

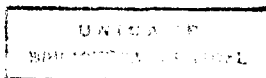
**Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica**

Métodos Numéricos para Problemas de Convecção-Difusão

por

Mariano Edgardo Poblete Cantelano

**Campinas, SP, Brasil
Abril de 1997**



**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Poblete Cantelano, Mariano Edgardo

P75m Métodos numéricos para problemas de convecção-difusão /
Mariano Edgardo Poblete Cantelano – Campinas, [S.P. :s.n.], 1997.

Orientador : José Luiz Boldrini

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Métodos numéricos. 3.
Galerkin, métodos de. 4. Equações de diferença. I. Boldrini, José Luiz.
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Métodos Numéricos para Problemas de Convecção-Difusão

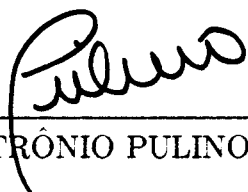
Este exemplar corresponde à redação final da dissertação de mestrado devidamente corrigida e defendida pelo Sr.
Mariano Edgardo Poblete Cantelano
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 14 de abril de 1997.

Prof. Dr. João Luiz Boldrini
JOSÉ LUIZ, BOLDRINI(orientador)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

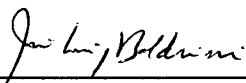
Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 04 de fevereiro de 1997
pela Comissão Julgadora composta pelos professores doutores:



Prof(a). Dr(a). PETRÔNIO PULINO



Prof(a). Dr(a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER



Prof(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Agradecimentos

O autor expressa sua mais sincera gratidão ao professor Dr. José Luiz Boldrini pela orientação e encorajamento neste trabalho.

Agradeço a todos os meus colegas e amigos com os quais compartilhei bons momentos quando cursava o mestrado.

Expresso meus agradecimentos à CAPES- Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Brasil)- pelo apoio financeiro durante a elaboração deste trabalho.

Este trabajo esta dedicado a mi Madre
quién fallecio durante mi estadia en Brasil.

Sumário

Introdução	1
1 Algumas Observações Sobre As Equações De Convecção-Difusão	6
2 O Método de Galerkin Aplicado Às Equações De Convecção-Difusão	13
2.1 Aplicações às Equações de Convecção-Difusão	13
2.2 Aplicações às Equações de Convecção	20
2.3 Comentários	23
3 Métodos de Petrov-Galerkin Aplicados às Equações de Convecção-Difusão	30
3.1 Métodos de Projeção	30
3.2 Técnicas Upwind	34
3.2.1 Efeitos Upwind em Métodos de Diferenças Finitas	34
3.2.2 Efeitos Upwind em Métodos de Elementos Finitos no Caso Unidimensional	40
3.2.3 Efeitos Upwind e Crosswind no Caso Bidimensional	41
3.2.4 Um Método Upwind para Equações de Convecção Pura	44
3.3 O Método Streamline-Diffusion	53
3.3.1 Apresentação do Método	53
3.3.2 Um Resultado de Localização	57
3.4 Problema de Convecção-Difusão	67

Introdução

Como é de conhecimento geral, muitos são os tipos de problemas estudados na Análise Numérica. Dentre estes, podemos mencionar aqueles relacionados com a resolução de equações algébricas, aqueles associados a obtenção de autovalores, bem como aqueles relacionados com a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias ou parciais.

Neste último contexto, devido à sua enorme importância prática, as equações diferenciais parciais associadas a fenômenos de transporte têm sido objeto de intensos estudos, refletidos em um grande número de trabalhos publicados. Para tais tipos de equações, nos casos em que há predominância dos chamados termos convectivos sobre os termos difusivos, podem estar presentes ondas de choque (*shock waves*), as quais correspondem a regiões de descontinuidade da solução, ou então regiões de transição muito rápida. Isto pode se dar tanto em regiões internas (quando então são chamadas de camadas interiores ou *interior layers*) quanto em partes da fronteira (chamadas neste caso de camadas limites ou *boundary layers*), e a sua presença torna difícil o estudo destas equações, tanto do ponto de vista teórico quanto numérico. De fato, a seguir comentaremos sobre alguns métodos que podem ser utilizados na resolução numérica destas equações, destacando alguns pontos sobre o seu comportamento.

Uma primeira possibilidade é a utilização do método de diferenças finitas. Neste caso, o bom comportamento de operadores diferenças centradas, com características de boa estabilidade e boa ordem de aproximação quando utilizados na discretização de operadores elípticos, explicam o seu sucesso na aproximação dos termos difusivos da equação. Por outro lado, quando diferenças centradas são usadas na discretização dos termos de convecção, em muitas situações, elas fornecem resultados errôneos. Em geral, tem-se observado que quando operadores de diferenças centradas são usados para discretizar operadores diferenciais de ordem ímpar, os es-

quem numéricos resultantes perdem estabilidade. No caso particular do seu uso em problemas predominantemente convectivos obtêm-se as soluções numéricas com oscilações espúrias naquelas regiões em que a solução exata do problema apresenta descontinuidades ou gradientes com grande intensidade (regiões de transição rápida). Pior ainda, quando se recorre ao refinamento de nestas regiões, tais oscilações não desaparecem, tornando-se eventualmente piores. Certos autores interpretam que esquemas de diferenças centrais quando aplicados aos termos convectivos são responsáveis pela introdução de uma certa difusão artificial negativa. Propõem, para corrigir este defeito, a utilização de esquemas de diferenças não centradas adequados para discretizar tais termos, uma vez que estes esquemas somam uma difusividade artificial positiva ao esquema numérico final. Os primeiros intentos nesta direção foram feitos em problemas unidimensionais e são descritos nas referências citadas no Capítulo 3 deste trabalho. Esta técnica em geral fornece uma maior estabilidade e elimina as oscilações espúrias. A técnica *upwind* clássica, entretanto, fornece baixa precisão e demasiada atenuação dos choques. Foram desenvolvidos, então, métodos que combinam em forma ponderada esquemas de diferenças centradas para os termos difusivos e *one-sided upstream differences* para os termos convectivos e, ainda, os esquemas *upwind* generalizados (estes métodos serão descritos no Capítulo 3).

No caso unidimensional, para problemas relativamente simples (sem termos fonte), a quantidade mais adequada de difusividade artificial a ser introduzida pode ser calculada e é possível, assim, obter soluções numéricas fornecendo valores exatos nos nós da malha utilizada. Porém, quando este método é aplicado em problemas contendo termos fontes ou coeficientes dependentes do tempo, as soluções numéricas apresentam ainda excessiva atenuação dos choques e das camadas interiores e limites. No caso bidimensional os resultados pioram pela presença de um outro efeito, a chamada *crosswind diffusion* que se apresenta na direção transversal às linhas do fluxo. Este efeito, que é discutido por Krasnosel'skii et al. [29], acontece simplesmente pelo fato de que, se por um lado o operador de diferenças não centrado aumenta a estabilidade do esquema numérico, por outro lado ele compromete sensivelmente a precisão da solução, pois acrescenta ao esquema numérico difusão em todas as direções.

Outras técnicas possíveis de serem empregadas na resolução numérica das equações de transporte são aquelas que usam elementos finitos. Neste caso, o caminho percorrido foi semelhante àquele com o uso de diferenças finitas. Na utilização do método de Galerkin usual (que forma a base teórica do método de elementos finitos), a presença do termo convectivo destrói a simetria do operador discretizado final, fazendo com que a solução aproximada correspondente não tenha a propriedade de corresponder à melhor aproximação em uma norma adequada ao problema (o que é verdadeiro para equações puramente elípticas, isto é, sem termos convectivos). Nos casos em que os termos de convecção predominam com relação aos termos difusivos, também a coercividade do operador discretizado é perdida. Nos correspondentes problemas discretizados, obtêm-se matrizes com uma pobre dominância diagonal, pois na discretização proveniente do método de Galerkin usual aparecem operadores de diferenças centrais. Portanto, como antes, as soluções numéricas correspondentes, apresentam oscilações espúrias que se propagam ao longo dos pontos nodais no domínio.

Para corrigir este defeito, vários autores tentaram produzir efeitos *upwind* com o método de elementos finitos, com resultados e dificuldades semelhantes àqueles presentes no método das diferenças finitas. Pode-se tentar decentralizar o esquema discreto associado ao termo convectivo adaptando a formulação variacional de tal forma que as equações discretas resultantes representem o melhor possível o o fluxo de informações do modelo físico. Para isto, uma possibilidade é a modificação do espaço das funções peso através de uma escolha adequada das funções que o compõem. A primeira aplicação deste método (chamado método de Petrov-Galerkin) apareceu em Christie et al.[5], onde foram utilizadas funções peso contínuas, construídas somando-se às funções de interpolação clássicas, funções que ponderavam mais fortemente as informações à montante (*upwind*) do fluxo. Da mesma forma, que em diferenças finitas, um parâmetro *upwind* podia ser escolhido de forma de eliminar as oscilações. Porém, no caso bidimensional, a situação era similar àquela já mencionada acima no caso de diferenças finitas (Christie et al.[5], Heinrich e Zienkiewicz [16], Heinrich et al. [17]), isto é, uma excessiva difusão transversal ao fluxo. Outro problema com este procedimento é que para aplicá-los devemos conhecer *a priori* a direção do fluxo para depois fazer a escolha das funções peso. Em problemas de dimensão espacial

maior ou igual a dois, com fluxo não constante, isto pode ser extremamente penoso (e caro) do ponto de vista da estrutura de dados dos programas a serem escritos para a efetiva computação da solução. O método de *streamline-diffusion* (ou *Streamline upwind* Petrov- Galerkin- SU/PG) foi proposto de tal forma a não apresentar tal dificuldade. Ele consiste em uma formulação variacional do tipo Petrov-Galerkin onde as funções peso são construídas somando-se às funções clássicas do método de Galerkin uma perturbação que atua automaticamente na direção do fluxo. Com este método conseguem-se boa precisão e boas propriedades de estabilidade (Johnson e Nävert [24]).

Para soluções suficientemente regulares, obtêm-se estimativas globais de erro que são “ótimas” e “quasi-ótimas” fora de uma pequena vizinhança envolvendo as camadas de transição rápida. Isto significa que o método “streamline-diffusion” pode ter comportamento não ótimo apenas em regiões localizadas próximas a tais camadas.

No caso de camadas internas de transição rápida, uma estratégia para melhorar o método SU/PG foi apresentada por Mizukami e Hughes em [33]. Eles observam que nem sempre as linhas do fluxo (*streamline*) são a direção mais adequada para o *upwind* (explicaremos melhor este ponto no Capítulo 3), e baseados nesta idéia, com o auxílio do “princípio do máximo discreto”, propõem outro método do tipo Petrov-Galerkin. Segundo experimentos numéricos apresentados pelos autores, este método parece ser melhor comportado que o método de *Streamline-diffusion* nas camadas de transição rápida; por outro lado, ele tem uma grande dificuldade em ser generalizado a dimensões espaciais superiores. Uma outra adaptação do método *streamline-diffusion* foi apresentada em Hughes et al. [12] combinando as características deste (SU/PG) com a idéia de Mizukami e Hughes [33], com bons resultados nas camadas de transição, mas que, por outro lado, apresenta uma perda de precisão em problemas regulares. A seguir, faremos um pequeno resumo do conteúdo deste trabalho: no Capítulo 1, apresentaremos alguns resultados básicos relacionados com o comportamento das soluções exatas das equações de convecção-difusão. No Capítulo 2, será discutido o método de Galerkin padrão, explicitando suas deficiências na resolução numérica de problemas de convecção-difusão (com predomínio da convecção); apresentamos estimativas do erro teóricas e comentários gerais. No Capítulo 3 serão discutidas técnicas derivadas

do método *upwind*, nos casos unidimensional e bidimensional; a seguir apresentaremos os métodos de Galerkin-Descontínuo e *streamline-diffusion* (método SU/PG) e faremos a análise do método, apresentando um resultado devido a Johnson e Nävert [24] acerca da localização de erros. Finalmente, mencionaremos uma versão melhorada do método de *streamline-diffusion*: o método *streamline-diffusion with shock-capturing* (método das linhas de corrente com um operador de captura de choques). Em suma, nossa pretensão é a de introduzir o leitor nas técnicas do tipo Petrov-Galerkin, apresentar algumas de suas vantagens e desvantagens, bem como motivar futuras análises de equações que modelam fenômenos mais gerais de transportes.

Capítulo 1

Algumas Observações Sobre As Equações De Convecção-Difusão

Consideremos o seguinte exemplo simples de equação linear modelando fenômenos de convecção-difusão:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{\beta}u) + \sigma u - \epsilon \Delta u = f \quad \text{em } \Omega \times I \quad (1.1)$$

Aqui, a função incógnita u , denotando a densidade de uma certa grandeza física de interesse, é uma função escalar, isto é, $u : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um subconjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) representando a região física de interesse; $I = [0, T]$ é o intervalo de tempo considerado. O campo de velocidade responsável pelo transporte convectivo é

$$\vec{\beta} : \overline{\Omega} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(aqui $\overline{\Omega}$ denota o fecho de Ω). O fluxo convectivo é $\vec{\beta}u$ e div denota o operador divergente (recordamos que $\operatorname{div}(\vec{\beta}u) = \vec{\beta} \cdot \nabla u + \operatorname{div}(\vec{\beta})u$, onde o ponto $\cdot$ denota o produto escalar canônico em $\mathbb{R}^n$).

A função $\sigma : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ fornece a taxa de crescimento (decréscimo) intrínseca da grandeza física de interesse.

O último termo à esquerda da equação representa o transporte difusivo; $\epsilon \geq 0$ é o coeficiente de difusão. A função $f : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ fornece a densidade de fontes (ou sorvedouros) da grandeza física de interesse presentes em Ω .

Do ponto de vista matemático, a equação acima é do tipo parabólico ou hiperbólico, dependendo do fato de ϵ ser respectivamente positivo ou zero. Porém, do ponto de vista das aproximações numéricas, o efetivo carácter da equação (1.1), é

predominantemente parabólico ou hiperbólico, dependendo do tamanho relativo de ϵ e $\vec{\beta}$ (este último medido em alguma norma $||\cdot||$). De fato, quando $0 \leq \frac{\epsilon}{||\vec{\beta}||} \leq 1$, (1.1) apresenta efetivamente um caráter mais hiperbólico que parabólico. Quando $\epsilon = 0$ o problema é puramente hiperbólico.

Para facilitar as explicações abaixo, vamos considerar inicialmente o caso puramente hiperbólico (isto é, $\epsilon = 0$) e estacionário (isto é, todos os termos da equação são independentes do tempo e estaremos procurando uma solução também independente do tempo, e, portanto, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$).

Nestas condições, sendo $\alpha(x) = \sigma(x) + \text{div}(\vec{\beta}(x))$, reescrevemos (1.1) como

$$\vec{\beta}(x) \cdot \nabla u(x) + \alpha(x)u = f(x) \quad \text{sobre } \Omega. \quad (1.2)$$

As linhas de fluxo (*streamlines*) correspondentes ao campo de velocidades fornecido na equação, isto é, $\vec{\beta}(x) = (\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x), \dots, \beta_n(x))$ são dadas por curvas parametrizadas

$$x(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s), \dots, x_n(s)),$$

com $s \in R$, que são soluções, quando $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ varia, dos problemas de valor inicial seguintes

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{ds} = \beta_i(x) & i = 1, 2, 3, \dots, n. \\ x(0) = \bar{x} \end{cases} \quad (1.3)$$

Estas curvas parametrizadas pelo parâmetro, são também chamadas de curvas características planas (ou simplesmente características) do Problema (1.2). Para garantir a existência e a unicidade da solução do (1.3) e simplicidade de exposição, faremos a hipótese de que $\vec{\beta}$ é uma função Lipschitz-contínua, isto é

$$|\vec{\beta}(x) - \vec{\beta}(y)| \leq C|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega \quad (1.4)$$

para alguma constante C positiva.

Então, dado um ponto $\bar{x} \in \Omega$, existe exatamente uma característica $x(s)$ que passa por $\bar{x}$, quer dizer, existe uma função $x(s)$ satisfazendo o problema de valor inicial (1.3).

Observamos que, quando $x(s)$ é uma característica, usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{ds}u(x(s)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \vec{\beta} \cdot \nabla u \quad (1.5)$$

e, usando (1.2), temos que

$$\frac{d}{ds}u(x(s)) + \alpha u(x(s)) = f(x(s)) \quad (1.6)$$

Assim, como a equação (1.2) é reduzida a uma equação diferencial ordinária ao longo das características $x(s)$, e, se a solução u for conhecida em um ponto sobre uma curva característica, digamos um ponto correspondente a $x(s_1)$, com $s_1 \in \mathbb{R}$ dado, u pode ser determinada nos outros pontos dessa mesma característica simplesmente pela resolução da equação (1.6). Obtem-se, então, a expressão

$$\begin{aligned} u(x(s)) = & \exp\left(-\int_{s_1}^s (\alpha(x(\tau)))d\tau\right)u(x(s_1)) \\ & + \int_0^s \exp\left(-\int_z^s (\alpha(x(\tau)))d\tau\right)f(x(z))dz \end{aligned} \quad (1.7)$$

Suponhamos agora que Ω possui fronteira Γ regular e consideremos a parte da fronteira definida por

$$\Gamma_- = \{x \in \Gamma : \vec{n}(x) \cdot \vec{\beta} < 0\},$$

onde $\vec{n}(x)$ é o vetor normal unitário exterior em cada ponto de Γ , com $x \in \Gamma$

Analogamente, definimos

$$\Gamma_+ = \{x \in \Gamma : \vec{n}(x) \cdot \vec{\beta} \geq 0\}$$

Γ_- e Γ_+ são interpretadas como as regiões de entrada e saída do fluxo, respectivamente (veja a Figura 1.1).

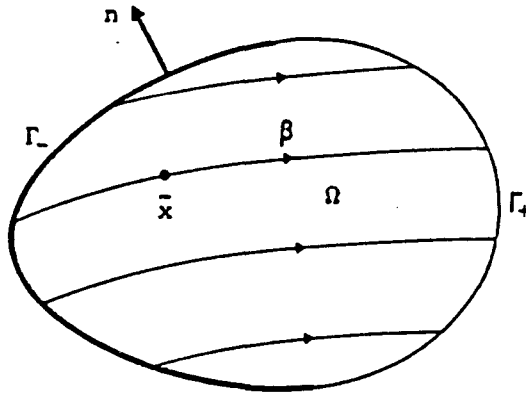


Figura 1.1

Devido às considerações acima (veja (1.7)), para que a solução u não fique sobre-determinada no problema (1.2), os valores na fronteira da função u devem ser somente prescritos na entrada do fluxo Γ_- . É importante observar que soluções de (1.2) (em sentido generalizado) podem ser descontínuas ao longo de características; de fato, se os dados de fronteira tiverem uma descontinuidade em algum ponto $x_0 \in \Gamma_-$, esta descontinuidade se propagará para o interior de Ω ao longo da característica emanando de x_0 . Como exemplo, consideremos a equação

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_y u = 0 & \text{em } (0, 1] \times (0, 1] \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, y) = 1, \end{cases} \quad (1.8)$$

onde $\vec{\beta} = (1, 1)$, $\alpha = 0$ (veja Figura 1.2).

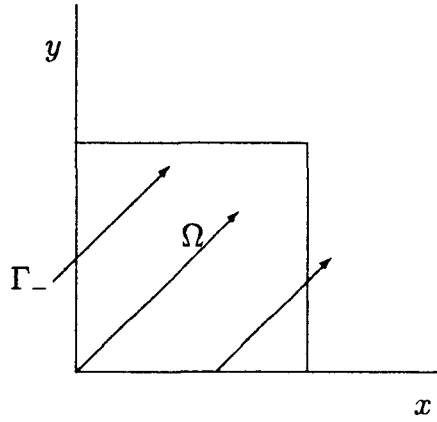


Figura 1.2

Neste caso, de (1.8) vemos que u é constante ao longo das características e, portanto, u é descontínua ao longo da curva $y = x$. Para entender o comportamento esperado das soluções no caso $\epsilon > 0$, vamos considerar ainda o caso estacionário com $\vec{\beta}$ constante e f suave, e comparemos os dois problemas abaixo:

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta u_\epsilon + v \vec{\beta} \cdot \nabla u_\epsilon + u_\epsilon = f & \text{sobre } \Omega \\ u_\epsilon = g & \text{em } \Gamma \end{cases} \quad (1.9)$$

que será chamado de Problema Completo, e

$$\begin{cases} \nabla u \cdot \vec{\beta} + u = f & \text{sobre } \Omega \\ u = g & \text{em } \Gamma_- \end{cases} \quad (1.10)$$

chamado de Problema Reduzido, correspondente a $\epsilon = 0$. O parâmetro ϵ é considerado pequeno, mas estritamente positivo, no problema (1.9). Este é um problema elíptico e observamos que, a condição de fronteira deve ser prescrita em toda a fronteira Γ e não apenas em Γ_- , como é o caso do Problema Reduzido (1.10).

