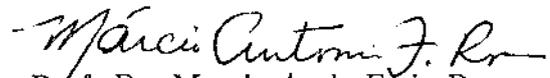


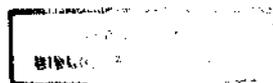
DEMONSTRAÇÃO DAS DESIGUALDADES DE MORSE, USANDO TEORIA DE SUPER-SIMETRIA SEGUNDO EDWARD WITTEN

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Victor Hugo Jorge Pérez e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 08 de 08 de 1996


Prof. Dr. Marcio A. de Faria Rosa
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.



Tese de Mestrado defendida e aprovada em 08 de agosto de 1996

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Werner Martins Vieira

Prof (a). Dr (a). WERNER MARTINS VIEIRA

Alcibíades Rigas

Prof (a). Dr (a). ALCIBÍADES RIGAS

Márcio Antonio de Faria Rosa

Prof (a). Dr (a). MÁRCIO ANTONIO DE FARIA ROSA

Agradecimentos

Gostaria neste trabalho de agradecer a todos aqueles que ao longo dos últimos anos participaram e enriqueceram minha vivência dentro e fora da universidade, sem vocês nada disso teria tido qualquer significado.

À minha família que eu amo muito mas de que eu estive mais afastado do que deveria nesses anos e também nos precedentes.

Ao meu orientador, prof. Márcio Rosa que sempre me ajudou muito, além dos limites da simples obrigação profissional, e a quem eu tenho por um amigo.

À Lourdes pelo excelente trabalho de digitação, pela atenção e dedicação.

Também agradeço ao Departamento de Matemática do IMECC/UNICAMP.

Finalmente agradeço ao povo deste país, que através da CAPES financiou meus estudos, e ao qual eu espero um dia retribuir de alguma forma.

Victor Hugo

Índice

Introdução	i
Capítulo 1. O Limite Semi-clássico	1
1.1. Cálculo de Autovalores de $\mathbb{K}^{(a)}$	2
1.2. O Teorema do Limite Semi-clássico	9
Capítulo 2. Algumas Propriedades da Função de Morse	22
2.1. Pontos Críticos, Função de Morse e Índice de uma Função de Morse	22
2.2. Lema de Morse	23
2.3. Desigualdades de Morse	28
Capítulo 3. Teoria de Hodge	31
3.1. Integração	32
3.2. O Laplaciano sobre $\overline{\Lambda}^p(M)$	34
3.3. Operador de Hodge	36
3.4. Super-simetria	43
Capítulo 4. O Laplaciano Deformado de Witten	48
4.1. Super-simetria com o Laplaciano Deformado	48
4.2. Operadores $a^i, (a^i)^*$	50
4.3. Demonstração das Desigualdades de Morse	55
4.4. Exemplos	61
Apêndice. O Cálculo do Operador Δ_t no Teorema 4.22 com Derivadas Covariantes	77
Bibliografia	85

Introdução

As desigualdades de Morse, vistas de uma maneira intuitiva, estabelecem uma relação entre a topologia da variedade M e os pontos críticos de uma função com valores reais em M e também estabelecem uma relação com a dimensão do núcleo do operador de Laplace-Beltrami em p -formas e o número de pontos críticos da função de Morse em uma variedade M , como veremos no decorrer do trabalho para uma variedade Riemanniana compacta M .

Nosso objetivo é desenvolver de forma razoavelmente autosuficiente (tomando como base o programa comumente coberto pelos alunos de Mestrado em Matemática da UNICAMP) a demonstração das desigualdades de Morse ao estilo de E. Witten em M (encontrado em [E.W.] ou [B.S.2]) isto é, usando alguns fatos do operador de Laplace-Beltrami sobre o espaço de p -formas de uma variedade Riemanniana compacta M , o Laplaciano deformado de E. Witten e a teoria de super-simetria. A demonstração usual pode ser encontrada em [Mi], com esta finalidade, desenvolveremos o material básico que consiste, por um lado, das definições e propriedades e, por outro, do estudo local de alguns operadores diferenciais. Assim, todos estes conceitos dividimos em quatro capítulos e um apêndice.

O primeiro capítulo contém propriedades referentes ao operador de Schrödinger num espaço de Hilbert, especificamente apresentaremos a demonstração do teorema do limite semi-clássico que será de muita valia para a demonstração de uma das desigualdades de Morse.

No segundo capítulo trataremos de algumas propriedades da teoria da Morse e o enunciado das desigualdades de Morse, as quais demonstraremos no capítulo quatro.

No terceiro capítulo desenvolveremos alguns conceitos básicos da teoria de Hodge, apresentando definições e propriedades do operador de Laplace-Beltrami e super-simetria.

No quarto e último capítulo apresentaremos o Laplaciano deformado de E. Witten com a finalidade de demonstrar as desigualdades de Morse ao estilo de E. Witten (i.e. usando super-simetria). Além da importância que têm estas desigualdades, também é importante apresentar exemplos específicos citados no final do capítulo quatro no caso de dimensão dois.

No apêndice demonstraremos de maneira formal o teorema 4.2.2 do capítulo quatro e para isso damos alguns conceitos básicos de Geometria Riemanniana.

Capítulo 1

O Limite do Autovalor Semi-clássico

Começaremos a desenvolver o chamado “Teorema do Limite Semi-clássico” com o qual demonstraremos duas das desigualdades de Morse, trata-se de uma aplicação de análise funcional, e como primeiro passo tomaremos um operador de Schrödinger definido em $L^2(\mathbb{R}^\nu)$.

Consideramos o operador auto-adjunto da forma

$$H(\lambda) = -\Delta + \lambda^2 h + \lambda g$$

definido como um operador diferencial fechado sobre $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$. Aqui, $h, g \in C^\infty(\mathbb{R}^\nu)$, g é limitado $h \geq 0$ e $h > \text{constante} > 0$ fora de um conjunto compacto.

Além disso, assumiremos que h é zero apenas em um número finito de pontos

$$\left\{ x^{(a)} \right\}_{a=1}^m \quad \text{e a Hessiana}$$

$$[A_{ij}^{(a)}] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} (x^{(a)}) \right],$$

e definida positiva para qualquer a ou $x^{(a)} \in \mathbb{R}^\nu$. Nosso objetivo é estimar os autovalores de $H(\lambda)$ para λ grande. A idéia é que para λ grande o potencial $\lambda^2 h + \lambda g$ assemelha-se ao de osciladores harmônicos centrados nos zeros de h , e separados por grandes barreiras de potencial. Assim, esperamos que para λ grande o espectro de $H(\lambda)$ seja similar ao espectro de uma soma direta de operadores da forma

$$H^{(a)}(\lambda) = -\Delta + \lambda^2 \sum_{i,j} A_{ij}^{(a)} (x - x^{(a)})_i (x - x^{(a)})_j + \lambda g(x^{(a)})$$

Esta última igualdade não é mais que o desenvolvimento de Taylor de h no ponto $x^{(a)}$ em segunda ordem.

Sejam $T(b)$, para $b \in \mathbb{R}^\nu$ e $D(\lambda)$, para $\lambda > 0$ operadores unitários de Translação e Dilatação em $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ dados por:

$$(T(b)f)(x) = f(x - b)$$

$$(D(\lambda)f)(x) = \lambda^{n/2} f(\lambda x).$$

Também seja

$$\mathbb{K}^{(a)} = -\Delta + \sum_{i,j} A_{ij}^{(a)} x_i x_j + g(x^{(a)})$$

é fácil estabelecer a seguinte igualdade

$$D(\lambda^{1/2})T(\lambda^{1/2}x^{(a)})\lambda\mathbb{K}^{(a)}T(-\lambda^{1/2}x^{(a)})D(\lambda^{-1/2}) = H^{(a)}(\lambda)$$

assim $H^{(a)}(\lambda)$ é equivalentemente unitário a $\lambda\mathbb{K}^{(a)}$.

Agora os autovalores de $\mathbb{K}^{(a)}$ são fáceis de calcular, a menos da constante $g(x^{(a)})$, $\mathbb{K}^{(a)}$ é o operador de Schörendinger associado a um oscilador harmônico.

Então, faremos o cálculo de todos os autovalores de $\mathbb{K}^{(a)}$. Para isto seguimos os passos abaixo.

1.1 Cálculo de autovalores de $\mathbb{K}^{(a)}$

Suponhamos que encontramos os autovalores de $[A_{ij}^{(a)}]$, dados por

$$\left\{ (w_i^{(a)})^2 \right\}_{i=1}^\nu \quad \text{com} \quad w_i^{(a)} > 0$$

isto é possível pois a matriz A é simétrica e positiva em cada ponto crítico.

Agora calculemos os autovalores de $\mathbb{K}^{(a)}$. Para tanto obteremos primeiro os autovalores do operador de $-\frac{d^2}{dx_i^2} + (w_i^{(a)})^2 x_i^2$ que corresponde a um oscilador harmônico 1-dimensional, dado que $\mathbb{K}^{(a)}$ é uma soma direta de tais operadores.

Então nos preocupamos em encontrar o espectro de $B = -\frac{d^2}{dx_i^2} + (w_i^{(a)})^2 x_i^2$.

1.3 Definição. Definamos o operador de Aniquilamento por

$$A = w_i^{(a)} x + \frac{d}{dx},$$

e o operador Criação (ou adjunto de A)

$$A^* = w_i^{(a)} x - \frac{d}{dx},$$

os operadores A, A^* e B podem ser definidos com domínios no espaço de Schwartz $S(\mathbb{R})$ onde

$$S(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : |P_r(x)| < \infty, P_r(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 - |x|^2)^r \sum_{\alpha=0}^r |f^{(\alpha)}(x)| \right\}.$$

Temos

$$\begin{aligned} AA^* &= \left(w_i^{(a)} x + \frac{d}{dx} \right) \left(w_i^{(a)} x - \frac{d}{dx} \right) \\ &= \left(w_i^{(a)} \right)^2 x^2 - \frac{d^2}{dx^2} - w_i^{(a)} x \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} w_i^{(a)} x \\ &= \left(w_i^{(a)} \right)^2 x^2 - \frac{d^2}{dx^2} + w_i^{(a)} \left[\frac{d}{dx}, x \right] \\ &= B + w_i^{(a)} I \end{aligned}$$

onde $I = \left[\frac{d}{dx}, x \right]$ é o operador identidade.

Do fato

$$\left[\frac{d}{dx}, x \right] \psi(x) = \frac{d}{dx}(x\psi(x)) - x \frac{d}{dx} \psi(x)$$

$$\begin{aligned}
&= x \frac{d\psi}{dx} + \psi(x) - x \frac{d\psi}{dx} = \\
&= \psi(x)
\end{aligned}$$

Similarmente

$$A^*A = B + w_i^{(a)} \left[x, \frac{d}{dx} \right]$$

$$\text{logo } A^*A = B - w_i^{(a)} I \quad (0)$$

A segunda identidade demonstra que $w_i^{(a)}$ é o menor autovalor possível de B , então estas identidades implicam que:

$$\text{a) } [B, A] = -2w_i^{(a)} A$$

$$\text{no fato } AB = A(A^*A + w_i^{(a)}) = AA^*A + Aw_i^{(a)}$$

$$BA = AA^*A - Aw_i^{(a)}$$

$$[B, A] = BA - AB = -2Aw_i^{(a)}.$$

$$\text{b) } [A^*, B] = A^*B - BA^*$$

$$= A^*(AA^* - w_i^{(a)}) - (A^*A + w_i^{(a)})A^*$$

$$= -2w_i^{(a)} A^*$$

$$\begin{aligned}
\text{também } BA &= A(B - 2w_i^{(a)}) \\
BA^* &= A^*(B + 2w_i^{(a)})
\end{aligned} \quad (1)$$

1.3 Definição. (O estado fundamental)

Estado fundamental de B é uma função $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ satisfazendo a equação diferencial $A\psi_0 = 0$ e tal que $\|\psi_0\| = 1$.

Claramente, então por (0) $B\psi_0 = w_i^{(a)}\psi_0$, assim ψ_0 é uma autofunção correspondente a um autovalor nulo do operador A .

Podemos calcular ψ_0 explicitamente. Assim também verificar que é de quadrado integrável

$$\frac{d\psi_0}{dx} + w_i^{(a)}x\psi_0 = 0$$

$$\int \frac{d\psi_0}{\psi_0} = w_i^{(a)} \int x dx$$

$$\psi_0(x) = Ce^{-w_i^{(a)}x^2/2},$$

onde C é o normalizador constante para $\|\psi_0\| = 1$, $C = (w_i^{(a)})^{1/2}\pi^{-1/4}$.

Agora para $k \geq 1$ definimos um auto-estado ou autofunção de B indutivamente por

$$\psi_k = \frac{1}{(2kw_i^{(a)})^{1/2}} A^* \psi_{k-1} \quad (2)$$

1.4 Lema 1. ψ_k pertence à classe de Schwartz. Ou seja, é uma autofunção normalizada de B , com autovalor $(2k+1)w_i^{(a)}$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} B\psi_k &= \frac{1}{(2kw_i^{(a)})^{1/2}} BA^* \psi_{k-1} \\ &= \frac{1}{(2kw_i^{(a)})^{1/2}} (A^*B - 2w_i^{(a)}A^*) \psi_{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2kw_i^{(a)})^{1/2}}(A^*B\psi_{k-1} - 2w_i^{(a)}A^*\psi_{k-1}) \\
&= \frac{1}{(2kw_i^{(a)})^{1/2}}A^*((2k-1)w_i^{(a)}\psi_{k-1} + 2w_i^{(a)}\psi_{k-1}) \\
&= (2k+1)w_i^{(a)}\psi_k \quad \text{por (2)}
\end{aligned}$$

portanto fica demonstrado que $(2k+1)w_i^{(a)}$ é autovalor de B .

Normalizando ψ_k

$$\begin{aligned}
\|\psi_k\|^2 &= \frac{1}{2kw_i^{(a)}}\langle A^*\psi_{k-1}, A^*\psi_{k-1} \rangle \\
&= \frac{1}{2kw_i^{(a)}}\langle AA^*\psi_{k-1}, \psi_{k-1} \rangle \quad \text{integrando por partes} \\
&= \frac{1}{2kw_i^{(a)}}\langle AA^*\psi_{k-1}, \psi_{k-1} \rangle \\
&= \frac{1}{2kw_i^{(a)}}\langle (B + w_i^{(a)})\psi_{k-1}, \psi_{k-1} \rangle \\
&= \frac{1}{2kw_i^{(a)}}\langle (2kw_i^{(a)})\psi_{k-1}, \psi_{k-1} \rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

1.5 Lema 2. $\psi_k(x) = P_k(x)e^{-w_i^{(a)}x^2/2}$, onde P_k é um polinômio de grau k .

Demonstração. Usando relação de recorrência

$$P_k(x) = \frac{1}{(2kw_i^{(a)})^{1/2}}(2w_i^{(a)}xP_{k-1}(x) - P'_{k-1}(x))$$

seguinto de

$$\begin{aligned}
\psi_k(x) &= \frac{1}{(2kw_i^{(a)})^{1/2}} A^* \psi_{k-1} \\
&= \frac{1}{(2kw_i^{(a)})^{1/2}} \left(w_i^{(a)} x - \frac{d}{dx} \right) \psi_{k-1} \\
&= \frac{1}{(2kw_i^{(a)})^{1/2}} \left(w_i^{(a)} x P_{k-1}(x) e^{-w_i^{(a)} x^2/2} - \frac{d}{dx} P_{k-1}(x) e^{-w_i^{(a)} x^2/2} \right) \\
&= \frac{1}{(2kw_i^{(a)})^{1/2}} \left(w_i^{(a)} x P_{k-1}(x) e^{-w_i^{(a)} x^2/2} - P'_{k-1}(x) e^{-w_i^{(a)} x^2/2} \right. \\
&\quad \left. + P_{k-1}(x) w_i^{(a)} x e^{-w_i^{(a)} x^2/2} \right) \\
&= \frac{e^{-w_i^{(a)} x^2/2}}{(2kw_i^{(a)})^{1/2}} (2w_i^{(a)} x P_{k-1}(x) - P'_{k-1}(x))
\end{aligned}$$

portanto, $P_k(x) = \frac{1}{(2kw_i^{(a)})^{1/2}} (2w_i^{(a)} x P_{k-1}(x) - P'_{k-1}(x))$. ■

Nota. A menos de normalização, os P'_k s são conhecidos como polinômios de Hermite. Seja

$$\mathcal{P} = \{x \mapsto P(x) e^{-w_i^{(a)} x^2/2} \mid P(x) \text{ é um polinômio}\}, \quad \mathcal{P} \subset L(\mathbb{R}).$$

1.6 Proposição 1. \mathcal{P} é denso em $L^2(\mathbb{R})$.

Demonstração. Podemos assumir $w_i^{(a)} = 1$. Seja

$$f_j(x) = x^j e^{-x^2/2}$$

calculamos

$$\|f_j\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2j} e^{-x^2} dx = +2 \int_0^{\infty} y^j \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy.$$

Substituindo $y = x^2$, podemos ter um limite para f_j .

$$\|f_j\|^2 = \Gamma(j + \frac{1}{2}) \leq j!$$

escrevendo

$$e^{-i\lambda x - x^2/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^j}{j!} f_j(x)$$

as L^2 normas dos termos desta série são limitados por $|\lambda|^j (j!)^{-1/2}$ assim, é convergente em L^2 . Segue-se

$$f_j \in \mathcal{P} \quad \text{e as funções} \quad x \mapsto e^{-i\lambda x - x^2/2} \in \overline{\mathcal{P}}.$$

Agora suponhamos que $f \in L^2$ é ortonormal para $\overline{\mathcal{P}}$; então

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 - i\lambda x} dx = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

pelo teorema de Plancherel $f(x)e^{-x^2/2} \equiv 0$ q.t.p.

$$f \equiv 0 \quad \text{q.t.p.} \quad \blacksquare$$

Os autovalores de $\mathbb{K}^{(a)}$ como já falamos são soma de autovalores dos osciladores harmônicos 1-dimensionais $-\frac{d^2}{dx^2} + (w_i^{(a)})^2 x^2$ adicionados à constante $g(x^{(a)})$, ou seja, o espectro de $\mathbb{K}^{(a)}$ é

$$\delta(\mathbb{K}^{(a)}) = \left\{ \left[\sum_{i=1}^{\nu} w_i^{(a)}(2n_i + 1) \right] + g(x^{(a)}) : n_1, \dots, n_{\nu} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pela coleção de todos os autovalores de $\mathbb{K}^{(a)}$ para $a = 1, \dots, k$, obtemos o espectro de $\bigoplus_a \mathbb{K}^{(a)}$ definido em $\bigoplus_a L^2(\mathbb{R}^{\nu})$ por

$$\delta\left(\bigoplus_a \mathbb{K}^{(a)}\right) = \bigcup_a \delta(\mathbb{K}^{(a)})$$

Para uma futura referência, notamos que as autofunções de $\mathbb{K}^{(a)}$ são funções da forma

$$P(x) \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} w_i^{(a)} \langle x, v_i^{(a)} \rangle^2\right),$$

onde P é o polinômio encontrado anteriormente para cada oscilador harmônico 1-dimensional e $v_i^{(a)} \in \mathbb{R}^{\nu}$, $i = 1, \dots, \nu$ são autovetores ortonormais de $[A_{ij}^{(a)}]$. Assim, as autofunções de $H^{(a)}(\lambda)$ são

$$\psi_n = P(\lambda^{1/2}(x - x^{(a)})) \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} w_i^{(a)} \langle \lambda^{1/2}(x - x^{(a)}), v_i^{(a)} \rangle^2\right).$$

1.2 O Teorema do Limite Semi-clássico.

Para demonstrar o Teorema do Limite Semi-clássico primeiro faremos o enunciado e demonstração de algumas propriedades como segue.

1.7 Definição 2. (Partição da Unidade).

Uma família de funções $\{J_a\}_{a \in A}$ indexadas por um conjunto A onde $J_a : \mathbb{R}^{\nu} \rightarrow \mathbb{R}$ para qualquer $a \in A$ é chamada partição da unidade se:

(i) $0 \leq J_a(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\nu}$

(ii) $\sum J_a^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\nu}$

(iii) $\{J_a\}$ é localmente finita, i.e. sobre qualquer compacto K temos que $J_a = 0$ a menos de um número finito de índices $a \in A$.

(iv) $J_a \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu})$

(v) $\sup_{x \in \mathbb{R}^{\nu}} \sum_{a \in A} |\nabla J_a(x)|^2 < \infty$

1.8 Teorema 1. (Fórmula de Localização).

Seja $\{J_a\}_{a \in A}$ uma partição da unidade e

$$H = H_0 + V \quad \text{onde} \quad V : \mathbb{R}^{\nu} \rightarrow \mathbb{R}, \quad V \in C^{\infty}$$

e H_0 é uma representação auto-adjunta do Laplaciano $(-\Delta)$.

