^* e uma métrica d^* em G/Γ a partir da medida μ e da métrica d de G . A medida em G/Γ fica definida por $\mu^*(\pi(E)) = \mu(E)$ se $\pi|_E$ é injetora, e a métrica é dada por $d^*(x\Gamma, y\Gamma) = \inf_{h \in \Gamma} d(x, yh)$.

Teorema 3.3.4. *A medida μ^* é S -homogênea com relação à métrica d^* e $k(\mu^*, S) = k(\mu, T)$.*

Demonstração: Como Γ é discreto, existe uma vizinhança N da identidade (que denotaremos por e) tal que $N \cap \Gamma = \{e\}$. Assim, para cada $x \in G$, existe $\delta > 0$ tal que $x^{-1}B(x, 4\delta) \cap \Gamma = \{e\}$.

• **Afirmção 1:** : Se $y, z \in B(x, \delta) = B(e, \delta) \cdot x$ então $d^*(y\Gamma, z\Gamma) = d(y, z)$, ou seja, a projeção π restrita à bola $B(x, \delta)$ é uma isometria.

Por um lado é óbvio que $d^*(y\Gamma, z\Gamma) \leq d(y, z)$. Agora suponha que exista $h \in \Gamma$, com $h \neq e$ tal que $d(y, zh) \leq d(y, z)$. Então temos

$$\begin{aligned} d(x, xh) &\leq d(x, y) + d(y, zh) + d(zh, xh) \\ &< \delta + 2\delta + \delta = 4\delta \end{aligned}$$

e assim $xh \in B(x, 4\delta)$, ou seja, $h \in x^{-1}B(x, 4\delta)$, contrariando a escolha de δ . Com isso demonstra-se a afirmação.

Agora se $y\Gamma \in B(x\Gamma, \delta)$ então existe $h \in \Gamma$ tal que $d(x, yh) < \delta$ e assim $y\Gamma = yh\Gamma = \pi(yh) \in \pi(B(x, \delta))$. Ou seja, $\pi|_{B(x, \delta)}$ é uma isometria sobrejetora de $B(x, \delta)$ em $B(x\Gamma, \delta)$. Observe ainda que para qualquer $h \in \Gamma$, $\pi|_{B(xh, \delta)}$ também é uma isometria sobrejetora de $B(xh, \delta)$ em $B(x\Gamma, \delta)$. Assim, para todo $x\Gamma \in G/\Gamma$, existe um $\delta = \delta(x\Gamma)$ tal que π é uma isometria sobrejetora de $B(xh, \delta)$ em $B(x\Gamma, \delta)$.

Considere então $\{B(x_1\Gamma, \delta(x_1\Gamma)), \dots, B(x_r\Gamma, \delta(x_r\Gamma))\}$ uma cobertura de G/Γ e seja ϵ um número de Lebesgue dessa cobertura. Então para qualquer $y \in G$, $\pi|_{B(y, \epsilon)} : B(y, \epsilon) \rightarrow B(y\Gamma, \epsilon)$ é uma isometria sobrejetora

Tome agora $\alpha > 0$ tal que $\alpha < \epsilon$ e $T(B(y, \alpha)) \subset B(T(y), \epsilon)$ para todo $y \in G$.

• **Afirmção 2:** $\pi(B_n^T(y, \alpha)) = B_n^S(y\Gamma, \alpha)$

Por indução em n , temos que para $n = 0$ segue das afirmações acima. Suponha válido o resultado para $n - 1$.

Se $z \in B_n^T(y, \alpha)$ então $d(T^k(z), T^k(y)) < \alpha < \epsilon$ para $0 \leq k \leq n$, e logo $d^*(S^k(z\Gamma), S^k(y\Gamma)) = d^*(T^k(z)\Gamma, T^k(y)\Gamma) < \alpha$, ou seja, $z\Gamma \in B_n^S(y\Gamma, \alpha)$. Assim $\pi(B_n^T(y, \alpha)) \subset B_n^S(y\Gamma, \alpha)$.

Por outro lado, seja $z\Gamma \in B_n^S(y\Gamma, \alpha) \subset B_{n-1}^S(y\Gamma, \alpha) = \pi(B_{n-1}^T(y, \alpha))$, onde a igualdade vale pela hipótese de indução. Tome $h \in \Gamma$ tal que $zh \in B_{n-1}^T(y, \alpha)$. Então zh está em $B_{n-1}^T(y, \alpha)$. De fato, supondo o contrário, temos que $d(T^{n-2}(zh), T^{n-2}(y)) < \alpha$ e $d(T^{n-1}(zh), T^{n-1}(y)) \geq \alpha$. Mas $T^{n-1}(zh) = T(T^{n-2}(zh)) \in B(T^{n-1}(y), \epsilon)$ (pela escolha de α) e π é isometria em $B(T^{n-1}(y), \epsilon)$. Logo $d^*(S^{n-1}(z\Gamma), S^{n-1}(y\Gamma)) = d(T^{n-1}(zh), T^{n-1}(y)) \geq \alpha$, contradizendo o fato $z\Gamma \in B_n^S(y\Gamma, \alpha)$. Logo $zh \in B_{n-1}^T(y, \alpha)$ e assim $B_n^S(y\Gamma, \alpha) \subset \pi(B_n^T(y, \alpha))$.

Segue então dessa afirmação que $\mu^*(B_n^S(y\Gamma, \alpha)) = \mu(B_n^T(y, \alpha))$. Como μ é T -homogênea, segue imediatamente dessa última igualdade que μ^* é S -homogênea e que $k(\mu^*, S) = k(\mu, T)$. ■

3.4 Exemplos

Essa seção é destinada a dois exemplos que representam os teoremas acima. O primeiro deles fornece a bem conhecida fórmula para o cálculo da entropia de endomorfismos no Toro, e o segundo fornece exemplo para o Teorema 3.3.4.

Exemplo 3.4.1. *Toda matriz $A \in \text{SL}(n, \mathbb{Z})$ induz um automorfismo no toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$. Esses são os chamados automorfismos lineares no toro. Pela Proposição 3.2.9, a entropia desse automorfismo é dada por $h(A) = \sum_{|\lambda_i| > 1} \log |\lambda_i|$, onde os λ_i são os autovalores de A .*

Essa entropia pode ser calculada sem o auxílio do Corolário 3.2.9. Na realidade, o corolário estende para endomorfismos em qualquer grupo de Lie essa fórmula bem conhecida para endomorfismos do Toro.

O exemplo a seguir ilustra o teorema 3.3.4

Exemplo 3.4.2. *Seja V um espaço vetorial (real e de dimensão finita) e ω uma forma simplética em V (i.e., ω é uma forma bilinear, não-degenerada e antisimétrica). O grupo simplético $\text{Sp}(\omega)$ é definido como o grupo das transformações lineares $T : V \rightarrow V$ que preservam ω , isto é, $\omega(T(x), T(y)) = \omega(x, y)$ para quaisquer $x, y \in V$.*

*O grupo de Heisenberg generalizado é definido por $H = V \times \mathbb{R}$ e o produto é dado por $(x, s) * (y, t) = (x + y, t + s + \omega(x, y))$.*

Assim podemos definir uma ação canônica do grupo Simplético no grupo de Heisenberg pondo

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Sp}(\omega) \times H &\longrightarrow H \\ (T, (x, s)) &\longmapsto (T(x), s) \end{aligned}$$

Como ω é uma forma bilinear, antisimétrica e não degenerada, existe uma base de V tal que a matriz de ω com relação a essa base é $J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -\text{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$. Em particular temos que a dimensão de V é par.

Fixada essa base e identificando H com $\mathbb{R}^{2n+1}$, podemos considerar o subconjunto $H_{\mathbb{Z}}$ de H formado pelos elementos que tem todas suas coordenadas inteiras. $H_{\mathbb{Z}}$ é, de fato, um subgrupo discreto de H , e seu quociente é difeomorfo ao toro $\mathbb{T}^{2n+1} = \mathbb{R}^{2n+1} / \mathbb{Z}^{2n+1}$, logo $H/H_{\mathbb{Z}}$ é compacto. Assim, se $T \in \text{Sp}(\omega)$ é tal que $T(H_{\mathbb{Z}}) \subset H_{\mathbb{Z}}$, teremos pelo teorema

3.3.4 que a entropia de T e da transformação induzida por ele no quociente $H/H_{\mathbb{Z}}$ são iguais.

Para que T deixe $H_{\mathbb{Z}}$ invariante, basta que sua matriz na base escolhida anteriormente tenha apenas entradas inteiras. E para que T preserve a forma simplética ω é necessário e suficiente que $TJT^t = J$. Pondo $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, essa relação implica que $AB^t = (AB^t)^t$, $AD^t - BC^t = \text{Id}_n$, $CB^t - DA^t = -\text{Id}_n$ e $CD^t = (CD^t)^t$.

