

DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM
ESCOAMENTO DE UM FLUÍDO NEWTONIANO
ENTRE DUAS PLACAS POROSAS COM
GRADIENTE DE PRESSÃO PULSANTE

MÉRICLES THADEU MORETTI

Orientador

Prof. Dr. RAKESH KUMAR BHATNAGAR

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dezembro - 1979.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Ao meu saudoso pai

À minha mãe, Sãra

À minha esposa, Saça

Ao meu filho, Dãmian

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. RAKESH KUMAR BHATNAGAR pela orientação e estímulos recebidos durante o transcorrer desta pesquisa.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO E EQUAÇÕES GERAIS	
CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS	
CAPÍTULO III - SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES	
CAPÍTULO IV - DISCUSSÕES DOS RESULTADOS	
REFERÊNCIAS	

RESUMO

Nesta pesquisa discutiremos as soluções das equações de Navier-Stokes e da energia para um fluido viscoso incompressível entre duas placas paralelas e fixas com gradiente de pressão pulsante.

Assumimos ainda que em uma das placas o fluido está sendo injetado com velocidade constante e a placa oposta absorve com a mesma velocidade.

As soluções da equação da energia obtidas sob dois tipos de condições térmicas, isto é: (i) as placas são mantidas na temperatura constante e diferentes, (ii) uma das placas se mantém na temperatura constante e a outra placa está isolada.

As soluções analíticas envolvem 4 parâmetros físicos e os gráficos para as soluções estáveis e instáveis são exibidos variando esses parâmetros.

De um modo geral a solução estável para ambos tipos de condições térmicas variam quase linearmente entre as placas.

Observamos também que para maiores valores do parâmetro de frequência, o perfil da solução instável para o tipo (i) de condição térmica, perde a forma parabólica achatada. E para o tipo (ii), é interessante observar que a solução instável diminui com o aumento da frequência, tanto para a velocidade de injeção nula ou não.

Em geral, para uma certa frequência fixa, notamos que a temperatura aumenta com o número de Reynolds. E só acontecendo o mesmo para o número de Prandtl, quando a frequência que fixarmos for menor entre as quais escolhemos para o problema proposto.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO E EQUAÇÕES GERAIS

1.1 - As equações de movimento de um fluido incompressível viscoso são dados pelas seguintes equações, usando notação tensorial cartesiana:

EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

EQUAÇÃO DE MOVIMENTO:

$$\rho \left[\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{U_j \partial U_i}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i \quad (2)$$

onde $X_i = (x_1, x_2, x_3)$ representa a força externa, T_{ij} o tensor de tensão que representa a ação do elemento de fluido em x_i no tempo t , ρ é a densidade do fluido e U_i representa o vetor de velocidade.

Num escoamento em que consideramos as forças externas ausentes, escrevemos $X_i = 0$.

A equação (1) também é chamada Equação de Conservação da Massa, nos diz que a variação de massa num mesmo sistema é igual a massa a ele fornecida, num mesmo tempo.

As equações (2) são chamadas Equações de Navier-Stokes, descrevendo o movimento de um fluido viscoso. Essas equações também são chamadas Equações da Quantidade de Movimento, dizendo que

a variação da quantidade de movimento de um sistema é igual a razão em que a quantidade de movimento é fornecido pela aplicação de forças de campo e forças de contato, num mesmo tempo.

No escoamento bidimensional consideramos todas as propriedades e características do fluido como função apenas de duas coordenadas x_1 e x_2 e do tempo t , não dependendo da direção x_3 , por exemplo, no instante t .

Examinando com cuidado as equações (2), vemos que para o estudo deste fluido devemos achar a solução de 4 equações diferenciais parciais não lineares sob dadas condições de contorno e iniciais. Nem sempre a solução dessas equações são fáceis, por isso nos restringimos a um caso mais simples.

Além disso as 4 equações envolvem 10 incógnitas; 6 componentes de tensor de tensão, 3 componentes da velocidade e a pressão isotrópica.

Fica evidente que se o tensor de tensão pudesse ser expresso em termos da velocidade e suas derivadas, o estudo do movimento tornaria mais fácil.

Em 1845, Sir Gabriel Stokes enunciou o seguinte, que é fundamental para a dinâmica dos fluídos: "Num mesmo tempo t , o tensor de tensão é função do tensor de deformação E_{ij} ", onde o tensor de deformação é simétrico e dado por:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) .$$

1.2 - FLUIDO PERFEITO

A equação do tensor de tensão para um fluido perfeito (ou fluido não viscoso) é dado por:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} , \quad (3)$$

onde p significa a pressão isotrópica e δ_{ij} é o Delta de Kronecker.

A equação (3) foi dada por Bernoulli em 1738 e foi o ponto de partida para o estudo da hidrodinâmica.

1.3 - FLUIDO NEWTONIANO

A equação em que o tensor de tensão é expresso por:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu E_{ij} , \quad (4)$$

onde μ representa a viscosidade do fluido, é chamada Equação Constitutiva de Newton.

Os fluidos que obedecem a equação (4) são chamados Fluidos Newtonianos.

Observemos que a equação constitutiva de Newton tem apenas um parâmetro físico μ de viscosidade que não depende do estado de movimento e que o fluido em repouso tem apenas pressão hidrostática isotrópica.

1.4 - AS EQUAÇÕES NAS COORDENADAS CARTESIANAS

Tendo em vista a equação constitutiva (4) e as equações

de movimento (2) e usando a convenção de soma, o sistema de quatro equações (1) e (2) nas coordenadas (x,y,z) , passam à forma:

EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] &= \rho X_1 - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u, \\ \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] &= \rho X_2 - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v, \\ \rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] &= \rho X_3 - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w, \end{aligned} \quad (6)$$

onde ∇^2 é o operador de Laplace e é dado por:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \text{ e onde } u, v, \text{ e } w \text{ são componentes do}$$

vetor de velocidade U , nas direções x, y e z respectivamente.

Desejamos informações sobre a temperatura, por isso escrevemos a equação da energia:

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] = k \nabla^2 T + \phi, \quad (7)$$

onde T representa a temperatura e k e c_p a condutividade e o calor específico respectivamente, e $\phi = E_{ij} \cdot T_{ij}$ é chamada Função Dissipação e é a taxa em que as tensões de cisalhamento realizam trabalho irreversível sobre o fluido.

Tendo em vista a equação constitutiva (4) e usando a convenção de soma, a equação (7) passa à forma:

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = k \nabla^2 T + \phi, \quad (8)$$

onde ϕ em coordenadas cartesianas é dada por:

$$\begin{aligned} \phi = 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

No próximo capítulo faremos a formulação dos problemas físicos em consideração e obteremos as soluções sob várias condições térmicas.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS

Consideramos o escoamento laminar bidimensional de um fluido newtoniano incompressível entre duas placas paralelas e porosas distantes h uma da outra e supomos as forças externas ausentes.

Suponhamos ainda que em uma das placas o fluido está sendo injetado com velocidade constante V e a placa oposta absorve com a mesma velocidade.

Escoamento em placas porosas é importante na refrigeração por transpiração e no processo de difusão gasosa. No caso do escoamento ser pulsante, tem a sua importância na diálise de sangue em rins artificiais [1].

A equação (5) nos diz que u é função de y e t , e ainda v é identicamente igual a V .

Em vista das considerações acima as equações (6) tornam-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad (9)$$

e

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad , \quad (10)$$

onde $\alpha = \frac{\mu}{\rho}$ é a viscosidade cinemática.

Do fato que o fluido é viscoso, as condições de contorno são dadas por:

$$u = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad y = h. \quad (11)$$

A equação da energia (8) passa à forma:

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (12)$$

A solução da equação (12) será dada sob dois tipos de condições térmicas:

TIPO (i)

$$T = T_1 \quad \text{em} \quad y=0 \quad \text{e} \quad T = T_2 \quad \text{em} \quad y = h. \quad (13)$$

TIPO (ii)

$$T = T_1 \quad \text{em} \quad y=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad y = h. \quad (14)$$

As condições do tipo (i) significam que a placa $y=0$ está mantida a temperatura constante T_1 e a placa $y=h$ a T_2 .

Por outro lado as condições do tipo (ii) significam que a placa $y = 0$ está mantida a temperatura constante T_1 e no entanto a placa $y = h$ está isolada.

Analisaremos o problema exposto acima sob quatro situações distintas.

PROBLEMA 1: Quando a velocidade $V \neq 0$ e o gradiente de pressão é pulsante e dado por:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = A + B e^{i\omega t} \quad , \quad (15)$$

onde A e B são constantes conhecidas e ω a frequência.

Deste modo a equação (9) passa à forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial y} = -A - B e^{i\omega t} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad (16)$$

e a equação da energia será dada pela equação (12).

PROBLEMA 2: Quando a velocidade $V = 0$ e o gradiente de pressão é dado pela equação (15).

Assim a equação (9) passa à forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -A - B e^{i\omega t} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad (17)$$

e a equação da energia (12) toma à forma:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad . \quad (18)$$

PROBLEMA 3: Consideramos o escoamento estacionário, a velocidade $V \neq 0$ e o gradiente de pressão constante, ou seja:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = A. \quad (19)$$

Deste modo a equação (9) passa à forma:

$$V \frac{du}{dy} = -A + \alpha \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad (20)$$

e a equação da energia (12) se torna:

$$\rho c_p V \frac{dT}{dy} = k \frac{d^2 T}{dy^2} + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (21)$$

PROBLEMA 4: Consideramos o escoamento estacionário, a velocidade $V = 0$ e o gradiente de pressão dado pela equação (19).

Assim a equação (9) passa à forma:

$$0 = -A + \alpha \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad (22)$$

e a equação de energia (12) toma à forma:

$$0 = \frac{k}{c_p} \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{\mu}{c_p} \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (23)$$

Esse escoamento é chamado, Escoamento de Poissonville.

A equação (10) justifica o gradiente de pressão dado pelas equações (15) e (19).

CAPÍTULO III

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DO PROBLEMA 1.

3.1 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (16)

Para acharmos a solução da equação (16) sob as condições (11), escrevemos o campo de velocidade na forma:

$$u(y,t) = \bar{u}(y) + \tilde{u}(y,t) = \bar{u}(y) + f(y)e^{i\omega t} , \quad (24)$$

onde $\bar{u}(y)$ representa a parte estável e $\tilde{u}(y,t)$ a parte instável.

Substituindo a equação (24) na equação (16), obtemos:

$$i\omega f e^{i\omega t} + V \left[\frac{d\bar{u}}{dy} + e^{i\omega t} \frac{df}{dy} \right] = -A - B e^{i\omega t} ,$$
$$+ \alpha \left[\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} + e^{i\omega t} \frac{d^2f}{dy^2} \right] . \quad (25)$$

Comparando os termos estáveis e instáveis e simplificando, obtemos respectivamente:

$$V \frac{d\bar{u}}{dy} = -A + \alpha \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} , \quad (26)$$

$$i\omega f + V \frac{df}{dy} = -B + \alpha \frac{d^2 f}{dy^2} \quad , \quad (27)$$

sujeitas as condições:

$$\bar{u} = 0 \quad \text{e} \quad f = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad y = h. \quad (28)$$

3.1.1 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO ESTÁVEL (26)

Antes de calcularmos a solução desta equação a tornare -
mos adimensional fazendo $\bar{u} \equiv \bar{u} \frac{Ah}{V}$ e $\eta = \frac{y}{h}$ obtendo então:

$$\bar{u}'' - R\bar{u}' - R = 0 \quad , \quad (29)$$

onde as plicas representam a derivada com respeito a η e $R = \frac{Vh}{\alpha}$
o número de Reynolds.

As condições de contorno passam à forma:

$$\bar{u}(\eta) = 0 \quad \text{para} \quad \eta = 0 \quad \text{e} \quad \eta = 1. \quad (30)$$

Usando o método dos coeficientes a determinar e as con-
dições de contorno (30), vem:

$$\bar{u}(\eta) = \frac{e^{R\eta} - 1}{e^R - 1} - \eta \quad . \quad (31)$$

Essa solução é a mesma que Berman [2] obteve para o es-
coamento estacionário de um fluido newtoniano.

3.1.2 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO INSTÁVEL (27)

Obtemos a equação adimensional fazendo $f \equiv f \frac{h^2 B}{\alpha}$ e $\eta = \frac{y}{h}$, tornando-se:

$$f'' - Rf' - iM^2 f - 1 = 0 \quad , \quad (32)$$

onde $M^2 = \frac{h^2 \omega}{\alpha}$ é o parâmetro de frequência.

As condições de contorno passam à forma:

$$f(\eta) = 0 \quad \text{para} \quad \eta = 0 \quad \text{e} \quad \eta = 1. \quad (33)$$

Usando o mesmo método anterior e as condições (33), obtemos:

$$f(\eta) = \frac{i}{M^2} \left[1 + \frac{(1 - e^{D_2})e^{D_1 \eta} - (1 - e^{D_1})e^{D_2 \eta}}{(e^{D_2} - e^{D_1})} \right] \quad , \quad (34)$$

onde $D_{1,2} = \frac{1}{2} [R \pm (R^2 + 4iM^2)^{1/2}]$.