Então

$$H = \sum_{\alpha \in A} J_\alpha H J_\alpha - \sum_{\alpha \in A} |\nabla J_\alpha|^2.$$

Demonstração. Usando as identidades:

$$1) [J_\alpha, [J_\alpha, H]] = -2(\nabla J_\alpha)^2$$

$$2) [J_\alpha, [J_\alpha, H]] = J_\alpha^2 H + H J_\alpha^2 - 2J_\alpha H J_\alpha$$

$$\text{Então } -[J_\alpha, [J_\alpha, H]] = -J_\alpha^2 H - H J_\alpha^2 + 2J_\alpha H J_\alpha.$$

Somando 1) e 2) temos

$$J_\alpha^2 H + H J_\alpha^2 = 2J_\alpha H J_\alpha - 2(\nabla J_\alpha)^2$$

$$\sum_{\alpha \in A} (J_\alpha^2 H + H J_\alpha^2) = \sum_{\alpha \in A} 2J_\alpha H J_\alpha - \sum_{\alpha \in A} 2(\nabla J_\alpha)^2$$

$$2H = 2 \left(\sum_{\alpha \in A} J_\alpha H J_\alpha - \sum_{\alpha \in A} (\nabla J_\alpha)^2 \right)$$

$$H = \sum_{\alpha \in A} J_\alpha H J_\alpha - \sum_{\alpha \in A} (\nabla J_\alpha)^2. \quad \blacksquare$$

1.9 Teorema 2. (Min-Max. Princípio).

Seja H um operador auto-adjunto limitado inferiormente, i.e., $H \geq CI$ para alguma constante positiva C . Definamos

$$\mu_n(\lambda) = \sup_{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}} Q(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \lambda) \quad \text{onde}$$

$$Q(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \lambda) = \inf_{\substack{\psi \in D[H], \|\psi\|=1 \\ \psi \in [\xi_1, \dots, \xi_{n-1}]^\perp}} \langle \psi, H\psi \rangle$$

$$\text{onde } [\xi_1, \dots, \xi_{n-1}]^\perp = \{ \psi / \langle \psi, \xi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n-1 \}.$$

Então, para cada n fixo, um ou outro é válido:

a) Existem n auto-valores menores do que o ínfimo do espectro essencial, e $\mu_n(H)$ é o n -ésimo autovalor contando multiplicidade, ou

b) μ_n é o ínfimo do espectro, i.e., $\mu_n = \inf\{\lambda / \lambda \in \delta_{ess}(H)\}$ e no caso que $\mu_n = \mu_{n+1} = \mu_{n+2} = \dots$ existem $n - 1$ autovalores a menos (contando multiplicidade) menores que μ_n .

Demonstração. Veja [B.S.1].

1.10 Teorema 3. Seja H um operador igual ao do teorema 1.8 com V limitado com respeito a H_0 . Então $\lambda \in \delta_{ess}(H)$ se, e somente se existe uma sequência de funções $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu \setminus B_n)$ com

$$\|\varphi_n\|^2 = 1 \quad \text{tais que}$$

$$\|(H - \lambda)\varphi_n\| \rightarrow 0.$$

$$\text{Aqui } B_n := \{x / |x| \leq n\}.$$

Demonstrações dos teoremas 1.9 e 1.10, podem ser encontradas em B. Simon [B.S.1] e [B.S.2].

1.11 Teorema 4. Seja H um operador igual ao do teorema 1.8 com V limitado. Então

$$\inf \delta_{ess}(H) = \sup_{\substack{K \subset \mathbb{R}^\nu \\ \text{compacto}}} \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu - K) \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, H\varphi \rangle$$

Prova. “ \geq ”: seja λ_0 o ínfimo de $\delta_{ess}(H)$. Então $\lambda_0 \in \delta_{ess}(H)$ e pelo teorema (1.10), podemos encontrar uma sequência $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu - B_n)$ com $\|\varphi_n\| = 1$ e $(H - \lambda_0)\varphi_n \rightarrow 0$. Assim

$$\sup_{\substack{K \\ \text{compacto}}} \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu - K) \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, H\varphi \rangle = \overline{\lim}_n \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu - B_n) \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, H\varphi \rangle$$

$$\begin{aligned}
&\leq \overline{\lim}_n \langle \varphi_n, H\varphi_n \rangle \\
&\leq \overline{\lim}_n \langle \varphi_n, (H - \lambda_0)\varphi_n \rangle + \lim \langle \varphi_n, \lambda_0\varphi_n \rangle \\
&= \lambda_0.
\end{aligned}$$

“ \leq ”: Definamos

$$\mu_n := \sup_{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}} \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty \\ \varphi \perp \{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}\}, \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, H\varphi \rangle.$$

Pelo teorema (min – max), μ_n é n -ésimo autovalor de H em ordem crescente contando multiplicidade, se existem apenas n_0 autovalores menores que $\lambda_0 = \inf \delta_{ess}(H)$, então $\mu_{n_0+1} = \mu_{n_0+2} = \dots = \lambda_0$. Mas se são infinitos autovalores menores que $\inf \delta_{ess}(H)$, então $\mu_n \rightarrow \inf \delta_{ess}(H)$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim para demonstrar

$$\lambda_0 = \inf \delta_{ess}(H) \leq \sup_{\substack{K \subset \mathbb{R}^\nu \\ \text{compacto}}} \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu - K) \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, H\varphi \rangle = v_0$$

é suficiente demonstrar que $v_0 \geq \mu_n$ para todo n .

Segue-se

$$\mu_1 = \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu) \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, H\varphi \rangle,$$

obviamente $v_0 \geq \mu_1$.

Suponhamos agora $n > 1$ e $v_0 > \mu_{n-1}$. Se $\mu_{n-1} = \lambda_0$, acabamos a demonstração. Se $\mu_{n-1} < \lambda_0$, então

$$\mu_n = \inf_{\substack{\varphi \perp \{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\} \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, H\varphi \rangle,$$

onde os ρ_i são autofunções normalizadas correspondentes ao autovalor μ_i e $\{\rho_1, \dots, \rho_{n-1}\}$ é o espaço gerado pelos ρ_i (i.e. auto-espaço correspondente a μ_i). Agora escolhamos $\varepsilon > 0$ um K_0 compacto grande, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^\nu - K_0} |\rho_i(x)|^2 dx < \varepsilon \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1.$$

Definamos, para qualquer função φ um $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - \sum_{i=1}^n \langle \varphi, \rho_i \rangle \rho_i(x)$. Então $\tilde{\varphi} \perp \rho_i$. Temos

$$\begin{aligned} v_0 &\geq \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu - K_0) \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, H\varphi \rangle & (1) \\ &= \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu - K_0)} \left\{ \langle \tilde{\varphi}, H\tilde{\varphi} \rangle + \langle \tilde{\varphi}, \sum \langle \varphi, \rho_i \rangle \rho_i \mu_i \rangle + \sum \langle \varphi, \rho_i \rangle \mu_i \rho_i \right\} \end{aligned}$$

para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu - K_0)$, $|\langle \varphi, \rho_i \rangle| < \varepsilon^{1/2} \|\varphi\|$ por (1). Assim,

$$\begin{aligned} v_0 &\geq \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu - K_0) \\ \|\varphi\|=1}} \langle \tilde{\varphi}, H\tilde{\varphi} \rangle - c\varepsilon \\ v_0 &\geq (1 - c'\varepsilon) \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu - K_0) \\ \|\varphi\|=1}} \frac{\langle \tilde{\varphi}, H\tilde{\varphi} \rangle}{\langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} \rangle} - c\varepsilon \\ &\geq (1 - c'\varepsilon) \inf_{\varphi \perp \{\rho_1, \dots, \rho_{n-1}\}} \frac{\langle \tilde{\varphi}, H\tilde{\varphi} \rangle}{\langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} \rangle} - c\varepsilon \\ &\geq (1 - c'\varepsilon) \mu_n - c\varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, temos

$$v_0 \geq \mu_0 \quad \text{e segue-se o resultado.}$$

Agora apresentaremos o Teorema do Limite Semi-clássico.

1.12 Teorema 5. Seja $H(\lambda)$ e $\bigoplus_a \mathbb{K}^{(a)}$ como definimos acima. Seja $E_n(\lambda)$ o n -ésimo autovalor de $H(\lambda)$ contando multiplicidade, denotemos por e_n o n -ésimo autovalor de $\bigoplus_a \mathbb{K}^{(a)}$ contando multiplicidade. Então para n fixo e λ grande, $H(\lambda)$ tem ao menos n autovalores e $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_n(\lambda)/\lambda = e_n$.

Demonstração. Primeiro provaremos

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} E_n(\lambda)/\lambda \leq e_n.$$

Seja $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ uma função com $0 \leq J \leq 1$,

$$J(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{para } \|x\| \geq 2 \end{cases} \quad \text{definamos também}$$

$$J_a(\lambda) = J(\lambda^{2/5}(x - x^{(a)})) \quad \text{para } a = 1, \dots, k,$$

$$J_0(\lambda) = \sqrt{1 - \sum_{a=1}^k [J_a(\lambda)]^2}.$$

claramente para um λ suficientemente grande, temos

$$\sum_{a=0}^k J_a^2(\lambda) = 1$$

conforme a construção. Observamos que $\{J_a\}$ é localmente finito. Também $J_a \in C^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ e $\sup_{x \in \mathbb{R}^\nu} \sum_{a \in A} |\nabla J_a(\lambda)(x)|^2 < \infty$. Assim $\{J_a\}_{a=0}^k$ é uma partição da unidade no sentido da definição 1.7.

Afirmamos que para qualquer $a \in \{1, \dots, k\}$

$$\|J_a(\lambda)[H(\lambda) - H^{(a)}(\lambda)]J_a(\lambda)\| = O(\lambda^{4/5}),$$

Com efeito, temos que: $J_a(\lambda)[H(\lambda) - H^{(a)}(\lambda)]J_a(\lambda)$ é dado por dois termos

$$\begin{aligned}
\|J_a[H(\lambda) - H^{(a)}(\lambda)]J_a(\lambda)\| &= |J_a(\lambda)[- \Delta + \lambda^2 h(x) + \lambda g(x) + \\
&+ \Delta - \lambda^2 \sum_{i,j} A^{(a)}(x - x^{(a)})_i(x - x^{(a)})_j - \lambda g(x^{(a)})]J_a(\lambda)| \\
&\leq |\lambda^2 J_a(\lambda)[h(x) - \sum_{i,j} A^{(a)}(x - x^{(a)})_i(x - x^{(a)})_j]J_a(\lambda)| + \\
&+ |\lambda J_a(\lambda)[g(x) - g(x^{(a)})]J_a(\lambda)| \quad (*)
\end{aligned}$$

mas como

$$\begin{aligned}
&|\lambda^2 J_a(\lambda)[h(x) - \sum_{i,j} A^{(a)}(x - x^{(a)})_i(x - x^{(a)})_j]J_a(\lambda)| = \\
&= \lambda^3 J_a^2(\lambda) |x - x^{(a)}|^3 \frac{|h(x) - \sum_{i,j} A^{(a)}(x - x^{(a)})_i(x - x^{(a)})_j|}{|x - x^{(a)}|^3} \\
&\leq \lambda^2 \lambda^{-6/5} O(1) \\
&\leq O(\lambda^{4/5})
\end{aligned}$$

Empregamos que $J_a(\lambda)$ tem suporte compacto em

$$\lambda^{2/5} |x - x^{(a)}| < 2 \quad \text{e} \quad \sum_{i,j} A^{(a)}(x - x^{(a)})_i(x - x^{(a)})_j$$

é a expansão de Taylor de segunda ordem em torno de $x^{(a)}$.

Da mesma maneira para a segunda parcela de (*), como g é limitado, segue que

$$|\lambda J_a(\lambda)[g(x) - g(x^{(a)})]J_a(\lambda)| = O(\lambda^{3/5})$$

assim dessas duas igualdades temos

$$\|J_a(\lambda)[H(\lambda) - H^{(a)}(\lambda)]J_a(\lambda)\| = O(\lambda^{4/5}). \quad (3)$$

Agora, fixando um inteiro n , não negativo, existe um $a(n)$ e um ψ_n tal que

$$H^{a(n)}(\lambda)\psi_n = \lambda e_n \psi_n.$$

Isto porque $\mathbb{K}^{(a)}$ e $H^{a(n)}$ diferem só pelo fator λ .

Definamos $\phi_n = J_{a(n)}(\lambda)\psi_n$. Então para inteiros n não negativos

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{nm} + O(\exp(-c\lambda^{1/5}))$$

para alguma constante c . Isto é claro para o caso em que $a(n) \neq a(m)$, segue-se neste caso $J_{a(n)}(\lambda)$ e $J_{a(m)}(\lambda)$ têm suportes disjuntos para um λ grande, assim $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0$. Se $a(n) = a(m)$, então $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$. Assim,

$$\begin{aligned} |\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle - \delta_{nm}| &= \left| \int (\psi_n \psi_m - J_{a(n)}^2 \psi_n \psi_m) d^\nu x \right| \\ &= \left| \int (1 - J_{a(n)}^2) \psi_n \psi_m d^\nu x \right| \\ &\leq \int_{|x-x^{(a)}| \geq \lambda^{-2/5}} |p_n p_m| \exp\left(-\sum_{i=1}^{\nu} w_i^{(a)} \langle \lambda^{1/2}(x - x^{(a)}), v_i^{(a)} \rangle^2\right) d^\nu x \end{aligned}$$

isto porque:

$$\begin{aligned} 1 - J^2(x) &= 0, \quad \forall x \in B = \{x \in \mathbb{R}^n / |x - x^{(a)}| \leq \lambda^{-2/5}\} \\ \text{e } 1 - J^2(x) &= 1, \quad \forall x \in \overline{B}^c = \{x \in \mathbb{R}^n / |x - x^{(a)}| \geq 2\lambda^{-2/5} \geq \lambda^{-2/5}\} \end{aligned}$$

e substituindo os ψ_n, ψ_m temos

$$\begin{aligned} |\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle - \delta_{nm}| &\leq \text{const} \int_{-\lambda^{2/5}}^{\infty} \exp(-c\lambda\mu^2) d\mu \\ &\leq \text{const} \int_{-\lambda^{2/5}}^{\infty} \exp(-c\lambda^{3/5}\mu) d\mu \\ &= O(\exp(-c\lambda^{1/5})) \end{aligned} \tag{4}$$

Agora, pelo teorema 1.8 “Fórmula de Localização”

$$J_a H^{(a)} J_a = \frac{1}{2} (J_a^2 H^{(a)} + H^{(a)} J_a^2) + (\nabla J_a)^2$$

e a estimativa $\sup_x |\nabla J_a(\lambda)|^2 = O(\lambda^{4/5})$.

Para estimar $\langle \varphi_n, H(\lambda) \varphi_m \rangle$, de novo, se $a(n) \neq a(m)$, então $\langle \varphi_n, H(\lambda) \varphi_m \rangle = 0$, para λ grande, por outro lado, se $a(n) = a(m) = a$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, H(\lambda) \varphi_m \rangle &= \langle J_a(\lambda) \psi_n, H(\lambda) J_a(\lambda) \psi_m \rangle \\ &= \langle \psi_n, J_a(\lambda) H(\lambda) J_a(\lambda) \psi_m \rangle \\ &= \langle \psi_n, J_a(\lambda) H^{(a)} J_a(\lambda) \psi_m \rangle + O(\lambda^{4/5}) \\ &= \langle \psi_n, \frac{1}{2} J_a^2(\lambda) H^{(a)} + H^{(a)} J_a^2(\lambda) \psi_m \rangle + O(\lambda^{4/5}) \\ &= \langle \psi_n, \frac{1}{2} (J_a^2(\lambda) H^{(a)} \psi_m) + \langle \psi_n, \frac{1}{2} H^{(a)} J_a^2(\lambda) \psi_m \rangle + O(\lambda^{4/5}) \\ &= \frac{1}{2} \langle \psi_n, J_a^2(\lambda) \lambda e_n \psi_m \rangle + \frac{1}{2} \langle \psi_n, \lambda e_n \psi_m J_a^2(\lambda) \rangle + O(\lambda^{4/5}) \\ &= \frac{\lambda}{2} (e_n + e_m) \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle + O(\lambda^{4/5}) \end{aligned}$$

agora como $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{nm} + O(\exp(-c\lambda^{1/5}))$, obtemos

$$\langle \varphi_n, H(\lambda) \varphi_m \rangle = \lambda e_n \delta_{nm} + \delta(\lambda^{4/5}) \quad (5)$$

agora pelo teorema 1.9 (“min-max”), $H(\lambda)$ tem n -autovalores e $\mu_n(\lambda) = E_n(\lambda)$ ou $\mu_n(\lambda) = \inf \delta_{ess}(H(\lambda))$, e demonstraremos que só é válida a parte (a) do teorema 1.9.

Seja $\varepsilon > 0$, e para cada λ , escolhamos $\xi_1^\lambda, \dots, \xi_{n-1}^\lambda$ tais que

$$\mu_n(\lambda) \leq Q(\xi_1^\lambda, \dots, \xi_{n-1}^\lambda; \lambda) + \varepsilon. \quad (6)$$

Como os φ_n são ortonormais para um λ grande, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é o espaço gerado pelos φ_i de um espaço n -dimensional, assim podemos encontrar, para λ suficientemente grande, uma combinação linear φ dos $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ tal que $\varphi \in [\xi_1^\lambda, \dots, \xi_{n-1}^\lambda]^\perp$. Então usando (5) temos

$$Q(\xi_1^\lambda, \dots, \xi_{n-1}^\lambda; \lambda) \leq \langle \varphi, H(\lambda)\varphi \rangle \leq \lambda e_n + O(\lambda^{4/5})$$

por (5) e do fato de que ε é arbitrário

$$\mu_n(\lambda) \leq \lambda e_n + O(\lambda^{4/5}) \quad (7)$$

Como $h > \text{const} > 0$ fora de um conjunto compacto, e g é limitado, segue-se pelo teorema 1.11

$$\inf \delta_{\text{ess}}[(H(\lambda) + \lambda^2 h)] = \sup_{\substack{K \subset \mathbb{R}^\nu \\ \text{compacto}}} \inf_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu - K) \\ \|\varphi\|=1}} \underbrace{((\Delta + \lambda g)\varphi, \varphi)}_{\tilde{H}} + \lambda^2(h)\|\varphi\|$$

$\inf \delta_{\text{ess}}(H(\lambda)) = \inf \delta_{\text{ess}}(\tilde{H}(\lambda)) + \lambda^2\|h\| \geq c\lambda^2$ para alguma constante positiva c , segue-se de (7), $\mu_n(\lambda) \neq \inf(\delta_{\text{ess}}(H(\lambda)))$, para λ suficientemente grande. Assim, $\mu_n(\lambda) = E_n(\lambda)$ de (7) implica $\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{E_n(\lambda)}{\lambda} \leq e_n$.

Agora demonstraremos a desigualdade

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{E_n(\lambda)}{\lambda} \geq e_n.$$

Para demonstrar esta desigualdade, é suficiente demonstrar que para qualquer $e \in \delta\left(\bigoplus_n \mathbb{K}^{(a)}\right)$, afirmando $e \in (e_m, e_{m+1})$

$$H(\lambda) \geq \lambda e + R + O(\lambda), \quad (8)$$

onde R é um operador simétrico de posto m .

Suponhamos que isto é válido, para cada $e_{m+1} > e_m$ e $e \in (e_m, e_{m+1})$.

Tomando um vetor ψ e o espaço das $m + 1$ primeiras autofunções de $H(\lambda)$ com $\|\psi\| = 1$ tal que $\psi \in \text{Ker}(R)$, então como

$$H(\lambda) - \lambda e - R + O(\lambda) \geq 0 \quad (9)$$

$$\langle H(\lambda)\psi, \psi \rangle - \langle \lambda e\psi, \psi \rangle + \langle R\psi, \psi \rangle - \langle O(\lambda), \psi \rangle \geq 0$$

$$E_{n+1} \geq \langle H(\lambda)\psi, \psi \rangle \geq \lambda e + O(\lambda)$$

que implica

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{E_n(\lambda)}{\lambda} \geq e_n$$

para $n = m + 1$ com $e_{m+1} > e_m$. No caso $e = e_{m+1} = e_n$ segue-se de (9). Agora provamos a afirmação feita para $e \in (e_m, e_{m+1})$. Pelo teorema 1.8, temos

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \sum_{a=0}^k J_a H(\lambda) J_a - \sum_{a=0}^k (\nabla J_a)^2 \\ &= J_0 H(\lambda) J_0 + \sum_{a=0}^k J_a H^{(a)}(\lambda) J_a + O(\lambda^{4/5}) \end{aligned} \quad (10)$$

Aqui usamos (3) e (4). Como $J_0 = J_0(\lambda)$ tem suporte compacto fora das bolas de raio $\lambda^{-2/5}$ em torno dos zeros de h e h anula-se quadraticamente em cada um de seus zeros, $h(x) \geq c(\lambda^{-2/5})^2$ sobre o suporte de J_0 . Assim, $J_0 H(\lambda) J_0$ cresce como $\lambda^2 \cdot \lambda^{-4/5} = \lambda^{6/5}$ e para λ grande

$$J_0 H J_0 \geq \lambda e J_0^2.$$

Para $a \neq 0$, temos

$$J_a H^{(a)}(\lambda) J_a \geq J_a R^{(a)} J_a + \lambda e J_a^2, \quad (11)$$

onde $R^{(a)}$ é a restrição de $H^{(a)}$ para o espaço de todos os autovalores de $H^{(a)}$ menores que λe . De fato seja $\psi \in$ espaço das m primeiras autofunções de $H^{(a)}$

associadas aos autovalores menores que λe , com $\|\varphi\| = 1$ tal que $\psi \in \text{Ker}(R)$

$$\begin{aligned} & \langle J_a(H^{(a)}(\lambda) - R^{(a)} + \lambda e)J_a\psi, \psi \rangle = \\ & = \langle J_a(H^{(a)}(\lambda)\psi)J_a, \psi \rangle - \langle J_aR^{(a)}(\lambda)J_a\psi, \psi \rangle \\ & \quad + \langle J_a\lambda eJ_a\psi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Podemos escrever $\psi = \sum_{i=1}^n \langle \psi, \varphi_i \rangle \varphi_i$,

$$\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset \text{span}\{\text{Autofunções de } H^{(a)}\}$$

$$\begin{aligned} & = \langle J_aH^{(a)}\left(\sum_{i=1}^n \langle \psi, \varphi_i \rangle \varphi_i\right)J_a, \psi \rangle + J_a^2\lambda e \langle \sum_{i=1}^n \langle \psi, \varphi_i \rangle \varphi_i, \psi \rangle \\ & = \langle J_a^2 \sum_{i=1}^n \langle \psi, \varphi_i \rangle \varphi_i \lambda e_i, \psi \rangle + J_a^2\lambda e \langle \sum_{i=1}^n \langle \psi, \varphi_i \rangle \varphi_i, \psi \rangle \\ & = J_a^2 \sum_{i=1}^n \lambda e_i \langle \psi, \varphi_i \rangle^2 + J_a^2\lambda e \sum_{i=1}^n \langle \psi, \varphi_i \rangle^2 \\ & = J_a^2 \sum \lambda e_i \|\langle \psi, \varphi_i \rangle\|^2 + J_a^2\lambda e \sum \|\langle \psi, \varphi_i \rangle\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

logo $J_a(H^{(a)}(\lambda) - R^{(a)} + \lambda e)J_a \geq 0$, para todo $\psi \in \text{span}(\text{autofunções de } H^{(a)}(\lambda))$, portanto

$$\begin{aligned} \text{Posto}(J_aR^{(a)}J_a) & \leq \text{Posto}(R^{(a)}) \\ & = \# \{\text{autovalores de } \mathbb{K}^{(a)} \text{ menores que } e\} \end{aligned}$$

como $\text{Posto}(A + B) \leq \text{Posto}(A) + \text{Posto}(B)$, isto implica

$$\begin{aligned} \text{Posto} \left[\sum_{a=1}^k J_aR^{(a)}(\lambda)J_a \right] & \leq \sum_{a=1}^k \text{Posto}[J_aR^{(a)}(\lambda)J_a] \\ & = \# \{\text{autovalores de } \bigoplus \mathbb{K}^{(a)} \text{ menores que } e\} \\ & = n \end{aligned}$$

seguindo, por (10) e (11) temos

$$H(\lambda) = \lambda e J_0^2 + \lambda \sum_{a=0}^k J_a^2 + \sum_{a=0}^k J_a R^{(a)}(\lambda) J_a + O(\lambda^{4/5})$$

$$H(\lambda) \geq \lambda e + R + O(\lambda^{4/5})$$

onde R tem posto quanto muito n , isto implica (8). Fica demonstrado assim o teorema. ■

Capítulo 2

Algumas Propriedades da Função de Morse

2.1. Pontos Críticos, Função de Morse e Índice de uma Função de Morse

2.1.1 Definição. Seja f uma função diferenciável com valores reais em uma variedade diferenciável M compacta n -dimensional, $p \in M$ é chamado ponto crítico de f se a aplicação induzida por $df : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é nula. Se escolhermos um sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) em uma vizinhança U de p , isto significa que $\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0$
O número real $f(p)$ é chamado valor crítico de f .