Passemos a comparar os comportamentos das soluções u_ϵ e u destes dois problemas:

u_ϵ e u assumem valores próximos na maior parte da região Ω quando ϵ é pequeno, podendo assumir valores bastante diferentes apenas em subregiões onde as derivadas das soluções assumirem grandes valores.

Com respeito à regularidade, como foi observado anteriormente, se o dado g da fronteira for descontínuo em um ponto de Γ_- , a solução exata u do Problema Reduzido (1.10) será descontínua ao longo da característica emanando daquele ponto. Por outro lado, no Problema Completo (1.9), a solução u_ϵ será contínua em todo o interior de Ω mesmo que g tenha um ponto de descontinuidade (de fato u_ϵ será analítica em Ω se f o for). O salto de descontinuidade da u , quando comparado com o correspondente comportamento da u_ϵ , é “espalhado” através de uma região de transição rápida de largura $O(\sqrt{\epsilon})$ em torno daquela característica. Portanto, embora a presença do termo $\epsilon \Delta u$ implique em uma solução u_ϵ suave, nesta região de transição ela muda de valores muito rapidamente quando ϵ é pequeno. Isto pode acontecer também com os valores de alguma derivada de u_ϵ . A região onde acontece este fenômeno chama-se de “camada interior” (*boundary layer*) (veja a Figura 1.3). Se os valores calculados da solução u do Problema Reduzido (1.9) não coincidirem com os valores prescritos para g do Problema Completo (1.9) em Γ_+ , então a solução deste último problema apresentará uma “camada limite” na fronteira (*boundary layer*), já que u_ϵ é forçada a assumir os valores dados para g inclusive em Γ_+ (veja a Figura 1.3). Prova-se, neste caso, que esta região de transição é de largura $O(\sqrt{\epsilon})$.

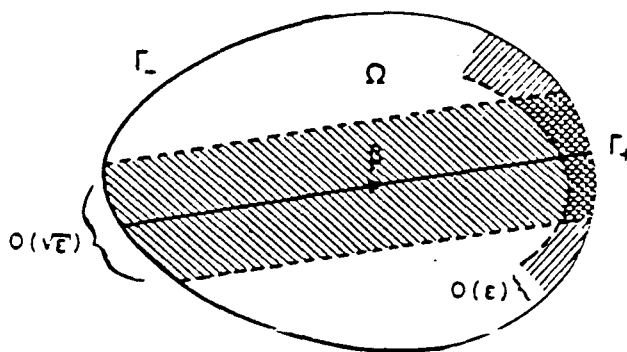


Figura 1.3

Por outro lado, no seguinte problema dependente do tempo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\beta} \cdot \nabla u + \alpha u = 0 \quad \text{sobre } \Omega \times I, \quad (1.11)$$

substituímos t por x_0 e fazemos $\beta_0 = 1$, logo (1.11) se expressa como

$$\sum_{j=1}^n \beta_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \alpha u = 0 \quad (1.12)$$

que é do tipo (1.2). As características de (1.12) são curvas $(x(t), t)$ no espaço-tempo, onde $x(t)$ satisfaz a equação diferencial ordinária

$$\frac{dx_i}{dt} = \beta_i(x, t) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Portanto, comportamentos análogos aos descritos anteriormente se apresentam no caso em que há dependência temporal.

Capítulo 2

O Método de Galerkin Aplicado Às Equações De Convecção-Difusão

Na primeira secção deste capítulo descreveremos uma aplicação do método de Galerkin a problemas de convecção-difusão; a seguir descreveremos sua aplicação a problemas de convecção pura. Na secção final faremos comentários gerais.

2.1 Aplicações às Equações de Convecção-Difusão

Consideremos o seguinte problema estacionário:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\epsilon \Delta u + \vec{\beta} \cdot \nabla u + u = f, & \text{sobre } \Omega, \\ \epsilon \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = (u - g) \vec{\beta} \cdot \vec{n}, & \text{em } \Gamma_-, \\ \epsilon \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, & \text{em } \Gamma_+, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Aqui as funções envolvidas não dependem do tempo e a notação é como a do início do capítulo anterior. Além disso, denotamos com $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ a derivada na direção do vetor normal externo unitário $\vec{n}$. A constante $\epsilon > 0$ será considerada pequena com respeito de $|\vec{\beta}|$, (onde $|\cdot|$ denota a norma Euclidiana no $\mathbb{R}^2$), tendo assim (2.1) um caráter mais hiperbólico que elíptico.

Vamos assumir também que o campo de velocidades $\vec{\beta}$ corresponde a um

fluxo incompressível, isto é, que ele satisfaz

$$\operatorname{div}(\vec{\beta}) = 0 \quad (2.2)$$

Gostaríamos de ressaltar que a condição de contorno acima não é essencial e que outros tipos de condições de contorno poderiam ser impostas sem grandes dificuldades. Esta foi escolhida apenas por simplicidade da exposição, já que a correspondente formulação variacional do problema, a ser descrita mais à frente, se torna bastante simples.

Introduziremos agora notações que usaremos neste e também nos próximos capítulos. Assim, $L_2(\Omega)$ denota o espaço das funções quadrado integráveis segundo a medida de Lebesgue, isto é

$$L_2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \int_{\Omega} |v|^2 dx < \infty \right\}$$

O espaço $L_2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(w, v) = \int_{\Omega} w v dx \quad (2.3)$$

Agora, (2.3) define a norma do espaço de Hilbert $L_2(\Omega)$, onde

$$\|w\| = (w, w)^{1/2} = \left[\int_{\Omega} w^2 dx \right]^{1/2}$$

Além disso, para definir os espaços de Sobolev $H^k(\Omega)$, com k inteiro, seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ com α_i inteiro e $|\alpha| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|$, logo expressamos convenientemente as derivadas de ordem superior por

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n},$$

assim, escrevemos

$$H^k(\Omega) = \{ w \in L_2(\Omega), \partial^\alpha w \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq k \},$$

com a norma

$$\|w\|_k = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha w|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Para o caso $k = 1$, temos o espaço de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \left\{ w \in L_2(\Omega), \frac{\partial w}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), i = 1, 2 \right\},$$

com o produto escalar

$$(w, v)_\Omega = \int_\Omega (wv + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}) dx,$$

que define a norma correspondente

$$\|w\|_1 = ((w, w)_\Omega)^{1/2} = \left[\int_\Omega (w^2 + \sum_{i=1}^2 (\frac{\partial w}{\partial x_i})^2) dx \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

O espaço $H^1(\Omega)$ com a norma (2.4) é um espaço de Hilbert. Um outro espaço a ser usado será $H_0^1(\Omega)$, o qual é definido por

$$H_0^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) : w|_\Gamma = 0\}$$

e com a norma equivalente à norma

$$|w|_\Omega = \left[\sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|^2 \right]^{1/2}.$$

Além disso, definimos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \int_\Gamma v w \vec{n} \cdot \vec{\beta} ds, \\ \langle v, w \rangle_+ &= \int_{\Gamma_+} v w \vec{n} \cdot \vec{\beta} ds, \\ \langle v, w \rangle_- &= \int_{\Gamma_-} v w \vec{n} \cdot \vec{\beta} ds, \\ |w| &= \left[\int_\Gamma v^2 |\vec{n} \cdot \vec{\beta}| ds \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Lembramos também a seguinte desigualdade

$$2ab \leq \sigma a^2 + \sigma^{-1} b^2, \quad \forall a, b \geq 0, \quad \forall \sigma > 0, \quad (2.5)$$

e que a fórmula de Green, com a notação anterior, é reescrita como:

$$(\vec{\beta} \cdot \nabla v, w) = \langle v, w \rangle - (v, \vec{\beta} \cdot \nabla w) - (v, \text{div}(\vec{\beta})w). \quad (2.6)$$

Podemos fazer agora a formulação variacional do problema (2.1). Multiplicando por $v \in H^1(\Omega)$ a equação de (2.1) e integrando sobre Ω , temos

$$-\epsilon \int_{\Omega} \Delta u v dx + \int_{\Omega} (\vec{\beta} \cdot \nabla u) v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.7)$$

Usando a seguinte fórmula de Green

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds - \int_{\Omega} v \Delta u dx,$$

temos

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.7), finalmente se obtém, para todo $v \in H^1(\Omega)$,

$$\epsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} (\vec{\beta} \cdot \nabla u + u) v dx + \int_{\Gamma_-} u v \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma_-} v g \vec{n} \cdot \vec{\beta} ds$$

Com esta última expressão, fornecemos a seguinte formulação variacional com condições impostas de forma fraca: Achar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\epsilon(\nabla u, \nabla v) + (\vec{\beta} \cdot \nabla u + u, v) - \langle v, v \rangle_- = (f, v) - \langle g, v \rangle_- \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.9)$$

Para obter soluções aproximadas para o problema (2.9) vamos a definir o espaço de elementos finitos como sendo

$$V_h = \{v \in H^1(\Omega) : v \in P_k(T), T \in T_h\}.$$

Isto é, V_h consiste de todas as funções polinomiais por partes de grau menor ou igual a k , com k inteiro positivo. Além disso, por simplicidade, vamos supor que Ω é um domínio poligonal convexo e $T_h = T$ é uma família de triangulações indexadas pelo parâmetro $h \in (0, 1)$, que representa o máximo comprimento de todos os triângulos em T_h . Ou seja, se h_T denota o diâmetro de T , onde T é um triângulo de T_h , então

$$h = \max \{h_T, T \in T_h\}$$

Assumiremos que a triangulação satisfaz a condição do ângulo mínimo, isto é, os ângulos dos triângulos $T \in T_h$ são limitados inferiormente por uma constante que

independe de h (ver Ciarlet [6]). A formulação discreta do problema de convecção-difusão é a seguinte:

Achar $u_h \in V_h$ tal que

$$\epsilon(\nabla u_h, v) + (\vec{\beta} \cdot \nabla u_h + u_h, v) - \langle u_h, v \rangle_- = (f, v) - \langle g, v \rangle_- \quad \forall v \in V_h \quad (2.10)$$

Vamos agora obter uma estimativa de estabilidade para a formulação (2.10). Para isso, substituímos v por u_h em (2.10) e obtemos

$$\epsilon \|u_h\|^2 + (\vec{\beta} \cdot \nabla u_h + u_h, u_h) - \langle u_h, u_h \rangle_- = (f, u_h) - \langle g, u_h \rangle_- \quad (2.11)$$

Levando em conta a fórmula de Green (2.6), temos

$$(\vec{\beta} \cdot \nabla u_h, u_h) = \langle u_h, u_h \rangle - (u_h, \vec{\beta} \cdot \nabla u_h),$$

o que implica em

$$(\nabla u_h \cdot \vec{\beta}, u_h) = \frac{1}{2} \langle u_h, u_h \rangle_- = \frac{1}{2} \langle u_h, u_h \rangle_+ + \frac{1}{2} \langle u_h, u_h \rangle_- \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) na expressão (2.11), temos que

$$\epsilon \|\nabla u_h\|^2 + \|u_h\|^2 + \frac{1}{2} \langle u_h, u_h \rangle_+ - \frac{1}{2} \langle u_h, u_h \rangle_- - \langle u_h, u_h \rangle_- = (f, u_h) - \langle g, u_h \rangle_-,$$

já que $\vec{n} \cdot \vec{\beta} \geq 0$ sobre Γ_+ e $\vec{n} \cdot \vec{\beta} < 0$ sobre Γ_- , obtém-se

$$\epsilon \|\nabla u_h\|^2 + \|u_h\|^2 + \frac{1}{2} |u_h|^2 = (f, u_h) - \langle g, u_h \rangle_-, \quad (2.13)$$

e usando a desigualdade (2.5), no lado direito de (2.13), tem-se a desigualdade

$$\epsilon \|\nabla u_h\|^2 + \|u_h\|^2 + |u_h|^2 - \frac{1}{2} |u_h|_{\Gamma_-} \leq \frac{1}{2} \|f\|^2 + \frac{1}{2} |g|_{\Gamma_-}.$$

Como $\vec{n} \cdot \vec{\beta} < 0$ sobre Γ_- , temos

$$\epsilon |\nabla u_h|^2 + |u_h|^2 + \frac{1}{2} |u_h|^2 \leq \frac{1}{2} |f|^2 + \frac{1}{2} |g|_{\Gamma_-}^2.$$

Assim, obtém-se finalmente a estimativa de estabilidade

$$\sqrt{\epsilon} \|\nabla u_h\|^2 + \|u_h\|^2 + |u_h|^2 \leq C(\|f\| + |g|_{\Gamma_-}) \quad (2.14)$$

Definamos agora a forma bilinear

$$b_\epsilon(\cdot, \cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$b_\epsilon(w, w) = \epsilon(\nabla w, \nabla w) + (\vec{\beta} \cdot \nabla w + w, v) - \langle w, v \rangle,$$

e a forma linear

$$L : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$L(w) = (f, w) - \langle g, w \rangle$$

Assim, reecrevemos (2.10) como se segue: Achar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$b_\epsilon(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (2.15)$$

e o problema (2.10) é reescrito como: Achar $u_h \in V_h$ tal que

$$b_\epsilon(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h \quad (2.16)$$

Se u é solução do problema contínuo (2.15) e u_h solução do problema discretizado (2.16), fazendo a diferença entre (2.15) e (2.16), obtemos

$$b_\epsilon(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h. \quad (2.17)$$

Pondo $v = w$ na forma bilinear $b_\epsilon(\cdot, \cdot)$, temos:

$$b_\epsilon(w, w) = \epsilon \|\nabla w\|^2 + (\vec{\beta} \cdot \nabla w, w) + \|w\|^2 - \langle w, w \rangle_-$$

Como $(\vec{\beta} \cdot \nabla w, w) = \langle w, w \rangle - (w, \vec{\beta} \cdot \nabla w)$, pela expressão (2.6), obtemos

$$(\nabla w \cdot \vec{\beta}, w) = \frac{1}{2} \langle w, w \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\vec{\beta} \cdot \nabla w, w) - \langle w, w \rangle_- &= \frac{1}{2} \langle w, w \rangle_+ + \frac{1}{2} \langle w, w \rangle_- - \langle w, w \rangle_- \\ &= \frac{1}{2} \langle w, w \rangle - \frac{1}{2} \langle w, w \rangle_- \\ &= \frac{1}{2} |w|^2, \end{aligned}$$

já que $\vec{\beta} \cdot \vec{n} < 0$ em Γ_- . Assim,

$$b_\epsilon(w, w) = \epsilon \|\nabla w\|^2 + \|w\|^2 + \frac{1}{2}|w|_2 \quad (2.18)$$

Lembremos agora os seguintes resultados clássicos (Ciarlet [6]): Dada uma função $u \in H^{k+1}(\Omega)$, existe um interpolante $\bar{u}_h \in V_h$ tal que

$$\|u - \bar{u}_h\| + h\|u - \bar{u}_h\|_1 \leq Ch^{\frac{1}{2}}\|u\|_{k+1} \quad (2.19)$$

$$\|u - \bar{u}_h\| \leq Ch^{k+\frac{1}{2}}\|u\|_{k+1}. \quad (2.20)$$

Usando (2.19) e (2.20), obtemos então seguinte resultado

Teorema 2.1.1 *Sejam u solução do Problema (2.15) e u_h solução do Problema (2.16). Então, se $u \in H^{k+1}(\Omega)$, existe uma constante C dependendo de u e k , mas não de h , tal que*

$$\sqrt{\epsilon}\|\nabla(u - u_h)\| + \|u - u_h\| + |u - u_h| \leq Ch^k\|u\|_{k+1} \quad (2.21)$$

Demonstração: Sejam $\bar{u}_h$ o interpolante que satisfaz (2.19), $e_h = u_h - \bar{u}_h$, $z_h = u - \bar{u}_h$ e $e = u - u_h$. Então, $e_h = z_h - e$. Agora, usando (2.17), (2.19) e (2.20) com $v = e_h \in V_h$, tem-se

$$\begin{aligned} \epsilon\|\nabla e_h\|^2 + \|e_h\|^2 + \frac{1}{2}|e_h|^2 &= b(e_h, e_h) = b(z_h, e_h) - b(e, e_h) \\ &= b(z_h, e_h) = \epsilon(\nabla z_h, \nabla e_h) + (\vec{\beta} \cdot \nabla z_h, e_h) + (z_h, e_h) - \langle z_h, e_h \rangle_- \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}\|\nabla z_h\|^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\nabla e_h\|^2 + \|\nabla z_h \cdot \vec{\beta}\|^2 + \frac{1}{4}\|e_h\|^2 \\ &\quad + \|z_h\|^2 + \frac{1}{4}\|e_h\|^2 + |z_h|^2 + \frac{1}{2}|e_h|^2 \end{aligned}$$

Na última desigualdade, usamos (2.5) com o valor de σ convenientemente escolhido.

Como $\epsilon \ll 1$ temos que $\epsilon\|\nabla z_h\| < \|\nabla z_h\|$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{2}\|\nabla e_h\|^2 + \frac{1}{2}\|e_h\|^2 + \frac{1}{2}|e_h|^2 &\leq \frac{1}{2}\|\nabla z_h\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla z_h \cdot \vec{\beta}\|^2 + \|z_h\|^2 + |z_h|^2 \\ &\leq \|\nabla z_h\|^2 + \|\nabla z_h \cdot \vec{\beta}\|^2 + \|z_h\|^2 + |z_h|^2 \\ &\leq (Ch^k\|u\|_{k+1})^2 \end{aligned}$$

Assim,

$$\sqrt{\epsilon} \|\nabla e_h\| + \|e_h\| + |e_h| \leq Ch^k \|u\|_{k+1}$$

Como $e = e_h - z_h$, temos a estimativa (2.21). Já que $\|e - e_h\| = \|z_h\|$ logo $\|e\| - \|e_h\| \leq \|z_h\|$, então temos

$$\|e\| \leq \|z_h\| + \|e_h\|$$

Observamos que na estimativa (2.21) aparece um termo do tipo $\sqrt{\epsilon} \|\nabla(u - u_h)\|$. Do ponto de vista teórico, este termo fornece uma estabilidade e observamos que, de fato, o método converge com taxa $O(h^k)$ quando u for suficientemente regular. Esta estabilidade é perdida quando $\epsilon \rightarrow 0$ e, então, o método apresentado não garante um bom comportamento das aproximações nos casos em que a solução exata não é suficientemente suave. Do ponto de vista numérico, principalmente aquele associado ao refinamento da discretização, a situação não é tão simples. Quando $\epsilon \gg h$, o comportamento das aproximações numéricas é bom. Porém, quando quando a discretização é tal que $\epsilon \ll h$, o método produz soluções com oscilações que se manifestam nas camadas de transições rápidas (tanto nas internas quanto nas de fronteira). Isto é mostrado na Fig. 2.1, onde podemos observar que o método Galerkin-padrão apresenta grandes oscilações na camada de fronteira correspondente ao ponto $x = 1$. Na literatura existem muitos exemplos ilustrando estas situações.