Recentemente Bhatnagar [3] generalizou o problema citado acima para o escoamento de um fluido viscoelástico entre dois planos paralelos e porosos.

3.2 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA (12)

Fazendo T e u adimensionais pelas relações, $T^* = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$,

$u \equiv u \frac{Ah}{V}$ e $\eta = \frac{y}{h}$, a equação (12) torna-se:

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T^*}{\partial t} + \frac{V}{h} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right] = \frac{k}{h^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \frac{\mu}{T_2 - T_1} \frac{A^2 h^2}{V^2} \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 . \quad (35)$$

Escrevemos a solução desta equação na forma:

$$T^*(\eta, t) = \bar{T}(\eta) + \tilde{T}(\eta, t) = \bar{T}(\eta) + \tilde{T}(\eta) e^{i\omega t} , \quad (36)$$

onde $\bar{T}(\eta)$ representa a parte estável e $\tilde{T}(\eta, t)$ a instável.

Substituindo a equação (36) na equação (35), obtemos

$$\begin{aligned} \rho c_p [i\omega \tilde{T} e^{i\omega t} + \frac{V}{h} (\bar{T}' + \tilde{T}' e^{i\omega t})] &= \frac{k}{h^2} [\bar{T}'' + \tilde{T}'' e^{i\omega t}] + \\ &+ \frac{\mu}{T_2 - T_1} \frac{A^2 h^2}{V^2} \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial u}{\partial \eta} \right]^2 . \end{aligned} \quad (37)$$

Comparando os termos estáveis e instáveis, obtemos respectivamente:

$$\bar{T}'' - \sigma R \bar{T}' = E \sigma (\bar{u}')^2 , \quad (38)$$

e

$$\tilde{T}'' - \sigma R \tilde{T}' - iM^2 \sigma \tilde{T} = - 2E \sigma R \frac{B}{A} f' \bar{u}' , \quad (39)$$

onde $\sigma = \frac{\mu c_p}{k}$ é o número de Prandtl e $E = \frac{A^2 h^2}{v^2 c_p (T_2 - T_1)}$ o número de Eckert.

As condições térmicas (13) e (14) passam à forma:

TIPO (i)

$$\bar{T}(0) = 0 \quad , \quad \bar{T}(1) = 1 \quad , \quad (40)$$

e

$$\tilde{T}(0) = 0 \quad , \quad \tilde{T}(1) = 0 \quad , \quad (41)$$

TIPO (ii)

$$\bar{T}(0) = 0 \quad , \quad \bar{T}'(1) = 0 \quad , \quad (42)$$

e

$$\tilde{T}(0) = 0 \quad , \quad \tilde{T}'(1) = 0 \quad . \quad (43)$$

Substituindo a expressão \bar{u} dada pela equação (31), obtemos a seguinte equação determinando \bar{T} :

$$\bar{T}'' - \sigma R \bar{T}' = - \sigma E \left[\frac{R^2 e^{2R\eta}}{(e^R - 1)^2} - \frac{2R e^{R\eta}}{e^R - 1} + 1 \right] . \quad (44)$$

Similarmente substituindo as expressões de f dado por (34) e \bar{u} , vem a seguinte equação determinando \tilde{T} :

$$\begin{aligned}
\bar{T}'' - \sigma R \bar{T}' - iM^2 \sigma \bar{T} &= -2E\sigma R \frac{B}{A} \frac{i}{M^2 (e^R - 1) (e^{D_2} - e^{D_1})} \cdot \\
&\cdot [D_1 R (1 - e^{D_2}) e^{(R+D_1)\eta} - D_2 R (1 - e^{D_1}) e^{(R+D_2)\eta} + \\
&+ D_1 (1 - e^{D_2}) (1 - e^R) e^{D_1 \eta} + D_2 (1 - e^{D_1}) (e^R - 1) e^{D_2 \eta}] . \quad (45)
\end{aligned}$$

Para maior facilidade nos cálculos, escrevemos simplesmente:

$$\begin{aligned}
\bar{T}'' - \sigma R \bar{T}' - iM^2 \sigma \bar{T} &= \frac{B}{A} (-a_1 e^{(R+D_1)\eta} + a_2 e^{(R+D_2)\eta} - \\
&a_3 e^{D_1 \eta} - a_4 e^{D_2 \eta}) , \quad (46)
\end{aligned}$$

onde,

$$a_1 = 2E\sigma R^2 \frac{i}{M^2 (e^R - 1) (e^{D_2} - e^{D_1})} D_1 (1 - e^{D_2}) ,$$

$$a_2 = 2E\sigma R^2 \frac{i}{M^2 (e^R - 1) (e^{D_2} - e^{D_1})} D_2 (1 - e^{D_1}) ,$$

$$a_3 = -2E\sigma R \frac{i}{M^2 (e^{D_2} - e^{D_1})} D_1 (1 - e^{D_2}) ,$$

$$a_4 = 2E\sigma R \frac{i}{M^2 (e^{D_2} - e^{D_1})} D_2 (1 - e^{D_1}).$$

3.2.1 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO PARA $\bar{T}(\eta)$

Usando o método de variação de parâmetros encontramos a solução da equação para $\bar{T}(\eta)$, que é:

$$\bar{T}(\eta) = C_1 + C_2 e^{\sigma R \eta} - \frac{\sigma E e^{2R\eta}}{2(2-\sigma)(e^R - 1)^2} + \frac{2\sigma E e^{R\eta}}{R(1-\sigma)(e^R - 1)} + \frac{E\eta}{R} + \frac{E}{\sigma R^2}.$$

Calculando agora as constantes C_1 e C_2 na solução $\bar{T}(\eta)$ para o tipo (i) de condição térmica (40), vem:

$$\begin{aligned} \bar{T}(\eta) = & \frac{e^{\sigma R \eta} - 1}{e^{\sigma R} - 1} \left[1 + \frac{\sigma E (e^R + 1)}{2(2-\sigma)(e^R - 1)} - \frac{E(1+\sigma)}{R(1-\sigma)} \right] + \frac{\sigma E (1 - e^{2R\eta})}{2(2-\sigma)(e^R - 1)^2} \\ & + \frac{2\sigma E (e^{R\eta} - 1)}{R(1-\sigma)(e^R - 1)} + \frac{E\eta}{R}, \end{aligned} \quad (47)$$

e para o tipo (ii) de condição térmica (42):

$$\bar{T}(\eta) = \frac{(e^{\sigma R \eta} - 1)}{\sigma R e^{\sigma R}} E \left[\frac{\sigma R e^{2R}}{(2-\sigma)(e^R - 1)^2} - \frac{2\sigma e^R}{(1-\sigma)(e^R - 1)} - \frac{1}{R} \right] +$$

$$+ \frac{\sigma E(1 - e^{2R\eta})}{2(2 - \sigma)(e^R - 1)^2} + \frac{2\sigma E(e^{R\eta} - 1)}{R(1 - \sigma)(e^R - 1)} + \frac{E\eta}{R} \quad (48)$$

3.2.2 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO PARA $\bar{T}(\eta)$.

Para acharmos a solução da equação para $\bar{T}(\eta)$ usaremos o mesmo método anterior, obtemos então a solução geral:

$$\bar{T}(\eta) = C_1 e^{\lambda_1 \eta} + C_2 e^{\lambda_2 \eta} + \frac{B}{A} \left[- \frac{a_1 e^{(R+D_1)\eta}}{(R+D_1 - \lambda_1)(R+D_1 - \lambda_2)} + \frac{a_2 e^{(R+D_2)\eta}}{(R+D_2 - \lambda_2)(R+D_2 - \lambda_1)} - \frac{a_3 e^{D_1 \eta}}{(D_1 - \lambda_1)(D_1 - \lambda_2)} - \frac{a_4 e^{D_2 \eta}}{(D_2 - \lambda_1)(D_2 - \lambda_2)} \right],$$

onde $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [\sigma R \pm (\sigma^2 R^2 + 4iM^2 \sigma)^{1/2}]$.

Determinando agora as constantes C_1 e C_2 na solução $\bar{T}(\eta)$ para o tipo (i) de condição térmica (41), vem:

$$\frac{\bar{T}(\eta)}{\frac{B}{A}} = \frac{e^{\lambda_2 \eta} - e^{\lambda_1 \eta}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}} [b_1 (e^{R+D_1} - e^{\lambda_1}) + b_2 (e^{\lambda_1} - e^{R+D_2}) + b_3 (e^{D_1} - e^{\lambda_1}) + b_4 (e^{D_2} - e^{\lambda_1})] + b_1 [e^{\lambda_1 \eta} - e^{(R+D_1)\eta}]$$

$$+ b_2 [e^{(R+D_2)\eta} - e^{\lambda_1 \eta}] + b_3 (e^{\lambda_1 \eta} - e^{D_1 \eta}), \quad (49)$$

onde

$$b_1 = \frac{\bar{a}_1}{(R+D_1 - \lambda_1)(R+D_1 - \lambda_2)},$$

$$b_2 = \frac{a_2}{(R+D_2 - \lambda_2)(R+D_2 - \lambda_1)},$$

$$b_3 = \frac{a_3}{(D_1 - \lambda_1)(D_1 - \lambda_2)}, \quad b_4 = \frac{a_4}{(D_2 - \lambda_1)(D_2 - \lambda_2)},$$

e para o tipo (ii) de condição térmica (43):

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{T}(\eta)}{\frac{B}{A}} &= \frac{e^{\lambda_2 \eta} - e^{\lambda_1 \eta}}{\lambda_2 e^{\lambda_2 \eta} - \lambda_1 e^{\lambda_1 \eta}} \{ b_1 [(R+D_1)e^{R+D_1} - \lambda_1 e^{\lambda_1}] + \\ &+ b_2 [\lambda_1 e^{\lambda_1} - (R+D_2)e^{R+D_2}] + b_3 (D_1 e^{D_1} - \lambda_1 e^{\lambda_1}) + \\ &+ b_4 (D_2 e^{D_2} - \lambda_1 e^{\lambda_1}) \} + b_1 [e^{\lambda_1 \eta} - e^{(R+D_1)\eta}] + \end{aligned}$$

$$+ b_2 [e^{(R+D_2)\eta} - e^{\lambda_1 \eta}] + b_3 (e^{\lambda_1 \eta} - e^{D_1 \eta}) + b_4 (e^{\lambda_1 \eta} - e^{D_2 \eta}). \quad (50)$$

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DO PROBLEMA 2:

3.3 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (17)

Para acharmos a solução da equação (17) sob as condições (11), escrevemos o campo de velocidade na forma (24).

Substituindo a equação (24) na equação (17) obtemos:

$$i\omega f e^{i\omega t} = -A - B e^{i\omega t} + \alpha \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + e^{i\omega t} \frac{d^2 f}{dy^2} \right). \quad (51)$$

Comparando os termos estáveis e instáveis e simplificando, obtemos respectivamente:

$$0 = -A + \alpha \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}, \quad (52)$$

$$e \quad i\omega f = -B + \alpha \frac{d^2 f}{dy^2}, \quad (53)$$

sujeitas as condições (28).

3.3.1 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (52)

Tornamos a equação (52) adimensional fazendo $\bar{u} \equiv \frac{Ah^2}{\alpha} \bar{u}$ e $\eta = \frac{y}{h}$, obtemos então:

$$\bar{u}'' - 1 = 0 \quad (54)$$

Integrando a equação (54) duas vezes e fazendo uso das condições (30), obtemos a solução:

$$\bar{u}(\eta) = \frac{1}{2} (\eta^2 - \eta) . \quad (55)$$

3.3.2 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (53)

Tornamos a equação (53) adimensional escrevendo $f \equiv \frac{Bh^2}{\alpha} f$ e $\eta = \frac{y}{h}$, obtemos então:

$$f'' - iM^2 f - 1 = 0 , \quad (56)$$

cuja solução sob as condições (33) é:

$$f(\eta) = \frac{i}{M^2} \left[1 + \frac{(1 - e^{S_2}) e^{S_1 \eta} - (1 - e^{S_1}) e^{S_2 \eta}}{(e^{S_2} - e^{S_1})} \right] , \quad (57)$$

onde $S_{1,2} = \pm (iM^2)^{1/2}$.

3.4 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA (18)

Fazendo T e u adimensionais pelas relações $T^* = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$, $u \equiv u \frac{Ah^2}{\alpha}$ e $\eta = \frac{y}{h}$, a equação (18) torna-se:

$$\rho c_p \frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{k}{h^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \frac{\mu}{(T_2 - T_1) h^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \frac{A^2 h^4}{\alpha^2} . \quad (58)$$

Escrevemos a solução da equação (58) na forma (36), que substituída em (58), vem:

$$\frac{i\omega h^2}{\alpha} \bar{T} e^{i\omega t} = \frac{k}{\mu c_p} (\bar{T}'' + \tilde{T}'' e^{i\omega t}) + \frac{\frac{A^2 h^4}{\alpha^2}}{c_p (T_2 - T_1)} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 . \quad (59)$$

Comparando os termos estáveis e instáveis e simplificando, obtemos respectivamente:

$$0 = \frac{1}{\sigma} \bar{T}'' + E (\bar{u}')^2 , \quad (60)$$

e

$$iM^2 \tilde{T} = \frac{1}{\sigma} \tilde{T}'' + 2E \frac{B}{A} u' f' , \quad (61)$$

onde $E = \frac{\frac{A^2 h^4}{\alpha^2}}{c_p (T_2 - T_1)}$ é o número de Eckert assim definido quando o número de Reynolds é zero.