Lembremos que a Hessiana de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como um operador linear

$$\text{Hess} f : T_p(M) \rightarrow T_p(M), (\text{Hess} f)Y = \nabla_Y \text{grad} f, Y \in T_p(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

2.1.2 Definição. f é uma função de Morse numa variedade diferenciável se todos seus pontos críticos são não-degenerados, i.e, em coordenadas locais a Hessiana $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ é não-singular em tais pontos.

2.1.3 Definição. O índice de um funcional bilinear H , sobre um espaço vetorial \mathbb{W} , é definido como a dimensão maximal de um subespaço vetorial de \mathbb{W} , no qual H é negativo definido. Em particular se $p \in M$ é ponto crítico da função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. dizemos que o índice de f em p é o índice da Hessiana de f no ponto p .

2.2 Lema de Morse

O Lema de Morse e sua demonstração nos indicam o comportamento de funções de Morse em coordenadas canônicas locais; para cada um dos pontos críticos.

2.2.1 Lema. Seja f uma função C^∞ e V uma vizinhança convexa de $0 \in \mathbb{R}^n$, com $f(0) = 0$ então

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n) \text{ para funções } C^\infty, g_i$$

definidas em V , com $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$

Demonstração.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(tx_1, \dots, tx_n) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt$$

então nos podemos escolher os $g_i(\vec{x})$ como

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt.$$

2.2.2 Lema. (M.Morse) seja M uma variedade diferenciável, f uma função diferenciável em M , e x_0 um ponto crítico não-degenerado de f . Existem coordenadas locais y^1, \dots, y^n em alguma vizinhança de x_0 , em termos das quais a função f é dada em tal vizinhança por

$$f(y^1, \dots, y^n) = -(y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

onde λ é o índice do ponto crítico x_0 .

Demonstração. Preparando caminho para a demonstração geral primeiro demonstraremos para o caso $n = 2$, quando podemos restringir nossa atenção ao disco $D_\varepsilon^2(0)$ de radio $\varepsilon > 0$ e centro no ponto $x_0 = (0, 0)$. Claramente assumamos sem perda de generalidade que $f(0) = 0$.

Aplicando o Lema 2.2.1, existem funções g_1, g_2 tais que

$$f = x^1 g_1 + x^2 g_2, \quad g_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}(0) = 0$$

onde $g_j = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx^1, tx^2) dt$, $j = 1, 2$

e pelo mesmo argumento podemos aplicar o lema 2.2.1 para cada g_j , então existem funções diferenciáveis h_{ij} tais que

$g_j(x^1, x^2) = x^i h_{ij}(\vec{x})$. Assim

$f(x^1, x^2) = x^i x^j h_{ij}(\vec{x})$ onde por simetrização podemos supor que $h_{ij}(x^1, x^2) =$

$h_{ij}(x^1, x^2)$. Temos que a matriz $(h_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0) \right)$ é não-singular. Observemos

que $\frac{d}{dt} g_j(tx^1, tx^2) = x^i \frac{\partial g_j}{\partial x^i}(tx^1, tx^2)$, daí

$$g_j(x^1, x^2) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g_j(tx^1, tx^2) dt = x^i \int_0^1 \frac{\partial g_j}{\partial x^i}(tx^1, tx^2) dt$$

$$g_j(x^1, x^2) = x^i \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(t\tau\vec{x}) dt \right) dt = x^i \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(t\tau\vec{x}) d\tau dt$$

e explicitamente temos $h_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\tau t\vec{x}) d\tau dt$.

Agora nossa função f fica definida no disco $D_\varepsilon^2(0)$ por

$$f(x^1, x^2) = (x^1)^2 h_{11} + 2x^1 x^2 h_{12} + (x^2)^2 h_{22}$$

onde a matriz $(h_{ij}(0))$ é simétrica e como $(h_{ij}(0)) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0) \right)$, $(h_{ij}(0))$ é não-singular. Lembramos que qualquer matriz simétrica é similar a uma matriz diagonal com entradas não nulas. Assumamos que $h_{11}(0) \neq 0$ para aplicar uma troca de coordenadas apropriada. Temos que $h_{11}(\vec{x}) \neq 0$ em alguma vizinhança

da origem, pela continuidade de h_{11} . Em tal vizinhança a expressão da função f é equivalente a

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \left(h_{11}(x^1)^2 + 2x^1x^2\frac{h_{12}}{h_{11}} + (x^2)^2\frac{h_{12}^2}{h_{11}^2} \right) + (x^2)^2\left(h_{22} - \frac{h_{12}^2}{h_{11}} \right) \\ &= h_{11}\left(x^1 + \frac{h_{12}}{h_{11}}x^2 \right)^2 + (x^2)^2\left(h_{22} - \frac{h_{12}^2}{h_{11}} \right) \end{aligned}$$

como a matriz $(h_{ij}(0))$ é não-singular, temos $h_{11}h_{22} - (h_{12})^2 \neq 0$ nalguma vizinhança da origem. Sejam novas coordenadas y^1, y^2 dadas por

$$\begin{aligned} y^1 &= \sqrt{|h_{11}|}\left(x^1 + \frac{h_{12}}{h_{11}}x^2 \right), \\ y^2 &= \sqrt{\left| h_{22} - \frac{h_{12}^2}{h_{11}} \right|}x^2 \end{aligned}$$

relações estas inversíveis em alguma vizinhança do origem. Em termos destas coordenadas f tem a forma

$$\tilde{f}(y^1, y^2) = \pm(y^1)^2 \pm (y^2)^2$$

isto completa a prova para o lema no caso $n = 2$

Agora demonstraremos o Lema para o caso geral n -dimensional. Procedemos como no caso $n = 2$ acima, obtendo funções h_{ij} $i, j = 1, \dots, n$, $h_{ij} = h_{ji}$, com as propriedades que $\det(h_{ij}(0)) \neq 0$, e em termos de algumas coordenadas x^1, \dots, x^n em alguma vizinhança do ponto crítico $x_0 = 0$, temos

$$f(x) = x^i x^j h_{ij} \tag{1}$$

Suponhamos indutivamente que encontramos as coordenadas y^1, \dots, y^n em alguma vizinhança de $x_0 = 0$ tal que,

$$f(y) = \pm(y^1)^2 \pm \dots \pm (y^{k-1})^2 + \sum_{i,j \geq k} y^i y^j P_{ij}(y)$$

onde $[P_{ij}(y)]$ é matriz simétrica não-singular (o caso inicial da indução segue-se de (1), com os P_{ij} no lugar de h_{ij}). Segue-se que $[P_{ij}(0)]$ é simétrica e não-singular tendo a forma mostrada na figura (a), e pode ser levada na forma diagonal por meio de uma troca linear de ao menos $n - k + 1$ coordenadas y^k, \dots, y^n . Em particular podemos supor as coordenadas y^k, \dots, y^n assim escolhidas antecipadamente tal que $P_{kk}(0) \neq 0$, e conseqüentemente $P_{kk}(y) \neq 0$ em alguma vizinhança da origem. Escrevemos $q(y) = \sqrt{|P_{kk}(y)|}$, e definimos com a troca de coordenadas

$(y^i) \rightarrow (z^i)$ sobre a vizinhança por

$$z^i = y^i \text{ para } 1 < i < k - 1$$

$$z^k = q(y) \left(y^k + \sum_{i>k} y^i \frac{P_{ik}(y)}{P_{kk}(y)} \right) \text{ para } k + 1 \leq i \leq n$$

é claro que a Jacobiana desta transformação na origem é

$$\frac{\partial z^k}{\partial y^k} = q(0) = \sqrt{P_{kk}(0)} \neq 0$$

i.e $\det I(y \rightarrow z) \neq 0$ onde

$$I(y \rightarrow z)|_0 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & & & & & 0 \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & q(0) & & \\ & & 0 & & & 1 \end{array} \right)$$

$$[P_{ij}] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \pm 1 & & 0 & & & \\ & & & & & 0 \\ & 0 & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ \hline & & & P_{kk} & * & \\ & 0 & & & & * \end{array} \right) \quad P_{ij} = \pm 1, i = j, i \in \{1, \dots, k-1\}$$

Figura (a)

Segue-se pelo teorema da função inversa que as funções z^1, \dots, z^n servem como coordenadas locais em alguma vizinhança de 0. Em termos destas coordenadas a função f tem a seguinte forma.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{i \leq k-1} \pm (z^i)^2 + \frac{P_{kk}(z^k)^2}{q^2(y)} - \frac{2P_{kk}z^k}{q(y)} - \frac{2P_{kk}z^k}{q(y)} \sum_{i > k} \frac{P_{ik}}{P_{kk}} + P_{kk} \left(\sum_i y^i \frac{P_{ik}}{P_{kk}} \right)^2 \\ &+ 2 \left(\frac{z^k}{q(y)} - \sum_{i > k} y^i \frac{P_{ik}}{P_{kk}} \right) \sum_{i > k} y^i P_{ik} + \sum_{i, j \geq k+2} y^i y^j P_{ij} \\ &= \pm (z^1)^2 \pm \dots \pm (z^k)^2 + \sum_{i, j \geq k+1} z^i z^j \tilde{P}_{ij} \end{aligned}$$

isto completa o passo indutivo, e então fica demonstrado o teorema.

Comentário. Este lema é de especial importância para a investigação do comportamento de uma superfície de nível da função f em torno de um ponto crítico não-degenerado. Desde que a topologia de uma tal superfície ao redor destes pontos é essencialmente já determinado (via teorema de Taylor) pela forma $d^2 f$.

Para maior informação ver Milnor.[Mi]

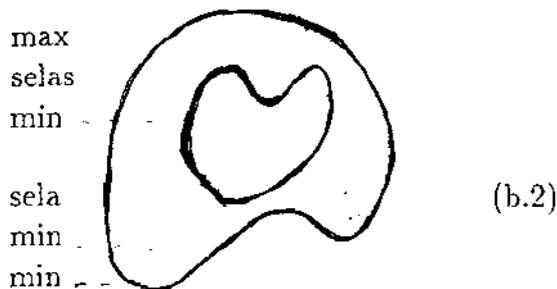
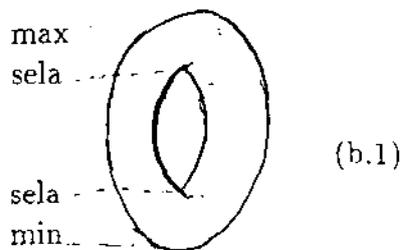
2.3. Desigualdades de Morse

As desigualdades de Morse descrevem uma relação entre os números de Betti (b_p) de uma Variedade diferenciável compacta M e o comportamento dos pontos críticos de funções de Morse definidas sobre M . Para ilustrar informalmente a natureza destas desigualdades, consideremos a classe de superfícies 2-dimensionais compactas conexas com n -buracos ou $g = \frac{2 - \chi(M)}{2}$ chamado gênero de M . Os números de Betti de tais superfícies M são dados por

$$\begin{aligned} b_0(M) &= b_2(M) = 1 \\ b_1(M) &= 2 \times (\text{número de buracos de } M) \end{aligned}$$

Agora imaginemos esta superfície mergulhada no espaço 3-dimensional com alguma escolha de eixos de coordenadas. Então qualquer ponto $m \in M$ tem a representação $m = (m_1, m_2, m_3)$ e podemos definir a função altura $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(m) = m_3$. Suponhamos que os pontos críticos são tais que: Só um número finito de pontos cumpre a igualdade $df = 0$, e cada um destes pontos críticos é um máximo, mínimo local ou um ponto de sela. Nessas condições as desigualdades de Morse são:

$$\begin{aligned} m_0 &:= \text{número de mínimos locais de } f \geq b_0(M) \\ m_1 &:= \text{número de pontos selas de } f \geq b_1(M) \\ m_2 &:= \text{número de máximos locais de } f \geq b_2(M) \end{aligned} \qquad m_0 = (2)$$



$$\begin{aligned} m_0 &= 1 = b_0 \\ m_1 &= 2 = b_1 \\ m_2 &= 1 = b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_0 &= 3 \geq 1 = b_0 \\ m_1 &= 4 \geq 2 = b_1 \\ m_2 &= 1 \geq 1 = b_2 \end{aligned}$$

A primeira e a terceira desigualdades estão sempre corretas pois $b_0(M) = b_2(M) = 1$ enquanto f tem ao menos um máximo e um mínimo global. É também intuitivamente claro que cada buraco em M produz a menos dois pontos de sela de f . Fazendo uma deformações ao buraco de (b.1) obtemos desigualdades de Morse estritas, vide figura (b.2).

Para enunciar as desigualdades de Morse para uma variedade M ν -dimensional definiremos os números de Betti b_p e os números m_p , de pontos críticos de f com índice p .

2.3.1 Definição. Definimos O p -ésimo grupo de cohomologia $H^p(M^\nu; \mathbb{R})$

(um espaço vetorial) de uma variedade diferenciável M de dimensão ν denotada M^ν , é o grupo quociente do grupo de todas as formas fechadas de grau p sobre M^ν pelo subgrupo de p -formas exatas, assim os elementos de $H^p(M^\nu, \mathbb{R})$ são classes de equivalencia de p -formas fechadas onde duas formas são equivalentes se diferem por uma forma exata:

$$\omega_1 \sim \omega_2 \text{ significa } \omega_1 - \omega_2 = d\omega.$$

No que segue M é sempre uma variedade compacta orientável sem bordo de dimensão ν . Seja $\Lambda^p(M)$ para $0 \leq p \leq \nu$ o espaço das p -formas diferenciáveis sobre M , e seja $d : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)$ o diferencial exterior. Como $d^2 = 0$, então

$$\text{Im} (d : \Lambda^{p-1}(M) \rightarrow \Lambda^p(M)) \subseteq \text{Ker} (d : (\Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)))$$

Assim podemos definir o grupo quociente para $0 \leq p \leq \nu$

$$H^p(M^\nu, \mathbb{R}) = \text{Ker} (d : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)) / \text{Im} (d : \Lambda^{p-1}(M) \rightarrow \Lambda^p(M))$$

Mostraremos no capítulo seguinte que $H^p(M, \mathbb{R})$, chamado o p -ésimo grupo de cohomologia de Rham de M , é um espaço vetorial de dimensão finita quando

M é compacta.

2.3.2 Definição. Os números de Betti de M são dados por

$$b_p(M) := \dim(H^p) \text{ onde } H^p = H^p(M) = H^p(M^\nu, \mathbb{R}), \text{ para } 0 \leq p \leq \nu.$$

2.3.3 Definição. Para cada função de Morse f , $m_p(f)$ é definido como o número de pontos críticos de f com índice p para $0 \leq p \leq \nu$.

2.3.4 Teorema “Desigualdades de Morse”

Seja M uma variedade compacta orientável sem bordo, e suponhamos que f é uma função de Morse em M . Então,

$$m_p(f) \geq b_p, \quad 0 \leq p \leq \nu \tag{1}$$

$$\sum_{p=0}^k (-1)^{k-p} m_p(f) \geq \sum_{p=0}^k (-1)^{k-p} b_p, \quad 0 \leq k \leq \nu \tag{2}$$

$$\sum_{p=0}^{\nu} (-1)^p m_p(f) = \sum_{p=0}^{\nu} (-1)^p b_p \tag{3}$$

Comentário. São chamadas desigualdades fracas de Morse (1), (2) e enquanto que (3) são chamadas desigualdades fortes. E o lado direito de (3) é a característica de Euler-Poincaré de M , usualmente denotado por $\chi(M)$.

A demonstração dessas desigualdades, segundo E. Witten, será apresentada ao final desse trabalho. A demonstração usual pode ser encontrada em Milnor [Mi].

Capítulo 3

Teoria de Hodge

Neste capítulo sempre nos referiremos a uma variedade compacta orientável M (i.e., temos definida uma ν -forma de volume em M). Em adição, assumimos que M tem uma métrica riemanniana, i.e., para cada $m \in M$, temos um produto interno $g_m \langle \cdot, \cdot \rangle$ no espaço tangente $T_m(M)$, o qual varia diferencialmente no sentido que para campos diferenciáveis $X(m)$ e $Y(m)$ numa vizinhança $V_m \subset M$. $g_m \langle X(m), Y(m) \rangle$ é uma função diferenciável em V_m . Os resultados abaixo são válidos para qualquer métrica g_m . Isto será conveniente no capítulo seguinte para uma particular métrica escolhida.

Usando a métrica, tornamos $\Lambda^p(M)$ um espaço pré-Hilbertiano (para cada p) onde o operador de Laplace-Beltrami Δ é autoadjunto. O resultado fundamental da teoria de Hodge é que o espaço $H^p(M)$ é isomorfo ao espaço de p -formas anuladas por Δ , i.e. $H^p(M) \approx \text{Ker}(\Delta|_{\Lambda^p(M)})$. Assim, $b_p \equiv \dim(H^p(M)) = \dim[\text{Ker}(\Delta|_{\Lambda^p(M)})]$.

Lembramos que b_p independe da estrutura riemanniana, assim $\dim[\text{Ker}(\Delta|_{\Lambda^p(M)})]$ não depende da escolha de uma estrutura riemanniana em M , embora tal estrutura seja empregada para definir Δ .

No restante deste capítulo, daremos uma breve exposição da teoria de Hodge e algumas propriedades do operador de Laplace-Beltrami.

O produto interno sobre $T_m(M)$ induz um isomorfismo natural φ de $T_m(M)$ sobre $T_m^*(M)$ por:

$$\begin{array}{ccc} T_m(M) & \longrightarrow & T_m^*(M) \\ X & \longmapsto & \varphi_Y \end{array}$$

$$\varphi_Y(X) = g_m \langle X, Y \rangle.$$

Usamos φ para transferir o produto interno de $T_m(M)$ para $T_m^*(M)$. Assim,

o produto interno em $T_m^*(M)$ é notado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_m^1$, definido por $\langle w_1, w_2 \rangle_m^1 = g_m \langle \varphi_Y^{-1}(w_1), \varphi_Y^{-1}(w_2) \rangle$ onde

$$\begin{aligned} \varphi_Y^{-1} : T_m^*(M) &\rightarrow T_m(M) \quad \text{e} \quad \varphi_Y^{-1}(w_1) \in T_m(M) \\ &\quad \quad \quad \varphi_Y^{-1}(w_2) \in T_m(M) \end{aligned}$$

Este produto interno sobre $T_m^*(M)$ pode ser usado para definir um produto interno sobre $\Lambda_m^p(M) = \Lambda^p(T_m^*(M))$ a p -ésima potência exterior de $T_m^*(M)$. Dado uma base ortonormal w_1, \dots, w_ν para $T_m^*(M)$, declaramos que os elementos

$$w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq \nu$$

formam uma base ortonormal para $\bigoplus_{p=0}^{\nu} \Lambda_m^p(M)$.

$$\begin{aligned} \left(\dim(\Lambda_m^p(M)) = \binom{\nu}{p} \quad \text{se} \quad p \leq \nu \right. \\ \left. \dim(\Lambda_m^p(M)) = 0 \quad \text{se} \quad p > \nu \right). \end{aligned}$$

Assim temos definido um produto interno no espaço 2^ν -dimensional, $\bigoplus_{p=0}^{\nu} \Lambda_m^p(M)$

de forma que cada um dos subespaços $\Lambda_m^p(M)$ $\binom{\nu}{p}$ -dimensionais são ortogonais aos outros. Com esse produto interno (denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_m^p$) temos

$$\langle \varphi(X_1) \wedge \dots \wedge \varphi(X_p), \varphi(Y_1) \wedge \dots \wedge \varphi(Y_p) \rangle_m^p = \det((X_i, Y_j))$$

onde φ é o isomorfismo $\varphi : T_m(M) \rightarrow T_m^*(M)$ acima definido.