2.2 Aplicações às Equações de Convecção

Vamos considerar agora o Problema Reduzido correspondente a (2.1), isto é:

$$\begin{cases} \vec{\beta} \cdot \nabla u + u = f & \text{sobre } \Omega \\ u = g & \text{em } \Omega_- \end{cases} \quad (2.22)$$

A correspondente formulação variacional é:

Achar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$(\vec{\beta} \cdot \nabla u + u, v) - \langle u, v \rangle_- = (f, v) - \langle g, v \rangle_- \quad \forall v \in V_h \quad (2.23)$$

Neste caso, o problema discretizado correspondente é o seguinte: Achar $u_h \in V_h$ tal que

$$(\vec{\beta} \cdot \nabla u_h + u_h, v) - \langle u_h, v \rangle_- = (f, v) - \langle g, v \rangle_- \quad \forall v \in V_h. \quad (2.24)$$

Definimos agora a forma bilinear $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$a(w, v) = (\nabla w \cdot \vec{\beta} + w, v) - \langle w, v \rangle_-, \quad (2.25)$$

e o funcional linear $L : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$L(v) = (f, v) - \langle g, v \rangle_- \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (2.26)$$

Assim, o problema contínuo (2.22) pode ser reescrito como: Achar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (2.27)$$

e, analogamente, o problema discreto pode ser reescrito como: Achar $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h \quad (2.28)$$

Agora, como $(\vec{\beta} \cdot \nabla v, v) = (v, \vec{\beta} \cdot \nabla v) - \langle v, v \rangle$, temos que $(\vec{\beta} \cdot \nabla, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle$, e, levando em conta que $\vec{\beta} \cdot \vec{n} \geq 0$ em Γ_+ e $\vec{\beta} \cdot \vec{n} < 0$ em Γ_- , conclui-se que

$$a(v, v) = \|v\|^2 + \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_+ + \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_- - \langle v, v \rangle_-$$

e

$$a(u, v) = \|v\|^2 + \frac{1}{2} |v|^2. \quad (2.29)$$

Portanto, $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva na norma dada por $(\|\cdot\|^2 + \frac{1}{2} |\cdot|^2)^{1/2}$. Sendo u a solução do Problema (2.27) e u_h solução do Problema (2.28), temos então

$$a(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h. \quad (2.30)$$

Agora, usando (2.29) e (2.30), com o mesmo raciocínio usado na demonstração do Teorema 2.1, prova-se o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1 *Sejam u e u_h as soluções respectivas dos problemas (2.27) e (2.28). Então existe uma constante $C > 0$, dependendo de u , mas não de h , tal que*

$$\|u - u_h\| + |u - u_h| \leq Ch^k \|u\|_k \quad (2.31)$$

Observamos até aqui o seguinte fato: do Problema Reduzido (2.27), fazendo $g = 0$, temos

$$(\vec{\beta} \cdot \nabla u, u) + (u, u) = (f, u) \leq \frac{\epsilon}{2} \|f\|^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|u\|^2. \quad (2.32)$$

Da mesma equação (2.2), temos

$$\vec{\beta} \cdot \nabla u = f - u$$

e

$$(\vec{\beta} \cdot \nabla u, \vec{\beta} \cdot \nabla u) = (f, \vec{\beta} \cdot \nabla u) - (u, \vec{\beta} \cdot \nabla u).$$

Também,

$$\|\vec{\beta} \cdot \nabla u\|^2 \leq \frac{\delta}{2} \|f\|^2 + \frac{1}{2\delta} \|\vec{\beta} \cdot \nabla u\|^2 + \frac{\delta}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2\delta} \|\vec{\beta} \cdot \nabla u\|^2. \quad (2.33)$$

Somando (2.32) e (2.33), temos que

$$\|\vec{\beta} \cdot \nabla u\|^2 + \|u\|^2 + \frac{1}{2}|u|^2 \leq \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\delta}{2}\right)\|u\|^2 + \left(\frac{1}{2\epsilon} + \frac{\delta}{2}\right)\|u\|^2 + \left(\frac{1}{2\delta} + \frac{1}{2\delta}\right)\|\vec{\beta} \cdot \nabla u\|^2$$

Escolhendo ϵ e δ adequadamente, como por exemplo $\delta = 3/2$, $\epsilon = 5/2$, concluímos que existe uma constante $C > 0$, independente de f tal que

$$\|\vec{\beta} \cdot \nabla u\| + \|u\| + |u| \leq C\|f\| \quad (2.34)$$

A estimativa (2.34) para o problema contínuo mostra que existe um controle do gradiente de u na direcção das características. Este controle não acontece no método de Galerkin padrão porque neste caso conseguem-se apenas as seguintes estimativas

$$\|u_h\| + |u_h| \leq C\|f\|$$

e

$$\|\vec{\beta} \cdot \nabla u_h\| \leq Ch^{-1}\|u_h\| \leq Ch^{-1}\|f\|.$$

Esta diferença entre as estimativas dos problemas contínuo e discreto não é conveniente, uma vez que o problema discreto deve representar o melhor possível o problema contínuo no seu comportamento. Esta falta de controle sob a derivada na direção $\vec{\beta}$ apresentada no método de Galerkin-padrão é manifestada em grandes oscilações, principalmente, nas regiões das camadas limites como mostra o ensaio numérico da Fig.2.1 na página 29.

2.3 Comentários

Passamos agora a fazer comentários gerais sobre o problema discretizado (2.10) quando a discretização é feita por elementos finitos. Para facilitar a exposição, consideraremos apenas o problema unidimensional seguinte:

$$\begin{aligned} -\epsilon u_{xx} + u_x &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= 1, \\ u(1) &= 0, \end{aligned} \tag{2.35}$$

onde $\epsilon > 0$ é pequeno. A solução exata de (2.35) é

$$u(x) = \alpha \left[1 - \exp\left(\frac{-1-x}{\epsilon}\right) \right]$$

com

$$\alpha = \left[1 - \exp\left(\frac{-1}{\epsilon}\right) \right]^{-1}$$

A solução $u(x)$ para $\epsilon > 0$ pequeno apresenta uma camada limite ao redor de $x = 1$. Nesta região $u(x)$ passa rapidamente de valor um para valor zero. Seja agora

$$V_h = \{v \in H^1(0, 1) : v|_I \in P_1(I), \forall I \in T_h\}$$

onde T_h é a partição de elementos finitos e I é qualquer um dos elementos de T_h . Definimos T_h por:

$$\begin{aligned} T_h : x_i &= ih, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \\ x_0 &= 0 \quad x_n = 1 \end{aligned}$$

Isto é, T_h é a malha uniforme de passo h sobre o intervalo $[0, 1]$. Assim V_h consiste de todas as funções lineares por partes nos subintervalos. Além disso, definamos

$$\bar{V}_h = \{v \in V_h : v(0) = v(1) = 0\}$$

Agora, multiplicando a equação (2.35) por $v \in \bar{V}_h$ e fazendo integração por partes, obtemos a formulação variacional seguinte:

Achar $u \in v_h$ tal que

$$\epsilon \left(\frac{du_h}{dx}, \frac{dv}{dx} \right) + \left(\frac{du_h}{dx}, v \right) = 0 \quad \forall v \in \bar{V}_h$$

Escolhemos a base de V_h composta das funções definidas por: $\varphi_i(x) = 1 - \frac{|x - x_i|}{h}$, $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ e nulas fora do intervalo acima. Assim a discretização do tipo Galerkin com polinômios lineares fornece o seguinte esquema:

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon}{h^2}(U_{i+1} - U_i + U_{i-1}) + \frac{1}{2h}(U_{i+1} - U_{i-1}) &= 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \\ U_0 &= 1 \\ U_n &= 1, \end{aligned} \tag{2.36}$$

onde $u_h = \sum_{i=1}^n U_i \varphi_i(x)$. Quando n é ímpar, a solução U_i de (2.36) tem valores próximos de um para i par e igual zero quando i é ímpar, produzindo assim uma solução numérica oscilatória em toda a região (veja a Figura 2.1 no final deste capítulo). Observamos que neste exemplo, nas equações discretizadas aparece um termo de diferença central de segunda ordem $\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$ para correspondente ao termo convectivo $\frac{du}{dx}$ e que provém de aplicar o método de Galerkin na equação (2.35). Este é o termo que é o responsável pelas oscilações da solução numérica quando ϵ é pequeno relativamente à discretização. Coloquemos o esquema (2.36) na forma

$$-\left(\frac{\epsilon}{h^2} + \frac{1}{2h}\right)U_{i+1} + \frac{2\epsilon}{h^2}U_i + \left(\frac{1}{2h} - \frac{\epsilon}{h^2}\right)U_{i-1} = 0 \tag{2.37}$$

para observar que ele tem uma matriz A definida por

$$\begin{aligned} a_{i-1i} &= -\left(\frac{\epsilon}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) \\ a_{ii} &= \frac{2\epsilon}{h^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{ii+1} &= \frac{1}{2h} - \frac{\epsilon}{h^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \\
a_{10} &= 0 \\
a_{nn} &= 0
\end{aligned}$$

Esta matriz, quando ϵ é muito pequeno, apresenta uma fraca dominância diagonal, produzida pela presença do termo $\frac{du}{dx}$ que destrói a simetria do operador e deixa termos de diferenças centrais. Para que matriz A seja diagonal dominante é preciso que

$$\frac{h}{\epsilon} \leq 2 \quad (2.38)$$

A condição (2.38) (cuja expressão à esquerda é conhecida como número de Peclet local) é muito restritiva e reflete a dependência custo computacional com respeito ao parâmetro ϵ . Além disso, Segal [40] provou que o número de condição da matriz para esquemas de diferenças centrais é $O(\frac{1}{\epsilon})$, o que para valores muito pequenos de ϵ pode causar problemas na resolução do sistema linear, como é mostrado nas Fig. 2.1 e Fig. 3.1, que mostram respectivamente resultados de testes numéricos fizemos usando o método de Galerkin-Padrão e o método de diferenças finitas centradas. Também implementamos os métodos de *upwind* e *streamline-diffusion* para o problema unidimensional (2.35). Isto será apresentado no Capítulo 3. A tabela seguinte mostra os coeficientes das incógnitas U_{i-1}, U_i, U_{i+1} para $i = 1, \dots, n$ para $\rho = 1.0 + 0.5\frac{h}{\epsilon}$, $\chi = 1.0 - 0.5\frac{h}{\epsilon}$ em cada um dos métodos mencionados acima.

Incógnitas	Diferença Centradas	Upwind	Galerkin Padrão	Streamline Diffusion
U_{i-1}	$-\rho$	$-\rho$	$-\rho$	$-\rho - \delta/\epsilon$
U_i	2.0	2.0ρ	2.0	$2.0(1.0 + \delta/\epsilon)$
U_{i+1}	$-\chi$	-1.0	$-\chi$	$-\chi + \delta/\epsilon$

Notamos que o método *streamline-diffusion* corresponde ao método Galerkin-Padrão com a modificação dos coeficientes das incógnitas do problema discretizado. Esta modificação é exatamente a adição de $\frac{\delta}{\epsilon}$ aos coeficientes e provém da escolha da função teste na forma $v + \delta \nabla v$, ao invés de apenas v como no método de Galerkin-Padrão. O parâmetro δ controla a quantidade de difusão necessária para se obter a

solução aproximada; porém não é claro como δ deve ser escolhido. Os sistemas lineares produzidos pelos métodos mencionados foram resolvidos usando decomposição LU e o erro cometido em cada método foi estimado usando a fórmula

$$||u - u_h||^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u(x_i) - u_i)^2,$$

onde $u(x_i)$ é a solução exata no ponto x_i .

Os métodos de Galerkin-Padrão e de diferenças centradas possuem as mesmas equações discretizadas e mostram oscilações em todo domínio para ϵ pequeno relativamente à discretização, na presença de camadas de transição rápida na solução do problema contínuo. Estas oscilações têm maior amplitude nas vizinhanças das camadas de fronteira em $x = 1$.

O parâmetro δ para o ensaio numérico com o método *streamline-diffusion* foi escolhido igual a 0.19, o passo da malha $h = 0.1$ e $\epsilon = 0.01$. Nestas condições este método apresentou um melhor comportamento que os outros. Mas, com $\delta = h$, o comportamento da solução com o método *streamline-diffusion* foi similar àquela obtida com o método *upwind*: a solução aproximada é excessivamente amortecida na camada de fronteira (veja Fig. 3.1).

Para dimensões maiores que um, os mesmos problemas descritos acima para o caso unidimensional ainda persistem. As estimativas mostradas nos teoremas anteriores mostram uma carência de controle nas derivadas da solução discretizada; de fato, erros são produzidos e propagados em direcções transversais às características (*cross-wind*) e também na direcção, mas no sentido oposto, das características (*upwind*). Isto se manifesta por soluções discretas oscilatórias que são bastante sensíveis às condições de fronteira.

Para uma melhor discussão sobre este tema, recomendamos Segal [40], onde se encontram exemplos unidimensionais sem camadas limites, onde os esquemas produzidos pelo método de elementos finitos são bem comportados ainda que a matriz de diferenças centradas não seja diagonal dominante.

Morton e Parrot [34] mostram um exemplo unidimensional com condições do tipo Neumann onde o método de Galerkin apresenta uma precisão fraca quando é comparado com outros métodos. Johnson e Nävert [25] fazem uma análise do método

de Galerkin para o problema

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} + u = f & \text{em } (0, 1) \times (0, 1) \\ -\epsilon \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + un_1 = gn_1, & \text{em } \Gamma_- \\ \epsilon \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, & \text{em } \Gamma_+ \end{cases}$$

onde $\vec{n} \doteq (n_1, n_2)$ vetor normal exterior a $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Quando $\epsilon = 0$ (Problema Reduzido) eles também provam que, para polinômios lineares por partes sobre triângulos, as seguintes estimativas são válidas quando u é suficientemente suave.

$$\|u - u_h\| + |u - u_h| \leq C(\|u - v\| + |u - v| + \|u_x - v_x\|) \quad \forall v \in V_h \quad (2.39)$$

e

$$\inf\{(\|u - v\| + |u - v| + \|u_x - v_x\|) \leq Ch^{1/2}v \in V_h\}. \quad (2.40)$$

Estas estimativas, quando são levadas ao problema completo permanecem de ordem $h^{5/4}$ para regiões onde a solução é suave. Impondo condições de Neumann na saída do fluxo, aparece um termo que contribui para o erro total com erros de ordem $\sqrt{\epsilon}$; a presença de camadas de transição, com erros de ordem $\epsilon^{1/4}$.

Quando as condições de Neumann são substituídas por uma condição de Dirichlet em Γ_+ (na saída do fluxo), usando no problema discreto de Galerkin espaços de funções de elementos finitos que são nulas sobre Γ_+ , a estimativa (2.40) é perdida porque as derivadas superiores da solução exata de ordem k têm valores de ordem $O(\epsilon^{-k})$. Isto mostra que neste tipo de problema (ϵ pequeno), discretizações com diferenças centrais fornecem esquemas muito sensíveis às condições de fronteira. Neste ponto adiantamos algumas informações que permitem uma comparação do que discutimos com o método de *streamline-difusion* a ser estudado com detalhes no Capítulo 3. Para este último método, podemos obter estimativas do tipo

$$\sqrt{\epsilon}\|\nabla(u - u_h)\| + \sqrt{h}\|\vec{\beta} \cdot \nabla(u - u_h)\| + \|u - u_h\| \leq Ch^{k+1/2}\|u\|_{k+1} \quad (2.41)$$

Observamos a presença do termo $\sqrt{h}\|\vec{\beta} \cdot \nabla(u - u_h)\|$ que melhora a estabilidade para as derivadas na direção do fluxo quando comparada com a do método de Galerkin. Finalizamos esta secção observando que para resolver os sistemas lineares produzido

pela discretização por elementos finitos, os especialistas recomendam o uso técnicas iterativas tais como o método de gradiente conjugado com pré-acondicionamento ou então “métodos multigrid”. Recentemente, novas técnicas de sobre-relaxação têm sido construídas para resolver sistemas lineares que provêm de esquemas de diferenças centrais (veja Strikwerda [41]).

No próximo capítulo, juntamente com a estimativa (2.41), demonstramos um resultado de localização que estabelece que os efeitos dos erros no problema discreto são propagados aproximadamente como no problema contínuo. Este fato pode ser expresso em uma estimativa de erro local que, no caso do método de Galerkin padrão, não se consegue obter por causa da forma em que são propagados os efeitos dos erros de discretização neste último método. Gostaríamos de ressaltar que este resultado é importante porque na teoria de elementos finitos, estimativas de tipo local existiam somente para problemas de tipo elíptico e parabólico.

— : Solução Exata;

◇ : Solução do esquema Galerkin Padrão; Erro: 0.475 E +00;

* : Solução do esquema aplicando Streamline Diffusion ($\delta = 0.19$);

Erro: 0.109 E -07;

$n = 11$; número de Peclet = 0.1000 E + 02; $\epsilon = 0.100E - 01$.

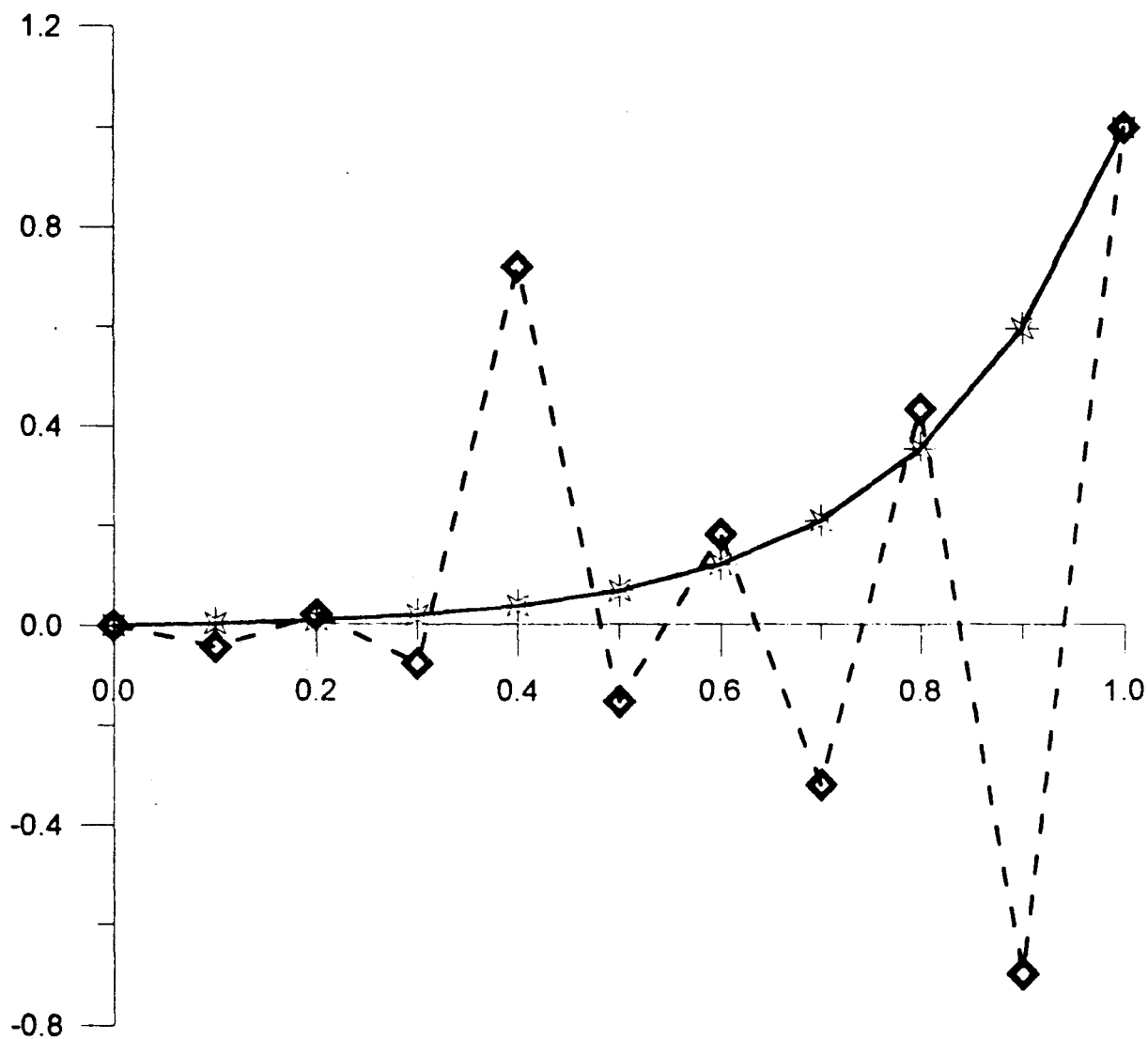


Figura 2.1

Métodos de Petrov-Galerkin

Aplicados às Equações de

Convecção-Difusão

Faremos uma breve descrição do método de Petrov-Galerkin, uma vez que as técnicas descritas mais à frente se baseiam neste tipo de método. Este método pode ser aplicado a equações diferenciais parciais e a equações integrais. Neste trabalho consideraremos somente o primeiro tipo de equações. Referências teóricas para o método Petrov-Galerkin são Krasnosel'skii [29], Morton [34].

O contexto geral é o seguinte: Sejam E e F Espaços de Banach reais (ou complexos) e L um operador linear (em geral não limitado) com domínio $D(L) \subseteq E$ e imagem $R(L) \subseteq F$. Dado $f \in R(L)$, consideramos a equação

$$Lu = f. \quad (3.1)$$

Para obter aproximações da solução de (3.1), existem vários procedimentos, entre os quais o seguinte:

3.1 Métodos de Projeção

Sejam $(E_n)_{n \geq 1}$ e $(F_n)_{n \geq 1}$, $n \in N$, seqüências de subespaços satisfazendo

$$E_n \subset D(L) \subset E \quad F_n \subset F \quad \forall n \in N$$

Além disso, sejam P_n , operadores de projeção tais que

$$P_n : F \rightarrow F_n \quad \forall n \in N,$$

isto é, para cada $n \in N$, $P_n^2 = P_n$.

Esta estrutura fornece a seguinte sequência de problemas aproximados: para cada $n \in N$, achar $u_n \in F_n$ tal que

$$P_n(Lu_n - f) = 0.$$

Obviamente, escolhas apropriadas dos sub-espços F_n , F_n e dos operadores de projeção fornecem métodos de aproximação. Também é claro que questões acerca da existência da obtenção de u_n , bem como àquelas relativas à convergência de u_n a u , são questões difíceis que dependem das propriedades particulares dos espaços dos operadores envolvidos. Queremos aqui apenas descrever as idéias gerais e passar a discutir uma situação especial daquela acima.

