

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

**ESTABILIDADE FRACA DE SOLUÇÕES
LAGRANGEANAS DE EQUAÇÕES
SEMIGEOSTRÓFICAS**

Josiane Cristina de Oliveira Faria

Doutorado em Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Helena Judith Nussenzweig Lopes

Co-orientador: Prof. Dr. Milton da Costa Lopes Filho

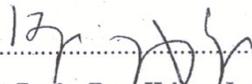
Campinas- SP

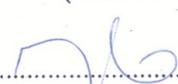
2008

**ESTABILIDADE FRACA DE SOLUÇÕES LAGRANGEANAS DE
EQUAÇÕES SEMIGEOSTRÓFICAS**

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Josiane Cristina de Oliveira Faria e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de fevereiro de 2008.


.....
Prof. Dra. Helena Judith Nussenzeig Lopes
(Orientadora)


.....
Prof. Dr. Milton da Costa Lopes Filho
(Co-orientador)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Milton da Costa Lopes Filho
Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo
Prof. Dr. José Luiz Boldrini
Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
Prof. Dr. Pedro Leite da Silva Dias

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em MATEMÁTICA.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

F225e Faria, Josiane Cristina de Oliveira
Estabilidade fraca de soluções lagrangeanas de equações
semigeostróficas / Josiane Cristina de Oliveira Faria-- Campinas, [S.P. :s.n.],
2008.

Orientador : Helena Judith Nussenzeig Lopes; Milton da Costa Lopes
Filho
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações semigeostróficas. 2. Soluções lagrangeanas. 3. Campos
vetoriais BV. I. Lopes, Helena Judith Nussenzeig. II. Lopes Filho, Milton da
Costa. . III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Weak stability of Lagrangian solutions to the semigeostrophic equations.

Palavras-chave em inglês (Keywords): Semigeostrophic equations. 2. Lagrangian solutions.
3. BV vector fields.

Área de concentração: Matemática - Análise

Titulação: Doutora em Matemática

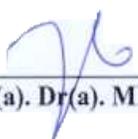
Banca examinadora: Prof. Dr. Milton da Costa Lopes Filho (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. José Luiz Boldrini (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti (UEM)
Prof. Dr. Pedro Leite da Silva Dias (LNCC)

Data da defesa: 25/02/2008

Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 25 de fevereiro de 2008 e aprovada

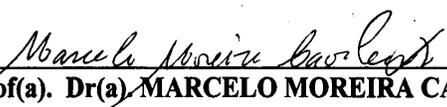
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



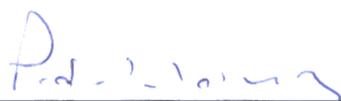
Prof(a). Dr(a). MILTON DA COSTA LOPES FILHO



Prof(a). Dr(a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO



Prof(a). Dr(a). MARCELO MOREIRA CAVALCANTI



Prof(a). Dr(a). PEDRO LEITE DA SILVA DIAS



Prof(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Ao meu esposo Jonas

Agradecimentos

Agradeço a Deus por mais esta graça conquistada após este longo e difícil caminho.

Agradeço ao corpo docente do IMECC pelo amparo no aspecto profissional. De maneira muito especial aos professores Helena Judith Nussenzeig Lopes e Milton da Costa Lopes Filho pela orientação e confiança em mim depositada, sem as quais a realização deste trabalho seria inviável.

Agradeço aos membros da banca pelos comentários, sugestões e questionamentos levantados, que contribuíram de forma valiosa para o aprimoramento da versão final desta tese.

Agradeço aos meus familiares, e especialmente ao meu esposo Jonas pelo apoio incondicional. Aos meus amigos distantes, amigos próximos, amigos de muito tempo e amigos recentes agradeço pelo carinho e pelo incentivo que deram durante a minha estadia em Campinas.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro que tornou possível a realização deste trabalho.

Resumo

As equações semigeostróficas, introduzidas por Hoskins e Bretherton em 1972 em [20], são um conjunto de equações que modelam fluxos atmosféricos/ oceânicos de larga escala. Elas possuem uma formulação em variáveis duais que se presta ao tratamento analítico. Alguns autores estudaram esta formulação, veja, por exemplo, [3], [14], [22], [12], [21], em particular obtendo existência de soluções fracas em espaços de medidas. Contudo, há dificuldades em converter soluções fracas da formulação dual em soluções fracas na formulação original, e portanto de interpretar fisicamente as soluções obtidas. Em [11], Cullen e Feldman provaram a existência de soluções Lagrangeanas para o sistema semigeostrófico em coordenadas físicas com vorticidade potencial em L^p , $p > 1$. No presente trabalho estendemos os resultados de Cullen e Feldman para o caso limite $p = 1$ e estudamos o comportamento de seqüências de soluções Lagrangeanas correspondentes a uma seqüência de vorticidades potenciais iniciais convergindo fortemente em L^1 . Provamos que tais soluções Lagrangeanas convergem em L^1_{loc} . Exibimos um contra-exemplo que sugere que nosso resultado não pode ser estendido para o espaço das medidas de Radon.

Palavras-chaves: Equações semigeostróficas, soluções Lagrangeanas, transporte ótimo, EDO sobre campos vetoriais BV.

Abstract

The semigeostrophic equations, which were introduced by Hoskins and Bretherton in 1972 in [20], are a set of equations that model large-scale atmospheric/ocean flows. They have a formulation in dual variables which can be analytically treated. Some authors studied these equations in dual variables, see for instance [3], [14], [22], [12], [21], particularly it is obtained existence of weak solutions in the space of Radon measures. In [11], Cullen and Feldman proved existence of Lagrangian solutions for the semigeostrophic system in physical variables with initial potential vorticity in L^p , $p > 1$. In the present work we extend Cullen and Feldman's result to the limit case $p = 1$ and we study the behavior of sequences of Lagrangian solutions corresponding to a sequence of initial potential vorticities converging strongly in L^1 . We prove that these Lagrangian solutions converge in L^1_{loc} . However, there is difficulties in to turn weak solutions in dual formulations into solutions in original formulation, and therefore there is difficulties in to interpret the obtained solutions physically. We show by means of a counterexample that our result cannot be extended to the space of Radon measures.

Keywords: Semigeostrophic equations, Lagrangian solutions, Optimal Transportation, ODE on BV vector fields.

Sumário

Resumo	xi
Abstract	xii
Introdução	1
Notações e resultados auxiliares	5
1 Equações Semigeostróficas, Transporte Ótimo e Fatorização Polar	15
1.1 Transporte Ótimo e Fatorização Polar	16
1.1.1 Problema de Monge x Problema de Kantorovich	18
1.2 Equações semigeostróficas: Formulação e Fatorização Polar	40
2 Formulação Lagrangeana	53
2.1 Motivação	53
2.2 Fluxo Lagrangeano no espaço dual	57
2.2.1 Equações diferenciais por campos vetoriais BV	58
2.2.2 O fluxo Lagrangeano no espaço dual	62

2.3	Fluxo Lagrangeano no espaço físico	76
3	Estabilidade Fraca	95
3.1	Estabilidade fraca em L^1 para soluções Lagrangeanas	96
3.2	Estabilidade fraca para o modelo água rasa	105
3.2.1	O modelo água-rasa: Formulação e existência de soluções	105
3.2.2	Estabilidade fraca de soluções Lagrangeanas – modelo água-rasa	116
3.3	Um exemplo no espaço das medidas	120
	Considerações Finais	125
	A Espaços de Orlicz	127
	Referências Bibliográficas	133

Introdução

Nosso objetivo no presente trabalho é o estudo matemático das equações que modelam fluxos atmosféricos e/ou oceânicos de larga escala, ou seja, fluxos que são influenciados pelo movimento de rotação da terra. Além disso, supomos que tais escoamentos ocorrem em regiões extratropicais, no caso dos fluxos atmosféricos, ou ocorrendo em regiões abaixo dos 100 metros de profundidade e a mais de 100 km de distância da costa, no caso de fluxos oceânicos. Nestas condições há um balanço entre as componentes horizontais das forças de Coriolis, e as componentes horizontais do gradiente de pressão, e dizemos que estas componentes horizontais estão em **balanço geostrófico**. Um modelo matemático que estuda fluxos nas condições acima descritas foi introduzido no ano de 1972 por B. Hoskins e F. Bretherton em [20], e é conhecido como **sistema semigeostrófico** ou **equações semigeostróficas** (SG).

Suponha que um fluido se mova no interior de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e limitado, e que satisfaça a um conjunto adequado de equações de Euler incompressíveis, com aproximações de Boussinesq e hidrostática:

$$D_t(u_1, u_2) + fu^\perp = (-\partial_1 p, -\partial_2 p), \quad (1)$$

$$D_t \rho = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (3)$$

$$\partial_3 p + \rho = 0 \quad (4)$$

$$D_t = \partial_t + u \cdot \nabla, \quad \nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}), \quad (5)$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ é a velocidade, $u^\perp = (-u_2, u_1, 0)$. A função p denota a pressão, e ρ a densidade, funções de $(x, t) \in \Omega \times [0, T)$, e f é dada pela força de Coriolis, que consideraremos constante.

Estamos interessados em fluxos de larga escala, isto é, fluxos que são influenciados pela rotação da terra. Para tais fluxos ocorre a relação geostrófica

$$(v_1^g, v_2^g) = (-\partial_2 p, \partial_1 p),$$

que define o chamado **vento geostrófico**. Além disso, a componente ageostrófica da velocidade deve ser transportada de forma passiva, ou seja, $D_t v^{ag} = 0$. Desta forma, podemos substituir $D_t(-\partial_2 p, \partial_1 p)$ por $D_t(u_1, u_2)$ em (1) e, ao tomarmos $f = 1$, obtemos o sistema semigeostrófico, descrito pelo seguinte conjunto de equações

$$(\text{SG}) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_t(v_1^g, v_2^g) + (\partial_1 p, \partial_2 p) = (u_2, -u_1) \\ (v_1^g, v_2^g) = (-\partial_2 p, \partial_1 p) \\ D_t \rho = 0 \\ \text{div} u = 0 \\ \partial_3 p + \rho = 0 \\ D_t = \partial_t + u \cdot \nabla, \quad \nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}), \end{array} \right.$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ é a velocidade, composta de uma parte geostrófica (v^g), e uma parte ageostrófica (v^{ag}), isto é $u = v^g + v^{ag}$. A função p denota a pressão, e ρ a densidade, funções de $(x, t) \in \Omega \times [0, T)$. Os dados iniciais e de fronteira são dados por

$$\begin{aligned} u \cdot \nu &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times [0, T) \\ p(x, 0) &= p_0(x) \text{ em } \Omega. \end{aligned}$$

Sob esta formulação não há condição inicial sobre u , e também não há uma equação de evolução para o campo de velocidades u . No entanto, através da mudança de coordenadas

$$P(x, t) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + p(x, t), \quad (6)$$

introduzida por B. Hoskins em [19], o sistema SG pode ser reescrito como

$$\begin{cases} D_t X = J(X - x) \\ \operatorname{div} u = 0 \\ X = \nabla P \\ u \cdot \nu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times [0, T) \\ P(x, 0) = P_0(x) \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

onde $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e este sistema é conhecido como a forma Lagrangeana das equações semigeostróficas. Hoskins observou que, a partir de uma mudança entre as variáveis dependentes e independentes no sistema anterior, ou seja, se ao invés de considerarmos $X = \nabla P$ como função de $x = (x, y, z) \in \Omega$, considerarmos x como função de X , obtemos um conjunto de equações nas variáveis (X, t) , as quais chamaremos de variáveis duais, dado por

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha + \nabla \cdot (U \alpha) &= 0 & \mathbb{R}^3 \times [0, T) \\ \nabla P(\cdot, t) \# \mathcal{L}_\Omega &= \alpha(\cdot, t), & \forall t \in [0, T) \\ U(X, t) &= J[X - \nabla P^*(X, t)] \\ P^*(X, t) &= \sup_{x \in \Omega} (x \cdot X - P(x, t)), & \forall (X, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T) \\ \alpha(X, 0) &= \alpha_0(X) & \text{q.t.p. em } X \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Estas equações têm sido objeto de estudo de vários autores. Destacamos o trabalho de J-D. Benamou e Y. Brenier [3], M. Cullen e H. Maroofi [12], H. Nussenzveig Lopes e M. Lopes Filho [22], M. Cullen e W. Gangbo [14], G. Loeper [21], que estudaram soluções fracas para estas equações sob a formulação dual acima citada. Note que na formulação dual aparece naturalmente uma equação de Monge-Ampère, a qual, pelo teorema de fatorização polar devido a Brenier [4], possui uma solução fraca. O teorema de fatorização polar expressa rearranjos de funções em termos de gradientes de funções convexas, e é considerado um marco na Teoria do Transporte Ótimo de Massa. Além da aplicação em Geofísica no contexto das equações semigeostróficas, a Teoria do Transporte Ótimo de massa também possui aplicações em problemas de irrigação e transporte em

Física e Biologia, em Economia, ao considerarmos a questão da otimização urbana, no quesito de obtenção de escalas de otimização de rede de suprimentos para o transporte público e otimização de tráfego, entre outras.

Ainda com relação às propriedades qualitativas das equações semigeostróficas, citamos os resultados obtidos por G. Loeper em [21], o qual propôs uma nova formulação fraca para a formulação dual das equações semigeostróficas, que pudesse ser aplicada no espaço das medidas de Radon. Loeper também mostrou a estabilidade fraca de soluções das equações semigeostróficas em variáveis duais, no espaço das medidas de Radon. Nos referimos também aos resultados obtidos por M. Cullen e M. Feldman em [11], que mostram a existência de soluções Lagrangeanas para as equações semigeostróficas no espaço físico, com vorticidade inicial em L^p , $p > 1$. Para a obtenção de tais resultados, os autores se valeram da teoria recente desenvolvida por L. Ambrosio em [2], relativa a EDO's e equações de transporte por campos vetoriais de variação limitada (BV). Não existem até o momento resultados com relação à unicidade de solução fraca das equações semigeostróficas.

Este texto tem por objetivo apresentar uma introdução à Teoria do Transporte Ótimo, que serve de base para o desenvolvimento da teoria de existência de soluções fracas para as equações semigeostróficas; apresentamos também alguns resultados sobre EDO's e equações de transporte por campos vetoriais BV, e seu foco principal é o estudo das equações semigeostróficas no espaço físico, estendendo o resultado de existência devido a Cullen e Feldman para o caso limite $p = 1$, e mostrando um resultado com relação à estabilidade fraca das soluções Lagrangeanas das equações semigeostróficas. Foi estudado o comportamento de sequências de soluções Lagrangeanas cujas vorticidades potenciais respectivas convergem fortemente em L^1 . Provamos que soluções Lagrangeanas convergem em L^1_{loc} , e através de um exemplo mostramos que nem sempre temos estabilidade fraca

de soluções no espaço das medidas de Radon.

Este texto está organizado como segue: primeiramente, fixamos algumas notações e colocamos alguns resultados importantes que serão utilizados no decorrer do texto. O Capítulo 1 apresenta uma introdução à Teoria do Transporte Ótimo, incluindo o teorema de fatorização polar de Brenier, e uma introdução às equações semigeostróficas, apresentando as formulações dual e Lagrangeana destas equações e alguns resultados relativos à formulação dual. O Capítulo 2 é dedicado ao estudo da formulação Lagrangeana, a motivação para a introdução deste tipo de solução, existência de soluções Lagrangeanas para estas equações com dados iniciais em L^1 , e a unicidade do fluxo Lagrangeano no espaço físico. Neste Capítulo ainda há uma seção na qual fazemos uma breve explanação dos resultados obtidos por Ambrosio com relação a EDO's sobre campos vetoriais BV, e a aplicação destes resultados no contexto Lagrangeano das equações SG. O Capítulo 3 versa sobre estabilidade fraca de soluções Lagrangeanas das equações semigeostróficas, incluindo uma breve explanação sobre os resultados obtidos com relação ao modelo água rasa destas equações. Também apresentamos neste capítulo um exemplo em que não há estabilidade fraca de soluções no espaço das medidas de Radon. Por fim, apresentamos um apêndice contendo alguns resultado básicos sobre os espaços de Orlicz.

Notações e resultados auxiliares

Nesta seção estaremos fixando notações, terminologia e mencionando resultados que serão utilizados no decorrer deste texto.

Se A é um subconjunto Lebesgue-mensurável de \mathbb{R}^n , sua medida de Lebesgue n -dimensional será denotada por $|A|_{\mathbb{R}^n}$. Em algumas ocasiões, por conveniência, a medida de Lebesgue n -dimensional será denotada por \mathcal{L}^n . Denotamos por χ_A , a função carac-

terística de A . Denotamos por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as medidas de Radon sobre \mathbb{R}^n , e seus subconjuntos $\mathcal{BM}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ são, respectivamente, o conjunto das medidas limitadas sobre \mathbb{R}^n , e o conjunto das medidas de probabilidade sobre \mathbb{R}^n . Dados μ uma medida de Radon, e A um subconjunto mensurável com relação a esta medida, denotaremos a medida de A com relação a μ por $\mu[A]$.

Sempre que T é uma aplicação de um espaço de medida X , munido de uma medida μ , para um espaço de medida Y , denotamos por $T_{\#}\mu$ a medida imagem (ou “push-forward”) de μ por T , para significar que: $(T_{\#}\mu)[A] := \mu[T^{-1}(A)]$; $A \subset Y$, $T^{-1}(A) \subset X$. Quando μ é a medida de Lebesgue, denotamos o push-forward da medida de Lebesgue em X pela aplicação T por $T_{\#}\mathcal{L}_X$.

Seja A um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Denotamos por $C_0(A)$ o conjunto das funções contínuas sobre A que se anulam no infinito, $C_b(A)$ o conjunto das funções contínuas e limitadas, e $C_c^k(A)$ o conjunto das funções contínuas, k -diferenciáveis e com suporte compacto. Se E é um espaço de Banach, denotamos por $C([0, T], w - E)$ o conjunto de todas funções Lebesgue mensuráveis sobre $[0, T)$, com valores em E , tais que $v_t(\cdot) := v(\cdot, t) \in E$ para todo $t \in [0, T)$, e para todo $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t^* \in [0, T)$ satisfazendo $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t^*$ tem-se que $v_{t_k} \rightharpoonup v_{t^*}$ fracamente (“weakly”) em E (o conjunto $C([0, T), w^* - E)$ possui uma definição análoga).

A seguir, temos alguns resultados básicos que serão utilizados no decorrer das demonstrações. Alguns serão apenas enunciados, e indicamos uma referência bibliográfica para consulta posterior.

Alguns resultados de Análise Convexa

Definição 1 *Seja, E um espaço de Banach, e $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dizemos que φ é uma*

função convexa se, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, e todo $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) < \mu, \varphi(y) < \nu, 0 < \lambda < 1$, temos

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda\mu + (1 - \lambda)\nu.$$

Observação 1 A definição anterior é equivalente a dizermos que φ satisfaz

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y),$$

para todo $x, y \in E$ e $t \in (0, 1)$.

Denotaremos o domínio de uma função convexa φ por $D(\varphi)$.

Uma função convexa φ é contínua e localmente Lipschitziana sobre $Int(D(\varphi))$ (veja [26], pp.67-69, ou [18] p.236, Teorema 1). Além disso, se φ é convexa, pelo Teorema de Rademacher (veja [18]) segue que φ é diferenciável quase sempre, e $\nabla\varphi$ é localmente limitada.

Para todos os pontos $x \in D(\varphi)$ tais que $\nabla\varphi(x)$ esteja definida, vale a relação

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, \varphi(z) \geq \varphi(x) + \langle \nabla\varphi(x), (z - x) \rangle. \quad (7)$$

Esta relação pode ser interpretada pelo fato geométrico do gráfico de φ estar acima de seu hiperplano tangente no ponto x . Além disso, se $\nabla\varphi$ está definida nos pontos $x, z \in D(\varphi)$, de (7) deduzimos que

$$\langle \nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(z), x - z \rangle \geq 0.$$

Toda função convexa φ é duas vezes diferenciável, para quase todo ponto $x \in D(\varphi)$. Este resultado é conhecido como Teorema de Aleksandrov, e pode ser encontrado, por exemplo, em [18]. Este é resultado interessante visto que nos permite concluir, por exemplo, que para toda função convexa φ , $\nabla\varphi$ é contínua para quase todo ponto.

No contexto das funções convexas é possível lidar com uma possível não diferenciabilidade. Para isto, é necessário a introdução de uma noção “generalizada” do conceito de diferencial, que definiremos a seguir.

Definição 2 Um vetor x^* é dito ser um subgradiente de uma função convexa em um ponto x se

$$\varphi(z) \geq \varphi(x) + \langle x^*, z - x \rangle, \forall z.$$

O conjunto de todos os subgradientes de φ em x é chamado a subdiferencial de φ em x e é denotado por $\partial\varphi(x)$.

Quando uma função convexa φ é diferenciável no ponto x , então $\partial\varphi(x)$ contém um único elemento x^* , o qual coincide com $\nabla\varphi(x)$. A proposição seguinte, na qual consideramos $E = \mathbb{R}^n$, demonstra este fato.

Proposição 1 Seja φ uma função definida sobre \mathbb{R}^n , convexa, e seja x um ponto onde φ é finita. Se φ é diferenciável em x então $\nabla\varphi(x)$ é o único subgradiente de φ em x .

Demonstração: Veja [24].