3.1 Integração

3.1.1 Definição (Elemento de volume). Como a variedade M é orientável, então é possível definir uma ν -forma não nula μ globalmente em M . Podemos

escolher tal de forma que $\langle \mu, \mu \rangle = 1$ (elemento de volume unitário), então num sistema de coordenadas locais esta tal ν -forma é dada por:

$$\mu = \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^\nu$$

onde definimos o símbolo $g = \det(g_{ij})$ e $g_{ij} = g_m \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$.

Seja β uma ν -forma definida em um conjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^ν e suponha que $\text{suporte}(\beta)$ está contido em um subconjunto fechado $D \subset \mathbb{R}^\nu$. Definimos então

$$\int_D \beta = \int_D b,$$

onde b é a função real dada em $\beta = b dx^1 \wedge \dots \wedge dx^\nu$. Considere agora uma variedade C^∞ orientada e uma ν -forma α sobre M tal que $K = \text{suporte}(\alpha)$ é um subconjunto compacto de M . A compacidade de K assegura a existência de um número finito de cartas locais $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1}^N$ em M , tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$ e $\varphi_i(U_i)$ é um subconjunto limitado de \mathbb{R}^ν para cada i . Assegura também a existência de funções $\rho_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, N$ com $\text{suporte}(\rho_i) \subset U_i$, $0 \leq \rho_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^N \rho_i(m) = 1$, para todo $m \in K$. Através de uma troca na ordem das coordenadas de φ_i , podemos assumir que o pull-back $\varphi_i^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^\nu)$ é múltiplo positivo da orientação. Definimos então a integração da ν -forma

$$\int_M \alpha = \sum_{i=1}^N \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^*(\rho_i \alpha)$$

os detalhes a respeito de existência das funções ρ_i e o fato que a definição acima independe da escolha destas funções e da escolha da cobertura coordenada de K podem ser encontradas em Warner [W] ou [B].

3.1.2 Definição (Produto Interno). Notamos que até agora definimos um produto interno local para as p -formas em M . Como M é compacta podemos tornar esse produto interno global da seguinte maneira: Sejam α e β duas p -formas, então

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \langle \alpha(m), \beta(m) \rangle_m \mu.$$

O completamento de cada $\Lambda^p(M)$ respeito a este produto interno é um espaço de Hilbert o qual denotaremos por $\overline{\Lambda^p(M)}$. O diferencial exterior fica definido como um operador fechado sobre $\overline{\Lambda^p(M)}$. Assim,

$$d : D(d) \subset \overline{\Lambda^p(M)} \longrightarrow \overline{\Lambda^{p+1}(M)}.$$

O adjunto de d é denotado por d^* , i.e.,

$$d^* : D(d^*) \subset \overline{\Lambda^{p+1}(M)} \longrightarrow \overline{\Lambda^p(M)}$$

com

$$\langle \alpha, d\beta \rangle = \langle d^*\alpha, \beta \rangle \quad \text{para } \alpha, \beta \text{ nos respectivos domínios.}$$

- 1) Notemos que $\Lambda^{p+1}(M) \subset D(d^*)$, pela própria definição de d^* .
- 2) Se $d^2 = 0$ então $d^{*2} = 0$. De fato para $\forall \alpha \in \Lambda^p, \beta \in \Lambda^q$

$$0 = \langle \alpha, d^2\beta \rangle = \langle \alpha, dd\beta \rangle = \langle d^*\alpha, d\beta \rangle = \langle d^{*2}\alpha, \beta \rangle$$

logo $d^{*2} = 0$.

3.2 O Laplaciano sobre $\overline{\Lambda^p(M)}$

3.2.1 Definição. O operador Laplace-Beltrami Δ em $\overline{\Lambda^p(M)}$ é definido como operador fechado $\Delta = d^*d + dd^*$.

Notemos que $\Delta : \overline{\Lambda^p(M)} \rightarrow \overline{\Lambda^p(M)}$.

3.2.2 Definição. Uma forma α é chamada harmônica se $\Delta\alpha = 0$ ou equivalentemente, se $d\alpha = 0$ e $d^*\alpha = 0$.

Definamos os seguintes conjuntos

$$\overline{\Lambda}_H^p(M) := \{p - \text{formas harm\^onicas}\}$$

$$\overline{\Lambda}_d^p(M) := \text{Im}[d : D(d) \subset \overline{\Lambda}^{p-1}(M) \rightarrow \overline{\Lambda}^p(M)]$$

$$\overline{\Lambda}_{d^*}^p(M) := \text{Im}[d^* : D(d^*) \subset \overline{\Lambda}^{p+1}(M) \mapsto \overline{\Lambda}^p(M)].$$

Estes subespaços ser\^ao usados para decompor $\overline{\Lambda}^p(M)$ como o seguinte teorema mostra, este teorema n\^ao \^e mais que o “teorema de Hodge”. S\^o o enunciaremos, pois sua demonstra\^ao est\^a bem ilustrada no livro de Warner [W].

3.2.3 Teorema (de Hodge). Sejam $\overline{\Lambda}^p(M)$, $\Lambda_H^p(M)$, $\overline{\Lambda}_H^p(M)$, $\overline{\Lambda}_d^p(M)$ e $\overline{\Lambda}_{d^*}^p(M)$ definidos como acima. Ent\^ao

$$(i) \quad \overline{\Lambda}^p(M) = \overline{\Lambda}_H^p(M) \oplus \overline{\Lambda}_d^p(M) \oplus \overline{\Lambda}_{d^*}^p(M)$$

$$(i)' \quad \Lambda^p(M) = \Lambda_H^p(M) \oplus \Lambda_d^p(M) \oplus \Lambda_{d^*}^p(M)$$

$$(ii) \quad \ker(d : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)) = \Lambda_H^p(M) \oplus \Lambda_d^p(M)$$

$$(iii) \quad \Lambda_H^p(M) = \overline{\Lambda}_H^p(M) \quad \text{\^e de dimens\^ao finita.}$$

3.2.4 Corol\^ario ao teorema. $b_p(M) = \dim(\ker(\Delta|_{\Lambda^p(M)}))$.

$\Lambda_H^p(M)$ \^e por defini\^ao $\ker(\Delta|_{\Lambda^p(M)})$ e por (ii) do teorema 3.2.3

$$\begin{aligned} H^p(M, \mathbb{R}) &:= \ker(d : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)) / \text{Im}(d : \Lambda^{p-1}(M) \rightarrow \Lambda^p(M)) \\ &= \Lambda_H^p(M) \oplus \Lambda_d^p(M) / \Lambda_d^p(M) \approx \Lambda_H^p(M), \end{aligned}$$

assim, por (iii) do teorema 3.2.3, H^p é de dimensão finita e igual à dimensão do núcleo de $\Delta|_{\Lambda^p(M)}$, pensando este como um operador auto adjunto sobre o espaço de Hilbert $\overline{\Lambda^p(M)}$, ou como um operador diferencial definido sobre p -formas diferenciáveis. Com isto termina a demonstração. ■

3.3 Operador de Hodge. Definiremos o operador de Hodge denotado por $*$. Seja \mathbb{W} um espaço vetorial ν -dimensional com produto interno e com uma orientação fixada. Vamos definir, para cada p , um operador $*$: $\Lambda^p(\mathbb{W}) \rightarrow \Lambda^{\nu-p}(\mathbb{W})$, chamado operador de Hodge, que terá um papel essencial nas nossas considerações futuras.

Este operador é obtido estendendo por linearidade a aplicação

$$*(\tilde{x}_{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{x}_{i_p}) = (\tilde{x}_{j_1} \wedge \dots \wedge \tilde{x}_{j_{\nu-p}}) \quad \text{onde} \quad \{x_1, \dots, x_\nu\}$$

é uma base ortonormal “positiva” de \mathbb{W} e $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_\nu\}$ a base dual em \mathbb{W}^* e os índices $j_1, \dots, j_{\nu-p}$ são determinados a menos de permutações pares pela condição de que $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{\nu-p}}\}$ seja também uma base positiva para \mathbb{W} .

$*$ é caracterizado pela condição

$$\tilde{x}_{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{x}_{i_p} \wedge *(\tilde{x}_{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{x}_{i_p}) = x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p}$$

Agora definimos $*$ em uma variedade riemanniana orientada compacta M . Temos observado que a orientação de M induz uma orientação em cada espaço tangente e portanto para cada $x \in M$ é definido o operador de Hodge

$$*_x : \Lambda^p(T_x(M)) \rightarrow \Lambda^{\nu-p}(T_x(M))$$

o qual induz um operador a nível de formas

$$* : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{\nu-p}(M)$$

3.3.1 Proposição. Seja μ a forma de volume sobre uma variedade riemanniana orientada. Seja qualquer $\beta \in \Lambda^p(T_m^*(M))$, então aqui existe um único elemento

$*\beta \in \Lambda^{\nu-p}(T_x^*(M))$ com

$$\langle \alpha, *\beta \rangle_m^{\nu-p} = \langle \beta \wedge \alpha, \mu \rangle_m^\nu \quad (1)$$

para qualquer $\alpha \in \Lambda^{\nu-p}(T_x^*(M))$. Ademais, $*$ tem as seguintes propriedades:

- a) $*(\alpha + \beta) = *\alpha + *\beta$; $*(f\alpha) = f(*\beta)$ para $f \in \Lambda^0(T^*(M))$,
- b) $\langle *\alpha, *\beta \rangle_m^{\nu-p} = \langle \alpha, \beta \rangle_m^p$,
- c) $\alpha \in \Lambda^p(M)$, $\beta \in \Lambda^{\nu-p}(M)$ então $\langle *\alpha, \beta \rangle = (-1)^{p(\nu-p)} \langle \alpha, *\beta \rangle$,
- d) se $\alpha \in \Lambda^p(M)$ então $**\alpha = (-1)^{p(\nu-p)}\alpha$,
- e) $\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle_m^p \mu$ para todo $\alpha, \beta \in \Lambda^p(M)$
- f) $\alpha \wedge *\alpha = \|\alpha\|_{m,p}^2 \mu$.

Demonstração. O lado direito de (1) $\langle \beta \wedge \alpha, \mu \rangle_m^\nu = \varphi(\alpha)$ é um funcional linear em $\Lambda^{\nu-p}(T_m^*(M))$ pois $\varphi : \Lambda^{\nu-p}(T_x^*(M)) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha + c\gamma) &= \varphi(\alpha) + c\varphi(\gamma), \quad c \in \mathbb{R}, \\ \varphi(\alpha + c\gamma) &= \langle \beta \wedge (\alpha + c\gamma), \mu \rangle_m^\nu = \langle \beta \wedge \alpha + c\beta \wedge \gamma, \mu \rangle_m^\nu \\ &= \langle \beta \wedge \alpha, \mu \rangle_m^\nu + c\langle \beta \wedge \gamma, \mu \rangle_m^\nu = \varphi(\alpha) + c\varphi(\gamma) \end{aligned}$$

φ é bem definido, e assim por dualidade, existe um único elemento $*\beta$ de $\Lambda^{\nu-p}(T_m^*(M))$, tal que $\langle \alpha, *\beta \rangle_m^{\nu-p} = \varphi(\alpha) = \langle \beta \wedge \alpha, \mu \rangle_m^\nu$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \langle \alpha, *\beta + *\gamma \rangle_m^{\nu-p} &= \langle \alpha, *\beta \rangle_m^{\nu-p} + \langle \alpha, *\gamma \rangle_m^{\nu-p} \\ &= \langle \beta \wedge \alpha, \mu \rangle_m^\nu + \langle \gamma \wedge \alpha, \mu \rangle_m^\nu \\ &= \langle \beta \wedge \alpha + \gamma \wedge \alpha, \mu \rangle_m^\nu \\ &= \langle (\beta + \gamma) \wedge \alpha, \mu \rangle_m^\nu \\ &= \langle \alpha, *(\beta + \gamma) \rangle_m^{\nu-p} \end{aligned}$$

logo $*(\beta + \gamma) = *\beta + *\gamma$.

igual $*(f\alpha) = f(*\alpha)$, $f \in \Lambda^0(T_m^*(M))$.

(b) Seja w_1, \dots, w_n uma base ortonormal de $T_m^*(M)$ com $\mu = w_1 \wedge \dots \wedge w_n$. Então observamos que pela definição de $*$

$$*(w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_p}) = (-1)^\pi w_{j_1} \wedge \dots \wedge w_{j_{\nu-p}}$$

onde

$$i_1 < \dots < i_p \quad \text{e} \quad j_1 < \dots < j_{\nu-p} \quad \text{é o conjunto complementar de} \quad \{i_1, \dots, i_p\}$$

e π é o sinal da permutação que leva $(1, \dots, p)$ em (i_1, \dots, i_p) e $(p+1, \dots, \nu)$ em $(j_1, \dots, j_{\nu-p})$.

Assim $*$ leva uma base ortonormal de $\Lambda^p(M)$ em uma base de $\Lambda^{\nu-p}(M)$, logo (b) é válido.

$$(c) \quad \begin{aligned} \langle \beta, * \alpha \rangle &= \langle \alpha \wedge \beta, \mu \rangle = (-1)^{p(\nu-p)} \langle \beta \wedge \alpha, \mu \rangle \\ &= (-1)^{p(\nu-p)} \langle \alpha, * \beta \rangle. \end{aligned}$$

(d) Podemos em (c) $\beta = * \alpha$, $\alpha \in \Lambda^p(M)$ então $* \alpha \in \Lambda^{\nu-p}(M)$, segue $\langle * \alpha, * \alpha \rangle = (-1)^{p(\nu-p)} \langle \alpha, ** \alpha \rangle$.

Por (b) $\langle * \alpha, * \alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle = (-1)^{p(\nu-p)} \langle \alpha, ** \alpha \rangle$, logo $** \alpha = (-1)^{p(\nu-p)} \alpha$.

(e) como $\alpha \wedge (* \beta) = g \mu$ para alguma função g e como

$$\begin{aligned} g &= \langle \alpha \wedge * \beta, \mu \rangle = \langle * \beta, * \alpha \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle \\ \text{então} \quad \alpha \wedge (* \beta) &= \langle \alpha, \beta \rangle \mu \end{aligned}$$

Poderíamos ter definido $*$ como $\alpha \wedge * \alpha = \|\alpha\|^2 \mu$, como outros textos fazem. Também podemos definir o produto interno,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \langle \alpha(m), \beta(m) \rangle_m \mu = \int_M \alpha(m) \wedge * \beta(m).$$

3.3.2 Proposição. (a) $d^* \alpha = (-1)^{\nu+\nu p+1} * d * \alpha$ se $\alpha \in \Lambda^p(M)$,

$$(b) \Delta * \alpha = * \Delta \alpha$$

Demonstração. (a) Seja α uma p -forma e β uma $(p-1)$ -forma arbitrária, então, pelo teorema de Stokes, a $\nu - 1$ forma $\beta \wedge * \alpha$ obedece $\int_M d(\beta \wedge * \alpha) = 0$ pois M é compacta.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M d(\beta \wedge * \alpha) = \int_M (d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{p-1} \beta \wedge d(* \alpha)) \\ &= \int_M d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{p-1} \int_M \beta \wedge d(* \alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

como

$$\begin{aligned} \int_M d\beta \wedge * \alpha &= \int_M \langle d\beta, \alpha \rangle_m \mu = \langle d\beta, \alpha \rangle = \langle \beta, d^* \alpha \rangle \\ \int_M \beta \wedge d(* \alpha) &= \left[(-1)^{(p-1)(\nu-p+1)} \int_M \beta \wedge ** d * \alpha \right] \end{aligned}$$

isto porque $d * \alpha \in \Lambda^{\nu-p+1}(M)$, então pela proposição 3.3.1 (d)

$$** (d * \alpha) = (-1)^{(\nu-p+1)(\nu-\nu+p-1)} d * \alpha = (-1)^{(\nu-p+1)(p-1)} d * \alpha$$

$$\begin{aligned} \int_M \beta \wedge d * \alpha &= (-1)^{(p-1)(\nu-p+1)} \int_M \beta \wedge *(* d * \alpha) \\ &= (-1)^{(p-1)(\nu-p+1)} \int_M \langle \beta, * d * \alpha \rangle_m \mu = (-1)^{(p-1)(\nu-p+1)} \langle \beta, * d * \alpha \rangle \end{aligned}$$

e por (2) temos

$$0 = \langle \beta, d^* \alpha \rangle + (-1)^{(p-1)} \cdot (-1)^{(p-1)(\nu-p+1)} \langle \beta, * d * \alpha \rangle$$

$$\text{como } p-1 + \nu p - \nu - (p-1)p + p-1 = \nu p - \nu - \underbrace{p(p-1)}_{\text{par}} + \underbrace{2p-2}_{\text{par}}$$

$$0 = \langle \beta, d^* \alpha \rangle + (-1)^{\nu(p-1)} \langle \beta, *d * \alpha \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \beta, d^* \alpha \rangle &= -(-1)^{\nu(p-1)} \langle \beta, *d * \alpha \rangle \\ &= (-1)^{\nu p} \cdot (-1)^{-\nu} (-1)^1 \langle \beta, *d * \alpha \rangle \\ &= (-1)^{\nu p + \nu + 1} \langle \beta, *d * \alpha \rangle \\ d^* \alpha &= (-1)^{\nu(p+1)+1} *d * \alpha \end{aligned}$$

b) se ν é par então por (a) $d^* \alpha = - *d * \alpha$
então $\Delta = (-d * d * + *d * d)$ e seja $\Delta_{\nu-p} = \Delta|_{\Lambda^{\nu-p}(M)}$

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu-p} * \alpha &= -[d * d * * \alpha + *d * d * \alpha] \\ &= -[(-1)^{p(\nu-p)} d * d \alpha + *d * d * \alpha] \\ * \Delta_p \alpha &= -[*d * d * \alpha + **d * d \alpha] \end{aligned} \quad (3)$$

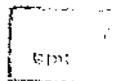
como $d * d \alpha \in \Lambda^{\nu-p}(M)$ então

$$\begin{aligned} ** (d * d \alpha) &= (-1)^{p(\nu-p)} d * d \alpha \\ * \Delta_p \alpha &= -[*d * d * \alpha + (-1)^{p(\nu-p)} d * d \alpha] \end{aligned} \quad (4)$$

com (3) e (4) $\Delta_{\nu-p} * \alpha = * \Delta_p \alpha$.

Se ν é ímpar de forma análoga segue-se

$$\begin{aligned} \Delta_p &= (-1)^p [d * d * - *d * d] \\ \Delta_{\nu-p} * \alpha &= d^* d * \alpha + d d^* \alpha = \\ &= (-1)^p [*d * d * \alpha - d * d * * \alpha] \\ &= (-1)^p [*d * d * \alpha - **d * d \alpha] = * \Delta_p \alpha \end{aligned}$$



logo $*\Delta = \Delta*$.

3.3.3 Proposição. a) d e d^* são operadores adjuntos, i.e.,

$$\langle dw, \tau \rangle = \langle w, d^*\tau \rangle, \quad \text{para todo } w \in \Lambda^{p-1}(M), \tau \in \Lambda^p(M).$$

b) Δ é um operador auto-adjunto,

c) Δ é positivo.

Demonstração. (a)

$$\begin{aligned} d(w \wedge *\tau) &= dw \wedge *\tau + (-1)^{p-1}w \wedge d(*\tau) \\ &= dw \wedge *\tau + (-1)^{p-1}w \wedge d(*\tau) \\ &= dw \wedge *\tau + \underbrace{(-1)^{p-1+(\nu-p+1)\nu+(\nu-p+1)}}_I w \wedge **d^*\tau \end{aligned}$$

como $d^*\tau \in \Lambda^{\nu-p+1}(M)$

$$= dw \wedge *\tau - Iw \wedge **d^*\tau \quad \text{pois } **w = (-1)^{p(\nu-p)}w$$

por

$$\begin{aligned} d^* &= (-1)^{\nu(p+1)+1} * d * \\ &= dw \wedge *\tau + (-1)^{p-1+(\nu-p+1)\nu+(\nu-p+1)+\nu(p+1)+1} w \wedge *d^*\tau \\ &= dw \wedge *\tau - w \wedge *d^*\tau \end{aligned}$$

pele teorema de Stokes, temos

$$0 = \int_M d(w \wedge *\tau) = \int_M dw \wedge *\tau + \int_M w \wedge *\tau = \langle dw, \tau \rangle - \langle w, d^*\tau \rangle$$

b) Δ é o operador auto-adjunto para $\alpha, \beta \in \Lambda^p(M)$

$$\begin{aligned} \langle \Delta\alpha, \beta \rangle &= \langle dd^*\alpha + d^*d\alpha, \beta \rangle = \langle d^*\alpha, d^*\beta \rangle + \langle d\alpha, d\beta \rangle \\ &= \langle \alpha, dd^*\beta \rangle + \langle \alpha, d^*d\beta \rangle \quad \text{por (a)} \\ &= \langle \alpha, (dd^* + d^*d)\beta \rangle \\ &= \langle \alpha, \Delta\beta \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle &= \langle dd^*\alpha + d^*d\alpha, \alpha \rangle = \\
 &= \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle \geq 0.
 \end{aligned}$$

3.3.4 (Teorema da Dualidade de Poincaré).

Seja M uma variedade qualquer compacta orientável de dimensão ν , então

$$H_{de\mathbb{R}}^{\nu-p}(M)^* \approx (H_{de\mathbb{R}}^p(M)),$$

ou

$$\ker(\Delta|_{\Lambda^p(M)}) \approx \ker(\Delta|_{\Lambda^{\nu-p}(M)})$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 H_{de\mathbb{R}}^p(M) \times H_{de\mathbb{R}}^{\nu-p}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (\{\varphi\}, \{\psi\}) &\longmapsto \int_M \varphi \wedge \psi
 \end{aligned}$$

define um funcional bilinear (este funcional depende da orientação de M). φ e ψ são formas fechadas e são harmônicas. Representaremos uma classe de cohomologia por $\{\varphi\}$ em $H_{de\mathbb{R}}^p(M)$ e $\{\psi\}$ em $H_{de\mathbb{R}}^{\nu-p}(M)$.