Sejam E , F espaços de Hilbert, $(\phi_j)_{j \in N} \subset D(L)$ e $(\psi_j)_{j \in N} \subset F$ seqüências dadas tais que $(\phi_j)_{j \in N}$ seja completa em E . Para cada $n \in N$, procuramos uma solução aproximada u_n da forma

$$u_n = \sum_{j=1}^n U_j \phi_j, \quad (3.2)$$

satisfazendo

$$(Lu_n - f, \psi_i) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.3)$$

Isto é a exigência de que os resíduos de $Lu_n - f$ sejam ortogonais aos n primeiros elementos da seqüência (ψ_j) . Esta situação corresponde exatamente ao descrito acima com

$$E_n = \text{span}[\phi_1, \dots, \phi_n],$$

$$F_n = \text{span}[\psi_1, \dots, \psi_n]$$

e $P_n : F \rightarrow F_n$ escolhida como a projeção ortogonal sobre o subespaço F_n .

A equação (3.3) fornece um sistema de linear para as incógnitas U_j :

$$\sum_{j=1}^n U_j (L\phi_j, \psi_i) = (f, \psi_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Este método de obtenção de soluções aproximadas é chamado de **método de Petrov-Galerkin**. Observamos que o método de Galerkin padrão é um caso particular do método de Petrov-Galerkin na situação em que $E = F$ e as seqüências são escolhidas tais que $\phi_j = \psi_j$, $\forall j \in N$.

Um caso muito importante do método de Petrov-Galerkin pode ser obtido da seguinte forma: Consideremos $\mathcal{A} : E \rightarrow F$ um operador linear convenientemente escolhido (isto pode depender do problema que está sendo analisado), e, uma vez escolhida a seqüência $(\phi_i) \subset D(L) \subset E$, tomamos $\psi_i = \mathcal{A}\phi_i$.

Com esta escolha a equação (3.3) se torna

$$\sum_{j=1}^n U_j(L\phi_j, \mathcal{A}\phi_i) = (f, \mathcal{A}\phi_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Parte do objetivo deste capítulo é o de apresentar o chamado **método streamline-diffusion** (método das linhas de fluxo) para equações do tipo convecção-difusão, o qual é do tipo Petrov-Galerkin. Nele, o operador $\mathcal{A}$ é tomado como $\mathcal{A} = (I + \delta \vec{\beta} \cdot \nabla)$, onde I é operador identidade sobre $E = H^1$, $\vec{\beta}$ é o campo de velocidades envolvido no transporte convectivo e δ um parâmetro positivo a ser escolhido.

Muitas vezes o problema a ser aproximado aparece naturalmente em uma forma variacional (generalizada), ao invés da forma operacional descrita no início desta seção:

Sejam H_1 e H_2 dois espaços de Hilbert e $a : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear e $F : H_2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma linear. O problema consiste em achar $u \in H_1$ tal que

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_2.$$

Observamos, entretanto, que como H_1 não é necessariamente igual a H_2 , noções usuais no contexto de formas bilineares, tais como a de coercividade devem ser modificadas.

Também é natural nestes problemas utilizar o Método de Petrov-Galerkin. O resultado abaixo, devido a Babuška e Azis [3], fornece a base teórica para a aplicação do método de Petrov-Galerkin ao problema anterior ao generalizar o lema de Lax-Milgram.

Teorema 3.1.1 *Suponhamos que H_1 e H_2 sejam dois espaços de Hilbert com normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, respectivamente. Consideremos uma forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ definida como acima, satisfazendo*

$$(1) |a(u, v)| \geq c_1 \|u\|_1 \|v\|_2 \quad \forall v_1 \in H_1, \quad \forall w \in H_2 ,$$

$$(2) \inf_{u \in H_1} \sup_{v \in H_2} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_1 \|v\|_2} \geq c_2,$$

$$(3) \text{ para todo } u \neq 0 \text{ em } H_1, \sup_{0 \neq v \in H_2} |a(u, v)| > 0,$$

onde c_1, c_2 são constantes positivas. Então, para qualquer $F \in H_2^*$ (dual topológico de H_2), existe uma única $u \in H_1$ tal

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall \quad v \in H_2.$$

Além disso, existe constante $C > 0$ independente de F tal que

$$\|u\|_1 \leq C \|F\|_{H_2^*},$$

onde $\|\cdot\|_{H_2^*}$ denota a norma dual de H_2 .

Observações:

1. A hipótese (1) no teorema acima significa que a forma bilinear é contínua; (2) diz que $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva em um sentido um pouco mais geral do que o usual.
2. Quando H_1 é um subespaço de H_2 , em (2) é suficiente tomar o supremo sobre H_1 , requerendo que

$$|a(v, v)| \geq C_2 \|v\|_{H_1}^2 \tag{3.4}$$

Neste caso, quando $H_1 = H_2$ e (3.4) é satisfeita, o teorema anterior se reduz ao lema de Lax-Milgram.

O método Petrov-Galerkin pode ser analogamente aplicado à formulação variacional acima, levando às seguintes equações aproximadas para a aproximação u_n como em (3.2):

$$\sum_{j=1}^n U_j a(\phi_j, \psi_i) = (f, \psi_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

No caso especial em que a sequência $(\psi_j)_{j \in N}$ é tomada como $\psi_j = \mathcal{A}\phi_j$, as equações aproximadas se tornam:

$$\sum_{j=1}^n U_j a(\phi_j, \mathcal{A}\phi_i) = (f, \mathcal{A}\phi_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

3.2 Técnicas Upwind

3.2.1 Efeitos Upwind em Métodos de Diferenças Finitas

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\epsilon u_{xx} + \gamma u_x = 0, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 1, \end{cases} \quad (3.5)$$

com $\epsilon > 0$ e a constante $\gamma > 0$. Sabemos que a solução exata deste problema é

$$u(x) = \frac{1 - \exp(\frac{x}{\epsilon})}{1 - \exp(\frac{1}{\epsilon})} \quad (3.6)$$

Seja $p = \frac{\gamma}{\epsilon}$ o número de Peclet global e observamos que quando p é pequeno, a solução u é dominada pela difusão e é quase uma função linear desde $x = 0$ (entrada do fluxo) até $x = 1$ (saída do fluxo). Mas, quando p é grande, a solução u é dominada pelo termo convectivo pelo menos em algumas regiões e possui uma camada limite próxima de $x = 1$. Os métodos *upwind* foram desenvolvidos para vencer as dificuldades que se apresentam nos métodos padrões (que apresentavam soluções numéricas oscilatórias).

Faremos uma discretização em diferenças finitas na equação (3.5) para compreender como os termos de diferenças centrais produzem oscilações quando p é grande, ou seja, quando a equação (3.5) tem um caráter mais convectivo que difusivo.

Seja $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$ uma partição uniforme do intervalo $[0, 1]$ com passo h . Além disso, sejam x_{i-1}, x_i, x_{i+1} três pontos consecutivos desta partição.

Utilizando a fórmula de Taylor obtemos

$$u_x = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad (3.7)$$

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1} - u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad (3.8)$$

onde denotamos $u_i = u(ih)$. As expressões (3.7), (3.8) são chamadas de operadores de diferenças centradas de segunda ordem. Então aproximamos a solução u no ponto x_i pela solução numérica U_i no ponto x_i e substituindo os operadores diferenciais da equação pelos correspondentes operadores diferenças, o esquema em diferenças finitas se torna:

$$\frac{\epsilon}{h^2}(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) + \frac{\gamma}{2h}(U_{i+1} - U_i) = 0. \quad (3.9)$$

O esquema (3.9) apresenta consideráveis oscilações, como podemos observar na Figura 3.1 no final desta subsecção.

Definindo $P_i^+ = \frac{U_{i+1} - U_i}{h}$ e $P_i^- = \frac{U_i - U_{i-1}}{h}$, que são as inclinações respectivamente para frente e para trás no ponto x_i , (3.9) pode ser reescrita como

$$P_i^+(\frac{\epsilon}{h} - \frac{\gamma}{2}) = P_i^-(\frac{\epsilon}{h} + \frac{\gamma}{2}) \quad (3.10)$$

Chamemos $P_h = \frac{\gamma h}{\epsilon}$ o número de Peclet local. Observamos que quando P_h é maior do que 2, P_i^+ e P_i^- têm valores com sinais opostos no ponto x_i . Logo, a solução numérica U deve ser oscilatória. Além disso, se $P_h = 2$, concluímos que P_i^- e U são nulos nos pontos interiores, o que é claramente um resultado errado se $u(x) \neq 0$. Quando $P_h < 2$, então P_i^+ e P_i^- têm o mesmo sinal e a solução numérica é razoavelmente bem comportada, aumentando monotonicamente desde $x = 0$ até $x = 1$.

Para eliminar as oscilações descritas acima quando o número de Peclet é grande ($P > 2$), uma possibilidade é modificar (3.9) pela introdução de um termo adicional de difusão (difusão artificial) $s > 0$, substituindo o parâmetro ϵ por $\epsilon + s$ na equação, a fim de reduzir o valor de P_h no caso que seja maior que 2. Neste caso, (3.10) se torna

$$P_i^+(\frac{\epsilon + s}{h} - \frac{\gamma}{2}) = P_i^-(\frac{\epsilon + s}{h} + \frac{\gamma}{2}) \quad (3.11)$$

e, portanto, somamos uma quantidade suficiente a ϵ de tal maneira que o novo número de Peclet local, P_l , seja menor do que 2, isto é

$$P_l = \frac{\gamma h}{\epsilon + s} < 2 \quad (3.12)$$

A solução numérica, com essa modificação não apresenta oscilações; porém, ela perde precisão, o que se manifesta em soluções numéricas bastantes atenuadas nas zonas em que deveria haver transições rápidas. Quando se escolhe $s = \frac{\gamma h}{2}$, obtemos o método upwind clássico (neste caso, *backward difference*) que produz resultados com baixa precisão. É possível interpretar diferenças *upwind* como a diferença central (3.7) mais um esquema de diferença central correspondente a uma difusão artificial com coeficiente $s^* = \frac{\gamma h}{2}$. De fato, temos que

$$\underbrace{\frac{\gamma}{2h}(U_{i+1} - U_{i-1})}_{\text{Dif. Central}} + \underbrace{\frac{\gamma h}{2h^2}(-U_{i+1} + 2U_i - U_{i-1})}_{\text{Dif. Central}} = \underbrace{\frac{\gamma}{h}(U_i - U_{i-1})}_{\text{TermoUpwind}} \quad (3.13)$$

Observamos que os termos de diferenças centrais tem precisão de ordem $O(h^2)$, enquanto que o termo *upwind* tem ordem $O(h)$, acarretando, portanto, uma perda de precisão. Pela expressão (3.13) é possível, assim, interpretar que os métodos de diferenças centrais introduzem uma difusividade negativa. Como o parâmetro s pode ser escolhido arbitrariamente, pergunta-se então qual é a quantidade de difusão s mais adequada a ser introduzida, a fim de se obter um resultado melhor. Prova-se (veja Hugues [15]), neste caso, que a quantidade de difusão mais adequada é

$$s = \frac{\gamma h}{2} \cot\left(\frac{\gamma h}{2\epsilon}\right) - \frac{2\epsilon}{\gamma h}, \quad (3.14)$$

o que permite que a solução numérica de (3.9) seja exata nos nós x_i . A quantidade (3.14) é determinada introduzindo diretamente a solução (3.6) no problema discreto. Existem, porém, técnicas para calcular, em algumas situações específicas, tal difusão artificial “ótima” sem a necessidade de um conhecimento a priori da solução exata.

Agora, observando as Figuras 3.2 e 3.3 (reproduzidas do artigo de Brooks et al.[4]), que fornecem ensaios numéricos correspondentes às aplicações dos esquemas descritos acima, vemos que o gráfico da solução numérica correspondente à diferença central aparece abaixo do gráfico da solução exata (temos o fenômeno chamado *under*

diffusion), enquanto que a solução numérica correspondente ao esquema *upwind* tem o gráfico sobre aquele da solução exata (*over diffusion*). Isto sugere a possibilidade da construção de soluções numéricas “ótimas” considerando adequadamente ponderações adequadas de diferenças centrais e diferenças *upwind*.

— : Solução Exata;

$\oplus$: Solução do esquema upwind; Erro: 0.222 E + 00;

Δ : Solução do esquema com diferenças centradas; Erro: 0.475 E + 00;

$n = 11$; número de Peclet = 0.1000 E + 02; $\epsilon = 0.100E - 01$.

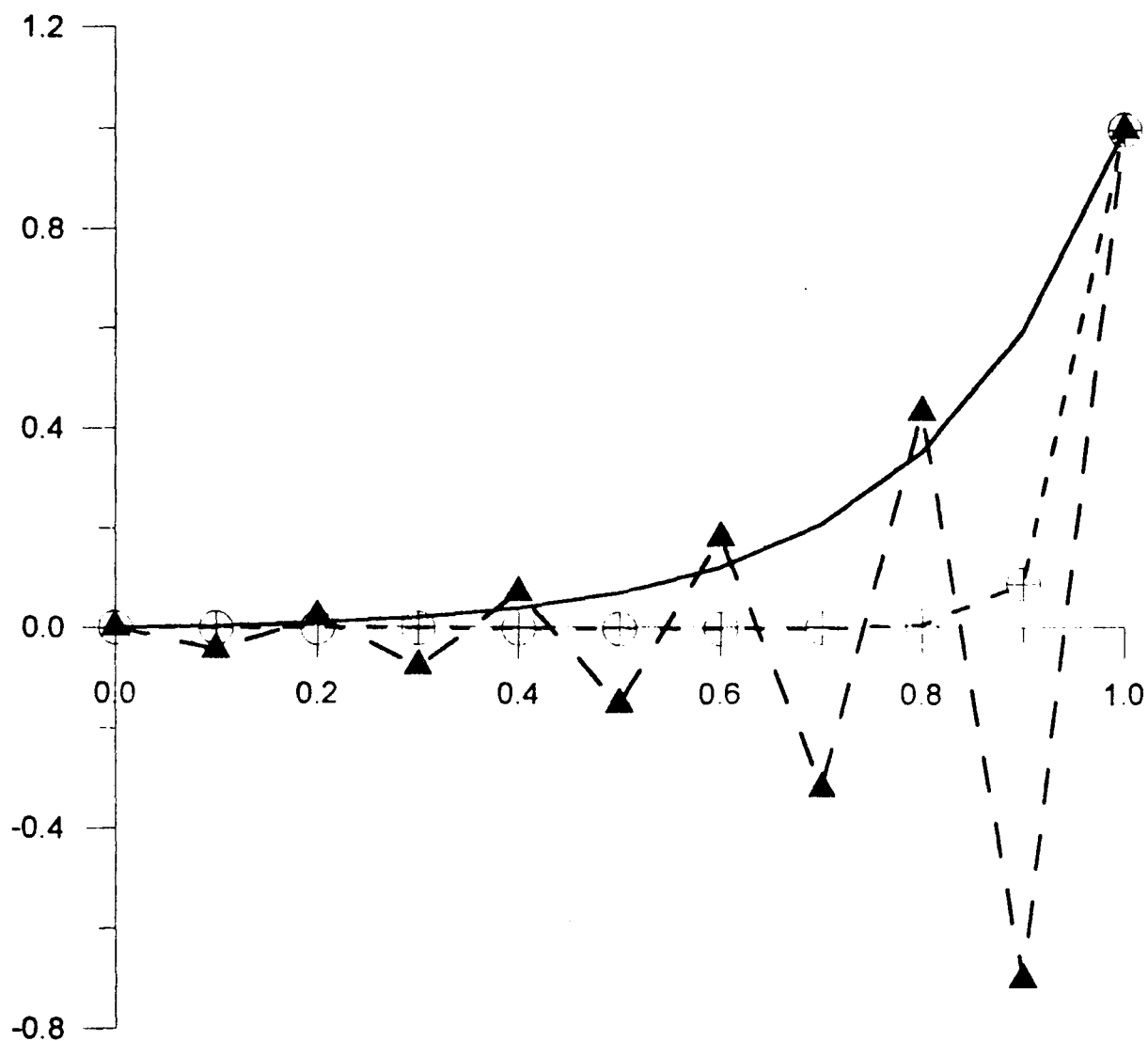


Figura 3.1

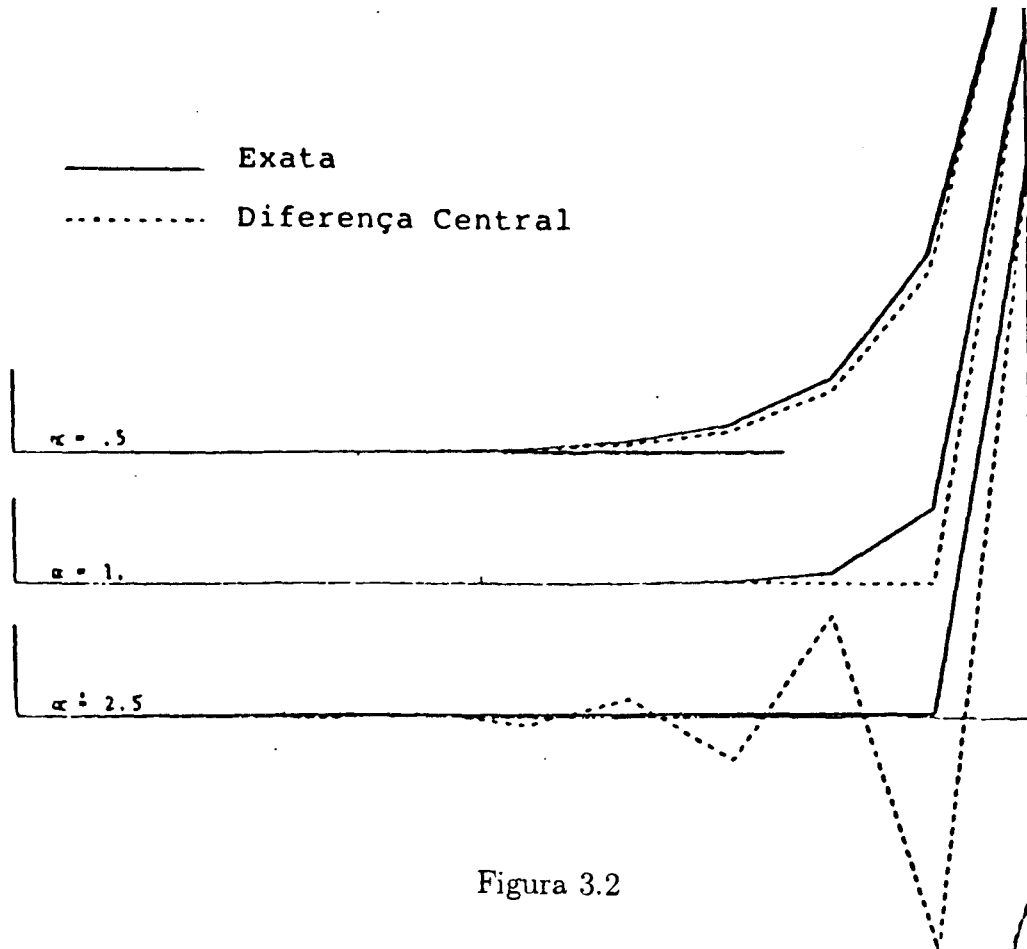


Figura 3.2

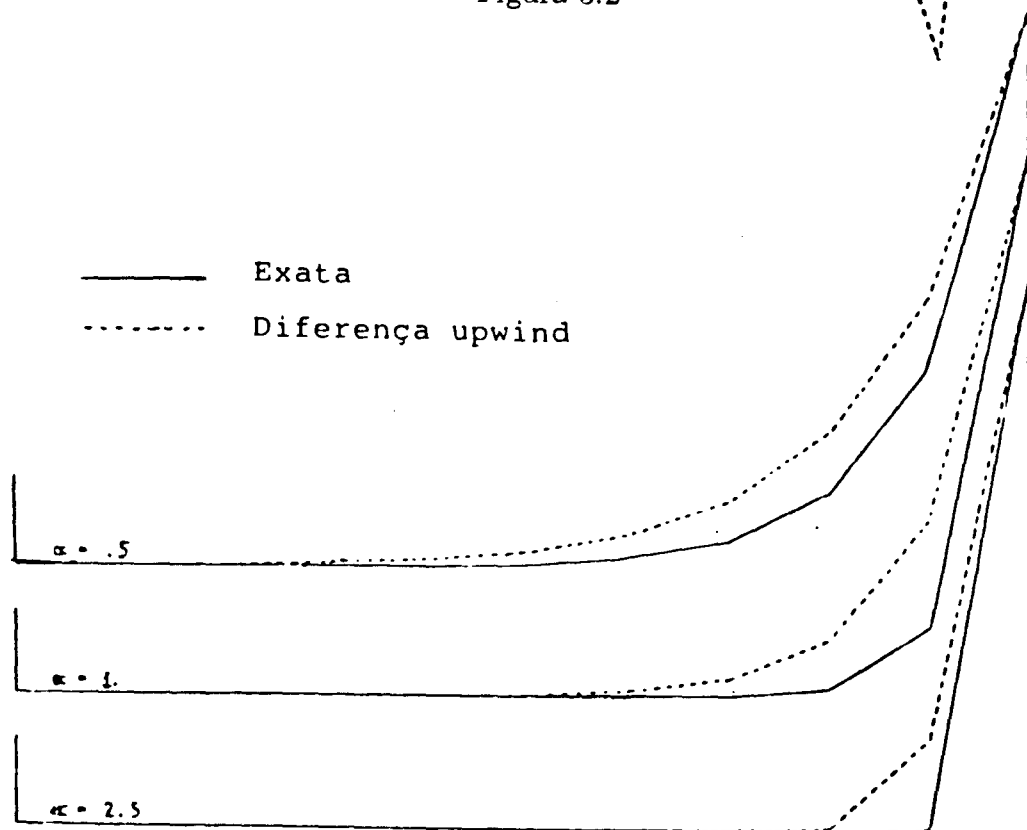


Figura 3.3

3.2.2 Efeitos Upwind em Métodos de Elementos Finitos no Caso Unidimensional

As discretizações do tipo Galerkin para a equação (3.5) dão como resultado final aproximações equivalentes àsquelas obtidas por diferenças centrais, como foi observado no Capítulo 2. Então, não é surpresa que apareçam soluções numéricas oscilatórias ao usá-los em equações de convecção-difusão em que predominem os termos convectivos. Historicamente, os métodos de elementos finitos *upwind* foram inspirados nas técnicas de diferenças finitas *upwind*. Para atingir o efeito upwind no caso de métodos de elementos finitos para um problema unidimensional existem três técnicas básicas:

(i) **Técnica da Difusão Artificial:** A difusão dada pela expressão (3.14) é somada à difusão física; usa-se, então, a discretização convencional de elementos finitos (via método de Galerkin) para balancear a difusão negativa produzida pelo método de Galerkin, (veja Kelly et al.[28]).

