Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Método Limite para Solução de Problemas de Períodos em Superfícies Mínimas

Kelly R. Mazzutti Lübeck
Orientador: Prof. Dr. Valério Ramos Batista

Tese apresentada junto ao Departamento de Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Campinas - SP
2007

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Método Limite para Solução de Problemas de Períodos em Superfícies Mínimas

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Kelly Roberta Mazzutti Lübeck e aprovada pela comissão julgadora.

Valério Ramos Batista

Orientador Prof. Dr. Valério Ramos Batista.

Campinas - SP
2007

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves - CRB8a / 5094

Lübeck, Kelly Roberta Mazzutti
L961m Método limite para solução de problemas de períodos em superfícies mínimas/Kelly Roberta Mazzutti Lübeck - - Campinas, [S.P.: s.n.], 2007.

Orientador: Valério Ramos Batista
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Superfícies Mínimas. 2. Geometria Diferencial. 3. Riemann, Superfícies de. I. Ramos Batista, Valério. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: A limit-method for solving period problems on minimal surfaces.

Palavras-chaves em inglês (Keywords): 1.Minimal surfaces. 2.Differential geometry. 3. Riemann surfaces.

Área de concentração: Geometria diferencial

Titulação: Doutora em Matemática

Banca Examinadora: Prof. Dr. Valério Ramos Batista (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (UFC)
Prof. Dr. Caio José Coletti Negreiros (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC-Unicamp)
Profa. Dra. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves (IME-USP)

Data da defesa: 25/05/2207

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 25 de maio de 2007 e aprovada

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Valério Ramos Batista

Prof. Dr. VALÉRIO RAMOS BATISTA

Prof. (a) Dr (a). ROSA MARIA DOS SANTOS BARREIRO CHAVES

Prof. Dr. ABDÊNAGO ALVES DE BARROS

Prof. Dr. CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS

Prof. Dr. PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Mas não basta pra ser livre
ser forte, aguerrido e bravo,
povo que não tem virtude
acaba por ser escravo.
(Francisco Pinto de Fontoura).

Agradecimentos

A Deus, que me deu saúde e disposição para estar aqui e coragem para buscar o que almejo.

A toda a minha família, principalmente aos meus pais, que sempre me incentivaram e me apoiaram nas horas de alegria e nos momentos mais difíceis.

Aos meus amigos, que apesar do contato restrito que a distância nos impõe nunca deixaram de torcer por mim.

A toda a comunidade do IMECC/UNICAMP, aos professores, funciorários, em especial aos que trabalham na secretaria de pós-graduação, e aos colegas, pelo companheirismo, amizade e ótimo ambiente de trabalho.

Agradeço de modo especial ao professor Valério, que mais do que um orientador foi um amigo, sempre disponível e paciente para tirar as minhas dúvidas, confiante na realização do nosso trabalho.

Ao meu marido, ao meu Marcos, que esteve presente em toda a minha caminhada, compartilhando das minhas angústias, me incentivando a seguir em frente, a lutar pelas coisas que desejo, acreditando em mim quando eu mesma já não o fazia. Obrigada pelo teu companheirismo, pela tua amizade, pelo teu amor. Obrigada por você fazer parte da minha vida.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos o estudo e a construção de superfícies mínimas através de um método exclusivo. Em 1762, Lagrange introduziu a Equação Diferencial das Superfícies Mínimas através do Cálculo de Variações, e hoje a teoria de tais superfícies é uma área de pesquisa ativa e abrangente. A elaboração de novas famílias de superfícies mínimas está baseada no método da Construção Reversa, desenvolvido por Hermann Karcher nos meados da década de 80. Salientamos no presente trabalho a maneira diferenciada com que os problemas de períodos foram resolvidos. Para isso, utilizaram-se as equações de uma superfície mínima limite, para a qual já era conhecido que o problema de períodos tinha solução transversal. Tal método, que neste trabalho será denominado "método limite", simplifica de maneira considerável o esforço em solucionar os problemas de período da família original.

Abstract

In this work we present the study and construction of minimal surfaces through an exclusive method. In 1762, Lagrange introduced the Minimal Surfaces Differential Equation through the Calculus of Variations, and today the theory of such surfaces builds up an active and broad research area. We obtain new families of minimal surfaces based upon the Reverse Construction Method, developed by Hermann Karcher during the eighties. In our work we stress the original fashion with which period problems are solved: One makes use of a limit minimal surface, of which the periods are known to have transversal solution. Because of that we named our technique as "limit-method", which simplifies considerably the effort of solving period problems for the sought after family of minimal surfaces.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O estudo de superfícies mínimas foi motivado primeiramente pelas suas propriedades físicas. Dado uma curva simples fechada C em $\mathbb{R}^3$, a superfície S com $\mathsf{C} = \partial\mathsf{S}$ de menor área é também a que minimiza a tensão superficial. De uma forma mais geral, se S separa dois meios homogêneos, cada um sob pressões uniformes P_1 e P_2, a tensão mínima equivale a termos H constante, onde H denota a curvatura média de S. Na verdade, neste caso temos H proporcional a $\mathsf{P}_1 - \mathsf{P}_2$ (veja [1] para detalhes).

Em 1883, Enneper e Weierstrass mostraram que toda superfície mínima é localmente parametrizada por $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, para um aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e F determinada por uma função meromorfa g e uma diferencial holomorfa dh em Ω. A função g é a projeção estereográfica da aplicação de Gauss $N : \Omega \to S^2$. Além disso, se F_θ é a aplicação associada obtida de $e^{i\theta}dh,\ \theta \in [0, 2\pi)$, então todas as $F_\theta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ são imersões mínimas isométricas. O caso $\theta = \pi/2$ é denotado por F^* ou S^* e chamado de *conjugada.*

Se $F(\partial\Omega) = \mathsf{C}$ é uma poligonal com projeção ortogonal bijetiva $\mathcal{P}$ sobre um plano, então F é o gráfico de uma função $f : \mathcal{P} \cup Int\mathcal{P} \to \mathbb{R}$. Neste caso, como $f|_{\mathcal{P}}$ é explícita, uma solução de EDP numérica descreve a superfície por gráficos computacionais. Das isometrias e das aplicações de Gauss coincidentes de F e F^*, obtém-se imagens numéricas de S^*. Este procedimento é conhecido como "Construção por Conjugada de Plateau".

Em alguns casos, S está contida em uma superfície completa M com $H \equiv 0$, ainda chamada "mínima" embora $\partial M = \emptyset$. Por exemplo, o Princípio de Reflexão de Schwarz aplica-se à poligonal C, e então M é dada por $X : R \to \mathbb{R}^3$, para uma superfície de Riemann R com carta local $\psi : \Omega \to R$, e $F = X \circ \psi$. Isto permite que g e dh sejam globalmente definidas em R, e se R é compacta, de suas equações algébricas podemos dar fórmulas explícitas para g e dh. Este é o segundo caso onde gráficos computacionais tornam-se possíveis, mesmo para dar noção de toda a M. Este processo é chamado "Construção por Dados de Weierstrass".

Até hoje, nenhuma nova forma de construção explícita foi estabelecida. Para as superfícies chamadas *algébricas*, a saber completas e com curvatura total finita em um espaço "flat", construções implícitas foram introduzidas por Traizet e Kapouleas. Mas nelas, ou (g, dh) ou mesmo R são desconhecidos (veja [7] e [16]). A grande dificuldade com a "Construção por Weierstrass" para superfícies algébricas são os *problemas de períodos*. Em geral, eles são um sistema de equações envolvendo integrais elípticas com vários parâmetros interdependentes. Mesmo quando admite solução, esta é usualmente obtida com muitas dificuldades.

Outras construções podem ser chamadas de "*quase explícitas*", onde falta somente a possibilidade para um refinamento teórico dos parâmetros do domínio. Este é o caso de [17], [18] e [20], nos quais se conhece o domínio: uma vizinhança perfurada de $0 \in \mathbb{R}^n$, impossível de ser descrita, onde n é o número de parâmetros. Em outras palavras, aplica-se o *teorema da função implícita*, que requer as derivadas parciais das integrais elípticas calculadas na origem.

Nesta tese de doutorado vamos construir exemplos de superfícies mínimas com um novo método que também classificamos de "quase explícito". A diferença é que praticamente nenhum cálculo é necessário para resolver os períodos, mas requer-se que os exemplos procurados convirjam para uma superfície-limite, para a qual os períodos têm solução *transversal*. Aqui este termo significa somente que a diferença de duas funções contínuas troca de sinal, desconsiderando se elas têm ou não hiperplanos tangentes coincidindo ao longo do cruzamento, como requer o sentido clássico.

O método não somente soluciona períodos, mas também ajuda a provar mergulho. Uma vez que se obtém uma família contínua de imersões bem definidas, um membro-limite mergulhado pode ser usado para este propósito (veja [5] ou [19] como referência). Alguns exemplos com solução transversal de períodos são encontrados em [2] ou [5]. Nem a superfície de Costa, nem a de Chen-Gackstatter satisfaz esta condição (veja [3], [4], [5] e [8]).

Com o objetivo de ilustrar o nosso método, no Capítulo 4 construímos exemplos de superfícies mínimas chamadas $\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$. Elas foram inspiradas nas superfícies $\mathcal{L}_{\frac{\pi}{2}}$ e $\mathcal{C}_{\frac{\pi}{2}}$ de [12] e [13], e os seus dados de Weierstrass foram calculados pelo *método da construção reversa* de Karcher, conforme [8]. Também no Capítulo 4 descrevemos as equações analíticas para os períodos, que foram finalmente solucionadas pelo método-limite, e provamos o mergulho da peça fundamental P, que gera $\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$ por isometrias do $\mathbb{R}^3$.

Neste trabalho, fazemos uso de argumentos de simetria, teoria de superfícies de Riemann compactas e de topologia algébrica. Para uma melhor compreensão das idéias apresentadas aqui introduzimos, no Capítulo 2, algumas definições e teoremas encontrados na literatura clássica. No Capítulo 3 detalhamos alguns resultados da teoria de funções elípticas, resultados estes que apresentam-se no texto inúmeras vezes.

No Capítulo 5 o método-limite é utilizado para resolver um problema proposto em [12], para o qual os métodos usuais mostraram-se ineficazes. Por fim, o Capítulo 6 é destinado à apresentação de uma superfície triplamente periódica inspirada na $\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$, superfície esta que será objeto de estudos posteriores.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo vamos dar algumas definições e teoremas básicos. Para maiores detalhes veja [8], [10] e [11].

Definição 2.1. Uma *superfície de Riemann* é um par (X, Σ), onde X é uma variedade 2-dimensional conexa e Σ é uma estrutura complexa em X.

O toro plano ou toro, exemplo de superfície de Riemann que será manipulado no decorrer do texto, é o quociente do plano complexo por algum reticulado Γ, sendo que um reticulado é dado por

$$\Gamma := \{nw_1 + mw_2 | n, m \in \mathbb{Z}\}$$

para $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Considerando $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ a projeção canônica podemos induzir uma estrutura complexa em $\mathbb{C}/\Gamma$ do seguinte modo: seja $V \subset \mathbb{C}$ um subconjunto aberto tal que quaisquer dois de seus pontos não são equivalentes módulo Γ. Então $U := \pi(V)$ é aberto e $\pi|V \to U$ é um homeomorfismo. Sua inversa $\phi : U \to V$ é uma carta complexa. A coleção de todas estas cartas forma o atlas complexo $\mathcal{U}$, que cobre $\mathbb{C}/\Gamma$ e determina, assim, uma estrutura complexa nesta superfície.

Teorema 2.1. *Seja $X : R \to \mathbb{E}$ uma imersão isométrica completa de uma superfície de Riemann R sobre um espaço $\mathbb{E}$ "flat", completo e tridimensional. Se X é mínima e a curvatura Gaussiana total $\int_R KdA$ é finita, então R é biholomorfa a uma superfície de Riemann compacta $\overline{R}$ perfurada em um número finito de pontos $\{p_1, p_2, ..., p_s\}$.*

Teorema 2.2. (Representação de Weierstrass). *Seja R uma superfície de Riemann, g e dh função e 1-forma meromorfas em R, tais que os zeros de dh coincidam com os pólos e zeros de g. Suponhamos que $X : R \to \mathbb{E}$, dada por*

$$X(p) := Re \int^p (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad onde \quad (\phi_1, \phi_2, \phi_3) := \frac{1}{2}(g^{-1} - g, ig^{-1} + ig, 2)dh,$$

está bem definida. Então X é uma imersão mínima conforme. Reciprocamente, toda imersão mínima conforme $X : R \to \mathbb{E}$ pode ser expressa como acima para alguma função g e 1-forma dh meromorfas.

Definição 2.2. O par (g, dh) são os *dados de Weierstrass* e $\phi_{1,2,3}$ as *formas de Weierstrass* em R da imersão mínima $X : R \to X(R) \subset \mathbb{E}$.

Teorema 2.3. *Nas hipóteses dos Teoremas 2.1 e 2.2, os dados de Weierstrass (g, dh) se estendem meromorficamente sobre $\overline{R}$.*

Definição 2.3. Um *fim* de R é a imagem de uma vizinhança perfurada V_p de um ponto $p \in \{p_1, p_2, \cdots, p_s\}$ tal que $(\{p_1, p_2, \cdots, p_s\} - p) \cap \overline{V_p} = \emptyset$. O fim é mergulhado se sua imagem é mergulhada para uma vizinhança suficientemente pequena de p.

Teorema 2.4. (Fórmula de Jorge-Meeks). *Seja $X : R \to \mathbb{E}$ uma superfície mínima regular completa de curvatura total finita $\int_S KdA$. Se os fins de R são mergulhados então*

$$deg(g) = k + s - 1,$$

onde k é o gênero de $\overline{R} = R - \{p_1, \cdots, p_s\}$ e s é o seu número de fins.

A função g é a projeção estereográfica da aplicação de Gauss $N : R \to S^2$ da imersão mínima X, ou seja,

$$N = \frac{1}{|g|^2 + 1}(2Re\{g\}, 2Im\{g\}, |g|^2 - 1).$$

Ela é um recobrimento ramificado de $\widehat{\mathbb{C}}$ e $\int_S KdA = -4\pi \deg(g)$.

O elemento (de reta) ds de $X : R \to \mathbb{E}$ pode ser escrito como

$$ds = \frac{1}{2}\left(|g| + \frac{1}{|g|}\right)|dh|$$

e a curvatura de Gauss é dada por

$$K = -16\left(|g| + \frac{1}{|g|}\right)^{-4}\left|\frac{dg}{g}\right|^2 |dh|^2.$$

Teorema 2.5. *Se γ é uma curva em $X(R)$ então vale:*

i) γ é assintótica se, e somente se, $\dfrac{dg}{g}(\dot{\gamma}) \cdot dh(\dot{\gamma}) \in i\mathbb{R}$;

ii) γ é principal se, e somente se, $\dfrac{dg}{g}(\dot{\gamma}) \cdot dh(\dot{\gamma}) \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.6. (Princípio da Reflexão). *Toda linha reta (respectivamente, geodésica plana) numa superfície mínima é uma linha de simetria rotacional (respectivamente, simetria especular) da superfície.*

Teorema 2.7. (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sejam X e Y superfícies de Riemann compactas e $f : X \to Y$ uma aplicação holomorfa não constante. Se b_f é a ordem total dos ramos de f, então*

$$gen(X) = \frac{b_f}{2} + \#(f)(gen(Y) - 1) + 1. \tag{2.1}$$

Uma fórmula equivalente a (2.1) é

$$\chi(X) = -b_f + \#(f) \cdot \chi(Y). \tag{2.2}$$

Consideramos agora R uma superfície topológica compacta e $J : R \to R$ um homeomorfismo, cujo conjunto de pontos fixos é discreto, tal que $J^m = id, m > 1$, e $J^{m-k} \neq id$ para $1 \leq k < m$. Dado $Q \in R$, definimos

- o grupo de isotropia de Q em $\langle J \rangle$ como $\mathcal{F}(Q) = \{A \in \langle J \rangle \mid A(Q) = Q\}$,
- $\mu(Q) = |\mathcal{F}(Q)|$,
- a órbita de Q associada a $\langle J \rangle$ como $orb(Q) = \{Q, J(Q), ..., J^{m-1}(Q)\}$.

Notamos que $\#(orb(Q))\cdot\mu(Q) = ord(J)$. Para o recobrimento ramificado $\zeta : R \to R/\langle J\rangle$ obtemos

$$\chi(R) = ord(J)\cdot\chi(R/\langle J\rangle) - \sum_{Q\in R}(\mu(Q)-1). \tag{2.3}$$

Se $Q \in R$ com $\mu(Q) > 1$, observamos que $orb(Q) = orb(J(Q)) = \cdots = orb(J^{m-1}(Q))$. Neste caso existem exatamente s conjuntos disjuntos, com $s \in \mathbb{N}^*$, e cada um possui uma cardinalidade $m_i,\ i = 1, \cdots, s$. Então, podemos reescrever (2.3) como

$$\chi(R/\langle J\rangle) = \frac{\chi(R)}{ord(J)} + \frac{\sum_{i=1}^{s}(ord(J)-m_i)}{ord(J)}. \tag{2.4}$$

Quando $J^2 = id$, temos $m_i = 1$ e s igual ao número de pontos fixos de R. Dessa forma,

$$\chi(R/\langle J\rangle) = \frac{\chi(R)}{2} + \frac{s}{2}.$$

A equação (2.3) é conhecida como *fórmula de Euler-Poincaré.*

Teorema 2.8. *Sejam $X, \widetilde{X}, Y$ e $\widetilde{Y}$ variedades diferenciáveis, e $r : \widetilde{Y} \to Y, s : \widetilde{X} \to X$ recobrimentos C^∞. Se $F : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ é um difeomorfismo C^∞ que preserva fibras, então existe $f : X \to Y$ difeomorfismo de classe C^∞ tal que $f \circ s = r \circ F$.*

Reciprocamente, se $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ são simplesmente conexos e temos $f : X \to Y$ difeomorfismo de classe C^∞, então existe $F : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ difeomorfismo C^∞ que preserva fibras, com $f \circ s = r \circ F$.

Teorema 2.9. (Princípio do Máximo para Superfícies Mínimas). *Se S_1 e S_2 são duas superfícies mínimas conexas com um ponto p em comum e próximas de p são gráficos de funções f_1 e f_2 com $f_1 \geqslant f_2$, então $S_1 \equiv S_2$.*

Teorema 2.10. (Teorema do Semi-espaço). *Uma superfície mínima não planar, propriamente imersa e completa em $\mathbb{R}^3$ não esta contida em qualquer semi-espaço.*

Teorema 2.11. *A ordem de uma 1-forma meromorfa não-nula w sobre uma superfície de Riemann compacta de gênero g satisfaz*

$$deg(w) = 2g - 2.$$

Teorema 2.12. *Suponhamos que X e Y são superfícies de Riemann e que $\pi : Y \to X$ é uma aplicação de recobrimento ramificado de n-folhas. Se f é uma função meromorfa e $c_1, c_2, \cdots, c_n$ são as funções simétricas elementares de f, então*

$$f^n + (\pi^* c_1) f^{n-1} + \cdots + (\pi^* c_{n-1}) f + \pi^* c_n = 0.$$

O monomorfismo $\pi^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ é uma extensão algébrica de um corpo de grau $\leq n$. Além disso, se existe uma $f \in \mathcal{M}(X)$ e um $x \in X$ com pré-imagens $y_1, y_2, \cdots, y_n \in Y$ tais que os valores $f(y_\nu)$ para $\nu = 1, \cdots, n$ são todos distintos, então a extensão do corpo $\pi^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ tem grau n.