■

Observação 2 A recíproca da Proposição 1 é verdadeira. Para detalhes, veja [24], Teorema 25.1

Agora, observe que, se a aplicação φ é semicontínua inferiormente, então a subdiferencial $\partial\varphi$ é contínua em \mathbb{R}^n , no seguinte sentido:

$$\text{se } x_k \rightarrow x, y_k \in \partial\varphi(x_k) \text{ e } \partial\varphi(x_k) \ni y_k \rightarrow y, \text{ então } y \in \partial\varphi(x).$$

De fato, seja φ uma função convexa semicontínua inferiormente, e x_k, y_k seqüências nas condições descritas anteriormente. Então, $\forall z \in \mathbb{R}^n$, quando $k \rightarrow \infty$, temos que

$$\varphi(z) \geq \varphi(x_k) + \langle y_k, x_k - z \rangle \geq \varphi(x) + \langle y, x - z \rangle,$$

e portanto $y \in \partial\varphi(x)$.

A seguir, definimos a transformada de Legendre de uma função φ , a qual é denotada por φ^* .

Definição 3 Para toda função $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, onde E é um espaço de Banach, definimos a transformada de Legendre de φ por

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle_{E, E^*} - \varphi(x)\}.$$

A transformada de Legendre φ^* satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) φ^* é convexa;
- (b) φ^* é semi-contínua inferiormente;
- (c) Se φ^* está definida sobre um subconjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tal que $\Omega \subset B(0, R)$, então φ^* é Lipschitz contínua, e

$$|\varphi^*(z) - \varphi^*(y)| \leq R|z - y|. \quad (8)$$

Observe que decorre da Definição 3 que uma função φ e sua transformada de Legendre φ^* satisfazem, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, a seguinte desigualdade:

$$\varphi(x) + \varphi^*(y) \geq x \cdot y. \quad (9)$$

A proposição seguinte caracteriza os casos em que temos a igualdade em (9).

Proposição 2 *Seja φ convexa e semi-contínua inferiormente em \mathbb{R}^n . Então, para $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que*

$$x.y = \varphi(x) + \varphi^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial\varphi(x). \quad (10)$$

Demonstração: Este resultado é uma consequência direta da definição de subdiferencial e de (9). ■

Temos a seguir um resultado importante que diz respeito à relação entre funções convexas e suas transformadas de Legendre, e é conhecido Dualidade de Legendre para funções convexas semicontínuas inferiormente. Omitiremos sua demonstração por ser técnica, e fugir aos objetivos principais deste texto. Para o leitor interessado nos detalhes da demonstração sugerimos Villani [27].

Proposição 3 *Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. São equivalentes:*

(i) φ é convexa e semi-contínua inferiormente;

(ii) $\varphi = \psi^*$ para alguma função ψ adequada;

(iii) $\varphi^{**} = \varphi$.

Demonstração: Veja C. Villani [27], pg. 56, Proposição 2.5. ■

O próximo resultado diz respeito à regularidade de $\nabla\varphi$ quando φ é uma função convexa. Para cada $r > 0$, denotemos por B_r a bola centrada na origem, e de raio r .

Lema 1 ([3]) *Seja $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ uma função convexa, Lipschitziana. Então, para todo $r > 0$, existe uma constante $c = c(r)$ tal que*

$$\|\nabla\varphi\|_{W^{1,1}(B_r)} \leq c(r)Lip(\varphi).$$

Demonstração: Sabendo que φ é uma função convexa, e que $\|\nabla\varphi\|_{L^1(B_r)} \leq c(r)Lip(\varphi)$, estimemos $\|D^2\varphi\|_{L^1(B_r)}$. Note que $D^2\varphi$ é uma matriz simétrica e não negativa pela convexidade de φ . Além disso, esta matriz só possui autovalores não negativos. Lembre que

$$\Delta\varphi = tr(D^2\varphi) = \sum \lambda_i \geq 0. \quad (11)$$

Utilizando a fórmula de Green, e pelo fato de φ ser convexa, temos que

$$\|\Delta\varphi\|_{L^1(B_r)} = \int_{B_r} |\Delta\varphi(x)| dx = \int_{B_r} \Delta\varphi(x) dx = \int_{\partial B_r} \nabla\varphi(x) \cdot \vec{n} d\nu.$$

Desta forma, chegamos à seguinte desigualdade:

$$\|\Delta\varphi\|_{L^1(B_r)} \leq \int_{\partial B_r} |\nabla\varphi(x)| |\vec{n}| d\nu \leq Lip(\varphi) \int_{\partial B_r} d\nu = Lip(\varphi)c(r). \quad (12)$$

Note que, como os autovalores de φ são não negativos, temos que $\max\{|\lambda_i|\} = \max\{\lambda_i\}$. Além disso, $\max\{|\lambda_i|\}$ define uma norma em \mathbb{R}^{2d} . Portanto, de (11), e do fato que em \mathbb{R}^{2d} as normas são equivalentes, obtemos que

$$\|D^2\varphi\|_{L^1(B_r)} \leq c_1 \|\max\{\lambda_i\}\|_{L^1(B_r)} \leq c_1 \left\| \sum \lambda_i \right\|_{L^1(B_r)} = c_1 \|\Delta\varphi\|_{L^1(B_r)}. \quad (13)$$

Logo, de (13) e do fato que $\|\nabla\varphi\|_{L^1(B_r)} \leq c(r)Lip(\varphi)$, concluímos que

$$\|\nabla\varphi\|_{W^{1,1}(B_r)} = \|\nabla\varphi\|_{L^1(B_r)} + \|D^2\varphi\|_{L^1(B_r)} \leq Lip(\varphi)c(r).$$

■

Observação 3 • *Este lema nos permite concluir que, se φ é convexa e globalmente Lipschitziana, então $\nabla\varphi \in BV$.*

*De fato, seja φ_n , seqüência de funções convexas e globalmente Lipschitzianas, tal que $\varphi_n \in C^2$ e $\varphi_n \rightarrow \varphi$ (Note esta seqüência existe, basta tomarmos $\varphi_n = \varphi * \eta_n$, onde η_n*

é um mollifier padrão). Pelo lema anterior, temos que $\|\nabla\varphi_n\|_{W^{1,1}(B_r)} \leq c(r)Lip(\varphi)$, e portanto $\nabla\varphi_n \rightharpoonup F$, w^*BV , isto é, para toda função teste $\psi \in L^\infty$ tal que $\nabla\psi \in C^0$, temos que

$$\int \nabla\varphi_n\psi \rightarrow \int F\psi.$$

Mas, como

$$\int \nabla\varphi_n\psi = - \int \varphi_n\nabla\psi \rightarrow - \int \varphi\nabla\psi = \int \nabla\varphi\psi,$$

temos que $F = \nabla\varphi$, o que mostra o desejado.

- Note que, para $1 < p < \infty$, a desigualdade de Calderón-Zygmund nos diz que

$$\|D^2\varphi\|_{L^p} \leq c_p\|\nabla\varphi\|_{L^p}.$$

Uma observação importante que decorre da demonstração do Lema 1 (em particular da desigualdade (13)) é que, para toda função convexa φ de classe C^2 e globalmente Lipschitziana, vale a desigualdade de Calderón-Zygmund quando $p = 1$.

Ainda com relação a funções convexas e suas transformadas de Legendre, temos o seguinte resultado de dualidade, que na verdade é um princípio “minimax” clássico em Análise Funcional. Sua demonstração é uma consequência do Teorema de Hahn-Banach, e será omitida, mas pode ser encontrada por exemplo em H. Brèzis [5].

Lema 2 (Dualidade de Fenchel-Rockafellar) *Sejam E um espaço vetorial normado, E^* seu espaço dual topológico, e Θ, Υ funções convexas sobre E com valores em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Assuma que existe $z_0 \in E$ tal que $\Theta(z_0) < \infty$, $\Upsilon(z_0) < \infty$ e Θ é contínua em z_0 . Se Θ^*, Υ^* são as transformadas de Legendre de Θ e Υ , respectivamente, então*

$$\inf_{z \in E} [\Theta(z) + \Upsilon(z)] = \max_{z^* \in E^*} [-\Theta^*(-z^*) - \Upsilon^*(z^*)]. \quad (14)$$

Resultados diversos

A seguir apresentamos alguns resultados técnicos que serão utilizados nas demonstrações no decorrer do texto.

Lema 3 *Sejam ϕ e ψ funções contínuas definidas em $\overline{B(x_0, R)}$, a bola fechada de centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio R . Suponha que ϕ possua um máximo estrito em x_0 . Seja:*

$$m = \phi(x_0) - \max_{|x-x_0|=R} \phi.$$

Se ψ satisfaz a condição: $\max_{|x-x_0|\leq R} |\psi - \phi| < \frac{m}{2}$, então ψ tem um máximo em $B(x_0, R)$.

Demonstração: Veja H. Lopes e M. Lopes [23], Lema 3.1. ■

Observação 4 *Note que deste lema pode-se concluir que, se uma função ϕ possui um máximo absoluto em x_0 , então toda função contínua, suficientemente próxima de ϕ na norma da convergência uniforme, também possui máximo absoluto em uma vizinhança de x_0 .*

O próximo resultado nos fornece uma versão generalizada do Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue para o contexto de seqüências convergentes de medidas de Radon.

Lema 4 *(Teorema da Convergência Dominada Generalizado) Seja (X, \mathfrak{M}) um espaço de medida, e $\{\mu_n\}$ uma seqüência de medidas tal que $\mu(E) = \lim \mu_n(E)$, para todo $E \in \mathfrak{M}$. Sejam $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ duas seqüências de funções mensuráveis que convergem pontualmente para f e g , respectivamente. Suponha $|f_n| \leq g_n$ e que*

$$\lim \int g_n d\mu_n = \int g d\mu < \infty.$$

Então

$$\lim \int f_n d\mu_n = \int f d\mu.$$

Demonstração: Veja H. L. Royden [25].

■

Capítulo 1

Equações Semigeostróficas, Transporte Ótimo e Fatorização Polar

As equações semigeostróficas são um conjunto de equações que vêm sendo amplamente utilizadas em meteorologia na modelagem de fluxos atmosféricos e oceânicos de larga escala, isto é, fluxos que são influenciados pelo movimento de rotação da terra. O interesse pelo estudo destas equações vem crescendo nos últimos anos, uma vez que, após algumas mudanças de variáveis neste conjunto de equações, o sistema resultante tem solução fraca, obtida com o auxílio de um teorema de fatorização polar, devido a Brenier [4]. Este teorema revitalizou o estudo do problema de transporte ótimo, originalmente proposto por Monge, caracterizando estratégias ótimas de transferência em termos de gradientes de funções convexas.

A seguir, damos uma breve explanação desta teoria que fundamenta alguns resultados citados e/ou obtidos no decorrer deste texto.

1.1 Transporte Ótimo e Fatorização Polar

O problema do transporte ótimo de massa foi originalmente proposto por Monge em 1781, e provinha da pergunta: Dada uma pilha de areia e um buraco, o qual deverá ser completamente preenchido pela areia, qual a melhor forma de realizar este transporte, com o menor custo possível? (Observe que o buraco e o monte de areia devem ter o mesmo volume).

Para entendermos este problema do ponto de vista matemático, vamos modelar a pilha de areia e o buraco por medidas de probabilidade μ , ν , definidas respectivamente sobre os espaços de medida X e Y . Interpretamos $d\mu(x)$ como a massa de areia em x , e $d\nu(y)$ a massa que será colocada em y . A estratégia de transporte, que dirá como transportaremos uma quantidade de massa de X para Y será dada por uma função $T : X \rightarrow Y$, e o custo de transportar uma unidade de massa de x para y será denotado por $c(x, y)$.

Observe que a estratégia de transporte T está rearranjando a massa da pilha de areia no buraco em questão. Este fenômeno é denotado por $\nu = T_{\#}\mu$, e dizemos que ν é o "push-forward" da medida μ por T . Isto significa que $\mu[T^{-1}(A)] = \nu[A]$, para todo subconjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}^n$, e quer dizer que, para toda função teste $\phi \in C_0(Y)$, a seguinte identidade é satisfeita:

$$\int_X \phi(T(x))d\mu(x) = \int_Y \phi(y)d\nu(y). \quad (1.1.1)$$

O custo total no problema de Monge é dado por

$$\int_X c(x, T(x))d\mu(x),$$

onde T é a aplicação que define a estratégia de transporte escolhida. Seja

$$\mathcal{A} = \{s : X \rightarrow Y \mid s \text{ é injetiva e } s_{\#}\mu = \nu\}.$$

Desta forma, o problema de Monge consiste em encontrar $T \in \mathcal{A}$ tal que

$$I[T] = \min_{s \in \mathcal{A}} I[s], \quad (1.1.2)$$

onde

$$I[s] = \int_X c(x, s(x)) d\mu(x).$$

Estratégias de transferência também podem ser modeladas por medidas de probabilidade π , não negativas, sobre o espaço produto $X \times Y$. A princípio é possível que uma quantidade de massa localizada em um ponto x possa ser dividida e redistribuída em outras partes. Assumiremos que

$$\pi[A \times Y] = \mu[A] \quad \pi[X \times B] = \nu[B], \quad (1.1.3)$$

para todo subconjunto mensurável A de X e B de Y , e escreveremos, $proj_X \pi = \mu$ e $proj_Y \pi = \nu$ para significar (1.1.3). Usando dualidade de medidas, (1.1.3) quer dizer que, para toda função teste $\varphi \in C_0(X)$, $\psi \in C_0(Y)$, devemos ter

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} \varphi(x) d\pi(x, y) &= \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \langle \varphi, \mu \rangle \\ \int_{X \times Y} \psi(y) d\pi(x, y) &= \int_Y \psi(y) d\nu(y) = \langle \psi, \nu \rangle. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Dizemos que as medidas de probabilidade π que satisfazem (1.1.4) possuem marginais μ e ν . Elas serão denominadas estratégias de transferência admissíveis. Denotaremos o conjunto de tais medidas por

$$\mathcal{A}^* = \{\pi \in \mathcal{P}(X \times Y); (1.1.4) \text{ vale para } (\varphi, \psi) \in C_0(X) \times C_0(Y)\}, \quad (1.1.5)$$

onde $\mathcal{P}(X \times Y)$ denota o conjunto das medidas de probabilidade definidas sobre o espaço produto $X \times Y$.

Kantorovich propôs nos anos 40 o seguinte problema: encontrar um mínimo para o funcional

$$J[\pi] = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y); \quad \pi \in \mathcal{A}^*. \quad (1.1.6)$$

A aplicação deste problema em questões básicas de economia ligadas às relações entre produção industrial e consumo garantiu um prêmio Nobel a Kantorovich.

O problema de Kantorovich é dito ser uma versão relaxada para o problema original de Monge, e sua formulação permite que a massa proveniente de um ponto $x \in X$ possa ser dividida em vários pontos $y \in Y$.

1.1.1 Problema de Monge x Problema de Kantorovich

Gostaríamos de saber se existe alguma relação entre as soluções dos problemas de Kantorovich e Monge.

Para isto, tome $\tilde{\pi}$ uma solução para o problema de Kantorovich, e suponha que exista $\tilde{T} : X \rightarrow Y$, injetiva e tal que

$$d\tilde{\pi}(x, y) = d\mu(x) \otimes \delta(y = \tilde{T}(x)). \quad (1.1.7)$$

Afirmção: $y = \tilde{T}(x)$ é solução do problema de Monge.

Para provarmos esta afirmação devemos mostrar que $\tilde{T} \in \mathcal{A}$, e que \tilde{T} minimiza o custo do transporte no problema de Monge. De fato:

1. $\tilde{T} \in \mathcal{A}$.

Mostraremos que $\tilde{T}_\# \mu = \nu$. Para isto, observe que se $\psi \in C_0(Y)$ então, como $proj_Y \tilde{\pi} = \nu$, temos que

$$\int_Y \int_X \psi(y) d\tilde{\pi}(x, y) = \int_Y \psi(y) d\nu(y). \quad (1.1.8)$$

Por outro lado, utilizando o Teorema de Fubini, de (1.1.7) podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_Y \int_X \psi(y) d\tilde{\pi}(x, y) &= \int_Y \int_X \psi(y) d\mu(x) \delta(y = \tilde{T}(x)) \\ &= \int_X \int_Y \psi(y) \delta(y = \tilde{T}(x)) d\mu(x) \\ &= \int_X \psi(\tilde{T}(x)) d\mu(x), \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

para $\psi \in C_0(Y)$.

Portanto, de (1.1.8) e (1.1.9) temos que

$$\int_X \psi(\tilde{T}(x)) d\mu(x) = \int_Y \psi(y) d\nu(y). \quad (1.1.10)$$

Como \tilde{T} é injetiva por hipótese, e \tilde{T} satisfaz (1.1.10), segue que $\tilde{T} \in \mathcal{A}$.

2. $I[\tilde{T}] = \min_{T \in \mathcal{A}} I[T]$

Seja $T \in \mathcal{A}$. Observemos que, se π é uma medida de probabilidade tal que $d\pi(x, y) = d\mu(x) \otimes \delta(y = T(x))$, então $\pi \in \mathcal{A}^*$ pois, para $\varphi \in C_0(X)$, $\psi \in C_0(Y)$, (1.1.4) é satisfeita. De fato, temos que

$$\begin{aligned} \int_Y \int_X \psi(y) d\pi(x, y) &= \int_Y \int_X \psi(y) d\mu(x) \delta(y = T(x)) \\ &= \int_X \psi(T(x)) d\mu(x) \\ &= \int_Y \psi(y) d\nu(y), \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in C_0(X)$, e também, $\forall \psi \in C_0(Y)$,

$$\begin{aligned} \int_Y \int_X \varphi(x) d\pi(x, y) &= \int_Y \int_X \varphi(x) d\mu(x) \delta(y = T(x)) \\ &= \int_X \varphi(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

uma vez que $\int_Y \delta(y = T(x)) = 1$.

Assim, lembrando que $\tilde{\pi}$ é solução para o problema de Kantorovich, temos que

$$J[\pi] \geq J[\tilde{\pi}]. \quad (1.1.11)$$

No entanto, observe que

$$J[\pi] = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y) = \int_X c(x, T(x)) d\mu(x) = I[T], \quad (1.1.12)$$

e, da mesma forma, temos que

$$I[\tilde{T}] = J[\tilde{\pi}]. \quad (1.1.13)$$

Logo, de (1.1.11), (1.1.12) e (1.1.13) concluímos que

$$I[\tilde{T}] = J[\tilde{\pi}] \leq J[\pi] = I[T],$$

ou seja $I[\tilde{T}] = \min_{T \in \mathcal{A}} I[T]$.

Portanto, como $\tilde{T} \in \mathcal{A}$ e \tilde{T} minimiza o custo do transporte no problema de Monge segue que \tilde{T} satisfazendo (1.1.7) é solução do problema de Monge.

Uma pergunta básica que deve ser feita neste ponto é se, de fato, os problemas de minimização de Monge e de Kantorovich possuem solução. A resposta é positiva em algumas situações, e depende da natureza dos espaços de medida X , Y , e da função custo $c := c(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Apresentamos a seguir uma idéia do procedimento utilizado no caso do **custo quadrático**

$$c(x, y) = \frac{|x - y|^2}{2}, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{A}^{**} = \{(u, v), u \in C_0(X), v \in C_0(Y); u(x) + v(y) \leq c(x, y)\}.$$

Vamos introduzir uma formulação dual para o nosso problema, a qual consiste em resolver o seguinte problema de maximização:

$$\max_{(u,v) \in \mathcal{A}^{**}} K[u, v], \quad (1.1.14)$$

onde $K[u, v] = \int_X u(x)d\mu(x) + \int_Y v(y)d\nu(y)$. A relação entre a formulação relaxada de Kantorovich (K) e a formulação dual (D) é estabelecida através do seguinte resultado:

Teorema 1.1.1 (Dualidade de Kantorovich)

$$\min_{\pi \in \mathcal{A}^*} J[\pi] = \max_{(u,v) \in \mathcal{A}^{**}} K[u, v],$$

onde $K[u, v] = \int_X u(x)d\mu(x) + \int_Y v(y)d\nu(y)$.

Demonstração: A demonstração apresentada é baseada no texto de C. Villani [27]. Por conveniência, estaremos assumindo que X e Y são compactos, e que c é contínua sobre o espaço produto $X \times Y$. Denote $E = C(X \times Y)$, e $E^* = \mathcal{BM}(X \times Y)$, o conjunto das medidas de Radon limitadas sobre $X \times Y$. Vamos provar este resultado aplicando o Teorema de Dualidade de Fenchel-Rockafellar (Lema 2). Para isto, necessitamos de aplicações θ, Σ convexas sobre E , com valores em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, e também que exista um ponto $z_0 \in E$ tal que $\theta(z_0) < \infty, \Sigma(z_0) < \infty$ e θ é contínua em z_0 .

Defina as aplicações θ, Σ como segue:

$$\begin{aligned} \theta : E &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ w &\mapsto \begin{cases} 0, & w(x, y) \geq -c(x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y; \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

$$\begin{aligned} \Sigma : E &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ w &\mapsto \begin{cases} \int_X u(x)d\mu(x) + \int_Y v(y)d\nu(y), & \text{quando } w(x, y) = u(x) + v(y); \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

1.1. Transporte Ótimo e Fatorização Polar

Observe que θ e Σ são convexas sobre E . Escolha $z_0 = 0 \in E$. Temos que $\theta(0) = 0$, $\Sigma(0) = 0$, e θ é contínua em 0. Desta forma, pelo Teorema de Fenchel-Rockafellar, se θ^*, Σ^* são as transformadas de Legendre de θ e Σ , então

$$\inf_{z \in E} (\theta(z) + \Sigma(z)) = \max_{z^* \in E^*} [-\theta(z^*) + \Sigma(z^*)].$$

Esta identidade, para as funções Θ e Σ definidas acima, implicará que

$$\min_{\pi \in \mathcal{A}^*} J[\pi] = \max_{(u,v) \in \mathcal{A}^{**}} K[u, v].$$

De fato, primeiramente calculemos $\inf_{z \in E} (\theta(z) + \Sigma(z))$. Note que

$$\inf_{z \in E} (\theta(z) + \Sigma(z)) = \inf \left\{ \int_X u(x) d\mu(x) + \int_Y v(y) d\nu(y); u(x) + v(y) \geq -c(x, y) \right\}, \quad (1.1.17)$$

com $u(x) + v(y) \in C(X \times Y)$.