Demonstraremos que esta função é bem definida. Se φ_1 é uma representativa da classe de Rham $\{\varphi\}$, então $\varphi_1 = \varphi + d\varepsilon$ para alguma forma ε , e pelo teorema de Stokes temos

$$\begin{aligned}
 \int_M \varphi_1 \wedge \psi &= \int_M \varphi \wedge \psi + \int_M d\varepsilon \wedge \psi = \int_M \varphi \wedge \psi + \int_M (-1)^p \varepsilon \wedge d\psi + \int_M d\varepsilon \wedge \psi \\
 &= \int_M \varphi \wedge \psi + \int_M d(\varepsilon \wedge d\psi) + \int_M d\varphi \wedge \psi = \int_M \varphi \wedge \psi
 \end{aligned}$$

é bem definida. Demonstraremos agora que a função é não singular.

Seja $\{\varphi\} \in H_{de\mathbb{R}}^p(M)$ uma classe de cohomologia não nula, temos que achar uma classe de cohomologia não nula $\{\psi\} \in H_{de\mathbb{R}}^{\nu-p}(M)$ tal que $(\{\varphi\}, \{\psi\}) \neq 0$, escolhamos uma estrutura riemanniana sobre M . Assumamos que φ é a representante harmônica de $\{\varphi\}$. segue-se de que a classe de cohomologia $\{\varphi\}$ é não nula, φ não é identicamente nula.

Como $*\Delta = \Delta*$ segue-se que $*\varphi$ é também harmônica e portanto é fechada, ($\Delta\alpha = 0 \Leftrightarrow d\alpha = 0$ e $d^*\alpha = 0$), e como $*\varphi$ é o representante de uma classe de cohomologia $\{*\varphi\} \in H_{\mathbb{R}}^{\nu-p}(M)$. Agora

$$(\{\varphi\}, \{*\varphi\}) = \int_M \varphi \wedge *\varphi = \|\varphi\|^2 \neq 0$$

assim a função é não singular e o isomorfismo segue. ■

3.4 Super-simetria

Para concluir este capítulo faremos algumas aplicações de super-simetria (Susy).

Observação da seção anterior.

Se $\nu = 4k$ então $* : \Lambda^{2k}(M) \rightarrow \Lambda^{4k-2k}(M)$ obedece

$$*^2 = ** = (-1)^{2k(4k-2k)} = 1,$$

pois $\Delta = -(d*d* + *d*d)$

Podemos então simultaneamente diagonalizar Δ e $*$ e

$$\delta := \dim\{\mu/\Delta\mu = 0, *\mu = \mu\} - \dim\{\mu/\Delta\mu = 0, *\mu = -\mu\}$$

é de interesse em outros contextos sendo chamado índice de Hirzebruch de M .

3.4.1 Definição de Super-Simetria. Consideremos o espaço de Hilbert \mathcal{H} e sejam Δ, Q operadores auto-adjuntos e P limitado em \mathcal{H} tal que:

$$\Delta = Q^2$$

$$P^2 = I$$

$$\{Q, P\} = QP + PQ = 0$$

então, dizemos que $(\mathcal{H}, \Delta, P, Q)$ tem super-simetria.

Observações. P é auto-adjunto, $P^2 = I$, P tem só 1, -1 como autovalores.

Designaremos os auto-espacos associados dos autovalores, 1, -1

$$H_f := \{\varphi \in \mathcal{H} \mid P\varphi = -\varphi\}$$

$$H_b := \{\varphi \in \mathcal{H} \mid P\varphi = +\varphi\}$$

$$\text{Então temos a decomposição } \mathcal{H} = H_f \oplus H_b \quad (5)$$

e sejam os autoespacos de Q com autovalores $\pm\sqrt{\lambda}$

$$\widetilde{H}_{+\lambda} = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid Q\varphi = \sqrt{\lambda}\varphi, \lambda \text{ autovalor de } \Delta\}$$

$$\widetilde{H}_{-\lambda} = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid Q\varphi = -\sqrt{\lambda}\varphi, \lambda \text{ autovalor de } \Delta\}.$$

Pela decomposição (5), podemos escrever

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_b & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_f \end{pmatrix}$$

onde $\mathbb{1}_b$ e $\mathbb{1}_f$ são operadores identidade em H_b e H_f respectivamente, como P e Q anti-comutam e Q é auto-adjunto, então Q tem a forma:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

onde A é um operador que aplica H_b em H_f e seu adjunto aplica H_f em H_b . Isto implica que

$$Q : H_f \longrightarrow H_b$$

$$Q : H_b \longrightarrow H_f$$

Δ pode também ser escrito pela definição de super-simetria

$$\Delta = \begin{pmatrix} A^*A & 0 \\ 0 & AA^* \end{pmatrix}$$

assim, P comuta com Δ e H_f , H_b são invariantes com respeito a Δ .

Seja λ um autovalor de Δ e seja P_λ projeção ortogonal de \mathcal{H} sobre o correspondente auto espaço. Identificaremos a projeção P_λ e o subespaço $P_\lambda \mathcal{H}$.

3.4.2 Teorema. Seja $\lambda > 0$ um autovalor de Δ . Então

$$P_\lambda = H_{+\lambda} \oplus H_{-\lambda} = \Gamma_b \oplus \Gamma_f,$$

$H_{+\lambda}$ e $H_{-\lambda}$ são auto espaços isomorfos de Q com autovalores $\pm\sqrt{\lambda}$ e Γ_b, Γ_f são auto-espaços isomorfos de P com autovalores ± 1 e $\Gamma_b = H_b \cap P_\lambda, \Gamma_f = H_f \cap P_\lambda$.

Demonstração. Q e P comutam com Δ pois

$$Q^3 = Q\Delta = \Delta Q \Rightarrow \Delta Q = Q\Delta, \text{ e } Q^2P + QPQ = 0 \text{ por } QP = -PQ$$

$$\text{então } Q^2P + (-1)PQ^2 = 0$$

$$\text{logo } Q^2P = PQ^2 \Rightarrow \Delta P = P\Delta$$

também comuta com P_λ . Seja $H_{\pm\lambda} = (2\sqrt{\lambda})^{-1}(\lambda^{1/2} \pm Q)P_\lambda$. Observamos aqui cada $H_{\pm\lambda}$ são projeções sobre subespaços ortogonais de P_λ . Estes são auto-espaços associados a $\pm\sqrt{\lambda}$. Também

$$P_\lambda = H_\lambda + H_{-\lambda} \text{ e como } H_\lambda \cap H_{-\lambda} = \{0\},$$

$$\text{mas como } P_\lambda = H_\lambda \oplus H_{-\lambda} \text{ então } P_\lambda P = PP_\lambda, PQ = -QP, P^2 = I$$

$$PH_{\pm\lambda}P = H_{\mp\lambda}. \text{ De fato}$$

$$\begin{aligned} PH_{\pm\lambda}P &= P((2\sqrt{\lambda})^{-1}(\lambda^{1/2} \pm Q))P_\lambda P = P((2\sqrt{\lambda})^{-1}(\lambda^{1/2}P \pm QP))P_\lambda \\ &= P((2\sqrt{\lambda})^{-1}(\lambda^{1/2}P \mp PQ))P_\lambda \\ &= P^2(2\sqrt{\lambda})^{-1}(\lambda^{1/2} \mp Q)P_\lambda \\ &= H_{\mp\lambda} \end{aligned}$$

logo

$$PH_{\pm\lambda}P = H_{\mp\lambda}$$

(no caso em que eles sejam de dimensão finita isto significa que $\dim(H_{+\lambda}) = \dim(H_{-\lambda})$, então $H_{\lambda} \approx H_{-\lambda}$).

Mas com isto demonstra-se em caso geral que $H_{+\lambda} \approx H_{-\lambda}$.

De igual maneira $\Gamma_{bf} = \frac{1}{2}(1 \pm P)P_{\lambda}$ são projeções sobre os auto-espacos de P em P_{λ} . Assim, $P_{\lambda} = \Gamma_b + \Gamma_f$ e mais ainda, $\Gamma_b \cap \Gamma_f = \{0\}$ então $P_{\lambda} = \Gamma_b \oplus \Gamma_f$.

Também, como P_{λ} comuta com Q e $QP = -PQ$ temos

$$\begin{aligned} \frac{Q}{(\lambda^{1/2})^2} \frac{1}{2}(Q \pm PQ)P_{\lambda} &= \frac{Q}{(\lambda^{1/2})^2} \frac{1}{2}(Q \pm (-1)QP)P_{\lambda} \\ &= \frac{Q^2}{(\lambda^{1/2})^2} \frac{1}{2}(1 \mp P)P_{\lambda} \\ &= \frac{1}{2}(1 \mp P)P_{\lambda} = \Gamma_{fb} \end{aligned}$$

$$\text{logo } \frac{Q}{\lambda^{1/2}}\Gamma_{bf}\frac{Q}{\lambda^{1/2}} = \Gamma_{fb}$$

isto mostra que $\Gamma_b \approx \Gamma_f$. Fica demonstrado o teorema. ■

Como consideramos o espaço $\overline{\Lambda}^p(M)$ um espaço de Hilbert, então aqui aplicamos todas as propriedades de super-simetria

$$\begin{aligned} Q_p : \overline{\Lambda}^p(M) &\longrightarrow \overline{\Lambda}^{p+1}(M) \\ Q_p &= d + d^* \end{aligned}$$

ou geralmente

$$Q : \mathcal{H} = \bigoplus_{p=0}^{\nu} \overline{\Lambda}^p(M) \longrightarrow \bigoplus_{p=0}^{\nu} \overline{\Lambda}^p(M) = \mathcal{H}$$

e P é definido sobre \mathcal{H} por $P|_{\Lambda^p(M)} = (-1)^p$, então temos

$$Q^2 = dd^* + d^*d = \Delta, \quad P^2 = I$$

e $\{Q, P\} = 0$. De fato

$$\begin{aligned} P(d + d^*)w &= P(dw + d^*w) = (-1)^{p+1}dw + (-1)^{p-1}d^*w \quad \text{para } w \in \overline{\Lambda}^p(M) \\ &= -1(d + d^*)(-1)^p w \\ &= -(d + d^*)Pw. \end{aligned}$$

Assim, $(\mathcal{H}, \Delta, P, Q)$ tem super-simetria.

Aplicando o teorema de super-simetria para auto-valores $\lambda > 0$ de Δ , então como $H_{+\lambda} \approx H_{-\lambda}$ e $\Gamma_b \approx \Gamma_f$ temos

$$\begin{aligned} \bigoplus_p \{\varphi : \Delta\varphi = \lambda\varphi, \Delta|_{\Lambda^p(M)} \text{ } p \text{ par}\} &\approx \\ &\approx \bigoplus_p \{\varphi : \Delta\varphi = \lambda\varphi, \Delta|_{\Lambda^p(M)} \text{ } p \text{ ímpar}\} \end{aligned}$$

então

$$\sum_{p \text{ ímpar}} \dim\{\ker[(\Delta - \lambda)|_{\Lambda^p(M)}]\} = \sum_{p \text{ par}} \dim\{\ker[(\Delta - \lambda)|_{\Lambda^p(M)}]\}. \quad *0$$

Capítulo 4

O Laplaciano Deformado de Witten

No capítulo anterior mostramos que os números de Betti de M são dados pelo número de autovalores nulos de Δ ou pela dimensão do $\ker(\Delta)$ definido sobre p -formas. Na prática é difícil calcular o espectro de Δ . Para isto a observação de Witten que os resultados das seções anteriores são válidos quando d, d^* e Δ são trocados por

$$\begin{aligned} d_t &= e^{-tf} d e^{tf} \\ d_t^* &= e^{tf} d^* e^{-tf} \\ \Delta_t &= d_t d_t^* + d_t^* d_t, \end{aligned}$$

Onde $t \in \mathbb{R}$ e f é uma função de Morse.

Como no capítulo anterior nos temos $\Lambda_{d_t}^p, \Lambda_{d_t^*}^p(M)$ e $\Lambda_{H_t}^p(M)$ e seus L^2 -fechos $\overline{\Lambda}_{d_t}^p(M), \overline{\Lambda}_{d_t^*}^p(M)$ e $\overline{\Lambda}_{H_t}^p(M)$ são definidos analogamente ao capítulo anterior.

4.1 Super-simetria com o Laplaciano Deformado

4.1.1 Teorema $b_p = \dim[\ker(\Delta_t/\overline{\Lambda}^p(M))] = \dim[\ker(\Delta/\Lambda^p(M))]$.

Demonstração. Definamos $d_t : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)$

$$\text{e } d_t^* : \Lambda^{p-1}(M) \rightarrow \Lambda^p(M) \text{ como acima.}$$

Então $\ker(d_t : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)) / \text{Im}(d_t : \Lambda^{p-1}(M) \rightarrow \Lambda^p(M)) \cong \overline{\Lambda}_{H_t}^p(M)$
mas como

$$\ker(d_t) = e^{-tf} \ker(d)$$

$$\text{Im}(d_t) = e^{-tf} \text{Im}(d), \text{ assim que}$$

$$\overline{\Lambda}_{H_t}^p(M) \cong \ker(d) / \text{Im}(d) \cong H_{\mathbb{R}}^p(M).$$

E verificamos o resultado.

Note que todas as propriedades de super-simetria também valem para as deformações

$$\begin{aligned}
 Q_t &= d_t + d_t^* \text{ definido sobre } \bigoplus_{p=0}^{\nu} \bar{\Lambda}^p(M), \\
 P &: \bar{\Lambda}^p(M) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(M) \\
 &\quad \alpha \mapsto (-1)^p \alpha \\
 &\quad P\alpha = (-1)^p \alpha \\
 Q_t^2 &= \Delta_t
 \end{aligned}$$

logo $(\bigoplus_p \bar{\Lambda}^p(M), \Delta_t, P, Q_t)$ tem super-simetria.

Então os resultados das propriedades de super-simetria obtidos anteriormente são válidos, e implicam que

$$\sum_{p \text{ ímpar}} \dim(\ker(\Delta_t - \lambda)/\Lambda^p(M)) = \sum_{p \text{ par}} \dim(\ker(\Delta_t - \lambda)/\Lambda^p(M)).$$

No teorema 4.1.1 obtivemos que para estimar b_p é suficiente estimar a dimensão de $\bar{\Lambda}_{H_t}^p(M) = \ker(\Delta_t/\bar{\Lambda}^p(M))$ para qualquer t . A idéia principal do método de Witten é estimar quando $t \rightarrow \infty$ empregando o chado limite semi-clássico para o operador Δ_t .

Os autovalores de Δ_t podem ser usados para calcular a dimensão de $\ker(\Delta_t/\bar{\Lambda}^p(M))$ para um grande t . Uma consequencia ao estimar os números de Betti dessa forma produz as desigualdades de Morse fracas.

Estudando $\Delta_t/\Lambda^p(M)$ no limite $t \rightarrow \infty$, seremos capazes de calcular que o número de autovalores $E_k(t)$ obedecendo $\lim_{t \rightarrow \infty} E_k(t)/t = 0$ é m_p , enquanto que o número de $E_k(t) = 0$ é b_p então $m_p \geq b_p$. Todos estes resultados obteremos na seção seguinte.

Para prosseguir precisamos encontrar uma expressão de Δ_t , a qual torne clara a regra de comportamento de pontos críticos de f . Para isso obteremos

algumas propriedades.

4.2 Operadores $a^i, (a^i)^*$.

4.2.1 Definição Seja E um espaço vetorial e ε um elemento para qualquer $p \geq 1$, definimos uma aplicação linear

$$a(\varepsilon) : \Lambda^p(E^*) \rightarrow \Lambda^{p-1}(E^*)$$

chamado contração por ε como segue:

$$(a(\varepsilon)\alpha)(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}) = \alpha(\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1})$$

para qualquer $\alpha \in \Lambda^p(E^*)$ e $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1} \in E$.

Empregando coordenadas seja E um espaço vetorial que tem dimensão p , fixamos uma base $\{e_1, \dots, e_p\}$ de E , tomamos $\alpha \in \Lambda^p(E^*)$ e um elemento $\varepsilon = \sum_{j=1}^p x_j e_j$ de E .

$$\begin{aligned} \text{Temos } (a(\varepsilon)(\alpha))(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p) &= \alpha\left(\sum_{j=1}^p x_j e_j, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p\right) = \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} x_i \alpha(e_1, \dots, e_i, \dots, e_p) \end{aligned}$$

onde \hat{e}_i significa e_i é omitido, segue-se $\alpha \in \Lambda^p(E^*)$, existe um escalar c tal que $\alpha = c(e_1^* \wedge \dots \wedge e_p^*)$

$$a\left(\sum_{i=1}^p x_i e_i\right)\alpha = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} c x_i e_1^* \wedge \dots \wedge \hat{e}_i^* \wedge \dots \wedge e_p^* \quad (1)$$

segue-se as que formas $e_1^* \wedge \dots \wedge \hat{e}_i^* \wedge \dots \wedge e_p^*$ $i = 1, \dots, p$, formam uma base para $\Lambda^{p-1}(E^*)$.

Definição do operador contração para uma variedade M . Para qualquer $\alpha \in \Lambda^p(T_x^*(M))$ a contração de α pelo campo vetorial ε é da forma $a(\varepsilon)\alpha$ tal que

$$((a(\varepsilon)\alpha)(x) = a(\varepsilon(x))(\alpha(x)); \quad x \in M, \quad \varepsilon \in T(M)$$

Aqui calcularemos explicitamente $a\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\alpha$, quando $\dim(T_x(M)) = p$, $\{x^i\}_{j=1,\dots,p}$ coordenadas locais sobre $U \subset M$ então.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \subset M \rightarrow T(M)$$

são campos vetoriais sobre U tal que $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=1,\dots,p}$ é uma base para $T_x(M)$, (sua base dual é $\{dx^i(x)\}_{i=1}^p$ de $T_x^*(M)$, para qualquer $x \in U$).

Então com a notação

$$a\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\alpha = a^i(\alpha)$$

calculamos a^i quando $\alpha = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$. Então por definição $a^i(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p})(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}) =$

$$\begin{aligned} & \left(a\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}\right)(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}) = \\ & = (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p})\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}\right), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1} \in T(M) \\ & = \det(dx^{j_k}(\varepsilon_i)) \text{ onde } i = 0, \dots, p-1, \varepsilon_0 = \frac{\partial}{\partial x^i} \\ & = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \langle dx^{j_k}, dx^i \rangle dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{j_k}} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}) \end{aligned}$$

Logo

$$a^i(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} g^{ij_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{j_k}} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$$

onde $g^{ij} = \langle dx^i, dx^j \rangle$ é a métrica de $T_x^*(M)$ note que g^{ij} e g_{ij} são matrizes inversas.

Definamos o operado adjunto de a^i denotado por $(a^i)^*$

$$\begin{aligned} (a^i)^* : \Lambda^p(M) &\rightarrow \Lambda^{p+1}(M) \\ \alpha &\mapsto (a^i)^*(\alpha) = dx^i \wedge \alpha \end{aligned}$$

Aqui os operadores $a^i, (a^i)^*$ são operadores de grau -1 e 1 (com respeito à p -gradação). Também é fácil provar que a^i é antiderivação de $\Lambda(T^*(M))$ de grau

-1, isto é para todo $\alpha, \beta \in \Lambda(T^*(M))$ temos

$$a^i(\varepsilon)(\alpha \wedge \beta) = (a^i(\varepsilon)\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\text{grau}(\alpha)} \alpha \wedge (a^i(\varepsilon)(\beta))$$

No que segue assumiremos que as formas têm suporte compacto numa região onde o sistema de coordenadas está definido. Concluimos o seguinte

$$\{a^i, (a^j)^*\} = a^i(a^j)^* + (a^j)^* a^i = g^{ij}.$$

4.2.2 Teorema. Δ_t tem a forma

$$\Delta_t = \Delta + t^2 \|df\|^2 + tA$$

onde A é um operador de grau zero. Se a métrica é plana em alguma vizinhança. Então (num sistema de coordenadas local ortonormal), x^1, \dots, x^ν ,

$$A = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) [(a^i)^*, a^j].$$

Demonstração. $d_t \alpha = e^{-tf} de^{tf} \alpha = d\alpha + tdf \wedge \alpha$ e

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

assim, notemos $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ então

$$d_t \alpha = d\alpha + t \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge \alpha = d\alpha + t \sum f_i dx^i \wedge \alpha = d\alpha + t \sum_i f_i (a^i)^*$$

e por conseguinte

$$d_t^* = d^* + t \sum_{i=1}^{\nu} f_i a^i$$

$$\Delta_t = \{d_t, d_t^*\} = \{d, d^*\} + \{d, t \sum f_i a^i\} + \{t \sum f_i (a^i)^*, d^*\} + \{t \sum_{i=1}^{\nu} f_i (a^i)^*, t \sum_{i=1}^{\nu} f_i a^i\}$$

onde $A = A_1 + A_1^*$, $A_1 = \{d, \sum_j f_j a^j\}$

$$\Delta_t = \Delta + t^2 \sum_{i,j} f_i f_j \{a^i, (a^j)^*\} + tA$$

Para demonstrar que A é um operador de grau zero, introduzimos o operador derivada ∂_i em coordenadas locais, definido por

$$\partial_i \left(\sum_{j_1 < \dots < j_p} u_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \right) = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \frac{\partial u_{j_1 \dots j_p}}{\partial x^i} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$$

então d esta definido por

$$d = \sum_i (a^i)^* \partial_i$$

$$\begin{aligned} \text{Assim } A_1 &= \left\{ \sum_i (a^i)^* \partial_i, \sum_j f_j a^j \right\} \\ &= \sum_{i,j} \{ (a^i)^* \partial_i, f_j a^j \} \text{ usando } \{AB, C\} = \{A, B\}B + A\{B, C\} \\ &= \sum_{i,j} [\{ (a^i)^*, f_j a^j \} \partial_i + (a^i)^* \{ \partial_i, f_j a^j \}] \\ &= \sum_{i,j} g^{ij} f_j \partial_i + \underbrace{(a^i)^* \{ \partial_i, f_j a^j \}}_{A_2}. \end{aligned}$$

Agora A_2 é um operador de grau zero envolvendo derivadas de segundo ordem de f e derivadas de g^{ij} , assim

$$A = A_1 + A_1^* = - \sum_{i,j} [\partial_i, g^{ij} f_j] + A_2 + A_2^*$$

De fato como $d^* = \sum_i (-\partial_i)(a^i)$

$$\begin{aligned} A_1^* &= \left\{ \sum_i (-\partial_i)(a^i), \sum_j f_j (a^j)^* \right\} \\ &= \sum_{i,j} \{ (-\partial_i) a^i, f_j (a^j)^* \} \text{ usando } \{A, BC\} = B\{A, C\} + [A, B]C \\ &= \sum_{i,j} (-\partial_i \{ f_j (a^j)^*, a^i \} + [f_j (a^j)^*, -\partial_i] a^i) \\ &= - \sum \partial_i g^{ij} f_j + A_2^* \\ A &= - \sum_{i,j} [\partial_i, g^{ij} f_j] + A_2 + A_2^* \end{aligned}$$

é um operador de grau zero. Para calcular a expressão de A em pontos m onde a métrica é plana, (i.e. $g^{ij} = \delta^{ij}$ em uma vizinhança de m num sistema de coordenadas adequado) voltamos à expressão

$$A_1 = \sum_{i,j} \{ (a^i)^*, f_j a^j \} \partial_i + (a^i)^* [\partial_i, f_j a^j].$$

quando a métrica é plana em uma vizinhança, $[\partial_j, a^j] = 0$ (i.e. $\partial_i a^j = a^j \partial_i$), assim

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{i=1} f_i \partial_i + (a^i)^* (a^i f_j a^j - f_j a^j \partial_i) \\ &= \sum_{i=j} f_i \partial_i + \sum_{i,j} (a^i)^* (f_j \partial_i a^j + f_{ij} a^j - f_j a^j \partial_i) \\ &= \sum_i f_i \partial_i + \sum_{i,j} (a^i)^* (f_{ij} a^j + f^i [\partial_i, a^j]) \\ &= \sum_i f_i \partial_i + \sum_{i,j} (a^i)^* f_{ij} a^j \end{aligned}$$

onde $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$. Nestes termos A_2 é Hermitiana desde que f_{ij} é simétrica, e assim

$$\begin{aligned} A_1^* &= - \sum \partial_i f_i + \sum_{i,j} (a^i)^* f_{ij} a^j \\ A &= A_1 + A_1^* = \\ &= \sum_{i,j} 2 f_{ij} (a^i)^* a^j - \sum_{i,j} g^{ij} \partial_i f_i \\ &= \sum_{i,j} \partial_i f_j [2 (a^i)^* a^j - \delta^{ij}] \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} f [(a^i)^*, a^j]. \blacksquare \end{aligned}$$

Os cálculos acima de A em geral não são inteiramente satisfatórios, mas isto é suficiente para provar que A é operador de grau zero e calcular sua forma explícita para pontos especiais. O formalismo com derivadas covariantes é feito no apêndice.