Teorema 2.13. *Suponhamos que X é uma superfície de Riemann e*

$$P(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + \cdots + c_n \in \mathcal{M}(X)[T]$$

é um polinômio irredutível de grau n. Então existe uma superfície de Riemann Y, um recobrimento ramificado de n-folhas $\pi : Y \to X$ e uma função meromorfa $F \in \mathcal{M}(Y)$ tal que $(\pi^* P)(F) = 0$. Nestas condições a tripla (Y, π, F) é unicamente determinada. Se (Z, τ, G) têm as correspondentes propriedades, então existe exatamente uma aplicação bioholomorfa que preserva fibras $\sigma : Z \to Y$ tal que $G = \sigma^* F$.

Capítulo 3

Funções Elípticas

3.1 Introdução

Uma *função elíptica* é qualquer função meromorfa definida sobre um toro, que como visto no Capítulo 2, é o quociente do plano complexo $\mathbb{C}$ por algum reticulado G. Dentre todas as funções elípticas a mais importante é a clássica função $\wp$ de Weierstrass. Neste capítulo, desejamos estudar a *função $\wp$ de Weierstrass simétrica,* que foi introduzida por H. Karcher [8]. A relação algébrica entre elas, quando definidas sobre o mesmo toro, é um reescalonamento a seguido por uma translação b, onde a e b são constantes complexas. Entretanto, as funções $\wp$ de Weierstrass simétricas são mais fáceis de manipular quando observadas do ponto de vista geométrico. Mostraremos que o comportamento delas pode ser estudado usando apenas argumentos geométricos. Além disso, teremos mais informações do que na teoria padrão da $\wp$ de Weierstrass clássica.

3.2 Dois teoremas geométricos básicos

Agora introduzimos resultados importantes que não estão estritamente relacionados com funções elípticas. Estes resultados constituem os argumentos fundamentais para podermos analisar o comportamento das funções mencionadas acima. Primeiramente, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.1. Uma *involução* é uma aplicação contínua $I : S \to S$ que satisfaz $I \circ I = id$ (a identidade em S). Quando S é uma superfície de Riemann compacta, a involução é chamada *hiperelíptica* se $gen(S/I) = 0$.

Da definição é imediato ver que toda involução é uma bijeção.

Teorema 3.1. *Toda involução conforme ou anti-conforme em $\widehat{\mathbb{C}}$ é dada por uma transformação de Möbius M ou sua conjugada $\overline{M}$.*

Prova: Tome uma involução $I : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$. Se é conforme, então é biholomorfa e assim uma transformação de Möbius. Se é anti-conforme, então $\overline{I}$ é biholomorfa e assim I é a conjugada de uma transformação de Möbius. $\square$

Note que a recíproca do Teorema 3.1 **não** é válida, pois $z \to 2z$ não é uma involução.

Teorema 3.2. *Sejam S e R superfícies de Riemann, $I : S \to S$ uma involução e $f : S \to R$ uma função contínua, aberta e sobrejetora. Então, existe uma única involução $J : R \to R$ tal que $J \circ f = f \circ I$ se, e somente se, sempre que $f(x) = f(y)$ temos $f \circ I(x) = f \circ I(y)$.*

Prova: As hipóteses do teorema foram formuladas para garantir a comutatividade do diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "I"] \arrow[d, "f"'] & S \arrow[d, "f"] \\
R \arrow[r, "J"'] & R
\end{tikzcd}
$$

Admitimos que $J \circ f = f \circ I$. Se $f(x) = f(y)$ então

$$f \circ I(x) = J \circ f(x) = J \circ f(y) = f \circ I(y).$$

Suponhamos agora que $f \circ I(x) = f \circ I(y)$ quando $f(x) = f(y)$. Para cada $z \in R$ definimos $J(z) := f \circ I(x)$, para algum $x \in S$ tal que $f(x) = z$ (este elemento existe pois f é sobrejetora). Por hipótese $J : S \to S$ está bem definida. Além disso, $J \circ f = f \circ I$. A função J é contínua por causa do seguinte argumento: para qualquer subconjunto aberto $U \subset R$ temos que $I^{-1}(f^{-1}(U))$ é aberto em S. Mas $I^{-1}(f^{-1}(U)) = f^{-1}(J^{-1}(U))$, e conseqüentemente $J^{-1}(U)$ é aberto em R. Ainda temos

$$J \circ J \circ f = J \circ f \circ I = f \circ I \circ I = f.$$

Assim, J é uma involução. $\square$

É imediato concluir que dado $F \subset R$ temos $J(F) = F$ se, e somente se, $I(f^{-1}(F)) = f^{-1}(F)$.

3.3 A função $\wp$ de Weierstrass simétrica

Como qualquer toro T é o quociente de $\mathbb{C}$ por algum reticulado $G \subset \mathbb{C}$, podemos descrever isto por meio de números complexos não nulos w_1 e w_2, com $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$. Assim, $G := \{(2n+1)w_1 + (2m+1)w_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$ e $T := \mathbb{C}/G$.

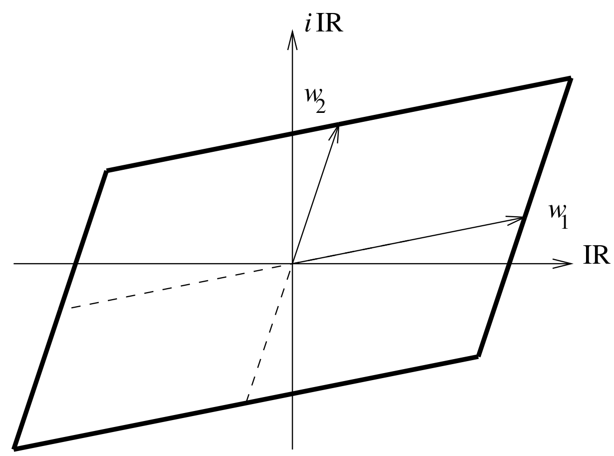


Figura 3.1: O toro T.

No toro T a involução $I(z) = -z$ tem exatamente quatro pontos fixos: $0, w_1, w_2$ e $w_1 + w_2$. Usando a fórmula de Euler-Poincaré temos:

$$\chi(T/I) = \frac{\chi(T)}{2} + \frac{4}{2} = 2.$$

Logo T/I tem gênero zero e pelo teorema de Koebe existe um biholomorfismo $\mathcal{B} : T/I \to \widehat{\mathbb{C}}$. A menos de uma transformação de Möbius a função $\mathcal{B}$

está bem definida.

Definição 3.2. A *função $\wp$ de Weierstrass simétrica* é a composta $\wp := \mathcal{B} \circ (\cdot/I) : T \to \widehat{\mathbb{C}}$ tal que

$$\wp(0) = 0, \quad \wp(w_1 + w_2) = \infty \;\; \text{e} \;\; \wp\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) = i.$$

Devido à função quociente $\cdot/I : T \to T/I$, é imediato concluir que $\wp(-z) = \wp(z)$, para qualquer $z \in T$. Logo $\wp\left(-\frac{w_1 + w_2}{2}\right) = i$. Além disso, deg($\wp$)=2 e seus pontos de ramo são exatamente os quatro pontos fixos de I.

Da Definição 3.1 vemos que I é hiperelíptica. Vamos agora estudar outra função hiperelíptica em T, que é dada por $\mathcal{H}(z) = -z + w_1 + w_2$ (rotação em torno de $\frac{w_1 + w_2}{2}$). Seu conjunto de pontos fixos é exatamente $\left\{\pm\frac{w_1 + w_2}{2}, \pm\frac{w_1 - w_2}{2}\right\}$. Do Teorema 3.2, $\mathcal{H}$ e $\wp$ induzem outra involução em $\widehat{\mathbb{C}}$, e como ambas são holomorfas, a involução induzida também será holomorfa. Do Teorema 3.1 esta involução é uma transformação de Möbius. Como $\mathcal{H}$ intercambia 0 e $w_1 + w_2$ e deixa fixo $\frac{w_1 + w_2}{2}$, se J é a induzida por $\wp$ temos:

$$\begin{aligned}
&J(0) = J(\wp(0)) = \wp(\mathcal{H}(0)) = \wp(w_1 + w_2) = \infty;\\
&J(\infty) = J(\wp(w_1 + w_2)) = \wp(\mathcal{H}(w_1 + w_2)) = \wp(0) = 0;\\
&J(i) = J(\wp(\frac{w_1 + w_2}{2})) = \wp(\mathcal{H}(\frac{w_1 + w_2}{2})) = \wp(\frac{w_1 + w_2}{2}) = i.
\end{aligned}$$

Assim, a transformação de Möbius associada é

$$\wp \to -\frac{1}{\wp}. \tag{3.1}$$

Uma vez que os pontos $\pm\frac{w_1 - w_2}{2}$ permanecem fixados pela $\mathcal{H}$, neles temos $\wp^2 = -1$. Como o grau da $\wp$ é 2 e $\mathcal{H}(\pm\frac{w_1 + w_2}{2}) \neq \mathcal{H}(\pm\frac{w_1 - w_2}{2})$, temos

$$\wp\left(\pm\frac{w_1 - w_2}{2}\right) = -i.$$

Além disso, (3.1) implica que todo segmento em T com extremos p, q e cujo centro é um ponto fixo de $\mathcal{H}$, satisfaz $\wp(q) = -1/\wp(p)$. Veja a figura abaixo.

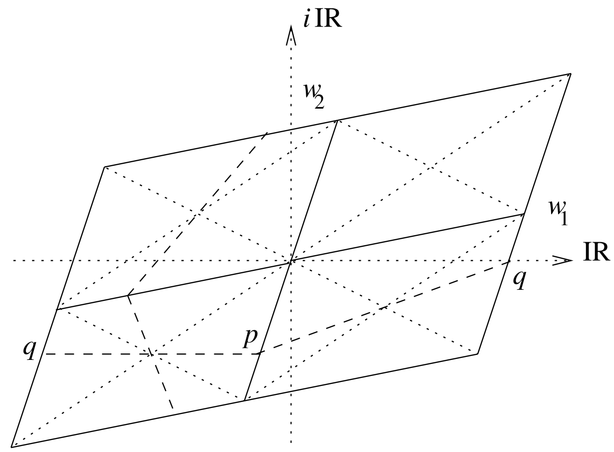


Figura 3.2: p, q diagonalmente opostos na subgrade, $\wp(q) = -\dfrac{1}{\wp(p)}$.

De fato, como J é induzida de $\mathcal{H}$ pela $\wp$, temos $(\wp \circ \mathcal{H})(p) = (J \circ \wp)(p) = \dfrac{-1}{\wp(p)}$. Assim, basta mostrarmos que $\mathcal{H}(p) = q$. Tomamos v um ponto fixo de $\mathcal{H}$ e p, q os extremos de um segmento com ponto médio v. Os pontos p, q e v satisfazem: $|\overrightarrow{pq}| = 2|\overrightarrow{vq}|$, donde $p = 2v - q$. Como $2v - w_1 - w_2 \in G$, para $v \in \left\{ \pm\dfrac{w_1 + w_2}{2}, \pm\dfrac{w_1 - w_2}{2} \right\}$, verificamos o resultado.

No caso especial de um toro retangular, a menos de biholomorfismo ou anti-biholomorfismo podemos assumir que $w_1 \in \mathbb{R}_+$ e $w_2 \in i\mathbb{R}_+$. Algumas involuções adicionais também vão satisfazer as hipóteses do Teorema 3.2, a saber:

$$
\begin{aligned}
I_1 &: z \to \overline{z};\\
I_2 &: z \to -\overline{z};\\
I_3 &: z \to \overline{z} + w_2;\\
I_4 &: z \to -\overline{z} + w_1.
\end{aligned}
$$

Elas estão representadas na seguinte figura:

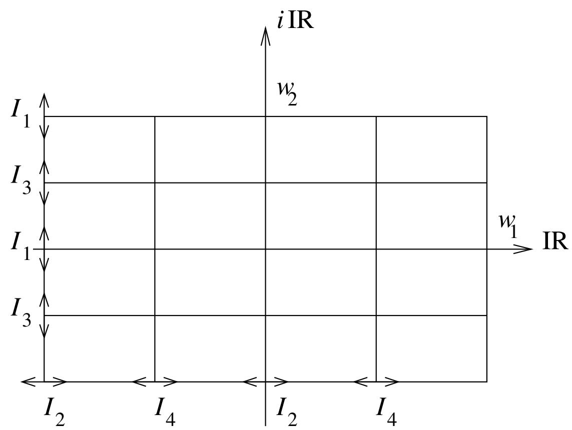


Figura 3.3: As involuções $I_{1,2,3,4}$ no toro retangular T.

Junto com $\wp$, elas induzem involuções anti-holomorfas $J_{1,2,3,4}$ em $\widehat{\mathbb{C}}$ que identificaremos com o auxílio do Teorema 3.1.

Consideramos I_1 e I_2. Elas fixam alguns pontos especiais como $0, w_1+w_2$ e intercambiam $\frac{w_1+w_2}{2}$ e $\frac{w_1-w_2}{2}$. Uma vez que $\wp(0)=0$, $\wp(w_1+w_2)=\infty$ e $\wp(\frac{w_1+w_2}{2}) = -\wp(\frac{w_1-w_2}{2}) = i$, elas induzem a mesma involução em $\widehat{\mathbb{C}}$, que fixa $0,\infty$ e intercambia i com $-i$. Do Teorema 3.1, esta involução é $\wp \to \overline{\wp}$. Em particular, isto significa que a imagem de $\wp$ do conjunto dos pontos fixos de $I_{1,2}$ é **real**. Assim, $\wp(w_1) = \tan\alpha$ para algum $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$. Pela Figura 3.2, w_1 e w_2 são os extremos de um segmento com ponto médio $\frac{w_1+w_2}{2}$, e concluímos que $\wp(w_2) = -\cot\alpha$. Como $\tan\alpha = -\cot(\alpha+\frac{\pi}{2})$, a menos de um anti-biholomorfismo podemos escolher o nosso toro de modo que $\alpha > 0$. Dessa forma, consideramos $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

A involução I_4 intercambia 0 com w_1 e w_1+w_2 com w_2. Logo, se J_4 for a involução induzida por $\wp$ (de I_4), ela será uma transformação de Möbius anti-holomorfa que satisfaz:

$$J_4(0) = J_4(\wp(0)) = \wp(I_4((0)) = \wp(w_1) = \tan\alpha;$$
$$J_4(\infty) = J_4(\wp(w_1+w_2)) = \wp(I_4((w_1+w_2)) = \wp(w_2) = -\cot\alpha;$$
$$J_4(-\cot\alpha) = J_4(\wp(w_2)) = \wp(I_4((w_2)) = \wp(w_1+w_2) = \infty.$$

Portanto J_4 é dada por

$$\wp \to \frac{\tan\alpha - \overline{\wp}}{1 + \tan\alpha \cdot \overline{\wp}}.$$

Os cálculos para determinar a involução induzida por I_3 são análogos. O próximo desenho representa $\wp(T)$ com as suas involuções induzidas (foram dados os mesmos nomes).

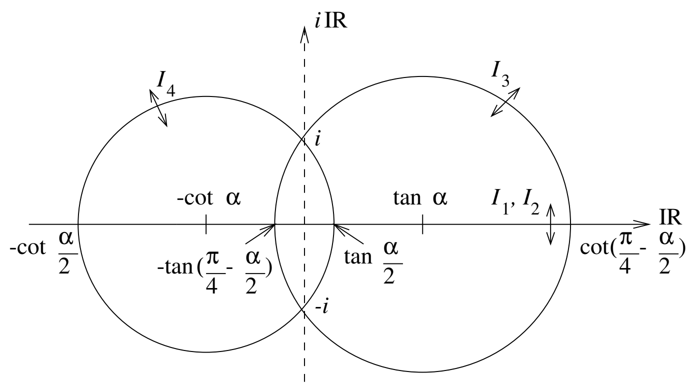


Figura 3.4: A imagem $\wp(T)$ com as involuções induzidas.

Uma equação algébrica para esse toro é dada por $\wp'^2 = c_1\wp(\wp - \tan\alpha)(\wp + \cot\alpha)$, sendo c_1 uma constante complexa não-nula. Usualmente escrevem-se os valores de $\wp$ sobre o toro, como na próxima figura.

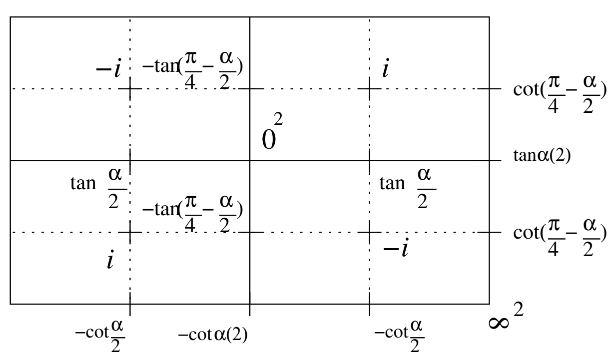


Figura 3.5: Os valores de $\wp$ no toro retangular T.

Agora estudaremos o caso especial do toro rômbico. A menos de um biholomorfismo ou anti-biholomorfismo podemos assumir que $Arg(w_1) \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $w_2 = -\overline{w}_1$. As involuções definidas anteriormente $I_{3,4}$ não são mais válidas aqui, mas $I_{1,2}$ e outras duas involuções ainda vão satisfazer as hipóteses do Teorema 3.2, a saber:

$$I_5 : z \to \overline{z} + w_1 + w_2;$$
$$I_6 : z \to -\overline{z} + w_1 - w_2.$$

Elas estão representadas na seguinte figura:

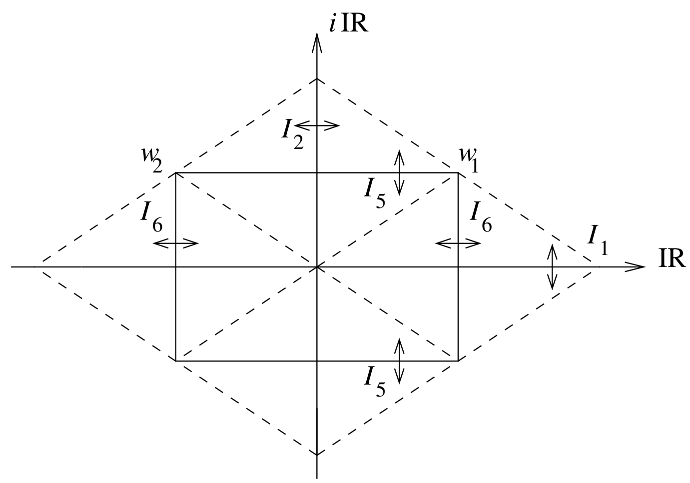


Figura 3.6: As involuções $I_{1,2,5,6}$ no toro rômbico T.

Em $\widehat{\mathbb{C}}$, $I_{1,2}$ induzem a mesma involução, a saber $\wp \to -\overline{\wp}$. O mesmo ocorre com $I_{5,6}$ que também induzem a mesma involução: $\wp \to 1/\overline{\wp}$. Uma conseqüência importante da involução $\wp \to -\overline{\wp}$ em $\widehat{\mathbb{C}}$ é que a imagem pela $\wp$ das diagonais de T é o eixo imaginário. Como escolhemos $\wp\left(\dfrac{w_1 + w_2}{2}\right) = i$, a imagem pela $\wp$ da diagonal horizontal de T é $i\mathbb{R}_-$, enquanto que a imagem pela $\wp$ da diagonal vertical de T é $i\mathbb{R}_+$. Da involução $\wp \to 1/\overline{\wp}$ em $\widehat{\mathbb{C}}$, temos que a imagem do sub-retângulo representado na Figura 3.6 cobre o S^1. Dessa forma, $\wp(w_1) = e^{i\rho}$ para algum $\rho \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Similarmente ao caso do toro retângulo, sem perder a generalidade, podemos tomar $\rho \geq 0$ e agora considerar $\rho \in [0, \frac{\pi}{2})$. Da Figura 3.2 concluímos que $\wp(w_2) = -e^{-i\rho}$.