3.4.1 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (60)

Substituindo a equação (55) na equação (60), obtemos:

$$\bar{T}'' + \frac{\sigma E}{4} (4\eta^2 - 4\eta + 1) = 0 . \quad (62)$$

Integrando duas vezes a equação (62), obtemos a solução

para o tipo (i) de condição térmica (40):

$$\bar{T}(n) = \frac{\sigma E}{4} \left(\frac{n}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{2n^3}{3} - \frac{n^4}{3} \right) + n, \quad (63)$$

e para o tipo (ii) de condição térmica (42):

$$\bar{T}(n) = \frac{\sigma E}{4} \left(\frac{n}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{2n^3}{3} - \frac{n^4}{3} \right). \quad (64)$$

3.4.2 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (61)

Substituindo as expressões de f dada por (57) e a expressão de \bar{u} na equação (61), vem a seguinte equação determinando $\tilde{T}(n)$:

$$\tilde{T}'' - iM^2\sigma\tilde{T} = (-2a_1ne^{s_1n} + 2a_2ne^{s_2n} + a_1e^{s_1n} - a_2e^{s_2n})\frac{B}{A}, \quad (65)$$

onde

$$a_1 = \sigma E \frac{i}{M^2(e^{s_2} - e^{s_1})} s_1(1 - e^{s_2}),$$

e

$$a_2 = \sigma E \frac{i}{M^2(e^{s_2} - e^{s_1})} s_2(1 - e^{s_1}).$$

Usando o método de variação de parâmetros, obtemos a solução da equação (65) para o tipo (i) de condição térmica (41):

$$\frac{\tilde{T}(\eta)}{\frac{B}{A}} = \frac{e^{p_2 \eta} - e^{p_1 \eta}}{e^{p_1 \eta} - e^{p_2 \eta}} [(-b_1 - b_2 + d_1 + d_2)e^{p_1 \eta} + (-b_1 + b_2)e^{s_1 \eta} + (d_1 - d_2)e^{s_2 \eta}]$$

$$+ (-b_1 - b_2 + d_1 + d_2)e^{p_1 \eta} + (-2b_1 \eta + b_1 + b_2)e^{s_1 \eta} + (2d_1 \eta - d_1 - d_2)e^{s_2 \eta}, \quad (66)$$

onde $p_{1,2} = \pm (iM^2 \sigma)^{1/2}$ e

$$b_1 = \frac{a_1}{(p_2 + s_1)(p_1 + s_1)}, \quad b_2 = \frac{4a_1 s_1}{(p_2 + s_1)^2 (p_1 + s_1)^2},$$

$$d_1 = \frac{a_2}{(p_2 + s_2)(p_1 + s_2)}, \quad d_2 = \frac{4a_2 s_2}{(p_2 + s_2)^2 (p_1 + s_2)^2},$$

e para o tipo (ii) de condição térmica (43):

$$\frac{\tilde{T}(\eta)}{\frac{B}{A}} = \frac{e^{p_2 \eta} - e^{p_1 \eta}}{p_1 e^{p_1 \eta} - p_2 e^{p_2 \eta}} \{(-b_1 - b_2 + d_1 + d_2)p_1 e^{p_1 \eta} + [-2b_1 + s_1(-b_1 + b_2)]e^{s_1 \eta}$$

$$+ [2d_1 + s_2(d_1 - d_2)]e^{s_2 \eta}\} + (-b_1 - b_2 + d_1 + d_2)e^{p_1 \eta}$$

$$+ (-2b_1 \eta + b_1 + b_2)e^{s_1 \eta} + (2d_1 \eta - d_1 - d_2)e^{s_2 \eta}. \quad (67)$$

3.5 - SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DO PROBLEMA 3

A solução da equação (20) é um caso particular da equação (16) com $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ e $B = 0$ e é dada pela equação (31), para \bar{u} .

Da mesma maneira a solução da equação da energia (21) é um caso particular da equação (12) ou da equação (38) na forma adimensional, cuja solução para os tipos (i) e (ii) de condições térmicas são dadas pelas equações (47) e (48), respectivamente para \bar{T} .

Notamos que neste problema não temos parte instável \bar{T} .

3.6 - SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DO PROBLEMA 4

Como aqui $V = 0$ e $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = A$, as equações (22) e (23) para determinar u e T são formas especiais das equações (20) e (21), respectivamente. Por isso não precisamos resolver estas equações que na forma adimensional são as mesmas que as equações (54) e (60), cujas soluções são dadas pelas equações (55) para \bar{u} e as equações (63) e (64) para \bar{T} com os tipos (i) e (ii) de condições térmicas, respectivamente.

Notamos também que neste problema não existe parte instável para \bar{T} .

CAPÍTULO IV

DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

Para nossos cálculos de \bar{T} , \tilde{T} e ambas condições térmicas, fixaremos o número de Prandtl $\sigma = 0,4$ e $0,6$, o número de Eckert $E = 0,5$ e o parâmetro de frequência $M = 5,10$ e 15 .

Para mostrar as diferenças entre a distribuição de temperatura, discutiremos primeiro o caso em que o número de Reynolds $R = 0$ e depois os casos para $R \neq 0$. Escolhemos os valores de $R = 0,2$, $0,4$, $0,6$ e $0,8$.

4.1 - COMPORTAMENTO DE $\bar{T}(\eta)$ PARA O TIPO (i) DE CONDIÇÃO TÉRMICA .

Na figura 1 mostramos \bar{T} contra η , calculados através da equação (63), para $R = 0$, $E = 0,5$, $\sigma = 0,4$ e $0,6$.

Observamos que para ambos valores do parâmetro σ , \bar{T} varia linearmente de 0 a 1 e as diferenças entre \bar{T} para os dois valores de σ são insignificantes.

Nas figuras 2 e 3 temos amostras de \bar{T} , obtidos através da equação (47), para $R = 0,2$, $0,4$, $0,6$ e $0,8$, $E = 0,5$ e $\sigma = 0,4$, $0,6$ respectivamente.

Aqui também observamos a variação quase linear de \bar{T} de 0 a 1, mas acontece que \bar{T} decresce com o aumento de R para um fixo σ , por exemplo, $\sigma = 0,4$ na figura 2. O mesmo acontece para $\sigma = 0,4$ e $0,6$ com R fixo, por exemplo, comparando as curvas de \bar{T} para $R = 0,4$ nas figuras 2 e 3.

4.2 - O COMPORTAMENTO DE $\bar{T}(\eta)$ PARA O 2º TIPO DE CONDIÇÃO TÉRMICA

A figura 4 nos mostra os gráficos de \bar{T} , obtidos através da equação (64), para $R = 0$, $E = 0,5$, $\sigma = 0,4$, $0,6$ e a figura 5 para os casos $R = 0,2$, $0,4$, $0,6$, $0,8$ e os mesmos E e σ , calculados através da equação (48).

Observamos que ao contrário em \bar{T} para o tipo (i) de condição térmica, o comportamento de \bar{T} para o tipo (ii) de condição térmica não é mais linear, acentuando-se perto das placas.

Na figura 4, \bar{T} aumenta com σ e tem valor máximo na placa isolada $\eta = 1$. E na figura 5 este comportamento se repete, tomando qualquer R fixo.

Da mesma maneira \bar{T} aumenta com R , tomando σ fixo e tem novamente máximo na placa isolada $\eta = 1$.

Comparando as figuras 4 e 5, notamos que \bar{T} máximo para $R = 0$ é maior do que os máximos para $R = 0,2$, $0,4$, $0,6$ e $0,8$.

Concluimos assim, também a discussão dos problemas 3 e 4.

4.3 - COMPORTAMENTO DE $\tilde{T}(\eta)$ PARA O TIPO (i) DE CONDIÇÃO TÉRMICA

Nas figuras 6, 7 e 8 mostramos os gráficos de \tilde{T} para o tipo (i) de condição térmica, calculados através da equação (66), para o caso $R = 0$, $E = 0,5$, $\sigma = 0,4$ e $0,6$ escolhendo $M = 5$, 10 e 15 respectivamente.

Na figura 6 para $M = 5$, observamos que o perfil de temperatura tem a forma de uma parábola achatada na região central

de η e além disso \tilde{T} é simétrico e aumenta com σ .

Nas figuras 7 e 8 a situação é totalmente diferente, \tilde{T} perde a forma parabólica, mas continua simétrica.

Na figura 7 para $M = 10$, observamos dois picos perto dos contornos no perfil de \tilde{T} . Assim acontece que \tilde{T} cresce rapidamente até o 1º pico e fica quase constante na região central em torno de $\eta = 0,5$, depois cresce até o 2º pico e decresce rapidamente perto de $\eta = 1$.

Em geral \tilde{T} para $\sigma = 0,4$ é menor que \tilde{T} para $\sigma = 0,6$ perto dos contornos e maior na região central.

Na figura 8 para $M = 15$, o comportamento é o mesmo observado na figura 7, só que as distâncias entre os picos e a região central são maiores.

Passando do parâmetro de frequência de $M = 10$ para $M = 15$, \tilde{T} aumenta perto dos contornos e diminui na região central.

Por outro lado comparando a figura 6 com a figura 7, é fácil ver que \tilde{T} diminui.

Nas figuras 9, 10 e 11 temos \tilde{T} para $R = 0,2, 0,4, 0,6$ e $0,8$, $E = 0,5$, $\sigma = 0,4, 0,6$ e $M = 5, 10$ e 15 respectivamente, obtidos da equação (49).

Na figura 9 para $M = 5$, o perfil de \tilde{T} tem a forma parabólica achatada para cada R e σ considerados, como anteriormente observado na figura 6 para $R = 0$. Notamos que \tilde{T} aqui também cresce com R e σ . E aumentando R a diferença de \tilde{T} para $\sigma = 0,4$ e $0,6$ se torna cada vez maior.

Nas figuras 10 e 11, como nas figuras 7 e 8 para o

caso $R = 0$, as curvas \tilde{T} perdem a forma parabólica e aparecem dois picos.

Na placa em que a temperatura é mais alta ($T=1$), \tilde{T} é maior.

Na figura 11, as curvas para $\sigma = 0,4$ e $R = 0,8$ mostram que \tilde{T} não tem caráter constante, acontecendo o contrário para R menores.

Comparando as figuras 10 e 11 para $M = 10$ e 15 respectivamente, notamos que \tilde{T} aumenta com a frequência. Como anteriormente nas figuras 6 e 7 para $M = 5$ e 10 respectivamente, \tilde{T} diminui com o aumento da frequência, o mesmo acontece com as figuras 9 e 10.

4.4 - COMPORTAMENTO DE $\tilde{T}(\eta)$ PARA O TIPO (ii) DE CONDIÇÃO TÉRMICA

Nas figuras 12, 13 e 14 temos os gráficos de \tilde{T} para o tipo (ii) de condição térmica, calculados através da equação (67), para os parâmetros $R = 0$, $E = 0,5$, $\sigma = 0,4$, $0,6$ e para $M = 5, 10$ e 15 respectivamente.

Na figura 12, para $M = 5$, observamos que \tilde{T} cresce rapidamente até certo η e depois varia quase linearmente atenuando-se perto da placa isolada onde tem valor máximo.

Notamos também, como anteriormente que \tilde{T} para $\sigma = 0,6$ é maior do que para $\sigma = 0,4$ em toda região, exceto numa pequena região central, e ainda \tilde{T} não tem a forma parabólica como no caso de \tilde{T} para o tipo (i) de condição térmica e $M = 5$.

Nas figuras 13 e 14 para $M = 10$ e 15 respectivamente, observamos que \tilde{T} cresce muito mais rápido em comparação com $M = 5$, tendo picos muito perto da placa $\eta = 0$. A partir do pico, decresce até certo valor de η e depois cresce continuamente até a placa isolada, onde também tem máximo.

Em geral \tilde{T} para $\sigma = 0,6$ é maior do que para $\sigma = 0,4$ perto das placas e menor na região central.

Em contrário com \tilde{T} para o tipo (i) de condição térmica, \tilde{T} diminui mudando o parâmetro de $M = 10$ para $M = 15$, e de $M = 5$ para $M = 10$ ocorre o mesmo verificado em \tilde{T} para o tipo (i) de condição térmica.

Nas figuras 15, 16 e 17 estão desenhados os gráficos de \tilde{T} , obtidos da equação (50), para $R = 0,2, 0,4, 0,6$ e $0,8$ e $E = 0,5$, $\sigma = 0,4, 0,6$ e $M = 5, 10$ e 15 respectivamente.

Na figura 15, \tilde{T} tem o mesmo comportamento para cada σ e $R \neq 0$ como na figura 12 para $R = 0$. A única diferença é que os máximos de \tilde{T} para $R = 0$ são maiores que todos os máximos para $R = 0,2, 0,4, 0,6$ e $0,8$.