Denote $\tilde{u} = -u$, $\tilde{v} = -v$. De (1.1.17) temos que

$$\begin{aligned} \inf_{z \in E} (\theta(z) + \Sigma(z)) &= \\ &= \inf_{(u,v) \in \mathcal{A}^{**}} \left\{ - \int_X \tilde{u}(x) d\mu(x) - \int_Y \tilde{v}(y) d\nu(y); \tilde{u}(x) + \tilde{v}(y) \in C(X \times Y); \tilde{u}(x) + \tilde{v}(y) \leq c(x, y) \right\} \\ &= - \sup_{(u,v) \in \mathcal{A}^{**}} K[u, v], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\inf_{z \in E} (\theta(z) + \Sigma(z)) = - \sup_{(u,v) \in \mathcal{A}^{**}} K[u, v]. \quad (1.1.18)$$

Agora, queremos calcular $\max_{z^* \in E^*} [-\theta(z^*) + \Sigma(z^*)]$. Para isto, precisamos primeiramente discutir as transformadas de Legendre de θ, Σ . Obter tais transformadas não é trivial, pois θ, Σ têm seus domínios sendo espaços de Banach. Se X é um espaço de Banach, e f é uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, a transformada de Legendre de f , denotada por f^* é dada por:

$$f^*(\alpha) = \sup_{x \in X} \{\langle u, \alpha \rangle_{X, X^*} - f(u)\} \quad (1.1.19)$$

Agora, calculemos as transformadas de Legendre de θ e Σ . A transformada de Legendre θ^* é dada por

$$\theta^*(-\pi) = \sup_{w \in E} \{ \langle w, -\pi \rangle_{E, E'} - \theta(w) \}.$$

De (1.1.15) temos que $\theta(w) = \infty$, quando $w(x, y) < -c(x, y)$. Logo,

$$\begin{aligned} \theta^*(-\pi) &= \sup_{w \in E} \left\{ - \int_X \int_Y w(x, y) d\pi(x, y), w(x, y) \geq -c(x, y) \right\} \\ &= \sup_{\tilde{w} \in E} \left\{ \int_X \int_Y \tilde{w}(x, y) d\pi(x, y), \tilde{w}(x, y) \leq c(x, y) \right\}. \end{aligned}$$

Observemos que, se π é uma medida não positiva e não identicamente nula, então existe $z \in E$ tal que $z \leq 0$ e $\int_X \int_Y z d\pi > 0$. Assim, escolhendo $w = \lambda z$ ($\lambda > 0$), quando $\lambda \rightarrow \infty$ temos que

$$\int_X \int_Y w d\pi = \lambda \int_X \int_Y z d\pi \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, se π é não negativa, então $\theta^*(-\pi) \leq \int_X \int_Y c(x, y) d\pi(x, y)$.

Logo, temos que

$$\theta^*(-\pi) = \begin{cases} \int_X \int_Y c(x, y) d\pi(x, y), & \pi \in \mathcal{BM}_+(X \times Y); \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.1.20)$$

Agora, a transformada de Legendre de Σ é dada por

$$\Sigma^*(\pi) = \sup_{w \in E} \left\{ \int_X \int_Y w(x, y) d\pi(x, y) - \Sigma(w) \right\}.$$

Se $w(x, y) \neq u(x) + v(y)$, $(x, y) \in X \times Y$, temos que $\Sigma(w) = +\infty$, e portanto $\Sigma^*(\pi) = \infty$. Quando $w(x, y) = u(x) + v(y)$, $(x, y) \in X \times Y$, temos que

$$\begin{aligned} \Sigma^*(\pi) &= \sup_{w \in E} \left\{ \int_X \int_Y w(x, y) d\pi(x, y) - \Sigma(w) \right\} \\ &= \sup_{w \in E} \left\{ \int_X \int_Y w(x, y) d\pi(x, y) - \int_X u(x) d\mu(x) - \int_Y v(y) d\nu(y) \right\}. \end{aligned}$$

Para calcularmos este supremo, sejam $proj_X \pi = \alpha$, $proj_Y \pi = \beta$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \Sigma^*(\pi) &= \sup_{(u,v) \in \mathcal{A}^{**}} \left\{ \int_X u(x)[d\alpha(x) - d\mu(x)] - \int_Y v(y)[d\beta(y) - d\nu(y)] \right\} \\ &= \begin{cases} 0, & \alpha = \mu \text{ e } \beta = \nu; \\ \infty, & \alpha \neq \mu \text{ ou } \beta \neq \nu. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Portanto, como

$$\sup_{\pi \in E^*} \{-\theta^*(-\pi) - \Sigma^*(\pi)\} = - \inf_{\pi \in E^*} \{\theta^*(-\pi) + \Sigma^*(\pi)\},$$

de (1.1.20) e (1.1.21) deduzimos que

$$\sup_{\pi \in E^*} \{-\theta^*(-\pi) - \Sigma^*(\pi)\} = - \inf_{\pi \in \mathcal{A}^*} \left\{ \int_X \int_Y c(x,y) d\pi(x,y) + 0 \right\} = - \inf_{\pi \in \mathcal{A}^*} J[\pi], \quad (1.1.22)$$

e portanto, de (1.1.18) e (1.1.22) concluímos que

$$- \sup_{u,v \in \mathcal{A}^{**}} K[u,v] = \inf_{z \in E} (\theta(z) + \Sigma(z)) = \sup_{z^* \in E^*} (-\theta^*(-z^*) - \Sigma^*(z^*)) = - \inf_{\pi \in \mathcal{A}^*} J[\pi],$$

isto é,

$$\sup_{u,v \in \mathcal{A}^{**}} K[u,v] = \inf_{\pi \in \mathcal{A}^*} J[\pi].$$

■

Solução do problema dual

A partir de agora estaremos considerando $X = Y = \Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado. Lembre-se que queremos mostrar a existência de um minimizante para o problema de Monge. Para isto, vamos utilizar a formulação dual definida anteriormente. Mostraremos que, partindo da formulação dual podemos demonstrar a existência da aplicação T que minimiza o funcional I em (1.1.2). Os detalhes são apresentados a seguir.

Primeiramente, considere a expressão (1.1.14), referente à formulação dual do problema. Observe que por hipótese temos que $u(x) + v(y) \leq c(x,y) = \frac{|x-y|^2}{2}$. Além disso,

temos que $|x - y|^2 = |x|^2 - x \cdot y + |y|^2$. Assim, deduzimos a seguinte desigualdade:

$$u(x) + v(y) \leq \frac{|x|^2}{2} - x \cdot y + \frac{|y|^2}{2},$$

e portanto, temos que,

$$x \cdot y \leq \left(\frac{|x|^2}{2} - u(x) \right) + \left(\frac{|y|^2}{2} - v(y) \right). \quad (1.1.23)$$

Defina $K := \int_X |x|^2 d\mu(x) + \int_Y |y|^2 d\nu(y)$ e suponha que $K < \infty$. Defina também $\Phi(x) = \frac{|x|^2}{2} - u(x)$, $x \in X$, $\Psi(y) = \frac{|y|^2}{2} - v(y)$, $y \in Y$. Note que, de (1.1.23) temos que Φ e Ψ satisfazem

$$x \cdot y \leq \Phi(x) + \Psi(y).$$

Observe também que,

$$\begin{aligned} \max_{u,v \in \mathcal{A}^{**}} K[u, v] &= \max_{u,v \in \mathcal{A}^{**}} \int_X \left(u(x) - \frac{|x|^2}{2} + \frac{|x|^2}{2} \right) d\mu(x) + \int_Y \left(v(y) - \frac{|y|^2}{2} + \frac{|y|^2}{2} \right) d\nu(y) \\ &= K - \min_{\Phi, \Psi} \left\{ \int_X \Phi(x) d\mu(x) + \int_Y \Psi(y) d\nu(y) \right\}, \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

onde $K := \int_X |x|^2 d\mu(x) + \int_Y |y|^2 d\nu(y) < +\infty$, e $\Phi \in C_0(X)$, $\Psi \in C_0(Y)$ são tais que $\Phi(x) + \Psi(y) \geq x \cdot y$.

Portanto, como pela dualidade de Kantorovich temos que $\sup_{u,v \in \mathcal{A}^{**}} K[u, v] = \inf_{\pi \in \mathcal{A}^*} J[\pi]$, de (1.1.24) segue que

$$\begin{aligned} \inf_{\pi \in \mathcal{A}^*} J[\pi] &= \min_{\pi \in \mathcal{A}^*} \int_X \int_Y \frac{|x - y|^2}{2} d\pi \\ &= K - \min_{\Phi, \Psi} \left\{ \int_X \Phi(x) d\mu(x) + \int_Y \Psi(y) d\nu(y) \right\}, \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

onde $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{A}^{***} = \{(\Phi, \Psi); \Phi \in C_0(X), \Psi \in C_0(Y); \Phi(x) + \Psi(y) \geq x \cdot y\}$.

1.1. Transporte Ótimo e Fatorização Polar

Logo, para obtermos $\inf_{\pi \in \mathcal{A}^*} J[\pi]$, basta analisarmos

$$\min_{(\Phi, \Psi) \in \mathcal{A}^{***}} \left\{ \int_X \Phi(x) d\mu(x) + \int_Y \Psi(y) d\nu(y) \right\}. \quad (1.1.26)$$

O próximo resultado mostra a existência de um minimizante para este problema. Este minimizante será utilizado no resultado seguinte para mostrar a existência de solução para o problema de Monge.

Teorema 1.1.2 *Seja*

$$L[\Phi, \Psi] = \int_X \Phi(x) d\mu(x) + \int_Y \Psi(y) d\nu(y).$$

Então:

1. *Existem (Φ^*, Ψ^*) solução de $L[\Phi^*, \Psi^*] = \min_{(\Phi, \Psi) \in \mathcal{A}^{***}} L[\Phi, \Psi]$*
2. *(Φ^*, Ψ^*) são pares convexos conjugados.*

Demonstração:

No que segue, estaremos utilizando alguns fatos importantes de análise convexa apresentados no capítulo anterior. Demonstraremos este teorema em três etapas:

1. Primeiramente, observe que $\min_{\Phi \in C_0(X)} L[\Phi^{**}, \Phi^*] \leq \min_{(\Phi, \Psi) \in \mathcal{A}^{***}} L[\Phi, \Psi]$.

De fato, seja $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{A}^{***}$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\geq x \cdot y - \Psi(y), \quad \forall y \\ \Rightarrow \Phi(x) &\geq \max_y \{x \cdot y - \Psi(y)\} = \Psi^*(x), \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

e portanto a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\Psi^*(x) + \Psi(y) \geq x \cdot y. \quad (1.1.28)$$

De maneira análoga obtemos que

$$\begin{aligned}\Psi(y) &\geq \Phi^*(x) \\ \Phi(x) + \Phi^*(y) &\geq x \cdot y.\end{aligned}\tag{1.1.29}$$

Observe que as seguintes desigualdades também ocorrem:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &\geq x \cdot y - \Phi^*(y), \quad \forall y \\ \Rightarrow \Phi(x) &\geq \max_y \{x \cdot y - \Phi^*(y)\} = \Phi^{**}(x),\end{aligned}\tag{1.1.30}$$

e portanto, temos que

$$\Phi^*(x) + \Phi^{**}(y) \geq x \cdot y.\tag{1.1.31}$$

Assim, de (1.1.27) e (1.1.30) podemos concluir que

$$L[\Psi^*, \Phi^*] = \int_X \Psi^*(x) d\mu(x) + \int_Y \Phi^*(y) d\nu(y) \leq L[\Phi, \Psi].\tag{1.1.32}$$

Também, de (1.1.30), (1.1.31) temos que,

$$\begin{aligned}L[\Phi^{**}, \Phi^*] &= \int_X \Phi^{**}(x) d\mu(x) + \int_Y \Phi^*(y) d\nu(y) \\ &\leq \int_X \Phi(x) d\mu(x) + \int_Y \Psi(y) d\nu(y) = L[\Phi, \Psi],\end{aligned}\tag{1.1.33}$$

e desta última desigualdade podemos concluir que $\min_{\Phi \in C_0(X)} L[\Phi^{**}, \Phi^*] \leq \min_{(\Phi, \Psi) \in \mathcal{A}^{***}} L[\Phi, \Psi]$, como queríamos demonstrar.

2. Existe $\min_{(\Phi, \Psi) \in \mathcal{A}^{***}} L[\Phi, \Psi]$.

Pele item anterior, podemos considerar uma sequência minimizante da forma $\{(\varphi_n^{**}, \varphi_n^*)\}$.

Vamos mostrar que

$$L(\varphi_n^{**}, \varphi_n^*) \rightarrow \inf_{(\Phi, \Psi) \in \mathcal{A}^{***}} L(\Phi, \Psi).$$

Para isto, vamos utilizar o Teorema de Arzelá-Ascoli.

Observe que, se $R > 0$ é tal que $\Omega \subset B_R(0)$, como $X = Y = \Omega$ são compactos em \mathbb{R}^n , e $\varphi_n^*, \varphi_n^{**}$ são funções convexas, de (8) temos que

$$\begin{aligned}|\varphi_n^{**}|_{Lip(\Omega)} &\leq R, \quad \forall n \\ |\varphi_n^*|_{Lip(\Omega)} &\leq R,\end{aligned}\tag{1.1.34}$$

ou seja, esta família de funções são equicontínuas.

Afirmamos que, sem perda da generalidade, podemos assumir que

$$\varphi_n^{**}(x) \geq -\frac{|x|^2}{2} \quad \varphi_n^*(y) \geq -\frac{|y|^2}{2}. \quad (1.1.35)$$

Com efeito, seja $a \in \Omega$ tal que $\varphi_n^{**}(a) < \infty$. Logo, existe $y_n \in \partial\varphi_n^{**}(a)$ tal que

$$\varphi_n^{**}(z) \geq \varphi_n^{**}(a) + y_n(z - a), \quad \forall z \in \Omega.$$

Seja $I_n := \inf_{z \in \Omega} \left\{ \varphi_n^{**}(z) + \frac{|z|^2}{2} \right\} < \infty$, e defina

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_n^*(y) &:= \varphi_n^*(y) + I_n \\ \tilde{\varphi}_n^{**}(x) &:= \varphi_n^{**}(x) - I_n. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \inf_X \tilde{\varphi}_n^{**}(x) + \frac{|x|^2}{2} &= \inf_X \left(\varphi_n^{**}(x) - I_n + \frac{|x|^2}{2} \right) \\ &= \inf_X \left(\varphi_n^{**}(x) + \frac{|x|^2}{2} \right) - \inf_X \left(\varphi_n^{**}(z) + \frac{|z|^2}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Disto segue que, para todo x

$$0 \leq \tilde{\varphi}_n^{**}(x) - I_n + \frac{|x|^2}{2} \leq \tilde{\varphi}_n^{**}(x) + \frac{|x|^2}{2},$$

e portanto $\tilde{\varphi}_n^{**}(x) \geq -\frac{|x|^2}{2}$.

Observe também que

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_n^*(y) + \frac{|y|^2}{2} &= \sup_x \{x \cdot y - \tilde{\varphi}_n^{**}(x)\} + \frac{|y|^2}{2} \\ &= \sup_x \left\{ x \cdot y + \frac{|y|^2}{2} - \tilde{\varphi}_n^{**}(x) \right\} \\ &\geq \sup_x \left\{ -\frac{|x|^2}{2} - \tilde{\varphi}_n^{**}(x) \right\} \\ &= -\inf_x \left\{ \frac{|x|^2}{2} + \tilde{\varphi}_n^{**}(x) \right\} = 0, \end{aligned}$$

donde conclui-se que $\tilde{\varphi}_n^*(y) \geq -\frac{|y|^2}{2}$.

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
 L(\tilde{\varphi}_n^*, \tilde{\varphi}_n^{**}) &= \int_X \tilde{\varphi}_n^{**}(x) d\mu(x) + \int_Y \tilde{\varphi}_n^*(y) d\nu(y) \\
 &= \int_X \varphi_n^{**}(x) - I_n d\mu(x) + \int_Y \varphi_n^*(y) + I_n d\nu(y) \\
 &= \int_X \varphi_n^{**}(x) d\mu(x) + \int_Y \varphi_n^*(y) d\nu(y) \quad (\text{pois } X = Y) \\
 &= L(\varphi_n^*, \varphi_n^{**}).
 \end{aligned} \tag{1.1.36}$$

Assim, como $(\varphi_n^*, \varphi_n^{**})$ é uma sequência minimizante e, por definição, $(\tilde{\varphi}_n^*, \tilde{\varphi}_n^{**}) \in \mathcal{A}^{***}$, de (1.1.36) podemos concluir que $(\tilde{\varphi}_n^*, \tilde{\varphi}_n^{**})$ é também uma sequência minimizante para L . Além disso, esta sequência satisfaz (1.1.35).

Isto prova a afirmação.

Logo, para $x, y \in B_R(0)$, temos que

$$\begin{aligned}
 -\frac{R^2}{2} \leq \varphi_n^{**}(x) &= \sup_y \{x \cdot y - \varphi_n^*(y)\} \leq \sup_y \left\{x \cdot y + \frac{|x|^2}{2}\right\} \leq \frac{3R^2}{2} \\
 -\frac{R^2}{2} \leq \varphi_n^*(y) &= \sup_x \{x \cdot y - \varphi_n^{**}(x)\} \leq \frac{3R^2}{2},
 \end{aligned}$$

e portanto $\varphi_n^*, \varphi_n^{**}$ são limitadas uniformemente em n , e equicontínuas (por (1.1.34)).

Portanto, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, existem subsequências $\varphi_{n_k}^{**}, \varphi_{n_k}^*$, e limites φ, ψ tais que

$$\begin{aligned}
 \varphi_{n_k}^{**} &\rightarrow \varphi \\
 \varphi_{n_k}^* &\rightarrow \psi,
 \end{aligned} \tag{1.1.37}$$

e tais convergências são uniformes.

Agora, denote $\varphi = \Phi^*, \psi = \Psi^*$. Note que $(\Phi^*, \Psi^*) \in \mathcal{A}^{***}$ e, além disso, temos que, na verdade,

$$L[\Phi^*, \Psi^*] = \min_{\varphi \in C_0(X)} L[\varphi^{**}, \varphi^*].$$

1.1. Transporte Ótimo e Fatorização Polar

De fato, como $\varphi_{n_k}^{**} \rightarrow \varphi$ uniformemente, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$,

$$\|\varphi_{n_k}^{**} - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2M}; \quad M = \max\{|X|, |Y|\}. \quad (1.1.38)$$

Da mesma forma, como $\varphi_{n_k}^* \rightarrow \psi$ uniformemente, dado $\varepsilon > 0$, existe $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n_k \geq \tilde{n}_0$ temos

$$\|\varphi_{n_k}^* - \psi\| < \frac{\varepsilon}{2M}. \quad (1.1.39)$$

Assim, de (1.1.37),(1.1.38) e (1.1.39) segue que

$$|L[\varphi_{n_k}^{**}, \varphi_{n_k}^*] - L[\Phi^*, \Psi^*]| \leq \left| \int_X \varphi_{n_k}^{**}(x) - \Phi^*(x) d\mu(x) \right| + \left| \int_Y \varphi_{n_k}^*(y) - \Psi^*(y) d\nu(y) \right| \leq \varepsilon,$$

e portanto, $L[\Phi^*, \Psi^*] = \min_{\varphi \in C_0(X)} L[\varphi^{**}, \varphi^*]$.

3. (Φ^*, Ψ^*) é par convexo conjugado.

Com efeito, seja $(\Phi^*, \Psi^*) \in \mathcal{A}^{***}$ o par minimizante obtido no item anterior. Note que, como no item (1), podemos concluir que $\Phi^* \geq \Psi^{**}$, e portanto $L[\Phi^*, \Psi^*] \geq L[\Psi^{**}, \Psi^*]$. Como (Φ^*, Ψ^*) é par minimizante, segue que $\Phi^* = \Psi^{**}$. Desta forma, como

$$\Psi^{**}(x) = \sup_{y \in Y} \{x \cdot y - \Psi^*(y)\} \geq x \cdot y - \Psi^*(y),$$

$$\Phi^*(x) = \sup_{y \in Y} \{x \cdot y - \Phi(y)\} \geq x \cdot y - \Phi(y),$$

então

$$0 = \Psi^{**}(x) - \Phi^*(x) \geq \Phi(y) - \Psi^*(y),$$

isto é, $\Phi(y) \leq \Psi^*(y)$. Como a desigualdade $\Phi(y) \geq \Psi^*(y)$ é sempre verdadeira, então $\Phi = \Psi^*$.

Pelo mesmo raciocínio obtemos que $\Psi = \Phi^*$. Isto conclui a demonstração.

■

A seguir mostraremos que $\bar{T}(x) = D\Phi^*(x)$ é uma solução do problema de Monge.

Teorema 1.1.3 (*Brenier*) *Se $\bar{T}(x) = D\Phi^*(x)$, então $\bar{T} : X \rightarrow Y$, $\bar{T}_{\#}\mu = \nu$, e*

$$\min_{T_{\#}\mu=\nu} \int_X \frac{|x - T(x)|^2}{2} d\mu(x) = \int_X \frac{|x - \bar{T}(x)|^2}{2} d\mu(x).$$

Demonstração: Primeiramente, note que $Im(\bar{T}) \subset Y$, a menos de um conjunto de medida nula. Com efeito, note que

$$\Psi^*(y) = \max_{x \in X} \{x \cdot y - \Phi^*(x)\} = \bar{x} \cdot y - \Phi^*(\bar{x}).$$

Se \bar{X} é um ponto interior de X então, como Φ^* é diferenciável, tem-se $D_x(x \cdot y - \Phi^*(x))|_{\bar{x}} = 0$, ou seja,

$$y - D\Phi^*(\bar{x}) = 0 \Rightarrow D\Phi^*(\bar{x}) = y \in Y.$$

Se x é um ponto de fronteira de X , que é um subconjunto de medida nula de X , temos que $\bar{T} = D\Phi^*$ não está definida em x , o que mostra que $Im(\bar{T}) \subset Y$ a menos de um conjunto de medida nula.