Uma equação algébrica para este toro é dada por $\wp'^2 = c_2\wp(\wp - e^{i\rho})(\wp + e^{-i\rho})$, sendo c_2 uma constante complexa não nula.

No caso particular do toro quadrado, que é simultaneamente rômbico e retangular, temos $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $\rho = 0$. A próxima figura descreve os valores de $\wp$ diretamente sobre o toro.

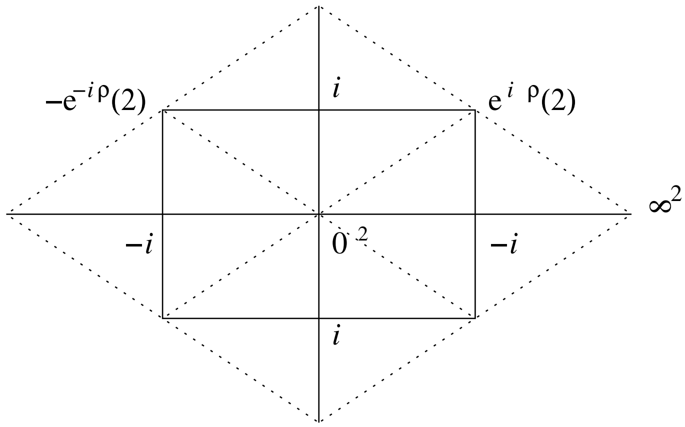


Figura 3.7: Os valores de $\wp$ no toro rômbico T.

Observação 3.1: Cálculos análogos poderiam ter sido desenvolvidos sobre o toro $T := \mathbb{C}/\Gamma$, com $\Gamma = \{nw_1 + mw_2 | n, m \in \mathbb{Z}\}, w_1, w_2 \in \mathbb{C}^*$ e $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$. Uma equação algébrica para este toro é $\wp'^2 = c\wp(\wp - x)(\wp + \frac{1}{x})$ com $x \in \mathbb{R}_+$ e x só dependendo de $\frac{w_1}{w_2}$.

Observação 3.2: Quaisquer dois toros com mesmo $\frac{w_1}{w_2}$ são biholomorfos, e reciprocamente. Basta observarmos que se $\frac{w_1}{w_2} = \frac{\widetilde{w}_1}{\widetilde{w}_2}$, então existe $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ com $g(z) = az$ e $a \in \mathbb{C}^*$ tal que $g(w_1) = \widetilde{w}_1$ e $g(w_2) = \widetilde{w}_2$. Do Teorema 2.8 temos que T é biholomorfa a $\widetilde{T}$. A recíproca também é conseqüência imediata deste teorema.

Agora consideramos $T := \mathbb{C}/\Gamma$ e $\widetilde{T} := \mathbb{C}/\widetilde{\Gamma}$, onde $\widetilde{w}_1 = g(w_1)$ e $\widetilde{w}_2 = g(w_2)$ para $g(z) = az + b$ com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, conforme a Figura 3.8. Sejam $\beta(t) := t(w_1 + w_2), 0 \leq t \leq 1$ e $\widetilde{\beta} = t(\widetilde{w}_1 + \widetilde{w}_2) + b = a\beta(t) + b, 0 \leq t \leq 1$. Como vimos anteriormente, $\wp(\beta(t))$ é uma curva que liga 0 a ∞ e passa por $i = \wp(\beta(\frac{1}{2}))$. Logo, $\wp(\beta(t))'\big|_{\frac{1}{2}} = y \in \mathbb{C}^*$, sendo que y depende apenas de $\frac{w_1}{w_2}$. Por outro lado, $\left[\wp(\beta(t))'\Big|_{\frac{1}{2}}\right]^2 = y^2 \;\Rightarrow\; \wp'(\beta(\frac{1}{2})).\left[\beta'(\frac{1}{2})\right]^2 = y^2 \;\Rightarrow$ $ci(i-x)(i+\dfrac{1}{x}).(w_1+w_2)^2 = y^2 \;\Rightarrow c = \dfrac{w_2^{-2}y^2}{\left(1+\dfrac{w_1}{w_2}\right)^2\left(x-\dfrac{1}{x}-2i\right)}$.

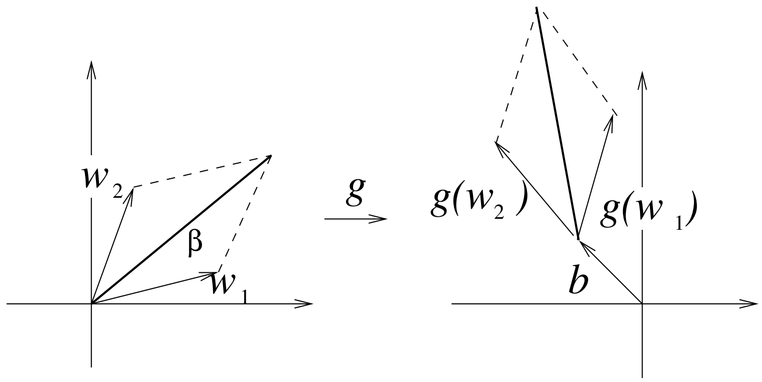


Figura 3.8: A aplicação g.

A relação entre c e o reticulado Γ para cada $u = \frac{w_1}{w_2}$ fixo é única, pois para cada par $(w_1, w_2), (\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2)$ com $\frac{w_1}{w_2} = \frac{\widetilde{w}_1}{\widetilde{w}_2} = u$ temos:

$$c|_{(w_1,w_2)} = c|_{(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)} \Longleftrightarrow (w_1+w_2)^2 = (\widetilde{w}_1+\widetilde{w}_2)^2 \Longleftrightarrow (w_1,w_2) = \pm(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2),$$

que por sua vez define o mesmo reticulado Γ.

Logo, a menos de um biholomorfismo ou anti-biholomorfismo, todos os toros estão representados num quadrante de círculo, conforme a figura abaixo.

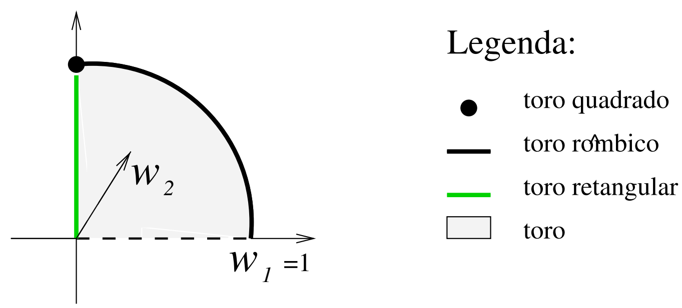


Figura 3.9: Representação dos tipos de toros.

Capítulo 4

Superfície $\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$-Costa

Este capítulo tem como objetivo principal a exposição do nosso *método-limite* para solução de problemas de períodos. Para tanto, motivados pelas superfícies $\mathcal{C}_{\frac{\pi}{2}}$ e $\mathcal{L}_{\frac{\pi}{2}}$ de [12] e [13], construímos uma nova família de superfícies mínimas duplamente periódicas denotada por $\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$-Costa. Para a obtenção desta superfície, utilizamos o *método da construção reversa* desenvolvido por Hermann Karcher na década de 80 (vide [8]). A Figura 4.1 ilustra esta superfície.

4.1 A superfície $\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$-Costa

Teorema 4.1. Existe uma família a 2-parâmetros de superfícies mínimas duplamente periódicas em $\mathbb{R}^3$ tal que, para qualquer membro desta família se verifica:
1) a superfície imersa é mínima;
2) ela é gerada pela reflexão em torno de um plano vertical junto com um grupo de translação horizontal, ambos aplicados sobre uma peça fundamental P, onde P é uma superfície com bordo e dois fins catenoidais;
3) P tem um grupo de simetria gerado pela rotação de 180° em torno de dois segmentos que se cruzam ortogonalmente em seu ponto médio S;
4) ∂P consiste de duas curvas congruentes alternado com dois segmentos retos, e eles se projetam sobre um retângulo Q.

Podemos interpretar P como a superfície de Costa com seus fins catenoi-

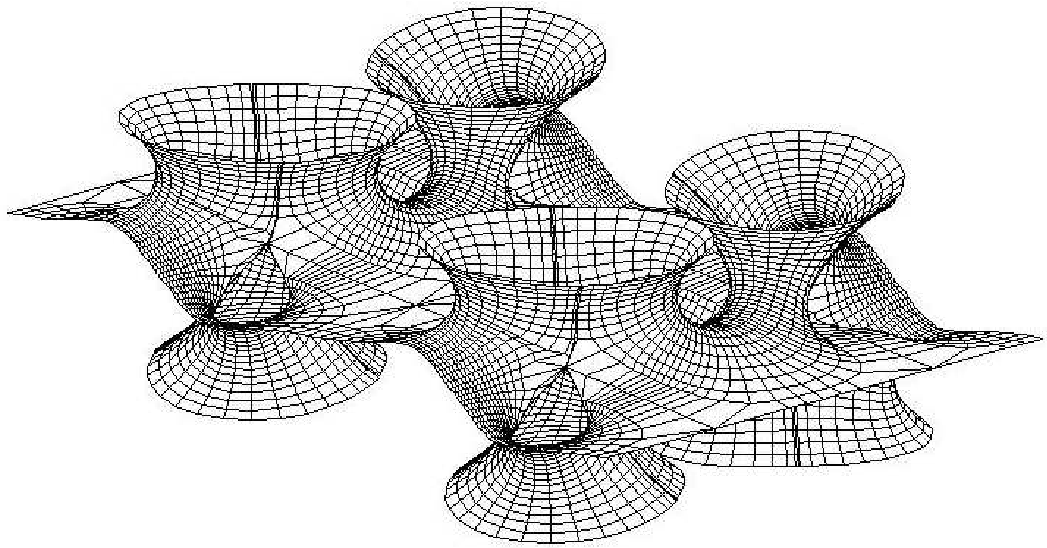


Figura 4.1: A superfície $\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$.

dais mantidos, mas o fim planar substituído por ∂P. O ponto S representa a "Sela-Costa" onde as retas se encontram. De fato, a superfície duplamente periódica possui auto-intersecções, mas elas somente ocorrem nos fins catenoidais. Vamos considerar S como a origem do $\mathbb{R}^3$ e os segmentos de $P \backslash \partial P$ contidos em Ox_1, Ox_2. Dessa forma, Ox_3 é o eixo dos fins catenoidais "top" e "bottom". Além disso, consideramos que $x_3 = x_1 \wedge x_2$ e Ox_1 intercepta somente os segmentos de ∂P. Projetando ∂P ortogonalmente sobre $x_3 = 0$, vemos que Q será ortogonal a $Ox_{1,2}$. Outras configurações implicariam em mais auto-intersecções além daquelas entre os fins.

Da Figura 4.2 notamos que Q e os fins podem assumir diversas escalas e *crescimentos logarítmicos,* isto é, diferentes raios de crescimento na direção dos limites normais $(0, 0, \pm 1)$ já que para o exterior de um conjunto compacto suficientemente grande, $X : M \to \mathbb{R}^3$ é um gráfico (sobre o exterior de um domínio limitado no plano x_1, x_2) com o seguinte comportamento assintótico:

$$x_3(x_1, x_2) = \frac{\eta}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) + \mu + \frac{ax_1 + bx_2}{x_1^2 + x_2^2} + \mathcal{O}((x_1^2 + x_2^2)^{-1}),$$

onde η, μ, a e b são números reais. O raio do crescimento logarítmico é o negativo do resíduo de dh em torno do fim considerado. Dessa forma, os

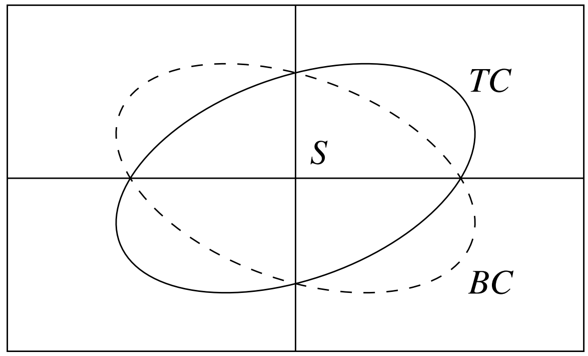


Figura 4.2: O retângulo Q.

exemplos $\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$ formam uma família de superfícies a dois parâmetros. Tomamos um membro genérico M desta família. Considerando o seu quociente pelo grupo de translação, seguido pela compactificação dos seus fins, obtemos uma superfície topológica e compacta, denotada por $\overline{M}$ (veja a Figura 4.3(a)). Desta figura facilmente vemos que o gênero de $\overline{M}$ é 3. O trecho $A \to L \to F \to D \to A$ forma as retas da superfície, enquanto que $A \to E \to A$ e $F \to N \to F$ geram as curvas de simetria reflexional.

Vamos agora considerar $\rho : \overline{M} \to \overline{M}$ como a involução que corresponde à rotação de 180° em torno de Ox_3. Esta involução fixa os pontos $L, D, TC, S, BC, TC', S', BC'$ e intercambia A com F e E com N. Assim, pela fórmula de Euler-Poincaré

$$\chi(\overline{M}/\rho) = \frac{\chi(\overline{M})}{2} + \frac{8}{2} = 2,$$

ou seja, $\overline{M}/\rho$ é topologicamente S^2, que admite um única estrutura conforme $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, pelo teorema de Koebe. Como ρ é um recobrimento ramificado, ele induz uma estrutura conforme em $\overline{M}$. Isto determina uma aplicação meromorfa $z : \overline{M} \to \widehat{\mathbb{C}}$ e, a menos de uma transformação de Möbius, escolhemos $z(S) = 0, z(A) = 1$ e $z(S') = \infty$.

A rotação de 180° em torno do trecho $A \to L$ fixa os valores $0, \infty$ e 1, logo a transformação induzida em $\widehat{\mathbb{C}}$ é uma reflexão no eixo real, e conseqüentemente $z(A \to L) \subset \mathbb{R}$. Como S e S' não pertencem a $A \to L$, temos $z(A \to L) = [1, \widetilde{x}]$ para algum $\widetilde{x} > 1$ ou $z(A \to L) = [x, 1]$ para um certo

$x < 1$. Como o trecho $S \to L$ é fixado pela rotação de 180° em torno de si, e esta fixa S', então $z(S \to L) \subset \mathbb{R}$ e $z(S) = 0 < z(L) < z(A) = 1$. Assim, $z(L) = x$ com $0 < x < 1$.

A rotação de 180° em torno de $S \to L$ fixa S, S', L e D, ou seja, $0, \infty, x$, e $z(D)$, e intercambia $A \leftrightarrow F, E \leftrightarrow N, TC \leftrightarrow BC$ e $TC' \leftrightarrow BC'$, onde $z(E) = z(N)$ devido a ρ. Logo, ela induz $z \mapsto \overline{z}$ em $\widehat{\mathbb{C}}$ e temos

$$\overline{z}(N) = z(E) = z(N) \;\Rightarrow\; z(E) = z(N) \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

$$z(TC) = \overline{z}(BC),\ \overline{z}(TC') = z(BC'). \tag{4.2}$$

A reflexão em $A \to E$ fixa A, E, F, N e intercambia $TC \leftrightarrow TC', BC \leftrightarrow BC', S \leftrightarrow S'$ e $L \leftrightarrow D$, ou seja, fixa 1 e intercambia ∞ com 0. Assim, a transformação induzida é $z \mapsto 1/\overline{z}$, donde $z(D) = 1/z(L) = 1/x$ e

$$z(TC) = 1/\overline{z}(TC'),\ z(BC) = 1/\overline{z}(BC'). \tag{4.3}$$

Observemos que os pontos fixos desta reflexão pertencem a S^1, portanto

$$z(E) = z(N) \in S^1. \tag{4.4}$$

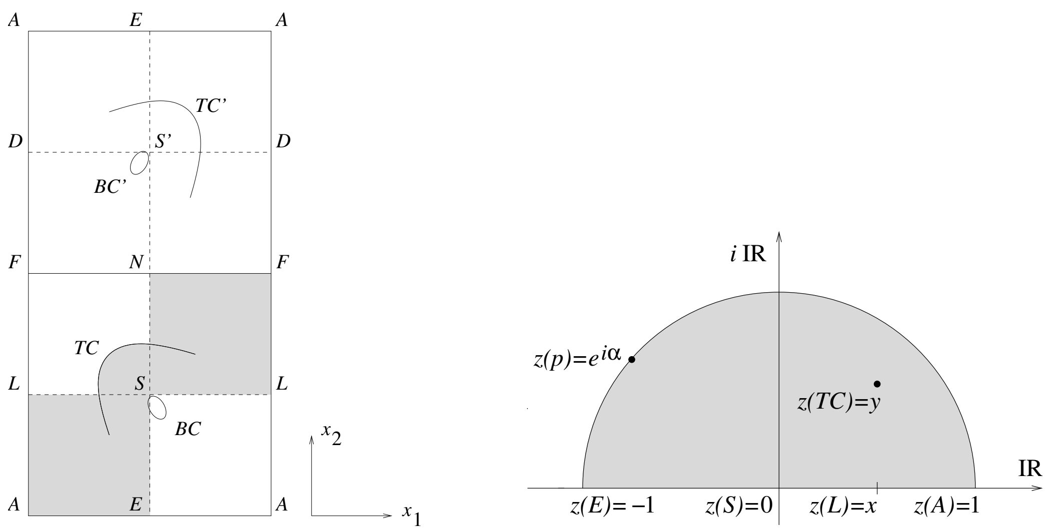


Figura 4.3: (a) $\overline{M}$ com pontos importantes; (b) a aplicação $z : \overline{M} \to \widehat{\mathbb{C}}$.

De (4.1), (4.4) e do fato que $z(A) = 1$ temos $z(E) = z(N) = -1$. Como a rotação em torno de $A \to L$ não fixa TC, então $z(TC) =: y \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. De

(4.2) e (4.3) temos $z(BC) = \overline{y}, z(TC') = 1/\overline{y}$ e $z(BC') = 1/y$. As curvas $A \to E \to A$ e $F \to N \to F$ são curvas de simetria reflexional localizadas em planos paralelos a $x_2 = 0$. Logo possuem pontos de mínimo e máximo. Sejam p, p' e q, q' tais pontos em $A \to E \to A$ e $F \to N \to F$, respectivamente. Notamos que $\measuredangle(A \to E, A \to L) = \pi/2$ e A não é fixado por ρ. Assim $\measuredangle(z(A \to E), z(A \to L)) = \pi/2$. Como a reflexão em $A \to E$ é dada por $z \mapsto 1/\overline{z}$, então $z(A \to L) \subset S^1$. Sem perder a generalidade tomamos $Im\{y\} > 0$, que implica $|y| < 1$ e $z(p) = e^{i\alpha}$ para algum $\alpha \in (0, \pi)$. Note que ρ intercambia p com q, logo $z(q) = e^{i\alpha}$. Da rotação em torno de $E \to S$ temos $z(p') = \overline{z}(p)$ e $z(q') = \overline{z}(q)$, assim $z(p') = z(q') = e^{-i\alpha}$. A Figura 4.3(b) ilustra a aplicação $z : \overline{M} \to \widehat{\mathbb{C}}$.

Como $\rho : \overline{M} \to \overline{M}$ é uma involução hiperelíptica, é fácil escrevermos uma equação algébrica para $\overline{M}$:

$$w^2 = \frac{Z^2 - 2Re\{Y\}Z + |Y|^2}{(Z - X)(Z - 2\cos\alpha)^2}, \tag{4.5}$$

onde $X = x + \dfrac{1}{x}$, $Y = y + \dfrac{1}{y}$ e $Z = z + \dfrac{1}{z}$ com $x \in (0, 1), |y| < 1$, $Im(y) > 0$ e $\alpha \in (0, \pi)$. Os valores $0^{\pm 1}, x^{\pm 1}, y^{\pm 1}$ e $\overline{y}^{\,\pm 1}$ dão exatamente todos os pontos de ramo de z, todos de ordem 1. Pela fórmula de Riemann-Hurwitz, $8/2 - 2 + 1 = 3$, que está de acordo com o gênero esperado de $\overline{M}$.