Para dar um exemplo de tal transformação ponha $B = 0$. As relações acima implicam que $D = (A^{-1})^t$. Como $CD^t = (CD^t)^t$, podemos tomar, por exemplo, $C = -D$. Como A e A^{-1} devem ter coordenadas inteiras, basta tomar $A \in \text{SL}(n, \mathbb{Z})$.

Tome então $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Assim $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (A^{-1})^t$. A matriz da transformação T será dada por

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular a entropia da transformação $T : H \rightarrow H$ dada por $T(x, s) = (T(x), s)$ e da sua induzida no quociente $H/H_{\mathbb{Z}}$, basta calcular os autovalores da matriz acima. Eles são dados por $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, cada um com multiplicidade 2. O autovalor de módulo maior do que 1 é $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Logo a entropia dessa transformação no grupo de Heisenberg é dada por

$$h(T) = 2 \cdot \log \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

CAPÍTULO 4

Entropia em Flags

Neste capítulo iremos calcular a entropia de translações em variedades Flag. Como notado no final do Capítulo 2, podemos calcular a entropia de transformações restringindo-as ao fecho do conjunto dos pontos recorrentes. Considerando a inclusão das variedades Flag nos espaços Projetivos, reduzimos o cálculo da entropia de translações em variedades Flag ao cálculo da entropia de transformações no espaço Projetivo induzidas pela ação do grupo linear $GL(n, \mathbb{R})$. Para o cálculo desse último necessitamos de uma caracterização dos pontos recorrentes em espaços projetivos através da decomposição multiplicativa de Jordan de operadores lineares.

4.1 Recorrência em Espaços Projetivos

Nesta seção iremos dar uma caracterização para os pontos recorrentes de transformações nos espaços projetivos reais induzidas a partir de operadores lineares. Essa caracterização é a chave fundamental para mostrar que tais sistemas dinâmicos têm entropia nula.

Consideramos o espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$ como o conjunto de todos os subpaços de dimensão 1 de $\mathbb{R}^{n+1}$. Podemos identificá-lo com $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim$, onde $x \sim y$ se existe $\lambda \neq 0$ tal que $x = \lambda y$. Denotamos por $[x]$ o conjunto das classes de equivalência do ponto x .

Um operador linear inversível $\mathbf{g} \in GL(n+1, \mathbb{R})$ induz uma transformação no espaço projetivo $\tilde{\mathbf{g}} : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ pondo $\tilde{\mathbf{g}}([v]) = [\mathbf{g}(v)]$. Um ponto $[v] \in \mathbb{RP}^n$ é ponto fixo de $\tilde{\mathbf{g}}$

se, e só se, v é autovetor de $\mathbf{g}$. Considerando a decomposição multiplicativa de Jordan do operador $\mathbf{g} = \mathbf{h}\mathbf{e}\mathbf{u}$, com $\mathbf{h}$ hiperbólico, $\mathbf{e}$ elíptico e $\mathbf{u}$ unipotente (ver apêndice A), cada fator induz uma transformação em $\mathbb{RP}^n$. Posto isso, o resultado principal desta seção mostra que os pontos recorrentes para esse tipo de transformação no espaço projetivo são exatamente os pontos fixos das partes hiperbólica e unipotente.

A seguir daremos dois lemas que irão facilitar as contas posteriores com as matrizes.

Lema 4.1.1. *Considere $\mathbb{R}^{n+1} = V \oplus W$ e $x_n = v_n + w_n$ uma sequência com $v_n \in V$ e $w_n \in W$. Suponha que $|v_n| \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_n|}{|v_n|} = 0$. Passando ao projetivo, se a sequência $[x_n] \in \mathbb{RP}^n$ converge para $[x] \in \mathbb{RP}^n$ então $x \in V$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que $|v_n| = 1$ e $\lim w_n = 0$, pois $[x_n] = \left[\frac{v_n}{|v_n|} + \frac{w_n}{|v_n|} \right]$ e $\frac{w_n}{|v_n|}$ converge para zero. Agora como $|v_n| = 1$, essa sequência possui uma subsequência v_{n_k} convergente. Se $v = \lim v_{n_k}$, então $v \in V$, pois subspaços vetoriais são fechados. Assim $[x] = \lim_{n_k \rightarrow \infty} [x_{n_k}] = \lim_{n_k \rightarrow \infty} [v_{n_k} + w_{n_k}] = [v]$. Logo $x \in V$. ■

Lema 4.1.2. *Seja $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear inversível.*

- (a) *Se $\|\mathbf{g}^n\|$ converge para zero, então para todo $v \in V$, $\mathbf{g}^n v$ converge para zero.*
- (b) *Se $\mathbf{g}$ não possui a parte hiperbólica da decomposição multiplicativa de Jordan (i.e., $\mathbf{g}$ tem apenas autovalor de módulo 1), então para cada $x \neq 0$ em V , existe $\epsilon > 0$ tal que $|\mathbf{g}^n x| > \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: (a) É consequência imediata da desigualdade $|\mathbf{g}^n v| \leq \|\mathbf{g}^n\| |v|$.

(b) Como $\mathbf{g}$ não tem parte hiperbólica, existe uma base de V onde a matriz de $\mathbf{g}$ nessa base é o produto de uma matriz elíptica por uma triangular superior com 1 na diagonal.

Se $\mathbf{u}$ é triangular superior com 1 na diagonal e $x \neq 0$, então $\mathbf{u}$ fixa a última coordenada não nula de x , isto é, se $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ com $x_k \neq 0$, então a k -ésima coordenada de $\mathbf{u}x$ é x_k . Logo $|\mathbf{u}x| \geq |x_k|$ e, do mesmo modo, $|\mathbf{u}^n x| \geq |x_k|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora pondo $\mathbf{g} = \mathbf{e}\mathbf{u}$, onde $\mathbf{e}$ é a parte elíptica da decomposição multiplicativa de Jordan, temos que $\mathbf{g}^n = \mathbf{e}^n \mathbf{u}^n$. Mas como $\mathbf{e}$ é uma isometria (pois é ortogonal), temos que $|\mathbf{g}^n x| = |\mathbf{e}^n \mathbf{u}^n x| = |\mathbf{u}^n x| \geq |x_k|$. ■

Ao colocar um operador $\mathbf{g}$ na sua forma de Jordan, obtemos uma decomposição de $\mathbb{R}^n$ na soma $J_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus J_{\alpha_k}$ onde cada J_{α_i} é um subespaço invariante por $\mathbf{g}$ e tal que todos os autovalores do operador $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}|_{J_{\alpha_i}}$ tem módulo α_i . Além disso podemos supor que $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k$.

Teorema 4.1.3. *Seja $\mathbf{g} \in \text{GL}(n+1, \mathbb{R})$ e $\mathbf{g} = \mathbf{h}\mathbf{e}\mathbf{u}$ sua decomposição multiplicativa de Jordan. Se $[x]$ é ω -limite para $\tilde{\mathbf{g}}$ de algum ponto em $\mathbb{RP}^n$ então $[x]$ é ponto fixo de $\tilde{\mathbf{h}}$.*

Demonstração: Seja $[v] \in \mathbb{RP}^n$ tal que $[x] \in \omega([v])$, isto é, existe uma subsequência $n_j \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{n_j \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{g}}^{n_j}[v] = [x]$. Escreva $v = v_1 + \dots + v_k$, com $v_i \in J_{\alpha_i}$ e seja l o primeiro índice tal que $v_l \neq 0$.

Olhando para a ação de $\frac{\mathbf{g}}{\alpha_l}$ em cada v_i , com $l \leq i \leq k$ temos que $\frac{\mathbf{g}^{n_j}}{\alpha_l^{n_j}} v_i$ converge para zero se $l < i \leq k$ ou é maior que um $\epsilon > 0$ se $i = l$. De fato, se $l < i \leq k$, os autovalores de $\frac{\mathbf{g}_i}{\alpha_l}$ tem módulo $\frac{\alpha_i}{\alpha_l} < 1$, e então $\lim_{n_j \rightarrow \infty} \left\| \frac{\mathbf{g}_i^{n_j}}{\alpha_l^{n_j}} \right\| = 0$. Pela parte (a) do lema 4.1.2, $\lim_{n_j \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{g}^{n_j}}{\alpha_l^{n_j}} v_i = 0$. Se $i = l$ então os autovalores de $\frac{\mathbf{g}_l}{\alpha_l}$ tem módulo 1, e pela parte (b) do lema 4.1.2, segue que $\frac{\mathbf{g}^{n_j}}{\alpha_l^{n_j}} v_l > \epsilon$ para todo n_j .