(ii) **Técnica da Mudança de Quadratura:** A regra de quadratura numérica é trocada para se atingir o efeito upwind. No caso unidimensional o "ponto de quadratura" simples é escolhido, então, como

$$\xi = \cot\left(\frac{\gamma h}{2\epsilon}\right) - \frac{2\epsilon}{\gamma h}$$

no elemento padrão, (veja Huges [15]).

(iii) **Técnica de Petrov-Galerkin:** A função peso correspondente a um nó é modificada para se obter um peso maior no elemento a montante (*upwind*) do ponto do que no elemento a vazante (*downwind*). Para uma maior informação veja Christie et al. [5] e Heinrich et al. [17].

A aplicação adequada de cada um destes métodos pode produzir soluções numéricas exataa nos nós no caso unidimensional. Estes fatos têm sido bastante estudados e, para uma maior informação sobre as técnicas descritas, veja as referências citadas.

3.2.3 Efeitos Upwind e Crosswind no Caso Bidimensional

A resolução numérica de uma equação de convecção-difusão na forma típica

$$-\epsilon \Delta u + \vec{\beta} \cdot \nabla u = f \quad \text{em } \Omega, \quad (3.15)$$

apresenta sérias dificuldades quando o termo de convecção predomina. Estas mesmas dificuldades também aparecem com termos convectivos correspondentes nas equações de Navier-Stokes na Mecânica de Fluidos e em outras equações de transporte.

De fato, da mesma forma que nas secções anteriores, quando diferenças centrais são empregadas na discretização dos termos convectivos ou, com elementos finitos, o método de Galerkin é aplicado diretamente, os esquemas numéricos resultantes têm os mesmos problemas que antes quando o passo h da malha é tal que o número local de Peclet bidimensional satisfaz

$$\gamma = \frac{\|\vec{\beta}\| h}{\epsilon} > 1 \quad (3.16)$$

onde $\|\vec{\beta}\|$ denota uma norma de $\vec{\beta}$. Então o valor de γ é crítico na determinação do tipo de aproximação a ser usada. A condição (3.14) pode ser expressa equivalentemente como

$$h > \frac{\epsilon}{\|\vec{\beta}\|}. \quad (3.17)$$

Sem perda de generalidade para as discussões que se seguem podemos assumir a partir de agora que $\|\vec{\beta}\| = 1$. Então, conforme descrito acima, teremos problemas quando $h > \epsilon$.

Vimos que os métodos de elementos finitos do tipo upwind resolvem o problema das oscilações no caso unidimensional; no entanto, quando são aplicados a problemas em dimensões espaciais maiores, com $\epsilon < h$, dificuldades extras aparecem.

Uma primeira dificuldade é que em problemas de dimensão maior do que um, em geral não é tão fácil a determinação e o controle de direções a montante (*upwind*) e a jusante (*downwind*) em cada ponto para a adequada montagem dos esquemas numéricos *upwind*. Voltaremos a discutir este ponto posteriormente neste trabalho.

Outra dificuldade é uma excessiva atenuação de camadas de transição rápida por causa, como no caso unidimensional, de excessiva dissipação na direção do fluxo.

Também como no caso unidimensional, é possível tentar diminuir esta atenuação tomando esquemas ponderados como na seção anterior. Porém, a seguir, queremos ressaltar um outro aspecto do problema, característico de problemas multidimensionais.

Nos métodos *upwind*, aparecem também dificuldades por causa de uma excessiva difusão transversal ao fluxo (*crosswind diffusion*), e, de fato, este fenômeno é mais notório quando a malha não esta orientada na direcção do fluxo $\vec{\beta}$. Mostremos a origem deste fenômeno com o exemplo seguinte:

Consideremos a equação bidimensional

$$-\epsilon \Delta u + \vec{\beta} \cdot \nabla u = 0, \quad (3.18)$$

onde $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ é um vetor constante

Serão adotadas as seguintes aproximações para as derivadas parciais

$$\partial_x u \approx \frac{u_{jk} - u_{j-1k}}{\Delta x} \quad (3.19)$$

$$\partial_y u \approx \frac{u_{jk} - u_{jk-1}}{\Delta y} \quad (3.20)$$

$$\partial_{xx}^2 u \approx \frac{u_{j-1k} - 2u_{jk} + u_{j+1k}}{(\Delta x)^2} \quad (3.21)$$

$$\partial_{yy}^2 u \approx \frac{u_{jk-1} - 2u_{jk} + u_{jk+1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.22)$$

onde $u_{jk} = u(j\Delta x, k\Delta y)$ com $j, k = 1, 2, 3, \dots, N$: As expressões (3.19) e (3.18), são as representações *upwind* nas direcções x e y , respectivamente. Substituindo as expressões (3.19)-(3.22) na equação (3.18), obtemos

$$\begin{aligned} & \beta_1 \frac{u_{jk} - u_{j-1k}}{\Delta x} + \beta_2 \frac{u_{jk} - u_{jk-1}}{\Delta y} - \epsilon \frac{u_{j-1k} - 2u_{jk} + u_{j+1k}}{(\Delta x)^2} \\ & - \epsilon \frac{u_{jk-1} - 2u_{jk} + u_{jk+1}}{(\Delta y)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Fazendo um desenvolvimento de Taylor em duas variáveis ao redor do ponto (x_j, y_k) , temos que a equação discreta (3.23) apresenta uma consistência da ordem $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$ com

$$\beta_1 \partial_x u + \beta_2 \partial_y u - (\epsilon + z_x) \partial_{xx}^2 u - (\epsilon + z_y) \partial_{yy}^2 u = 0, \quad (3.24)$$

onde $z_x = 0.5\Delta x\beta_1$, $z_y = 0.5\Delta y\beta_2$.

A equação (3.24) coloca em evidência as difusividades artificiais em cada um dos eixos coordenados, o que é uma extensão direta do caso unidimensional. Reescreveremos (3.24) em um sistema de coordenadas em que um dos novos eixos seja tangencial enquanto que o outro eixo seja ortogonal ao fluxo $\vec{\beta}$. As novas variáveis associadas a este sistema de coordenadas são

$$\xi = \beta_1 x + \beta_2 y \quad (3.25)$$

$$\eta = \beta_2 x - \beta_1 y \quad (3.26)$$

Observamos que (3.25) é a equação das características para (3.18). Agora, a fim de reescrever a equação em termos das novas variáveis, aplicamos a regra da cadeia para expressar as derivadas parciais contidas na equação (3.24) nas coordenadas ξ e η :

$$\partial_x u = \beta_1 \partial_\xi u + \beta_2 \partial_\eta u \quad (3.27)$$

$$\partial_y u = \beta_2 \partial_\xi u - \beta_1 \partial_\eta u \quad (3.28)$$

$$\partial_{xx}^2 u = \beta_1^2 \partial_{\xi\xi}^2 u + 2\beta_1\beta_2 \partial_{\xi\eta}^2 u + \beta_2^2 \partial_{\eta\eta}^2 u \quad (3.29)$$

$$\partial_{yy}^2 u = \beta_2^2 \partial_{\xi\xi}^2 u - 2\beta_1\beta_2 \partial_{\xi\eta}^2 u + \beta_1^2 \partial_{\eta\eta}^2 u \quad (3.30)$$

Substituindo as expressões (3.27)-(3.30) na equação (3.24), obtemos

$$\partial_\xi u - (a\partial_{\xi\xi}^2 u + b\partial_{\eta\eta}^2 u + c\partial_{\xi\eta}^2 u) = 0, \quad (3.31)$$

onde os coeficientes de difusividade são:

$$a = \epsilon + \beta_1^2 z_x + \beta_2^2 z_y,$$

$$b = \epsilon + \beta_2^2 z_x + \beta_1^2 z_y,$$

$$c = 2\beta_1\beta_2(z_x - z_y).$$

Seja agora θ o ângulo que o fluxo $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ faz com o eixo x . Então, lembrando que $\|\vec{\beta}\| = 1$, temos

$$\beta_1 = \cos(\theta)$$

$$\beta_2 = \sin(\theta)$$

Usando estas relações para $\beta_x, \beta_{xy}, \beta_y$, obtemos

$$a = \epsilon + 0.5(\Delta x \cos^3(\theta) + \Delta y \sin^3(\theta)) \quad (3.32)$$

$$b = \epsilon + 0.5(\Delta x \cos(\theta) \sin^2(\theta) + \Delta y \sin(\theta) \cos^2(\theta)) \quad (3.33)$$

$$c = 0.5(\Delta x \cos(\theta) - \Delta y \sin(\theta)) \sin(2\theta). \quad (3.34)$$

Agora, por simplicidade, vamos considerar o caso quando $\Delta x = \Delta y$ (isto é, no caso em que a malha é uniforme).

A expressão (3.33) corresponde ao coeficiente de difusão na direção η normal ao fluxo $\vec{\beta}$. Vemos que b atinge o seu máximo quando $\theta = 45$ graus e é mínimo (nulo) quando $\theta = 0$ graus ou $\theta = 90$ graus (a difusão normal é nula quando o fluxo $\vec{\beta}$ está na direção do eixo x ou y).

Por sua vez, da expressão (3.32), a qual dá o coeficiente de difusão na direção ξ tangencial a β , a atinge o seu máximo quando $\theta = 0$ graus ou $\theta = 90$ graus e o seu mínimo quando $\theta = 45$ graus. Como antes, os principais métodos tipo *upwind* são o método da difusão artificial, que é descrito em Johnson [23], o método da técnica da mudança da quadratura, que é descrito em Hugues [15] e o método da função teste, que é um método do tipo Petrov-Galerkin e é descrito em Huyakorn [18]. Estas formas de produzir efeitos *upwind* apresentam o defeito de proporcionar soluções numéricas com amortecimentos excessivos nas camadas limites de fronteira, o que é interpretado como perda de precisão.

Na próxima seção vamos apresentar um método numérico para equações de convecção pura com boas propriedades de estabilidade e de aproximação.

3.2.4 Um Método Upwind para Equações de Convecção Pura

Agora apresentamos um método chamado de **método de Galerkin-descontínuo** que foi proposto para problemas puramente hiperbólicos, tais como o Problema Reduzido (1.10) e as equações de Euler no caso compressível. Nestas equações, segundo os especialistas, o método tem um comportamento notável (veja Pironneau [37]).

A idéia é a seguinte: Suponhamos que a solução u do problema reduzido (1.10) seja aproximada por funções polinomiais por partes, descontínuas sobre os lados dos elementos. Então, podemos introduzir um esquema *upwind* que calcula os valores da solução aproximada sobre cada elemento, de forma sucessiva e em uma ordem adequada que depende do fluxo, usando informações conhecidas em passos anteriores (envolvendo certas integrais sobre os lados dos valores já calculados da solução aproximada).

Umas das características importantes deste método é que pode ser aplicado a problemas dependentes do tempo usando triangulações espaço-tempo, cujas discretizações levam a esquemas de diferenças finitas explícitos e não-usuais, os quais apresentam boas propriedades de estabilidade e convergência superiores àquelas do método de Galerkin padrão. Para descrever o método no Problema (1.10), consideremos uma triangulação $\{T_h\}$ de Ω e o seguinte espaço de elementos finitos

$$W_h = \{v \in L_2(\Omega) : v|_T \in P_k(T)\}, \forall T \in \{T_h\}$$

que descreve o espaço das funções polinomiais por partes sem exigência de continuidade sobre as fronteiras dos triângulos T da triangulação. Definamos

$$\begin{aligned} (\partial T)_- &= \left\{ x \in \partial T : \vec{n}(x) \cdot \vec{\beta} < 0 \right\} \\ (\partial T)_+ &= \left\{ x \in \partial T : \vec{n}(x) \cdot \vec{\beta} \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

onde $\vec{n}(x)$ denota a normal exterior unitária no ponto x da fronteira ∂T do triângulo T . Além disso, seja S o lado comum de dois triângulos T e T_* e $v \in W_h$. Definimos para todo $x \in S$,

$$[v] = v^+ - v^-$$

onde $v^-(x) = \lim_{s \rightarrow 0^-} v(x + s\vec{\beta})$, $v^+(x) = \lim_{s \rightarrow 0^+} v(x + s\vec{\beta})$.

Então, o método de Galerkin-descontínuo consiste em achar $u_h = \sum_T u_h|_T$ da forma seguinte:

Dado u_h^- sobre $(\partial T)_-$, achar u_h tal que $u_h|_T \in P_k(T)$ e para todo $v \in P_k(T)$ tenhamos

$$(\vec{\beta} \cdot \nabla u_h + u_h, v)_T - \int_{(\partial T)_-} u_h^+ v^+ \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds = (f, v)_T - \int_{(\partial T)_-} u^- v^+ \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds. \quad (3.35)$$

Para ilustrar o método damos a seguir dois exemplos, devidos a Johnson [23], Pag. 197 e 198.

Exemplo 1: Caso estacionário.

Suponhamos que queremos aproximar a solução u o do problema

$$\begin{cases} \partial_y u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \Gamma_- \end{cases} \quad (3.36)$$

sobre a triangulação da Figura 3.4.

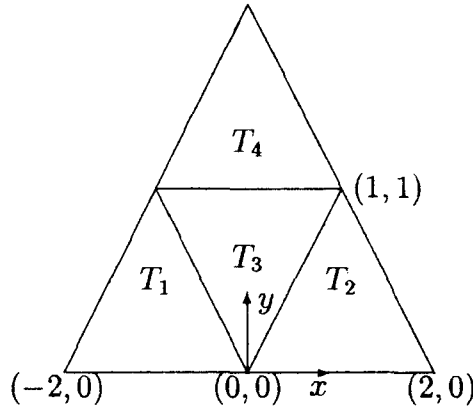


Figura 3.4

Suponhamos também que u_h^- é conhecida em $(\partial T_1)_- \cup (\partial T_2)_-$ e é dada pela expressão

$$u_h^- = \begin{cases} U_1 + V_1 x, & \text{se } -2 < x < 0 \\ U_2 + V_2 x, & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases} \quad (3.37)$$

Com base nisto, vamos determinar u_h^- sobre $(\partial T_4)_-$.

Para isto, notamos que, como u_h^- é conhecida sobre $(\partial T_1)_-$, podemos transportar os seus valores pelas curvas características a um ponto qualquer no interior do triângulo T_1 , isto é,

$$u_h^- = u_h^-(x, 0) \quad \forall \quad (x, y) \in T_1. \quad (3.38)$$

Este argumento permanece válido ainda sobre o triângulo T_2 ; temos, portanto, que $\partial_y u_h = 0$ sobre T_1 e T_2 .

Como achar u_h^- sobre $(\partial T_4)_-$, é equivalente a determinar u_h^- sobre $(\partial T_3)_+$, aplicamos o método de Galerkin-descontínuo sobre o elemento T_3 , e temos que

$$(\partial_y u_h, v)_{T_3} - \int_{(\partial T_3)_-} u_h^+ \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds = - \int_{(\partial T_3)_-} u_h^- v^+ \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds \quad \forall v \in P_1(T_3) \quad (3.39)$$

Se $v(x, y) = w(x)$ onde $w(\cdot)$ é um polinômio de grau ≤ 1 , então $\partial_y v = 0$. Utilizando a fórmula de Green (2.6) temos que

$$(\partial_y u_h, v)_{T_3} = - \int_{(\partial T_3)} u_h v \beta n ds = \int_{(\partial T_3)_+} u_h^- v \beta n ds + \int_{(\partial T_3)_-} u_h^+ v \beta n ds$$

substituindo esta última expressão em (3.39) temos que

$$\begin{aligned} & \int_{(\partial T_3)_+} u_h^- v^+ \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds + \int_{(\partial T_3)_-} u_h^+ v^+ \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds \\ & - \int_{(\partial T_3)_-} u_h^+ v^+ \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds = - \int_{(\partial T_3)_-} u_h^- v^+ \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds. \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\int_{(\partial T_3)_+} u_h^- v \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds = |\vec{\beta} \cdot \vec{n}| \int_{(\partial T_3)_-} u_h^- v ds.$$

Agora, uma vez que $\vec{\beta} \cdot \vec{n}$ é constante, temos que

$$\int_{(\partial T_3)_+} u_h^- v ds = \int_{(\partial T_3)_-} u_h^- v ds. \quad (3.40)$$

Como $(\partial T_3)_-$ é o lado comum entre T_1 e T_3 , podemos usar a parametrização

$$\begin{cases} x = s, \\ y = -s, \text{ com } -1 < s < 0. \end{cases}$$

Quando consideramos o lado comum entre T_2 e T_3 usamos a parametrização

$$\begin{cases} x = s, \\ y = s, \text{ com } 0 < s < 1. \end{cases}$$

Concluimos então que

$$\int_{(\partial T_3)_+} u_h^- v ds = \int_{-1}^1 u_h^-(x, 1) v ds = \int_{-1}^1 (U_3 + v_3) v dx$$

$$\int_{(\partial T_3)_-} u_h^- v ds = \int_{-1}^1 u_h^-(x, 0) v ds.$$

Finalmente, obtemos

$$\int_{-1}^1 (U_3 + V_3 x) v dx = \int_{-1}^0 (U_1 + V_1 x) v dx + \int_0^1 (U_2 + V_2 x) v dx, \quad (3.41)$$

na qual tomaremos $v = 1$ ou $v = x$. Substituindo $v = 1$ e depois $v = x$ em (3.41), temos que

$$U_3 = \frac{U_1 + V_2}{2} + \frac{V_2 - V_1}{4}$$

$$V_3 = \frac{U_2 - U_1}{2} + \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Na forma matricial, podemos reescrever a solução como

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Observa-se que, de (3.40), $u_h^-(x, 1)$, $-1 < x < 1$ pode ser interpretada como a projeção em L_2 de $u_h^-(x, 0)$ sobre o espaço de funções lineares por partes definidas em $(-1, 1)$. Assim,

$$u_h^- = \Pi_h u_h^-(\cdot, 0)$$

Note-se que a solução analítica do problema (3.36) é

$$u(x, 1) = u(x, 0) = g(x).$$

Exemplo 2: Um problema dependente do tempo.