4.2 Os dados de Weierstrass de $\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$

Suponhamos agora que M é a imersão mínima completa de $\overline{M} \setminus \{TC, BC, TC', BC'\}$ em $\mathbb{R}^3$ e que (g, dh) são os dados de Weierstrass correspondentes em $\overline{M}$. Como a aplicação g é a projeção estereográfica da aplicação normal de Gauss em M, através do comportamento do vetor normal unitário tentaremos descrever uma equação para g em função de z.

Observando a Figura 4.1 e 4.3(a) vemos que M possui vetores normais unitários verticais que apontam no mesmo sentido em TC, BC, S, TC', BC', S'. Suponhamos que todos eles sejam $-\overrightarrow{e_3} = (0, 0, -1)$. Assim, $g(\{TC, BC, S, TC', BC', S'\}) = \{0\}$. Como o gênero de $\overline{M}$ é 3 e o número de fins do quociente de M pelo seu grupo de translação é 4, pela fórmula de Jorge-Meeks temos

$$deg(g) = 3 + 4 - 1 = 6.$$

Ou seja, os zeros da aplicação g são simples. Uma vez que g é uma aplicação meromorfa em uma superfície de Riemann compacta, o seu número de pólos e zeros (contados com multiplicidade) coincide e isto implica que g tem 6 pólos. Pela Figura 4.3(a) temos que D e L são pólos de g, pois estão na interseção das retas ortogonais $S' \to D$ com $D \to F$ e $S \to L$ com $A \to L$, respectivamente. Também temos que D e L são pólos simples, pois representam pontos de sela de M que terão curvatura Gaussiana estritamente negativa. Como as curvas $A \to E \to A$ e $F \to N \to F$ estão localizadas em planos paralelos a $x_2 = 0$, os pontos p, p' e q, q' são pólos simples pois D e L têm ordem 1, $deg(g) = 6$ e ρ intercambia p com q. Portanto, a análise dos zeros e pólos da g está concluída. Baseados na equação (4.5) e nas observações acima, temos que $g = icw$ para alguma constante $c \in \mathbb{C}^*$. Por outro lado, observando o comportamento da aplicação g no caminho $S \to L$, vemos que $g(S \to L) \in i\mathbb{R}$ e que $w(S \to L) \in \mathbb{R}$. Assim,

$$g = icw, \text{ onde } \ c > 0. \tag{4.6}$$

Para determinarmos a equação da diferencial dh observamos que, se M é a imersão mínima completa de $\overline{M} \setminus \{TC, BC, TC', BC'\}$, então todos os pólos e zeros da dh são determinados pelos pólos e zeros da g, juntamente com os fins e pontos regulares da M.

Nos pontos regulares $r \in M$ para os quais g é zero ou infinito a diferencial dh assume um zero com $ord_r(dh) = |ord_r(g)|$. Estes pontos são exatamente $S, S', D, L, p, p', q, q'$. Nos fins catenoidais de M, que correspondem aos pontos TC, BC, TC' e BC' de $\overline{M}$, temos pólos simples da dh. Como $deg(dh) = -\chi(\overline{M}) = 4$, a análise dos zeros e pólos de dh está concluída.

Comparando os resultados acima com as aplicações z e dz temos

$$dh = \frac{\widetilde{c}(Z - 2\cos\alpha)dz/z}{Z^2 - 2Re\{Y\}Z + |Y|^2}, \ \widetilde{c} \in \mathbb{C}^*. \tag{4.7}$$

Nas retas de M (e portanto também em $S \to L$) temos $x_3 = Re \int dh = 0$, ou seja, dh é imaginário puro nestes caminhos. Mas o lado direito da equação

(4.7) é, a menos de $\widetilde{c}$, real em $S \to L$ e dessa forma a constante $\widetilde{c}$ é imaginária pura. Fixamos $\widetilde{c} = -i$, já que qualquer outro valor só estaria reescalonando a superfície M. Dessa forma, a equação de dh fica

$$dh = -\frac{i(Z - 2\cos\alpha)dz/z}{Z^2 - 2Re\{Y\}Z + |Y|^2}. \tag{4.8}$$

Uma vez conhecidas as equações de $\overline{M}$, da aplicação g e da diferencial dh, temos a descrição explícita da superfície, ou seja, M é a imersão mínima completa em $\mathbb{R}^3$ de $\overline{M} \setminus z^{-1}(\{y^{\pm 1}, \overline{y}^{\pm 1}\})$ cujos dados de Weierstrass são definidos pelas equações (4.5), (4.6) e (4.8). Pela Tabela 4.1 verificamos que os caminhos indicados são geodésicas, sendo $E \to S, S \to L$ e $L \to A$ retas em M e $A \to E$ uma curva de simetria reflexional, já que pelo Teorema 2.5 $\dfrac{dg}{g} \cdot dh \in i\mathbb{R}$ nos primeiros casos e $\dfrac{dg}{g} \cdot dh \in \mathbb{R}$ no último.

Simetria	Involução	Valores de z	Valores de w	Valores de dh
$E \to S$	$(w, z) \mapsto (-\overline{w}, \overline{z})$	$z = t,\ -1 < t < 0$	$w \in i\mathbb{R}$	$dh(\dot{z}) \in i\mathbb{R}$
$S \to L$	$(w, z) \mapsto (\overline{w}, \overline{z})$	$z = t,\ 0 < t < x$	$w \in \mathbb{R}$	$dh(\dot{z}) \in i\mathbb{R}$
$L \to A$	$(w, z) \mapsto (-\overline{w}, \overline{z})$	$z = t,\ x < t < 1$	$w \in i\mathbb{R}$	$dh(\dot{z}) \in i\mathbb{R}$
$A \to E$	$(w, z) \mapsto (-\overline{w}, 1/\overline{z})$	$z = e^{it},\ 0 < t < \pi$	$w \in i\mathbb{R}$	$dh(\dot{z}) \in \mathbb{R}$

Tabela 4.1: Involuções e simetrias.

4.3 Análise dos períodos

A Figura 4.4 representa a peça fundamental de M com períodos abertos. Sobre ela tomamos a curva $\gamma := S \to L \to A \to E \to S$. Lembramos que para uma superfície de Riemann $\mathbf{R}$ e $\mathbf{w}$ uma 1-forma diferencial fechada em $\mathbf{R}$ a integral $\int_\sigma \mathbf{w}$, definida para qualquer representante da classe de homotopia de uma curva σ de $\mathbf{R}$, é chamada de período de $\mathbf{w}$. Além disso, se $X : \mathbf{R} \to \mathbb{R}^3$ é a imersão mínima de $\mathbf{R}$ em $\mathbb{R}^3$ então a diferença $X(\sigma(1)) - X(\sigma(0))$ é denominada de vetor período. Vamos, dessa forma, para toda curva fechada em $\overline{M} \setminus \{TC, BC, TC', BC'\}$ analisar o vetor período $Re \oint \phi_{1,2,3}$.

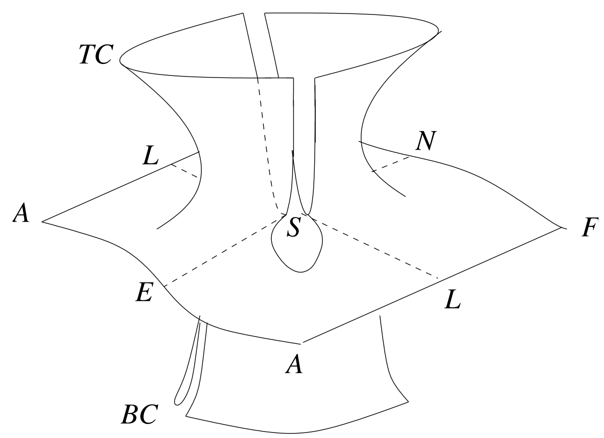


Figura 4.4: A peça fundamental com períodos abertos.

Tomando uma pequena curva simples fechada em $\overline{M} \setminus \{TC, BC, TC', BC'\}$ em torno de TC, a menos de orientação esta é homotópica a $\rho(\gamma) \cup \gamma$. Logo, verificar que o vetor período é nulo nesta curva é equivalente a mostrarmos que $Re \int_\gamma \phi_{1,2,3} = 0$. O mesmo vale para curvas simples fechadas em torno de BC, TC' ou BC', pois são imagens de TC por involuções de $\overline{M}$.

Sobre a curva $A \to L \to F$ o vetor período é zero em $Ox_{1,3}$ mas não-nulo em Ox_2, pois ele é levado a uma linha paralela a este eixo pela imersão mínima. Agora, $A \to E \to A$ está em um plano paralelo a $Ox_{1,3}$. Assim, seu período é nulo em Ox_2. Se o período for nulo em γ, teremos $Re \int_{A\to E} \phi_1 = Re \int_{L \to S} \phi_1 \neq 0$, pois o último é um segmento de reta em M. Finalmente, é suficiente provarmos que o vetor período é nulo em γ, ou seja, verificarmos que as constantes $c = c(x, y, \alpha)$ e $\alpha = \alpha(y)$ satisfazem às seguintes condições

$$\cos\alpha = \frac{\int_0^\pi \frac{\cos t dt}{4\cos^2 t - 4Re\{Y\}\cos t + |Y|^2}}{\int_0^\pi \frac{dt}{4\cos^2 t - 4Re\{Y\}\cos t + |Y|^2}}; \quad c^2 = c_1 := \frac{I_1 + I_2}{-I_3 + I_4}; \quad c^2 = c_2 := \frac{I_5 - I_6}{I_7 - I_8}, \tag{4.9}$$

onde $I_1 = \int_0^x |w^{-1}dh|$, $I_3 = \int_0^x |wdh|$, $I_5 = \int_{-1}^0 |w^{-1}dh|$, $I_6 = \int_x^1 |w^{-1}dh|$, $I_7 = \int_x^1 |wdh|$ e $I_8 = \int_{-1}^0 |wdh|$, para $z(t) = t$ variando em intervalos reais. Para $I_{2,4}$, $z(t) = e^{it}$ e $0 \le t \le \pi$, com $I_2 = \int_0^\pi |dh/w|$ e $I_4 = \int_0^\pi |wdh|$. Notamos que $I_{2,4}$ permanece invariante se escolhemos $z(t) = e^{-it}$.

De (4.5) e (4.8) claramente reconhecemos a complexidade das Equações (4.9). Se tentarmos o *teorema do valor intermediário*, muitos cuidados serão necessários. Por exemplo, precisamos observar a região xy onde ambos os denominadores de $c_{1,2}$ são não-nulos. Depois, a positividade deverá valer em uma certa sub-região conexa, em cujo bordo temos pontos onde $c_1 - c_2$ deverá trocar de sinal. Das equações (4.9) percebemos que estes procedimentos se mostraram extremamente trabalhosos e infrutíferos. Na próxima seção aplicaremos o *método-limite* para solucionar (4.9) praticamente sem contas.

4.4 Aplicação do Método-Limite

Para aplicarmos o método mencionado no Capítulo 1, analisaremos primeiro os dados de Weierstrass de $M = M_{x,y,\alpha}$. Se considerarmos a função z como uma variável do plano complexo, no limite de $x \to 0$ teremos os dados de Weierstrass da superfície-M_{L_b} (veja [14], p. 482). Para esta última temos a solução dos períodos por cruzamento transversal de dois gráficos (veja [14], pp. 486-9). A grosso modo, estes são gráficos de $xc_{1,2}$ em $x = 0$, e significam que as funções $c_{1,2}$ coincidem para $x > 0$ suficientemente pequeno e certos valores y, α que dependem de x. Além disso, o cruzamento acontece em valores positivos de $xc_{1,2}|_{x=0}$ e conseqüentemente c é real positivo.

Tomemos qualquer $\lambda > 1$ e $\rho \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$. Se x é suficientemente próximo de zero a escolha

$$\overline{y}(x) := \frac{xe^{i\rho}}{e^{i\rho} + i\lambda} \tag{4.10}$$

garante que $\overline{y}(x)$ pertence ao interior de $\mathcal{D}^- := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \leq 1 - Im\{z\}\}$.

Consideremos $C := \sqrt{x\lambda} \cdot c$ e K um compacto na região $\mathcal{B} := \{\zeta \in \widehat{\mathbb{C}} : Re\{\zeta\} \geq 0\} \backslash \{-\lambda i, e^{i\rho}\}$. Vamos provar que C^2 tem um limite positivo e finito. Assumimos isto por enquanto e também fazemos $C_j = \sqrt{x\lambda} \cdot c_j, j = 1, 2$. Para x suficientemente próximo de 0, o setor $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta + \frac{i\lambda}{1-x^2}| < \frac{\lambda x}{1-x^2}\}$ será disjunto de K. Seja $z : K \to \mathcal{D}^-$ a aplicação dada por $z(\zeta) = \frac{x\zeta}{\zeta + i\lambda}$ e definimos $G(\zeta) := g \circ z(\zeta)$, $dH := \frac{\lambda}{x} z^* dh$. Agora para qualquer $\zeta \in K$ fixado e, de acordo com (4.5), (4.6) e (4.8) segue-se as relações abaixo. Para maiores detalhes vide Anexo A.

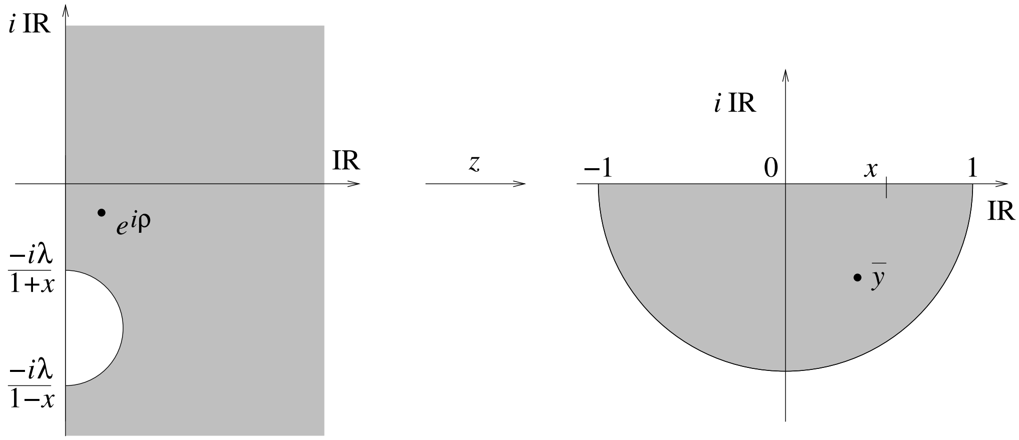


Figura 4.5: A aplicação $z(\zeta)$.

$$\lim_{x\to 0} G^2(\zeta) = \lim_{x\to 0} \frac{-C^2 w^2(\zeta)}{x\lambda} = \frac{iC^2\zeta(\zeta - e^{i\rho})(\zeta + e^{-i\rho})}{(\zeta + i\lambda)^2}; \tag{4.11}$$

$$\lim_{x\to 0} dH(\dot{\zeta}) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda dh(\dot{\zeta})}{x} = \frac{d\zeta}{(\zeta - e^{i\rho})(\zeta + e^{-i\rho})}. \tag{4.12}$$

Mas (4.11) e (4.12) são os dados de Weierstrass da superfície M_{L_b}, a menos de uma rotação de 90° em torno do eixo vertical (veja [14], pp. 483-4). Deste fato e de (4.9) é fácil ver que $\sqrt{\frac{\lambda^3}{x}} I_{1,5,6}$ e $\sqrt{\frac{\lambda}{x^3}} I_{3,7,8}$ vão convergir para as integrais em (13) e (22) de [14], pp. 486-8. Agora, a convergência *uniforme* pode ser estabelecida pelo seguinte argumento.

Notemos que $I_5 - I_6 = \int_\sigma dh/w$, onde σ é homotópica a $\partial\mathcal{D}^- \setminus (0, x)$ em $\mathcal{D}^- \setminus \{\overline{y}\}$. Similarmente, $I_7 - I_8 = \int_\sigma w dh$. Uma escolha adequada de K garante que $(\{0\} \times i[0, +\infty]) \cup \{(z^{-1})^* \sigma\} \subset K$. De [14], pp. 485-8, vemos que as correspondentes integrais-limites possuem a mesma propriedade. Logo, a convergência para x próximo de zero ainda será uniforme, pois as integrais estão bem definidas em caminhos contidos em K.

Vamos analisar $I_{2,4}$. Na seqüência provaremos que para uma curva $\zeta(t)$ homotópica a $\beta(t) := \frac{-i\lambda}{1-x^2}(1 + xe^{it})$, $t \in [0, \pi]$, temos $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\lambda^3}{x}} I_2 = 0$ e $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\lambda}{x^3}} I_4 = \frac{\lambda\pi}{f(\lambda)}$, onde $f(\lambda) = \sqrt{\lambda(1 + \lambda^2 + 2\lambda \text{sen } \rho)}$. Deste fato e da convergência uniforme dos dados de Weierstrass de $M_{x,y,\alpha}$ para M_{L_b} em K, segue-se que C_1 e C_2 coincidem em $x = 0$ com as constantes (13) e (22) de [14], pp. 486-8. A saber, $C_{1,2}$ são transversais em uma vizinhança de $x = 0$. Dessa forma, $C_1 = C_2$ (e conseqüentemente $c_1 = c_2$) para x próximo de zero, $\lambda = \lambda(x)$ com $\lambda(0) = \lambda_\rho$, e $\overline{y}(x) = xe^{i\rho}/(e^{i\rho} + i\lambda)$.

Em $\beta(t)$, um cálculo cuidadoso mostra que $\lim_{x\to 0} z(t) = e^{-it}$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} \cdot |w| \Big|_{\beta(t)} = \frac{|i\lambda + e^{i\rho}|}{2|\cos t - \cos\alpha|} \tag{4.13}$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{|dh|}{x^2}\Big|_{\beta(t)} = \frac{2|\cos t - \cos\alpha| dt}{|i\lambda + e^{i\rho}|^2}. \tag{4.14}$$

De (4.13) e (4.14) vemos que $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\lambda^3}{x}} I_2 = 0$ e $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\lambda}{x^3}} I_4 = \lambda\pi/f(\lambda)$. Isto finalmente prova que as Equações (4.9) têm uma solução positiva e simultânea numa curva $y(x, \lambda(x), \rho)$ e $\alpha = \alpha(y(x))$, para x positivo em uma vizinhança de zero.

4.5 Mergulho da peça fundamental

O nosso objetivo, nesta seção, é verificar que as auto-interseções de M ocorrem somente nos fins catenoidais. Utilizaremos argumentos similares aos apresentados em [14]. A convergência já estudada na Seção 4.4 será útil para simplificar a nossa tarefa, pois ali provamos a existência de uma constante positiva ε e uma curva $\overline{y} : (0, \varepsilon) \to \mathcal{D}^-$, para a qual a escolha $c = c(x, y(x), \alpha(x))$ em (4.6) satisfaz as Equações (4.9). Daqui em diante, c representará tal escolha.

Na verdade, o parâmetro ρ pode ser escolhido em $(-\pi/2, 0]$ e estabelece a curva $\lambda : (0, \varepsilon) \to (1, \infty)$, após o que y é finalmente dado por (4.10). Tomando $z = \frac{x\zeta}{\zeta + i\lambda}$, $\zeta \in \mathcal{B}$ e $dH = \lambda dh/x$, quando $x = 0$ as constantes $C_{1,2}$ da seção anterior fecham os períodos da superfície em [14].