Para mostrar que $\bar{T}_{\#}\mu = \nu$, seja $h \in C_0(Y)$ e $\tau > 0$. Defina as seguintes funções

$$\begin{aligned} \psi_\tau(y) &:= \Psi^*(y) + \tau h(y) \\ \varphi_\tau(x) &:= \max_{y \in Y} \{x \cdot y - \psi_\tau(y)\}. \end{aligned}$$

Por definição, temos que, $\varphi_\tau(x) + \psi_\tau(y) \geq x \cdot y$, e portanto

$$L[\Phi^*, \Psi^*] \leq L[\varphi_\tau, \psi_\tau].$$

1.1. Transporte Ótimo e Fatorização Polar

Denotando $L[\varphi_\tau, \psi_\tau] := i(\tau)$, a aplicação $\tau \mapsto i(\tau)$ tem um mínimo em $\tau = 0$, donde

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{L[\varphi_\tau, \psi_\tau] - L[\Phi^*, \Psi^*]}{\tau} \\
 &= \frac{1}{\tau} \left\{ \int_X \varphi_\tau(x) d\mu(x) - \int_X \Phi^*(x) d\mu(x) + \int_Y \psi_\tau(y) d\nu(y) - \int_Y \Psi^*(y) d\nu(y) \right\} \\
 &= \int_Y h(y) d\nu(y) + \int_X \frac{\varphi_\tau(x) - \Phi^*(x)}{\tau} d\mu(x).
 \end{aligned} \tag{1.1.40}$$

Agora, note que,

$$\begin{aligned}
 \varphi_\tau(x) &= \max_{y \in Y} \{x \cdot y - \psi_\tau(y)\} \\
 &= \max_{y \in Y} \{x \cdot y - \Psi_*(y) - \tau h(y)\} \\
 &\geq \max_y \{x \cdot y - \Psi_*(y)\} - \tau \|h\|_{L^\infty} \\
 &= \Phi^*(x) - \tau \|h\|_{L^\infty}.
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \Phi^*(x) - \tau \|h\|_{L^\infty} \leq \varphi_\tau(x) &= \max_{y \in Y} \{x \cdot y - \Psi_*(y) - \tau h(y)\} \\
 &\leq \max_y \{x \cdot y - \Psi_*(y)\} - \tau \|h\|_{L^\infty} \\
 &= \Phi^*(x) + \tau \|h\|_{L^\infty}.
 \end{aligned} \tag{1.1.41}$$

Agora, seja y_τ tal que

$$\varphi_\tau(x) = x \cdot y_\tau - \Psi^*(y_\tau) - \tau h(y_\tau).$$

Desta forma,

$$\varphi_\tau(x) - \Phi^*(x) = \underbrace{x \cdot y_\tau - \Psi^*(y_\tau) - \Phi^*(x)}_{\leq 0} - \tau h(y_\tau) \leq h(y_\tau). \tag{1.1.42}$$

Por outro lado, seja \bar{y} tal que $\Phi^*(x) = x \cdot \bar{y} - \Psi^*(\bar{y})$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
 \varphi_\tau(x) - \Phi^*(x) &= \varphi_\tau(x) - x \cdot \bar{y} + \Psi^*(\bar{y}) \\
 &\geq x \cdot \bar{y} - \Psi^*(\bar{y}) - \tau h(\bar{y}) - x \cdot \bar{y} + \Psi^*(\bar{y}) \\
 &= -\tau h(\bar{y}).
 \end{aligned} \tag{1.1.43}$$

De (1.1.42) e (1.1.43) segue que

$$-h(\bar{y}) \leq \frac{\varphi_\tau(x) - \Phi^*(x)}{\tau} \leq -h(y_\tau). \quad (1.1.44)$$

Como Φ^* é convexa e Lipschitziana, Φ^* é diferenciável quase sempre, pelo Teorema de Rademacher (ver [18]). Seja x tal que $\Phi^*(x)$ é diferenciável. Desta forma, para \bar{y} definido anteriormente, temos

$$\Phi^*(x) + \Psi^*(\bar{y}) = x \cdot \bar{y},$$

e portanto $\bar{y} \in \partial\Phi^*(x)$. Mas como Φ^* é diferenciável, em verdade temos $D\Phi^*(x) = \bar{y}$. Mais ainda, o ponto de máximo de $x \cdot y - \Psi^*(y)$ como função de y é único.

Agora, notemos que $x \cdot y - \Psi^*(y) - \tau h(y)$ converge uniformemente a $x \cdot y - \Psi^*(y)$ quando $\tau \rightarrow 0$. Logo, conforme a Observação 4, do Lema 3, existe um sequência $\{y_\tau\}$ de pontos de máximo de $x \cdot y - \Psi^*(y) - \tau h(y)$ tal que $y_\tau \rightarrow \bar{y}$, quando $\tau \rightarrow 0$.

Desta forma, face ao anteriormente exposto temos, pelo Teorema da Convergência Dominada, (1.1.40) e (1.1.44),

$$0 \leq \int_Y h(y) d\nu(y) - \int_X h(D\Phi^*(x)) d\mu(x),$$

isto é,

$$\int_X h(D\Phi^*(x)) d\mu(x) \leq \int_Y h(y) d\nu(y).$$

Trocando h por $-h$, por um raciocínio análogo ao desenvolvido para h , obtemos,

$$\int_Y h(y) d\nu(y) \leq \int_X h(D\Phi^*(x)) d\mu(x),$$

e portanto

$$\int_X h(D\Phi^*(x)) d\mu(x) = \int_Y h(y) d\nu(y).$$

Resta-nos mostrar que

$$\min_{T_{\#}\mu=\nu} \int_X \frac{|x - T(x)|^2}{2} d\mu(x) = \int_X \frac{|x - \bar{T}(x)|^2}{2} d\mu(x).$$

Para isto, primeiramente note que T, \bar{T} satisfazem:

$$\begin{aligned} \int_X \frac{|x - \bar{T}(x)|^2}{2} d\mu(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_X |x|^2 d\mu(x) + \int_X |\bar{T}(x)|^2 d\mu(x) - 2 \int_X x \cdot \bar{T}(x) d\mu(x) \right\}, \\ \int_X \frac{|x - T(x)|^2}{2} d\mu(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_X |x|^2 d\mu(x) + \int_X |T(x)|^2 d\mu(x) - 2 \int_X x \cdot T(x) d\mu(x) \right\}. \end{aligned}$$

Ao subtrairmos ambos os membros das identidades acima, podemos concluir que, se mostrarmos a seguinte desigualdade

$$\int_X x \cdot (\bar{T}(x) - T(x)) d\mu(x) \geq 0,$$

obtemos o resultado desejado. Note que como $T_{\#}\mu = \nu$, temos

$$\int_X \Psi^*(T(x)) d\mu(x) = \int_Y \Psi^*(y) d\nu(y) = \int_X \Psi^*(\bar{T}(x)) d\mu(x).$$

Além disso, \bar{T} satisfaz

$$\Phi^*(x) + \Psi^*(\bar{T}(x)) = x \cdot \bar{T}(x). \quad (1.1.45)$$

Observe também que, quando $y = T(x)$, a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\Phi^*(x) + \Psi^*(y) \geq x \cdot y. \quad (1.1.46)$$

Portanto, como $\bar{T}_{\#}\mu = \nu$ e $T_{\#}\mu = \nu$, de (1.1.45) e (1.1.46) temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_X \{\Psi^*(\bar{T}(x)) - \Psi^*(T(x))\} d\mu(x) \\ &\leq \int_X \{x \cdot \bar{T}(x) - \Phi^*(x) - x \cdot T(x) + \Phi^*(x)\} d\mu(x) \\ &= \int_X x \cdot (\bar{T}(x) - T(x)) d\mu(x). \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. ■

O interesse pelo problema do transporte ótimo cresceu a partir dos anos 90 com o surgimento de um resultado a respeito da fatorização polar de campos vetoriais. Tal resultado, conhecido como Teorema de Fatorização Polar (devido a Brenier), afirma que qualquer aplicação de valores vetoriais não-degenerada pode ser rearranjada como o gradiente de uma função convexa. Este teorema foi motivado pelo estudo do seguinte problema de projeção: “Se H é o espaço de Hilbert $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e \mathcal{S} é o conjunto de todas as aplicações sobre Ω que preservam medida, encontrar $s \in \mathcal{S}$ que minimize $\int \|u(x) - s(x)\|^2$, $u \in H$.” Observe que a resposta desejada pode ser obtida através do estudo do problema de Monge-Kantorovich. O Teorema de Fatorização Polar de Brenier é enunciado como segue:

Teorema 1.1.4 (Teorema de Fatorização Polar, Brenier [4]) *Sejam X e Y subconjuntos compactos, mensuráveis de \mathbb{R}^n , e $h : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo $L^2(X)$. Sejam μ^+, μ^-, μ medidas de probabilidade sobre X, Y, \mathbb{R}^n , respectivamente, tais que $h_{\#}\mu^+ = \mu$. Assuma que μ^-, μ atribuem medida nula a conjuntos de medida de Lebesgue 0.*

Então existem únicos $\nabla\psi$, ψ convexa, $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$, e $\bar{s} : X \rightarrow Y$ tais que $\bar{s}_{\#}\mu^+ = \mu^-$ e $h = \nabla\phi \circ \bar{s}$. Mais ainda, \bar{s} é a projeção de h sobre

$$\mathcal{S} := \{s : X \rightarrow Y, s \in L^2, s_{\#}\mu^+ = \mu^-\},$$

isto é

$$\int_X |h(x) - \bar{s}(x)|^2 d\mu^+(x) = \min_{s \in \mathcal{S}} \int_X |h(x) - s(x)|^2 d\mu^+(x).$$

Demonstração: Procuramos \bar{s} que resolva o seguinte problema de minimização:

$$\min_{s \in \mathcal{S}} \int_X |h(x) - s(x)|^2 d\mu^+(x). \tag{1.1.47}$$

1.1. Transporte Ótimo e Fatorização Polar

Se $c(x, y) = |h(x) - y|^2$, recaímos na resolução o problema de Monge, de minimização do funcional

$$I[T] = \int_X c(x, T(x)) d\mu^+(x),$$

agora sujeito às condições $h_{\#}\mu^+ = \mu$, $T \in \mathcal{S}$. Na verdade, a resolução deste problema é análoga ao caso do custo quadrático descrito anteriormente, uma vez que os seguintes fatos ocorrem:

1. Procedendo como na análise do problema de Monge associado ao custo quadrático, com as modificações necessárias, a solução do problema de minimização em questão é obtida ao minimizarmos o seguinte funcional

$$L[\phi, \psi] = \int_X \phi(h(x)) d\mu^+(x) + \int_Y \psi(y) d\mu^-(y),$$

onde $\phi, \psi \in C_0$ estão sujeitos à condição $\phi(h(x)) + \psi(y) \geq h(x) \cdot y$.

2. Por hipótese, $h \in L^2(X)$, e portanto

$$\int_X |h(x)| d\mu^+(x) \leq \left(\int_X d\mu^+(x) \right)^{\frac{1}{2}} \|h\|_{L^2} < \infty. \quad (1.1.48)$$

Assim, ao considerarmos a desigualdade

$$|L[\varphi_{n_k}^{**}, \varphi_{n_k}^*] - L[\varphi, \psi]| \leq \int_X |\varphi_{n_k}^{**}(h(x)) - \varphi(h(x))| d\mu^+(x) + \int_Y |\varphi_{n_k}^*(y) - \psi(y)| d\mu^-(y),$$

a qual é proveniente da demonstração da existência de minimizante para o funcional L em questão (estamos seguindo exatamente os mesmos passos realizados no custo quadrático), a desigualdade (1.1.48) permite que estimemos a primeira integral da desigualdade acima.

3. Como $h_{\#}\mu^+ = \mu$, se N é um conjunto de medida de Lebesgue nula, temos $\mu^+(h^{-1}(N)) = \mu(N) = 0$. Portanto, se ϕ^* é tal que (ϕ^*, ψ^*) é o ponto de mínimo de L , então

$\nabla\phi^*(h(x))$ está bem definida em $X \setminus h^{-1}(\overline{N})$, onde \overline{N} , o conjunto onde $\nabla\phi^*$ não está definida, é tal que $|\overline{N}| = 0$.

Além disso, como no custo quadrático, podemos concluir que $\bar{s} = \nabla\phi^*(h(x))$.

4. Por fim, como $\bar{s} = \nabla\phi^*(h(x))$ é solução do problema dual associado ao custo $c(x, y) = |h(x) - y|^2$, e valendo-se do fato que $\tilde{\pi}$ é solução do problema de Kantorovich associado a este mesmo custo, temos que

$$\int_{X \times Y} \{\phi^*(h(x)) + \psi^*(y) - h(x) \cdot y\} d\tilde{\pi}(x, y) = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{X \times Y} \{\phi^*(h(x)) + \psi^*(y) - h(x) \cdot y\} d\tilde{\pi}(x, y) = \\ &= \int_X \{\phi^*(h(x)) + \psi^*(\bar{s}(x)) - h(x) \cdot \bar{s}(x)\} d\mu^+(x), \end{aligned}$$

concluimos que

$$\phi^*(h(x)) + \psi^*(\bar{s}(x)) = h(x) \cdot \bar{s}(x), \quad \mu^+ - q.t.p.. \quad (1.1.49)$$

Como μ^- atribui medida nula a conjuntos de medida de Lebesgue nula, e $\bar{s}_{\#}\mu^+ = \mu^-$, pelas propriedades de ϕ^*, ψ^* , temos que a identidade (1.1.49) implica que $\nabla\psi^*(\bar{s}(x))$ está bem definida (pelos mesmo argumentos utilizados para mostrar a boa definição de $\nabla\phi^*(h(x))$). Portanto, ψ^* é diferenciável quase sempre, e

$$\nabla\psi^*(\bar{s}(x)) = h(x), \quad \mu - q.t.p.,$$

ou seja, $h = \nabla\psi^* \circ \bar{s}$. Como (ψ^*, ϕ^*) é par convexo conjugado, $\psi^* = \phi$.

Isto conclui a demonstração. ■

Observação 1.1.5 *Note que o problema de Monge associado ao custo quadrático pode ser visto como um caso particular do Teorema de Fatorização Polar se , para todo x , substituirmos a função h do Teorema de Fatorização Polar pela aplicação identidade Id , e se substituirmos as medidas de probabilidade μ, μ^+ do Teorema de Fatorização Polar pela medida de probabilidade μ definida sobre o espaço de medida X , e a medida μ^- pela medida de probabilidade ν definida sobre o espaço de medida Y . (Lembre que no problema de Monge queremos definir uma estratégia de transporte $T : X \rightarrow Y$.)*

O Teorema de Fatorização Polar também tem sido uma ferramenta muito utilizada no estudo de soluções da equação de Monge-Ampère. A equação de Monge-Ampère desempenha um papel importante no nosso estudo visto que, quando consideramos a formulação dual das equações semigeostróficas, temos uma equação de transporte escalar ativo, cujo campo transportante está acoplado à quantidade transportada através de uma equação de Monge-Ampère. A seguir, faremos uma breve descrição do Problema de Monge-Ampère, a relação deste problema com o Teorema de Fatorização Polar.

Problema de Monge-Ampère

Seja $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\alpha \geq 0$, e $\int (1 + \|y\|^p)\alpha(y)dy < \infty$. Sejam μ uma medida de probabilidade absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, e $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa satisfazendo

$$\mu(\nabla\phi(y)) \det D^2\phi(y) = \alpha(y), \forall y \in \text{supp}(\alpha), \quad (1.1.50)$$

$$\nabla\phi \text{ transporta o suporte de } \alpha \text{ para } \bar{\Omega}, \quad (1.1.51)$$

onde (1.1.50) significa que, para toda função $h \in C_b(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\int h(\nabla\phi(y))\alpha(y)dy = \int h(y)\mu(y)dy. \quad (1.1.52)$$

Observe que a equação (1.1.50) é um caso particular da equação geral de Monge-Ampère $\det D^2\phi(y) = F(y, \phi(y)\nabla\phi(y))$.

Definição 1.1.6 *As funções convexas $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem (1.1.51) e (1.1.52) são chamadas soluções generalizadas da equação de Monge-Ampère (1.1.50).*

O Teorema de Fatorização Polar nos fornece uma solução generalizada ϕ da equação de Monge-Ampère no sentido da definição anterior. De fato, suponha que μ^+ seja uma medida de probabilidade em \mathbb{R}^n absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, e que h seja um campo satisfazendo as hipóteses do Teorema de Fatorização Polar. Se α é uma medida de probabilidade definida por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)d\alpha(y) = \int_X f(h(x))\mu^+(x)d(x), \quad f \in C_c(\mathbb{R}^n), \quad (1.1.53)$$

isto é, $h_{\#}\mu^+ = \alpha$, pelo Teorema de Fatorização Polar existe um único $\bar{s} = \nabla\phi$, ϕ aplicação convexa, satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)d\alpha(y) = \int_{\Omega} f(\nabla\phi(x))\mu^+(x)d(x), \quad (1.1.54)$$

para cada $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

Como ϕ é convexa, se ϕ^* é sua transformada de Legendre temos que, para quase todo $x \in D(\phi)$, $\nabla\phi(\nabla\phi^*(x)) = x$, e portanto, $D^2\phi(\nabla\phi^*(x)) \cdot D^2\phi^*(x) = Id$, onde Id é a aplicação identidade. Desta forma, temos que $\det D^2\phi(\nabla\phi^*(x)) \cdot \det D^2\phi^*(x) = 1$. Faça a mudança de coordenadas $y = \nabla\phi(x)$ no segundo membro da igualdade (1.1.54). Logo, temos que $x = \nabla\phi^*(y)$, e $dx = \det D^2\phi^*(y)dy$, e portanto,

$$\int_{\Omega} f(\nabla\phi)\mu(z)dz = \int_{supp(\alpha)} f(y)\mu(\nabla\phi^*(y)) \det D^2\phi^*(y)dy. \quad (1.1.55)$$

Logo, de (1.1.54) e (1.1.55), segue que, $\forall f \in C_c(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{supp(\alpha)} f(y)\mu(\nabla\phi^*(y)) \det D^2\phi^*(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\alpha(y)dy.$$

Isto mostra o desejado.

1.2 Equações semigeostróficas: Formulação e Fatorização Polar

Suponha que um fluido se mova no interior de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e limitado, e que satisfaça a um conjunto adequado de equações de Euler incompressíveis, com aproximações de Boussinesq e hidrostática, definido em (1)-(4) por:

$$\begin{aligned} D_t(u_1, u_2) + fu^\perp &= (-\partial_1 p, -\partial_2 p), \\ D_t \rho &= 0 \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ \partial_3 p + \rho &= 0 \\ D_t &= \partial_t + u \cdot \nabla, \quad \nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}), \end{aligned}$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ é a velocidade, $u^\perp = (-u_2, u_1, 0)$. A função p denota a pressão, e ρ a densidade, funções de $(x, t) \in \Omega \times [0, T)$, e f é dada pela força de Coriolis, a qual consideraremos constante.

Supomos ainda que o campo u dado acima satisfaz a relação geostrófica

$$(v_1^g, v_2^g) = (-\partial_2 p, \partial_1 p),$$

, a qual define o vento geostrófico. Além disso, a componente ageostrófica da velocidade deve ser transportada de forma passiva, ou seja, $D_t v^{ag} = 0$. Assim, ao substituirmos $D_t(-\partial_2 p, \partial_1 p)$ por $D_t(u_1, u_2)$ no conjunto de equações acima, e tomarmos $f = 1$, obtemos o sistema semigeostrófico, descrito por

$$\begin{aligned} D_t(v_1^g, v_2^g) + (\partial_1 p, \partial_2 p) &= (u_2, -u_1) \\ (v_1^g, v_2^g) &= (-\partial_2 p, \partial_1 p) \\ D_t \rho &= 0 \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ \partial_3 p + \rho &= 0 \\ D_t &= \partial_t + u \cdot \nabla, \quad \nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}), \end{aligned} \tag{1.2.56}$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ é a velocidade ($u = v^g + v^{ag}$), p é a pressão, e ρ a densidade, funções de $(x, t) \in \Omega \times [0, T)$. Os dados iniciais e de fronteira são

$$\begin{aligned} u \cdot \nu &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times [0, T) \\ p(x, 0) &= p_0(x) \text{ em } \Omega. \end{aligned} \quad (1.2.57)$$

Observe que, sob esta formulação (que será referida como “a forma geral das equações semigeostróficas”), não há condição inicial sobre u , e também não há uma equação de evolução em u , ou um outro tipo de equação nas outras variáveis do problema cuja forma já seja conhecida. Introduzindo a seguinte mudança de variáveis

$$P(x, t) = p(x, t) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

podemos reescrever (1.2.56) como um sistema de equações para $P, u = (u_1, u_2, u_3)$ dependendo de $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$. Com efeito, observe que, em termo de suas coordenadas, o sistema anterior é dado por

$$\begin{aligned} D_t v_1^g + \partial_1 p - u_2 &= 0 \\ D_t v_2^g + \partial_2 p + u_1 &= 0 \\ D_t \rho &= 0 \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ D_x p &= (v_2^g, v_1^g, -\rho). \end{aligned} \quad (1.2.58)$$

Assim, valendo-se do fato que

$$\partial_1 p = \partial_1 P - x_1 \quad \partial_2 p = \partial_2 P - x_2,$$

temos,

$$\begin{aligned} -D_t(\partial_2 P) + \partial_1 P - x_1 &= 0 \\ D_t(\partial_1 P) + \partial_2 P - x_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.2.59)$$

ou, em termos matriciais

$$D_t(\partial_1 P, \partial_2 P, \partial_3 P) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 P - x_1 \\ \partial_2 P - x_2 \\ \partial_3 P - x_3 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, obtemos,

$$\begin{aligned}
 D_t X &= J(X - x) \\
 \operatorname{div} u &= 0 \\
 X &= \nabla P \\
 u \cdot \nu &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times [0, T) \\
 P(x, 0) &= P_0(x) \text{ em } \Omega,
 \end{aligned} \tag{1.2.60}$$

onde $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Observação 1.2.1 *Uma solução de (1.2.60) determina uma solução do sistema semigeostrófico em sua forma geral. De fato, considere (P, \bar{u}) solução de (1.2.60). Como $X = \nabla P$, ao considerarmos $u = \bar{u}$, e tomando $p(x, t) = P(x, t) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, $\rho(x, t) = -\partial_3 p$, temos*

$$D_t(\partial_2 P) - \partial_1 P = -x_1 \Leftrightarrow D_t(-\partial_2 p) + \partial_1 p = u_2$$

$$D_t(\partial_1 P) + \partial_2 P = x_2 \Leftrightarrow D_t(\partial_1 p) + \partial_2 p = -u_1.$$

Se $(v_g^1, v_g^2) = (-\partial_2 p, \partial_1 p)$, então, como $D_t(\partial_3 P) = 0$ implica $D_t \rho = 0$, pode-se concluir que (P, \bar{u}) determina uma solução de (1.2.56).