Nas figuras 16 e 17 os perfis de \tilde{T} para $R \neq 0$ tem o mesmo comportamento como nas figuras 13 e 14 para $R = 0$, mas notamos, por exemplo, na figura 17 para $M = 15$ que \tilde{T} para maiores valores de R , cresce muito rapidamente perto da placa $\eta = 0$ e decresce também com muita rapidez aproximando-se do eixo η e depois cresce uniformemente com rapidez até a placa isolada.

Também aqui, em geral \tilde{T} cresce com R e σ , exceto nas regiões centrais.

REFERÊNCIAS

- 1 - WANG, C.Y., Pulsatile Flow in a Porous Channel, ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 38, 1971, p. 553-555.
- 2 - BERMAN, A.S., Laminar Flow in an Annulus with Porous Walls, Journal of Applied Physics, vol. 29, 1958, p. 71-75.
- 3 - BHATNAGAR, R.K., Fluctuating Flow of a Viscoelastic Fluid in a Porous Channel, ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 46, 1979, p. 21-25.
- 4 - HUGHES, W.F. e BRIGHTON, J.A., Dinâmica dos Fluidos, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1974.
- 5 - SHAMES, I.H., Mecânica dos Fluidos, Vols. I e II, Editora Edgard Blücher, 1973.
- 6 - SCHLICHTING, H., Boundary Layer Theory, Verlag G. Braun, 1965.
- 7 - GOLDSTEIN, S., Modern Developments in Fluid Mechanics, vol. II, Dover Publications, New York, 1965.

LEGENDAS DAS FIGURAS

- Figura 1 - Gráficos de \bar{T} para o tipo (i) de condição térmica,
para $R = 0$, $E = 0,5$ e $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———
- Figura 2 - Gráficos de \bar{T} para o tipo (i) de condição térmica,
para $R = 0,2$, $0,4$, $0,6$ e $0,8$, $E = 0,5$ e $\sigma = 0,4$.
- Figura 3 - Gráficos de \bar{T} para o tipo (i) de condição térmica,
para $R = 0,2$, $0,4$, $0,6$ e $0,8$, $E = 0,5$ e $\sigma = 0,6$.
- Figura 4 - Gráficos de \bar{T} para o tipo (ii) de condição térmica,
para $R = 0$, $E = 0,5$ e $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———
- Figura 5 - Gráficos de \bar{T} para o tipo (ii) de condição térmica,
para $R = 0,2$, $0,4$, $0,6$ e $0,8$, $E = 0,5$ e $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———
- Figura 6 - Gráficos de \bar{T} para o tipo (i) de condição térmica,
para $R = 0$, $E = 0,5$, $M = 5$ e $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———
- Figura 7 - Gráficos de \bar{T} para o tipo (i) de condição térmica,
para $R = 0$, $E = 0,5$, $M = 10$ e $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———

Figura 8 - Gráficos de \tilde{T} para o tipo (i) de condição térmica,
 para $R = 0$, $E = 0,5$, $M = 15$ e $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———

Figura 9 - Gráficos de \tilde{T} para o tipo (i) de condição térmica,
 para $R = 0,2$, $0,4$, $0,6$ e $0,8$, $E = 0,5$, $M = 5$ e
 $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———

Figura 10 - Gráficos de \tilde{T} para o tipo (i) de condição térmica,
 para $R = 0,2$, $0,4$, $0,6$ e $0,8$, $E = 0,5$, $M = 10$ e
 $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———

Figura 11 - Gráficos de \tilde{T} para o tipo (i) de condição térmica,
 para $R = 0,2$, $0,4$, $0,6$ e $0,8$, $E = 0,5$, $M = 15$ e
 $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———

Figura 12 - Gráficos de \tilde{T} para o tipo (ii) de condição térmica,
 para $R = 0$, $E = 0,5$, $M = 5$ e $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———

Figura 13 - Gráficos de \tilde{T} para o tipo (ii) de condição térmica,
 para $R = 0$, $E = 0,5$, $M = 10$ e $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———

Figura 14 - Gráficos de \tilde{T} para o tipo (ii) de condição térmica,
 para $R = 0, E = 5, M = 15$ e $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———

Figura 15 - Gráficos de \tilde{T} para o tipo (ii) de condição térmica,
 para $R = 0,2, 0,4, 0,6$ e $0,8, E = 0,5, M = 5,$
 e $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———

Figura 16 - Gráficos de \tilde{T} para o tipo (ii) de condição térmica,
 para $R = 0,2, 0,4, 0,6$ e $0,8, E = 0,5, M = 10,$
 e $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———

Figura 17 - Gráficos de \tilde{T} para o tipo (ii) de condição térmica,
 para $R = 0,2, 0,4, 0,6$ e $0,8, E = 0,5, M = 15,$
 e $\sigma = 0,4$ - - -
 $\sigma = 0,6$ ———