Temos então que

$$\begin{aligned} [x] &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{g}}^{n_j}[v] \\ &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} \left[\frac{\mathbf{g}^{n_j}}{\alpha_l^{n_j}} v_l + \dots + \frac{\mathbf{g}^{n_j}}{\alpha_l^{n_j}} v_k \right] \\ &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} \left[\frac{\mathbf{g}^{n_j}}{\alpha_l^{n_j}} v_l \right] \end{aligned}$$

e pelo lema 4.1.1, $x \in J_{\alpha_l}$, ou seja, x é autovetor de $\mathbf{h}$ com autovalor α_l . Logo $[x]$ é ponto fixo de $\tilde{\mathbf{h}}$. ■

Proposição 4.1.4. *Se $[x] \in \mathbb{RP}^n$ é ponto recorrente para $\tilde{\mathbf{g}}$ então $[x]$ é ponto fixo de $\tilde{\mathbf{u}}$, onde $\mathbf{u}$ é a parte unipotente de $\mathbf{g}$.*

Demonstração: Considere $n_j \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{n_j \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{g}}^{n_j}[x] = [x]$. Pela proposição anterior, sabemos que $[x]$ é ponto fixo de $\tilde{\mathbf{h}}$, a parte hiperbólica de $\tilde{\mathbf{g}}$. Sendo assim, somente $\tilde{\mathbf{e}}\mathbf{u}$ age em $[x]$.

Considere o operador nilpotente $T = \mathbf{u} - \text{Id}$ e seja $r > 0$ tal que $v = T^r(x) \neq 0$ e $T^{r+1}(x) = 0$. Então v é ponto fixo de $\mathbf{u}$ pois $\mathbf{u}(v) = (T + \text{Id})(T^r(x)) = T^r(x) = v$.

Para $n_j > r$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}^{n_j}[x] &= [\mathbf{e}^{n_j} \mathbf{u}^{n_j} x] \\ &= [\mathbf{e}^{n_j} (T + \text{Id})^{n_j} x] \\ &= \left[\mathbf{e}^{n_j} \left(\sum_{k=0}^r C_k^{n_j} T^k x \right) \right] \\ &= \left[\sum_{k=0}^r C_k^{n_j} T^k (\mathbf{e}^{n_j} x) \right] \\ &= \left[\frac{1}{C_r^{n_j}} \sum_{k=0}^r C_k^{n_j} T^k (\mathbf{e}^{n_j} x) \right] \end{aligned}$$

Agora como $\lim_{n_j \rightarrow \infty} \frac{C_k^{n_j}}{C_r^{n_j}} = 0$ quando $k < r$ segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n_j \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{g}}^{n_j}[x] &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{C_r^{n_j}} \sum_{k=0}^r C_k^{n_j} T^k (\mathbf{e}^{n_j} x) \right] \\ &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} [T^r (\mathbf{e}^{n_j} x)] \\ &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} [\mathbf{e}^{n_j} v] \end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}[x] &= \tilde{\mathbf{u}} \left(\lim_{n_j \rightarrow \infty} [\mathbf{e}^{n_j} v] \right) \\ &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{u}} [\mathbf{e}^{n_j} v] \\ &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} [\mathbf{e}^{n_j} \mathbf{u}(v)] \\ &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} [\mathbf{e}^{n_j} v] \\ &= [x] \end{aligned}$$

■

Com isso concluímos que se $[x] \in \mathbb{RP}^n$ é recorrente para a transformação $\tilde{\mathbf{g}}$ então ele é ponto fixo tanto de $\tilde{\mathbf{h}}$ quanto de $\tilde{\mathbf{u}}$. A recíproca deste resultado também é verdadeira

como mostra a proposição abaixo.

Proposição 4.1.5. *Se $g \in GL(n, \mathbb{R})$ é uma transformação elíptica, então todo ponto é recorrente.*

Demonstração: Isso é uma consequência imediata do exemplo 1.2.7 ■

Proposição 4.1.6. *Se $[x] \in \mathbb{RP}^n$ é ponto fixo de $\tilde{\mathbf{h}}$ e $\tilde{\mathbf{u}}$ então $[x]$ é um ponto recorrente para a transformação $\tilde{\mathbf{g}}$.*

Demonstração: Como $[x]$ é ponto fixo de $\tilde{\mathbf{h}}$ e $\tilde{\mathbf{u}}$ então apenas $\tilde{\mathbf{e}}$ age nele. Como $\mathbf{e}$ é elíptica, pela proposição acima segue que x é recorrente para $\mathbf{e}$. Assim $[x] \in \mathbb{RP}^n$ é recorrente para $\tilde{\mathbf{e}}$ e também para $\tilde{\mathbf{g}}$. ■

4.2 Entropia em Espaços Projetivos e em Variedades Flag

Proposição 4.2.1. *A entropia de qualquer transformação no projetivo $\mathbb{RP}^n$ induzida por uma transformação linear $\mathbf{g} \in GL(n+1, \mathbb{R})$ é zero.*

Demonstração: Pela observação no final do capítulo 2, basta calcularmos a entropia da transformação restrita ao fecho do conjunto dos pontos recorrentes. Decompondo a transformação $\mathbf{g}$ em $\mathbf{g} = \mathbf{h}\mathbf{e}\mathbf{u}$, onde $\mathbf{h}$ é hiperbólica, $\mathbf{e}$ é elíptica e $\mathbf{u}$ é unipotente, temos que os pontos recorrentes da transformação induzida $\tilde{\mathbf{g}} : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ são os pontos fixos de $\tilde{\mathbf{h}}$ e de $\tilde{\mathbf{u}}$, e assim, é um conjunto fechado. Restringindo então a transformação $\tilde{\mathbf{g}}$ ao conjunto dos pontos recorrentes, temos que a transformação $\tilde{\mathbf{g}}$ coincide com a transformação $\tilde{\mathbf{e}}$. Mas a transformação $\mathbf{e}$ é uma isometria, e assim tem entropia igual a 0, o que também acontecerá com $\tilde{\mathbf{e}}$, pois é um fator da primeira com a semiconjugação dada pela projeção canônica $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ (ver 2.2.10). ■

Do mesmo modo feito para os projetivos $\mathbb{RP}^n$, uma transformação $\mathbf{g} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ induz uma transformação na Grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(n)$ pondo

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{g}} : \mathrm{Gr}_k(n) &\longrightarrow \mathrm{Gr}_k(n) \\ V &\longmapsto \mathbf{g}(V) \end{aligned}$$

Como no projetivo, essa transformação também tem entropia zero, e o ponto fundamental para demonstrar isso é considerar o mergulho de Plücker da Grassmanniana num espaço projetivo.

Considere então o produto exterior $\Lambda^k \mathbb{R}^n$. O mergulho de Plücker é uma aplicação

$$i : \mathrm{Gr}_k(n) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{R}^n)$$

construída da seguinte maneira: Para cada $V \in \mathrm{Gr}_k(n)$, escolhe-se $\{v_1, \dots, v_k\}$ uma base de V e põe-se então $i(V) = [v_1 \wedge \dots \wedge v_k]$. Para ver que essa aplicação está bem definida, se $\{u_1, \dots, u_k\}$ é outra base de V , então existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = t \cdot u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ e logo $[v_1 \wedge \dots \wedge v_k] = [u_1 \wedge \dots \wedge u_k]$.

Cada $\mathbf{g} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ também induz uma transformação $\mathbf{g}' : \Lambda^k \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^k \mathbb{R}^n$ pondo $\mathbf{g}'(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \mathbf{g}(v_1) \wedge \dots \wedge \mathbf{g}(v_k)$ e extendendo por linearidade. Essa por sua vez induz uma transformação no projetivo $\mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{R}^n)$ pondo

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}} : \mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{R}^n) \\ [\omega] &\longmapsto [\mathbf{g}'(\omega)] \end{aligned}$$

Temos assim o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}_k(n) & \xrightarrow{\widehat{\mathbf{g}}} & \mathrm{Gr}_k(n) \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ \mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{g}}} & \mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{R}^n) \end{array}$$

que é comutativo. De fato, se $V \in \mathrm{Gr}_k(n)$ tem base $\{v_1, \dots, v_k\}$, então $\widehat{\mathbf{g}}(V)$ tem base $\{\mathbf{g}(v_1), \dots, \mathbf{g}(v_k)\}$ e logo $i(\widehat{\mathbf{g}}(V)) = [\mathbf{g}(v_1) \wedge \dots \wedge \mathbf{g}(v_k)]$. Por outro lado

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}} \circ i(V) &= \tilde{\mathbf{g}}([v_1 \wedge \dots \wedge v_k]) \\ &= [\mathbf{g}'(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)] \\ &= [\mathbf{g}(v_1) \wedge \dots \wedge \mathbf{g}(v_k)] \\ &= i \circ \widehat{\mathbf{g}}(V) \end{aligned}$$

Como a aplicação i é um mergulho de $\text{Gr}_k(n)$ em $\mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{R}^n)$ e $\tilde{\mathbf{g}} \circ i = i \circ \hat{\mathbf{g}}$ temos, pelo Corolário 2.2.12, que entropia de $\hat{\mathbf{g}}$ é igual a entropia de $\tilde{\mathbf{g}}$ restrita à imagem de $\text{Gr}_k(n)$ pelo mergulho de Plucker i . Como $\tilde{\mathbf{g}}$ tem entropia zero, o mesmo ocorre com a sua restrição a qualquer subconjunto compacto e então temos

Proposição 4.2.2. *A entropia da transformação $\hat{\mathbf{g}}$ é zero.*

Os Espaços Projetivos e Grassmannianas são casos particulares das variedades Flag. Esperamos então que se considerarmos ações lineares em variedades Flag, a entropia dessas transformações continuará sendo zero. Isso de fato acontece como veremos a seguir.