Definição 1.2.2 *O sistema (1.2.60) é chamado de forma Lagrangeana das equações semigeostróficas.*

Sejam P , $X = \nabla P$, e u satisfazendo (1.2.60). Defina

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt} F(x, t) = u(F(x, t), t) \\ F(x, 0) = x, \end{array} \right.$$

que determina a trajetória $t \mapsto F(x, t)$ em Ω do marcador Lagrangeano com posição

inicial x . Defina $Z = Z(x, t) = \nabla P(F(x, t), t)$, a variável Lagrangeana. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Z(x, t) &= J[Z(x, t) - F(x, t)] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\nabla P|_{(F,t)} + \nabla_x(\nabla P|_{(F,t)}) \cdot \underbrace{\frac{dF(x, t)}{dt}}_{=u}, \\ &= D_t(\nabla P(F(x, t), t)) \\ &= J[\nabla P(F(x, t), t) - F(x, t)] \end{aligned} \quad (1.2.61)$$

onde J é a matriz mencionada anteriormente.

Defina $\tilde{J} := \tilde{J}(x, t) = \det[D_x F](x, t)$. Note que $\tilde{J}(x, 0) = 1$, pois

$$\tilde{J}(x, 0) = \det [D_x F](x, 0) = 1.$$

Além disso, \tilde{J} satisfaz a seguinte propriedade, a qual não será demonstrada, mas que pode ser encontrada por exemplo em [7]:

$$\frac{d}{dt}\tilde{J}(x, t) = [\operatorname{div} u(F(x, t), t)] \cdot \tilde{J}(x, t). \quad (1.2.62)$$

Assim, como, por (1.2.60), temos que $\operatorname{div} u = 0$, então podemos concluir que $F(x, t)$ satisfaz

$$\det D_x F(x, t) = 1. \quad (1.2.63)$$

De fato, temos que $\frac{d}{dt}\tilde{J}(x, t) = 0$, e $\tilde{J}(x, 0) = 1$. Claramente a solução desta EDO é $\tilde{J}(x, t) = 1$, o que prova a afirmação.

Estamos interessados apenas em soluções tais que a pressão modificada P seja convexa. Cullen e Purser em [15] mostraram que estas soluções são estáveis relativas à energia natural do sistema, que é dada por

$$E[X] := \int_{\Omega} \left(\frac{|x_1 - X_1(x)|^2}{2} + \frac{|x_2 - X_2(x)|^2}{2} - x_3 X_3(x) \right) dx,$$

onde $X(x) = (X_1(x), X_2(x), X_3(x))$ é um campo vetorial que depende de $x \in \Omega$. Além disso, de (1.2.63) segue que estamos interessados em aplicações F que preservam medida de Lebesgue.

Observe que a formulação Lagrangeana (1.2.60) das equações semigeostróficas é mais simples do que sua forma geral. No entanto, os primeiros resultados acerca de existência de soluções para as equações semigeostróficas não foram obtidos nesta forma Lagrangeana, mas sim em sua forma “dual”, obtida através de uma mudança entre variáveis dependentes e independentes.

Nosso objetivo, a partir de agora, é obter a formulação das equações semigeostróficas em variáveis duais, mais conhecida como formulação dual das equações SG.

Sejam P uma função convexa, suave, e F uma aplicação que preserva medida, tais que, se $Z = \nabla P(F(x, t), t)$, então para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^3)$, vale a seguinte identidade:

$$\int_{\Omega} f(Z(x, t)) dx = \int_{\Omega} f(\nabla P(x, t)) dx, \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^3). \quad (1.2.64)$$

Seja $\alpha = \nabla P(\cdot, t) \# \mathcal{L}_{\Omega}$, isto é,

$$\int_{\Omega} f(\nabla P(x, t)) dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(y) d\alpha(y, t), \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^3). \quad (1.2.65)$$

Suponha que α seja absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. Assim, a mudança de variáveis $y = \nabla P(x, t)$ no lado esquerdo de (1.2.65) resulta na seguinte identidade

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(y) \alpha(y, t) dy = \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \det(D^2 P^*(y, t)) dy, \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^3), \quad (1.2.66)$$

pois $\nabla P \circ \nabla P^* = Id$, e $P^*(y, t) = \sup_{x \in \Omega} \{x \cdot y - P(x, t)\}$ é a transformada de Legendre de P . Assim, no sentido fraco, podemos concluir que

$$\alpha(y, t) = \det(D^2 P^*(y, t)). \quad (1.2.67)$$

Este objeto será chamado de vorticidade potencial pois, como veremos a seguir, α satisfaz uma equação de transporte por um campo de divergente nulo, análogo à equação de Euler para vorticidade em 2D.

A idéia, a partir de agora, é obter uma equação de evolução para $\alpha(y, t)$. Seja $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ uma função teste. Tomando a expressão dada por (1.2.61), compondo com $\nabla \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ (por razões técnicas que veremos abaixo), e integrando sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^T \frac{d}{dt} Z(x, t) \cdot \nabla \xi(Z(x, t), t) dt dx = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^T J[Z(x, t) - F(x, t)] \cdot \nabla \xi(Z(x, t), t) dt dx. \quad (1.2.68)$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^T \frac{d}{dt} \xi(Z(x, t), t) dt dx = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^T \left\{ \partial_t \xi(Z(x, t), t) + \nabla \xi(Z(x, t), t) \frac{dZ}{dt} \right\} dt dx,$$

e portanto, calculando a integral em t do lado esquerdo da identidade acima, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^T \frac{d}{dt} Z(x, t) \nabla \xi(Z(x, t), t) dt dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \xi(Z(x, t), t) dt dx - \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^T \xi(Z(x, t), t) dt dx. \quad (1.2.69)$$

Portanto, de (1.2.68) e (1.2.69), concluímos que,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^T \partial_t \xi(Z(x, t), t) dt dx + \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^T J[Z(x, t) - F(x, t)] \nabla \xi(Z(x, t), t) dt dx - \int_{\mathbb{R}^3} \xi(Z(x, 0), 0) dx = 0.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = Z(x, t)$, lembrando que $Z = \nabla P \circ F$, e utilizando (1.2.64), (1.2.65), obtemos que,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^T \{ \partial_t \xi(y, t) + U(y, t) \cdot \nabla \xi(y, t) \} \alpha(y, t) dt dy + \int_{\mathbb{R}^3} \xi(y, 0) \alpha(y, 0) dy = 0, \quad (1.2.70)$$

para toda função teste $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, onde, aqui, o campo U é definido por $U(y, t) = J[y - \nabla P^*(y, t)]$.

Definição 1.2.3 *A identidade (1.2.70) é uma formulação fraca para a equação de transporte $\partial_t \alpha + \nabla \cdot (U \alpha) = 0$.*

1.2. Equações semigeostróficas: Formulação e Fatorização Polar

Desta forma, chegamos a uma equação de transporte escalar ativo, cujo campo transportante está acoplado à quantidade transportada através de uma equação de Monge-Ampère, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \partial_t \alpha + \nabla \cdot (U\alpha) &= 0 & \mathbb{R}^3 \times [0, T) \\
 \nabla P(\cdot, t) \# \mathcal{L}_\Omega &= \alpha(\cdot, t), & \forall t \in [0, T) \\
 U(X, t) &= J[X - \nabla P^*(X, t)] \\
 P^*(X, t) &= \sup_{x \in \Omega} (x \cdot X - P(x, t)), & \forall (X, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T) \\
 \alpha(X, 0) &= \alpha_0(X) & \text{q.t.p. em } X \in \mathbb{R}^3.
 \end{aligned} \tag{1.2.71}$$

Definição 1.2.4 *O problema (1.2.71) é conhecido como a forma dual das equações semigeostróficas.*

Conforme mencionado anteriormente, os primeiros resultados de existência de soluções para as equações semigeostróficas foram obtidos no contexto dual. Os primeiros passos nesta direção foram dados por Benamou e Brenier [3].

Definição 1.2.5 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado, e $\alpha_0 \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $p \geq 1$, com suporte compacto. Se α, P estiverem definidos sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, T)$, dizemos que (α, P) é uma solução fraca para o problema (1.2.71) se,*

- (i) *para todo t , $\alpha(\cdot, t)$ possui suporte compacto contido em uma bola aberta $B(0, S)$,*
- (ii) *$P(\cdot, t)$ é convexa, para todo t ,*
- (iii) *a formulação fraca (1.2.70) é satisfeita, $\forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T))$,*
- (iv) *(α, P) satisfazem (1.2.65), que é a formulação fraca da equação de Monge-Ampère.*

Benamou e Brenier construíram uma sequência convergente de soluções aproximadas para as equações semigeostróficas na forma dual verificando a formulação fraca (1.2.70),

através de uma discretização no tempo da equação de Monge-Ampère. Este resultado de existência foi obtido considerando dados iniciais em $L^p(\mathbb{R}^3)$, $p > 3$. Alguns anos mais tarde, Nussenzveig Lopes e Lopes Filho [22], valendo-se das estruturas dos espaços de Orlicz, adaptaram para os espaços $L^1(\mathbb{R}^3)$ a demonstração já conhecida, e através de argumentos de propagação de compacidade provaram a existência de soluções neste caso.

No que segue, estaremos utilizando alguns espaços de Orlicz. Remetemos o leitor ao Apêndice para obter definições relevantes e resultados utilizados.

No teorema a seguir, cuja demonstração será omitida, A denota uma N -função Δ -regular tal que $\nabla P_{0\#}\mathcal{L}_\Omega \in L_A(\mathbb{R}^3)$, onde $L_A(\mathbb{R}^3)$ é o espaço de Orlicz associado a A , e $E_{A^*}(\mathbb{R}^3)$ denota o espaço dual de $L_A(\mathbb{R}^3)$. Este teorema sintetiza os resultados de existência obtidos em [3] e [22].

Teorema 1.2.6 (*Benamou e Brenier, 1998; Nussenzveig Lopes e Lopes Filho, 2002*)
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado, tal que $\bar{\Omega} \subset B$ onde B é uma bola aberta $B(0, S)$. Seja $P_0(x)$ uma função convexa e limitada em B , satisfazendo

$$\alpha_0 := DP_{0\#}\mathcal{L}_\Omega \in L^q(\mathbb{R}^3)$$

para algum $q \geq 1$. Então para qualquer $T > 0$ existem funções $\alpha(X, t), P(X, t)$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, T)$ tais que

(i) α, P satisfazem

$$\alpha \in L^\infty([0, T), L^q(\mathbb{R}^3)) \cap C([0, T), w^* - L_A(B(0, R_0)))$$

$$P \in L^\infty([0, T), W^{1,\infty}(\Omega)) \cap C([0, T), W^{1,r}(\Omega)),$$

onde r é um número real pertencente ao intervalo $[1, \infty)$, A é uma N -função, e L_A é o espaço de Orlicz associado a A .

(ii) seja $R_0 = S(1 + T)$. Então

$$\text{supp}(\alpha(\cdot, t)) \subset B(0, R_0); \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.2.72)$$

(iii) $P(\cdot, t)$ é convexa em Ω ;

(iv) P^* satisfaz

$$P^*(\cdot, t) \text{ é convexa em } \mathbb{R}^3 \quad \forall t \in [0, T],$$

$$P^* \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T]),$$

$$\nabla P^* \in L^\infty([0, T], E_{A^*}(B(0, R_0))) \cap C([0, T], L^r(B(0, R)))$$

para todo $R > 0$, e todo $r \in [1, \infty)$, onde $E_{A^*}(B(0, R_0))$ é o dual de $L_A(B(0, R_0))$.

Mais ainda,

$$\|\nabla P^*(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq S \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.2.73)$$

(v) (α, P, P^*) satisfazem (1.2.71), onde a equação de evolução e o dado inicial para α são entendidos no sentido fraco, a saber: para qualquer $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T]} [\partial_t \phi(X, t) + U(X, t) \cdot \nabla \phi(X, t)] \alpha(X, t) dX dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \alpha_0(X) \phi(X, 0) dX = 0. \end{aligned} \quad (1.2.74)$$

Observação 1.2.7 O Teorema 1.2.6, em particular, nos garante a existência de uma sequência $\{\alpha^n\}$ de soluções fracas associada ao problema dual, e de seqüências $\{P^n\}, \{(P^n)^*\}$ associadas a $\{\alpha^n\}$ tais que, para cada $t \in [0, T)$, se o par (α, P) é solução fraca de (1.2.71), então as seguintes convergências ocorrem:

$$\begin{array}{ll} \alpha^n(\cdot, t) \rightharpoonup \alpha(\cdot, t) & w^* - L_A(B(0, R_0)) \\ P^n(\cdot, t) \longrightarrow P(\cdot, t) & W^{1,r}(\Omega) \\ P_0^n \longrightarrow P_0 & W^{1,1}(\Omega) \\ (P^n)^*(\cdot, t) \longrightarrow P^*(\cdot, t) & W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^3) \\ (\nabla P^n)^*(\cdot, t) \longrightarrow \nabla P^*(\cdot, t) & (E_{A^*})_{loc}(\mathbb{R}^3). \end{array} \quad (1.2.75)$$

Observe que, de acordo com a Definição 1.2.5, se $\alpha \in C([0, T], w - L^1(\mathbb{R}^3))$ é uma solução fraca para a formulação dual das equações semigeostróficas, então α satisfaz a seguinte identidade, $\forall T > 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$,

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T]} \{ \partial_t \phi(X, t) + [X - \nabla P^*(X, t)]^\perp \cdot \nabla \phi(X, t) \} \alpha(X, t) dX dt + \int_{\mathbb{R}^3} \alpha_0(X) \phi(X, 0) dX = 0.$$

No entanto, se buscamos soluções α definidas no espaço medidas de Radon, a definição de solução fraca dada acima precisa ser reformulada, a fim de que o produto $\nabla P^* \cdot \alpha$ faça sentido em \mathbb{R}^3 , visto que o mesmo não está definido quando α é uma medida. Na verdade, se α é uma medida, o produto $\nabla P^* \cdot \alpha$ só está bem definido quando ∇P^* é contínuo. Mas, como aqui $\alpha = \det D^2 P^*$, nem sempre podemos garantir que ∇P^* é contínua. Por exemplo, se para todo t , $\alpha_t(x) = \delta_0(x)$, onde $\delta_0(x)$ é a medida de Dirac, podemos verificar (isto está detalhado na Seção 3.4 do Capítulo 3) que, para cada t , a função convexa associada a α é dada por $P_t(x) = |x|$, e portanto $\nabla P_t(x) = \frac{x}{|x|} \in L^\infty(\Omega)$, que não é contínua em $x = 0$.

Gregoire Loeper, em [21], obteve uma nova formulação fraca para as equações semigeostróficas no contexto das medidas de probabilidade. Observe que, como $\alpha = \nabla P_{\#} \mathcal{L}_\Omega$ é uma medida de probabilidade com suporte compacto, e absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} [(\nabla P^*)^\perp \cdot \nabla \phi] \alpha = \int_{\Omega} x^\perp \cdot \nabla \phi(\nabla P),$$

e a segunda integral está bem definida neste caso.

Estas observações foram a motivação para a introdução uma nova formulação fraca para as equações semigeostróficas no contexto das medidas de probabilidade.

Definição 1.2.8 *Para todo $t \in [0, T]$, seja $\alpha(t)$ uma medida de probabilidade de \mathbb{R}^3 . Esta medida é dita ser uma solução fraca para as equações semigeostróficas se*

1. *a medida de probabilidade α , dependente do tempo, pertence a $C([0, T], w^* - \mathcal{P})$;*
2. *existe $t \mapsto R(t)$ não crescente tal que para todo $t \in [0, T)$, $\alpha(\cdot, t)$ tem suporte em $B(0, R(t))$;*
3. *para todo $T > 0$ e todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, temos*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T]} \partial_t \phi(X, t) d\alpha(x, dt) + \int_{\Omega \times [0, T]} \nabla \phi(\nabla P(x, t), t) \cdot x^\perp dx dt \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T]} \nabla \phi(X, t) \cdot X^\perp d\alpha(x, dt) \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(X, 0) d\alpha(X, T) - \int_{\mathbb{R}^3} \phi(X, 0) d\alpha(X, 0). \end{aligned} \tag{1.2.76}$$

Observação 1.2.9 *Se α é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue, a definição anterior é consistente com a definição já conhecida de solução fraca.*

G. Loeper mostrou em [21] a existência de solução fraca global para as equações semigeostróficas com dado inicial no espaço de medidas de probabilidade. O próximo teorema descreve os resultados obtidos por Loeper.

Teorema 1.2.10 *(Loeper, 2006)*

1. *Seja α^0 uma medida de probabilidade com suporte compacto. Existe uma solução fraca global para o sistema semigeostrófico.*
2. *Seja $\{\alpha_n\}$ uma sequência de soluções fracas sobre $[0, T]$ para as equações semigeostróficas, no espaço das medidas de probabilidade. Seja $\{\alpha_n^0\}$ uma sequência de*

dados iniciais associada a $\{\alpha_n\}$, com suporte compacto contido em B_R ($R > 0$ independente de n). Então a sequência $\{\alpha_n\}$ é precompacta em $C([0, T], \mathcal{P} - w^)$, e toda subsequência convergente converge para uma solução das equações semigeostróficas.*

Demonstração: Veja [21]. ■

Observação 1.2.11 *Loeper denominou a propriedade (ii) do Teorema 1.2.10 de **estabilidade fraca**.*

Este resultado encerra a discussão acerca das equações semigeostróficas na forma dual.

Quando trabalhamos com modelos que expressam fenômenos físicos, é natural questionarmos sobre propriedades destes modelos em experimentos práticos. Através das soluções obtidas no espaço dual não se consegue, a priori, saber o que ocorre no espaço físico. Assim, propõe-se a busca por soluções no espaço físico.

Uma resposta razoável nesta direção foi obtida por Cullen e Feldman [11], através da definição de soluções Lagrangeanas no espaço físico. Para mostrarem a existência destas soluções Lagrangeanas, eles utilizaram alguns resultados recentes obtidos por Ambrosio [2] sobre equações de transporte e EDO's definidas em campos vetoriais de variação limitada. Isto será detalhado no próximo capítulo.

Capítulo 2

Formulação Lagrangeana

Neste capítulo apresentamos o conceito de solução Lagrangeana proposto por Cullen e Feldman, bem como a motivação para a introdução deste novo conceito. Também introduzimos alguns fatos sobre a teoria de EDO's e equações de transporte sobre campos vetoriais BV, e demonstramos um resultado sobre a existência de soluções Lagrangeanas em L^1 . Este resultado segue a idéia do resultado obtido por Cullen e Feldman em [11] para o caso $p > 1$.

2.1 Motivação

No que segue, estamos considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e convexo. Seja

$$\partial_t X + u \cdot \nabla X = J(X - x) \quad (2.1.1)$$

a forma Euleriana de (1.2.60). Como $\operatorname{div} u = 0$, e $\operatorname{div}(u \cdot X) = (\operatorname{div} u)X + u \cdot \nabla X$, podemos reescrever (2.1.1) como

$$\partial_t X + \operatorname{div}(u \cdot X) = J(X - x). \quad (2.1.2)$$

Logo, uma definição para as soluções Eulerianas para as equações semigeostróficas pode ser dada como segue:

2.1. Motivação

Definição 2.1.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e convexo, $u : \Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $P : \Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $u \in L^1(\Omega \times [0, T))$, $\nabla P \in L^\infty(\Omega \times [0, T)) \cap C([0, T), L^1(\Omega))$.*

O par (u, P) é uma solução Euleriana fraca de (2.1.1) se

$$\int_{\Omega \times [0, T)} \{ \nabla P(x, t) \cdot [\partial_t \varphi(x, t) + (u(x, t) \cdot \nabla) \varphi(x, t)] + J[\nabla P(x, t) - x] \cdot \varphi(x, t) \} dx dt + \int_{\Omega} \nabla P_0(x) \cdot \varphi(x, 0) dx = 0 \quad (2.1.3)$$

para toda $\varphi \in C_c^1(\Omega \times [0, T))$, e

$$\int_{\Omega \times [0, T)} u(x, t) \cdot \nabla \psi(x, t) dt dx = 0 \quad (2.1.4)$$

para toda $\psi \in C_c^1(\Omega \times [0, T))$.