4.3 Demonstração das desigualdades de Morse.

Seja M uma variedade compacta orientável sem bordo, f uma função de Morse em M , provaremos as desigualdades de Morse. Para isto escolhemos uma métrica Riemanniana sobre M e aplicaremos todas as considerações do Capítulo 1 para o operador $\Delta_t = \Delta + t^2\|df\|^2 + tA$ definido sobre p -formas para estimar a multiplicidade do autovalor nulo, (i.e dimensão do $\ker(\Delta_t)$), para um grande t . A função $\|df\|^2$ anula-se só num número finito de pontos onde f é uma função de Morse, e A é um operador de grau zero. Com algumas alterações aplicaremos o teorema do limite semi-clássico. Escolheremos uma métrica de uma maneira muito especial dependendo de f . Pelo lema 2.2.2 de Morse do capítulo 2 temos que se $\{m^{(a)}\}_{a=1}^k$ são pontos críticos de f com índice de $m^{(a)}$ (igual a $\text{ind}(a)$) então existe, uma vizinhança de cada $m^{(a)}$ e um sistema de coordenadas x_1, \dots, x_ν tal que

$$f = x_1^2 + \dots + x_{\nu-\text{ind}(a)}^2 - x_{\nu-\text{ind}(a)+1}^2 - \dots - x_\nu^2$$

com f escrita no sistema de coordenadas de Morse.

4.3.1 Proposição. Uma Variedade diferenciável M (Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.

Prova. Seja $\{\varphi_\alpha\}$ uma partição da unidade de M subordinada a uma cobertura $\{V_\alpha\}$ de M por vizinhança coordenadas. Isto significa que $\{V_\alpha\}$ é uma cobertura localmente finita (i.e., cada ponto de M possui uma vizinhança U tal que $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices) e que $\{\varphi_\alpha\}$ é um conjunto de funções diferenciáveis em M satisfazendo:

- 1) $\varphi_\alpha \geq 0, \varphi_\alpha = 0$ no complementar do fecho \bar{V}_α .
- 2) $\sum_\alpha \varphi_\alpha(\varphi) = 1$ para todo p em M .

É claro que podemos definir uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle^\alpha$ em cada V_α : a induzida pelo sistema de coordenadas. Fazemos então $\langle u, v \rangle_p = \sum_\alpha \varphi_\alpha(p) \langle u, v \rangle_p^\alpha$ para todo $p \in M, u, v \in T_p(M)$. É imediato verificar que isto define uma métrica

Riemanniana em M . ■

Em particular então em nossa variedade orientável compacta sem bordo, escolhemos uma métrica plana nas vizinhanças de $m^{(a)}$. Já que os pontos críticos são isolados, então podemos juntar as métricas definidas em cada vizinhança dos pontos críticos e com uma métrica arbitrária definida nas outras regiões fora de cada vizinhança.

É fácil escrever a expressão abaixo do operador Δ_t dado pela métrica plana em coordenadas de Morse em uma vizinhança de cada ponto crítico $m^{(a)}$ pelo Teorema 4.2.2

$$\begin{aligned}\Delta_t &= -\Delta + t^2 \|(2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{\nu-\text{ind}(a)}, -2x_{\nu-\text{ind}(a)+1}, \dots, -2x_\nu)\|^2 + tA \\ \Delta_t &= -\Delta + 4t^2 x^2 + tA.\end{aligned}$$

Aqui $x^2 = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2$, $i \in \{1, \dots, \nu - \text{ind}(a), \nu - \text{ind}(a) + 1, \dots, \nu\}$

Calculando

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ & & & (\nu - \text{ind}(a)) \times \nu & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & & & & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & & 0 & & & & & \vdots & \text{ind}(a) \times \nu \\ & & & & & & & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}_{\nu \times \nu}$$

Então $\Delta_t = -\Delta + 4t^2 x^2 + 2t \sum_{i=1}^{\nu-\text{ind}(a)} [(a^i)^*, a^i] - 2t \sum_{i=\nu-\text{ind}(a)+1}^{\nu} [(a^i)^*, a^i]$ aqui Δ esta definido sobre p -formas como segue

$$\Delta(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Definamos $\mathbb{K}^{(a)}$ sobre $\Lambda^p(\mathbb{R}^\nu)$ por

$$\mathbb{K}^{(a)} = -\Delta + 4x^2 + A^{(a)} \text{ para } t = 1$$

onde $A^{(a)} = 2 \sum_{i=1}^{\nu - \text{ind}(a)} [(a^i)^*, a^i] - 2 \sum_{i=\nu - \text{ind}(a) + 1}^{\nu} [(a^i)^*, a^i]$

Fazendo todos os passos do capítulo 1, os valores assintóticos dos autovalores de Δ_t são dados em termos do espectro de $\bigoplus_a \mathbb{K}^{(a)}$ o qual agora calculamos.

Sobre p -formas, $-\Delta + 4x^2$ atua como um operador escalar, i.e atua da mesma forma sobre todas $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$. Assim, seus autovalores são os do oscilador harmônico, ou seja $\{\sum_{i=1}^{\nu} 2(1 + 2n_i); n_1, \dots, n_{\nu} \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$. Para cada um destes autovalores existem $\nu! / (\nu - p)! p!$ auto formas independentes dadas por

$$\psi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq \nu,$$

onde ψ é o autofunção correspondente do oscilador harmônico.

4.3.2 Proposição

$$[(a^i)^*, a^i] f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = \begin{cases} f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, & i \in \{i_1, \dots, i_p\} \\ -f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, & i \notin \{i_1, \dots, i_p\} \end{cases}$$

Demonstração. Fazendo para $\{i_1, i_2\}$, usando os operadores $(a^i)^*, a^i$ localmente

$$((a^i)^* a^i - a^i (a^i)^*)(f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}) = (a^i)^* a^i (f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}) - (a^i)(a^i)^* (f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2})$$

$$\text{como } (a^i)^* a^i (f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}) = (a^i)^* (f g^{i i_1} dx_{i_2} - f g^{i i_2} dx_{i_1})$$

$$= f g^{i i_1} dx^i \wedge dx_{i_2} - f g^{i i_2} dx^i \wedge dx_{i_1}$$

$$\text{e } (a^i)(a^i)^* (f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}) = a^i (f dx^i \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2})$$

$$= f g^{i i} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} - f g^{i i_1} dx^i \wedge dx_{i_2} + f g^{i i_2} dx^i \wedge dx_{i_1}$$

então para $g^{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$$[(a^i)^*, a^i] f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} = \begin{cases} f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}, & i \in \{i_1, i_2\} \\ -f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}, & i \notin \{i_1, i_2\} \end{cases}$$

Então em geral temos:

$$\begin{aligned}
(a^i)^* a^i (f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) &= (a^i)^* \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} f g^{i i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
&= \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} f g^{i i_k} dx^i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
(a^i)(a^i)^* (f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) &= a^i (f dx^i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = f g^{i i} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p (-1)^k f g^{i i_k} dx^i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{d}x_{i_k} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}
\end{aligned}$$

Então destas duas igualdades e usando a métrica plana temos demonstrado o resultado. ■

Notamos que $A^{(a)}$ age diagonalmente sobre estas autoformas e da proposição 4.3.2:

$$A^{(a)} f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = 2\lambda_a(i_1, \dots, i_p) f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

onde $\lambda_a(i_1, \dots, i_p) = \#(I \cap K) - \#(J \cap K) - \#(I \cap L) + \#(J \cap L)$

com $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, $J = \{1, \dots, \nu\} \setminus I$, $K = \{1, \dots, \nu - \text{ind}(a)\}$ e $L = \{\nu - \text{ind}(a) + 1, \dots, \nu\}$.

Assim o espectro de $\mathbb{K}^{(a)}$ é $\{\sum_{i=1}^{\nu} 2(1 + 2n_i) + 2\lambda_a(i_1, \dots, i_p); n_1, \dots, n_{\nu} \in \mathbb{N}\}$ e $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq \nu$ e o espectro de $\bigoplus_a \mathbb{K}^{(a)}$ é a união dos espectro de cada $\mathbb{K}^{(a)}$.

Estamos interessados na multiplicidade do autovalor zero, i.e. a dimensão do nucleo de Δ_t .

Dos resultados acima temos que $\lambda_a(i_1, \dots, i_p) = -\nu$ só quando $\text{ind}(a) = p$ e $\{i_1, \dots, i_p\} = \{\nu - \text{ind}(a) + 1, \dots, \nu\}$. De fato temos $I = \{\nu - \text{ind}(a) + 1, \dots, \nu\}$, $J = \{1, \dots, \nu - \text{ind}(a)\}$

$$K = \{1, \dots, \nu - \text{ind}(a)\} \quad \text{e} \quad L = \{\nu - \text{ind}(a) + 1, \dots, \nu\}$$

então $\lambda_a(i_1, \dots, i_p) = 0 - (\nu - \text{ind}(a)) - \text{ind}(a) = -\nu$. Assim, $\dim(\ker(\mathbb{K}^{(a)}/\Lambda^p(R^{\nu}))) = 1$. quando $\{1, 2, \dots, \nu - \text{ind}(a)\} = \{i_1, \dots, i_p\}$ e

$\text{ind}(a) \neq p, \lambda_a(i_1, \dots, i_p) = \nu$ então $\dim(\ker(\mathbb{K}^{(a)}/\Lambda^p(\mathbb{R}^\nu))) = 0$ (i.e. nenhum dos autovalores de $\mathbb{K}^{(a)}$ é nulo).

Assim no caso em que $\text{ind}(a) = p$, existe um autovalor $\lambda_a(i_1, \dots, i_p)$ tal que $\sum_{i=1}^{\nu} 2(1 + 2n_i) + 2\lambda_a(i_1, \dots, i_p) = 0$ para algum $n_i \in \mathbb{N}$ então $\dim(\ker(\mathbb{K}^{(a)}/\Lambda^p(\mathbb{R}^\nu))) = 1$. Portanto concluímos que a dimensão de $\ker(\bigoplus_a \mathbb{K}^{(a)}/\Lambda^p(\mathbb{R}^\nu))$ é igual ao número de pontos críticos de f de índice p , i.e.

$$\dim(\ker(\bigoplus_a \mathbb{K}^{(a)}/\Lambda^p(\mathbb{R}^\nu))) = m_p$$

Agora estabelecemos o teorema do limite semi-clássico para p -formas sobre uma variedade. Sua demonstração é igual à demonstração do Teorema do Limite Semi-clássico com pequenas alterações. Agora consideramos variedades e funções $C^\infty(M)$ (M é uma variedade compacta de dimensão ν).

$E_n^p(t)$ são autovalores de $\Delta_t/\overline{\Lambda}^p(M)$, contando multiplicidade, e e_n^p são autovalores de $\bigoplus_a \mathbb{K}^{(a)}/\Lambda^p(\mathbb{R}^\nu)$, contando multiplicidade, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_n^p(t)/t = e_n^p \quad (*)$$

Para t grande, é verdade que de (*) não podem existir mais $E_n^p(t)$ iguais a zero dos que existem e_n^p iguais a zero. Assim,

$$\begin{aligned} b_p &= \dim[\ker(\Delta_t/\overline{\Lambda}^p(M))] \\ &\leq \dim[\ker(\bigoplus_a \mathbb{K}^{(a)}/\Lambda^p(\mathbb{R}^\nu))] \\ &= m_p. \end{aligned}$$

Está provada a primeira desigualdade do teorema 2.3.4 de Morse.

Agora demonstraremos as outras desigualdades usando idéias de supersimetria. Por (*) conhecemos $e_{m_p+1}^p$ é o primeiro dos $\{e_n^p\}_{n=1}^\infty$ diferente de zero. Para um grande t , $E_n^p(t)$ cresce como t para $n \geq m_p + 1$. Dentre os autovalores $\{E_1^p(t), \dots, E_{m_p}^p(t)\}$ sabemos pelo teorema 4.1.1 os primeiros b_p autovalores são nulos. Aos autovalores restantes $\{E_{b_p+1}^p(t), \dots, E_{m_p}^p(t)\}$ chamaremos autovalores

são nulos. Aos autovalores restantes $\{E_{b_p+1}^p(t), \dots, E_{m_p}^p(t)\}$ chamaremos autovalores de baixo crescimento. Eles não são nulos, mas são pequenos para $t \rightarrow \infty$. Então empregando o teorema 3.4.2 e a igualdade $*_0$, (i.e. para cada autovalor de baixo crescimento, E_n^p com p ímpar existe outro $E_{n'}^{p'}$ com p' par). Temos

$$\begin{aligned} \sum_{p \text{ ímpar}} (m_p - b_p) &= \sum_{p \text{ par}} (m_p - b_p) \text{ assim} \\ \sum_{p=0}^{\nu} (-1)^p (m_p) &= \sum_{p=0}^{\nu} (-1)^p b_p + \sum_{p \text{ par}} (m_p - b_p) - \sum_{p \text{ ímpar}} (m_p - b_p) \\ &= \sum_{p=0}^{\nu} (-1)^p b_p. \end{aligned}$$

Seja o espaço \mathbb{Z}_t^p $(m_p - b_p)$ -dimensional dos autovalores de baixo crescimento.

Seja $Q_t = d_t + d_t^*$ definido sobre $\bigoplus_{p=0}^{\nu} \bar{\Lambda}^p(M)$, como $Q_t^2 = \Delta_t$, Q_t preserva o auto espaço de Δ_t . Assim.

$$Q_t : \mathbb{Z}_t^p \rightarrow \mathbb{Z}_t^{p-1} \oplus \mathbb{Z}_t^{p+1}.$$

Além disso, segue-se o núcleo de Q_t e Δ_t coincidem, Q_t é um a um sobre $\bigoplus_{p=0}^{\nu} \mathbb{Z}_t^p$.

Assim, Q_t é uma aplicação um a um

$$\begin{aligned} Q_t : \bigoplus_{\substack{j \text{ ímpar} \\ j=1}}^{2j-1} \mathbb{Z}_t^j &\rightarrow \bigoplus_{\substack{j \text{ par} \\ j=0}}^{2j} \mathbb{Z}_t^j \\ Q_t : \bigoplus_{\substack{j \text{ par} \\ j=0}}^{2j} \mathbb{Z}_t^j &\rightarrow \bigoplus_{\substack{j \text{ ímpar} \\ j=1}}^{2j+1} \mathbb{Z}_t^j, \end{aligned}$$

os quais implicam que as dimensões dos espaços do lado direito são maiores que a dimensão dos espaços do lado esquerdo. Então

$$\begin{aligned} (m_1 - b_1) + \dots + (m_{2j-1} - b_{2j-1}) &\leq (m_0 - b_0) + \dots + (m_{2j} - b_{2j}) \\ (m_0 - b_0) + \dots + (m_{2j} - b_{2j}) &\leq (m_1 - b_1) + \dots + (m_{2j+1} - b_{2j+1}), \end{aligned}$$

o que é a segunda desigualdade do Teorema 2.3.4. \blacksquare

4.4 Exemplos

Nesta parte do capítulo pretendemos apresentar exemplos em variedades 2-dimensionais, seguindo todos os passos da demonstração das desigualdades de Morse e encontrando de maneira explícita suas coordenadas para uma função de Morse dada.

Então pelo lema 2.2.2 no caso em que a dimensão de M é dois, e para uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ com ponto crítico $p_0 \in M$ não-degenerado, podemos encontrar coordenadas de Morse para f . O faremos a partir de uma parametrização $\psi : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_1 \subset M$ com $\psi(0, 0) = p_0$. Seja $g = f \circ \psi$, um procedimento similar ao desenvolvimento de Taylor de 2ª ordem com fórmula para o resto dá

$$g(x_1, x_2) = g(0, 0) + g'(0, 0)(x_1, x_2) + H(x_1, x_2) \quad \text{com}$$

$$H(x_1, x_2) = h_{11}(x_1, x_2)x_1^2 + 2h_{12}(x_1, x_2)x_1x_2 + h_{22}(x_1, x_2)x_2^2 \quad \text{onde}$$

$$h_{11}(x_1, x_2) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} g(tx_1, tx_2) dt$$

$$h_{12}(x_1, x_2) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} g(tx_1, tx_2) dt$$

$$h_{22}(x_1, x_2) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} g(tx_1, tx_2) dt.$$

E as coordenadas de Morse ficam dadas como lema 2.2.2 para no caso de dimensão dois, ver também [G.T.].

4.4.1 Exemplo. Na esfera S^2 seja

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \quad \text{e} \quad f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função de Morse definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad (x_1, x_2, x_3) \in S^2$$

$(0, 0, \pm 1) \in S^2$ são pontos críticos não-degenerados.

Daí para encontrar as coordenadas de Morse em cada ponto crítico de f em S^2 , consideramos os seguintes abertos de S^2

$$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_3 > 0\}, \quad V_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_3 < 0\}.$$

Tome $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ e as seguintes parametrizações

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U &\longrightarrow V_1, & \varphi_2 : U &\longrightarrow V_2 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}), & (x_1, x_2) &\longmapsto (x_1, x_2, -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} g &= f \circ \varphi_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ g(x_1, x_2) &= f \circ \varphi_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 1 \end{aligned}$$

com isto

$$h_{11}(x_1, x_2) = \frac{1}{3}, \quad h_{12}(x_1, x_2) = 0, \quad h_{22}(x_1, x_2) = \frac{1}{3}$$

então pelo Lema de Morse

$$g(x_1, x_2) = g(0, 0) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x_1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x_2\right)^2$$

$$g = -1 + u_1^2 + u_2^2 \quad \text{onde} \quad u_1(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{3}}{3}x_1,$$

$u_2(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{3}}{3}x_2$ são as coordenadas de Morse numa vizinhança do ponto crítico $(0, 0, -1)$. Pela simetria da esfera, as coordenadas de Morse no ponto crítico $(0, 0, 1)$ são as mesmas, porém temos $\hat{g} = 1 - u_1^2 - u_2^2$.