Neste exemplo, ilustramos o método de Galerkin-descontínuo para um problema dependente do tempo, usando uma triangulação espaço-tempo. Para isto, consideremos o problema

$$\begin{cases} \partial_t u + \gamma \partial_x u = 0 & (x, t) \in R \times R^+ \\ u(x, 0) = g(x) & x \in R, \end{cases} \quad (3.42)$$

onde $\beta = (\gamma, 1)$ é constante e $0 \leq \gamma \leq 1$. Definamos agora a triangulação de elementos finitos T_h espaço-tempo por

$$T_h = \{T_{ni}^+, T_{ni}^-, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{e} \quad i = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

onde T_{ni}^+ é um triângulo com vértices (x_{i-1}, t_{n-1}) , (x_i, t_{n-1}) , (x_i, t_n) e os vértices de T_{ni}^- são (x_{i-1}, t_{n-1}) , (x_{i-1}, t_n) , (x_i, t_n) , onde

$$x = ih \quad i = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$t_n = nh \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Para uma melhor compreensão, veja a Figura 3.5.

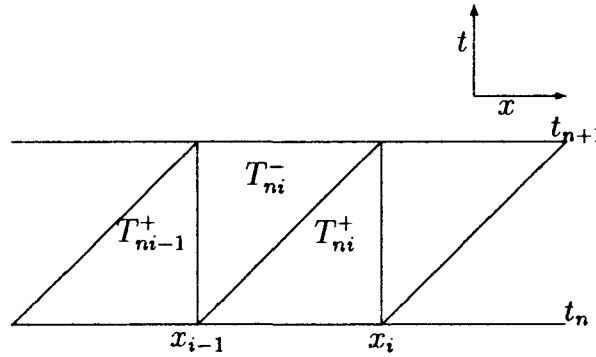


Figura 3.5

calcular u_h sobre qualquer triângulo $T = T_{ni}^+$ se $u_h^-(\cdot, t_{n-1})$ for conhecida e, então, resolver (3.33) para $T = T_{ni}^-$ obtendo $u_h^-(\cdot, t_n)$. É possível representar a solução aproximada do método de Galerkin-Descontínuo como

$$\begin{aligned} u_h^-(\cdot, t_n) &= G_h u_h^-(\cdot, t_{n-1}) \quad , n \geq 1 \\ u_h^-(\cdot, 0) &= \Pi_h g, \end{aligned} \tag{3.43}$$

onde $G_h : W_h \rightarrow W_h$ é um operador linear que independe de n e Π_h denota a projeção L_2 no espaço W_h , que é definido por

$$W_h = \{v \in L_2 : v|_{I_i} \in P_k(I), I_i = (x_{i-1}, x_i), i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Notamos que a representação (3.43) é explícita. Passaremos a explicitar o operador G_h .

Como γ foi escolhido em $[0, 1]$, podemos resolver (3.35) sobre o triângulo $T = T_h^+$ se $u_h^-(x, t_{n-1})$ é conhecida para $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Logo

$$u_h = u_h^-(x - \gamma(t - t_{n-1}), t_{n-1}), \quad (x, t) \in T_h^+ \quad (3.44)$$

Aplicando (3.35) sobre T_{ni}^- , para todo $v \in P_k(T_{ni}^-)$, temos que

$$\int_{(T_{ni}^-)} (\partial_t u_h + \gamma \partial_x u_h) v dx - \int_{(\partial T_{ni}^-)_-} u_h^+ v \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds = - \int_{(\partial T_{ni}^-)_-} u_h^- v \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds. \quad (3.45)$$

Escolhendo $v(x, t) = w(x - \gamma t)$, onde w é um polinômio de grau $\leq k$ sobre $\mathbb{R}$. Aplicando a fórmula de Green (2.6) e levando em conta que a função $v(x, t)$ satisfaz $\partial_t v + \gamma \partial_x v = 0$, temos que (3.45) pode ser escrita como

$$\int_{(\partial T_{ni}^-)_-} u_h^- v \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds = - \int_{(\partial T_{ni}^-)_-} u_h^- v \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds \quad (3.46)$$

Usando (3.44) e fazendo cálculos similares aos feitos no Exemplo 1, temos finalmente que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [u_h^-(x, t_n) - u_h^-(x - \gamma h, t_{n-1})] w(x - \gamma t_n) dx = 0 \quad (3.47)$$

Como w é um polinômio qualquer de grau $\leq k$, temos que

$$G_h = \Pi_h G,$$

onde G denota o operador solução exata

$$(Gv)(x) = v(x - \gamma h).$$

Definamos

$$U^n(x) = [U_1^n, U_2^n, \dots, U_k^n]^T,$$

onde

$$\begin{aligned} U_1^n &= u_h^-(x, t_n) \\ U_2^n &= h\partial_x u_h^-(x, t_n) \\ &\vdots \\ U_{k+1}^n &= h^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} u_h^-(x, t_n) \end{aligned}$$

onde $x \in \{x_{i+1/2} = (i + 1/2)h, \quad i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Temos que U^n define $u_h^-(\cdot, t_n)$ de maneira única sobre (x_i, x_{i+1}) . Como $u_h^-(\cdot, t_{n-1})$ é determinada univocamente sobre (x_{i-1}, x_i) , quando $u_h^-(\cdot, t_{n-1})$ é conhecida sobre (x_{i-2}, x_i) , temos que (3.47) corresponde a um esquema de diferenças finitas da forma

$$U^n(x) = A_1 U^{n-1}(x) + A_2 U^{n-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.48)$$

onde A_1, A_2 são matrizes de ordem $(k + 1) \times (k + 1)$. Obtemos desta forma uma extensão usual do esquema a todo ponto $x \in \mathbb{R}$. Nota-se que quando $k = 0$, temos

$$A_1 = 1 - \gamma, \quad A_2 = \gamma$$

e, portanto, (3.48) corresponde a um esquema *upwind* usual

$$U^n(x) = (1 - \gamma)U^{n-1}(x - h) + \gamma U^{n-1}(x)$$

e, se $k = 1$, temos que

$$\begin{aligned} A_1 &= (1 - \gamma) \begin{pmatrix} 1 & 1/2(\gamma) \\ 6\gamma & 1 - 2\gamma - 2\gamma^2 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1/2(1 - \gamma) \\ -6(1 - \gamma) & -3 + 6\gamma - 2\gamma^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O método de Galerkin-descontínuo foi apresentado pela primeira vez num trabalho de Lesaint e Raviart [31], onde foi aplicado a uma equação de Transporte de Neutrons. Lesaint e Raviart obtiveram uma estimativa de erro da forma

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad (3.49)$$

a qual não é ótima. Mais tarde Johnson e Pitkäranta [27], assumindo que a triangulação T_h é quasi-uniforme e usando a seguinte estimativa de estabilidade

$$\|u_h\|^2 + h \sum_T \|\vec{\beta} \cdot \nabla u\|_T^2 + \sum_S \int_S [u_h]^2 |\vec{\beta} \cdot \vec{n}| ds \leq C(\|f\|^2 + \int_{\Gamma_-} g^2 \vec{\beta} \cdot \vec{n} ds)$$

(onde $\sum_S$ indica a soma sobre todos os lados S dos triângulos $\{T_h\}$), obtiveram uma melhor estimativa da forma

$$\|u - u_h\|_{L_p(\Omega)} \leq Ch^{k+1/2} \|u\|_{W_p^{k+1}(\Omega)} \quad (3.50)$$

onde $W_p^{k+1}(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev usual das funções com derivada de ordem $(k + 1)$ em $L_p(\Omega)$. A estimativa (3.50) é melhor do que a estimativa (3.49) pois permite usar polinômios constantes por partes. Ela foi obtida utilizando-se técnicas variacionais e de Fourier. Usando um método de análise diferente, Richter [39] obteve uma estimativa do tipo

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} \|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \quad (3.51)$$

Observamos que (3.51) é uma estimativa de tipo ótimo, requerendo uma derivada adicional da função u . Na análise feita por Richter, é feita distinção dentre os triângulos da malha, segundo o caso do fluxo $\vec{\beta}$ entrar no elemento por somente um lado (elementos de tipo 1) ou por dois lados (elementos do tipo 2) (veja a Figura 3.6).

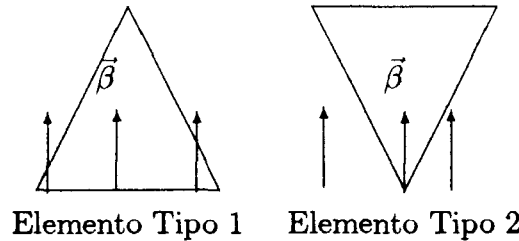


Figura 3.6

Além disso, Richter assume curiosamente a condição

$$|\vec{\beta} \cdot \vec{n}| \geq C > 0,$$

o que indica que a malha não deve estar na direcção do fluxo. A necessidade disto foi confirmada experimentalmente por Peterson [36], usando a mesma equação e uma triangulação similar àquela do Exemplo 1, com $g(x) = x^2$.

O trabalho de Richter sugere, que nos elementos de tipo 2, é produzido um amortecimento do erro que é responsável pela taxa ótima de convergência em (3.51). Este método apresenta características de estabilidade e de aproximações similares às do método *streamline-diffusion*, que apresentaremos na próxima secção.

3.3 O Método Streamline-Diffusion

3.3.1 Apresentação do Método

Agora vamos a apresentar o método de *streamline-diffusion*, que também é conhecido como método SU/PG, aplicado às equações hiperbólicas do tipo transporte (como a equação do Problema Reduzido (1.10)). Consideremos o problema

$$\begin{cases} \vec{\beta} \cdot \nabla u + \sigma u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \Gamma_-, \end{cases} \quad (3.52)$$

onde Γ_- e Γ_+ são definidos como no Capítulo 1.

Além disso, nesta secção estaremos supondo que exista $\bar{\sigma} > 0$ tal que

$$\sigma - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\vec{\beta}) \geq \bar{\sigma} > 0.$$

Para obtermos o método *streamline-diffusion*, tomamos o método de Petrov-Galerkin, com condições de fronteira impostas de forma fraca, e com funções teste da forma $v + h\vec{\beta} \cdot \nabla v$, com $v \in V_h$.

Também, para não sobrecarregar a notação, vamos escrever u_β em vez de $\nabla u \cdot \vec{\beta}$ e β para indicar o vetor $\vec{\beta}$.

Então, o método *streamline-diffusion* corresponde a

Achar $u_h \in V_h$ tal que

$$(u_\beta^h + \sigma u^h, v + hv_\beta) - \langle u^h, v \rangle_- = (f, v + hv_\beta) - \langle g, v \rangle_- \quad v \in V_h \quad (3.53)$$

(a notação usada é a mesma do Capítulo 2). Observamos que a formulação variacional de (3.53) satisfaz o requerimento do método de Petrov-Galerkin, quer dizer que, se u_h for substituída pela solução contínua de (3.52), então a relação (3.53) ainda é válida. Este fato é importante, já que isto significa que o método não está baseado em um problema modificado que produz uma perda de precisão já no início do processo de discretização.

Para analisar o método, definimos a forma bilinear

$$B(w, v) = (w_\beta + \sigma w, v + hv_\beta) - \langle w, v \rangle_-, \quad (3.54)$$

e o funcional linear

$$F(v) = (f, v + v_\beta) - \langle g, v \rangle_- \quad (3.55)$$

Pondo

$$e = u - u^h$$

como notação para o erro cometido e usando as relações (3.52) e (3.53), temos a seguinte equação para o erro

$$B(e, v) = 0 \quad \forall \quad v \in V_h \quad (3.56)$$

Provaremos agora a propriedade de estabilidade da forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$, o que fornecerá uma norma útil para obtermos uma estimativa do erro global.

Lema 3.3.1 : Para qualquer $v \in H^1(\Omega)$ e h suficientemente pequeno, temos

$$B(v, v) \geq C |||v|||^2, \quad (3.57)$$

onde $|||v||| = [h\|v_\beta\|^2 + \bar{\sigma}\|v\|^2 + \frac{1}{2}|v|^2]$

Demonstração: Para todo $v \in H^1(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} B(v, v) &= (v_\beta + \sigma v, v + h v_\beta) - \langle v, v \rangle_- \\ &= (v_\beta, v) + (\sigma v, v) + h \|v_\beta\|^2 + h(\sigma v, v_\beta) - \langle v, v \rangle_- \end{aligned} \quad (3.58)$$

Usando a fórmula de Green (2.6), temos

$$(v_\beta, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle - \frac{1}{2} (v, \operatorname{div}(\beta) v).$$

Levando em conta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle v, v \rangle - \langle v, v \rangle_- &= \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_+ + \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_- - \langle v, v \rangle_- \\ &= \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_+ - \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_- \\ &= \frac{1}{2} |v|_2^2 \end{aligned}$$

já que $\beta \cdot n \geq 0$ em Γ_+ e $\beta \cdot n < 0$ em Γ_- .

Assim, (3.54) torna-se

$$\begin{aligned} B(v, v) &= \frac{1}{2} |v|^2 + (\sigma v, v) - \frac{1}{2} (v, \operatorname{div}(\beta) v) + h \|v_\beta\|^2 + h(\sigma v, v_\beta) \\ &= \frac{1}{2} |v|^2 + (v, \sigma - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\beta) v) + h \|v_\beta\|^2 + h(\sigma v, v_\beta) \end{aligned}$$

Como $\sigma - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\beta) \geq \bar{\sigma} > 0$, temos que

$$B(v, v) \geq \frac{1}{2} |v|^2 + \bar{\sigma} \|v\|^2 + h(\sigma v, v_\beta).$$

Agora, valem

$$h|(\sigma v, v_\beta)| \leq h \|\sigma\|_{L_\infty} \|v\| \|v_\beta\|,$$

e

$$-h \|\sigma\|_{L_\infty} \|v\| \|v_\beta\| \leq h(\sigma v, v_\beta) \leq h \|v\|_{L_\infty} \|v\| \|v_\beta\|$$

Portanto,

$$\begin{aligned} B(v, v) &\geq \frac{1}{2} |v|^2 + \bar{\sigma} \|v\|^2 + h \|v_\beta\|^2 - h \|\sigma\|_{L_\infty} \|v\| \|v_\beta\| \\ &\geq \frac{1}{2} + (\bar{\sigma} - \frac{h}{2} \|\sigma\|_{L_\infty}^2) \|v\|^2 + \frac{h}{2} \|v_\beta\|^2 \\ &\geq \frac{1}{4} |v|^2 + (2\bar{\sigma} - h \|v\|_{L_\infty}) \|v\|^2 + h \|v_\beta\|^2 \end{aligned}$$

Escolhendo h suficientemente pequeno tal que $2\bar{\sigma} - h \|v\|_{L_\infty}^2 \geq \bar{\sigma}$, vem que

$$B(v, v) \geq 2 \left[\frac{1}{4} |v|^2 + \bar{\sigma} \|v\|^2 + h \|v_\beta\|^2 \right].$$

Portanto, $B(v, v) \geq \|v\|^2$.

Observamos que, pela presença do termo $\|v_\beta\|$, a forma bilinear acima tem melhor estabilidade do que a forma bilinear do método Galerkin-Padrão.

Agora estamos em condições de provar a seguinte estimativa básica de erro global

Teorema 3.3.1 : *Sejam u^h satisfazendo (3.53) e u satisfazendo (3.52), então*

$$[h\|\nabla(u - u^h) \cdot \beta\|^2 + \bar{\sigma}\|u - u_h\|^2 + \frac{1}{2}|u - u^h|^2]^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{k+\frac{1}{2}}\|u\|_{k+1} \quad (3.59)$$

Demonstração: Seja $\bar{u}^h$ o interpolante de u que satisfaz as propriedades (2.19) e (2.20). Escrevendo

$$\zeta^h = u - u^h,$$

$$e^h = u^h - \bar{u}^h,$$

e usando (3.54) e (3.57) com $v = e$, temos que, para quaisquer $\epsilon, \sigma, \epsilon^*, \sigma^*$ maiores que zero,

$$\begin{aligned} C\|e\|^2 \leq B(e, e) &= B(e, \zeta^h) - B(e, e^h) = B(e, \zeta^h) \\ &= (e_\beta, \zeta^h) + h(e_\beta, \zeta_\beta^h) + (\sigma e, \zeta_\beta^h) + h(\sigma e, \zeta_\beta^h) - \langle e, \zeta^h \rangle_- \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon\|e_\beta\|^2 + \frac{1}{2\epsilon}\|\zeta^h\|^2 + \frac{h}{2}\delta\|e_\beta\|^2 + \frac{h}{2\delta}\|\zeta_\beta^h\|^2 + \frac{\epsilon^*}{2}\|\sigma e\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\epsilon^*}\|\zeta^h\|^2 + \frac{h}{2}\delta^*\|\sigma e\|^2 + \frac{h}{2\delta^*}\|\zeta_\beta^h\|^2 + \frac{1}{2}\gamma|\zeta^h|^2 \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = C\frac{h}{2}$, $\delta = \frac{c}{2}$, $\epsilon^* = \frac{C}{2h}$, $\delta^* = C/2h$, $\gamma = 1/4$, $c = 1/C$, temos que

$$\begin{aligned} C\|e\|^2 &\leq B(e, e) \leq \frac{ch}{2}\|e_\beta\|^2(ch^{-1} + C)\|\zeta^h\|^2 + (ch^2 + Ch)\|\zeta_\beta^h\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}c\bar{\sigma}\|e\|^2 + \frac{1}{\delta}|e|^2 + c|\zeta_\beta^h|^2 \\ &= \left(\frac{ch}{2}\|e_\beta\|^2 + \frac{1}{2}c\bar{\sigma}|e|^2 + \frac{1}{\delta}|e|^2\right) + (c^{h-1} + C)\|\zeta^h\|^2 \\ &\quad + (ch^2 + Ch)\|\zeta_\beta^h\|^2 + c|\zeta^h|^2 \end{aligned}$$

Usando (2.19) e (2.20) temos $\|e\|^2 \leq Ch^{2k+1}\|u\|_{k+1}^2$.

Observação: O “gap” numérico de uma estimativa de erro num método numérico é definido como se segue: suponhamos que $s \in R$ é tal que existam constantes $C > 0$ e $r \in R$ tais que

$$\|\text{erro}\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^s \|\text{solução exata}\|_{H^r(\Omega)}$$

Então, definimos o “gap” numérico como o número $r - s$.

Assim, os “gaps” nos métodos de Galerkin-padrão e diferenças finitas para problemas

lineares hiperbólicos de transporte têm valor 1. O método *streamline-diffusion* tem precisão maior, com "gap" igual a $\frac{1}{2}$, ainda que estimativa não seja ótima.

Para problemas de tipo elípticos o método de Galerkin-padrão tem "gap" zero.

3.3.2 Um Resultado de Localização

Vamos provar um resultado de localização pra o método *streamline-diffusion*, quando $\vec{\beta}$ constante, com $|\vec{\beta}| = 1$. Dada uma triangulação sobre Ω , o espaço de elementos finitos V_h considerado será o espaço das funções contínuas sobre Ω e que são polinômios de grau $k = 1$ sobre cada triângulo da triangulação.

Este resultado pode ser generalizado para o caso $k \geq 1$ e $\vec{\beta}$ variável; para isto consulte-se Năvert [35], que mostra que a solução numérica produzida pelo método *streamline-diffusion* apresenta um comportamento similar da solução exata do problema contínuo exceto em regiões localizadas ao redor das camadas de transição rápida (mas mesmo ali seu comportamento é bastante bom). Primeiramente consideramos a função peso $\psi(x)$ da forma

$$\psi(x) = \varphi\left(\frac{\theta \cdot x}{\gamma h}\right).$$

Aqui, $\gamma > 0$ é um parâmetro a ser escolhido mais tarde, no decorrer da argumentação.

$\theta \in \mathbb{R}^2$ vetor unitário satisfazendo $\beta \cdot \theta > 0$.

A função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a seguinte função de corte (*cut-off*) com decaimento exponencial (veja Figura 3.7):

$$\varphi(r) = \begin{cases} 2 - \exp(r), & \text{se } r < 0 \\ \exp(-r), & \text{se } r \geq 0 \end{cases}$$

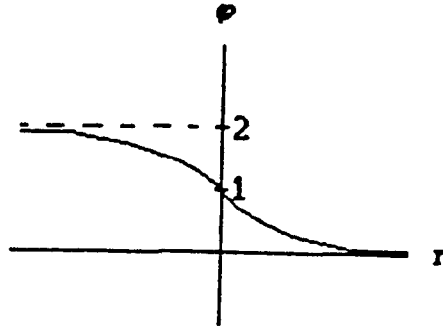


Figura 3.7

A função φ satisfaz as propriedades abaixo para $r \in \mathbb{R}$.

$$-\varphi(r) > 0 \quad (3.60)$$

$$\text{Max}_{|s| \leq 1} \frac{\varphi(r+s)}{\varphi(r)} \leq e \quad (3.61)$$

$$\text{Max}_{|s| \leq 1} \frac{\dot{\varphi}(r+s)}{\dot{\varphi}(r)} \leq e \quad (3.62)$$

$$\dot{\varphi}(r) \leq \varphi(r) \quad (3.63)$$

$$|\ddot{\varphi}(r)| \leq -\dot{\varphi}(r), \quad r \neq 0, \quad (3.64)$$

onde os pontos indicam derivadas.