Observação 2.1.2 *Nesta discussão estamos supondo ainda que a aplicação P dada na definição anterior satisfaz $P(t, \cdot)$ convexa em Ω para todo $t \in [0, \infty)$, o que não invalida os argumentos aqui apresentados.*

Agora, observe que, se $I(x) = x$, $x \in \Omega$, então $D_t I(x) = \partial_t I(x)x + u \cdot \nabla I(x) = u$. Seja P uma função convexa e suave, e P^* sua transformada de Legendre. Logo, se para cada t , $X = \nabla P(x, t)$, então, pelas propriedades de P e sua transformada de Legendre, temos que $x = \nabla P^*(X, t)$. Portanto, se tomarmos P uma aplicação convexa e suave, e P^* , u tais que $D_t X = J[X - x]$, como $X = \nabla P(x, t)$, $x = \nabla P^*(X, t)$, então $\frac{d}{dt} X(x, t) = D_t X = J[X - x]$. Assim, formalmente, podemos escrever o campo u em coordenadas físicas como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= D_t I(x) \\ &= D_t(\nabla P^*(\nabla P(x, t))) \\ &= \partial_t \nabla P^*(\nabla P(x, t)) + D^2 P^*(\nabla P(x, t), t) \cdot \frac{d}{dt}(\nabla P(x, t)) \\ &= \partial_t \nabla P^*(\nabla P(x, t)) + D^2 P^*(\nabla P(x, t), t) [J(\nabla P(x, t) - x)]. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Note que, para encontrarmos uma solução Euleriana de (2.1.1), podemos obter a função P resolvendo o problema (1.2.71) nas variáveis duais. No entanto, face à regularidade de P como solução do problema dual, temos que P é localmente Lipschitziana, e $P^* \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Além disso, se para cada t , definimos $(P_t^*)_\varepsilon = \eta_\varepsilon * P_t^*$, onde $\eta_\varepsilon := \eta_\varepsilon(x, t)$ um mollifier padrão, é fácil verificar que $(P_t^*)_\varepsilon$ é uma função convexa e limitada (e portanto Lipschitziana, pelo teorema de Rademacher). Logo, pela Observação 3 (do Lema 1) segue que $(\nabla P_t^*)_\varepsilon \in BV(\mathbb{R}^3)$, e portanto

$$(D^2 P_t^*)_\varepsilon \rightarrow D^2 P_t^* \quad \text{em } \mathcal{BM}(\mathbb{R}^3). \quad (2.1.6)$$

Desta forma, $D^2 P_t^*$ é uma medida, e como $\nabla P_t \in L^\infty(\Omega)$, temos que $D^2 P^*(\nabla P(x, t), t)$ é uma expressão difícil de definir e, portanto, o produto dos termos da forma $u_i \partial_j P$ que aparecem em (2.1.3) não estão bem definidos. Assim, podemos concluir que com tal regularidade não é possível tornar este cálculos rigorosos.

Tais dificuldades foram a motivação para a introdução do conceito de solução Lagrangeana, a saber:

Definição 2.1.3 (Soluções Lagrangeanas) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado, convexo, e $T > 0$. Seja $P_0(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ convexa. Seja $r \in [1, \infty)$. Seja $P : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$P(., t) \in L^\infty([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega)) \cap C([0, T], W^{1,r}(\Omega)) \quad (2.1.7)$$

$$P(., t) \text{ é convexa em } \Omega; \forall t \in [0, T]. \quad (2.1.8)$$

Seja $F : \Omega \times [0, T] \rightarrow \Omega$ uma aplicação de Borel, satisfazendo

$$F \in C([0, T], L^r(\Omega)). \quad (2.1.9)$$

Então o par (P, F) é chamado uma solução Lagrangeana de (1.2.60) em $\Omega \times [0, T]$ se

2.1. Motivação

(i) $F(x, 0) = x, P(x, 0) = P_0(x)$ para quase todo $x \in \Omega$,

(ii) para todo $t > 0$ a aplicação $F_t = F(., t) : \Omega \rightarrow \Omega$ é uma aplicação que preserva medida de Lebesgue ($F_{t\#}\mathcal{L}_\Omega = \mathcal{L}_\Omega$),

(iii) Existe uma aplicação de Borel $F^* : \Omega \times [0, T) \rightarrow \Omega$ tal que para todo $t \in (0, T)$ a aplicação $F_t^* = F^*(., t) : \Omega \rightarrow \Omega$ preserva medida de Lebesgue ($F_{t\#}^*\mathcal{L}_\Omega = \mathcal{L}_\Omega$), e satisfaz $F_t \circ F_t^*(x) = x$ e $F_t^* \circ F_t(x) = x$ para quase todo $x \in \Omega$,

(iv) A aplicação

$$Z(x, t) \equiv \nabla P(F_t(x), t) \quad (2.1.10)$$

é uma solução fraca de

$$\begin{aligned} \partial_t Z(x, t) &= J[Z(x, t) - F(x, t)], & \text{em } \Omega \times [0, T) \\ Z(x, 0) &= \nabla P_0(x), & \text{sobre } \Omega, \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

no seguinte sentido: para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega \times [0, T))$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times [0, T)} [Z(x, t) \cdot \partial_t \varphi(x, t) + J(Z(x, t) - F(x, t)) \cdot \varphi(x, t)] dx dt \\ + \int_{\Omega} \nabla P_0(x) \cdot \varphi(x, 0) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Temos o seguinte resultado com relação à existência de soluções Lagrangeanas no espaço físico:

Teorema 2.1.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado e convexo, e $\bar{\Omega} \subset B$, onde B é uma bola aberta $B(0, S)$. Seja $P_0(x)$ uma função convexa e limitada em B . Assuma que P_0 satisfaz*

$$\nabla P_{0\#}\mathcal{L}_\Omega \in L^q(\mathbb{R}^3) \quad (2.1.13)$$

para algum $q \geq 1$. Então para todo $T > 0$ existe uma solução Lagrangeana (P, F) de (1.2.60) em $\Omega \times [0, T)$, onde (2.1.7), (2.1.9) são satisfeitas para todo $r \in [1, \infty)$. Mais

ainda, a função $Z(x, t)$ definida por (2.1.10) satisfaz $Z(x, \cdot) \in W^{1, \infty}([0, T])$ para quase todo $x \in \Omega$, e (2.1.11) e sua forma fraca (2.1.12) são satisfeitas, no seguinte sentido

$$\begin{aligned} \partial_t Z(x, t) &= J(Z(x, t) - F(x, t)), \quad \text{para } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \mathcal{L}^4 - q.s. \\ Z(x, 0) &= \nabla P_0(x), \quad \text{para } x \in \Omega, \mathcal{L}^3 - q.s. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Conforme será demonstrado a seguir, o par (P, F) correspondente à solução Lagrangeana é obtido da seguinte forma: a função P é proveniente da solução do problema dual. Mostraremos que a aplicação F dada por:

$$F(x, t) = \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x), \quad (2.1.15)$$

onde, para cada t , $\nabla P_t^* := \nabla P^*(\cdot, t)$ é obtido da solução da formulação dual, $\nabla P_0 := \nabla P(\cdot, 0)$ provém das hipóteses do Teorema, e $\Phi_t := \Phi(\cdot, t)$ é o fluxo Lagrangeano no espaço dual com relação ao campo vetorial $U(X, t) = J[X - \nabla P^*(X, t)]$, define um fluxo Lagrangeano no espaço físico que satisfaz as hipóteses do Teorema 2.1.4. O fluxo Lagrangeano Φ , definido no espaço dual, é obtido a partir dos resultado de L. Ambrosio [2]. Os detalhes sobre a obtenção deste fluxo e uma breve explanação da teoria que fundamenta a existência do mesmo serão apresentados a seguir.

2.2 Fluxo Lagrangeano no espaço dual

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto, limitado e convexo, tal que $\bar{\Omega} \subset B$, onde B é uma bola aberta $B(0, S)$, e P_0 uma função convexa e limitada em B satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.1.4. Logo, P_0 é tal que $\alpha_0 := \nabla P_{0\#} \mathcal{L}_\Omega \in L^1(\mathbb{R}^3)$, e portanto, as hipóteses do Teorema 2.1.4 implicam que as hipóteses do Teorema 1.2.6 são satisfeitas. Portanto, podemos obter a função P , parte da solução Lagrangeana (P, F) das equações SG no espaço físico, a partir da solução das equações SG no espaço dual. Nosso intuito é mostrar que (2.1.15) é um fluxo Lagrangeano no espaço físico tal que o par (P, F) é solução Lagrangeana de

(1.2.60) em $\Omega \times [0, T]$. Para isto, precisamos obter o fluxo Lagrangeano Φ no espaço dual. Os detalhes são apresentados a seguir.

Seja U o campo vetorial $U(X, t) = J[X - \nabla P^*(X, t)]$ no espaço dual dado em (1.2.71). Como, para cada $t \in [0, T]$, P_t^* é convexa, pelo Lema 1 temos que $\nabla P_t^* \in BV(\mathbb{R}^3)$. Além disso, pelo Teorema 1.2.6 temos que $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Logo, o campo $U(X, t) = J[X - \nabla P^*(X, t)]$ é tal que

$$U \in L^\infty([0, T], BV(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \quad (2.2.16)$$

Note que, com tal regularidade, não é possível aplicar a teoria clássica de EDO's, nem a teoria desenvolvida por Di-Perna Lions (para detalhes, veja [16]) para o campo U , a fim de obtermos um fluxo Lagrangeano definido por este campo. Utilizaremos os recentes resultados obtidos por Luigi Ambrosio em [2] para obter um único fluxo Lagrangeano no espaço dual, relativo ao campo vetorial U acima definido. Ambrosio estudou propriedades quantitativas e qualitativas de equações diferenciais em campos vetoriais de variação limitada. Faremos uma breve descrição desta teoria e dos principais resultados a seguir.

2.2.1 Equações diferenciais por campos vetoriais BV

Em 2004, Ambrosio demonstrou resultados importantes no contexto de equações diferenciais, com relação à existência de soluções envolvendo campos vetoriais com pouca regularidade. Tais resultados estendem a teoria desenvolvida por DiPerna-Lions [16], a qual considerava campos vetoriais pertencentes a espaços de Sobolev.

Considere a equação do transporte

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + b(x, t) \cdot \nabla w(x, t) = e(x, t)w(x, t); \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad (2.2.17)$$

onde $b(\cdot, t) \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para quase todo $t \in (0, T)$, e a aplicação $e : \mathbb{R}^n \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ são tais que

$$\int_0^T \|e(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_R)} + \|\operatorname{div}b(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_R)} + \|b(\cdot, t)\|_{BV(B_R)} dt < +\infty; \forall R > 0. \quad (2.2.18)$$

Em [2] Ambrosio mostrou que qualquer solução distribucional de (2.2.17) é uma solução renormalizada (para detalhes sobre este conceito de solução, recomendamos ao leitor que veja [16] ou [2]). Além disso, Ambrosio utiliza o resultado de existência de solução obtido para a equação do transporte (2.2.17) para analisar sob quais condições há existência e unicidade de soluções para a EDO $\dot{\psi} = b(\psi, t)$, e também demonstrar a existência e unicidade de fluxos Lagrangeanos para campos vetoriais de variação limitada com relação à variável espacial, quando o campo b é também globalmente limitado.

A construção e os detalhes desta teoria fogem ao escopo e ao objetivo principal deste texto. Apresentaremos somente algumas definições e resultados que serão aqui utilizados.

Definição 2.2.1 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue mensurável, e $\psi : A \rightarrow C([0, T], \mathbb{R}^n)$ uma aplicação mensurável. Dizemos que ψ é um fluxo Lagrangeano partindo do conjunto A , relativo ao campo vetorial b se*

$$\psi(x, t) = x + \int_0^t b(\psi(x, \tau), \tau) d\tau; \forall t \in [0, T].$$

O fluxo Lagrangeano ψ é denominado regular se existe uma união crescente de conjuntos Lebesgue mensuráveis A_h , cuja união é A , e constantes c_h tais que

$$\left| \int_{A_h} \phi(\psi(x, t)) dx \right| \leq c_h \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)| dy; \forall \phi \in C_c(\mathbb{R}^n); t \in [0, T].$$

O teorema a seguir diz respeito a existência de fluxos Lagrangeanos sobre campos vetoriais BV.

Teorema 2.2.2 (Existência) *Seja $b : \mathbb{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma campo vetorial tal que:*

(i) $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T))$;

(ii) $b(\cdot, t) \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para quase todo $t \in (0, T)$, $|Db(\cdot, t)|(B_R) \in L^1_{loc}(0, T), \forall R > 0$, e

$$\int_0^t \|[divb(\cdot, t)]^-\|_{L^\infty(B_R)} < \infty, \forall R > 0.$$

Então, para todo conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$ existe um fluxo Lagrangeano regular partindo de A . Mais ainda, se

$$\int_0^t \|[divb(\cdot, t)]^+\|_{L^\infty(B_R)} < \infty, \forall R > 0,$$

então este fluxo é injetivo.

Demonstração: Veja [2]. ■

O próximo resultado é concernente à unicidade do fluxo Lagrangeano dado pelo Teorema 2.2.2.

Teorema 2.2.3 (Unicidade) *Assuma que as hipóteses (i) e (ii) do Teorema 2.2.2 ocorrerem. Então, se ψ_i são fluxos Lagrangeanos regulares partindo dos conjuntos mensuráveis $A_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, temos que*

$$\psi_1(x) = \psi_2(x), \text{ para quase todo } x \in A_1 \cap A_2.$$

Demonstração: Veja [2]. ■

Para concluir esta introdução à teoria de equações diferenciais sobre campos vetoriais BV, apresentamos um resultado de estabilidade de fluxos Lagrangeanos com relação a aproximações por campos vetoriais uniformemente limitados e localmente Lipschitzianos.

Teorema 2.2.4 *Suponha que as asserções (i) e (ii) do Teorema 2.2.2 são válidas. Seja $b_h(x, t) : \mathbb{R}^n \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo*

$$b_h(x, \cdot) \text{ é Lebesgue mensurável em } (0, T) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.2.19)$$

$$\sup_h \|b_h\| \leq C \text{ e } b_h \rightarrow b \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times (0, T)), \quad (2.2.20)$$

$$\nabla b_h(\cdot, t) \in L^\infty(B_R \times (0, T)) \forall h \in \mathbb{N}, R > 0. \quad (2.2.21)$$

Sejam $\psi_h(x)(t)$ as únicas soluções em $[0, T]$ da EDO $\dot{\psi}(t) = b_h(\psi(t), t)$ com condição inicial $\psi(0) = x$, e assumamos que para todo $R > 0$ existe uma constante C_R tal que

$$\left| \int_{B_R} \phi(\psi_h(x)(t)) dx \right| \leq C_R \int_{B_{M_R}} |\phi(y)| \quad \forall \phi \in C_c(\mathbb{R}^n), t \in [0, T], \quad (2.2.22)$$

com $M_R = R + T \sup_h \|b_h\|_\infty$. Então, denotando por ψ o fluxo Lagrangeano regular relativo a b partindo de \mathbb{R}^n dado pelo Teorema 2.2.2, as funções ψ_h convergem em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n; C([0, T], \mathbb{R}^n))$ para a função ψ , isto é,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{B_R} \sup_{t \in [0, T]} |\psi(x) - \psi_h(x)| dx = 0, \quad \forall R > 0. \quad (2.2.23)$$

Demonstração: Ver [2]. ■

Observação 2.2.5 *Observe que a Definição 2.2.1 de fluxo Lagrangeano não envolve a propriedade de semigrupo. No entanto, fixado $s \in \mathbb{Q} \cap [0, T]$ e um conjunto Lebesgue mensurável $A_h \subset \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\left| \int_{A_h} \phi(\psi(x, t)) dx \right| \leq c_h \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)| dy; \quad \forall \phi \in C_c(\mathbb{R}^n); t \in [0, T],$$

para alguma constante c_h , definindo

$$\tilde{\phi}(x, t) := \begin{cases} \phi(x, t), & t \leq s; \\ \phi(\phi(x, s), t - s), & s \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2.2.24)$$

pode-se obter a seguinte propriedade: para quase todo x , tem-se que

$$\phi(\phi(x, s), t) = \phi(x, s + t), \text{ para todo } s, t \geq 0, \text{ com } s + t \leq T. \quad (2.2.25)$$

2.2.2 O fluxo Lagrangeano no espaço dual

Baseado nos resultados descritos anteriormente, mostremos a existência de um fluxo Lagrangeano $\Phi : \mathbb{R}^3 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ no espaço dual, com relação ao campo $U(X, t) = J[X - \nabla P^*(X, t)]$.

De (2.2.16) sabemos que $U \in L^\infty([0, T), BV(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^3 \times [0, T))$, e nestas circunstâncias não podemos aplicar o Teorema 2.2.2 para obtermos um fluxo Lagrangeano pelo campo U em questão. Para aplicarmos o Teorema 2.2.2., vamos modificar o campo U em uma bola $B(0, R_1)$, com R_1 a ser escolhido convenientemente. De acordo com o Teorema 1.2.6, α tem suporte compacto no espaço. Assim, podemos modificar o campo U de forma que o campo modificado \tilde{U} satisfaça

$$\begin{aligned} \tilde{U} &\in L^\infty([0, T), BV(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T)) \\ \operatorname{div} \tilde{U}(\cdot, t) &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^3, \quad \forall t. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Para isto, considere $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{aligned} h &\equiv 1 \text{ sobre } \{|s| < R_1\}; \quad h \equiv 0 \text{ sobre } \{|s| > R_1 + 1\} \\ 0 &\leq h \leq 1 \text{ em } \{|s| \geq R_1\} \cap \{|s| \leq R_1 + 1\}, \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

e, para $X \in \mathbb{R}^3$, defina

$$H(X) = (h(|X_1|)X_1, h(|X_2|)X_2, h(|X_3|)X_3). \quad (2.2.28)$$

Seja \tilde{U} o campo vetorial definido por

$$\tilde{U}(X, t) = J[H(X) - \nabla P^*(X, t)]. \quad (2.2.29)$$

Então $\tilde{U} = U$ em $B(0, R_1)$, e \tilde{U} satisfaz (2.2.26).

Com efeito, se $X = (X_1, X_2, X_3) \in B(0, R_1)$, então $h(|X_1|) = h(|X_2|) = h(|X_3|) = 1$, e portanto

$$\tilde{U}(X, t) = J[X - \nabla P^*(X, t)] = U(X, t), \text{ para todo } X \in B(0, R_1).$$

Além disso, $\tilde{U}(X, t) = \left(h(|X_2|)X_2 - \frac{\partial P^*}{X_2}, -h(|X_1|)X_1 + \frac{\partial P^*}{X_1}, 0 \right)$, logo $\operatorname{div} \tilde{U}(X, t) = 0$ para todo $X \in \mathbb{R}^3$. Observe também que, para todo $(X, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T)$, temos

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}(X, t)\| &= \|J[H(X) - \nabla P^*(X, t)]\| \\ &\leq C(\|H(X)\| + \|\nabla P^*(X, t)\|) \\ &\leq C(R_1 + 1 + \|\nabla P^*\|_\infty), \end{aligned}$$

o que implica que $\tilde{U} \in L^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T))$. Por fim, para mostrar que $\tilde{U} \in L^\infty([0, T), BV(\mathbb{R}^3))$, basta notar que $\nabla P_t^* \in BV(\mathbb{R}^3)$ (pela Obs. 1 do Lema 1).

Face às observações acima, podemos aplicar o Teorema 2.2.2 ao campo \tilde{U} , obtendo o seguinte resultado:

Proposição 2.2.6 *Seja \tilde{U} definida como em (2.2.29). Existe uma única aplicação localmente limitada e Borel mensurável $\Phi : \mathbb{R}^3 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfazendo:*

(i) $\Phi(X, \cdot) \in W^{1,\infty}([0, T))$ para quase todo $X \in \mathbb{R}^3$;

(ii) $\Phi(X, 0) = X$, $X \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{L}^3 - q.s.$;

(iii) Para quase todo $(X, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T)$

$$\partial_t \Phi(X, t) = \tilde{U}(\Phi(X, t), t); \tag{2.2.30}$$

(iv) $\Phi(\cdot, t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação que preserva medida de Lebesgue em \mathbb{R}^3 para todo $t \in [0, T)$.

(v) Se R_1 na definição de \tilde{U} é escolhida suficientemente grande dependendo somente de Ω , T e $\|\nabla P_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, então,

$$\Phi(X, t) \subset B(0, R_1) \text{ para quase todo } (X, t) \in \nabla P_0(\Omega) \times [0, T). \tag{2.2.31}$$

Em particular,

$$\partial_t \Phi(X, t) = U(X, t) \text{ para quase todo } (X, t) \in \nabla P_0(\Omega) \times [0, T). \tag{2.2.32}$$

2.2. Fluxo Lagrangeano no espaço dual

(vi) Existe uma aplicação de Borel $\Phi^* : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, para todo $t \in (0, T)$ a aplicação $\Phi_t^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preserva medida de Lebesgue em \mathbb{R}^3 , e tal que $\Phi_t^* \circ \Phi_t(x) = x$ e $\Phi_t \circ \Phi_t^*(x) = x$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^3$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.2 existe um único fluxo Lagrangeano regular relativo a \tilde{U} , o qual determina uma aplicação localmente limitada $\Phi : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\Phi(X, t) = X + \int_0^t \tilde{U}(\Phi(X, \tau), \tau) d\tau; \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.2.33)$$

e, mais ainda,

$$\partial_t \Phi(X, t) = \tilde{U}(\Phi(X, t), t) \quad \text{para quase todo } (X, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]. \quad (2.2.34)$$

Desta forma, fixado $X \in \mathbb{R}^3$, temos que, se $t \in [0, T)$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(X, t)\| &\leq \|X\| + \int_0^t \|\tilde{U}(\Phi(X, \tau), \tau)\| d\tau \\ &\leq c + T \|\tilde{U}(\Phi(X, \tau), \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])}, \end{aligned}$$

$$\|\partial_t \Phi(X, t)\| \leq \|\tilde{U}(\Phi(X, t), t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])}.$$

Além disso, claramente, $\Phi(X, 0) = X$, para quase todo $X \in \mathbb{R}^3$. Isto mostra os itens (i), (ii) e (iii).