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semisimples. Considere $\mathfrak{p}$ uma subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ e P o subgrupo parabólico definido como o normalizador $N_G(\mathfrak{p})$ de $\mathfrak{p}$ em G . A variedade Flag é o quociente G/P .

Considere a ação canônica de G em G/P

$$\begin{aligned} G \times G/P &\longrightarrow G/P \\ (g, hP) &\longmapsto ghP \end{aligned}$$

Seja $k = \dim(\mathfrak{p})$. A ação adjunta de G em $\mathfrak{g}$ induz uma ação de G em $\text{Gr}_k(\mathfrak{g})$ pondo

$$\begin{aligned} G \times \text{Gr}_k(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \text{Gr}_k(\mathfrak{g}) \\ (g, V) &\longmapsto \text{Ad}(g) \cdot V \end{aligned}$$

Como P é o normalizador $N_G(\mathfrak{p})$ de $\mathfrak{p}$ em G , fica bem definido a aplicação injetiva

$$\begin{aligned} i : G/P &\longrightarrow \text{Gr}_k(\mathfrak{g}) \\ gP &\longmapsto \text{Ad}(g) \cdot \mathfrak{p} \end{aligned}$$

De fato, para ver que i está bem definida e é injetiva, observe que $gP = hP \Leftrightarrow gh^{-1} \in P = N_G(\mathfrak{p}) \Leftrightarrow \text{Ad}(gh^{-1})\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \Leftrightarrow \text{Ad}(g)\mathfrak{p} = \text{Ad}(h)\mathfrak{p}$. Com isso podemos considerar a variedade Flag G/P como a órbita de $\mathfrak{p}$ pela ação de G em $\text{Gr}_k(\mathfrak{g})$.

Considerando as ações de G em G/P e em $\text{Gr}_k(\mathfrak{g})$, temos que a inclusão i é G -equivariante. De fato

$$i \circ g(hP) = \text{Ad}(gh)\mathfrak{p} = \text{Ad}(g)\text{Ad}(h)\mathfrak{p} = \text{Ad}(g)i(hP) = g \circ i(hP)$$

Assim, novamente por 2.2.12, concluímos que a entropia da transformação

$$\begin{aligned} g : G/P &\longrightarrow G/P \\ hP &\longmapsto ghP \end{aligned}$$

é no máximo a entropia da transformação

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(g) : \mathrm{Gr}_k(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathfrak{g}) \\ V &\longmapsto \mathrm{Ad}(g) \cdot V \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.2.2, a entropia dessa última transformação é zero, e assim temos

Teorema 4.2.3. *A entropia das translações nas variedades Flag é igual a zero.*

APÊNDICE A

Decomposição Multiplicativa de Jordan

Começamos lembrando que um operador num espaço vetorial real é dito *semisimples* se é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$. Um operador semisimples $\mathbf{g} \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ é *hiperbólico* se todos seus autovalores são reais e positivos, e é *elíptico* se todos seus autovalores (possivelmente complexos) tem módulo igual a 1. Um operador $\mathbf{u} \in \text{gl}(n, \mathbb{R})$ é *unipotente* se $\mathbf{u} - \text{Id}$ é nilpotente.

O objetivo desta seção é mostrar que todo operador $\mathbf{g} \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ pode ser decomposto como $\mathbf{g} = \mathbf{h}\mathbf{e}\mathbf{u}$, onde $\mathbf{h} \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ é hiperbólico, $\mathbf{e} \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ elíptico e $\mathbf{u} \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ unipotente. Tal decomposição é a *Decomposição Multiplicativa de Jordan*.

Como operadores hiperbólicos, elípticos e unipotentes são invariantes por conjugação (mudança de base), encontrando uma decomposição multiplicativa de Jordan para matrizes na sua forma de Jordan real, teremos também a tal decomposição para operadores arbitrários mediante a escolha de uma base de Jordan.

Seja então $\mathbf{g} \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Achando uma base de Jordan para o operador $\mathbf{g}$, conseguimos uma decomposição de $\mathbb{R}^n$ em subspaços invariantes J_i , tal que a matriz do operador $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}|_{J_i}$ com relação a essa base escolhida é um bloco de Jordan real ou complexo.

Se o autovalor de $\mathbf{g}_i$ é um número real λ_i , então a matriz de $\mathbf{g}_i$ com relação à base de

Jordan é da forma:

$$J_{\mathbb{R}}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

e cada bloco de Jordan $J_{\mathbb{R}}(\lambda_i)$ pode ser decomposto como

$$J_{\mathbb{R}}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_i^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i^{-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Essa decomposição mostra como obter a Decomposição Multiplicativa de Jordan para os blocos de Jordan Reais $J_{\mathbb{R}}(\lambda_i)$. No caso de λ_i ser um autovalor negativo, toma-se a matriz diagonal com $|\lambda_i|$ na diagonal para ser a parte hiperbólica e $-\text{Id}$ para ser a parte elíptica da decomposição. Assim temos a decomposição do operador $\mathbf{g}_i = \mathbf{h}_i \mathbf{e}_i \mathbf{u}_i$, com $\mathbf{h}_i$ hiperbólico, $\mathbf{e}_i$ elíptico e $\mathbf{u}_i$ unipotente.

Do mesmo modo, se o autovalor de $\mathbf{g}_j$ é um número complexo $z_j = a_j + ib_j$, então a matriz de $\mathbf{g}_j$ com relação à base de Jordan é um bloco de Jordan da forma

$$J_{\mathbb{C}}(z_j) = \begin{pmatrix} D(z_j) & \text{Id} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D(z_j) & \text{Id} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \text{Id} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D(z_j) \end{pmatrix}$$

onde $\text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $D(z_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$.

Considerando a decomposição polar do número complexo $z_j = \mu_j(\cos \theta_j + i \sin \theta_j)$ podemos escrever $D(z_j) = \begin{pmatrix} \mu_j & 0 \\ 0 & \mu_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_j & \sin \theta_j \\ -\sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$, e cada Bloco de Jordan $J_{\mathbb{C}}(z_j)$ pode então ser decomposto do seguinte modo:

$$J(z_j) = \begin{pmatrix} \mu_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_j & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\theta_j) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & R(\theta_j) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R(\theta_j) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & R(\theta_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Id} & D(z_j)^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \text{Id} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \text{Id} & D(z_j)^{-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$$

$$\text{onde } R(\theta_j) = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & \text{sen } \theta_j \\ -\text{sen } \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}.$$

Assim conseguimos também a Decomposição Multiplicativa de Jordan para cada bloco de Jordan Complexo $J_{\mathbb{C}}(z_j)$.

Escrevendo $\mathbb{R}^n = J_1 \oplus \dots \oplus J_m$, onde J_i são os subspaços invariantes associados aos blocos de Jordan, podemos decompor o operador $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{g}_m$, onde $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}|_{J_i}$. Como em cada J_i , g_i possui uma decomposição Multiplicativa de Jordan $\mathbf{g}_i = \mathbf{h}_i \mathbf{e}_i \mathbf{u}_i$, conseguimos a decomposição Multiplicativa de Jordan de $\mathbf{g}$ pondo $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{g}_m$, $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{e}_m$ e $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{u}_m$.

Com relação à base de Jordan escolhida para $\mathbf{g}$, a matriz de $\mathbf{h}$ é diagonal e os valores da diagonal são exatamente os módulos dos autovalores de $\mathbf{g}$. A soma dos espaços invariantes J_i que correspondem a autovalores de mesmo módulo são os autoespaços de $\mathbf{h}$. A matriz de $\mathbf{u}$ é triangular superior com 1 na diagonal e a de $\mathbf{e}$ é formada por blocos do tipo $R(\theta)$ ou por ± 1 na diagonal.