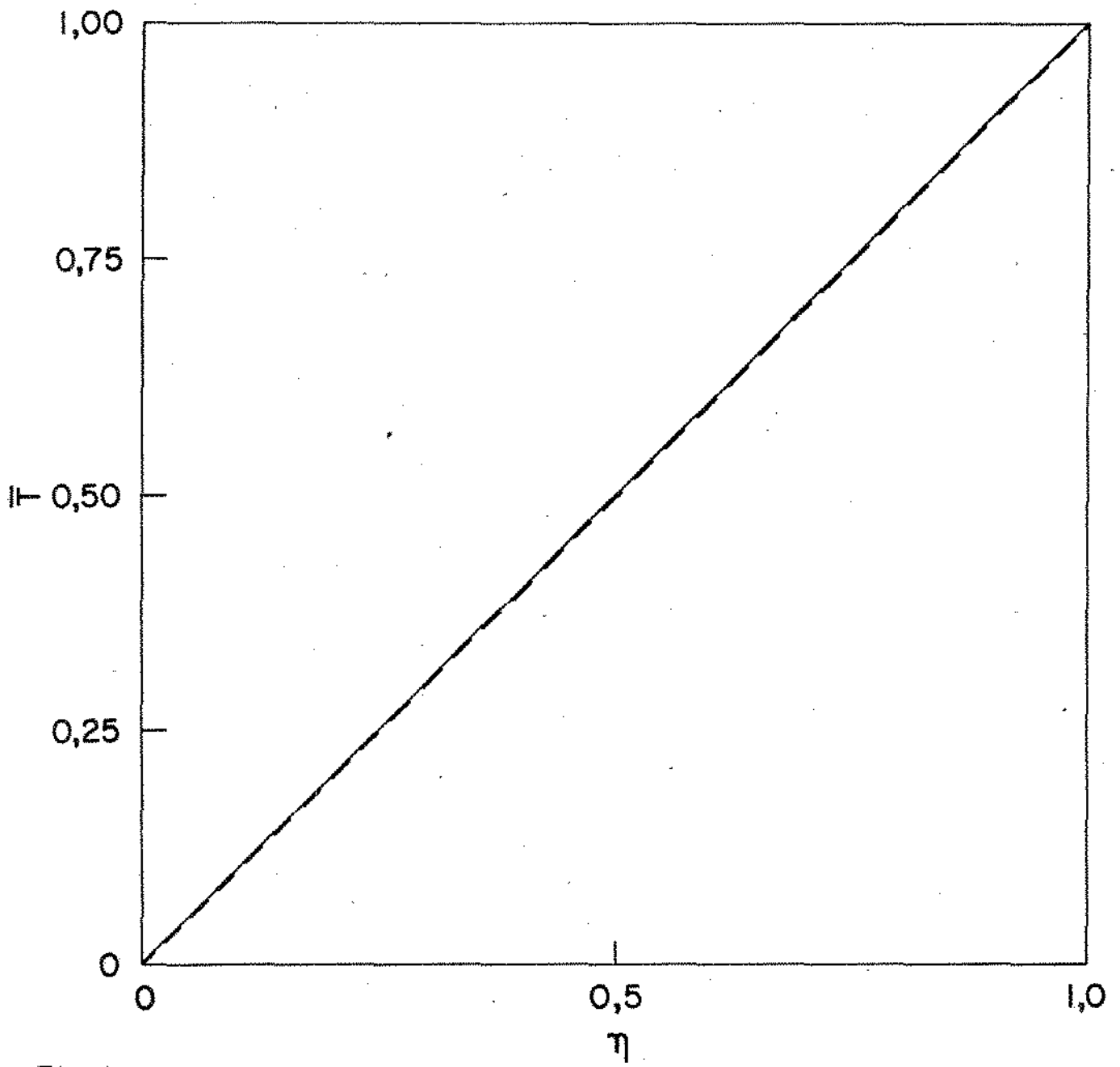


Fig. 1

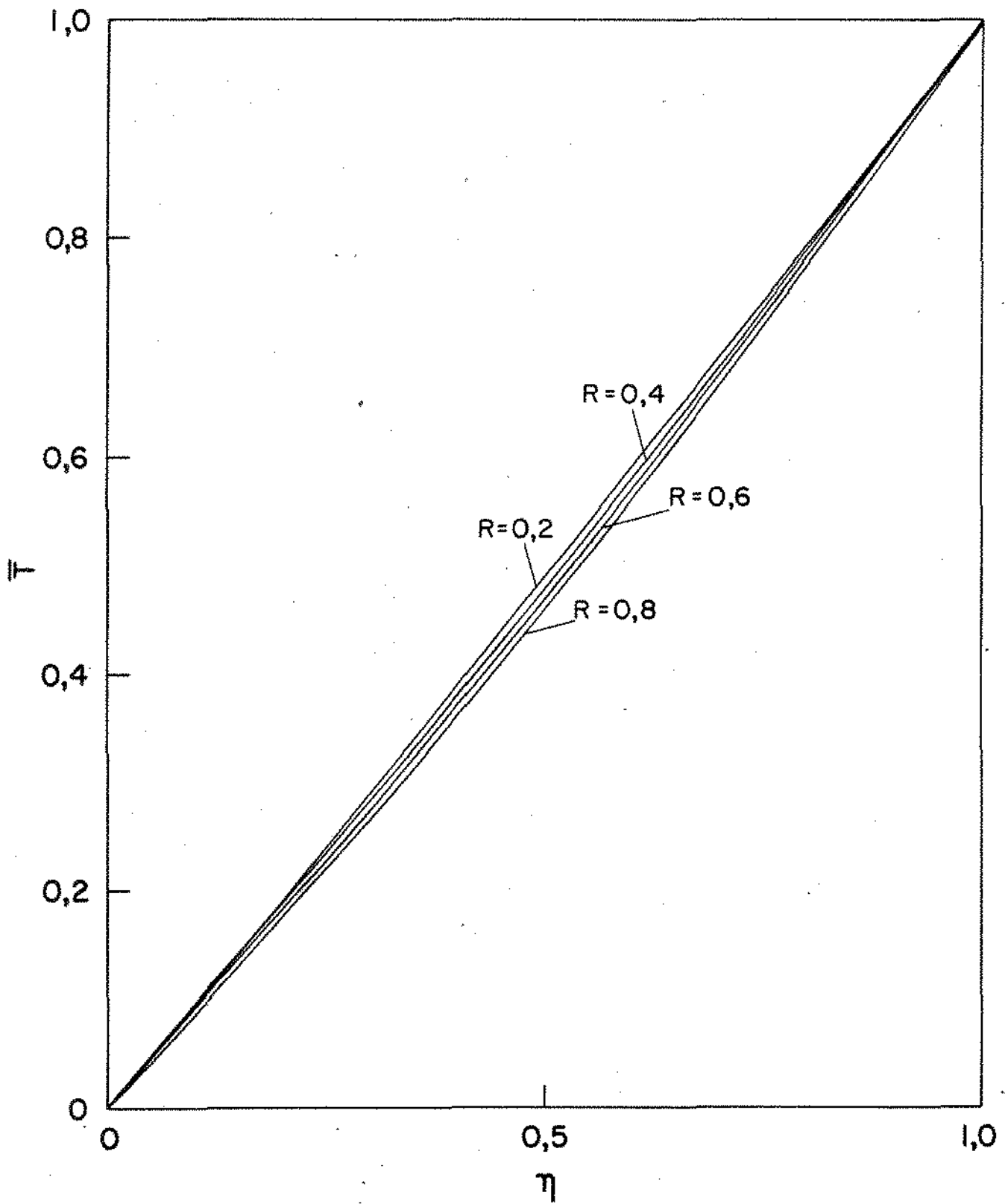


Fig. 2

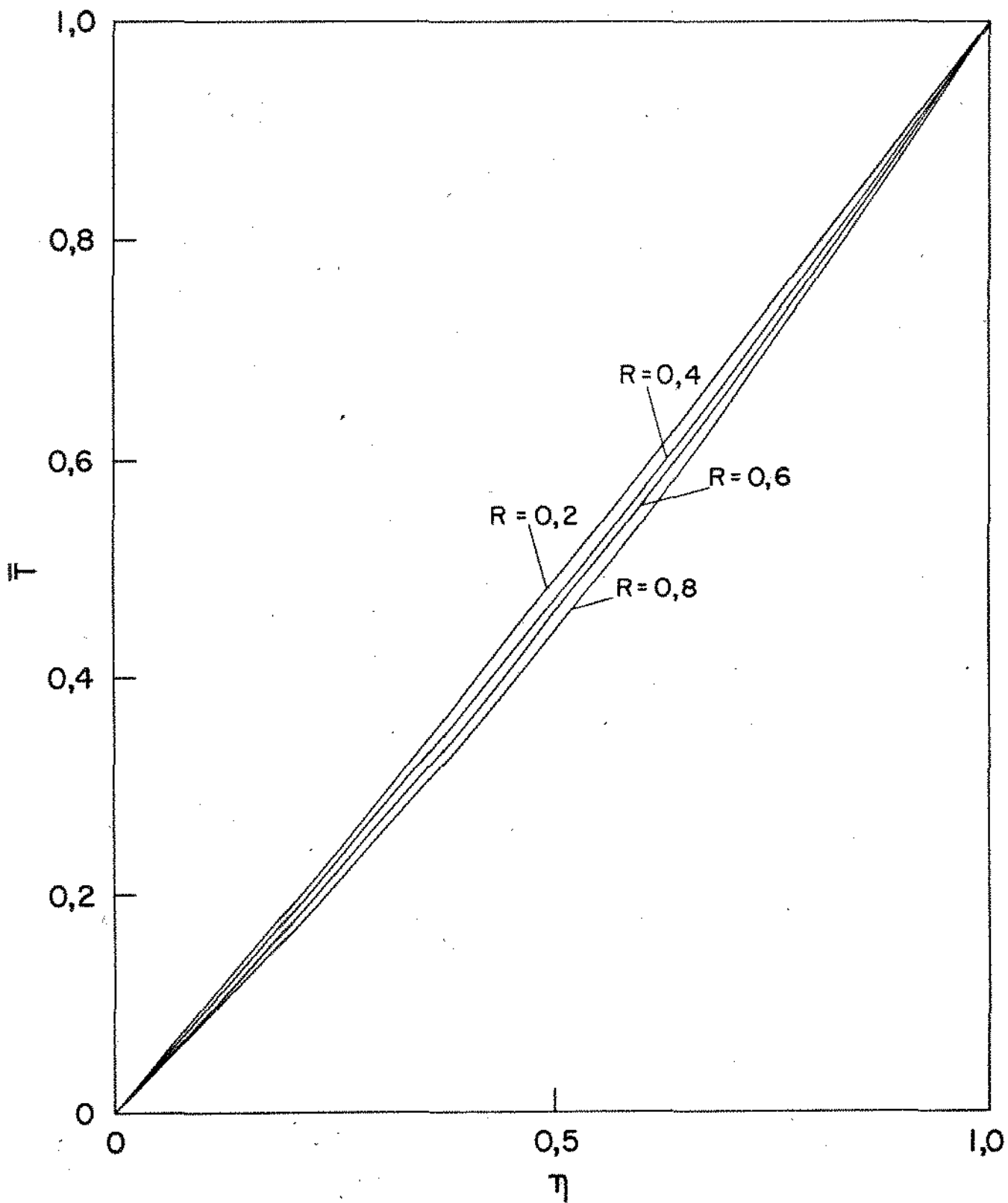


Fig. 3

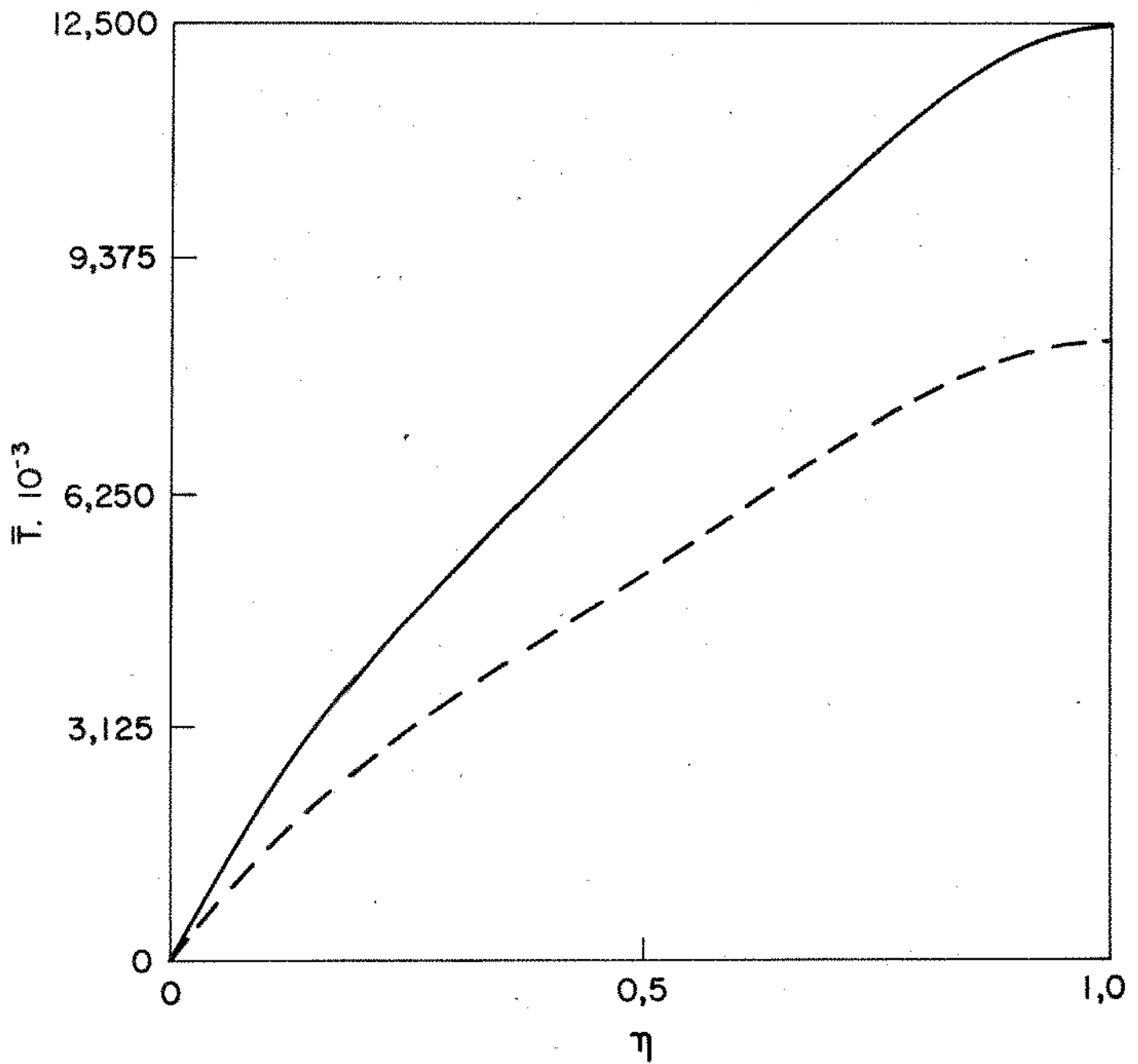


Fig. 4