Para mostrarmos os itens (iv), (v) e (vi), primeiramente observe que o fluxo Φ satisfaz a seguinte propriedade: existe uma sequência Φ_{ε_k} de fluxos Lagrangeanos no espaço físico que tal que

$$\Phi_{\varepsilon_k}(X, t) \rightarrow \Phi(X, t), \quad (2.2.35)$$

uniformemente em $[0, T)$, quando $k \rightarrow \infty$, quase sempre em X .

Com efeito, seja $\tilde{U}_\varepsilon : \mathbb{R}^3 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma família de aproximações para \tilde{U} satisfazendo

$$\begin{aligned} \tilde{U}_\varepsilon &\in C(\mathbb{R}^3 \times [0, T]) \\ \sup_\varepsilon \|\tilde{U}_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])} &< \infty \\ \operatorname{div} \tilde{U}_\varepsilon &= 0 \\ |\nabla \tilde{U}_\varepsilon|_{L^\infty(B_R \times [0, T])} &\leq C(\varepsilon, R) < \infty \\ \tilde{U}_\varepsilon &\longrightarrow \tilde{U} \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times [0, T)). \end{aligned} \tag{2.2.36}$$

Seja $\Phi_\varepsilon(X, t)$ a única solução no intervalo $[0, T]$ da EDO $\frac{\partial}{\partial t} \Phi_\varepsilon(X, t) = \tilde{U}_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(X, t), t)$, com condição inicial $\Phi_\varepsilon(X, 0) = X$. Queremos mostrar que existe uma subsequência Φ_{ε_k} de $\Phi_\varepsilon(X, t)$ tal que, para quase todo X , $\Phi_{\varepsilon_k}(X, t) \rightarrow \Phi(X, t)$, uniformemente em $[0, T]$, quando $k \rightarrow \infty$. De fato, pelo Teorema 2.2.4, temos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_R} \sup_{t \in [0, T]} |\Phi(X, t) - \Phi_\varepsilon(X, t)| dX = 0, \quad \forall R > 0, \tag{2.2.37}$$

donde, para todo $t \in [0, T]$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_R} |\Phi(X, t) - \Phi_\varepsilon(X, t)| dX = 0.$$

Assim, como toda sequência convergente em L^1 possui uma subsequência que converge quase sempre, da identidade acima segue para cada $t \in [0, T]$, existe $k_t \in \mathbb{N}$ tal que se $k > k_t$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{\varepsilon_k}(X, t) = \Phi(X, t)$, para quase todo $X \in B_R$. Seja $\bar{k} = \max_t k_t$. Logo, para $k > \bar{k}$, existe uma subsequência de soluções que ainda denotaremos por $\{\Phi_{\varepsilon_k}(X, t)\}$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{\varepsilon_k}(X, t) = \Phi(X, t)$, para todo $t \in [0, T]$, isto é,

$$\Phi_{\varepsilon_k}(X, t) \rightarrow \Phi(X, t),$$

uniformemente em $[0, T]$, quando $k \rightarrow \infty$, quase sempre em X .

Agora, observe que a família \tilde{U}_ε satisfazendo (2.2.36) de fato existe. Para isto, tome $\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma família de mollifiers. Estenda $P^*(X, t)$ a $(-\infty, \infty)$ definindo

$$\begin{aligned} P^*(X, t) &= P^*(X, 0); t < 0 \\ P^*(X, t) &= P^*(X, T); t > T, \end{aligned}$$

2.2. Fluxo Lagrangeano no espaço dual

e seja

$$\tilde{U}_\varepsilon(X, t) = J[H(X) - (\nabla P_t^*)^n * \eta_\varepsilon(X, t)], \quad (2.2.38)$$

onde a convolução é com relação às variáveis X e t . Observe que, para a família \tilde{U}_ε definida em (2.2.38), as propriedades descritas em (2.2.36) são verificadas.

Desta forma, de (2.2.35), podemos concluir que $\Phi : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação de Borel visto que é o limite de aplicações contínuas. Também, como $\text{div} \tilde{U}_\varepsilon = 0$, as aplicações $\Phi_\varepsilon(\cdot, t)$ são difeomorfismos que preservam medida, e portanto a convergência uniforme (2.2.35) implica em (iv). Com efeito, como $\Phi_\varepsilon(\cdot, t)$ preserva medida em \mathbb{R}^3 , então, para todo $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\Phi_\varepsilon(X, t)) dX = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(X) dX.$$

Mas, como φ tem suporte compacto, e

$$|\Phi_\varepsilon(X, t)| \leq |X| + \|\tilde{U}_\varepsilon\|T \leq R + \|\tilde{U}_\varepsilon\|T := R_T,$$

onde $R > 0$ é tal que $\text{supp} \varphi \subset B(0, R)$, temos que $\|\varphi \circ \Phi_\varepsilon(X, t)\| \leq K \chi_{(B(0, R_T))}(X)$, que é uma função mensurável. Logo, de (2.2.35), e do Teorema da Convergência Dominada, temos,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(X) dX = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\Phi_\varepsilon(X, t)) dX \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\Phi(X, t)) dX,$$

e portanto, para cada t , Φ_t preserva medida.

Para mostrarmos o item (v) observe que, para a família \tilde{U}_ε acima construída, usando o fato que, pelo Teorema 1.2.6, para todo $t \in [0, T]$ temos que $\|\nabla P^*(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq S$, onde S é o raio da bola $B(0, S)$ tal que $\bar{\Omega} \subset B(0, S)$, temos que \tilde{U}_ε satisfaz

$$\begin{aligned} |\tilde{U}_\varepsilon| &= \|J[H(Y) - (\nabla P^* * \eta_\varepsilon)(Y, t)]\| \\ &\leq \|H(Y)\| + \|\nabla P^* * \eta_\varepsilon(Y, t)\| \\ &\leq |Y| + \int_{\mathbb{R}^4} |\nabla P^*(Y - X, t - h) \eta_\varepsilon(Y, t)| dY \\ &\leq |Y| + \|\nabla P^*\|_{L^\infty} \|\eta_\varepsilon\|_{L^1} \\ &\leq |Y| + S + 1, \end{aligned}$$

onde S é o raio de B . Assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Phi_\varepsilon(X, t)|^2 &= \Phi_\varepsilon(X, t) \frac{d}{dt} (\Phi_\varepsilon(X, t)) \\
 &= \tilde{U}_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(X, t), t) \cdot \Phi_\varepsilon(X, t) \\
 &\leq \frac{1}{2} (\tilde{U}_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(X, t), t))^2 + \frac{1}{2} (\Phi_\varepsilon(X, t))^2 \\
 &\leq \frac{1}{2} (\Phi_\varepsilon(X, t) + 1 + S)^2 + \frac{1}{2} (\Phi_\varepsilon(X, t))^2 \\
 &= \frac{1}{2} |\Phi_\varepsilon(X, t)|^2 + \Phi_\varepsilon(X, t)(1 + S) + \frac{1}{2} (1 + S)^2 + \frac{1}{2} (\Phi_\varepsilon(X, t))^2 \\
 &\leq |\Phi_\varepsilon(X, t)|^2 + \frac{1}{2} (1 + S)^2 + \frac{1}{2} (\Phi_\varepsilon(X, t))^2 + \frac{1}{2} (1 + S)^2 \\
 &= \frac{3}{2} |\Phi_\varepsilon(X, t)|^2 + \frac{1}{2} (1 + S)^2,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} (|\Phi_\varepsilon(X, t)|^2) \leq 3|\Phi_\varepsilon(X, t)|^2 + 2(1 + S)^2. \quad (2.2.39)$$

Logo, pelo lema de Gronwall,

$$\begin{aligned}
 |\Phi_\varepsilon(X, t)|^2 &\leq e^{3T} (|X|^2 + 2 \int_0^T (1 + S)^2 dt) \\
 &= e^{3T} (|X|^2 + 2(1 + S)^2 T),
 \end{aligned}$$

donde,

$$|\Phi_\varepsilon(X, t)| \leq e^{\frac{3T}{2}} (|X|^2 + 2(1 + S)^2 T)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2.40)$$

Da convergência uniforme (2.2.35), segue que

$$|\Phi(X, t)| \leq e^{\frac{3T}{2}} (|X|^2 + 2(1 + S)^2 T)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2.41)$$

para quase todo $(X, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T)$.

Agora, defina,

$$R_1 = 2e^{\frac{3T}{2}} (\|\nabla P_0\|^2 + 2(1 + S)^2 T)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2.42)$$

Para esta escolha de R_1 , temos que, se $(X, t) \in \nabla P_0(\Omega) \times [0, T)$, então $\Phi(X, t) \subset B(0, R_1)$, o que mostra (2.2.31). Em particular, para $(X, t) \in \nabla P_0(\Omega) \times [0, T)$, vale (2.2.32) uma vez que $\tilde{U} = U$ em $B(0, R_1)$. Isto conclui o item (v).

2.2. Fluxo Lagrangeano no espaço dual

Para provarmos o item (vi), tome $t_1, t_2 \in [0, T]$, tal $t_1 \geq t_2$ e $x \in \mathbb{R}^3$, e denote por $\widehat{\Phi}(x, t_1, t_2)$ o fluxo Lagrangeano regular relativo a \tilde{U} , iniciando no tempo t_1 , isto é, $\widehat{\Phi}(\cdot, t_1, \cdot)$ satisfaz (i),(ii) e (iv) no intervalo $[0, t_1]$, e $\widehat{\Phi}(X, t_1, t_1) = X$, para quase todo ponto $X \in \mathbb{R}^3$. Considerando a propriedade de semigrupo (2.2.25) dada na Observação 2.2.5, tem-se que, para qualquer $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$, vale a seguinte identidade

$$\widehat{\Phi}(\widehat{\Phi}(x, t_2, t_3), t_1, t_2) = \widehat{\Phi}(x, t_1, t_3), \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}^3.$$

Além disso, note que, dada uma família \tilde{U}_ε de aproximações para \tilde{U} satisfazendo (2.2.36), se $\widehat{\Phi}_\varepsilon(x, t_1, t_2)$ é o fluxo Lagrangeano regular com relação a \tilde{U}_ε , iniciando no tempo t_1 , temos pelo Teorema 2.2.4 que $\widehat{\Phi}_\varepsilon \rightarrow \widehat{\Phi}$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times [0, T] \times [0, T])$. Procedendo de forma análoga à análise do fluxo Φ , temos que existe uma subsequência $\widehat{\Phi}_{\varepsilon_k}$ de $\widehat{\Phi}_\varepsilon$ tal que

$$\widehat{\Phi}_{\varepsilon_k}(X, t) \rightarrow \widehat{\Phi}(X, t), \quad (2.2.43)$$

uniformemente em $[0, T]$, quando $k \rightarrow \infty$, quase sempre em X . Logo, $\widehat{\Phi}$ é uma aplicação Boreliana, visto que, para quase todo x , é o limite de aplicações contínuas, e também preserva medida, visto que cada aplicação $\widehat{\Phi}_{\varepsilon_k}$ também preserva medida.

Agora, note que $\Phi = \widehat{\Phi}(\cdot, 0, \cdot)$. Assim, fixado t , defina a aplicação Φ^* por $\Phi^* = \widehat{\Phi}^*(x, t) \equiv \widehat{\Phi}(x, t, 0)$. Esta aplicação satisfaz, para quase todo x ,

$$\begin{aligned} \Phi^*(\Phi(x, t), t) &= \widehat{\Phi}(\Phi(x, t), t, 0) = \widehat{\Phi}(\widehat{\Phi}(x, 0, t), t, 0) = \widehat{\Phi}(x, t, t) = x; \\ \Phi(\Phi^*(x, t), t) &= \widehat{\Phi}(\widehat{\Phi}(x, 0, t), t) = \widehat{\Phi}(\widehat{\Phi}(x, t, 0), 0, t) = \widehat{\Phi}(x, 0, 0) = \Phi(x, 0) = x, \end{aligned}$$

e de acordo com as observações acima, Φ^* assim definida é uma aplicação de Borel, e para cada t , Φ^*_t é preserva medida. Isto conclui a demonstração do item (vi). \blacksquare

A seguir, estaremos demonstrando que se (α, P) é uma solução fraca de (1.2.71), então para cada t , $\alpha_t = \Phi_{t\#}\alpha_0$, onde Φ_t é o fluxo Lagrangeano construído acima. Para isto, necessitamos primeiramente de um resultado particular sobre as equações de transporte.

Lema 2.2.7 *Seja $U \in L^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ tal que $U(\cdot, t) \in BV(\mathbb{R}^3)$ e $\operatorname{div} U(\cdot, t) = 0$ em \mathbb{R}^3 no sentido das distribuições, para todo $t \in (0, T)$. Considere uma aplicação mensurável, boreliana e localmente limitada $\Phi : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfazendo as propriedades (i)-(iv) da Proposição 2.2.6. Seja $v_0 \in L^q(\mathbb{R}^3)$, $q \geq 1$ tal que $\operatorname{supp} v_0 \subset B(0, R)$. Defina $v(x, t) = \Phi_t(x) \# v_0(x)$. Então*

$$v \in L^\infty((0, T), L^q(\mathbb{R}^3)) \cap C([0, T], L_w^\infty(\mathbb{R}^3)); \quad (2.2.44)$$

supp $v \subset B(0, R_T) \times [0, T]$, onde $R_T = R + T\|U\|_{L^\infty}$, e v é uma solução fraca de

$$\partial_t v + \operatorname{div}(vU) = 0 \quad (2.2.45)$$

sobre $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$, com dado inicial $v(x, 0) = v_0(x)$, isto é, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$,

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times (0, T)} v(\partial_t \varphi + U \cdot \nabla \varphi) dx dt + \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0.$$

Demonstração: Seja p tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seja $v_t(\cdot) := v(\cdot, t)$. Por definição, $v(\cdot, t) = \Phi(\cdot, t) \# v_0(\cdot)$ uma medida de probabilidade definida por

$$\langle v_t, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x) \varphi(\Phi_t(x)) dx, \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^3). \quad (2.2.46)$$

Como Φ_t preserva medida, temos que

$$\begin{aligned} \langle v_t, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x) \varphi(\Phi_t(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\Phi_t(x)) v_0(x) dx \\ &\leq \|v_0\|_{L^q} \left[\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(\Phi_t(x))|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|v_0\|_{L^q} \left[\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|v_0\|_{L^q} \|\varphi\|_{L^p}, \end{aligned}$$

e portanto $v_t \in L^q(\mathbb{R}^3)$, com $\|v_t\|_{L^q} \leq \|v_0\|_{L^q}$, $\forall t$. Assim, como $C_c(\mathbb{R}^3)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq p < \infty$, e como $v \in (L^p)^\prime = L^q$ podemos escrever $\langle v_t, \varphi \rangle$ como

$$\langle v_t, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} v_t(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^3).$$

2.2. Fluxo Lagrangeano no espaço dual

Agora, provemos a continuidade fraca de v com relação a t . De fato, sejam uma seqüência $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, e $t_* \in [0, T)$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} t_k = t_*$. Para cada t_k , seja $v_{t_k} := \Phi(\cdot, t_k)_\# v_0(\cdot)$. Queremos mostrar que, para toda função $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} v_{t_k}(x)\varphi(x)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} v_{t_*}(x)\varphi(x)dx. \quad (2.2.47)$$

Para isto, mostraremos primeiramente que, para toda função $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} v_{t_k}(x)\varphi(x)dx &= \langle v_{t_k}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x)\varphi(\Phi_{t_k}(x))dx \\ &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x)\varphi(\Phi_{t_*}(x))dx = \int_{\mathbb{R}^3} v_{t_*}(x)\varphi(x)dx. \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

Com efeito, note que, da Proposição 2.2.6 (i), temos, para quase todo $X \in \mathbb{R}^3$, que $\Phi(X, \cdot) \in W^{1,\infty}([0, T))$, e portanto, como $\lim_{t \rightarrow \infty} t_k = t_*$, então $\Phi_{t_k} \rightarrow \Phi_{t_*}$, para quase todo $X \in \mathbb{R}^3$. Além disso, como v_0 é limitada, $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^3)$ e $\|\Phi(X, t)\| \leq c + T\|\tilde{U}(\Phi(X, \tau), \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])}$, temos que $\|\varphi \circ \Phi_\varepsilon(X, t)\| \leq K\chi_{(B(0, RT))}(X)$, que é uma função mensurável. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada temos que, para toda função $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} v_{t_k}(x)\varphi(x)dx &= \langle v_{t_k}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x)\varphi(\Phi_{t_k}(x))dx \\ &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x)\varphi(\Phi_{t_*}(x))dx = \int_{\mathbb{R}^3} v_{t_*}(x)\varphi(x)dx, \end{aligned}$$

o que mostra (2.2.48).

Assim, como para cada $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^3)$ existe $\bar{\varphi} \in C_c(\mathbb{R}^3)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3c}$ temos que, para qualquer $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |v_{t_k}\varphi(x) - v_{t_*}\varphi(x)|dx &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |v_{t_k}\varphi(x) - v_{t_k}\bar{\varphi}(x)|dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} |v_{t_k}\bar{\varphi}(x) - v_{t_*}\bar{\varphi}(x)|dx + \int_{\mathbb{R}^3} |v_{t_*}\bar{\varphi}(x) - v_{t_*}\varphi(x)|dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |v_{t_k}||\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)|dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\varphi}(x)||v_{t_k} - v_{t_*}|dx + \int_{\mathbb{R}^3} |v_{t_*}||\bar{\varphi}(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto prova a continuidade fraca de v com respeito a t .

Agora, sabendo que $|\Phi_t(X)| \leq |X| + T\|U\|_{L^\infty}$, e que $\text{supp } v_0 \subset B(0, R)$, mostremos que $\text{supp } v_t \subset B(0, R_T)$. Com efeito, basta mostrarmos que v_t se anula em $\overline{B(0, R_T)}^C$, isto é,

$$v_t(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x)\varphi(\Phi_t(x))dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c(\overline{B(0, R_T)}^C).$$

De fato, como $\text{supp } v_0 \subset B(0, R)$, então

$$v_t(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x)\varphi(\Phi_t(x))dx = \int_{B(0, R)} v_0(x)\varphi(\Phi_t(x))dx.$$

Sejam $x \in B(0, R)$ e $\varphi \in C_c(\overline{B(0, R_T)}^C)$. Logo, $|x| < R$, e $|\Phi_t(x)| < R + T\|U\|_{L^\infty} = R_T$. Desta forma $\varphi(\Phi_t(x)) = 0$, e portanto $v_t(\varphi) = 0$ se $\varphi \in C_c(\overline{B(0, R_T)}^C)$. Assim, v_t se anula em $\overline{B(0, R_T)}^C$, donde $\text{supp } v_t \subset B(0, R_T)$.

Por fim, mostremos que v é uma solução fraca de (2.2.45), com dado inicial $v(x, 0) = v_0(x)$. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Então, usando (2.2.47) e as propriedades (i)-(iv) da Proposição 2.2.6, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T]} v_t(x)\partial_t \varphi(x, t)dxdt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T]} v_0(x)\partial_t \varphi(\Phi_t(x), t)dxdt \\ &= \int_0^T \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{R}^3} v_0(x)\varphi(\Phi_t(x), t)dx \right] dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x)\nabla \varphi(\Phi_t(x), t)\partial_t \Phi_t(x)dxdt \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x)\varphi(x, 0)dx - \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T]} v_0(x)\nabla \varphi(\Phi_t(x), t) \cdot U(\Phi_t(x), t)dxdt \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x)\varphi(x, 0)dxdt - \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T]} v_t(x)\nabla \varphi(x, t) \cdot U(x, t)dxdt. \end{aligned}$$

Disto segue que

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times (0, T)} v(\partial_t \varphi + U \cdot \nabla \varphi)dxdt + \int_{\mathbb{R}^3} v_0(x)\varphi(x, 0)dx = 0,$$

o que conclui a demonstração deste Lema. ■

Proposição 2.2.8 *Nas condições do Teorema 2.1.4, se (α, P) é uma solução fraca de (1.2.71), e se o campo \tilde{U} é tal que as condições (i)- (vi) da Proposição 2.2.6 são satisfeitas, então, para todo $t \in [0, T]$,*

$$\alpha_t = \Phi_{t\#}\alpha_0. \quad (2.2.49)$$

Mais ainda, para todo $t \in [0, T]$,

$$\alpha_t(x) = \alpha_0(\Phi_t^*(x)) \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.2.50)$$

Demonstração: Primeiramente observe que, em particular, temos $R_1 \geq R_0 + 1$, onde R_0 está definido no Teorema 1.2.6. Nesta demonstração utilizaremos uma discretização no tempo da equação de transporte $\partial_t \alpha + \operatorname{div}(\tilde{U} \cdot \alpha) = 0$, a fim de construirmos soluções aproximadas. Este procedimento também foi utilizado em [3] para obtenção de soluções fracas. Além disso, utilizaremos alguns resultados demonstrados em [3], [14] e [22] no decorrer desta demonstração.