Escolhemos qualquer $x \in (0, \varepsilon)$ e consideramos a imersão mínima $X_x : \overline{M} \setminus z^{-1}(\{y^{\pm}, \bar{y}^{\pm}\}) \to \mathbb{R}^3$ definida por (4.5) e (4.8). Assim, X_x restrito a $z^{-1}(\mathcal{D}^-)$ pode ser visto como uma função bivalente $X_x : D^- \setminus \{\bar{y}\} \to \mathbb{R}^3$. Na verdade, cada ramo w da raiz quadrada em (4.5) aplica qualquer ponto $q \in D^- \setminus \{\overline{y}\}$ num par de pontos em $\mathbb{R}^3$, digamos $X_x(q)^+$ e $X_x(q)^-$. Fixando $X_x(0)$ como a origem, então um é a imagem do outro por uma rotação de 180° em torno de Ox_3 (veja Figura 4.6(a)). Além disso, para qualquer curva fechada homotópica a $\partial\mathcal{D}^-$, o vetor período será zero, como provado na Seção 4.4.

Consideramos a peça fundamental P de M. Sejam P^- a imagem de $D^- \setminus \{\overline{y}\}$ em $\mathbb{R}^3$ por X_x, e P^+ a imagem em $\mathbb{R}^3$ de P^- pela rotação de 180° em torno de $X_x([0, x])$ ou de $X_x([-1, 0])$. Logo, $P = P^- \cup P^+$. A imagem de $\partial\mathcal{D}^-$ pela X_x está descrita na Figura 4.6(b).

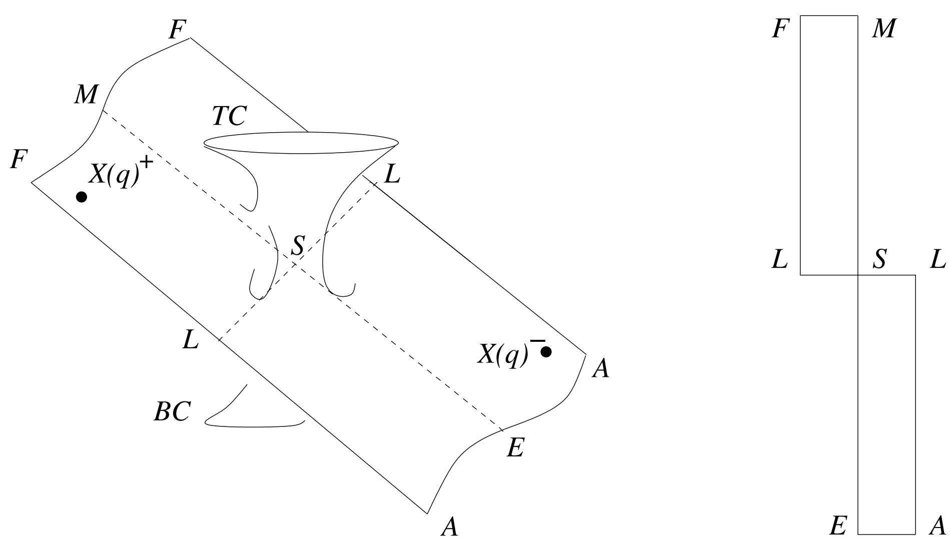


Figura 4.6: (a) A peça fundamental P; (b) a imagem de $\partial\mathcal{D}^-$ pela X_x.

Na Seção 4.4 definimos o conjunto $\mathcal{B}$. Consideramos $\mathcal{K}$ um subconjunto compacto de $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B} \setminus \mathcal{K} = V_{AE} \cup V_{BC}$, onde V_{AE} e V_{BC} são vizinhanças conexas de $-i\lambda$ e $e^{i\rho}$, respectivamente. De (4.11) e (4.12), vemos que os dados $(g, \lambda dh/x)$ convergem uniformemente em $\mathcal{K}$ para os dados de Weierstrass da superfície mergulhada M_{L_b}, com $\lim_{x\to 0} \sqrt{x\lambda}c(x) = c_{L_b}$ (veja [14]). Denotaremos este mergulho mínimo correspondente por X_0.

Como foi mencionado anteriormente, por [5] ou [15], se V_{BC} é suficientemente pequena, então $X_x\big|_{V_{BC}}$ é o gráfico de

$$x_3(x_1, x_2) = \frac{\eta}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2) + \mu + \frac{ax_1 + bx_2}{x_1^2 + x_2^2} + \mathcal{O}((x_1^2 + x_2^2)^{-1}),$$

onde η, μ, a e b são números reais. Isto caracteriza $X_x\big|_{V_{BC}}$ como um fim catenoidal. Como todos os parâmetros variam continuamente, $x \to 0$ implica que $X_x\big|_{V_{AE}}$ se aproxima de um par de fins Scherk, que também são gráficos (veja [16]). Assim podemos escolher V_{AE} pequena o suficiente para que $X_0\big|_{V_{AE}}$ seja um gráfico. Se x é bem próximo de zero, então a projeção de $X_x\big|_{\partial V_{AE}}$ sobre $x_3 = 0$ será um par de curvas simples fechadas $\mathcal{C}^{\pm}$, cada uma consistindo de um arco regular e três segmentos, conforme a Figura 4.7. De fato, estas curvas determinam duas regiões abertas no plano, R^+ e R^-, limitadas e simplesmente conexas.

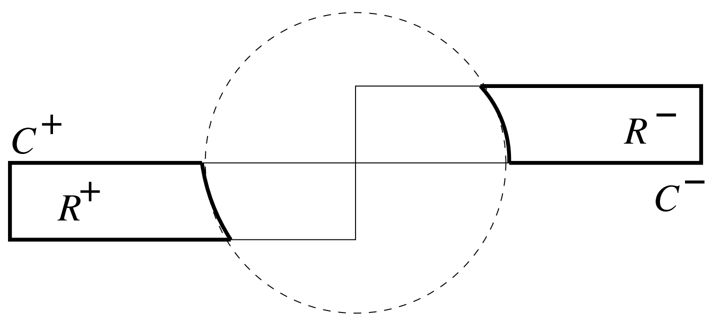


Figura 4.7: Regiões $R^{\pm}$ e curvas $\mathcal{C}^{\pm}$.

Para V_{AE} suficientemente pequena, $g(V_{AE})$ está contida em uma semiesfera de S^2. Isto implica que $(x_1, x_2)\big|_{V_{AE}}$ é uma imersão, a saber sobre $R^{\pm}$ pois x_1 é limitado para qualquer $x \in (0, \varepsilon/2)$. Como $\partial R^{\pm}$ são as curvas monótonas $\mathcal{C}^{\pm}$, então $X_x\big|_{V_{AE}}$ é um gráfico de x_3 como função de (x_1, x_2). Os fins não se interceptam para V_{AE}, V_{BC} e x suficientemente pequenos. Portanto, $X_x\big|_{V_{AE}}$, $X_x\big|_{V_{BC}}$ e $X_x\big|_{\mathcal{K}}$ são mergulhos disjuntos em $\mathbb{R}^3$.

$X_0\big|_{\mathcal{K}}$ é uma superfície mínima, completa, mergulhada e compacta em $\mathbb{R}^3$. Como o seu bordo não tem auto-interseções, então $X_x\big|_{\mathcal{K}}$ é ainda mergulhada para x próximo de zero. Além disso, $X_x\big|_{\mathcal{K}}$ não intercepta nem $X_x\big|_{V_{AE}}$ nem $X_x\big|_{V_{BC}}$, senão haveria uma bola em $\mathbb{R}^3$ contendo todo o bordo de $X_x\big|_{\mathcal{K}}$, mas não todo o resto dela. Isto é impossível no caso mínimo. Assim, as peças mergulhadas $X_x\big|_{V_{AE}}$, $X_x\big|_{V_{BC}}$ e $X_x\big|_{\mathcal{K}}$ formam uma única superfície mínima mergulhada $X_x : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^3$, para qualquer x suficientemente próximo de zero.

Podemos estender o resultado para todo x em $(0, \varepsilon)$ pelo princípio do máximo. Portanto, P^- é mergulhado em $\mathbb{R}^3$, e como P^+ é sua imagem sobre uma rotação de $180°$ em torno de segmentos de P^-, a peça toda P não terá auto-interseções. Uma vez que a imersão é própria, P é mergulhada em $\mathbb{R}^3$.

4.6 Comentários

Como vimos, os exemplos-$\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$ são uma família contínua a dois parâmetros de superfícies mínimas. É claro que, para cada exemplo, ambos os parâmetros controlam a escala de Q e o crescimento logarítmico dos fins. De (4.7) e (4.10) facilmente calculamos

$$Res(dh, z = \overline{y}) = \frac{\overline{Y} - 2\cos\alpha}{2(\overline{y} - 1/\overline{y})Im\{Y\}}. \tag{4.15}$$

Na Seção 4.4 provamos que a peça fundamental não tem períodos. Conseqüentemente, $Re\{2\pi i Res(dh, z = \bar{y})\} = 0$ e vale a seguinte relação

$$\cos\alpha = \frac{2Re\{y\}}{1 + |y|^2}. \tag{4.16}$$

Isto significa que a curva $y(x)$ iguala (4.9) com (4.16). Substituindo (4.16) em (4.15) obtemos

$$Res(dh, z = \overline{y}) = \frac{1 - |y|^2}{2Im\{Y\}}. \tag{4.17}$$

De (4.10) e (4.17) facilmente obtemos $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\lambda}{x} Res(dh, z = \overline{y}) = \frac{1}{2}\sec\rho$. Este é exatamente o valor em [14], p. 486. De fato, x e ρ atuam simultaneamente para o crescimento logaritmico e a escala de Q. Com o objetivo de obtermos parâmetros que controlam cada grandeza separadamente, digamos l e $\boldsymbol{q}$, devemos inverter o seguinte sistema de equações:

$$\ell = \frac{1-|y(x,\rho)|^2}{2Im\{Y(x,\rho)\}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{q} = \frac{I_1(x,\rho)+c^2(x,\rho)I_3(x,\rho)}{I_6(x,\rho)+c^2(x,\rho)I_7(x,\rho)}.$$

Vamos agora brevemente discutir outra superfície-limite que poderia ser usada para obter os exemplos-$\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$. Em [14], pp. 492-5, foram estudadas as superfícies M_{C_b}. Se fizermos $x \to 1$, então

$$\lim_{x\to 1} g^2 = \frac{-c^2(Z^2 - 2Re\{Y\} + |Y|^2)}{(Z-2)(Z-2\cos\alpha)^2} \tag{4.18}$$

e

$$\lim_{x\to 1} dh = \frac{-i(Z-2\cos\alpha)dz/z}{Z^2 - 2Re\{Y\} + |Y|^2}. \tag{4.19}$$

De [14], p. 493, reconhecemos (4.18) e (4.19) como os dados de Weierstrass das superfícies M_{C_b}. Além disso, $\lim\limits_{x\to 1} 2I_6 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 1} 2I_7 = \pi/|2-Y|$, a saber $c_{1,2}$ coincidem em $x=1$ com os correspondentes parâmetros López-Ros (41) e (42) de [14]. De fato,

$$I_6 = \int_x^1 |dh/w| = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^1 \frac{\sqrt{(x^2+1)t - t^2x - x}(t^2+1-2t\cos\alpha)^2 dt}{\sqrt{t}[(t^2+1)^2 - 2Re\{Y\}(t^3+t) + |Y|^2t^2]^{3/2}}.$$

Pela mudança de variáveis $v = (x-t)/(x-1)$, é claro que $\lim\limits_{x\to 1} 2I_6 = 0$.

$$2I_7 = 2\int_x^1 \frac{\sqrt{xt}\,dt}{\{(1-xt)(t-x)[(t^2+1)^2 - 2Re\{Y\}(t^3+t) + |Y|^2t^2]\}^{1/2}}.$$

Aplicando a mudança $t = x + (1-x^2)u^2$ segue-se que

$$2I_7 = 4\sqrt{x}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} \frac{\sqrt{(1-x^2)u^2 + x}\,du}{\{(1-xu^2)[(t^2+1)^2 - 2Re\{Y\}(t^3+t) + |Y|^2t^2]\}^{1/2}}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 1} 2I_7 = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{[(1-u^2)(4-4Re\{Y\}+|Y|^2)]^{1/2}} = \frac{\pi}{|2-Y|}.$$

Em [14], p. 494, foi obtido uma curva solução $(\alpha(t), y(t))$ na qual vale $c_1|_{x=1} = c_2|_{x=1}$. Esta curva é obtida por cruzamento transversal de gráficos em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. O *método-limite* estabelece funções $\alpha(t,x)$ e $y(t,x)$, para $x \in (1-\varepsilon, 1)$, que dão soluções positivas e simultâneas para (4.9).

Capítulo 5

A superfície Scherk-Costa duplamente periódica

5.1 Introdução

Neste capítulo utilizaremos o método limite para solução de problemas de períodos e mergulho no problema proposto no capítulo 10 de [12], ou seja, provar a existência da superfície duplamente periódica ilustrada abaixo.

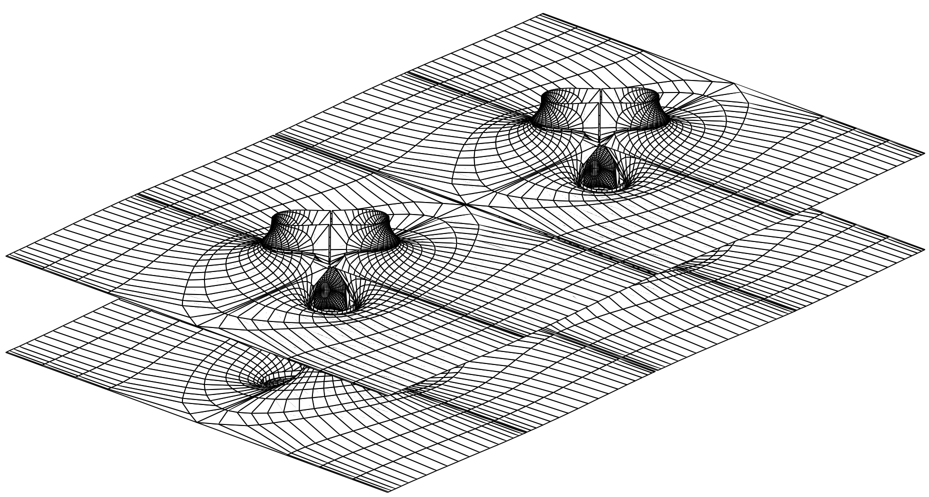


Figura 5.1: Superfície Scherk-Costa duplamente periódica.

Para melhor compreensão do trabalho, vamos descrever nas Seções 5.2 e 5.3 a construção da superfície como está apresentada em [12]. A Seção 5.4 se destinará à solução dos problemas de períodos.

5.2 A superfície de Riemann compacta $\overline{M}$ e a função z

Como observado na figura acima, vamos considerar a possibilidade de trocar os fins catenoidais da superfície Scherk-Costa simplesmente periódica (descrita em [14]) por uma curva planar de simetria reflexional.

Denotemos por M a superfície representada na Figura 5.1, e por $\mathcal{M}$ o quociente de M por seu grupo de translação. A compactificação dos fins Scherk de $\mathcal{M}$ conduzem a uma superfície de Riemann compacta que denotaremos por $\overline{M}$. A peça fundamental de M está representada na Figura 5.2(a), junto com alguns pontos significativos. Indicaremos por E_1 e E_2 os fins Scherk. Observamos também que $\overline{M}$ é invariante por reflexões na curva fechada em destaque, e as imagens de S, F, E_1 e E_2 sobre esta reflexão serão chamadas de S', F', E_1' e E_2', respectivamente.

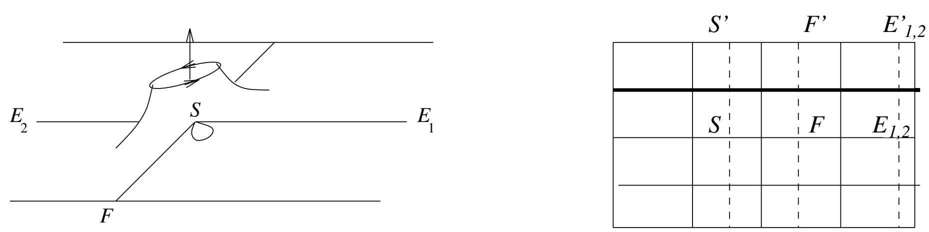


Figura 5.2: (a) A peça fundamental de M; (b) o toro $T = \rho(\overline{M})$.

Denotamos por ρ a rotação de $180°$ em torno do eixo x_3, indicado na Figura 5.2(a). Como $\overline{M}$ tem gênero 3 e ρ tem 4 pontos fixos S, F, S', F', pela fórmula de Euler-Poincaré segue-se que

$$\chi(\rho(\overline{M})) = \frac{\chi(\overline{M})}{2} + \frac{4}{2} = 0.$$

Por causa disto, $\rho(\overline{M})$ é um toro que identificamos por T. A simetria de reflexão horizontal de $\overline{M}$ é induzida por ρ sobre T, e uma vez que esta simetria fixa duas componentes concluímos que T é um toro retangular, representado na Figura 5.2(b). Agora, escolhendo uma função elíptica Z em T e definindo $z := Z \circ \rho : \overline{M} \to \widehat{\mathbb{C}}$, tentaremos deduzir os dados de Weierstrass de M em termos de z.

Consideramos a Figura 5.3(a) e os pontos marcados com um quadrado preto (■) sobre ela, que são os pontos de ramo de certa função meromorfa $Z : T \to \widehat{\mathbb{C}}$, com deg($Z$)=2. Tomamos o ângulo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ e escolhemos Z de forma que $\pm i \tan \alpha$ e $\pm i \cot \alpha$ sejam os seus valores de ramo, conforme a Figura 5.3(a). Como vimos no Capítulo 3 de funções elípticas, a menos de um biholomorfismo esta função é única e α determina um toro retangular. O toro é quadrado se, e somente se, $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

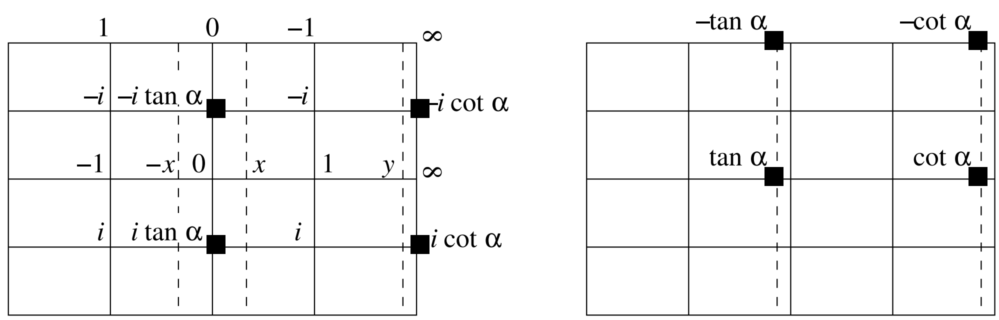


Figura 5.3: (a) Valores importantes de Z em T; (b) a função W em T.

Alguns dos valores de Z estão indicados na Figura 5.3(a). Observamos que $Z(\rho(F)) = -Z(\rho(S)) = x$, para algum $x \in (0, \infty)$, e $Z(\rho(E_{1,2})) = y$, onde $y^{-1} \in (-x^{-1}, x^{-1})$. Ou seja, incluímos a possibilidade de y ser ∞. Conseqüentemente, $Z(\rho(S')) = -Z(\rho(F')) = x$ e $Z(\rho(E'_{1,2})) = -y$.

Para descrevermos a aplicação g em $\overline{M}$ é necessário definirmos outra função elíptica $W : T \to \widehat{\mathbb{C}}$, cujos valores importantes estão representados na Figura 5.3(b). Podemos descrever W em termos de Z e Z' usando teoremas de funções elípticas. No entanto, através de alguns argumentos fáceis vamos dar uma fórmula explícita para W^2.