Olhando para a decomposição multiplicativa de Jordan de cada bloco de Jordan, é fácil ver que as partes hiperbólica, elíptica e unipotente comutam. Segue então que para qualquer operador inversível, essas partes também comutam. Além disso, a Decomposição Multiplicativa de Jordan é única (ver [5]).

APÊNDICE B

Álgebras e Grupos de Lie

B.1 Definições básicas

Definição B.1.1. *Um grupo G é dito um grupo de Lie se G possui uma estrutura de variedade diferenciável de tal forma que as operações de multiplicação e inversão do grupo são diferenciáveis.*

Definição B.1.2. *Um subgrupo H de um grupo de Lie G é um subgrupo de Lie se H é uma subvariedade (não necessariamente mergulhada) de G e o produto e inversão de H são diferenciáveis com relação à estrutura intrínseca de H .*

Um resultado importante para determinar subgrupos de Lie é o teorema do subgrupo fechado de Cartan enunciado abaixo.

Teorema B.1.3. *Se H é um subgrupo fechado de um grupo de Lie G então H é um subgrupo de Lie.*

Demonstração: Ver [13] ■

Na verdade, o resultado mais geral dá uma caracterização para os subgrupos mergulhados de G . Um subgrupo H é subvariedade mergulhada se, e somente se, H é fechado.

Exemplo B.1.4. O grupo linear $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ das matrizes inversíveis é um grupo de Lie pois é um subconjunto aberto do espaço vetorial $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e o produto e inversão de matrizes são operações diferenciáveis. O grupo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ das matrizes com determinante 1 é uma subvariedade mergulhada de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e assim também é um grupo de Lie. Outros exemplos importantes de grupos de matrizes são $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid gg^t = g^t g = \mathrm{Id}\}$ das matrizes ortogonais, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ das matrizes ortogonais com determinante igual a 1 e $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ das matrizes $2n \times 2n$ que preservam a forma simplética $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$, ou seja, $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid gJg^t = J\}$.

Definição B.1.5. Seja H um subconjunto de G . O centralizador e o normalizador de H em G são respectivamente

$$Z_G(H) = \{g \in G \mid gh = hg, \forall h \in H\}$$

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

Se H é subgrupo de G então $Z_G(H)$ e $N_G(H)$ são também subgrupos. Se G é grupo de Lie então $Z_G(H)$ é um subgrupo fechado e assim é um subgrupo de Lie de G . Se H é subgrupo fechado então $N_G(H)$ também o é, sendo assim um subgrupo de Lie de G .

Definição B.1.6. Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de uma aplicação $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, denominado colchete, que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Bilinear
- (ii) Antisimetria: $[X, Y] = -[Y, X]$
- (iii) Identidade de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Definição B.1.7. Uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ fechado pelo colchete, isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ se $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Exemplo B.1.8. Alguns exemplos de álgebras de Lie são dados por álgebras de matrizes com o colchete dado pelo comutador $[X, Y] = XY - YX$, tais como $\mathfrak{gl}(n) =$ espaço vetorial das matrizes $n \times n$, $\mathfrak{sl}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$, $\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n) \mid X + X^t = 0\}$ e $\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n) \mid XJ + JX^t = 0\}$.

Definição B.1.9. Dado $\mathfrak{h}$ um subconjunto de $\mathfrak{g}$, definimos seu centralizador e seu normalizador respectivamente por

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$$

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$$

Se $\mathfrak{h}$ for uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ então seu centralizador e seu normalizador também serão subálgebras.

B.2 Álgebras de Lie de um grupo de Lie

Podemos associar a cada grupo de Lie uma única álgebra de Lie. Reciprocamente, toda álgebra de Lie está associada a um único grupo de Lie conexo e simplesmente conexo. Essa relação é brevemente descrita abaixo.

Primeiro recordemos o conceito de colchete de Lie de campos de vetores. Se $X : M \rightarrow TM$ e $Y : M \rightarrow TM$ são dois campos de vetores, então o colchete $[X, Y]$ é um campo de vetores dado por $[X, Y](p) \cdot f = X(p) \cdot Yf - Y(p) \cdot Xf$, onde $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável numa vizinhança V de p , $Xf : V \rightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por $Xf(q) = X(q) \cdot f = df_q \cdot X(q)$ e Yf é definido de maneira análoga a Xf .

Dados os campos de vetores $X : M \rightarrow TM$, $Y : N \rightarrow TN$ e uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$, dizemos que esses campos são φ -relacionados se $d\varphi_p(X(p)) = Y(\varphi(p))$ para qualquer $p \in M$, ou seja, a diferencial $d\varphi$ leva o campo X no campo Y . Da definição de colchete e utilizando a regra da cadeia, segue que se X_1 e X_2 são dois campos de vetores em M que estão φ -relacionados, respectivamente, com os campos Y_1 e Y_2 em N , então $[X_1, X_2]$ também está φ -relacionado com $[Y_1, Y_2]$.

Se $\varphi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo e X é um campo de vetores em M , então existe um único campo de vetores φ_*X em N que é φ -relacionado com X . Esse campo é dado por $\varphi_*X(\varphi(p)) = d\varphi_p(X(p))$.

Agora seja G um grupo de Lie e considere sua translação à esquerda, $L_g : G \rightarrow G$ dada por $L_g(h) = gh$. Dizemos que um campo de vetores X em G é invariante à esquerda se $L_{g*}X = X$ para qualquer $g \in G$. Cada campo de vetores invariante à esquerda fica bem determinado se conhecermos apenas seu valor na origem do grupo. De fato, se X é invariante à esquerda, então $X(h) = d(L_h)_e \cdot X(e)$. Reciprocamente, se $v \in T_e M$, podemos definir um campo de vetores invariante à esquerda X em G pondo $X(h) = d(L_h)_e \cdot v$. Para ver que esse campo é, de fato, invariante à esquerda, basta fazer o seguinte cálculo

utilizando a regra da cadeia

$$\begin{aligned}
 L_{g*}X(h) &= d(L_g)_{g^{-1}h}(X(g^{-1}h)) \\
 &= d(L_g)_{g^{-1}h}(d(L_{g^{-1}h})_e \cdot v) \\
 &= d(L_g \circ L_{g^{-1}h})_e \cdot v \\
 &= d(L_h)_e \cdot v \\
 &= X(h)
 \end{aligned}$$

Munindo o conjunto $\mathfrak{X}^e(G)$ dos campos de vetores invariantes à esquerda em G com o colchete de Lie de campos de vetores, temos que $\mathfrak{X}^e(G)$ é uma álgebra de Lie. Pela discussão acima essa álgebra de Lie é naturalmente identificada com o espaço tangente a G na origem, $T_e G$. Essa é a álgebra de Lie do grupo G , e daqui em diante a denotaremos por $\mathfrak{g}$ sem fazer menção se estamos a considerando como espaço tangente ou como conjunto de campos de vetores. Outra observação é que se tivéssemos começado com campos invariantes à direita, todas relações seguiriam de maneira semelhante.

Para ver a demonstração de que toda álgebra de Lie está associada a um único grupo de Lie conexo e simplesmente conexo sugerimos a leitura do capítulo 6 de [13].

B.3 Aplicação exponencial

Iremos definir agora uma aplicação $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ que fornece a principal conexão entre grupos e álgebras de Lie.

Considere X uma campo invariante à direita no grupo de Lie G e X_t seu fluxo, isto é, a solução da equação diferencial $\dot{g} = X(g)$. Pela invariância de X , temos que $X_t(hg) = X_t(h)g$, e com isso pode-se mostrar que o campo X é completo, ou seja, todas as soluções $X_t(x)$ se estendem para todo $t \in \mathbb{R}$.

A partir dessas trajetórias define-se a aplicação exponencial pondo $\exp(tX) = X_t(e)$. A aplicação $t \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(tX)$ é um homomorfismo de grupos e sua imagem é chamada de subgrupo a 1-parâmetro. Pela invariância temos $X_t(g) = \exp(tX)g$.

A aplicação exponencial é um difeomorfismo numa vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$. De fato $d(\exp)_0 \cdot X = \frac{d}{dt} \exp(0 + tX)|_{t=0}$ e como $\exp(tX)$ é solução de $\dot{g} = X(g)$ com condição inicial $g(0) = e$ temos que $d(\exp)_0 \cdot X = X(e) = X$ onde a última igualdade é, na verdade, o isomorfismo entre o espaço tangente de G e o conjunto dos campos invariantes à direita.

Assim segue que $d(\exp)_0 = \text{id}$ e conseqüentemente, pelo teorema da aplicação inversa, é um difeomorfismo de uma vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$ numa vizinhança de $e \in G$.