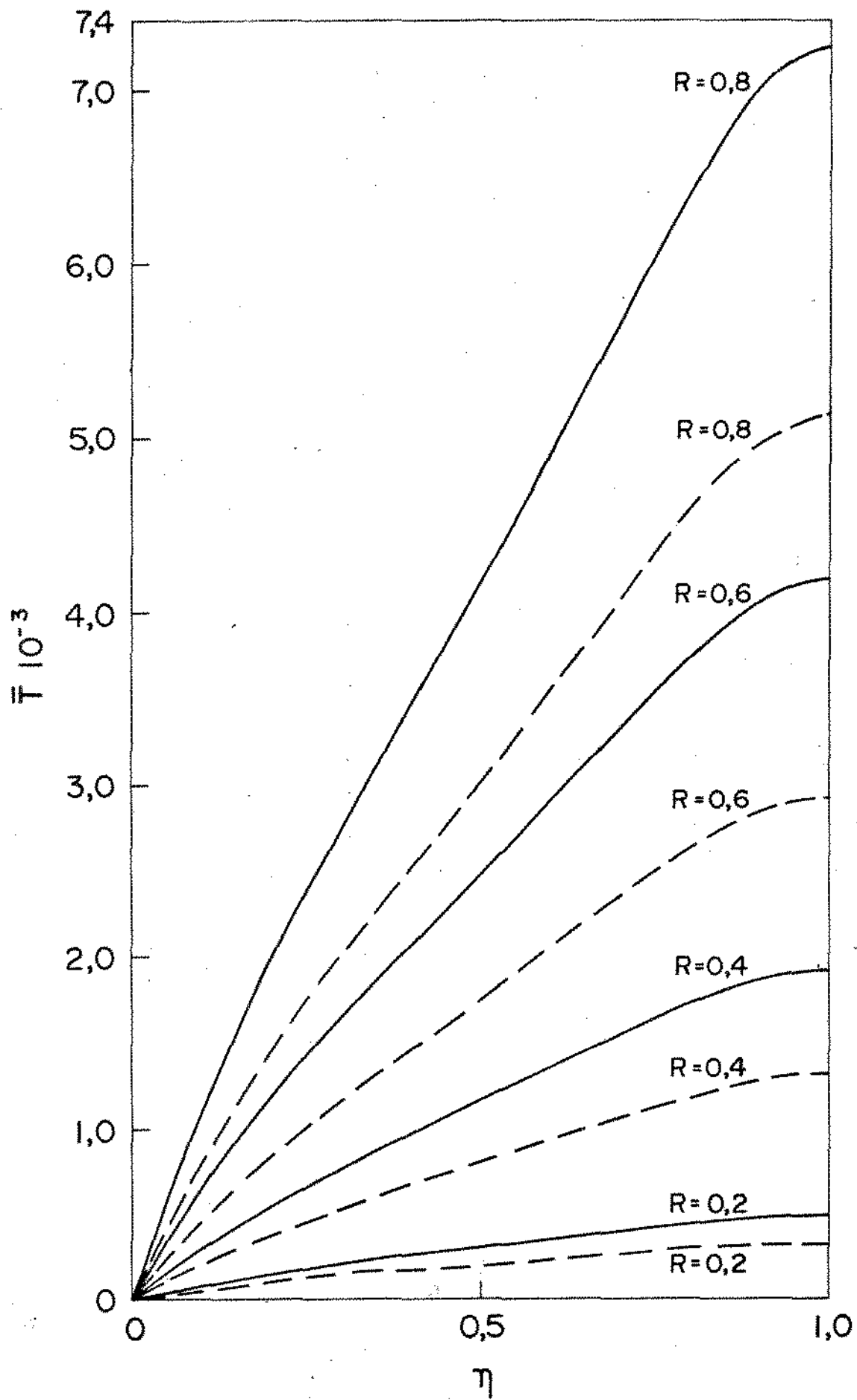


Fig 5

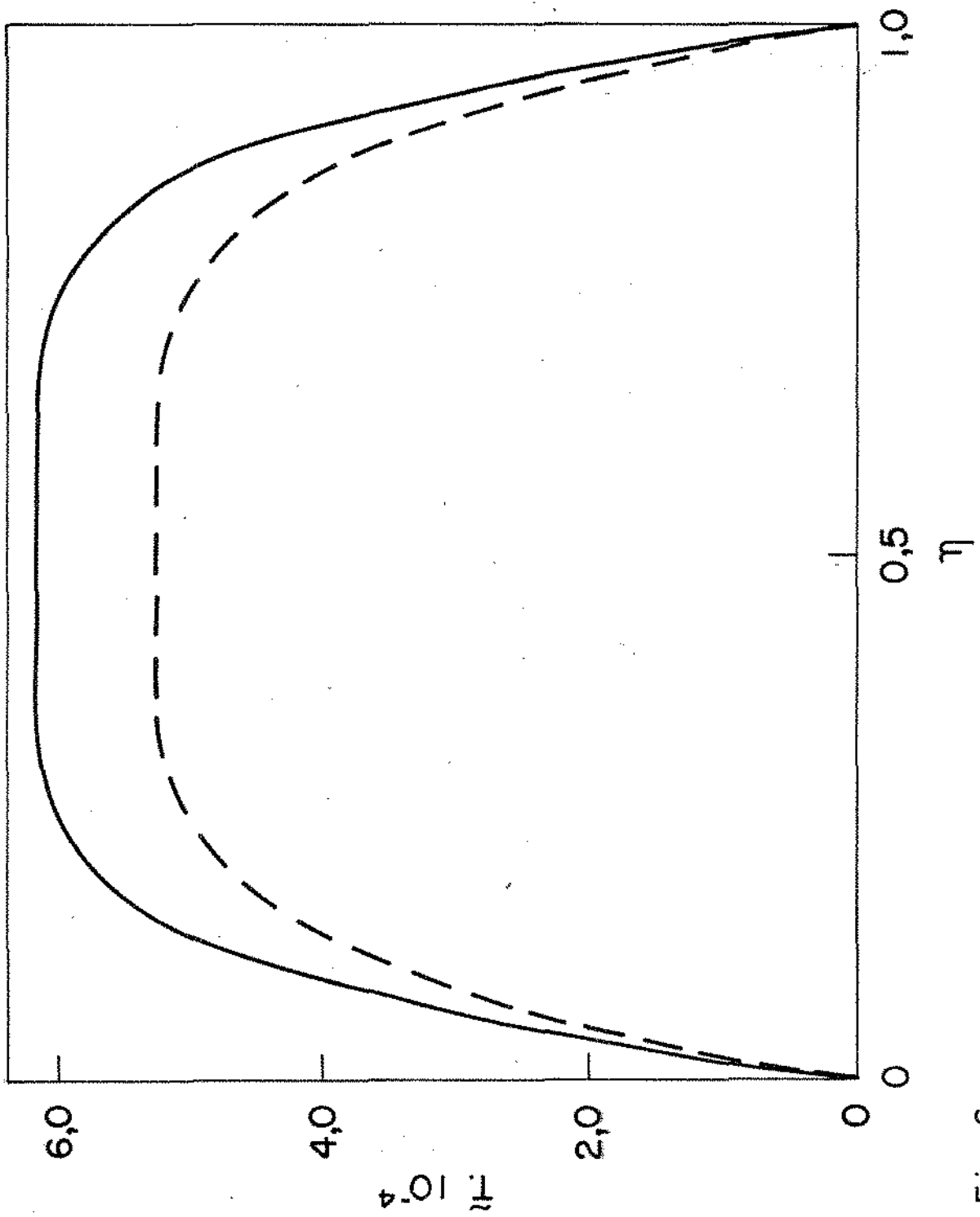


Fig. 6

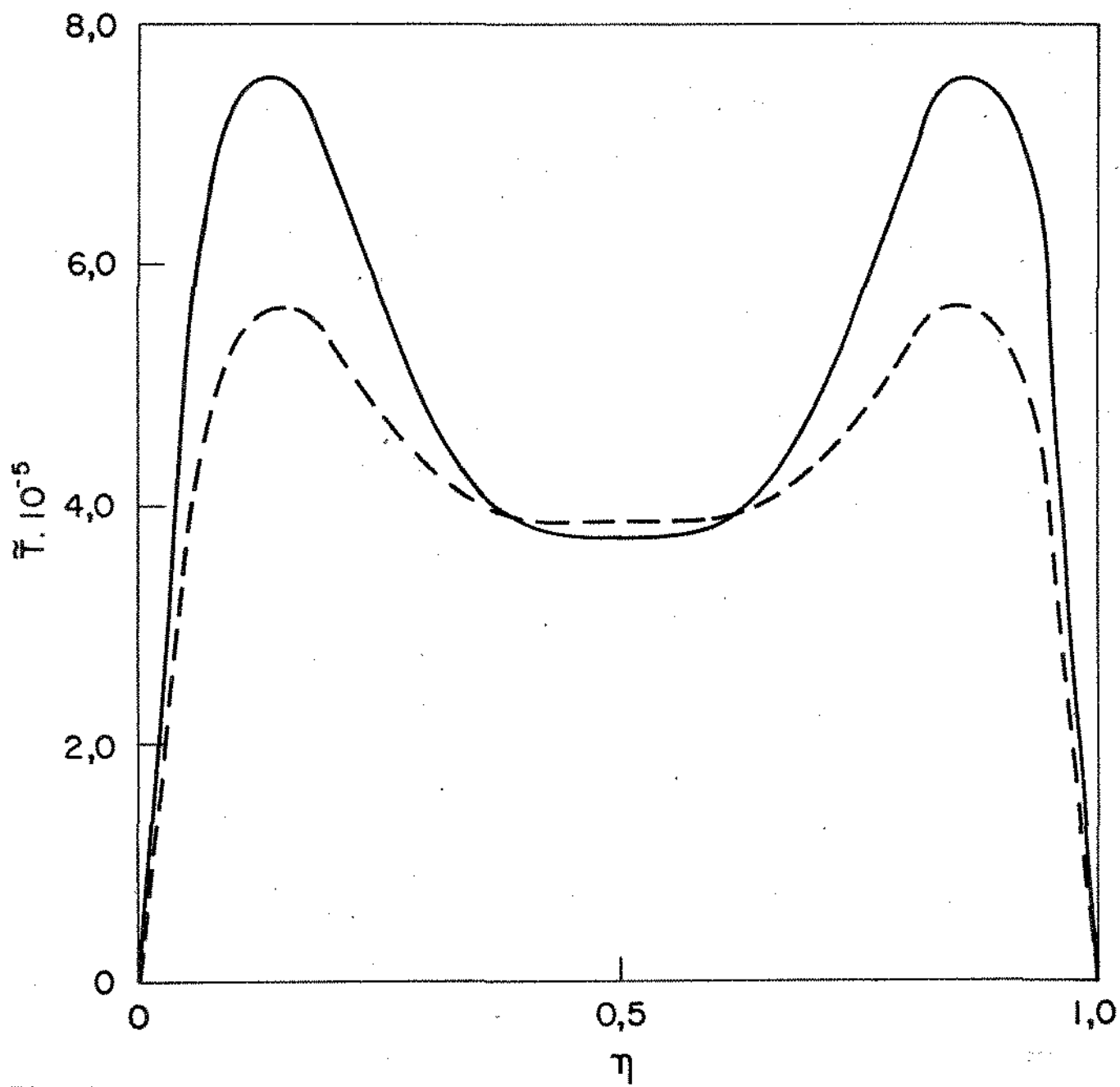


Fig. 7

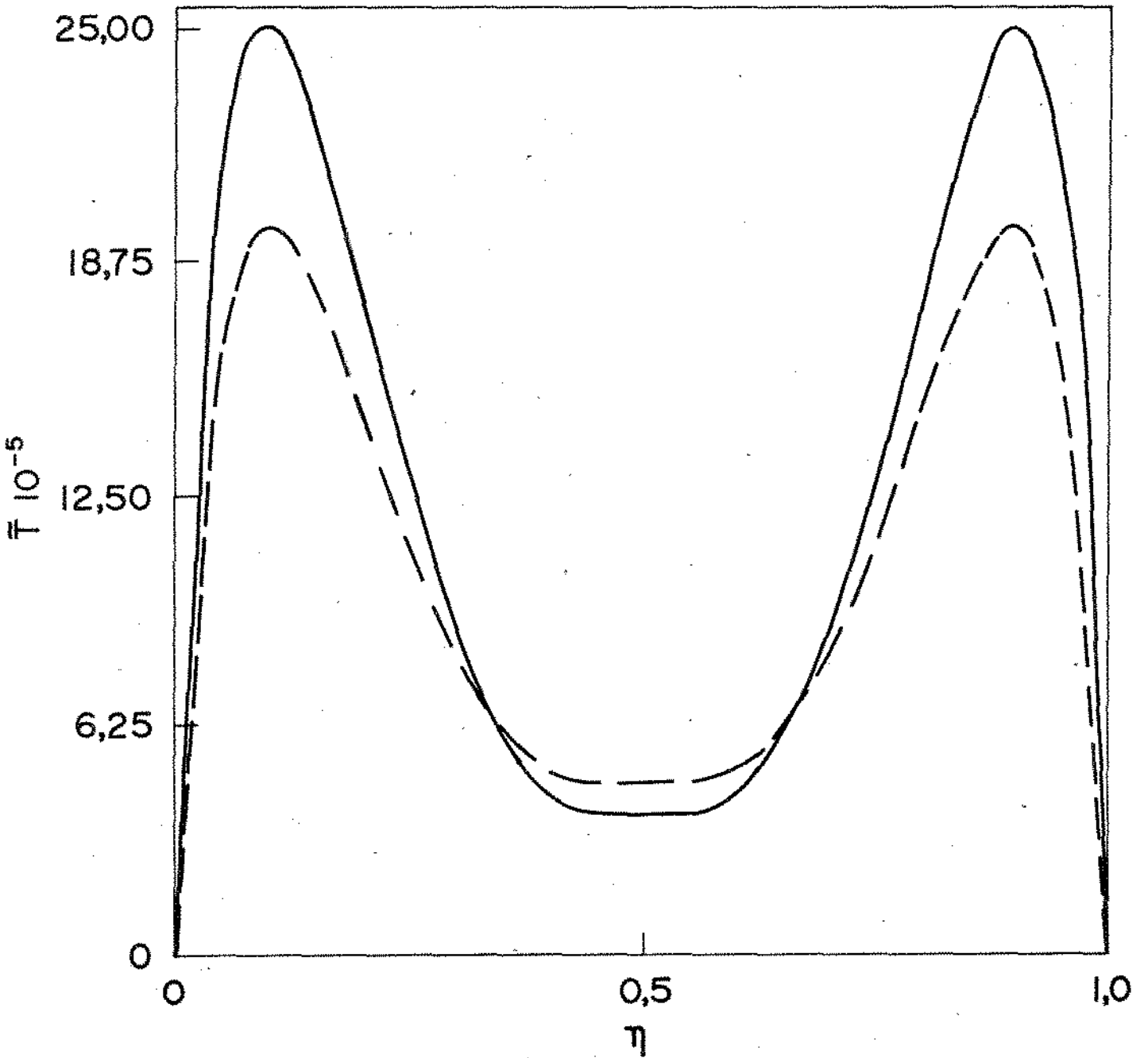


Fig 8