A função ψ satisfaz para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Max}_{|y| \leq \gamma h} \frac{\psi(x+y)}{\psi(x)} \leq e \quad (3.65)$$

$$\text{Max}_{|y| \leq \gamma h} \frac{\psi_\beta(x+y)}{\psi_\beta(x)} \quad (3.66)$$

$$\psi_\beta(x) = \frac{\beta \cdot \theta}{\gamma h} \dot{\varphi}\left(\frac{\theta \cdot x}{\gamma h}\right) < 0 \quad (3.67)$$

$$-\psi_\beta(x) \leq (\gamma h)^{-1} \psi(x) \quad (3.68)$$

$$\psi_\eta(x) \leq -\frac{1}{\beta \cdot \theta} \psi_\beta(x) \quad (3.69)$$

$$|D^\alpha \psi(x)| \leq -\frac{C}{\beta \cdot \theta} (\gamma h)^{-1} \psi_\beta(x) \quad (3.70)$$

onde o vetor $\eta = (\beta_2, -\beta_1)$ é um vetor unitario perpendicular ao vetor β e a expressão $D^\alpha \psi(x)$, com $\alpha = 2$, indica quaisquer das seguintes derivadas de segunda ordem $\psi_{\beta\beta}$, $\psi_{\beta\eta}(x)$, $\psi_{\eta\eta}(x)$. As propriedades (3.66)-(3.60) são consequência das propriedades (3.60)-(3.64) para φ . Além disso, usamos a notação seguinte:

$$\begin{aligned}\|v\|_\psi &= \left[\int_\Omega v^2 \psi dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ |v|_\psi &= \left[\int_\Gamma v^2 |\beta \cdot n| w ds \right]^{\frac{1}{2}} \\ \| |v| \|_\psi &= \left[h \|v_\beta\|_\psi^2 + \|v\|_{\bar{\sigma}\psi - \psi_{\frac{\beta}{2}}} + \frac{1}{2} |v|_\psi^2 \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Agora estamos preparados para mostrar o resultado seguinte, obtido por Johnson, Nävert e Pitkäranta [24].

Teorema 3.3.2 : *Suponhamos que ψ satisfaz as propriedades (3.66)-(3.70). Se γ é suficientemente grande, existe uma constante C tal que, se $w \in V_h$ e*

$$B(w, v) = (f, v + hv_\beta) \quad \forall v \in V_h, \quad (3.71)$$

então $\| |w| \|_\psi \leq C \|f\|_\psi$.

Antes de provar o resultado acima, faremos alguns comentários.

A relação $\| |w| \|_\psi \leq C \|f\|_\psi$ mostra que o efeito de uma fonte no problema discreto decai como $\exp(-\frac{d}{\gamma h})$ na direção *crosswind*, onde d é a distância da fonte. Este resultado pode ser resumido em uma estimativa de tipo local

$$\| |u - u^h| \|_{L_2(W)} \leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \left[\|u\|_{H^{k+1}(U)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(\Gamma)} \right], \quad (3.72)$$

onde $W \subset U$ e a distância de um ponto $x \in W$ a $\Omega \setminus U$ é $O(h \log(\frac{1}{h}))$ nas direções não ortogonais a β e $O(h^{\frac{1}{2}} \log(\frac{1}{h}))$ na direção *crosswind*.

Se $\bar{x} \in U$, $x = \bar{x} - s\beta$ com $s > 0$ tal que $x \in \Omega$, então $x \in U$. Em outras palavras, $\partial U_- \subset \Gamma_-$ (consulte-se a Figura 3.8 abaixo), onde ∂U_- denota a parte da fronteira de U onde entra o fluxo.

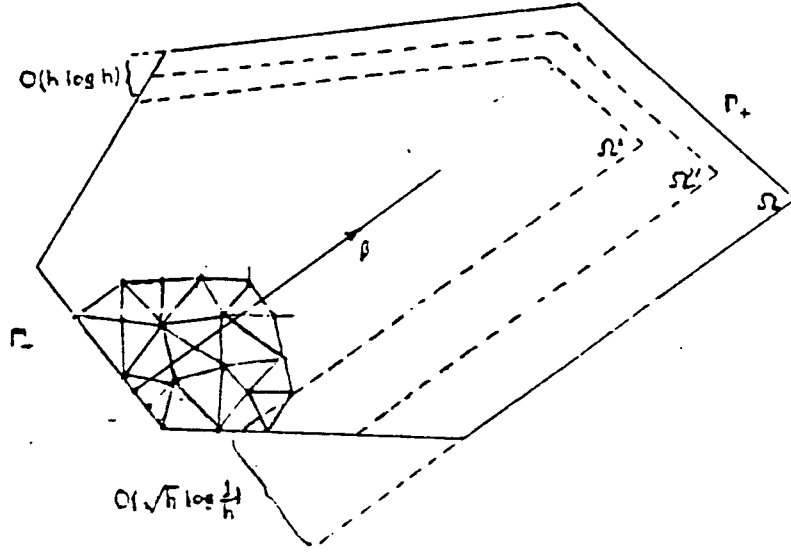


Figura 3.8

Observamos que este resultado implica que o efeito de uma descontinuidade da solução exata sobre uma característica ficará limitada a uma região de largura $O(h^{\frac{1}{2}} \log(\frac{1}{h}))$ ao redor da característica (camada numérica), e não polui globalmente a solução numérica. Observamos também que o decaimento na direção *crosswind* é mais lento do que na direção *upwind*. Isto mostra que o problema na direção *crosswind* ainda persiste. Este fato possivelmente esteja refletido na estimativa de erro que é não ótima, com a perda de um "gap" igual a um $\frac{1}{2}$. Existem tentativas de trabalhar de modo a melhorar o decaimento na direção *crosswind* (veja, por exemplo, Johnson et al:[26], Nijima [32]).

Mostraremos agora como se produz o decaimento nas direções não ortogonais a β , a partir da expressão $\|w\|_{\psi} \leq C\|f\|_{\psi}$.

Consideramos uma função f com suporte em

$$H_d = \{x \in \mathbb{R}^2 : \theta \cdot x \geq d\},$$

com $d > 0$ (veja a Figura 3.9).

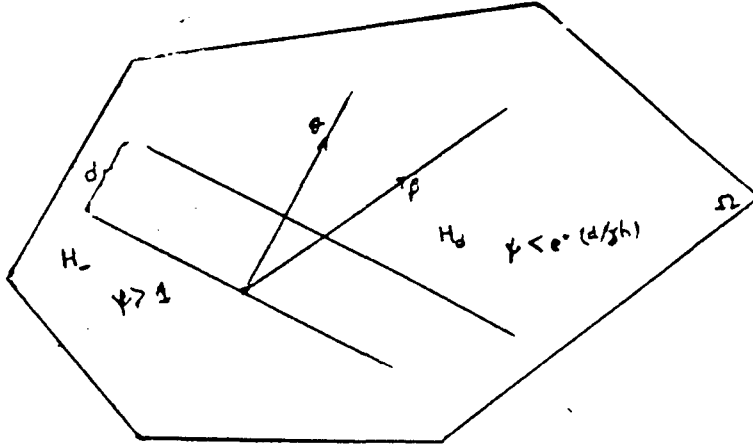


Figura 3.9

Então,

$$\|w\|_\psi^2 \leq C \|f\|_\psi^2 \leq \|f\|_\beta^2 = C \int_{H_d} f^2 \psi dx = C \int_{H_d} f^2 e^{\frac{-\theta \cdot x}{\gamma h}} dx.$$

Mas $\theta \cdot x \geq d$ implica $-\theta \cdot x \leq -d$ e obtemos que

$$C \int_{H_d} f^2 e^{\frac{-\theta \cdot x}{\gamma h}} dx = C e^{\frac{-d}{\gamma h}} \int_{H_d} f^2 dx = C e^{\frac{-d}{\gamma h}} \|f\|^2.$$

Logo,

$$\|w\|_\psi \leq C e^{\frac{-d}{\gamma h}} \|f\|^2.$$

Como $\psi > 1$ em $H_- = \{x \in \mathbb{R}^2 : \theta \cdot x < 0\}$ significa que o efeito em H_- de uma fonte com suporte em H_d decai como $O(\exp(\frac{-d}{\gamma h}))$.

Observamos que a condição $\theta \cdot x > 0$ para definir a função peso permite obter este

decaimento na direção $-\theta$ com componente positiva na direção *upwind* $-\beta$.

Demonstração do Teorema: Consideramos a fórmula de Green da forma seguinte

$$(w_\beta, w\psi) = -(w, w_\beta\psi) - (w, w\psi_\beta) + \langle w, w\psi \rangle. \quad (3.73)$$

Assim, temos que

$$B(w, w\psi) = (w_\beta, w\psi) + (\sigma w, w\psi) + h(w_\beta, w\psi_\beta) + h(\sigma w, (w\psi)_\beta) - \langle w, w\psi \rangle_-.$$

A expressão (3.73) é equivalente a

$$(w_\beta, w\psi) = \frac{1}{2} \langle w, w\psi \rangle - \frac{1}{2} (w, w_\beta\psi) \quad (3.74)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle w, w\psi \rangle - \langle w, w\psi \rangle_- &= \frac{1}{2} \langle w, w\psi \rangle - \frac{1}{2} \langle w, w\phi \rangle_- \\ &= \frac{1}{2} |w|_\beta^2 \end{aligned} \quad (3.75)$$

Pondo as relações (3.74) e (3.75) na fórmula de $B(\cdot, \cdot)$, temos

$$\begin{aligned} B(w, w\psi) &= \frac{1}{2} |w|_\psi^2 + \frac{1}{2} \|w\|_{-\psi_\beta}^2 + \|w\|_{\sigma\psi}^2 + h \|w_\beta\|_\psi^2 + h(w_\beta, w\psi_\beta) \\ &\quad + h(\sigma w, (w\psi)_\beta) \\ &\geq \|w\|_\psi^2 + h(w_\beta, w\psi_\beta) \end{aligned}$$

Agora, por (3.67), temos que

$$\begin{aligned} |h(w_\beta, w\psi_\beta)| &= h \int_\Omega w_\beta (-\psi_\beta)^{\frac{1}{2}} w (-\psi_\beta)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\leq h \left[\int_\Omega w_\beta^2 (-\psi_\beta) dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega w^2 (-\psi_\beta) dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= h \|w_\beta\|_{-\psi_\beta} \|w\|_{-\psi_\beta} \leq \frac{h}{2} \epsilon \|w_\beta\|_{-\psi_\beta}^2 + \frac{h}{2\epsilon} \|\nabla w\|_{-\psi_\beta}^2. \end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon = 4$ e usando as propriedade de ψ , temos

$$|h(w_\beta, w\psi_\beta)| \leq 4h\gamma^{-1} \|w_\beta\|_\psi^2 + \frac{h}{8} \|w\|_{-\psi_\beta}^2.$$

Agora,

$$h(\sigma w, (w\psi)_\beta) = h(\sigma w, w_\beta\psi) + h(\sigma w, w\psi_\beta)$$

e, usando (3.68), temos que

$$|h(\sigma w, w\psi_\beta)| = \left| \int_{\Omega} \sigma w^2 (-\psi_\beta) dx \right| \leq \gamma^{-1} \left| \int_{\Omega} \sigma w^2 \psi dx \right| \leq \gamma^{-1} \|w\|_{\sigma\psi}^2$$

e

$$\begin{aligned} |h(\sigma w, w\psi_\beta)| &= h \left| \int_{\Omega} \sqrt{\sigma\psi} w w_\beta \sqrt{\sigma\psi} dx \right| \\ &\leq h \left[\int_{\Omega} \sigma \psi w^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega} w_\beta^2 \sigma \psi dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq h \|w\|_{\sigma\psi} \|w_\beta\|_{\sigma\psi} \\ &\leq \frac{h\delta}{2} \|w\|_{\sigma\psi}^2 + \frac{h}{2\delta} \|w_\beta\|_{\sigma\psi}^2 + \gamma^{-1} \|w\|_{\sigma\psi}^2. \end{aligned}$$

Logo, compensando estes termos e escolhendo $\delta = \frac{1}{h}$, temos que

$$B(w, w\psi) \geq \frac{1}{2} |v|_\psi^2 + \frac{3}{4} \|w\|_{-\psi_\beta}^2 + \left(\frac{1}{2} - \gamma^{-1}\right) \|w\|_{\sigma\psi}^2 + h \left(1 - \frac{h}{2} + 4\gamma^{-1}\right) \|w_\beta\|_\psi^2,$$

e para γ suficientemente grande tal que $\frac{3}{4} \geq (\frac{1}{2} - \gamma^{-1})$, temos que

$$B(w, w\psi) \geq \frac{1}{2} |w|_\psi^2 + \left(\frac{1}{2} - \gamma^{-1}\right) \|w\|_{-\psi_\beta}^2 + h \left(1 - \frac{h}{2} - 4\gamma^{-1}\right) \|w_\beta\|_\psi^2.$$

Concluimos que $B(w, w\psi) \geq C \|w\|_\psi$, onde a constante C vale

$$C = \min \left\{ \left(\frac{1}{2} - \gamma^{-1}\right), \left(1 - \frac{h}{2} - 4\gamma^{-1}\right) \right\}.$$

Seja agora $(w\psi)^h \in V_h$ o interpolante usual de $w\psi$ nos nós de $\{T_h\}$, então

$$B(w, (w\psi)^h) - (f, (w\psi)^h) + h(w\psi)_\beta^h = 0,$$

e temos que

$$B(w, w\psi) = B(w, w\psi - (w\psi)_h) + (f, (w\psi)_h) + h(w\psi)_\beta^h. \quad (3.76)$$

Faremos primeiro uma estimativa para o termo $(w_\beta, w\psi - (w\psi)^h)$ incluído na expressão $B(w, w\psi - (w\psi)^h)$. Temos que

$$|(w_\beta, w\psi - (w\psi)^h)| \leq \|w_\beta\|_\psi \|w\psi - (w\psi)^h\|_{\psi^{-1}}, \quad (3.77)$$

por um resultado análogo a (2.19) para um triângulo T , juntamente com (3.65). Somando sobre todos os triângulos, temos

$$\|w\psi - (w\psi)^h\|_{\psi^{-1}}^2 \leq Ch^4 \sum_{T \in T_h} \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha(w\psi)\|_{\psi^{-1}}^2 \quad (3.78)$$

Como a função w é linear sobre cada $T \in \{T_h\}$, temos que

$$\begin{aligned} \|w\psi - (w\psi)^h\|_{\psi^{-1}}^2 &\leq Ch^4(\|w_\beta\psi_\beta\|_{\psi^{-1}}^2 + \|w_\eta\psi_\beta\|_{\psi^{-1}}^2 + \|w_\beta\psi_\eta\|^2 \\ &\quad + \|w_\eta\psi_\eta\|_{\psi^{-1}}^2 + \sum_{|\alpha|=2} \|wD^\alpha\psi\|_{\psi^{-1}}^2) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Agora, estimaremos os termos da direita de (3.79): usando (3.68), temos que

$$\begin{aligned} \|w_\beta\psi_\beta\|^2 &= \int_{\Omega} w_\beta^2\psi_\beta^2\psi dx \leq \int_{\Omega} w_\beta^2(\gamma h)^{-2}\psi^2\psi^{-1}dx \\ &= (\gamma h)^{-2} \int_{\Omega} w_\beta^2\psi dx = (\gamma h)^{-2} \|w_\beta\|_{\psi}^2 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Portanto,

$$\|w_\beta\psi_\beta\|^2 \leq (\gamma h)^{-2} \|w\|_{\psi}^2 \quad (3.81)$$

Lembramos agora a chamada estimativa inversa, Ciarlet [6]:

$$\|\nabla v\|_{L_2(T)} \leq Ch^{-1} \|v\|_{L_2(T)} \quad \forall v \in P_1(T) \quad (3.82)$$

e, usando (3.68), temos

$$\|w_\eta\psi_\beta\|_{\psi^{-1}}^2 \leq Ch^{-2} \int_{\Omega} w^2\psi_\beta dx \leq C\gamma^{-1}h^{-3} \int_{\Omega} w^2\psi\psi^{-1}\psi_\beta dx.$$

Então, temos que

$$\|w_\eta\psi_\beta\|_{\psi^{-1}} \leq C\gamma^{-1}h^{-3} \|w\|_{-\psi_\beta}^2, \quad (3.83)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \|w_\eta\psi_\eta\|_{-\psi^{-1}} + \|w_\beta\psi_\eta\|_{\psi^{-1}}^2 &= \int_{\Omega} (w_\eta\psi_\beta)^2\psi^{-1}dx + \int_{\Omega} (w_\beta\psi_\eta)^2\psi^{-1}dx \\ &\leq Ch^{-2} \int_{\Omega} w^2\psi_\beta^2\psi^{-1}dx + Ch^{-2} \int_{\Omega} w^2\psi_\eta\psi^{-1}dx \\ &\leq Ch^{-1} \int_{\Omega} w^2\psi_\beta^2\psi^{-1}dx \\ &\leq C\gamma^{-1}h^{-3} \int_{\Omega} w^2\psi_\beta dx \\ &= C\gamma^{-1}h^{-3} \|w\|_{-\psi_\beta}^2. \end{aligned}$$

Para um valor conveniente de γ , concluimos então que

$$\|w_\eta\psi_\eta\|_{\psi^{-1}}^2 + \|w_\beta\psi_\eta\|_{\psi^{-1}}^2 \leq C\gamma^{-1}h^{-3} \|w\|_{-\psi_\beta}^2. \quad (3.84)$$

Finalmente, por (3.67), temos

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=2} \|w D^\alpha w\|_{-\psi^{-1}}^2 &= \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} w^2 (D^\alpha w)^2 \psi^{-1} dx \\ &\leq \sum_{|\alpha|=2} (\gamma h)^{-2} \frac{C}{\theta \cdot \beta} \int_{\Omega} w^2 (-\psi_\beta)^2 \psi^{-1} dx \\ &\leq C \gamma^{-1} h^{-3} \|w\|_{-\psi_\beta}^2\end{aligned}$$

e, assim,

$$\sum_{|\alpha|=2} \|w D^\alpha \psi\|_{-\psi^{-1}}^2 \leq C \gamma^{-1} h^{-3} \|w\|_{-\psi_\beta}^2 \quad (3.85)$$

Usando as estimativas (3.81), (3.83), (3.84), (3.85), a expressão (3.78) torna-se

$$\begin{aligned}\|w\phi - (w\psi)^h\|_{\psi^{-1}}^2 &\leq Ch^4 \left[(\gamma h)^{-2} \|w_\beta\|_\psi^2 + \bar{C} \gamma^{-1} h^{-3} \|w\|_{-\psi_\beta}^2 \right] \\ &= Ch^2 \gamma^{-1} \|w_\beta\|_\psi^2 + C \bar{C} \gamma^{-1} h \|w\|_{-\psi_\beta}^2\end{aligned}$$

Para γ suficientemente grande e h pequeno, temos que

$$\|w\phi - (w\psi)_\eta\|_{\psi^{-1}}^2 \leq C^* h \gamma^{-1} (h \|w_\beta\|_\psi^2 + \|w\|_{-\psi_\beta}^2),$$

com a constante $C^* = \max \{C \gamma^{-1}, C \bar{C}\}$.