Estamos interessados em encontrar o Laplaciano deformado de Witten na esfera S^2 com estas coordenadas e a métrica plana definida na vizinhança de cada ponto crítico e sua métrica usual fora de cada vizinhança.

a) No ponto crítico $(0,0,1)$ fazemos a mudança de coordenadas com as novas coordenadas:

$$u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}x_1 \quad , \quad u_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}x_2$$

$$\Delta_t = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \frac{\partial}{\partial u_1^2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 t^2(u_1^2 + u_2^2) -$$

$$- 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 t[(a^1)^*, a^1] - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 t[(a^2)^*, a^2].$$

Então $\mathbb{K}^{(0,0,1)}$ definimos como segue: $\mathbb{K}^{(0,0,1)} = \Delta_t|_{\Lambda^p(\mathbb{R}^2)}$, $p = 0, 1, 2$

$$\mathbb{K}^{(0,0,1)} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 (u_1^2 + u_2^2)$$

$$- 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 [(a^1)^*, a^1] - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 [(a^2)^*, a^2].$$

1.- O espectro de $\mathbb{K}^{(0,0,1)}$ definido em $\Lambda^0(\mathbb{R}^2)$ é

$$\delta\left(\mathbb{K}^{(0,0,1)}/\Lambda^0(\mathbb{R}^2)\right) = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 (2(2n_1+1)+2(2n_2+1)+2+2) : n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

então

$$\ker\left(\mathbb{K}^{(0,0,1)}/\Lambda^0(\mathbb{R}^2)\right) = \{0\}.$$

2.- O espectro de $\mathbb{K}^{(0,0,1)}$ definido em $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ é

$$\delta\left(\mathbb{K}^{(0,0,1)}/\Lambda^1(\mathbb{R}^2)\right) = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 (2(2n_1+1) + 2(2n_2+1) \pm 2 \mp 2) : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \right\}$$

pois

$$[(a^1)^*, a^1]fdu_j = \begin{cases} fdu_j & j \in \{1, 2\} \\ -fdu_j & j \notin \{1, 2\} \end{cases} \quad 1 \leq j \leq 2$$

então

$$\ker\left(\mathbb{K}^{(0,0,1)}/\Lambda^1(\mathbb{R}^2)\right) = \{0\}.$$

3.- O espectro de $\mathbb{K}^{(0,0,1)}$ definido em $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ é

$$\delta\left(\mathbb{K}^{(0,0,1)}/\Lambda^2(\mathbb{R}^2)\right) = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 (2(2n_1+1) + 2(2n_2+1) - 2 - 2) : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \right\}$$

quando $n_1 = 0, n_2 = 0$ existe um autovalor nulo de multiplicidade um, ou seja

$$\dim\left(\mathbb{K}^{(0,0,1)}/\Lambda^2(\mathbb{R}^2)\right) = 1.$$

b) Fazendo os mesmos cálculos no ponto crítico $(0, 0, -1)$ com a função $g = -1 + u_1^2 + u_2^2$ então

$$\Delta_t = -\Delta + t^2\|df\|^2 + 2t[(a^1)^*, a^1] + 2t[(a^2)^*, a^2],$$

porém com a mudança de coordenadas temos

$$\begin{aligned} \Delta_t = & - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 t^2(u_1^2 + u_2^2) + \\ & + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 t[(a^1)^*, a^1] + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 t[(a^2)^*, a^2]. \end{aligned}$$

definindo $\mathbb{K}^{(0,0,-1)} = \Delta_1/\Lambda^p(\mathbb{R}^2)$.

1.- O espectro de $\mathbb{K}^{(0,0,1)}$ definido em $\Lambda^0(\mathbb{R}^2)$ é

$$\delta\left(\mathbb{K}^{(0,0,-1)}/\Lambda^0(\mathbb{R}^2)\right) = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 (2(2n_1+1)+2(2n_2+1)-2-2) : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \right\}$$

quando $n_1 = 0, n_2 = 0$ existe um autovalor nulo de multiplicidade um, ou seja

$$\dim\left(\mathbb{K}^{(0,0,-1)}/\Lambda^2(\mathbb{R}^2)\right) = 1.$$

2.- O espectro de $\mathbb{K}^{(0,0,-1)}$ definido em $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ é

$$\delta\left(\mathbb{K}^{(0,0,1)}/\Lambda^1(\mathbb{R}^2)\right) = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 (2(2n_1+1)+2(2n_2+1)\pm 2\mp 2) : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \right\}$$

então

$$\ker\left(\mathbb{K}^{(0,0,-1)}/\Lambda^1(\mathbb{R}^2)\right) = \{0\}.$$

3.- O espectro de $\mathbb{K}^{(0,0,-1)}$ definido em $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ é

$$\delta\left(\mathbb{K}^{(0,0,-1)}/\Lambda^2(\mathbb{R}^2)\right) = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 (2(2n_1+1)+2(2n_2+1)+2+2) : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \right\}$$

quando $n_1 = 0, n_2 = 0$ existe um autovalor nulo de multiplicidade um, ou seja

$$\dim\left(\mathbb{K}^{(0,0,-1)}/\Lambda^2(\mathbb{R}^2)\right) = 0.$$

Agora definimos

$$(\mathbb{K}^{(0,0,1)} \oplus \mathbb{K}^{(0,0,-1)})/\Lambda^p(\mathbb{R}^2) \quad , \quad 0 \leq p \leq 2$$

e

$$\delta(\mathbb{K}^{(0,0,1)} \oplus \mathbb{K}^{(0,0,-1)}) = \delta(\mathbb{K}^{(0,0,1)}) \cup \delta(\mathbb{K}^{(0,0,-1)}).$$

Então pelo teorema de limite semi-clássico $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_n^p(t)}{t} = e_n^p$ onde $E_n^p(t)$ é autovalor de $\Delta_t/\Lambda^p(S^2)$ e e_n^p autovalor de $\mathbb{K}^{(0,0,\pm 1)}/\Lambda^p(\mathbb{R}^2)$. Aqui $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_n^p(t)}{t} = 0$

só quando $e_{n_1}^0 = e_{n_1}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 (2(2n_1 + 1) + 2(2n_2 + 1) - 2 - 2) = 0$ para $n_1 = 0, n_2 = 0$.

Como $b_p = \dim[\ker(\Delta_t/\Lambda^p(S^2))]$ e usando o fato de que

$$H^p(S^2, \mathbb{R}) \approx \ker(\Delta_t/\Lambda^p(S^2)) \quad \text{então} \quad b_1 = 0, b_0 = b_2 = 1$$

com isto existem b_p autovalores de $(\Delta_t/\Lambda^p(S^2))$ obedecendo $E_n^p(t) = 0$, quando $n = 1, \dots, b_p$ (i.e. $p = 1$ não existe autovalor $E_n^0(t)$ nulo, mas quando $p = 0$ ou $p = 2$ existe um autovalor nulo).

Disto concluímos que:

$$b_p = \dim[\ker((\Delta_t/\Lambda^p(S^2)))] \leq \dim[\ker((\mathbb{K}^{(0,0,1)} \oplus \mathbb{K}^{(0,0,-1)})/\Lambda^p(\mathbb{R}^2))] = m_p$$

onde $m_p = 1$ para $p = 0, 2$ e $m_1 = 0$

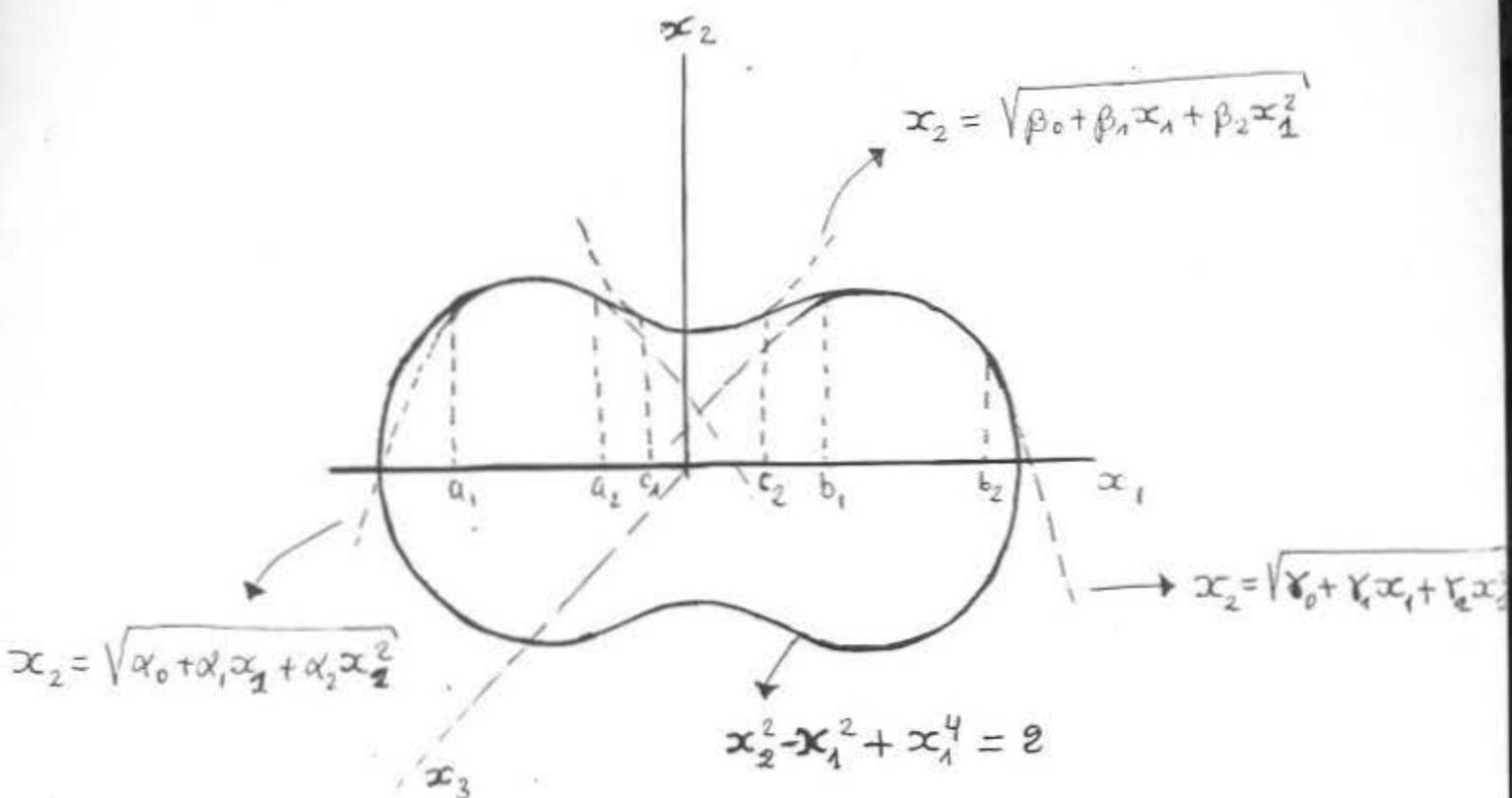
$$m_p = \dim[\ker((\mathbb{K}^{(0,0,1)} \oplus \mathbb{K}^{(0,0,-1)})/\Lambda^p(\mathbb{R}^2))]$$

pois quando $p = 0, p = 2$ o operador $(\mathbb{K}^{(0,0,1)} \oplus \mathbb{K}^{(0,0,-1)})/\Lambda^p(\mathbb{R}^2)$ só tem um autovalor nulo, mas quando $p = 1$ não tem autovalor nulo.

As outras desigualdades também obtemos de maneira análoga.

4.4.2 Exemplo. Seja M^2 a superfície com simetria de rotação do eixo x_1 dada por

$$x_2^2 = x_1^2 - x_1^4 + 2.$$



Nós podemos encontrar em cada ponto crítico desta superfície parabolóides definidos em intervalos abertos e faremos com seu auxílio os cálculos como do exemplo anterior, i.e., os pontos críticos

$$P_1 \quad x_2 = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2} = \sqrt{x_1^2 - x_1^4 + 2}, \quad \forall x_1 \in (a_1, a_2) \subset (-\sqrt{2}, 0)$$

$$P_3 \quad x_2 = \sqrt{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2} = \sqrt{x_1^2 - x_1^4 + 2}, \quad \forall x_1 \in (c_1, c_2) \subset \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$P_2 \quad x_2 = \sqrt{\gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_1^2} = \sqrt{x_1^2 - x_1^4 + 2}, \quad \forall x_1 \in (b_1, b_2) \subset (0, \sqrt{2})$$

As superfícies de revolução de cada uma destas curvas são pedaços de superfícies de M^2 , dado pelas seguintes equações:

$$x_2^2 + x_3^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2, \quad \forall x_1 \in (a_1, a_2)$$

$$x_2^2 + x_3^2 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2, \quad \forall x_1 \in (c_1, c_2)$$

$$x_2^2 + x_3^2 = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_1^2, \quad \forall x_1 \in (b_1, b_2).$$

Consideremos os seguintes abertos de M^2 :

$$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in M^2 : x_2 > 0, x_1 \in (a_1, a_2)\},$$

$$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in M^2 : x_2 < 0, x_1 \in (a_1, a_2)\}$$

$$V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in M^2 : x_2 > 0, x_1 \in (b_1, b_2)\},$$

$$V_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in M^2 : x_2 < 0, x_1 \in (b_1, b_2)\}.$$

$$V_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in M^2 : x_2 > 0, x_1 \in (c_1, c_2)\},$$

$$V_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in M^2 : x_2 < 0, x_1 \in (c_1, c_2)\}$$

e os abertos em \mathbb{R}^2

$$U_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_3^2 < x_1^2 + 2, x_1 \in (a_1, a_2)\},$$

$$U_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_3^2 < x_1^2 - x_1^4 + 2, x_1 \in (c_1, c_2)\},$$

$$U_3 = \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 : x_3^2 < x_1^2 - x_1^4 + 2, x_1 \in (b_1, b_2)\}.$$

Então temos as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V_1 \subset M^2 & \varphi_2 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V_2 \subset M^2 \\ (x_1, x_3) &\longmapsto (x_1, \sqrt{\alpha_0 + \alpha_2 x_1 + \alpha_2 x_1^2}, x_3) & (x_1, x_3) &\longmapsto (x_1, -\sqrt{\gamma_0 + \gamma_2 x_1 + \gamma_2 x_1^2}, x_3) \\ \varphi_3 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V_3 \subset M^2 & \varphi_4 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V_4 \subset M^2 \\ (x_1, x_3) &\longmapsto (x_1, \sqrt{\gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_1^2}, x_3) & (x_1, x_3) &\longmapsto (x_1, -\sqrt{\gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_1^2}, x_3) \\ \varphi_5 : U_3 \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V_5 \subset M^2 & \varphi_6 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V_6 \subset M^2 \\ (x_1, x_3) &\longmapsto (x_1, \sqrt{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2}, x_3) & (x_1, x_3) &\longmapsto (x_1, -\sqrt{\beta_0 + \beta_2 x_1 + \beta_2 x_1^2}, x_3). \end{aligned}$$

Com estas considerações encontramos as coordenadas de Morse com a seguinte função de Morse

$$\begin{aligned} f : M^2 &\longmapsto \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (6 - 4\sqrt{2})x_2^2 - 6x_3^2 + (-12 + 9\sqrt{2}) \end{aligned}$$

esta função têm pontos críticos $P_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 3/2, 0\right)$, $P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 3/2, 0\right)$,

$P_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -3/2, 0\right)$, $P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -3/2, 0\right)$, $P_5 = (0, \sqrt{2}, 0)$ e $P_6 = (0, -\sqrt{2}, 0)$. Encontramos as coordenadas de Morse em cada ponto crítico.

No ponto crítico P_1 com a definição φ_1 temos

$$g_1(x_1, x_3) = f \circ \varphi_1(x_1, x_3) = (6 - 4\sqrt{2})(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - 6x_3^2 + (-12 + 9\sqrt{2})$$

e então encontramos

$$h_{11}(x_1, x_3) = \frac{1}{6}(6 - 4\sqrt{2})\alpha_2, \quad h_{13}(x_1, x_3) = 0 \quad \text{e} \quad h_{33}(x_1, x_3) = -1.$$

Também temos que

$$\det\left(H(g_1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right) = \frac{1}{2}(6 - \sqrt{2})\alpha_2 > 0 \quad \text{pois} \quad \alpha_2 < 0.$$

Substitui-se g_1 por $-g_1$, então existe uma vizinhança de $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ tal que

$$-g_1 - (g_1(P_1)) = \left(\sqrt{\frac{1}{6}(6 - 42)|\alpha_2|x_1}\right)^2 + x_3^2$$

$$g_1 = 3/2 - u_1^2 - u_2^2 \quad \text{aqui} \quad u_1(x_1, x_3) = \sqrt{\frac{1}{6}(6 - 4\sqrt{2})|\alpha_2|x_1}, u_2(x_1, x_3) = x_3.$$

Para o ponto crítico P_3 seguem-se os mesmos passos anteriores usando φ_2 e encontramos a função

$$g_2 = -3/2 + u_1^2 + u_2^2 .$$

De maneira análoga encontramos as coordenadas de Morse no ponto crítico P_2 com a aplicação φ_3

$$g_3(x_1, x_3) = f \circ \varphi_3(x_1, x_3) = (6 - 4\sqrt{2})(\gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) - 6x_3^2$$

e

$$h_{11}(x_1, x_3) = \frac{1}{6}(6 - 4\sqrt{2})\gamma_2, \quad h_{13}(x_1, x_3) = 0 \quad \text{e} \quad h_{33}(x_1, x_3) = -1,$$

então existe uma vizinhança no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ tal que

$$g_3 = 3/2 - u_1^2 - u_2^2 \quad \text{onde} \quad u_1 = \sqrt{\frac{1}{6}(6 - 4\sqrt{2})|\gamma_2|x_1}, u_2 = x_3$$

e no ponto P_4 usando φ_4 encontramos

$$g_4 = -3/2 + u_1^2 + u_2^2.$$

Também para os pontos de sela P_5, P_6 encontramos as coordenadas de Morse usando as aplicações φ_5 e φ_6

$$g_5 = \sqrt{2} + \left(\sqrt{\frac{1}{6}(6 - 4\sqrt{2})\beta_2 x_1} \right)^2 - x_3^2 ,$$

$$g_6 = -\sqrt{2} - \left(\sqrt{\frac{1}{6}(6 - 4\sqrt{2})\beta_2 x_1} \right)^2 + x_3^2 .$$

Como no exemplo 4.4.1 encontramos a expressão de Δ_t em cada ponto crítico com suas respectivas coordenadas de Morse.

a) No ponto crítico P_1 usando a aplicação g_1

$$\begin{aligned} \Delta_t = & - \left(\sqrt{\frac{1}{6}(6-4\sqrt{2})|\alpha_2|} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + 4t^2 \left(\sqrt{\frac{1}{6}(6-4\sqrt{2})|\alpha_2|} \right)^2 u_1^2 + 4t^2 u_2^2 - \\ & - 2t \left(\sqrt{\frac{1}{6}(6-4\sqrt{2})|\alpha_2|} \right)^2 [(a^1)^*, a^1] - 2t[(a^2)^*, a^2]. \end{aligned}$$

Definindo $\mathbb{K}^{P_1} = \Delta_t / \Lambda^p(\mathbb{R}^2)$, $0 \leq p \leq 2$.

1.- O espectro de \mathbb{K}^{P_1} definido em $\Lambda^0(\mathbb{R}^2)$ e $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ é

$$\begin{aligned} \delta\left(\mathbb{K}^{P_1} / \Lambda^0(\mathbb{R}^2)\right) &= \left\{ 2 \left(\sqrt{\frac{1}{6}(6-4\sqrt{2})|\alpha_2|} \right)^2 (2n_1 + 1) + 2(2n_2 + 1) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\sqrt{\frac{1}{6}(6-4\sqrt{2})|\alpha_2|} \right)^2 + 2 : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \right\} \\ \delta\left(\mathbb{K}^{P_1} / \Lambda^1(\mathbb{R}^2)\right) &= \left\{ 2 \left(\sqrt{\frac{1}{6}(6-4\sqrt{2})|\alpha_2|} \right)^2 (2n_1 + 1) + 2(2n_2 + 1) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm 2 \left(\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{6}|\alpha_2|} \right)^2 \mp 2 : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \right\} \end{aligned}$$

todos os autovalores são não nulos, então

$$\dim[\ker(\mathbb{K}^{P_1} / \Lambda^p(\mathbb{R}^2))] = 0 \quad \text{para } p = 0, 1.$$

2.- O espectro de \mathbb{K}^{P_1} definido em $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ é

$$\begin{aligned} \delta\left(\mathbb{K}^{P_1} / \Lambda^2(\mathbb{R}^2)\right) &= \left\{ 2 \left(\sqrt{\frac{1}{6}(6-4\sqrt{2})|\alpha_2|} \right)^2 (2n_1 + 1) + 2(2n_2 + 1) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{6}|\alpha_2|} \right)^2 - 2 : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \right\} \end{aligned}$$

e existe um autovalor nulo quando $n_1 = 0, n_2 = 0$ e tem multiplicidade um. Então $\dim(\ker(\mathbb{K}^{P_1}/\Lambda^2(\mathbb{R}^2))) = 1$.

b) No ponto crítico P_2 da mesma forma que em (a) encontramos Δ_t usando a aplicação g_3 e vemos que existe um autovalor nulo para

$$\mathbb{K}^{P_2}/\Lambda^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{então} \quad \dim(\ker(\mathbb{K}^{P_2}/\Lambda^2(\mathbb{R}^2))) = 1.$$

c) No ponto crítico P_3 usando a aplicação g_2

$$\begin{aligned} \Delta_t = & - \left(\sqrt{\frac{1}{6}(6 - 4\sqrt{2})|\alpha_2|} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + 4t^2 \left(\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{2}|\alpha_2|} \right)^2 u_1^2 + 4t^2 u_2^2 + \\ & + 2t \left(\sqrt{\frac{1}{6}(6 - 4\sqrt{2})|\alpha_2|} \right)^2 [(a^1)^*, a^1] + 2t [(a^2)^*, a^2]. \end{aligned}$$

Definindo $\mathbb{K}^{P_3} = \Delta_t/\Lambda^p(\mathbb{R}^2)$, $0 \leq p \leq 2$.