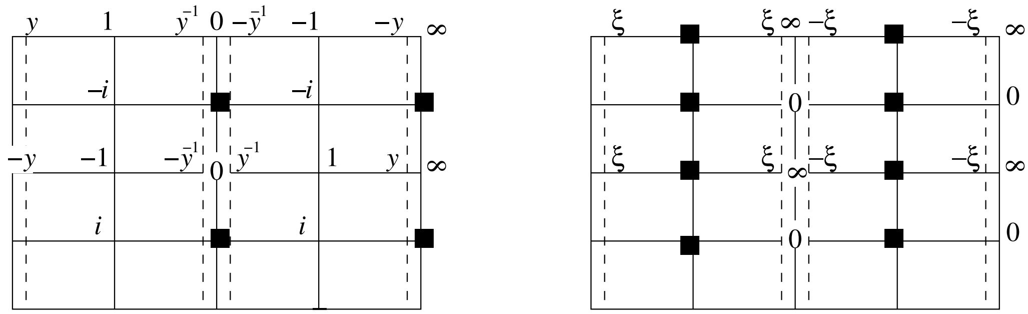


Figura 5.4: (a) Pólos e zeros de Z; (b) pólos e zeros de Z'/Z.

Consideramos a Figura 5.4, onde ξ é um valor imaginário puro a ser determinado. Definindo

$$f := \frac{Z^2 - y^{-2}}{Z\left(\frac{Z'}{Z} + \xi\right)}$$

e comparando as Figuras 5.3(a) e 5.4, através de uma análise dos pólos e zeros destas funções é fácil ver que, para uma certa constante complexa c, vale a igualdade $cf^2 = \frac{W^2 - \tan^2\alpha}{W^2 - \cot^2\alpha}$. Com base na Figura 5.3(a) e no Capítulo 2, podemos facilmente descrever uma equação algébrica para T como segue:

$$Z'^2 = -(Z^2 + \tan^2\alpha)(Z^2 + \cot^2\alpha). \tag{5.1}$$

Dessa forma, $\left(\frac{Z'}{Z}\right)^2 = -(Z^2 + Z^{-2} + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha)$ e conseqüentemente fixamos $\xi = i(y^2 + y^{-2} + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$. Da Figura 5.3 temos que $W = \infty$ implica $Z = \pm i\left(\frac{1 + y^2\cot^2\alpha}{y^2 + \cot^2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$. Por outro lado, para $W = \infty$ também temos $cf^2 = 1$, donde

$$c = f^{-2}|_{W=\infty} = \frac{\cot^2\alpha \cdot y^2}{[2 + \cot^2\alpha \cdot (y^2 + y^{-2})]^2} \cdot (\tan^2\alpha - \cot^2\alpha + |\xi|^2)^2.$$

A relação explícita entre W^2, Z e Z' é dada por

$$W^2 = \cot^2\alpha + \frac{\cot^2\alpha - \tan^2\alpha}{cf^2 - 1}, \quad \text{onde} \quad f = \frac{Z^2 - y^{-2}}{Z' + \xi Z}. \tag{5.2}$$

5.3 A aplicação de Gauss de M e a função g em $\overline{M}$

Consideramos $z := Z \circ \rho$ e $w := W \circ \rho$. Dessa forma, z e w são funções meromorfas em $\overline{M}$ e deg(z)=deg(w)=4. Baseados nas Figuras 5.1 e 5.2(a), observamos que os vetores normais unitários em M são verticais em S, F, E_1 e E_2. Se assumirmos que em S o vetor normal aponta para baixo, então em F, E_1 e E_2 ele apontará para cima. Conseqüentemente, $g(\{S, F', E'_{1,2}\}) = \{0\}$ e $g(\{S', F, E_{1,2}\}) = \{\infty\}$. Exceto nos pontos mencionados acima, não é esperado que o vetor normal unitário seja vertical em nenhum outro ponto de $\overline{M}$. Além disso, todos os pólos e zeros de g são simples. Portanto deg(g)=4.

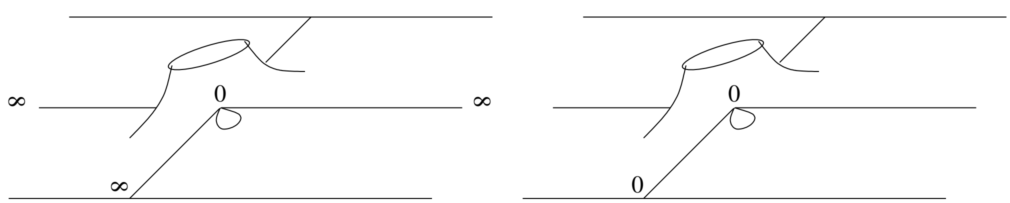


Figura 5.5: (a) Pólos e zeros de g; (b) pólos e zeros de dh.

Baseados nas Figuras 5.3 e 5.5(a), concluímos que

$$g^2 = \frac{x+z}{x-z} \cdot \frac{\cot\alpha + w}{\cot\alpha - w}. \tag{5.3}$$

De fato, ambos os lados de (5.3) estão relacionados através de uma constante de proporção. Mas, uma vez que o vetor normal unitário é horizontal sobre a curva fechada em destaque na Figura 5.2(a), temos que g é unitário sobre este caminho. Como z e w são imaginários puros sobre esta curva, segue-se que esta constante de proporção será unitária. Além disso, baseados nas Figuras 5.2(a) e 5.3, temos que g é real para $z \in (-x, x)$ e imaginário puro para $z \in \mathbb{R} \setminus (-x, x)$. Como $w \in [-\cot\alpha, \cot\alpha]$ quando z é real, concluímos que a constante de proporção unitária é 1. Portanto, definimos $\overline{M}$ como um membro de uma família de superfícies de Riemann compactas dadas por (5.3).

Aplicando a fórmula de Riemann-Hurwitz para (5.3), obtemos

$$\frac{4(2-1) + 8(2-1)}{2} - 4 + 1 = 3.$$

Assim, o gênero de $\overline{M}$ é três. Agora, vamos verificar se $\overline{M}$ realmente tem todas as simetrias que esperamos e se g realmente corresponde ao vetor normal unitário em M. Começamos por mostrar que $w(\overline{z}) = \overline{w}(z)$ e $w(-\overline{z}) = -\overline{w}(z)$. De (5.1) temos $Z'(\overline{Z}) = \pm\overline{Z'}(Z)$. Mas de acordo com (5.1), Z' é imaginário puro onde Z é real. Assim, $Z'(\overline{Z}) = -\overline{Z'}(Z)$. Agora, lembrando que $\xi = i|\xi|$ e usando (5.2) obtemos $f(\overline{Z}) = -\overline{f}(Z)$ e $W^2(\overline{Z}) = \overline{W}^2(Z)$. Logo, $W(\overline{Z}) = \pm\overline{W}(Z)$. Mas $W \in [-\cot\alpha, \cot\alpha]$ quando Z é real, então $W(\overline{Z}) = \overline{W}(Z)$. Agora aplicamos $z = Z \circ \rho$ e $w = W \circ \rho$ a esta relação.

Usando (5.1) novamente, no caso $Z \to -\overline{Z}$ temos duas possibilidades: ou $Z'(-\overline{Z}) = \overline{Z'}(Z)$ ou $Z'(-\overline{Z}) = -\overline{Z'}(Z)$. Entretanto, nossas suposições sobre as simetrias de M não implicam que ρ induz sobre $\overline{M}$ a involução $(Z', Z) \to (-\overline{Z'}, -\overline{Z})$ em T. Assim, consideramos somente $(Z', Z) \to (\overline{Z'}, -\overline{Z})$ e temos $W(-\overline{Z}) = \pm\overline{W}(Z)$. Uma vez que W é imaginário puro para $Z \in i \cdot [-\cot\alpha, \cot\alpha]$, então $W(-\overline{Z}) = -\overline{W}(Z)$ e conseqüentemente temos $w(-\overline{z}) = -\overline{w}(z)$.

Podemos sumarizar nosso estudo das simetrias de $\overline{M}$ e o comportamento de g na seguinte tabela:

Involuções	Valores de z	Valores de g
$(g, z) \to (\overline{g}, \overline{z})$	$z = t, -x < t < x$	$g \in \mathbb{R}$
$(g, z) \to (-\overline{g}, \overline{z})$	$z = t, x < t < y$	$g \in i\mathbb{R}$
$(g, z) \to (-\overline{g}, \overline{z})$	$z = t, y < t < -x$	$g \in i\mathbb{R}$
$(g, z) \to (1/\overline{g}, -\overline{z})$	$z = it, \tan\alpha < t < \cot\alpha$	$\|g\| \equiv 1$
$(g, z) \to (1/\overline{g}, -\overline{z})$	$z = it, -\cot\alpha < t < -\tan\alpha$	$\|g\| \equiv 1$

Tabela 5.1: Involuções e valores de z, g.

5.4 A diferencial dh em $\overline{M}$

Vamos agora escrever uma fórmula explícita para dh, observando os pontos regulares e os tipos de fins desejados para a superfície M. Baseados nas Figuras 5.2(a) e 5.3(a), vemos que S e F correspondem a pontos regulares de M em que o vetor normal é vertical. O mesmo é válido para S' e F'. Dessa forma, $dh(\{S, F, S', F'\}) = \{0\}$. Como M possui somente fins do tipo

Scherk, todos na direção x_1, então dh não possui pólos e é holomorfa em $\overline{M}$. Além disso, como deg(dh)=4, concluímos que todos os zeros de dh são simples. Eles estão representados na Figura 5.5(b).

Baseados na Figura 5.3(a), havíamos estabelecido a seguinte equação algébrica de T

$$Z'^2 = -(Z^2 + \tan^2 \alpha)(Z^2 + \cot^2 \alpha). \tag{5.4}$$

Da Figura 5.5(b), imediatamente verificamos que

$$dh = \frac{dz}{Z' \circ \rho}. \tag{5.5}$$

A priori, ambos os lados de (5.5) são apenas proporcionais, mas como z é real nas retas de $\overline{M}$, de (5.4) obtemos valores imaginários puros para $Z' \circ \rho$ nestes caminhos. Dessa forma, a constante de proporção em (5.5) será real, e a escolhemos como sendo 1. Isto implica que (5.5) também é consistente com $Re\{dh\} = 0$ sobre a curva fechada em destaque na Figura 5.2(a). Disto temos $z = it, \tan \alpha < |t| < \cot \alpha$, que conduz a valores reais para $Z' \circ \rho$.

De forma análoga também poderíamos ter definido a equação algébrica de T por $W'^2 = (W^2 - \tan^2 \alpha)(W^2 - \cot^2 \alpha)$ e a diferencial por $dh = \frac{dw}{W' \circ \rho}$, ou seja,

$$dh = \frac{dw}{\sqrt{(w^2 - \tan^2 \alpha)(w^2 - \cot^2 \alpha)}}. \tag{5.6}$$

Exatamente neste ponto podemos provar que M de fato possui as geodésicas planas e as retas ilustradas pela Figura 5.1. Sumarizamos isto na seguinte tabela:

$z = t, -x < t < x$	$g \in \mathbb{R}$	$dh(\dot{z}) \in i\mathbb{R}$
$z = t, x < t < y$	$g \in i\mathbb{R}$	$dh(\dot{z}) \in i\mathbb{R}$
$z = t, y < t < -x$	$g \in i\mathbb{R}$	$dh(\dot{z}) \in i\mathbb{R}$
$z = it, \tan \alpha < t < \cot \alpha$	$\lvert g\rvert \equiv 1$	$dh(\dot{z}) \in i\mathbb{R}$
$z = it, -\cot \alpha < t < -\tan \alpha$	$\lvert g\rvert \equiv 1$	$dh(\dot{z}) \in i\mathbb{R}$

Tabela 5.2: Valores de z, g e dh.

Da tabela (5.2) é imediato verificar que $\frac{dg}{g} \cdot dh$ é real e imaginário puro exatamente onde esperávamos geodésicas planas e retas de M.

5.5 Solução dos problemas de períodos

Vamos considerar a Figura 5.6. Reproduzimos a Figura 5.2(a) e sua imagem sobre z, com alguns caminhos especiais indicados ali.

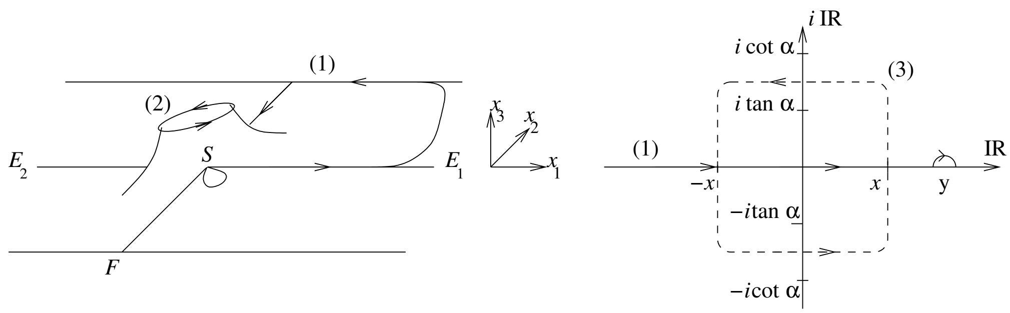


Figura 5.6: A peça fundamental de M e sua imagem sobre z.

Ao redor dos fins de $\overline{M}$, a saber $w^{-1}(\{\pm \cot \alpha\})$, consideramos pequenas curvas dadas por $w(t) = \pm \cot \alpha + \delta e^{it}$, onde δ é um real positivo e t varia no intervalo $[0, 4\pi]$ (relembramos que w toma os valores $\pm \cot \alpha$ com multiplicidade 2). Todas estas curvas são homotopicamente equivalentes, para valores de δ suficientemente pequenos. Dessa forma, tomando $\delta \to 0$, um simples cálculo conduz a $Re \oint(\phi_1, \phi_3) = 0$, e a menos de sinal, $Re \oint \phi_2 = Re\{2\pi i \cdot Res(\phi_2)|_{w=\cot \alpha}\}$, donde

$$Re \oint \phi_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\cot^2 \alpha - \tan^2 \alpha}} \cdot \sqrt{\frac{y+x}{y-x}}. \tag{5.7}$$

Com base nesta análise e na Tabela (5.2), é claro que $Re \int_{(1)} \phi_3 = 0$. Além disso, da Tabela (5.2) também temos $Re \int_{(2)} \phi_3 = 0$. A curva (2) da Figura 5.6 é homotopicamente equivalente à soma de (1) com suas imagens sob as aplicações $(g, z) \to (\overline{g}, \overline{z})$ e $(g, z) \to (-\overline{g}, \overline{z})$, compostas nesta ordem (veja Tabela 5.1). Esta composição corresponde à aplicação ρ, mencionada

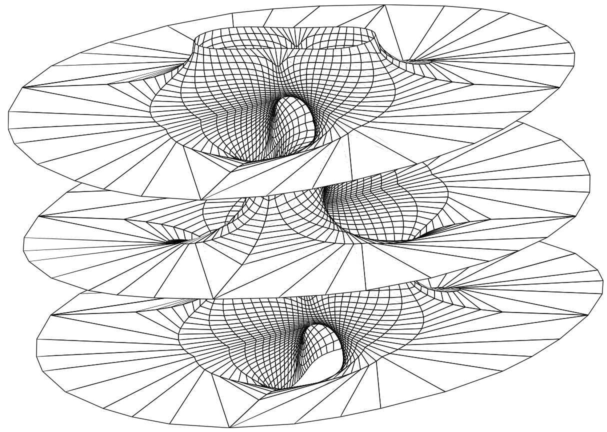


Figura 5.7: Superfície de Callahan-Hoffman-Meeks.

no começo deste capítulo. Uma vez que $\int_{\rho\circ(1)}(\phi_1, \phi_2) = -\int_{(1)}(\phi_1, \phi_2)$, então $Re \int_{(2)}(\phi_1, \phi_2) = 0$. Resta provarmos que

$$Re \int_{(1)} (\phi_1, \phi_2) = 0. \tag{5.8}$$

Na Figura 5.6, a curva (3) é simétrica com respeito à geodésica (2). Por causa disto, a única componente não nula do vetor período $Re \int_{(3)} \phi_{1,2,3}$ será a terceira. De fato, $Re \int_{(3)} \phi_3 \neq 0$, porque nós já havíamos mostrado que $Re \int_{(1)} \phi_3 = Re \int_{(2)} \phi_3 = 0$, e se $Re \int_{(3)} \phi_3$ fosse zero, isto contradiria o Teorema 2.10 do Capítulo 2. Esta componente gera o período vertical de M, sugerido pela Figura 5.1. O período horizontal é dado por (5.7).

Reduzimos nossa análise dos problemas de períodos a uma única tarefa, a saber, a prova de (5.8), que desejamos concluir nesta seção. Para tanto, vamos mostrar que os dados de Weierstrass (5.3) e (5.5) convergem para os dados de Weierstrass da Callahan-Hoffman-Meeks (CHM). Veja a Figura 5.7.

Consideramos K um conjunto compacto do toro, que não contenha os pontos $w^{-1}(\{\pm \cot \alpha\})$. Da Figura 5.8 temos que $\left(\dfrac{x+z}{x-z}\right)^2$ converge unifor-

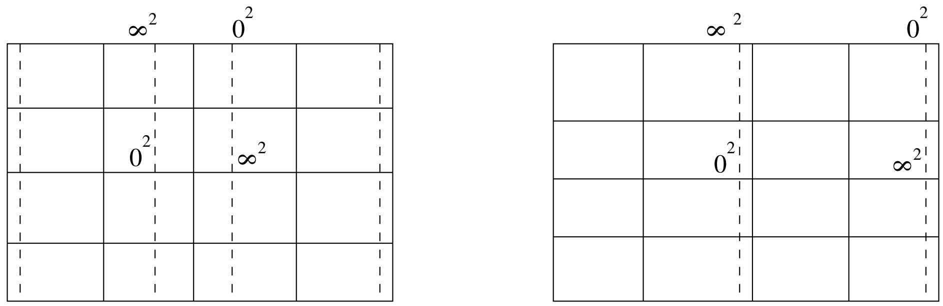


Figura 5.8: (a) Pólos e zeros de $\left(\frac{x+z}{x-z}\right)^2$; (b) pólos e zeros de $\left(\frac{w-\tan\alpha}{w+\tan\alpha}\right)\left(\frac{\cot\alpha+w}{\cot\alpha-w}\right)$.

memente em K para a aplicação $\left(\dfrac{w-\tan\alpha}{w+\tan\alpha}\right)\left(\dfrac{\cot\alpha+w}{\cot\alpha-w}\right)$, quando x e y tendem para 1. Assim, da equação (5.3) segue-se que

$$g^4 = \frac{w-\tan\alpha}{\tan\alpha+w}\left(\frac{\cot\alpha+w}{\cot\alpha-w}\right)^3. \tag{5.9}$$

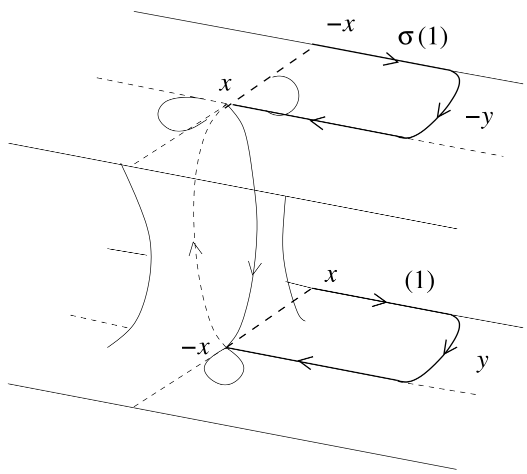


Figura 5.9: Descrição da curva (1) e de sua imagem pela involução σ.