Se G é um grupo conexo, então para qualquer vizinhança V de e , temos que $G = \cup_{n \geq 1} V^n$. Logo, como $\exp$ é difeomorfismo numa vizinhança de 0 , segue que se G é conexo então todo elemento de G pode ser escrito como produto de exponenciais, isto é, $g = \exp(X_1) \cdot \exp(X_2) \cdots \exp(X_n)$, com $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$.

B.4 Ação de Grupos e Variedades Homogêneas

Definição B.4.1. *Uma ação à esquerda de um grupo G num conjunto X é uma aplicação $\phi : G \times X \rightarrow X$ com as seguintes propriedades*

- (i) $\phi(e, x) = x$
- (ii) $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$

Geralmente quando trabalhamos com ação de grupos omitimos ϕ e utilizamos apenas a notação gx para indicar $\phi(g, x)$. Nesse caso as propriedades (i) e (ii) acima se traduzem como $ex = x$ e $g(hx) = (gh)x$. Cada $g \in G$ define uma bijeção $g : X \rightarrow X$ pondo $g(x) = \phi(g, x) = gx$. Suponha que G atua no conjunto X e Y . Uma função $f : X \rightarrow Y$ se diz G -equivariante se cada uma das aplicações definidas pela ação de G comutam com f , isto é, $g \circ f = f \circ g$, para todo $g \in G$.

Para cada $x \in X$ associamos um subgrupo de G , cujos elementos fixam x . Isto é, definimos

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

Esse grupo é chamado subgrupo de isotropia da ação de G no ponto x . Se G for um grupo topológico, X um espaço topológico Hausdorff e a ação for contínua, então cada subgrupo de isotropia será um subgrupo fechado de G . Essa natureza topológica dos grupos de isotropia é muito importante, pois ela nos permite concluir que se G for um grupo de Lie então G_x será um subgrupo de Lie de G . Se algum subgrupo de isotropia G_x é formado apenas pelo elemento neutro, dizemos que a ação é livre.

Dada uma ação, podemos definir uma relação de equivalência em X pondo $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G$ tal que $gx = y$. A partir dela definimos a órbita de um elemento x como

$$G \cdot x = \{y \in X \mid y \sim x\} = \{gx \mid g \in G\}$$

Dizemos que uma ação é transitiva se todos os elementos de X estão relacionados. Em outras palavras, a órbita de qualquer elemento é todo o conjunto G . É imediato verificar que G atua transitivamente Gx para qualquer $x \in X$. Nesse caso dizemos que X é um espaço homogêneo e podemos identificar X com o quociente G/G_x .

Agora se tivermos um subgrupo H de G , então temos uma ação natural de G em G/H dada por $\phi(x, yH) = xyH$. Essa ação é claramente transitiva, pois para qualquer $xH \in G/H$ temos que $xH \sim H$ já que $x^{-1} \cdot xH = H$.

Os resultados a seguir são importantes para o estudo de espaços homogêneos sob ações diferenciáveis de Grupos de Lie

Proposição B.4.2. *Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado. Então existe uma única estrutura diferenciável no quociente G/H que é compatível com a topologia quociente. Com essa estrutura, a ação canônica (por multiplicação à esquerda) de G em G/H é diferenciável. Além disso a projeção canônica $\pi : G \rightarrow G/H$ é uma submersão sobrejetiva e a ação de G em G/H é aberta.*

Demonstração: Ver capítulo 5 de [13]. ■

Agora seja G um grupo de Lie agindo diferenciavelmente numa variedade M . Podemos identificar o quociente de G por um subgrupo de isotropia G_x com a órbita de $x \in M$. Para isso basta ver que a aplicação $\psi : G/G_x \rightarrow Gx$ definida por $\psi(gG_x) = gx$ é uma bijeção.

Proposição B.4.3. *Considere uma ação diferenciável de G em M . Então cada órbita Gx é uma subvariedade (quase-regular) de M . Mais ainda, a aplicação $\psi : G/G_x \rightarrow Gx$ definida acima é um difeomorfismo.*

Demonstração: Ver capítulo 5 de [13] ■

B.5 Homomorfismos e representações

Definição B.5.1. *Um homomorfismo entre grupos de Lie é um homomorfismo de grupos que é contínuo (e consequentemente C^∞). Se o homomorfismo for um homeomorfismo*

dizemos que ele é um isomorfismo de grupos de Lie. Se o domínio coincide com a imagem dizemos que o homomorfismo é um endomorfismo. Ao endomorfismo que também é isomorfismo damos o nome de automorfismo.

Definição B.5.2. Um homomorfismo de álgebras de Lie é uma transformação linear $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tal que $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$.

Cada homomorfismo entre grupos de Lie induz um homomorfismo de suas álgebras de Lie associadas.

Proposição B.5.3. Seja $\phi : G \rightarrow H$ um homomorfismo entre os grupos de Lie G e H . Então sua diferencial na identidade $d\phi_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo entre as álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ de G e $\mathfrak{h}$ de H . Mais ainda $\phi(\exp_G X) = \exp_H(d\phi_e X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\phi_e} & \mathfrak{h} \\ \exp_G \downarrow & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{\phi} & H \end{array}$$

Demonstração: Ver capítulo 3 de [13]. ■

Definição B.5.4. Seja V um espaço vetorial. Uma representação do Grupo de Lie G em V é um homomorfismo de entre os Grupos de Lie G e $\mathrm{GL}(V)$. E uma representação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um homomorfismo entre as álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{gl}(V)$

Uma representação importante em grupos de Lie é a representação Adjunta. Essa é uma representação do grupo de Lie G na sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definida da seguinte maneira. Para $g \in G$, considere a conjugação $C_g : G \rightarrow G$, $C_g(h) = ghg^{-1}$. Sua diferencial na identidade do grupo é uma transformação linear $d(C_g)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Essa é a chamada Adjunta de $g \in G$ e denotada por $\mathrm{Ad}(g) = d(C_g)_e$. Fazendo isso para cada $g \in G$ temos uma representação de G em $\mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto \mathrm{Ad}(g) \end{aligned}$$

Essa representação é diferenciável e sua diferencial na identidade do grupo é uma representação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nela mesma. Essa representação é dita representação adjunta da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e denotada por $\text{ad}(X) = d(\text{Ad})_e$.

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto \text{ad}(X) \end{aligned}$$

Um resultado importante é que $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$, onde o colchete é dado pelo colchete de campos de vetores em G .

Utilizando a proposição B.5.3, temos as seguintes fórmulas importantes

$$g \cdot \exp(X) \cdot g^{-1} = \text{Ad}(g) \cdot X \quad (\text{B.1})$$

$$\text{Ad}(\exp(X)) = e^{\text{ad}(X)} \quad (\text{B.2})$$

Definição B.5.5. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra. O normalizador e o centralizador de $\mathfrak{h}$ em G são, respectivamente, os subgrupos*

$$N_G(\mathfrak{h}) = \{g \in G \mid \text{Ad}(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\}$$

$$Z_G(\mathfrak{h}) = \{g \in G \mid \text{Ad}(g)H = H, \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

Proposição B.5.6. *As álgebras de Lie de $Z_G(\mathfrak{h})$ e $N_G(\mathfrak{h})$ são, respectivamente, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ e $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Se H é um subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ então valem as igualdades $Z_G(\mathfrak{h}) = Z_G(H)$ e $N_G(\mathfrak{h}) = N_G(H)$.*

Demonstração: É uma consequência imediata das fórmulas B.1 e B.2 acima. ■

B.6 Grupos e álgebras Semisimples

Definição B.6.1. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita semisimples se não possui ideal solúvel além do 0*

Proposição B.6.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. São equivalentes*

- (a) $\mathfrak{g}$ é semisimples
- (b) a forma de Cartan-Killing $B(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y))$ é não degenerada
- (c) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$, com $\mathfrak{g}_i$ ideais simples

Demonstração: Ver [14] ■

As álgebras semisimples possuem decomposições interessantes que permitem estudar decomposições dos grupos de Lie semisimples.

Para começar, toda álgebra de Lie semisimples possui uma involução de Cartan (ver [5]), isto é, um automorfismo $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que $\theta^2 = \text{id}$ e $B_\theta(X, Y) = -B(X, \theta(Y))$ é um produto interno, onde B é a forma de Cartan-Killing. Com isso conseguimos uma decomposição de $\mathfrak{g}$ na soma direta dos autoespaços da involução de Cartan θ . Para ver isso basta escrever $X \in \mathfrak{g}$ como

$$X = \frac{1}{2}(X + \theta(X)) + \frac{1}{2}(X - \theta(X))$$

É fácil ver que $\frac{1}{2}(X + \theta(X)) \in \text{aut}(1)$ e $\frac{1}{2}(X - \theta(X)) \in \text{aut}(-1)$. O autoespaço associado ao autovalor 1 é dito subespaço compacto e denotado por

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}$$

e o autoespaço associado ao autovalor -1 é dito subespaço simétrico e denotado por

$$\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

Contas simples mostram que $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$ e $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k}$. Assim temos que $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra, o que não ocorre com $\mathfrak{s}$. A decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ é dita decomposição de Cartan.