1.- O espectro de \mathbb{K}^{P_3} definido em $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ e $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ é

$$\begin{aligned} \delta(\mathbb{K}^{P_3}/\Lambda^1(\mathbb{R}^2)) &= \left\{ 2 \left(\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{6}|\alpha_2|} \right)^2 (2n_1 + 1) \right. \\ &\quad \left. \pm 2 \left(\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{6}|\alpha_2|} \right)^2 + 2(2n_2 + 1) \mp 2 : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \right\} \\ \delta(\mathbb{K}^{P_3}/\Lambda^2(\mathbb{R}^2)) &= \left\{ 2 \left(\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{6}|\alpha_2|} \right)^2 (2n_1 + 1) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{6}|\alpha_2|} \right)^2 + 2(2n_2 + 1) + 2 : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \right\} \end{aligned}$$

todos estes autovalores são não nulos, ou seja,

$$\dim[\ker(\mathbb{K}^{P_3}/\Lambda^p(\mathbb{R}^2))] = 0 \quad \text{para} \quad p = 1, 2.$$

2.- O espectro de \mathbb{K}^{P_3} definido em $\Lambda^0(\mathbb{R}^2)$ é

$$\delta\left(\mathbb{K}^{P_3}/\Lambda^0(\mathbb{R}^2)\right) = \left\{ 2\left(\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{6}}|\alpha_2|\right)^2(2n_1+1) - \right. \\ \left. - 2\left(\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{6}}|\alpha_2|\right)^2 + (2n_2+1) - 2 : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \right\}$$

logo existe um autovalor nulo quando $n_1 = 0, n_2 = 0$ e tem multiplicidade um ou seja, $\dim(\ker(\mathbb{K}^{P_3}/\Lambda^0(\mathbb{R}^2))) = 1$.

d) No ponto crítico P_4 da mesma forma que em (c) encontramos Δ_t usando a aplicação g_4 e podemos ver que existe um autovalor nulo para

$$\mathbb{K}^{P_4}/\Lambda^0(\mathbb{R}^2) \text{ ou seja } \dim(\ker(\mathbb{K}^{P_4}/\Lambda^0(\mathbb{R}^2))) = 1$$

e) No ponto crítico P_5 usando a aplicação g_5

$$\Delta_t = - \left(\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{6}}\beta_2\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + 4t^2 \left(\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{2}}\beta_2\right)^2 u_1^2 + 4t^2 u_2^2 + \\ + 2t \left(\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{6}}\beta_2\right)^2 [(a^1)^*, a^1] - 2t [(a^2)^*, a^2].$$

Definindo $\mathbb{K}^{P_5} = \Delta_1/\Lambda^p(\mathbb{R}^2), 0 \leq p \leq 2$.

1.- O espectro de \mathbb{K}^{P_5} definido em $\Lambda^0(\mathbb{R}^2)$ e $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ é

$$\delta\left(\mathbb{K}^{P_5}/\Lambda^0(\mathbb{R}^2)\right) = \left\{ 2\left(\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{6}}\beta_2\right)^2(2n_1+1) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \left(\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{6}} \beta_2 \right)^2 + 2(2n_2 + 1) + 2 : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \} \\
\delta \left(\mathbb{K}^{P_5} / \Lambda^2(\mathbb{R}^2) \right) &= \left\{ 2 \left(\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{6}} \beta_2 \right)^2 (2n_1 + 1) + \right. \\
& \left. + 2 \left(\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{6}} \beta_2 \right)^2 + 2(2n_2 + 1) - 2 : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \right\}
\end{aligned}$$

todos estes autovalores são não nulos, ou seja

$$\dim[\ker(\mathbb{K}^{P_5} / \Lambda^p(\mathbb{R}^2))] = 0 \quad \text{para } p = 0, 2.$$

2.- O espectro de \mathbb{K}^{P_5} definido em $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ é

$$\begin{aligned}
\delta \left(\mathbb{K}^{P_5} / \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \right) &= \left\{ 2 \left(\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{6}} \beta_2 \right)^2 (2n_1 + 1) - \right. \\
& \left. - 2 \left(\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{6}} \beta_2 \right)^2 + 2(2n_2 + 1) - 2 : n_1, n_2 = 0, 1, \dots \right\}.
\end{aligned}$$

Aqui existe um autovalor nulo quando $n_1 = 0, n_2 = 0$ e tem multiplicidade um, isto é, $\dim(\ker(\mathbb{K}^{P_5} / \Lambda^1(\mathbb{R}^2))) = 1$.

f) No ponto crítico P_6 , de maneira análoga ao item precedente, encontramos Δ_4 usando g_4 e vemos que existe um autovalor nulo quando $\mathbb{K}^{P_6} / \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ ou seja $\dim(\ker(\mathbb{K}^{P_6} / \Lambda^1(\mathbb{R}^2))) = 1$.

Agora encontramos as desigualdades de Morse.

Definimos $\left(\bigoplus_{i=1}^6 \mathbb{K}^{P_i} / \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \right)$ para $0 \leq p \leq 2$. Como

$$\delta \left(\bigoplus_{i=1}^6 \mathbb{K}^{P_i} \right) = \bigcup_{i=1}^6 \delta(\mathbb{K}^{P_i})$$

e pelas desigualdades (a) (no caso 2) e (b), temos

$$\dim\left(\ker\left(\bigoplus_{i=1}^6 \mathbb{K}^{P_i} / \Lambda^2(\mathbb{R}^2)\right)\right) = 2,$$

pelas igualdades (c) (no caso 2) e (d), temos

$$\dim\left(\ker\left(\bigoplus_{i=1}^6 \mathbb{K}^{P_i} / \Lambda^0(\mathbb{R}^2)\right)\right) = 2,$$

e pelas igualdades (e) (no caso 2), (f) temos

$$\dim\left(\ker\left(\bigoplus_{i=1}^6 \mathbb{K}^{P_i} / \Lambda^1(\mathbb{R}^2)\right)\right) = 2.$$

Aqui pelo teorema de limite semi-clássico o número de autovalores $E_n^p(t)$ de

$$\Delta_t / \Lambda^p(M^2) \text{ satisfazendo } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_n^p(t)}{t} = 0 \text{ é } m_p = 2 \text{ para } 0 \leq p \leq 2$$

e pelo teorema 4.1.1 existem b_p autovalores de $\Delta_t / \Lambda^p(M^2)$ obedecendo $E_n^p(t) = 0$ para $n = 1, \dots, b_p$. Como M^2 é homotopicamente equivalente a S^2 então $H^p(M^2) \approx H^p(S^2)$ pelos teoremas 3.2.3 (corolário) e 4.1.1, $b_0 = b_2 = 1$, $b_1 = 0$. Com isto

$$\begin{aligned} b_p &= \dim\left[\ker\left(\Delta_t / \Lambda^p(M^2)\right)\right] \leq \dim\left[\ker\left(\bigoplus_{i=1}^6 \mathbb{K}^{P_i} / \Lambda^p(\mathbb{R}^2)\right)\right] \\ &= m_p \text{ para } p = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

A terceira desigualdade de Morse é dada como segue:

$$e_3^2 = 6 \left(\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{6}} |\alpha_2| \right)^2 + 6$$

é o primeiro autovalor de $\mathbb{K}^{P_1} \oplus \mathbb{K}^{P_2}$ não nulo, então $E_n^2(t)$ cresce quando $t \rightarrow \infty$ para $n \geq 3$, mas dos autovalores $\{E_1^2(t), E_2^2(t)\}$, apenas um deles é nulo, $E_1^2(t) = 0$, enquanto que o outro é chamado autovalor de baixo crescimento.

$$e_3^1 = 6 \left(\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{6}} \beta_2 \right)^2 + 6$$

é o primeiro autovalor de $\mathbb{K}^{P_5} \oplus \mathbb{K}^{P_6}$ não nulo, então $E_n^1(t)$ cresce quando $t \rightarrow \infty$ para $n \geq 3$, portanto os autovalores $\{E_1^1(t), E_2^1(t)\}$, são nulos, e são chamados autovalores de baixo crescimento.

$$e_3^0 = 6 \left(\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{6}} |\gamma_2| \right)^2 + 6$$

é o primeiro autovalor de $\mathbb{K}^{P_3} \oplus \mathbb{K}^{P_4}$ não nulo, $E_n^0(t)$ cresce quando $t \rightarrow \infty$ para $n \geq 3$, e os autovalores $\{E_1^0(t), E_2^0(t)\}$, um deles é nulo, e o outro é chamado autovalor de baixo crescimento. Então temos quatro autovalores de baixo crescimento e pela igualdade $(*_0)$ temos

$$\begin{aligned} \dim \left(\ker(\Delta_t - \lambda) /_{\Lambda^1} (M^2) \right) &= \dim \left(\ker(\Delta_t - \lambda) /_{\Lambda^0} (M^2) \right) + \dim \left(\ker(\Delta_t - \lambda) /_{\Lambda^2} (M^2) \right) \\ 2 &= 1 + 1 \\ m_1 - b_1 &= m_0 - b_0 + (m_2 - b_2). \end{aligned}$$

Apêndice

O Cálculo do Operador Δ_t no Teorema 4.2.2 com Derivadas Covariantes

Como nosso operador Δ_t está definido em $\Lambda^p(M)$, onde M é uma variedade Riemanniana então tem sentido falar de derivadas covariantes e conexões.

O formalismo de derivadas covariantes introduzidas em nossa variedade, nos dá uma nova fórmula para o operador Δ_t .

$$\Delta_t = dd^* + d^*d + t^2(df)^2 + \sum_{i,j} \nabla_{i,j}^2 f [(a^i)^*, a^j] \quad (0)$$

aqui $(df)^2 = g^{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$ é o quadrado do gradiente de f , calculado com respeito à métrica g^{ij} de M e $\nabla_{i,j}^2 f$ é a segunda derivada covariante. (Tudo isto feito num sistema de coordenadas ortonormais centradas em m ou, abreviadamente, s.n.).

Para tanto faremos algumas definições e apresentaremos fatos de geometria riemanniana. Indicamos por $\mathfrak{X}(T(M))$ o conjunto de campos de vetores de classe C^∞ em M , o conjunto de p -formas denotado como $\Lambda^p(M)$ e por $C^\infty(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

1. Definição. A derivada covariante ou conexão é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(T(M)) \times \mathfrak{X}(T(M)) &\longrightarrow \mathfrak{X}(T(M)) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

e que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ se $f, g \in C^\infty(M)$
- ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Existem muitas possíveis conexões em M , mas só se M é Riemanniana, podemos selecionar dentro delas uma única conexão especial chamada conexão de Levi-Cevita. Então as seguintes propriedades mostram que tal conexão é compatível com a métrica M :

Existe e é única uma conexão ∇ numa variedade Riemanniana que é

i) livre de torção ou seja

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

e ii) é compatível com a métrica em M ou seja

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y \in \mathcal{X}(TM).$$

Demonstração. Vide Do Carmo [d.C.] ou Boothby [B].

Escolhamos um sistema de coordenadas em (x^1, x^2, \dots, x^ν) em torno de m e escrevemos

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \langle X_i, X_j \rangle$$

e g^{ij} a matriz inversa para g_{ij} então uma vez que $[X_i, X_j] = 0$ ($\nabla_{X_i} = \nabla_i$)

$$\langle \nabla_i X_j, X_k \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right\}, \quad (1)$$

assim

$$\nabla_i X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k \quad (2)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_\ell \Gamma^{k\ell} \langle \nabla_i X_j, X_\ell \rangle. \quad (3)$$

Aqui Γ_{ij}^k são chamados os símbolos de Christoffel da conexão.

Um caminho diferenciável $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ é uma geodésica se o campo de aceleração $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$. ao longo de γ .

É um fato básico da geometria Riemanniana que para todo $m \in M$, podemos escolher uma vizinhança U de m e um número real $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \vec{v} \in T_m(M)$

com $\|\vec{v}\| < \varepsilon$, existe uma única geodésica $\gamma_{\vec{v}} : (-2, 2) \rightarrow M$ satisfazendo as condições $\gamma_{\vec{v}}(0) = m$ e $\dot{\gamma}_{\vec{v}} = \vec{v}$. O ponto $\gamma_{\vec{v}}(1) \in M$ será denotado por $\exp_m(\vec{v})$ (exponencial de \vec{v}).

A geodesica γ se escreve então, $\gamma(t) = \exp_m(t\vec{v})$.

Note que $\exp_m(0) = m$ e $(d\exp_m)_0(\vec{v}) = \dot{\gamma}_{\vec{v}}(0) = \vec{v}$. Uma aplicação do teorema da função inversa permite concluir que, $\forall m \in M$ existe uma vizinhança W de m e um número $\varepsilon > 0$ tais que \exp_m aplica a bola de raio ε centrada na origem de $T_m(M)$ ($B_\varepsilon(0)$) difeomorficamente sobre W . Se $\{e_1, \dots, e_\nu\}$ é uma base ortonormal de $T_m(M)$, então

$$\begin{aligned} \exp_m : B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow W \\ (x^1, \dots, x^\nu) &\longmapsto \exp_m(x^1 e_1 + \dots + x^\nu e_\nu) \end{aligned}$$

define um sistema de coordenada normais centradas em m .

Teorema. Seja m um ponto da variedade Riemanniana M com respeito ao sistema de coordenadas normais centradas em m

- A) $g_{ij}(m) = \pm \delta_{ij}, \quad \forall i, j$
- B) $\Gamma_{ij}^k(m) = 0, \quad \forall i, j, k$
- C) $\frac{\partial}{\partial x^i} g_{ik}(m) = 0, \quad \forall i, j, k.$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad g_{ij}(m) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle(p) \\ &= \langle \dot{\gamma}_i(0), \dot{\gamma}_j(0) \rangle, \quad \text{onde} \end{aligned}$$

$\gamma_i(t) = \exp_m(te_i)$ como $\dot{\gamma}_i(0) = e_i$ temos o seguinte

$$\begin{aligned} &= \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \pm \delta_{ij} \quad \text{pois } e_i, e_j \text{ são ortonormais.} \end{aligned}$$

B) Seja $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^{\nu}$ uma base dos campos coordenados do s.n. sobre W . Observe que, se $t \rightarrow \gamma(t)$ é uma geodésica que parte de m . Então, em s.n. definido acima, $\gamma(t)$, escreve-se

$$t \mapsto (tv_1, \dots, tv_\nu)$$

onde (v_1, \dots, v_ν) é um vetor constante de \mathbb{R}^n . A velocidade vale

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)}$$

a partir das propriedades fundamentais da conexão temos

$$0 = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}} \left(\sum_{i=1}^{\nu} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j} v_j v_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

se escolhermos (v_1, \dots, v_ν) tal que $v_i = v_j = 1$ e $v_k = 0$ se $k \neq i, j$, então

$$0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Além disso,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$$

de forma que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$ ao longo da geodésica particular escolhida acima, o que prova por (2) todas as componentes Γ_{ij}^k são nulas para k, i, j .

C) por (1) $\frac{\partial}{\partial x_i} g_{ik} = \sum_{\ell} \left(g_{k\ell} \Gamma_{ij}^{\ell} + g_{i\ell} \Gamma_{ik}^{\ell} \right)$ e por (B) tem-se o resultado. ■

Precisaremos transferir derivadas covariantes para formas. Dado uma 1-forma w , e $X \in \mathfrak{X}(T(M))$, define uma 1-forma $\nabla_X w$ assim que

$$(\nabla_X w)(Y) = X[w(Y)] - w(\nabla_X Y)$$

o lado direito desta expressão é tensorial em Y , em coordenadas locais

$$\nabla_i(dx^j) = -\sum \Gamma_{it}^j dx^t \quad (4)$$

então definimos ∇_X sobre p -formas por

$$\nabla_X(\alpha \wedge \beta) = (\nabla_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\nabla_X \beta). \quad (5)$$

se

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

então

$$(\nabla_j \alpha)_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_j^i} - \sum_{\ell, r} \Gamma_{jr}^\ell \alpha_{i_1 \dots i_{r-1} \ell i_{r+1} \dots i_p}. \quad (6)$$

Interpretamos ∇_X sobre $C^\infty(M)$ por $\nabla_X f = Xf$. Então

2. Teorema. $d = \sum (a^i)^* \nabla_i$.

Demonstração. Seja ∂_i o operador definido no teorema (4.2.2). Então $d = \sum (a^i)^* \partial_i$.

As equações (4) e (5) implicam que ∇_i é dado em p -formas por

$$\nabla_i = \partial_i - \sum_{j, m, \ell} \Gamma_{it}^j g_{jm} (a^\ell)^* a^m \quad (6.a)$$

de maneira que $\left(\sum_m g_{im} a^m \right) dx^k = \delta_{ik}$. Assim, o teorema é equivalente a $\sum_{i, j, \ell} \Gamma_{it}^j g_{im} (a^i)^* (a^\ell)^* a^m = 0$.

Esta equação é válida se notamos que $\{(a^i)^*, (a^\ell)^*\} = 0$ em i, ℓ , enquanto Γ_{it}^j é simétrico em i, ℓ . ■

Sobre p -formas diferenciáveis

$$\nabla_X^* = -\nabla_X - \text{div } X \quad (7)$$

em coordenadas se

$$X = \sum b^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_j = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

$$\nabla_X X_j = \sum_i \frac{\partial b^i}{\partial x^j} X_i + \sum_{i,k} b^i \Gamma_{ij}^k X_k,$$

e assim,

$$\text{div}(X) = \sum_i \frac{\partial b^i}{\partial x^i} + \sum_{i,j} b^i \Gamma_{ji}^i$$

então por (7)

$$\nabla_i^* = -\nabla_i - \sum_j \Gamma_{ji}^j \quad (7a)$$

e por outro lado, por (3), (4), (5) implica que

$$[\nabla_i, (a^j)^*] = \sum_k \Gamma_{ik}^j (a^k)^*. \quad (8)$$

Então $d^* = -\sum_i \nabla_i^* a^i$.

2. Definição. Sejam dois campos de vetores X, Y , a segunda derivada covariante $\nabla_{(X,Y)}^2$ é definida por

$$\nabla_{(X,Y)}^2 = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Z; \quad Z = \nabla_X Y.$$

Sejam $\{X_i\}_{i=1}^p$ coordenadas do campo de vetores X . Denotamos $\nabla_{(X_i, Y_j)}^2$ por $\nabla_{(i,j)}^2$, temos

$$\nabla_{(i,j)}^2 = \nabla_i \nabla_j - \sum_k \Gamma_{ij}^k \nabla_k.$$

A demonstração de (0) através de cálculos num sistema de coordenadas normais fica da seguinte maneira:

$$d_i = d + t \sum_i \nabla_i f(a^i)^*,$$

$$d_i^* = d^* + t \sum_i \nabla_i f(a^i),$$

$$\Delta_t = \{d_t, d_t^*\} = dd^* + d^*d + t^2 \sum_{i,j} (\nabla_i f)(\nabla_j f) \{a^i, (a^j)^*\} + tA$$

onde

$$A = \left\{ d, \sum_i \nabla_i f(a^i) \right\} + \left\{ \sum_{i=1} \nabla_i f(a^i)^*, d^* \right\}.$$

Pelo teorema 2. $d = \sum_i (a^i)^* \nabla_i$ e $d^* = \sum_i \nabla_i^* a^i$.

Num sistema de coordenadas normais centradas em m_0 , $(\nabla_i \alpha)(m_0) = (\partial_i \alpha)(m)$, $(\nabla_i^* \alpha)(m_0) = -(\partial_i \alpha)(m_0)$ pela igualdade (6a), (7a) e pelo teorema (1). Também $\partial_k (g^{ij} \alpha)(m_0) = g^{ij} (\partial_k \alpha)(m_0)$. Como $([\nabla_i, (a^j)^*] \alpha)(m_0) = 0$, isto por (8) temos o seguinte

$$\begin{aligned} (A\alpha)(m_0) &= \left[\left(\sum_{i,j} \{ (a^i)^* \nabla_i, \nabla_j f a^j \} - \sum_{i,j} \{ a^j \nabla_j, \nabla_i f (a^i)^* \} \right) \alpha \right] (m_0) \\ &= \left[\sum_{i,j} \left(\{ (a^i)^*, \nabla_j f a^j \} \nabla_i + (a^i)^* [\nabla_i, \nabla_j f a^j] - \{ a^j, \nabla_i f (a^i)^* \} \nabla_j \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a^j [\nabla_j, \nabla_i f (a^i)^*] \right) \alpha \right] (m_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{i,j} (g^{ij} \nabla_j f \nabla_i + (a^i)^* \nabla_i \nabla_j f a^j + (a^i)^* \nabla_j f \nabla_i a^j - (a^i)^* \nabla_j f a^j \nabla_i - \right. \\
&\quad \left. - g^{ij} \nabla_i f \nabla_j - a^j \nabla_j \nabla_i f (a^i)^* - a^j \nabla_i f \nabla_j (a^i)^* + a^j \nabla_i f (a^i)^* \nabla_j \right) \alpha \Big] (m_0) \\
&= \left[\sum_{i,j} (g^{ij} \nabla_j f \nabla_i - g^{ij} \nabla_i f \nabla_j + \nabla_i \nabla_j f [(a^i)^*, a^j]) \alpha \right] (m_0) \\
&= \left[\sum_{i,j} \nabla_{ij}^2 f [(a^i)^*, a^j] \alpha \right] (m_0)
\end{aligned}$$

isto pela definição 2, pelo teorema 1, e as condições acima. ■

Referências

- [B.S.1] Reed, M. Simon, B.: Methods of Modern Mathematical Physics, IV. Analysis of operators (Academic, London 1978).
- [B.S.2] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch e B. Simon: Schrödinger operators, texts an Monographics, 1987, Springer.
- [B.] William M. Boothby: An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, 1986.
- [d.C.] Manfredo Perdigão do Carmo: Geometria Riemanniana, 2ª Edição 1988.
- [E.W.] E. Witten: Supersymmetry and Morse theory, J. Diff. Geom. 17 (1982), 661-692.
- [G.T.] Geovan Tavares: Funções de Morse e classificação de superfícies, 12º Colóquio Brasileiro de Mat. 1979.
- [J.R.] John Roe: Elliptic operators, topology and asymptotic methods, Research Notes in Mathematics 1988.
- [Mi.] J. W. Milnor: Morse theory, Princeton, 1963.
- [M.R.] F. Mercuri e A. Rigas: Formas harmônicas e curvatura, Escola de Geometria Diferencial, IMPA, 1982.
- [W.] Warner, Frank: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott and Foresman, 1971.
- [A.M.] Arthur Jaffe, Andrzej Lesniwski, and Lewenstein. Annals of Physics, 178 (1987), 313-329.