Portanto, os dados de Weierstrass da superfície Scherk-Costa duplamente periódica vão convergir para (5.9) e (5.6), que são os dados de Weierstrass da CHM conforme [2].

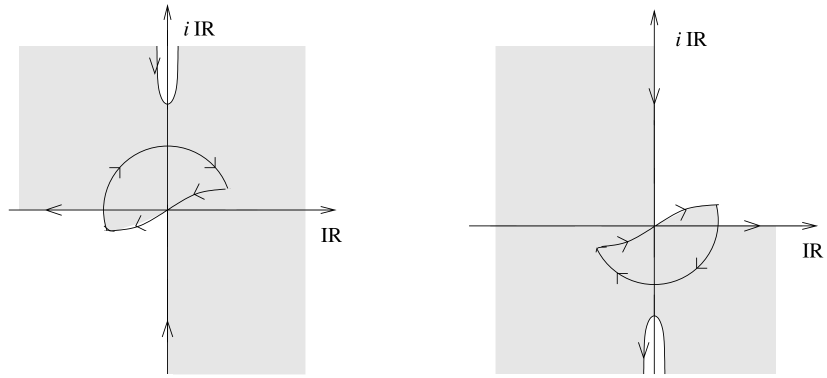


Figura 5.10: Domínio fundamental da g.

Observação 5.1: Se $\phi_{1,2,3}$ são os dados de Weierstrass para (g, dh), chamamos $\widetilde{\phi}_{1,2,3}$ os dados para $(\widetilde{g}, dh) = (e^{-i\pi/4}g, dh)$. No caso da CHM, automaticamente temos $Re\int_{(1)}\widetilde{\phi}_1 = 0$ devido às simetrias adicionais.

Seja σ a involução dada por $(g, z) \to (-1/\overline{g}, -\overline{z})$. Da equação (5.6) e lembrando que $w(-\overline{z}) = -\overline{w}(z)$ temos $dh \to -\overline{dh}$. Dessa forma,

$$Re\int_{\sigma(1)}\frac{dh}{g} = Re\int_{(1)}\sigma^*\left(\frac{dh}{g}\right) = Re\int_{(1)}\overline{gdh}. \tag{5.10}$$

A Figura 5.9 sugere que (1) é homotópica à curva formada pela união de β e $\sigma(1)$, sendo β a representação do trecho vertical e $\sigma(1)$ a curva obtida de (1) através da involução σ. Tal fato pode ser verificado diretamente no plano complexo. Com esta observação podemos reescrever:

$$\begin{aligned} Re\int_{(1)}\phi_1 &= Re\int_{(1)}\frac{dh}{g} - Re\int_{(1)}g\cdot dh \\ &= Re\int_{(1)}\frac{dh}{g} - Re\int_{\beta\cup\sigma(1)}g\cdot dh \\ &= Re\int_{(1)}\frac{dh}{g} - Re\int_{\sigma(1)}g\cdot dh - Re\int_{\beta}g\cdot dh \\ &= -Re\int_{\beta}g\cdot dh, \text{ uma vez que (1) é uma curva real.} \end{aligned}$$

No trecho vertical $\beta := \beta^+ \cup \beta^-$, onde β^+ é a curva ascendente que vai

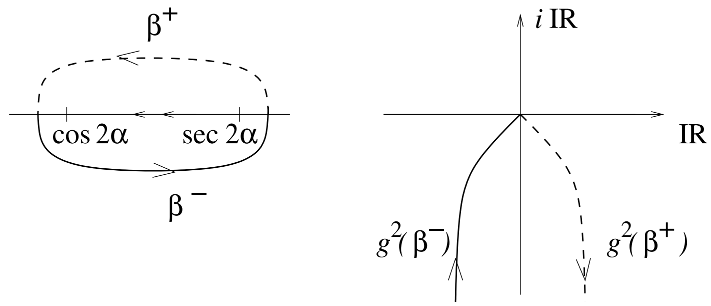


Figura 5.11: (a) Imagem de $\frac{\cot\alpha+w}{\cot\alpha-w}$, (b) imagem de g^2.

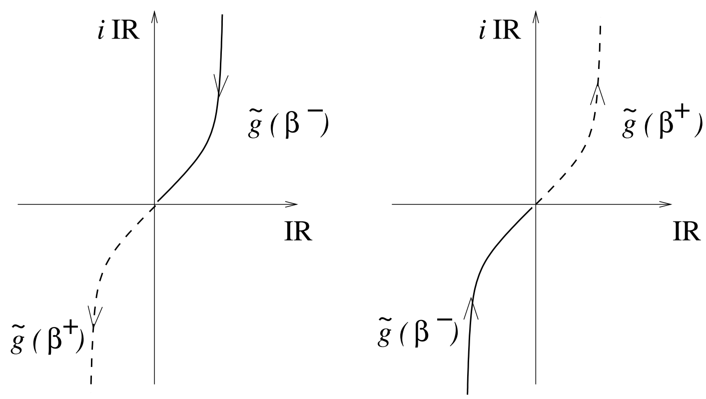


Figura 5.12: (a) Ramo da raiz quadrada de $\widetilde{g}$ no caso I, (b) ramo da raiz quadrada de $\widetilde{g}$ no caso II.

de $-x$ a x e β^- o caminho de x a $-x$ valem as relações $g \to -g$ e $dh \to dh$, sob a ação de ρ dada por $(g,z) \to (-g,z)$. Logo,

$$\int_\beta g\ dh = \int_{\beta^+\cup\beta^-} g\ dh = 2\int_{\beta^+} g\ dh = 2\int_{\beta^-} g\ dh.$$

Observação 5.2: A Figura 5.10 identifica a imagem de g por um domínio fundamental $\mathcal{D}$, isto é, um menor subconjunto de $X(M)$ que o gera por isometrias de $\mathbb{R}^3$. Convém ressaltarmos que a imagem da esquerda representa a aplicação $g\Big|_{\mathcal{D}}$ referente à "peça da frente" que contém β^-, enquanto que a imagem da direita diz respeito à "peça de trás", que contém β^+.

Consideremos os seguintes casos:

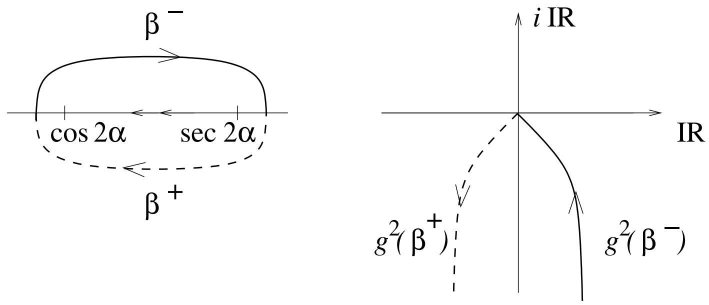


Figura 5.13: (a) Imagem de β no caso II, (b) imagem de g^2.

Caso I) Se $x = 1 \lesssim y$.

Para o caminho β^+ temos $z(t) = -e^{it}$ com $0 \leq t \leq \pi$. Neste caso a diferencial dh é representada por

$$dh = \frac{-idz/z}{[z^2 + z^{-2} + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha]^{1/2}} = \frac{dt}{[2\cos 2t + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha]^{1/2}},$$

e temos $\tan\alpha > w(t) > -\tan\alpha$. Além disso, $\frac{1+z}{1-z}\Big|_{\beta^+} = \frac{-i\mathrm{sen}\, t}{1+\cos t}$ donde $\frac{\cot\alpha + w}{\cot\alpha - w}$ e conseqüentemente $g^2(t)$ variam conforme a Figura 5.11.

Da Observação 5.1 notamos que a curva da Figura 5.11(b), rotacionada de $-i$, tem ramo de raiz quadrada dada pela Figura 5.12(a), por causa da Observação 5.2, donde $Re \int \widetilde{g} dh < 0$.

Caso II) Se $x = 1 \gtrsim y$.

Neste caso o trecho β^+ também é dado por $z(t) = -e^{it}$ com $0 \leq t \leq \pi$ e $\frac{1+z}{1-z} = \frac{-i\mathrm{sen}\, t}{1+\cos t}$. Por outro lado, como $x \gtrsim y$ temos que $\frac{\cot\alpha + w}{\cot\alpha - w}$ e conseqüentemente $g^2(t)$ variam conforme a Figura 5.13. Assim, também das Observações 5.1 e 5.2, temos que o ramo da raiz quadrada de g (rotacionada de $-i$) está representado na Figura 5.12(b), donde $Re \int_{(1)} \widetilde{g} dh > 0$.

Na Figura 5.14 destacamos o comportamento da superfície Scherk-Costa duplamente periódica para os diferentes casos citados acima e no caso especial em que $x = y = 1$.

Dessa forma, $Re \int_{(1)} \widetilde{g} dh = 0$ para valores adequados de (x, y) numa vizinhança de $(1, 1)$. Para a CHM, $Re \int_{(1)} \widetilde{\phi}_2$ é uma função de $\alpha \in (0, \pi/4)$ com

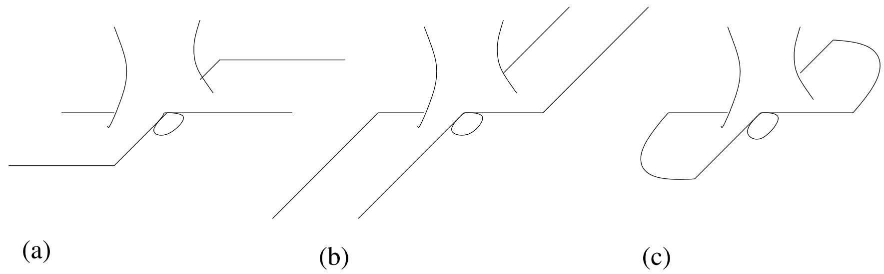


Figura 5.14: (a) $x < y$, (b) $x > y$, (c) $x = y$.

um único zero dado por λ^* de acordo com [9] (veja a Figura 5.15).

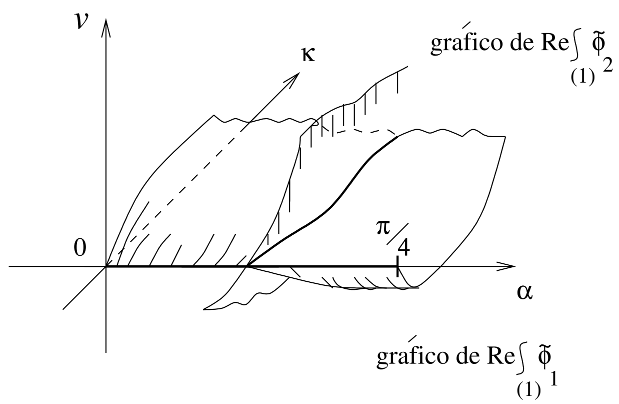


Figura 5.15: Períodos na curva (1).

Poderíamos, por exemplo, considerar x e y como funções de (α, κ) dadas por $x = 1 + \kappa\alpha, y = 1 + \kappa\alpha + 2\kappa(\frac{4\lambda^*+\pi}{8} - \alpha)$. Dessa forma, é imediato verificar que fixado $\kappa \gtrsim 0$ teremos $x = 1 < y$ para $\alpha \in (0, \frac{4\lambda^*+\pi}{8} - \alpha)$ e $x = 1 > y$ para $\alpha \in (\frac{4\lambda^*+\pi}{8} - \alpha, \frac{\pi}{4})$, ou seja, $Re \int_{(1)} \widetilde{\phi}_1 < 0$ no primeiro intervalo e $Re \int_{(1)} \widetilde{\phi}_1 > 0$ no segundo. Podemos variar $y(\alpha, \kappa)$ da forma $y = 1 + \kappa\alpha + 2\kappa(\frac{4\lambda^*+\pi}{8} \cdot s - \alpha), 1 \geq s > 0$. Logo, existe uma curva $(\alpha(t), \kappa(t))$ para a qual $Re \int_{(1)} \widetilde{\phi}_1 = 0$. Além disso, sobre esta curva teremos $x \neq y$, pois se $x = y \neq 1$ o período $Re \int_{(1)} \widetilde{\phi}_1$ não se anula na direção x_1.

Isto se deve ao fato de que teríamos uma CHM "com torsão", na qual $Re \int_{(1)} \widetilde{\phi}_1 \neq 0$ sempre, o que podemos ilustrar pela Figura 5.16 e pelo cálculo

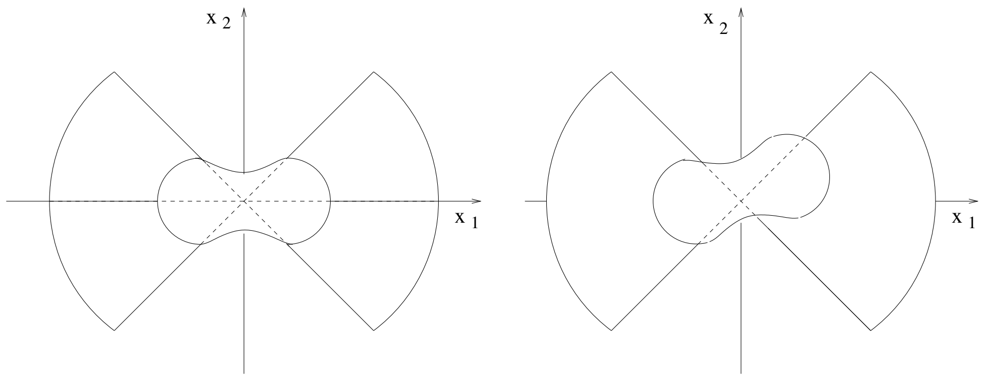


Figura 5.16: (a) Simetria da CHM aberta, (b) CHM com torsão.

simples abaixo:

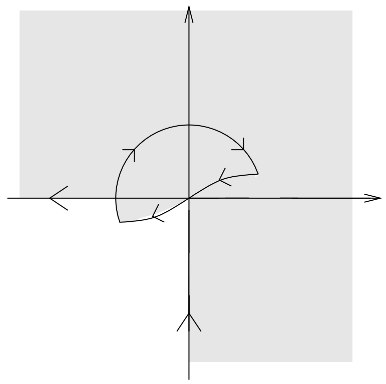
$$
\begin{aligned}
Re \int_\beta \widetilde{g} dh &= Re \int -i|\widetilde{g}||dh| = 0 \ \text{ pois } \ \widetilde{g} = -i|\widetilde{g}|, \\
Re \int_\beta \widehat{g} dh &= \cos(\tfrac{\pi}{2+\varepsilon}) \cdot Re \int |\widetilde{g}||dh| \neq 0 \ \text{ pois } \ \widehat{g} = e^{-i\pi/(2+\varepsilon)}|\widetilde{g}|.
\end{aligned}
$$

5.6 Mergulho da peça fundamental

Começamos esta seção identificando na Figura 5.17 o domínio fundamental $\mathcal{D}$ de $X(M)$. Vamos com isso provar que a peça fundamental de M é mergulhada.

Na seção anterior provamos a existência de uma curva $(x(t), y(t))$, com $0 \leq t < 1$, sobre a qual a equação (5.8) se verifica. Estabelecemos $t \in (0,1)$ e $lim_{t\to 0}\alpha(t) = \lambda^*$. Fixamos $t \in (0,1)$ e consideramos a imersão mínima $X_t : \mathcal{D} \setminus \{E_{1,2}\} \to \mathbb{R}^3$ definida por (5.3) e (5.6). Cada ramo da raiz quadrada de g aplica qualquer ponto $q \in \mathcal{D} \setminus \{E_{1,2}\}$ num par de pontos em $\mathbb{R}^3$, digamos $X_t(q)^+$ e $X_t(q)^-$. Fixado $X_t(0)$ como a origem, então um é a imagem do outro por uma rotação de $180°$ em torno de Ox_3. Além disso, para qualquer curva fechada homotópica a $\partial\mathcal{D}$, o vetor período será zero, como provado na seção anterior.

Consideramos a peça fundamental P de M. Seja P^- a imagem de $\mathcal{D} \setminus \{E_{1,2}\}$ em $\mathbb{R}^3$ sob X_t e P^+ a imagem em $\mathbb{R}^3$ de P^- sobre a rotação de $180°$



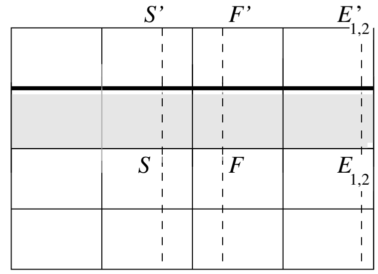


Figura 5.17: (a) Imagem de g do domíno fundamental; (b) Domínio fundamental $\mathcal{D}$.

em torno de $X_t([-x, x])$. Logo, $P = P^+ \cup P^-$.

Tome $\mathcal{K}$ um subconjunto de $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D} \setminus \mathcal{K} = V_E$, onde V_E é uma vizinhança conexa de $E_{1,2}$. De (5.6) e (5.9) vemos que os dados (g, dh) convergem uniformemente para os dados de Weierstrass da superfície mergulhada M_{CHM}. Denotaremos este mergulho mínimo por X_0. Para $t \to 0$ temos que $X_t|_{V_E}$ se aproxima de um fim planar, para V_E suficientemente pequeno. Se t é próximo de zero então a projeção $X_t|_{\partial V_E}$ sobre $x_3 = 0$ são curvas $C^\pm$ que determinam duas regiões abertas e simplesmente conexas, R^+ e R^-. Como $g(V_E)$ está contida em uma semi-esfera de S^2, $(x_1, x_2)|_{V_E}$ é uma imersão sobre $R^\pm$ pois x_2 é limitado para qualquer $t \in (0, 1)$. Como $\partial R^\pm$ são curvas monótonas $C^\pm$, então $X_T|_{\partial V_E}$ é um gráfico de x_3 como função de (x_1, x_2).

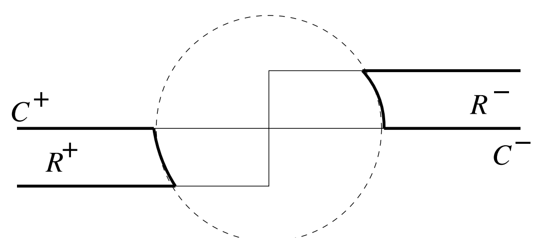


Figura 5.18: Regiões $R^\pm$ e curvas $C^\pm$.

Observamos que $X_0|_{\mathcal{K}}$ é uma superfície mínima, completa, mergulhada e compacta de $\mathbb{R}^3$. Como o seu bordo não tem auto-interseções, então $X_t|_{\mathcal{K}}$ é ainda mergulhada para t suficientemente pequeno. Além disso, $X_t|_{\mathcal{K}}$ não intercepta $X_t|_{V_E}$, senão haveria uma bola em $\mathbb{R}^3$ contendo todo o bordo de $X_t|_{\mathcal{K}}$ mas não todo o resto dela. Assim, as peças mergulhadas $X_t|_{\mathcal{K}}$ e $X_t|_{V_E}$ formam uma única superfície mínima mergulhada $X_t : \mathcal{D} \setminus \{E_{1,2}\} \to \mathbb{R}^3$, para t suficientemente próximo de zero.

Podemos estender o resultado para todo $t \in (0, 1)$ pelo princípio do máximo. Portanto, P^+ é mergulhado em $\mathbb{R}^3$, sendo P^- a sua imagem sobre uma rotação de 180° em torno do segmento de P^+. Então, a peça toda P não terá auto-intersecções. Uma vez que a imersão é própria, P é mergulhada em $\mathbb{R}^3$.

Agora, $P \subset \mathbb{R}^3/G$, onde G é o grupo de translações do $\mathbb{R}^3$ gerado por $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, x_3 + Re \int_{\beta^+} dh)$ e $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2 + Re \oint \phi_2, x_3)$. Nas faces horizontais de $\partial(\mathbb{R}^3/G)$ temos as curvas de reflexão em P. Nas faces verticais, temos retas de P. Então aplicando-se G a P temos M, que é uma superfície completa, duplamente periódica e mergulhada em $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 6

Superfície $\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$-Costa triplamente periódica

Inspirados na superfície $\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$-Costa vamos detalhar, neste Capítulo, a construção da $\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$-Costa triplamente periódica.