Exemplo B.6.3. *Dois exemplos de álgebras semisimples são $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ e $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$. Para essas álgebras, uma involução de Cartan é dada por $\theta(X) = -X^t$ e as respectivas decomposições de Cartan são dadas por*

- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{s}$, onde $\mathfrak{s}$ é o conjunto das matrizes simétricas.

- Para $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ o subespaço compacto $\mathfrak{k}$ é dado formado pelas matrizes do tipo $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ onde $A = -A^t$ e $B = B^t$, e o subespaço simétrico $\mathfrak{s}$ é formado pelas matrizes do tipo $\begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$ onde $A = A^t$ e $B = B^t$

Proposição B.6.4. *Considere $\mathfrak{g}$ semisimples e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ sua decomposição de Cartan. Então*

- (i) $\text{ad}(X)$ é B_θ -antisimétrica se $X \in \mathfrak{k}$
- (ii) $\text{ad}(X)$ é B_θ -simétrica se $X \in \mathfrak{s}$

Demonstração: (i) Seja $X \in \mathfrak{k}$ e $Y, Z \in \mathfrak{g}$. Então $B_\theta(\text{ad}(X)Y, Z) = -B(\text{ad}(X)Y, \theta(Z)) = -B(Y, \text{ad}(X)\theta(Z)) = -B(Y, \theta\text{ad}(X)Z) = B_\theta(Y, \text{ad}(X)Z)$.

(ii) análogo ao item (i) ■

Se $X \in \mathfrak{s}$ então $\text{ad}(X)$ é B_θ -simétrica, e assim temos que $\text{ad}(X)$ é diagonalizável. Tomando $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ uma subálgebra abeliana maximal, temos que a família de operadores $\{\text{ad}(X) \mid X \in \mathfrak{a}\}$ é simultaneamente diagonalizável. Assim podemos escrever

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\alpha_0} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_n}$$

onde cada $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ é dado por

$$\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}(H)X = \alpha_i(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

Cada α_i é um funcional linear em $\mathfrak{a}^*$. Os funcionais $\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$ tal que $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ são chamados de raízes de $\mathfrak{g}$ e o espaço $\mathfrak{g}_\alpha$ é dito espaço de raiz associado. Denotamos o conjunto de todas as raízes associado ao par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ por $\Pi = \Pi(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$.

Proposição B.6.5. *Toda álgebra de Lie semisimples se decompõe em*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$$

onde $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ é o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$.

Demonstração: Pelos comentários acima temos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$, onde $\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}(H)X = 0, \forall H \in \mathfrak{a}\} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. Assim basta ver que $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$. Para isso, observe que o centralizador $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ é invariante por θ , pois para $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ e $Y \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ temos $[\theta(X), Y] = \theta([X, \theta(Y)]) = -\theta([X, Y]) = 0$. Logo $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{s})$. Como $\mathfrak{a}$ é abeliana maximal em $\mathfrak{s}$ temos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{a}$. É claro que $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m}$ e assim $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$. ■

Dizemos que um elemento $H \in \mathfrak{a}$ é regular se $\alpha(H) \neq 0$ para todo $\alpha \in \Pi$. As componentes conexas de $\{H \in \mathfrak{a} \mid \alpha(H) \neq 0, \forall \alpha \in \Pi\}$ são chamadas de câmaras de Weyl associadas ao par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Escolhida uma câmara de Weyl $\mathfrak{a}^+$, definimos $\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi \mid \alpha(H) > 0, \forall H \in \mathfrak{a}^+\}$. Essas raízes são ditas raízes positivas. Definimos a partir dessa escolha as subálgebras nilpotentes

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

e a álgebra $\mathfrak{g}$ pode ser escrita como $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$.

Uma raiz $\alpha \in \Pi^+$ é dita indecomponível (ou simples) se α não pode ser escrita como soma (não trivial) de outras raízes positivas. O conjunto Σ de todas as raízes indecomponíveis é uma base de $\mathfrak{a}^*$ e além disso, toda raiz positiva pode ser escrita como combinação linear de raízes simples com os coeficientes inteiros positivos. Σ também é chamado de sistema simples de raízes.

A partir de uma escolha de uma álgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ e de uma câmara de Weyl $\mathfrak{a}^+$, conseguimos a seguinte decomposição:

Proposição B.6.6 (Decomposição de Iwasawa). *Toda álgebra de Lie semisimples $\mathfrak{g}$ se decompõe em $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$, onde $\mathfrak{k}$ é o subespaço compacto associado a uma involução de Cartan θ , $\mathfrak{a}$ é uma subálgebra abeliana maximal em $\mathfrak{s}$ e $\mathfrak{n}^+$ é a subálgebra nilpotente definida acima a partir da escolha de uma câmara de Weyl $\mathfrak{a}^+$.*

E a partir da decomposição da álgebra conseguimos uma decomposição do Grupo de Lie associado

Proposição B.6.7 (Decomposição de Iwasawa global). *Considere G um grupo de Lie semisimples e conexo. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ a decomposição de Iwasawa da álgebra de Lie e K , A e N os subgrupos conexos gerados, respectivamente, por $\exp \mathfrak{k}$, $\exp \mathfrak{a}$ e $\exp \mathfrak{n}^+$. Então a aplicação $(k, a, n) \in K \times A \times N \mapsto kan \in KAN$ é um difeomorfismo entre $K \times A \times N$ e G .*

As demonstrações das proposições acima podem ser encontradas em [5].

Exemplo B.6.8. *Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{s}$, uma escolha de uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a}$ contida no subespaço $\mathfrak{s}$ das matrizes simétricas pode ser o conjunto*

das matrizes diagonais de traço zero. O centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$ é $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})}(\mathfrak{a}) = \{0\}$ e logo $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{\alpha}$.

Para essa escolha da álgebra abeliana maximal temos que o conjunto de raízes, dado pelos autovalores da representação adjunta restrita a $\mathfrak{a}$, são os funcionais α_{ij} definidos por $\alpha_{ij}(H) = \lambda_i - \lambda_j$ quando $H = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $i \neq j$. O conjunto $\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} \mid H = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ e } \lambda_1 > \dots > \lambda_n\}$ é uma câmara de Weyl e o conjunto das raízes positivas determinada por ela é $\Pi^+ = \{\alpha_{ij} \mid i < j\}$. Com isso temos que $\mathfrak{n}^+$ é formado pelas matrizes triangulares estritamente superiores e $\mathfrak{n}^-$ pelas triangulares estritamente inferiores. As raízes indecomponíveis (simples) são as raízes $\alpha_{i, i+1}$.

A decomposição de Iwasawa diz então que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$, com $\mathfrak{a}$ formada por matrizes diagonais de traço 0 e $\mathfrak{n}^+$ por triangulares estritamente superiores. Exponenciando essas matrizes, obtemos a decomposição de Iwasawa global do grupo $\text{SL}(n, \mathbb{R})$. A exponencial de uma matriz antisimétrica é uma matriz ortogonal, a de matriz diagonal é ainda uma matriz diagonal e a de matriz triangular estritamente superior é uma matriz triangular superior com 1's na diagonal.

B.7 Subgrupos e Subálgebras Parabólicas

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semisimples com involução de Cartan θ . Fixe $\mathfrak{a}$ uma subálgebra abeliana maximal, $\mathfrak{a}^+$ uma câmara de Weyl, Π o conjunto das raízes e Σ um sistema simples de raízes.

Dizemos de que subconjunto $\Delta \subset \Pi$ é fechado se $\alpha + \beta \in \Pi$ sempre que $\alpha, \beta \in \Delta$. Agora fixado $\Theta \subset \Sigma$, definimos $\langle \Theta \rangle$ como o menor subconjunto fechado em Π que contém Θ . Esse conjunto é formado por todas as combinações lineares de θ que estão em Π . Colocamos ainda $\langle \Theta \rangle^+ = \langle \Theta \rangle \cap \Pi^+$.