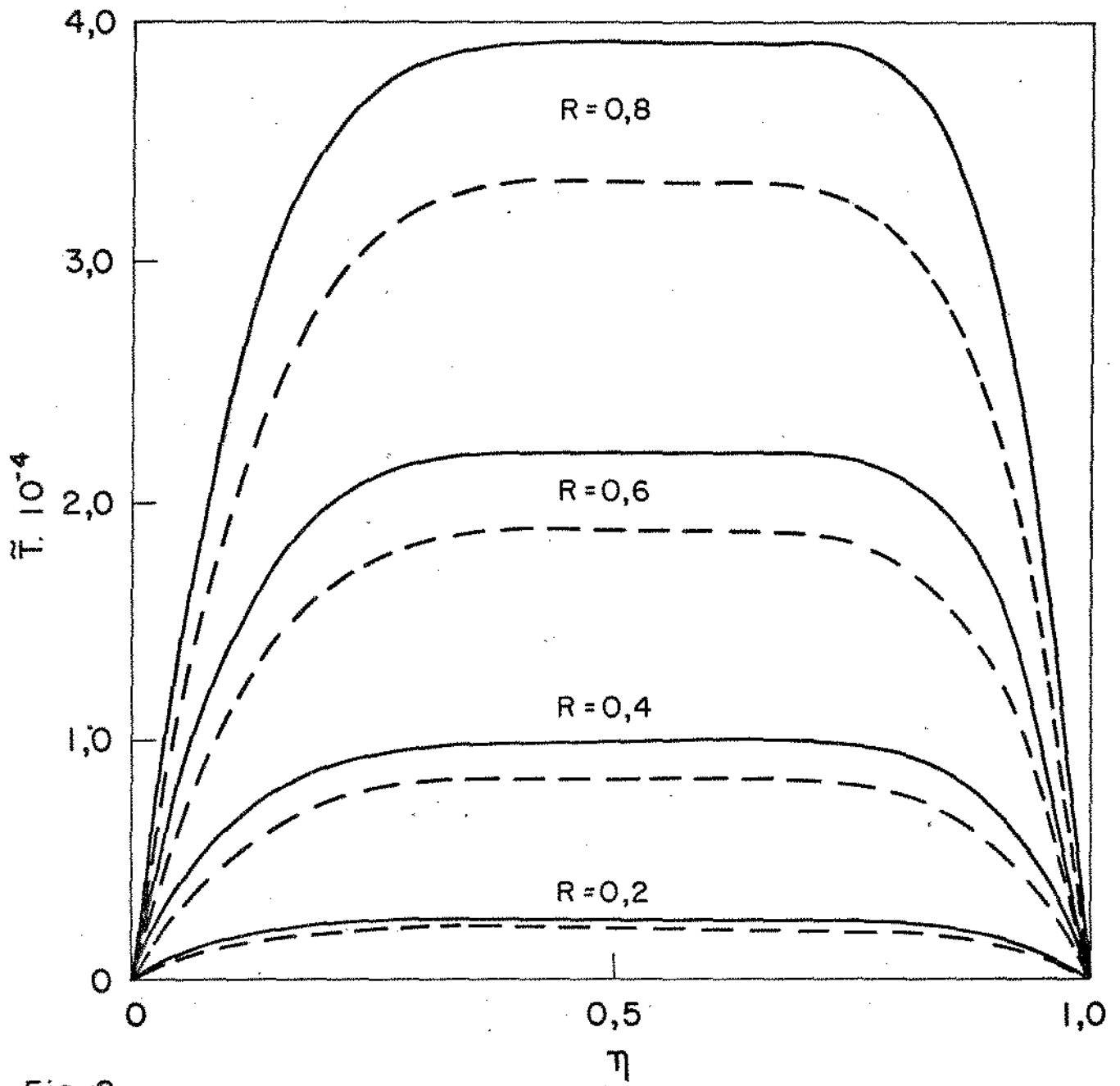


Fig. 9

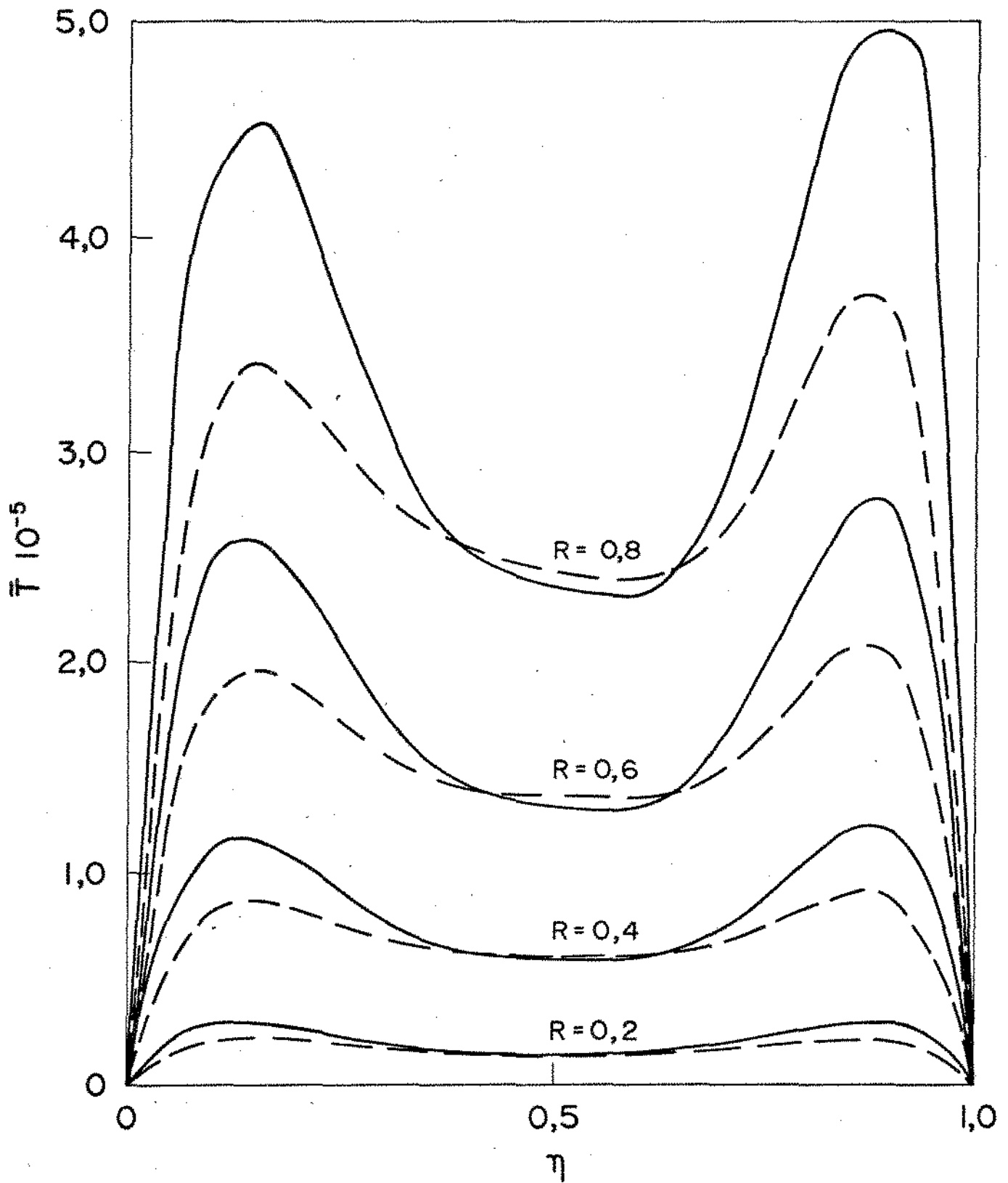


Fig 10

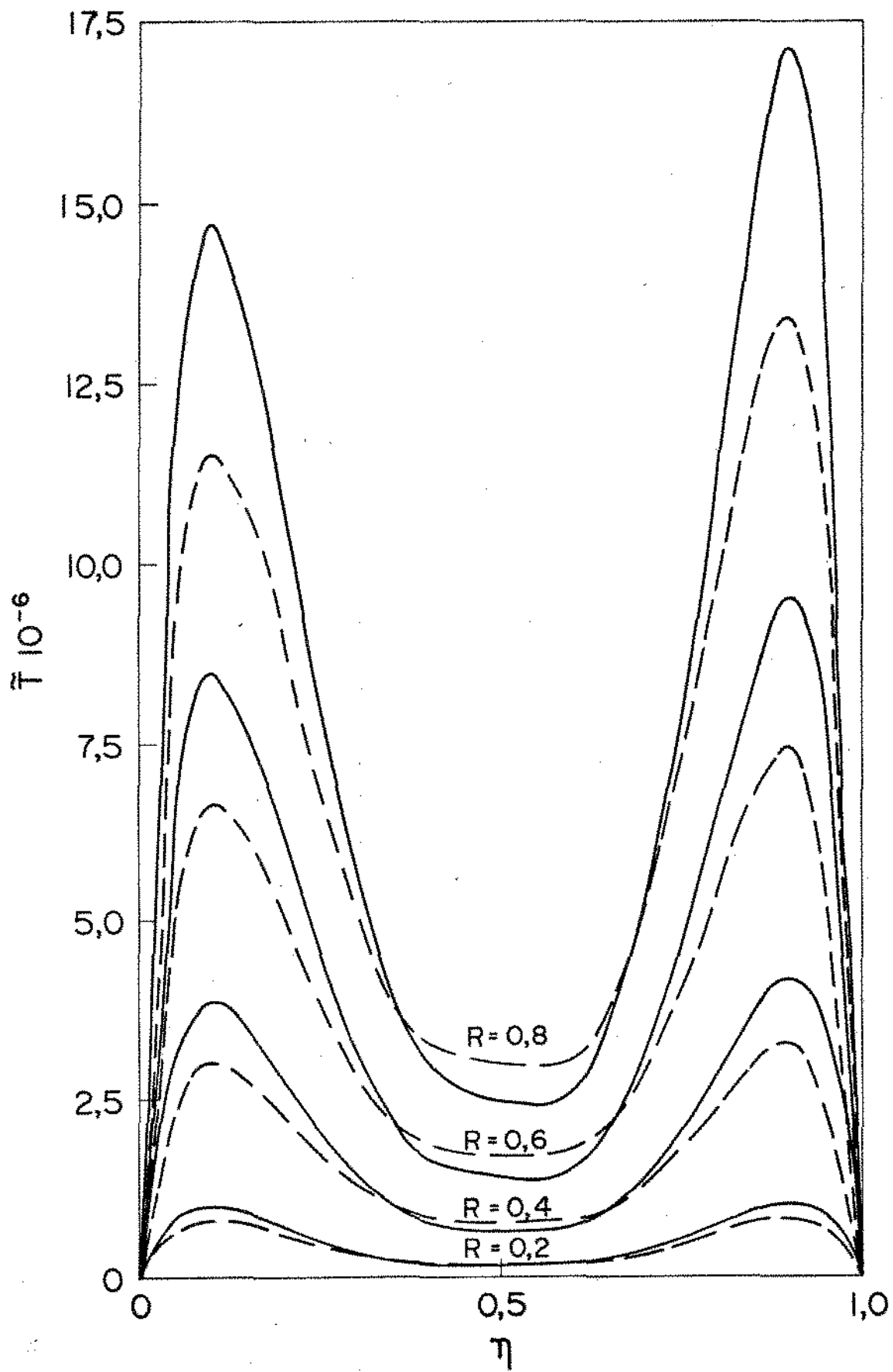


Fig II

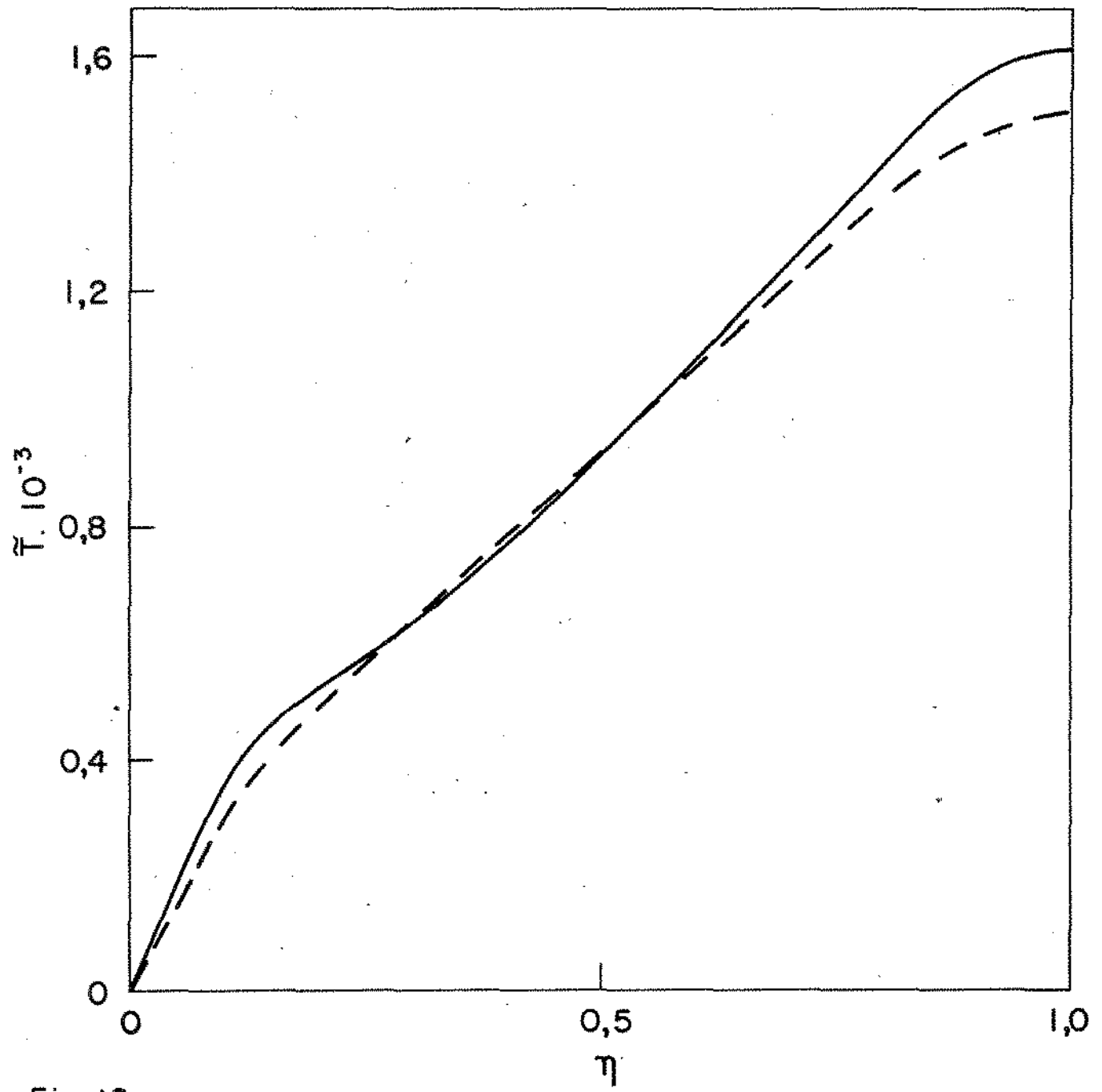


Fig. 12