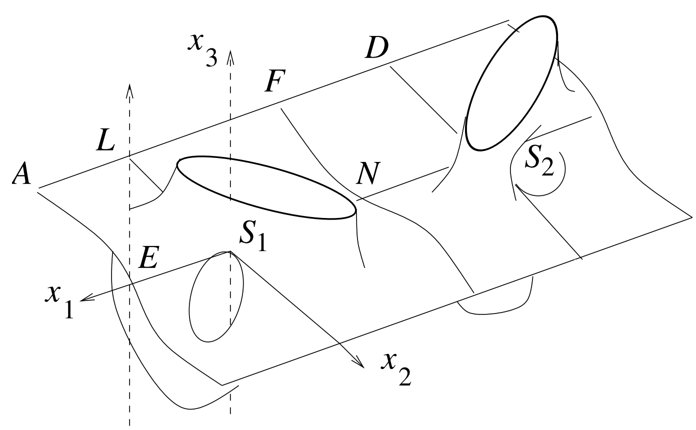


Figura 6.1: Peça fundamental da superfície M.

Seja M a superfície triplamente periódica cuja peça fundamental está representada na Figura 6.1, junto com alguns pontos significativos. A compactificação do quociente de M por seu grupo de translação é uma superfície de Riemann compacta, de gênero 9, que denotamos por $\overline{M}$. Observamos também que $\overline{M}$ é invariante por reflexões na curva fechada em destaque, e as imagens de A, L, F, D, E, S_1, N e S_2 sob esta reflexão são chamadas de $A', L', F', D', E', S_1', N'$ e S_2', respectivamente.

Consideremos $s : \overline{M} \to \overline{M}$ a aplicação dada pela composição de uma rotação de 180° em torno da reta r, paralela ao eixo x_3 e que passa em E, com uma reflexão no plano Ox_1x_2. Esta aplicação fixa os pontos E, N, E', A, F, A', F' e identifica os pontos L com D, S_1 com S_2, S_1' com S_2', e L_2 com D_2, gerando, no quociente, os pontos LD, S, S' e LD' respectivamente. Pela fórmula de Euler-Poincaré temos

$$\chi(\overline{M}/s) = 1 - 9 + \frac{8}{2} = -4.$$

Definindo $\rho : \overline{M} \to \overline{M}$ como a rotação de 180° em torno do eixo x_3 percebemos que ela é preservada em $\overline{M}/s$, deixando fixos os pontos S, S', LD, LD' e identificando A com F, A' com F', E com N e E' com N'. Assim,

$$\chi((\overline{M}/s)/\rho) = \frac{-4}{2} + \frac{4}{2} = 0.$$

Por causa disto, $\rho(s(\overline{M}))$ é um toro que identificamos por T. Como as simetrias de reflexões horizontais são induzidas em T e estas fixam duas componentes, concluímos que T é um toro retangular, representado na Figura 6.2(b).

Vamos agora escolher uma função elíptica Z em T e definir $z := Z \circ \rho \circ s : \overline{M} \to \widehat{\mathbb{C}}$, para deduzir os dados de Weierstrass de M em $\overline{M}$ em termos de z. Consideramos a Figura 6.2(a) onde os pontos marcados com um quadrado preto (■) são os pontos de ramo de certa função meromorfa $Z : T \to \widehat{\mathbb{C}}$, com deg($Z$)=2. Tomamos o ângulo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ e escolhemos Z de forma que $\pm i \tan \alpha$ e $\pm i \cot \alpha$ sejam os seus valores de ramo.

Alguns valores de Z estão indicados na Figura 6.2(a). Observamos que $Z(\rho(LD)) = -Z(\rho(S)) = x$, para algum $x \in (0, \infty)$, e $Z(\rho(R)) = y$, onde $y^{-1} \in (-x^{-1}, x^{-1})$ e R é a imagem por s de um ponto que está sobre o caminho $A \to E$ e que representa o ponto de máximo ou mínimo desta curva. Conseqüentemente, $Z(\rho(S')) = -Z(\rho(LD')) = x$ e $Z(\rho(R')) = -y$. Uma equação algébrica para T é dada por

$$Z'^2 = -(Z^2 + \tan^2 \alpha)(Z^2 + \cot^2 \alpha). \tag{6.1}$$

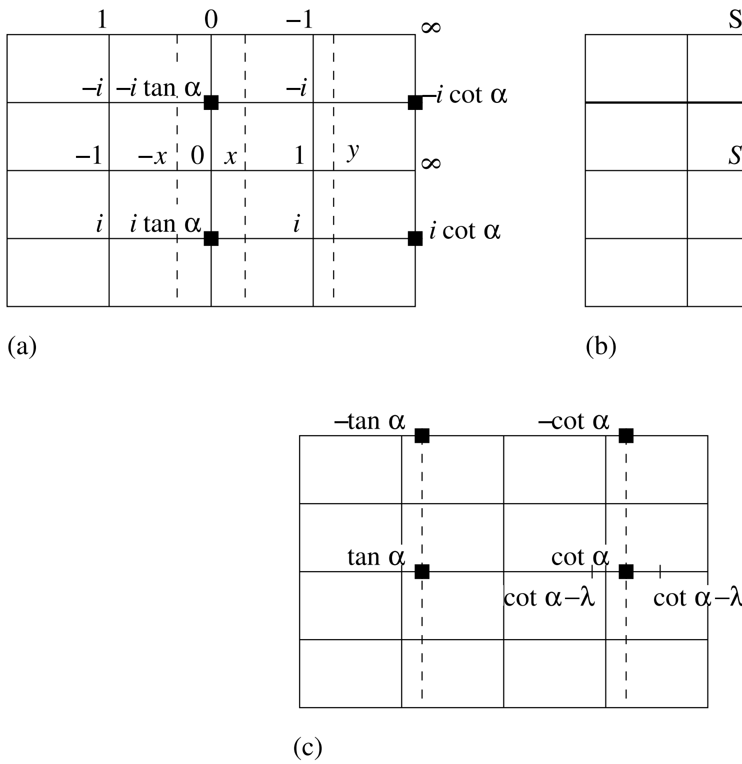


Figura 6.2: (a) Z em T; (b) O toro $T = \rho(s(\overline{M}))$; (c) W em T.

Para descrevermos a aplicação g em $\overline{M}$ é necessário definirmos outra função elíptica $W : T \to \widehat{\mathbb{C}}$, cujos valores importantes estão representados na Figura 6.2(c). A análise para descrevermos W em termos de Z e Z' é a mesma da Seção 5.2 do Capítulo 5. Note que $W = \cot\alpha - \lambda$ corresponde aos pontos E e A, enquanto que R corresponde a $Z = y$.

6.1 A aplicação de Gauss de M e a função g em $\overline{M}$

Consideramos $z := Z \circ \rho \circ s$ e $w := W \circ \rho \circ s$. Dessa forma, z e w são funções meromorfas em $\overline{M}$ e deg(z)=deg(w)=8. Baseados na Figura 6.1 observamos que os vetores normais unitários em M são verticais em L, D, S_1, S_2 e nos pontos r_1, r_2, r_3 e r_4 onde as curvas $A \to E \to A$ e $F \to N \to F$ assumem máximos e mínimos. Se assumirmos que em S_1 (e portanto também em S_2)

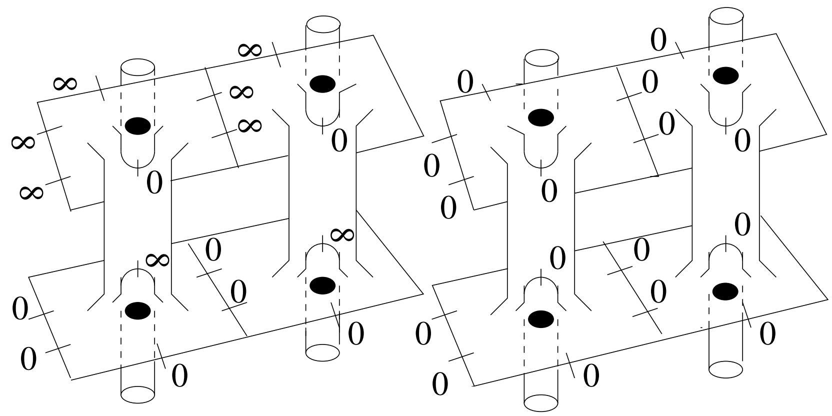


Figura 6.3: (a) Pólos e zeros da g; (b) pólos e zeros da dh.

o vetor normal aponta para cima, então $g(\{r_{1,2,3,4}, L, D, S_1', S_2'\}) = \{0\}$ e $g(\{r'_{1,2,3,4}, L', D', S_1, S_2\}) = \{\infty\}$. Exceto nos pontos mencionados acima não é esperado que o vetor normal unitário seja vertical em nenhum outro ponto de $\overline{M}$. Além disso, todos os pólos e zeros de g são simples. Portanto deg(g)=8.

Baseados na Figura 6.3(a) concluímos que

$$g^2 = \frac{x+z}{x-z} \cdot \frac{\cot\alpha + w}{\cot\alpha - w}. \tag{6.2}$$

De fato, ambos os lados de (6.2) estão relacionados através de uma constante de proporção, que facilmente concluímos ser 1. Portanto, definimos $\overline{M}$ como um membro de uma família de superfícies de Riemann compactas dadas por (6.2).

Aplicando a fórmula de Riemann-Hurwitz para (6.2), obtemos

$$\frac{16 + 2 \cdot 4 + 8}{2} - 8 + 1 = 9.$$

Assim, o gênero de $\overline{M}$ é nove.

6.2 A diferencial dh em $\overline{M}$

Nos pontos regulares de M em que o vetor normal unitário é vertical temos que dh assume zero com $ord(dh) = |ord(g)|$. Logo,

$$dh(\{r_{1,2,3,4}, r'_{1,2,3,4}, L, L', D, D', S_{1,2}, S'_{1,2}\}) = \{0\}.$$

Como M não possui nenhum fim, então dh não possui pólos e é holomorfa em $\overline{M}$. Além disso, como deg(dh)=16, concluímos que todos os zeros de dh são simples.

Baseados na Figura 6.3(b), imediatamente verificamos que

$$dh = \frac{dz}{Z' \circ \rho} \cdot u \quad \text{onde} \quad u^2 = \frac{\cot^2 \alpha - w^2}{\cot^2 \alpha - (w - \lambda)^2}. \tag{6.3}$$

Observamos que a função u define um polinômio $P(u, z) = 0$ que determina uma família de superfícies de Riemann compactas. Apesar de não ser a mais geral, resolverá naturalmente um dos três problemas de períodos.

A priori, ambos os lados de (6.3) são apenas proporcionais, mas como z é real nas retas de $\overline{M}$, de (6.1) obtemos valores imaginários puros para $Z' \circ \rho$ nestes caminhos. Dessa forma, a constante de proporção em (6.3) será real, e a escolhemos como sendo 1.

De forma análoga também poderíamos ter definido a equação algébrica de T por $W'^2 = (W^2 - \tan^2 \alpha)(W^2 - \cot^2 \alpha)$ e teríamos $\frac{dz}{Z' \circ \rho} = \frac{dw}{W' \circ \rho}$, pois ambas são induzidas da mesma forma holomorfa no toro. Então

$$dh = \frac{dw}{\sqrt{(\tan^2 \alpha - w^2)(\cot^2 \alpha - (w - \lambda)^2)}}. \tag{6.4}$$

As equações (6.2) e (6.3) definem portanto os dados de Weierstrass da superfície $\mathcal{CL}_{\frac{\pi}{2}}$-Costa triplamente periódica. Devem-se, contudo, verificar as hipóteses de simetrias, o problema dos períodos e o mergulho. Estas análises formarão objeto futuro de pesquisa.

Capítulo 7

Apêndice A

Para $G(\zeta) := g \circ z(\zeta),\ dH := \frac{\lambda}{x} z^* dh$ e $z(\zeta) = \frac{x\zeta}{\zeta + i\lambda}$ a escolha $\overline{y}(x) := \frac{xe^{i\rho}}{e^{i\rho}+i\lambda}$ nos garante que, para qualquer $\zeta \in K$ fixado, valem as relações:

$$\lim_{x\to 0} G^2(\zeta) = \lim_{x\to 0} \frac{-C^2 w^2(\zeta)}{x\lambda} = \frac{iC^2\zeta(\zeta - e^{i\rho})(\zeta + e^{-i\rho})}{(\zeta + i\lambda)^2},$$

$$\lim_{x\to 0} dH(\dot{\zeta}) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda dh(\dot{\zeta})}{x} = \frac{d\zeta}{(\zeta - e^{i\rho})(\zeta + e^{-i\rho})}.$$

Da definição $Y(x) = y + \dfrac{1}{y}$ segue-se que $Y(x) = \dfrac{x}{1 - i\lambda e^{i\rho}} + \dfrac{1 - i\lambda e^{i\rho}}{x}$, donde $Re\{Y(X)\} = R_1 + R_2$, para $R_1 = \dfrac{x(1 + \lambda \text{sen}\,\rho)}{1 + 2\lambda \text{sen}\,\rho + \lambda^2}$ e $R_2 = \dfrac{1 + \lambda \text{sen}\,\rho}{x}$. Além disso, temos que $|Y|^2 = (R_1 + R_2)^2 + (I_1 + I_2)^2$, com $I_1 = \dfrac{x\lambda\cos\rho}{1 + 2\lambda \text{sen}\,\rho + \lambda^2}$ e $I_2 = \dfrac{-\lambda\cos\rho}{x}$. Analogamente, $Z = z + \dfrac{1}{z}$ implica que $Z(\zeta) = \dfrac{x^2\zeta^2 + (\zeta + i\lambda)^2}{x\zeta(\zeta + i\lambda)}$. Assim, fazendo $A(\zeta) = (x^2\zeta^2 + (\zeta + i\lambda)^2)^2 - 2(xR_1 + xR_2)(x^2\zeta^2 + (\zeta + i\lambda)^2)(\zeta + i\lambda)\zeta + ((R_1 + R_2)^2x^2 + (I_1 + I_2)^2x^2)(\zeta + i\lambda)^2\zeta^2,\ B(\zeta) = x^2\zeta^2 + (\zeta + i\lambda)^2 - (x^2 + 1)(\zeta + i\lambda)\zeta$ e $E(\zeta) = x^2\zeta^2 + (\zeta + i\lambda)^2 - 2\cos\alpha(\zeta + i\lambda))x\zeta$ temos que:

$$w^2(\zeta) = \frac{Z^2(\zeta) - 2Re\{Y\}Z(\zeta) + |Y|^2}{(Z(\zeta) - X)(Z(\zeta) - 2\cos\alpha)^2} = \frac{A(\zeta)x(\zeta + i\lambda)\zeta}{B(\zeta)E(\zeta)^2},$$

$$dh = \frac{-i(Z(\zeta) - 2\cos\alpha)dz/z}{Z^2(\zeta) - 2Re\{Y\}Z(\zeta) + |Y|^2} = \frac{\lambda x E(\zeta)d\zeta}{A(\zeta)}.$$

Uma vez que $\lim_{x\to 0} R_1 = 0$, $\lim_{x\to 0} xR_2 = 1 + \lambda\text{sen }\ \rho$, $\lim_{x\to 0} I_1 = 0$ e $\lim_{x\to 0} xI_2 = -\lambda\cos\rho$ podemos facilmente concluir que:

$$\begin{aligned}
1)\ \lim_{x\to 0} G^2(\zeta) &= \lim_{x\to 0} \frac{-C^2 w^2(\zeta)}{x\lambda} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-C^2}{x\lambda}\frac{A(\zeta)x(\zeta + i\lambda)\zeta}{B(\zeta)E(\zeta)^2} \\
&= \frac{-C^2}{\lambda}\frac{\lambda^2(-1 - 2i\zeta\text{sen}\,\rho + \zeta^2)\zeta}{(\zeta + i\lambda)^2 i\lambda} \\
&= \frac{iC^2\zeta(\zeta - e^{i\rho})(\zeta + e^{-i\rho})}{(\zeta + i\lambda)^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\ \lim_{x\to 0} dH(\dot{\zeta}) &= \lim_{x\to 0} \frac{\lambda dh(\dot{\zeta})}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\lambda}{x}\frac{\lambda x E(\zeta)d\zeta}{A(\zeta)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2 E(\zeta)d\zeta}{A(\zeta)} \\
&= \frac{\lambda^2 d\zeta}{\lambda^2(\zeta + e^{i\rho})(\zeta + e^{-i\rho})} \\
&= \frac{d\zeta}{(\zeta + e^{i\rho})(\zeta + e^{-i\rho})}.
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] Barbosa, J.L., Carmo, M.P. and Eschenburg, J.: Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds, Math. Z., vol. 197, 1, (1988), 123-138.

[2] Callahan, M., Hoffman, D. and Meeks, W.H.: Embedded minimal surfaces with an infinite number of ends, Inventiones Math., vol. 96, (1989), 459-505.

[3] Chen, C.C. and Gackstatter, F.: Elliptische und hyperelliptische Funktionen und vollständige Minimalflächen vom Enneperschen Typ, Math. Ann., vol. 259, 3, (1982), 359-369.

[4] Costa, C.J.: Example of a complete minimal immersion in $\mathbb{R}^3$ of genus one and three embedded ends, Bol. Soc. Brasil. Mat., vol. 15, 1-2, (1984), 47-54.

[5] Hoffman, D. and Karcher, H.: Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 90, (1997), 5-93.

[6] Jorge, L. P. M. and Meeks, W.H.: The topology of complete minimal sufaces of finite total Gaussian curvature, Topology, vol. 2, (1983), 203-221.

[7] Kapouleas, N.: Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature, J. Differential Geom., vol. 47, 1, (1997), 95-169.

[8] Karcher, H.: Construction of minimal surfaces, Surveys in geometry, University of Tokyo, (1989), 1-96 and Lecture Notes 12, SFB256, Bonn, (1989).

[9] Martín, F. and Rodrígues, D.: A characterization of the periodic Callahan-Hoffman-Meeks surfaces in terms of their symmetries, Duke Math. J., vol. 89, 3, (1997), 445-463.

[10] Nitsche, J.C.C.: Lectures on minimal surfaces, Cambridge University Press, Cambridge, (1989).

[11] Osserman, R.: A survey of minimal surfaces, Dover, New York, 2nd ed, (1986).

[12] Ramos Batista, V.: Construction of new complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ based on the Costa surface, Doctoral Thesis, University of Bonn, (2000).

[13] Ramos Batista, V.: The doubly periodic Costa surfaces, Math. Z., vol. 240, (2002), 549-577.

[14] Ramos Batista, V.: Singly periodic Costa surfaces, J. London Math. Soc., vol. 72, 2, (2005), 478-496.

[15] Schoen, R. M.: Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces, J. Differential Geom., vol. 18, 4, (1983), 791-809.

[16] Traizet, M.: Construction de surfaces minimales en recollant des surfaces de Scherk, Ann. Inst. Fourier, vol. 46, (1996), 1385-1442.

[17] Traizet, M.: Adding handles to Riemann's minimal surfaces, J. Inst. Math. Jussieu, vol. 1, (2002), 145-174.

[18] Traizet, M.: An embedded minimal surface with no symmetries, J. Differential Geom., vol. 60, 1, (2002), 103-153.

[19] Weber, M.: The Genus One Helicoid is Embedded, Habilitation Thesis, Bonn, (2000).

[20] Weber, M.: A Teichmüller theoretical construction of high genus singly periodic minimal surfaces invariant under a translation, Manuscripta Math., vol. 101, 2, (2000), 125-142.