Pela desigualdade de Minkowsky, temos

$$\|w\psi - (w\psi)_h\|_{\psi^{-1}} \leq Ch^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{-1}{2}} (h^{\frac{1}{2}} \|w_\beta\|_\psi + \|w\|_{-\psi_\beta}) \quad (3.86)$$

Então, a estimativa para (3.77) é

$$\begin{aligned}|(w_\beta, w\psi - (w\psi)^h)| &\leq Ch^{\frac{1}{2}} (\gamma)^{\frac{-1}{2}} \left[h^{\frac{1}{2}} \|w_\beta\|_{-\psi_\beta} \right] \|w_\beta\|_\psi \\ &= Ch^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{-1}{2}} \left[h^{\frac{1}{2}} \|w_\beta\|_\psi^2 + \|w_{-\psi_\beta}\| \|w_\beta\|_\psi \right] \\ &\leq C \gamma^{\frac{-1}{2}} \|w\|_\psi\end{aligned}$$

Concluimos que

$$h \|\sigma w\|_\psi \|w_\beta\|_\psi \leq \frac{\epsilon h}{2} \|\sigma w\|_\psi^2 + \frac{h}{2\epsilon} \|w_\beta\|_\psi^2$$

e

$$\sqrt{h} \|\sigma w\|_\psi \|w\|_{-\psi_\beta} \leq \frac{\delta \sqrt{h}}{2} \|\sigma w\|_\psi^2 + \frac{\sqrt{h}}{2\delta} \|w\|_{-\psi_\beta}^2$$

Escolhendo agora $\epsilon = \frac{1}{h}$ e $\delta = \frac{1}{\sqrt{h}}$, obtemos

$$h \|\sigma w\|_\psi \|w_\beta\|_\psi \leq \frac{1}{2} \|\sigma w\|_\psi^2 + \frac{h}{2} \|w_\beta\|_\psi^2 \leq \frac{1}{2} \|w\|_{\bar{\sigma}\psi}^2 + h \|w_\beta\|_\psi^2, \quad (3.87)$$

$$\sqrt{h}\|\sigma w\|_\psi\|w_\beta\|_\psi \leq \frac{1}{2}\|\sigma w\|_\psi^2 + \frac{h}{2}\|w\|_{-\psi_\beta}^2 \leq \frac{1}{2}\|w\|_{\bar{\sigma}\psi}^2 + \|w\|_{-\frac{\psi_\beta}{2}} \quad (3.88)$$

Somando (3.87) e (3.88), obtemos

$$\begin{aligned} h\|\sigma w\|_\psi\|w_\beta\|_\psi + \sqrt{h}\|\sigma w\|_\psi\|w_\beta\|_\psi &\leq h\|w_\beta\|_\psi^2 + \|w\|_{\bar{\sigma}\psi - \frac{\psi_\beta}{2}} \\ &\leq h\|w_\beta\|_\psi^2 + \|w\|_{\bar{\sigma}\psi - \frac{\psi_\beta}{2}} + \frac{1}{2}\|w\|_\psi^2 = \|w\|_\psi^2 \end{aligned}$$

A função peso ψ definida antes da prova do teorema permitiu obter o decaimento nas direções não ortogonais a β . Para obter o decaimento na direção *crosswind* η , define-se a função Φ como sendo

$$\Psi = \varphi\left(\frac{\eta \cdot k}{\gamma\sqrt{h}}\right) \quad (3.89)$$

Observa-se que Ψ_β é identicamente nula, o que impede que se usem as relações (3.67) e (3.68).

A função (3.89) satisfaz (3.69) e (3.70) e, além destas, uma propriedade suplementar:

$$|D^\alpha \psi(x)| \leq (\gamma\sqrt{h})^{-|\alpha|} \psi(x) \quad |\alpha| \leq 1, x \in \Omega$$

Usa-se então o mesmo raciocínio anterior para concluir que os efeitos decaem como $O(e^{\frac{-d}{\gamma\sqrt{h}}})$ na direção *crosswind*.

Observações:

1. A hipótese de $\{T_h\}$ ser quasi-uniforme não é essencial, pois a formulação utilizando *streamline-diffusion* pode ser generalizada da forma seguinte:

$$(u_\beta^h + \sigma u^h, v + \delta v_\beta) - \langle u^h, v \rangle_- = (f, v + \delta v_\beta) - \langle g, v \rangle_- \quad \forall v \in V_h, \quad (3.90)$$

com $\delta = h_t$ o maior diâmetro dos elementos da malha. Neste caso o resultado do Teorema 3.3.2 ainda é válido e o resultado de localização pode ser estendido para o caso de famílias de triangulações $\{T_h\}$ localmente quasi-uniformes, isto é famílias para as quais existe uma função suave $H(x)$ tal que: existem constantes positivas c e C tais que

$$chH(x) \leq h_t \leq ChH(x), \quad x \in T \left| \frac{D^\alpha H(x)}{H(x)} \right| \leq C \quad x \in \Omega \quad |\alpha| \leq 2$$

Nestas condições, o equivalente do Teorema (3.3.2) pode ser demonstrado utilizando a função peso ψ definida como $\psi(x) = \varphi(\frac{\theta \cdot x}{\gamma H(x)})$, para obter o decaimento nas direções ortogonais a β e $\psi(x) = \varphi(\frac{\eta \cdot x}{\gamma H(x)})$ para obter o decaimento na direção *crosswind*.

2. No caso $\epsilon = 0$ e β constante, fazendo $\bar{\sigma} = \min_{x \in \Omega} \sigma(x)$, a estabilidade do problema discreto com controle na norma $L_2(\Omega)$ pode ser obtida do Teorema (3.3.2), escolhendo a função peso

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{|\beta|^2} \exp(-2(1 + |\bar{\sigma}|)\beta \cdot x) \psi(x),$$

onde $\psi(x)$ é definida como antes.

Observamos aqui que $\bar{\psi} \leq \bar{\sigma} \bar{\psi} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_\beta$ e disto obtemos

$$\bar{\sigma} \|w\|^2 = \|w\|_{\bar{\sigma}}^2 \leq \|w\|_{\bar{\sigma} \bar{\psi} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_\beta}^2$$

A estabilidade $L_2(\Omega)$ é obtida pela presença do termo $\|\cdot\|_{\bar{\sigma} \bar{\psi} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_\beta}$ na norma $\|\cdot\|_{\bar{\psi}}$.

3. Quando o fluxo β não é constante, o parâmetro δ pode ser escolhido como

$$\delta = \begin{cases} \frac{h_t}{\beta(P_t)}, & \text{se } h_t \leq \frac{\epsilon}{|\beta(P_t)|} \\ 0, & \text{se } h_t \geq \frac{\epsilon}{|\beta(P_t)|} \end{cases}$$

onde P_t é um ponto do triângulo T .

A condição $h_t > \frac{\epsilon}{|\beta(P_t)|}$ significa que existe predominância do termo convectivo no elemento $T \in T_h$.

No caso $\delta = 0$ observamos que é aplicado o método de Galerkin-Padrão nas regiões de maior difusividade.

3.4 Problema de Convecção-Difusão

Nesta seção estamos interessados em tratar o “Problema Completo”, isto é, aquele com $0 < \epsilon \ll h$:

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta u + u_\beta + \sigma u = f & \text{sobre } \Omega \\ u = g & \text{em } \Gamma_-, \end{cases} \quad (3.91)$$

onde assumimos que g é identicamente nula para facilitar a exposição. Para obter a formulação variacional do problema (3.19), consideramos a função teste $v + \delta v_\beta$ com $v \in V_h$. Procedendo como antes, o problema torna-se então:

Achar $u^h \in V_h$ tal que para toda $v \in V_h$ tem-se

$$-\epsilon \delta(\Delta u^h, v_\beta) + \epsilon(\nabla u^h, \nabla v) + (\sigma u^h + u_\beta^h, v + \delta v_\beta) = (f, v + \delta v_\beta). \quad (3.92)$$

Aqui fazemos $\delta = \bar{C}h$, se $\epsilon < h$ com $\bar{C}$ suficientemente pequeno e a ser escolhido convenientemente, e $\delta = 0$ se $\epsilon \geq h$. O termo $(\Delta u^h, v_\beta)$ é definido como $\sum_{T \in T_h} \int_T \Delta u^h v_\beta dx$, já que as funções Δu^h e v_β estão bem definidas no interior de cada triângulo. As estimativas obtidas anteriormente no caso $\epsilon = 0$ e o resultado de localização podem ser estendidos para o método (3.92) com $\epsilon \ll h$.

A forma bilinear $B_\epsilon(\cdot, \cdot)$ definida por

$$B_\epsilon(u, v) = \epsilon \delta(\Delta u, v_\beta) + (u_\beta + \sigma u, v + \delta v_\beta) \quad (3.93)$$

possui boas propriedades de estabilidade. De fato, aplicando a estimativa inversa (3.82) temos que

$$\begin{aligned} |\epsilon \delta(\Delta u, u_\beta)| &\leq \epsilon \delta \sum_{T \in T_h} |(\Delta u, u_\beta)| \leq \epsilon \delta C h_{-1} \|\nabla u\| \|u_\beta\| \\ &\leq \frac{\gamma}{2} C \epsilon \delta h^{-1} \|\nabla u\|^2 + \frac{C \epsilon \delta h^{-1}}{2\gamma} \|u_\beta\|^2 \end{aligned}$$

Denotamos $\gamma = \frac{1}{C \delta h^{-1}}$, obtemos que

$$|\epsilon \delta(\Delta u, u_\beta)| \leq \frac{\epsilon}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{C^2 \epsilon \delta h^{-2}}{2} \delta \|u_\beta\|^2 \quad (3.94)$$

Fazendo $u = v$ em (3.93) e usando (3.94), vem que

$$\begin{aligned}
B_\epsilon(u, u) &= -\epsilon\delta(\Delta u, u_\beta) + \epsilon\|\nabla u\|^2 + (u_\beta + \sigma u, v + \delta v_\beta) \\
&= -\epsilon\delta(\Delta u, u_\beta) + \epsilon\|\nabla\|^2 + h\|u_\beta\|^2 + \bar{\sigma}\|u\|^2 \\
&\geq -\frac{\epsilon}{2}\|\nabla u\|^2 - C\frac{\epsilon\delta h^{-2}}{2}\delta\|u_\beta\|^2 h\|u_\beta\|^2 + \bar{\sigma}\|u\|^2 + \epsilon\|\nabla u\|^2 \\
&\geq \frac{\epsilon}{2}\|\nabla u\|^2 + \bar{\sigma}\|u\|^2 + (1 - \frac{\epsilon\delta h^{-2}C^2}{2})\delta\|u_\beta\|^2
\end{aligned}$$

onde $\bar{\sigma} = \min_{x \in \Omega} \sigma(x)$.

Definindo $\bar{C}$ tal que $C^2\bar{C} < \frac{1}{2}$, obtemos:

$$C^2\epsilon\delta h^{-2} = C^2\bar{C}\epsilon h h^{-2} \leq C^2\bar{C} < \frac{1}{2},$$

e então vem o resultado,

$$B_\epsilon(u, u) \geq \frac{1}{2}(\epsilon\|\nabla u\|^2 + \delta\|u_\beta\|^2 + \|u\|^2).$$

Observação:

Para triangulações $\{T_h\}$ que não sejam necessariamente quasi-uniforme, pode-se escolher $\delta_t = \bar{C}h_t$, de tal forma que a estabilidade da forma bilinear $B_\epsilon(\cdot, \cdot)$ não seja perdida. O método *streamline-diffusion* ainda apresenta alguns problemas na resolução de camadas internas e de fronteira quando elas existem no problema contínuo. Porém, este método tem um comportamento melhor do que outros métodos de elementos finitos. Um aspecto interessante deste método é que, ainda que os efeitos de transições rápidas no problema contínuo sejam propagados na direção as linhas de corrente (*streamlines*), nem sempre esta direção é a direção *upwind* mais adequada para se ter um esquema eficiente. Para ver isto, consideremos o vetor $\vec{\alpha}$ tal que $\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \lambda\vec{w}$ com $\vec{w} \cdot \nabla u^h = 0$. Então vale

$$\vec{\alpha} \cdot \nabla u^h = \vec{\beta} \cdot \nabla u^h$$

Isto quer dizer que a direção do vetor $\vec{\alpha}$ com o vetor $\vec{w}$ escolhido ortogonal ao ∇u^h ainda preserva a direção das linhas de corrente $\vec{\beta}$. Esta observação foi feita em [33], abrindo a possibilidade de melhorar o método *streamline-diffusion*. Para isto,

modifica-se a função teste $v + \delta v_\beta$ acrescentando um novo termo; toma-se como função teste o seguinte:

$$v + \delta v_\beta + \delta \bar{\beta} \cdot \nabla v, \quad (3.95)$$

onde $\bar{\beta} = \frac{u_\beta^h}{|\nabla u|^2} \nabla u^h$. Isto é, $\bar{\beta}$ é a projeção ortogonal de β sobre ∇u^h .

O termo adicionado em (3.95) é chamado de *shock-capturing*. Também

$$|\bar{\beta}| = \cos(\theta) |\beta|, \quad (3.96)$$

onde θ é o ângulo formado pelos vetores ∇u^h e β .

De (3.96), observamos que quando ∇u^h e β são quase-ortogonais, o tamanho de $|\beta|$ é quase nulo. Portanto, a atenuação do termo *shock-capturing* é quase-nula na direção *crosswind*.

Pela presença do termo ∇u^h em (3.95), o método é não linear. Os parâmetros δ e $\bar{\delta}$ são escolhidos de tal forma que

$$\delta = O\left(\frac{h}{|\bar{\beta}|}\right)$$

e

$$\bar{\delta} = O\left(\frac{h^2}{|\beta|^2}\right).$$

Para problemas dependentes do tempo, em [24] é definida uma única direção *up-wind* apropriada. No caso estacionário, esta direção coincide com aquela do método *streamline-diffusion com shock-capturing*.

Bibliografia

- [1] Axelsson, O., Stability and error estimates of Galerkin finite element approximations for convection-diffusion equations, *IMA; Journal of Numerical Analysis*, 1 (1981), pp.329–345.
- [2] Axelsson, O. and V.A. Barker, Finite element solution of boundary value problems, theory and computation, *Computer Science and Applied Mathematics*, Academic Press, INC, (1984)
- [3] Babuska, I., and Aziz, A.K., Survey lectures on the mathematical foundations of finite element method, in *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to the Partial Differential Equations* (ed. A.K. Aziz), Academic Press (1972), pp. 3–363.
- [4] Brooks, A., Hughes, T.J.R., A Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes Equations, *Comp. Math. Mech. and Engrg.*, vol. 30 (1982), pp. 199–259.
- [5] Christie, I., Griffiths, D.F., Mitchell, A.R., Finite element method for second order differential equations with significant first derivatives, *Int. Journal Num. Meth. in Ing.*, vol. 10 (1976), pp. 1389–1396.
- [6] Ciarlet, P., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland. (1978).
- [7] Cullen, M.J.P., and Morton, K.W., Analysis of evolutionary error in finite element and other Methods, *Journal of Computation Physics*, vol. 34, (1980), pp. 245–267
- [8] Donea, J., Taylor, A., Galerkin methods for convection transport problems, *Int. Journal Num. Meth. Engrg.*, vol. 20, (1984), pp. 101–119.

- [9] Galeão, C.C., Dutra do Carmo, E.G, A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems. *Comp. Meth. Mech. and Engrg*, vol. 68, (1988), pp. 83–95.
- [10] Ikeda, T, Maximum Principle in Finite Elements Models for Convection-Diffusion Phenomena, North-Holland, Amsterdam, (1989).
- [11] Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Hulbert, G.M., A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares methods for advective-diffusive equations, *Comp. Meth. Mech. and Engrg* vol. 73, (1989), pp. 173–189.
- [12] Hughes, T.J.R., Mallet, M., Mizukami, A., A new finite element for computational fluid dynamics: II, Beyond SUPG, *Comp. Meth. Mech. and Engrg*, vol. 54, (1986), pp. 344–355.
- [13] Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Harari, I., Mallet, M., Shakib, F. and Spelce, T.E., Finite element methods for high-speed flows: consistent calculation of boundary flux, AIAA 25-th Aerospace Sciences Meeting, Paper N 87-0556, Reno, Nevada, (1987).
- [14] Hughes, T.J.R., Shakib, F., Computational aerodynamics and the finite element methods, AIAA 26-th Aerospace Sciences Meeting, Paper 88-0031, Reno, Nevada, (1988).
- [15] Hughes, T.J.R., A simple Scheme for Developing Upwind Finite Elements, *Int. Jour. Num. Meth. Engrg*, vol. 12, (1978), pp. 1359–1365.
- [16] Heinrich, J.C., Zienkiewicz, O.C., Quadratic finite element scheme for two-dimensional convective transport, *Int. Jour. Num. Meth. Engrg*, vol. 11, (1977), pp. 1831–1842.
- [17] Heinrich, J.C., Huyakorn, P.S., Zienkiewicz, O.C., Mitchell, A.R., An upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equation, *Int. Jour. Num. Meth. Engrg*, vol. 11, (1977), pp. 131–143.

- [18] Huyakorn, P.S., Solution of steady-state transport equation using upwind finite element scheme, *Appl. Math. Modeles*, vol. 1, (1977), pp. 189–195.
- [19] Hansbo, P. and Szepessy, A., A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg*, vol. 84, (1990), pp. 175–192.
- [20] Johnson, C., Saranen, J., Streamline diffusion finite element methods for incompressible Euler and Navier-Stokes Equations, *Math. Comp.*, vol. 4, (1986), pp: 1–18.
- [21] Johnson, C., Szepessy, A. and Hansbo, P., On the convergence of shock-capturing streamline diffusion finite element method for hiperbolic conservation law, *Math. Comp.*, vol. 54, (1990), pp. 1–29.
- [22] Johson, C. and Szepessy, A., On the convergence of a finite element method for a nonlinear hiperbolic conservation law, *Math. Comp.*, vol. 49, (12987),pp. 427–444.
- [23] Johnson, C., Numerical Solution of partial Differential Equations by the Finite Element Method, Cambridge University Press, (1990).
- [24] Johnson, C., Nävert, V., Pitkäranta, J., Finite element methods for linear hyperbolic problems, *Comp. Mech. Meth. Engrg*, vol. 45, (1984), pp. 285–312.
- [25] Johnson, C., Nävert, V., An Analysis of some finite element methods for advection-diffusion problems, in *Analytical and Numerical Approaches to Asymptotic in Analysis Mathematics Studies*, North-Holland, vol. 47.
- [26] Johnson , C., Schatz, A.H., Wahlbin, L.B., Crosswind smears and pointwise errors in streamline diffusion finite elements methods, *Math. Compn.*, vol. 49, (1987), pp. 25–38.
- [27] Johnson, C., Pitkäranta, J., An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation, *Math. of Comput.*, vol. 46, num 173 (1986), pp. 1–26.

- [28] Kelly, D.W., Makazawa, S., Zienkiewicz, O.C., Heinrich, J.C., A note upwinding and anisotropic balancing dissipation in the finite element approximations to convective-diffusion problems, *Int. Jour. Meth. Engrg.*, vol. 15, (1980), pp. 1705–1711.
- [29] Krasnosel'skii, M.A., Vaimikko, G.M., Zabreiko, P.P., Ruttiskii, Y.A.B., Stetsenko, V. Ya., Approximate Solution of Operator Equations, Wolters-Noordhoff Publishing Groningen, (1978).
- [30] Leonard, B.P., A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Math. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 19, (1979), pp. 59–98.
- [31] Lesaint, P. and Raviart, P.A., On a finite element method for solving the neutron transport equation, in Mathematical Aspect of Finite Elements in Partial Differential Equation, C. de Boor, ed., Academic Press, New York, (1974), pp. 89–123.
- [32] Nijjima, K., Pointwise error estimates for streamline-diffusion finite elements scheme, *Num. Math.*, vol. 56, (1990), pp. 707–719.
- [33] Mizukami, A., Hughes, T.J.R., A Petrov-Galerkin finite element method for convection-dominated flows: an accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle, *Comp. Meth. Mech. Engrg.*, vol. 50, (1985), pp. 181–193.
- [34] Morton, K.W., Parrot, A.K., A generalized Galerkin method for first order hyperbolic equations, *Journal of Compt. Physics*, vol. 36, (1980), pp. 249–270.
- [35] Nävert, V., A Finite Element Method for Convection-Diffusion Problems, Ph.D. Thesis, Department of Computer Science, Chalmers University of Technology, (1982).
- [36] Peterson, Todd E., A note on the convergence of the discontinuous Galerkin method for scalar hyperbolic equation., *Math. of Comput.*, vol. 28, num. 1, (1991), pp: 133–140.

- [37] Pironneau, O., *Finite Element Methods for Fluids*, John Wiley & Sons. (1989).
- [38] Raviart, P.A., Thomas, J.M., *Introduction à L'Analyse Numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson. (1988).
- [39] Richter, Gerard R., An optimal-order error estimate for the discontinuous Galerkin method., *Math. of Comput.*, vol.50, num. 181 (1988), pp. 75–88.
- [40] Segal, A., Aspects of numerical methods for elliptic singular perturbation problems, *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, vol. 3, 3, (1982).
- [41] Strikwerda, J., Iterative methods for numerical solution of second order elliptic equations with large first order terms, *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, vol. 1, (1980), pp. 119–130.
- [42] Szepessy, A., A Convergence of the Streamline-Diffusion Finite Element Method for Conservation Laws, Ph.D. Thesis, Mathematics Dept., Chalmers University of Technology, (1989).
- [43] Szepessy, A., Convergence of a shock-capturing streamline-diffusion finite element method for scalar conservation laws in two space dimensions, *Math. Comp.*, vol. 53, (1989), pp. 510–527.
- [44] Strang, G., Fix, G.J., *An Analysis of the Finite Element Method*, Printece-Hall, (1973).
- [45] Thomée, V., Some interior estimates for semidiscrete Galerkin approximations for parabolic equations, *Math. Comput.*, vol. 33, (1979), pp. 37–62.
- [46] Vishek, M.I., and Lyusternik, L.A., Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter, *Uspekki Mat. Nouk*, (1957), *Amer. Math. Soc. Transl. Ser.*, vol.2, (1962).