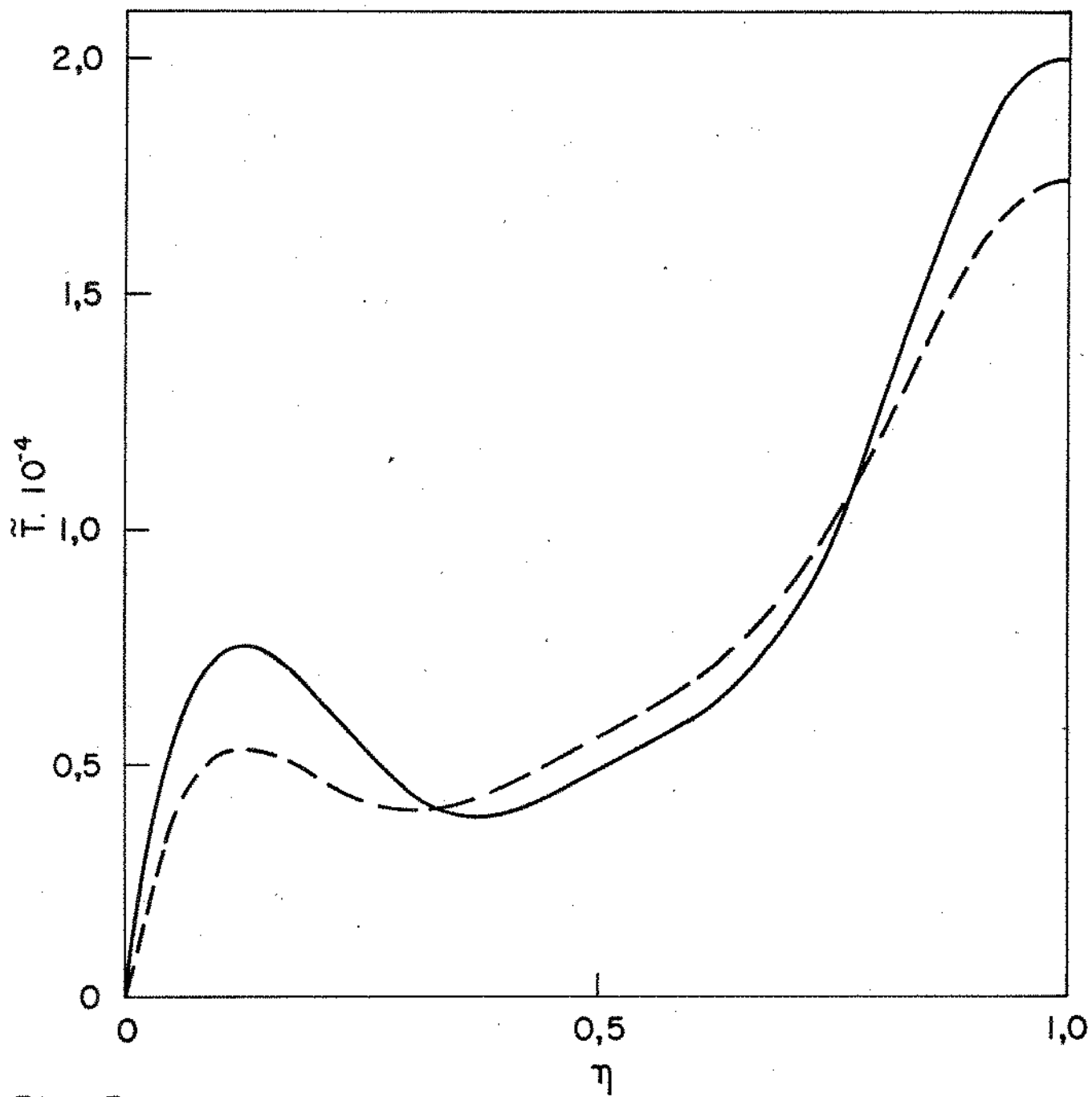


Fig. 13

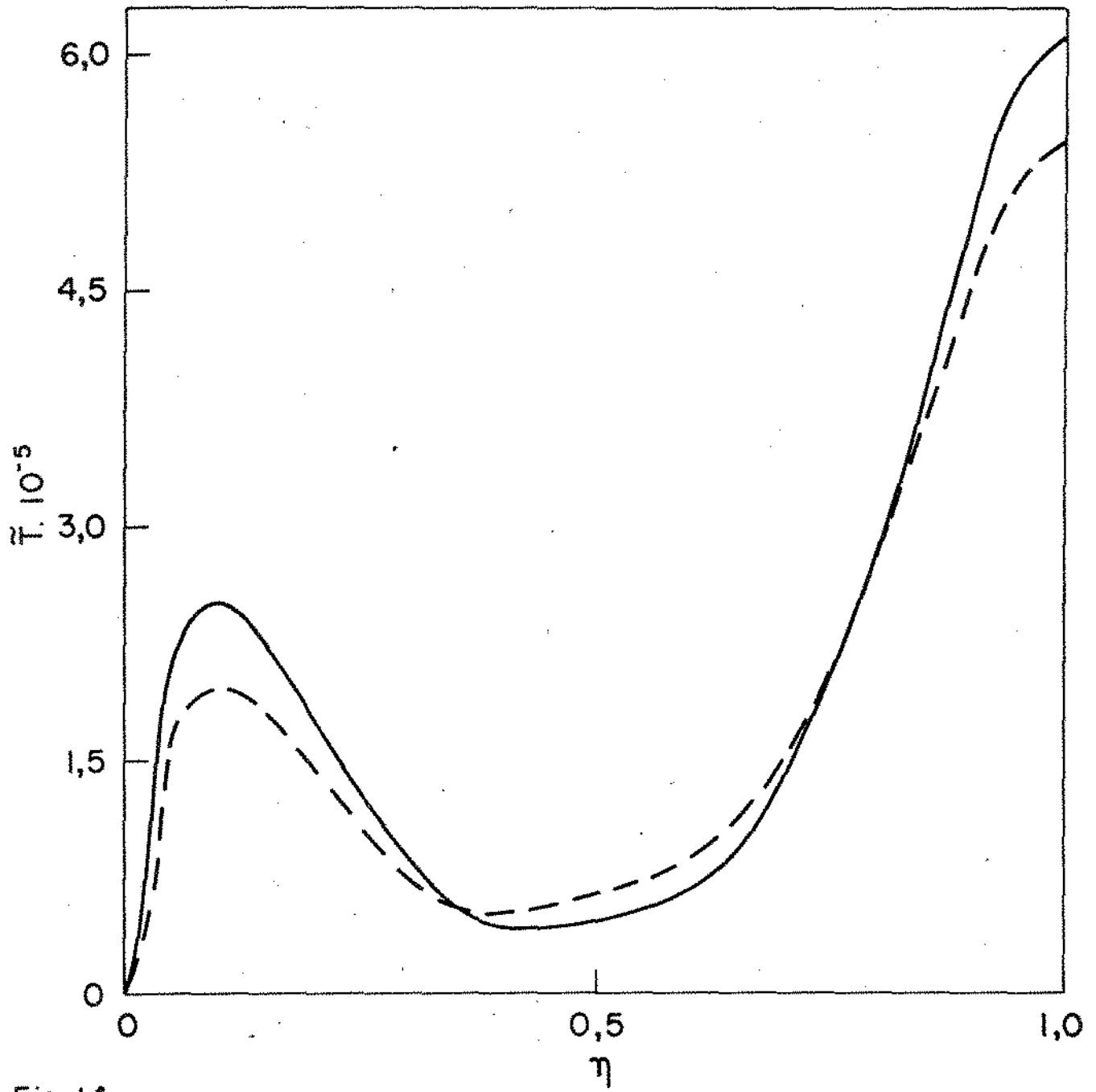


Fig. 14

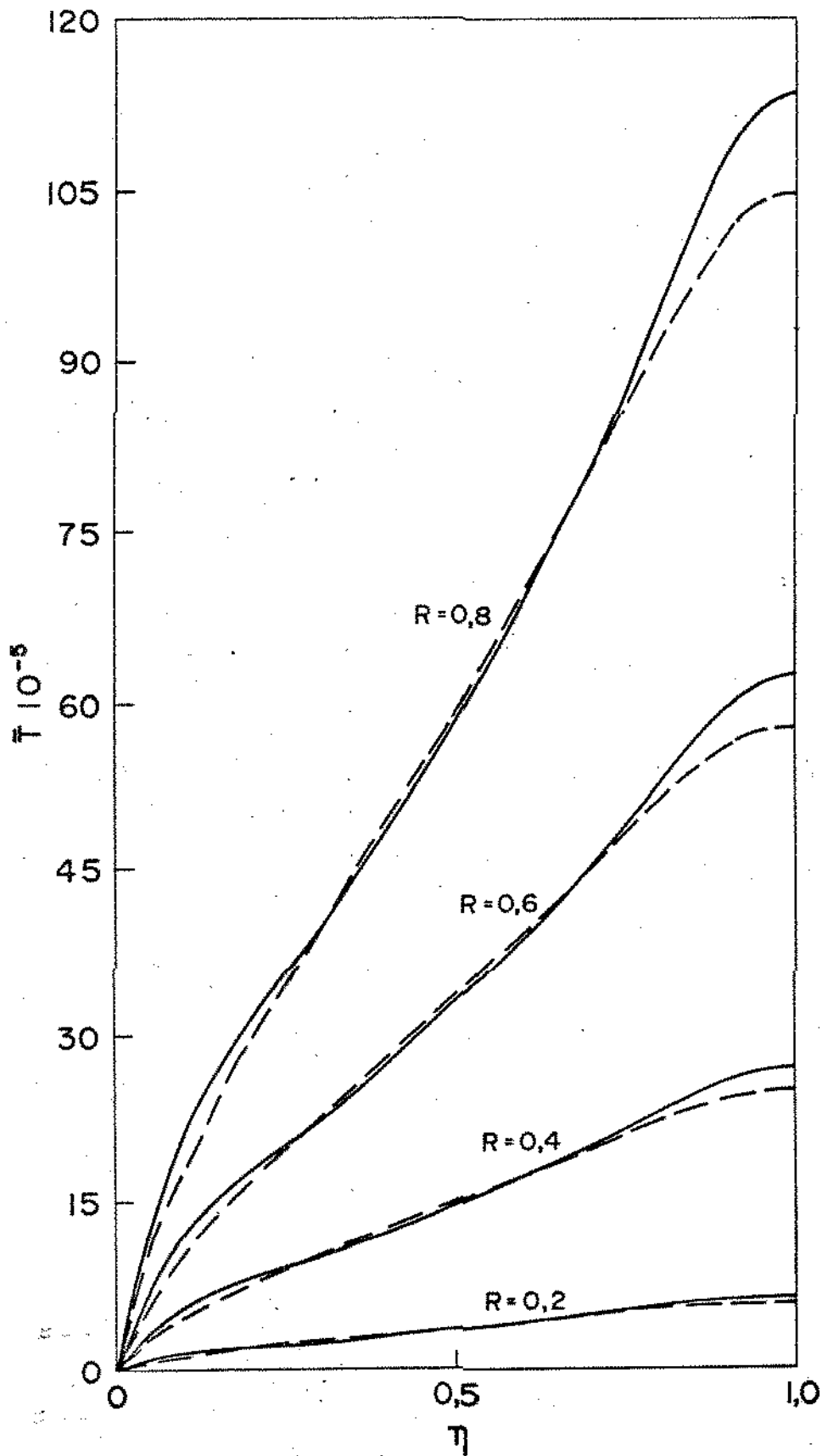


Fig 15

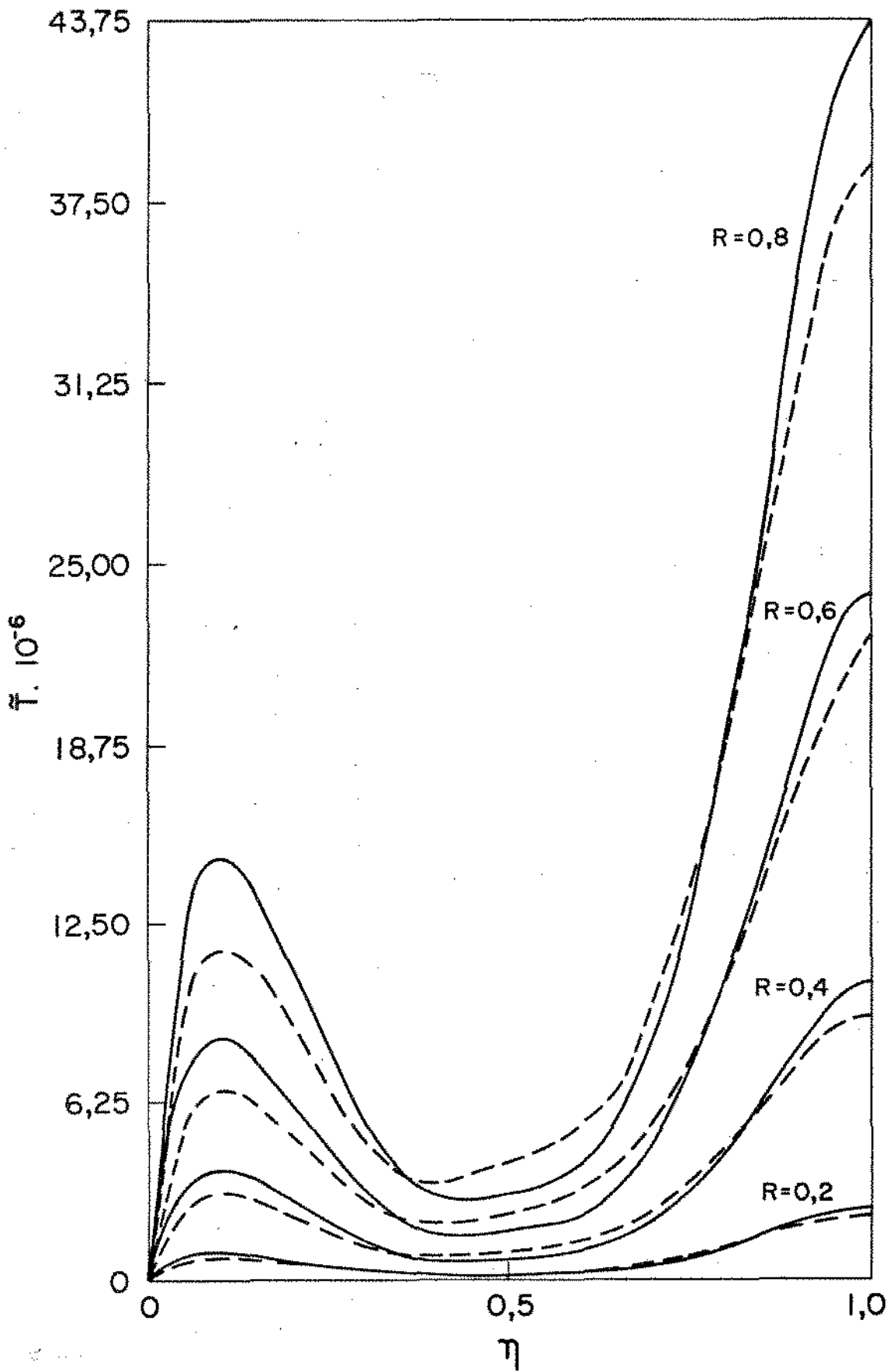


Fig. 17