Definindo $\mathfrak{g}(\Theta)$ como a menor subálgebra gerada por $\mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta)$, onde $\mathfrak{n}^+(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_{\alpha}$ e $\mathfrak{n}^-(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, temos que $\mathfrak{g}(\Theta)$ é uma subálgebra semisimples com involução de Cartan dada pela restrição de θ a $\mathfrak{g}(\Theta)$. Com relação a essa involução, temos que $\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{s}(\Theta)$ é uma decomposição de Cartan, onde $\mathfrak{k}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{s}$. A subálgebra $\mathfrak{a}(\Theta) = \{H_{\alpha} \mid \alpha \in \langle \Theta \rangle\}$ é uma subálgebra abeliana maximal em $\mathfrak{s}(\Theta)$, $\mathfrak{m}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}(\Theta)}(\mathfrak{a}(\Theta))$ é o centralizador de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em $\mathfrak{k}(\Theta)$, e um sistema de raízes é $\Pi(\Theta) = \{\alpha_{\Theta} = \alpha|_{\mathfrak{a}(\Theta)} \mid \alpha \in \langle \Theta \rangle\}$. Assim temos a decomposição

$\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{m}(\Theta) \oplus \sum_{\alpha \in \Pi(\Theta)} \mathfrak{g}_{\alpha}$ e também a decomposição de Iwasawa $\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{m}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta)$.

Definição B.7.1. *Com as notações acima, a subálgebra parabólica minimal de $\mathfrak{g}$ é definida por $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$. Escolhido $\Theta \subset \Pi$, a subálgebra parabólica de tipo Θ é definida por $\mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$.*

Definindo $\mathfrak{a}_{\Theta}$ como o complemento ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{k}_{\Theta}$ como o centralizador de $\mathfrak{a}_{\Theta}$ em $\mathfrak{k}$ temos a seguinte proposição.

Proposição B.7.2. *A decomposição de Iwasawa da subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_{\Theta}$ é dada por*

$$\mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{k}_{\Theta} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

A partir daí definimos o subgrupo parabólico P_{Θ} de tipo θ como sendo o normalizador

$$P_{\Theta} = N_G(\mathfrak{p}_{\Theta}) = \{g \in G \mid \text{Ad}(g)\mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{p}_{\Theta}\}$$

de $\mathfrak{p}_{\Theta}$ em G . A álgebra de Lie de P_{Θ} é $\mathfrak{p}_{\Theta}$ e $P_{\Theta} = K_{\Theta}AN$ é a decomposição de Iwasawa global do subgrupo parabólico, onde $K_{\Theta} = \exp \mathfrak{k}_{\Theta}$.

Exemplo B.7.3. *Para determinar os subgrupos e subálgebras parabólicas de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ e $G = \text{SL}(n, \mathbb{R})$, considere, como no exemplo B.6.8, a álgebra abeliana maximal $\mathfrak{a}$ formada pelas matrizes diagonais de traço 0, o conjunto das raízes $\Pi = \{\alpha_{ij} \in \mathfrak{a}^* \mid \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} \neq 0\}$, o conjunto das raízes positivas $\Pi^+ = \{\alpha_{ij} \in \Pi \mid i < j\}$ e o conjunto das raízes simples $\Sigma = \{\alpha_{i, i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}$.*

Nesse caso, a subálgebra parabólica minimal é $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$, que é a subálgebra das matrizes diagonais superiores de traço 0, e o subgrupo parabólico é dado por $P = AN^+$, ou seja, P é o conjunto das matrizes triangulares superiores de determinantes 1.

Agora considere $\Theta \subset \Sigma$. Um intervalo em Σ é um conjunto da forma $\Sigma(i, j) = \{\alpha_{k, k+1} \mid i \leq k < j\}$. Podemos escrever Θ como uma união de intervalos disjuntos de Σ , isto é, $\Theta = \Sigma(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Sigma(i_r, j_r)$. Assim, tanto a subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_{\Theta}$ quanto o subgrupo parabólico P_{Θ} são formados por matrizes triangulares superiores em blocos de tamanhos $(j_l - i_l + 1) \times (j_l - i_l + 1)$, só que a subálgebra é formada por matrizes de traço 0 enquanto o subgrupo é formado por matrizes de determinante 1.

B.8 Variedades Flag

Definição B.8.1. *Uma variedade Flag é o quociente G/P_Θ de um grupo de Lie semisimples G por um subgrupo parabólico P_Θ .*

Essa definição de variedade Flag generaliza o conceito de Espaços Projetivos e Grassmanianas, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo B.8.2 (Flags de $\text{SL}(n, \mathbb{R})$). *Seja $\Theta = (k_1, \dots, k_r)$ uma sequência r de inteiros tais que $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r < n$. Um Flag de subspaços de tipo Θ é uma sequência de subspaços encaixados $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_r$ tais que $\dim V_i = k_i$. Defina F_Θ como o conjunto de todos os flags de tipo Θ , isto é,*

$$F_\Theta = \{V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_r \mid \dim V_i = k_i\}$$

Vejamos que $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ age transitivamente em F_Θ . A ação é definida por

$$g(V_i \subset \dots \subset V_r) = g(V_1) \subset \dots \subset g(V_r)$$

com $g \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$ e $(V_i \subset \dots \subset V_r) \in F_\Theta$.

Considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Defina $E_k = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ como o subspaço gerado por $\{e_1, \dots, e_k\}$ e também $b_\Theta = (E_{k_1} \subset \dots \subset E_{k_r}) \in F_\Theta$. Agora dado um flag $b = (U_1 \subset \dots \subset U_r)$, vejamos que existe $g \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$ tal que $g \cdot b_\Theta = b$. Para isso, tome uma base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, ortonormal e tal que $\{u_1, \dots, u_{k_i}\}$ é base de U_i para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Defina a matriz

$$g = \left(u_1 \mid \dots \mid u_n \right)$$

cujas colunas são os vetores ortonormais da base definida acima. Então é claro que $g \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$ e $g \cdot b_\Theta = b$, ou seja, $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ age transitivamente em F_Θ . Em particular, $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ também age transitivamente em F_Θ .

Agora vejamos que F_Θ é de fato uma variedade Flag de acordo com a definição B.8.1 acima. Para isto, precisamos ver que o subgrupo de isotropia dessa ação é um subgrupo parabólico, o que pelo exemplo B.7.3, implica em ver que o subgrupo de isotropia dessa ação é formado por matrizes triangulares superiores em blocos.

O subgrupo de isotropia dessa ação em b_Θ é formado pelos elementos $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ tal que $g(E_{k_i}) = E_{k_i}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Para que isso ocorra, a matriz de g na base canônica deve ser da forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$$

ou seja, o subgrupo de isotropia é um subgrupo parabólico e F_Θ é uma variedade Flag. Mais ainda, como $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ é compacto, segue que F_Θ também o é.

Em particular, se escolhermos a sequência $\Theta = (k)$, temos que F_Θ é o conjunto de todos os subspaços de dimensão k de $\mathbb{R}^n$, ou seja, $F_k = \mathrm{Gr}_k(n)$. Se $k = 1$ temos o conjunto de todos os subspaços de dimensão 1, isto é, o espaço projetivo $\mathbb{RP}^{n-1}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. L. Adler, A. G. Konheim e M. H. McAndrew - *Topological entropy*, Trans. Americ. Math. Soc. 114 (1965), 309-319.
- [2] R. Bowen - *Entropy for Group Endomorphisms and Homogeneous spaces*, Trans. Americ. Math. Soc. 153 (1971), 401-414.
- [3] R. Feres - *Dynamical Systems and Semisimple Groups: An Introduction*, Cambridge Univ. Press (1998).
- [4] S.E. Goodman - *Relating topological entropy and measure entropy*, Bulletin of the London Math. Soc. 3 (1971), 176-180.
- [5] S. Helgason - *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
- [6] P. Hulse - *On the sequence entropy of transformations with quasi-discrete spectrum*, Journal of London Math. Soc. 20 (1979), 128-136.
- [7] A. Katok, - *Fifty years of entropy in dynamics: 1958-2007*, Journal of Modern Dynamics n°4 (2007), 545-596 .
- [8] A. Katok, B. Hasselblatt - *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge Univ. Press, 1995.

- [9] A. N. Kolmogorov - *A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 119 (1958), 861-864.
- [10] E. L. Lima - *Espaços métricos*, Projeto Euclides - 3ª edição, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.
- [11] R. Manê - *Teoria Ergódica*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.
- [12] M. M. A. Patrão - *Semifluxos em Fibrados Flag e seus Semigrupos de Sombreamento*, Tese de Doutorado, Imecc, Campinas, 2006.
- [13] L.A.B. San Martin - *notas de aula de Grupos de Lie*, <http://www.ime.unicamp.br/~smartin/cursos/grupolie-2006>, Imecc, Campinas, 2006.
- [14] L.A.B. San Martin - *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp, Campinas, 1999.
- [15] J. G. Sinai - *On the concept of entropy of a dynamical system*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 124 (1959), 768-771.
- [16] V. A. Ssembatya - *On the Entropy of Quotients*, Research Reports in Mathematics 9 (2004).
- [17] G. Warner - *Harmonic analysis on semisimple Lie groups I*, Springer-Verlag (1972).