Seja $h > 0$ pequeno, escolhido de forma que T/h é um número inteiro. Seja $\eta_h(\cdot) = \frac{1}{h^3} \eta\left(\frac{\cdot}{h}\right)$ um mollifier padrão. Defina

$$\alpha_0^h := (\alpha_0) * \eta_h. \quad (2.2.51)$$

Para um número inteiro k , determinaremos indutivamente a solução do problema (α_h^k, P_h^k) no intervalo de tempo $[kh, (k+1)h)$, onde P_h^k é a única função convexa satisfazendo

$$\begin{aligned} \nabla P_h^k \# \mathcal{L}_\Omega &= \alpha_h^k \\ P_h^k(x_*) &= P_0(x_*), \end{aligned}$$

com $x_* \in \Omega$ um ponto qualquer, o mesmo para toda função P_h^k .

Seja

$$\begin{aligned} Q_h^k &= \eta_h * (P_h^k)^* \\ W_h^k(X) &= J[H(X) - \nabla(P_h^k)^*(X)] \\ U_h^k(X) &= J[H(X) - \nabla(Q_h^k)^*(X)]. \end{aligned} \quad (2.2.52)$$

Para definirmos α_h^{k+1} resolvemos o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_h}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_h U_h^k) &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^3 \times [kh, (k+1)h) \\ \alpha_h(X, kh) &= \alpha_h^k(X), \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

e definimos

$$\alpha_h^{k+1}(X) = \alpha_h(X, (k+1)h). \quad (2.2.54)$$

Repete-se este procedimento para $k = 1, \dots, T/h$. Em particular, definimos uma função $\alpha_h(X, t)$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$.

Para cada $t \in (0, T)$, defina $P_h(\cdot, t)$ como a única função convexa satisfazendo

$$\begin{aligned} \nabla P_h(\cdot, t) \# \mathcal{L}_\Omega &= \alpha_h(\cdot, t) \\ P_h(x_*, t) &= P_0(x_*), \end{aligned}$$

e, a partir desta função, defina,

$$\begin{aligned} Q_h(\cdot, t) &= \eta_h * (P_h(\cdot, t))^* \\ W_h(X, t) &= J[H(X) - \nabla(P_h)^*(X, t)] \\ U_h(X, t) &= J[H(X) - \nabla(Q_h)^*(X, t)]. \end{aligned}$$

Agora, definamos \bar{P}_h sobre $\Omega \times [0, T]$, e $\bar{\alpha}_h, \bar{Q}_h, \bar{W}_h, \bar{U}_h$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$ fazendo estas funções iguais a $P_h^k, \alpha_h^k, Q_h^k, W_h^k, U_h^k$, respectivamente, no intervalo $t \in [kh, (k+1)h)$. Em [3] e [14], mostrou-se a existência de uma subsequência $h_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$ tal que, para as subsequências correspondentes às seqüências acima estabelecidas, temos as seguintes propriedades:

- (i) $\operatorname{supp} \alpha_{h_j}(\cdot, t) \subset B(0, R_0)$, para cada $t \in [0, T]$,
- (ii) A seqüência α_{h_j} é precompacta em $C([0, T]; w^* - L_A(B(0, R_0)))$,
- (iii) $\|\bar{U}_h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq S + R_1 + 1$, $\|\bar{\nabla} U_h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, T))} \leq C \left(\frac{S}{h} + 1 \right)$, c dependente apenas de η ,

2.2. Fluxo Lagrangeano no espaço dual

(iv) $\bar{U}_{h_j} \rightarrow J[H - \nabla P^*]$ em $L^r(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, $r \in [1, \infty)$.

Agora, observe que, para cada $h > 0$, o campo \bar{U}_h possui divergente nulo. Logo, pelas propriedades (i)-(iv) acima, do Teorema 2.2.2 temos a existência de um único fluxo Lagrangeano $\Phi_h : \mathbb{R}^3 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ induzido por \bar{U}_h , e além disso Φ_h satisfaz a Proposição 2.2.6. Observe que, para cada t , de acordo com a Proposição 2.2.6, a aplicação $(\Phi_t)_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preserva medida. Desta forma, aplicando o Teorema 2.2.4 para subsequência $(\Phi)_{h_j}$ concluímos que,

$$(\Phi_{h_j})_t \rightarrow \Phi_t \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^3), \text{ para cada } t \in [0, T]. \quad (2.2.55)$$

Note ainda que $\|\alpha_h^0\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq \|\alpha_0\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}$. Assim, pelo Lema 2.2.7 podemos concluir que $v(\cdot, t) = \Phi_{t\#}\alpha_h^0 \in L^\infty([0, T], L^q(\mathbb{R}^3))$ é uma solução fraca de

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_h}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_h \bar{U}_h) &= 0 \\ \alpha_h(X, 0) &= \alpha_h^0(X). \end{aligned} \quad (2.2.56)$$

Como, pela propriedade (iii) acima, $\bar{U}_h \in L^\infty([0, T], W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3))$, segue que (2.2.56) possui no máximo uma solução α (por DiPerna-Lions [16]). Como $v(\cdot, t) = \Phi_{t\#}\alpha_h^0$ também é uma solução, concluímos que

$$\alpha_h(\cdot, t) = \Phi_{t\#}\alpha_h^0. \quad (2.2.57)$$

Por fim, observe que de (2.2.57) e da propriedade (i) segue que, para qualquer $t > 0$, $j = 1, 2, \dots$, e toda função $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{B(0, R_0)} \varphi(\Phi_{h_j}(X, t)) \alpha_{h_j}^0(X) dX = \int_{B(0, R_0)} \varphi(y) \alpha_{h_j}(y, t) dy, \quad (2.2.58)$$

onde $R_0 = S(1 + T)$ é a constante dada no Teorema 1.2.6. Queremos passar ao limite na identidade acima, quando $j \rightarrow \infty$. Para isto, vamos utilizar o Teorema da Convergência Dominada Generalizado (Lema 4). De (2.2.55), e pela propriedade (ii) podemos aplicar

Teorema da Convergência Dominada generalizado para o lado esquerdo de (2.2.58) , e obtemos

$$\int_{B(0,R_0)} \varphi(\Phi_{h_j}(X,t))\alpha_{h_j}^0(X)dX = \int_{B(0,R_0)} \varphi(\Phi(X,t))\alpha_0(X)dX. \quad (2.2.59)$$

Para o lado direito, utilizando a propriedade (ii) e o Teorema de Convergência Dominada clássico, temos

$$\int_{B(0,R_0)} \varphi(y)\alpha_{h_j}(y,t)dy = \int_{B(0,R_0)} \varphi(y)\alpha(y,t)dy, \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^3). \quad (2.2.60)$$

Assim, de (2.2.58), (2.2.59), e (2.2.60), segue que

$$\int_{B(0,R_0)} \varphi(\Phi(X,t))\alpha_0(X)dX = \int_{B(0,R_0)} \varphi(y)\alpha(y,t)dy, \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^3). \quad (2.2.61)$$

Como $\text{supp } \alpha(\cdot, t) \subset B(0, R_0)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\Phi(X,t))\alpha_0(X)dX = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y)\alpha(y,t)dy, \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^3), \quad (2.2.62)$$

ou seja, (2.2.49) é satisfeita.

Note que, pela Proposição 2.2.6 (vi) , para cada t existe Φ^* que preserva medida, e tal que $\Phi_t^* \circ \Phi_t(x) = x$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^3$. Assim, fazendo a mudança de coordenadas $y = \Phi(x, t)$ no lado esquerdo de (2.2.62) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\Phi(X,t))\alpha_0(X)dX = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y)\alpha_0(\Phi_t^*(y))dy,$$

e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y)\alpha_0(\Phi_t^*(y))dy = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y)\alpha(y,t)dy, \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^3),$$

donde segue que, para quase todo $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\alpha_t(x) = \alpha_0(\phi_t^*(x)),$$

o que conclui esta demonstração. ■

2.3 Fluxo Lagrangeano no espaço físico

O nosso objetivo a partir de agora é mostrar que a aplicação

$$F := F(x, t) = P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x),$$

definida em (2.1.15), define um fluxo Lagrangeano no espaço físico, e é tal que (P, F) é uma solução Lagrangeana do Teorema 2.1.4. Mais ainda, dada uma aplicação P nas hipóteses do Teorema 2.1.4, o fluxo Lagrangeano F anteriormente definido é único para quase todo ponto. Cullen e Feldman mostraram apenas a existência deste fluxo Lagrangeano quando $DP_{0\#}\mathcal{L}_\Omega \in L^q(\mathbb{R}^3)$, $q > 1$. Mostramos que este resultado ainda é válido quando $q = 1$, adaptando a técnica desenvolvida em [11] através da utilização das técnicas observadas em [22], e mostramos também que, dado uma aplicação P nas hipóteses do Teorema 2.1.4, o fluxo Lagrangeano F associado a esta aplicação é único.

O próximo resultado mostra que a aplicação composta $(\nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0)$ está bem definida.

Lema 2.3.1 *Para quase todo $(x, t) \in \Omega \times [0, T)$, $\nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)$ está bem definida. Mais ainda, para todo $t \in [0, T)$ esta composição está definida para quase todo $x \in \Omega$, e a aplicação $F : \Omega \times [0, T) \rightarrow \Omega$ definida por (2.1.15) é Borel mensurável.*

Demonstração: Note que, como P_0 é uma função convexa e limitada sobre B então ∇P_0 está definida sobre $\Omega \setminus N_0^1$, com N_0^1 um subconjunto Borel mensurável de Ω tal que $|N_0^1|_{\mathbb{R}^3} = 0$.

Além disso, P^* é uma aplicação de Borel e limitada sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, T)$, convexa em x , logo diferenciável quase sempre no espaço. Portanto, para cada t , ∇P_t^* está definida sobre $\mathbb{R}^3 \setminus N_t^2$, com N_t^2 um subconjunto boreliano de \mathbb{R}^3 tal que $|N_t^2|_{\mathbb{R}^3} = 0$. Mais ainda,

se $N^2 \subset (\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ é tal que $N_t^2 = N^2 \cap (\mathbb{R}^3 \times \{t\})$, temos que ∇P^* está definida sobre $(\mathbb{R}^3 \times [0, T]) \setminus N^2$, e $|N^2|_{\mathbb{R}^4} = 0$ pelo Teorema de Fubini.

Desta forma, devemos mostrar que $(\nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0)$ está definida no seguinte conjunto:

$$\{(x, t) \in \Omega \times [0, T]; (x, t) \notin [(N_0^1 \times [0, T]) \cup M]\},$$

onde $M \subset \mathbb{R}^3 \times [0, T)$ é definido por $M = \{(y, s) \in (\Omega \setminus N_0^1) \times [0, T); (\Phi(\nabla P_0(y), s), s) \in N^2\}$.

Como $(N_0^1 \times [0, T))$ é um conjunto de medida nula em $\Omega \times [0, T)$, resta-nos mostrar que $|M|_{\mathbb{R}^4} = 0$, e $|M_t|_{\mathbb{R}^3} = 0$ para todo $t \in [0, T)$, com $M_t := M \cap (\mathbb{R}^3 \times \{t\})$. Observe que, pelo Teorema de Fubini é suficiente mostrarmos que $|M_t|_{\mathbb{R}^3} = 0$ para todo $t \in [0, T)$, onde $M_t = \{x \in \Omega \setminus N_0^1; \nabla P_0(x) \in \Phi_t^{-1}(N_t^2)\}$. Com efeito, fixe $t \in [0, T)$. Como $\Phi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preserva medida, então $|\Phi_t^{-1}(N_t^2)|_{\mathbb{R}^3} = 0$. Uma vez que $\nabla P_{0\#} \mathcal{L}_\Omega = \alpha_0$ e ∇P_0 não está definido sobre N_0^1 , segue que $\nabla P_{0\#} \mathcal{L}_{\Omega \setminus N_0^1} = \alpha_0$. Assim, como $\alpha \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$, temos que,

$$\begin{aligned} |M_t| &= |\{x \in \Omega \setminus N_0^1; \nabla P_0(x) \in \Phi_t^{-1}(N_t^2)\}| \\ &= \int_{\Phi_t^{-1}(N_t^2)} \alpha_0(z) dz = 0 \end{aligned}$$

Portanto, podemos definir $F : \Omega \times [0, T) \rightarrow \Omega$ por $F(x, t) = \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)$, e tal aplicação é Borel mensurável pela Proposição 2.2.6. Isto conclui a demonstração. ■

A seguir demonstramos que $F \in C([0, T), L^1(\Omega))$, e que aplicação F satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 2.1.3.

Proposição 2.3.2 *Seja F definida por (2.1.15). Então F satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $F(x, 0) = x$, para quase todo $x \in \Omega$;
- (ii) Para todo $t > 0$, a aplicação $F_t : \Omega \rightarrow \Omega$ preserva medida;

(iii) Para quaisquer $t_0 \in [0, T)$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\Omega} |F_t(x) - F_{t_0}(x)| dx = 0, \quad t \in [0, T); \quad (2.3.63)$$

Demonstração: Para mostrarmos o item (i), observemos primeiramente que $F_0(x) = \nabla P_0^* \circ \Phi_0 \circ \nabla P_0(x)$ para todo $x \in \Omega \setminus N_0$, onde N_0 é um subconjunto boreliano tal que $|N_0|_{\mathbb{R}^3} = 0$, pelo lema anterior. Mostremos que $\nabla P_0^* \circ \Phi_0 \circ \nabla P_0(x) = x$ para quase todo $x \in \Omega$.

De fato, como P_0 é convexa em B , e também valendo-se do fato que P_0^* é dual convexa de P_0 , existem subconjuntos $N_1 \subset \Omega$, $N_2 \subset \mathbb{R}^3$ tais que $|N_1|_{\mathbb{R}^3} = 0$, $|N_2|_{\mathbb{R}^3} = 0$, P_0 é diferenciável em $\Omega \setminus N_1$, e P_0^* é diferenciável sobre $\mathbb{R}^3 \setminus N_2$. Mais ainda, se $x \in \Omega \setminus [N_1 \cup \nabla P_0^{-1}(N_2)]$, então $\nabla P_0^* \circ \nabla P_0(x) = x$.

Agora, observe que pela Proposição 2.2.6(i), $\Phi_0(x) = x$ em $\mathbb{R}^3 \setminus N_3$, $|N_3|_{\mathbb{R}^3} = 0$. Assim, temos que $F_0(x) = x$ se $\Phi_0 \circ \nabla P_0(x) = \nabla P_0(x)$, isto é se $\nabla P_0(x) \notin N^3$, e também se $\nabla P_0(x) \notin N^2$. Logo, $F_0(x) = x$ se $x \in \Omega \setminus [N_0 \cup N_1 \cup \nabla P_0^{-1}(N_2 \cup N_3)]$. Como $|N_0|_{\mathbb{R}^3} = |N_1|_{\mathbb{R}^3} = 0$, para completarmos a demonstração do item(i), precisamos mostrar que

$$|\nabla P_0^{-1}(N_2 \cup N_3) \cap \Omega|_{\mathbb{R}^3} = 0.$$

Para isto, defina $\mu = \alpha_0 dx$. Como $\alpha_0 \in L^q(\mathbb{R}^3)$, e α é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, temos que $\mu(N_2 \cup N_3) = 0$. Uma vez que $\nabla P_0 \# \mathcal{L}_{\Omega} = \alpha_0$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} |\nabla P_0^{-1}(N_2 \cup N_3) \cap \Omega| &= \int_{\nabla P_0^{-1}(N_2 \cup N_3) \cap \Omega} dx \\ &= \int_{(N_2 \cup N_3)} \det D^2 P_0^*(z) dz \\ &= \int_{(N_2 \cup N_3)} \alpha_0(z) dz \\ &= \mu(N_2 \cup N_3) = 0, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do item (i).

Com relação ao item (ii), observe que a seguinte identidade é válida:

$$\int_{\Omega} \varphi(F_t(x)) = \int_{\Omega} \varphi \circ \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x) dx \quad (2.3.64)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \circ \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y) \alpha_0(y) dy \quad (2.3.65)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \circ \nabla P_t^*(z) \alpha_t(z) dz \quad (2.3.66)$$

$$= \int_{\Omega} \varphi(x) dx. \quad (2.3.67)$$

De fato, (2.3.64) segue da definição de F_t . Além disso, como $\nabla P_{0\#} \mathcal{L}_{\Omega} = \alpha_0$, temos que

$$\int_{\Omega} \psi \circ \nabla P_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(y) \alpha_0(y) dy, \quad \forall \psi \in C(\mathbb{R}^3).$$

Uma vez que $\alpha_0 \in L^q(\mathbb{R}^3)$ tem suporte compacto, a identidade acima também é válida para todo $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Tome $\psi = \varphi \circ \nabla P_t^* \circ \Phi_t \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Desta forma obtemos a identidade (2.3.65). Também, como $\varphi \circ \nabla P_t^* \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, α_0 tem suporte compacto, e de (2.2.49) temos que $\alpha_t = \Phi_{t\#} \alpha_0$, pelos mesmos argumentos utilizados para mostrarmos (2.3.65) obtemos (2.3.66). Finalmente, (2.3.67) segue do fato que $\nabla P_{t\#}^* \alpha_t = 1_{\Omega}$, e portanto o item (ii) está demonstrado.

Mostremos agora que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\Omega} |F_t(x) - F_{t_0}| dx = 0, \quad t \in [0, T)$$

para qualquer $t_0 \in [0, T)$. De fato, pelo Lema 2.3.1 temos que (2.1.15) está definida para quase todo $x \in \mathbb{R}^3$, e $t \in [0, T)$. Como $\nabla P_{0\#} \mathcal{L}_{\Omega} = \alpha_0$ e $\Phi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preserva medida,

2.3. Fluxo Lagrangeano no espaço físico

temos, para $t, t_0 \in [0, T)$, que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |F_t(x) - F_{t_0}(x)| dx &= \\
&= \int_{\Omega} |\nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_{t_0} \circ \nabla P_0(x)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla P_t^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_{t_0}(y)| \alpha_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla P_t^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_t(y) + \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_{t_0}(y)| \alpha_0(y) dy \\
&\leq c_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla P_t^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_t(y)| \alpha_0(y) dy + \right. \\
&\quad \left. + c_2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_{t_0}(y)| \alpha_0(y) dy \right\},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} |F_t(x) - F_{t_0}(x)| dx \leq c(I_1 + I_2). \quad (2.3.68)$$

Mostraremos primeiramente que

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla P_t^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_t(y)| \alpha_0(y) dy \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow t_0$. Com efeito, note que $\|\alpha_t\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} = \|\alpha_0\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}$, visto que Φ_t^* preserva medida, e $\alpha_t(x) = \alpha_0(\Phi_t^*(x))$, pela Proposição 2.2.8. Além disso, se A denota uma N-função Δ -regular, e se $L_A(\mathbb{R}^3)$ é o espaço de Orlicz associado a A , e E_A^* denota o espaço dual de L_A , utilizando a desigualdade de Holder pra espaços de Orlicz (veja (A.4)-Apêndice), temos que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla P_t^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_t(y)| \alpha_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla P_t^*(z) - \nabla P_{t_0}^*(z)| \alpha_t(z) dz \\
&\leq \|\nabla P_t^* - \nabla P_{t_0}^*\|_{E_{A^*}} \|\alpha_t\|_{L_A} \\
&= \|\nabla P_t^* - \nabla P_{t_0}^*\|_{E_{A^*}} \|\alpha_0\|_{L_A} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0.
\end{aligned} \quad (2.3.69)$$

De fato, temos que $\nabla P^* \in L^\infty([0, T], E_{A^*}(B(0, R_0))) \cap C([0, T], L^r(B(0, R)))$ para todo $R > 0$, e todo $r \in [1, \infty)$, pelo Teorema 1.2.6. Logo $\|\nabla P_t^*\|_{L^\infty} < \infty$ e se $t_0 \in [0, T)$ é tal

que $t \rightarrow t_0$, então $\nabla P_t^* \rightarrow \nabla P_{t_0}^*$ em $L^1(B(0, R))$. Logo, a sequência $\{\nabla P_t^* := \nabla P^*(\cdot, t)\}_{t \in [0, T]}$ satisfaz as condições do Lema A.8 (apêndice), e portanto $\nabla P_t^* \rightarrow \nabla P_{t_0}^*$ em $L_{A^*}(\mathbb{R}^3)$. Como $E_{A^*}(\mathbb{R}^3) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^3)}^{L_{A^*}}$, então $\nabla P_t^* \rightarrow \nabla P_{t_0}^*$ em $E_{A^*}(\mathbb{R}^3)$.

Agora, mostremos que

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_{t_0}(y)| \alpha_0(y) dy \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow t_0$. Para isto, note que, para cada t , $\nabla P_t^*(y) \in B$ para quase todo y . Além disso, $\alpha_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada resta-nos mostrar que, para cada t_0 ,

$$\nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_{t_0}(y) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0, \quad (2.3.70)$$

para quase todo $y \in \mathbb{R}^3$.

Com efeito, primeiro observe que da Proposição 2.2.6 (i) podemos concluir que

$$\Phi_t(y) \rightarrow \Phi_{t_0}(y), \quad t \rightarrow t_0 \text{ em } [0, T] \quad (2.3.71)$$

para quase todo $y \in \mathbb{R}^3$, já que $\Phi(y, \cdot) \in W^{1, \infty}([0, T])$ para quase todo $y \in \mathbb{R}^3$. Seja $y \in \mathbb{R}^3$ tal que a convergência em (2.3.71) ocorre. Se $\Phi_{t_0}(y)$ é um ponto de continuidade para $\nabla P_{t_0}^*$, então (2.3.71) implica que, para tal y , a convergência em (2.3.70) ocorre. Para verificarmos que $\nabla P_{t_0}^*$ é contínua em $\Phi_{t_0}(y)$ observe que, como $P_{t_0}^*$ é convexa, $\nabla P_{t_0}^*$ é diferenciável quase sempre, pelo teorema de Aleksandrov (veja [18]), e portanto $\nabla P_{t_0}^*$ é contínua para quase todo ponto. Além disso, como Φ_{t_0} preserva medida, então $\nabla P_{t_0}^*$ é contínua em $\Phi_{t_0}(y)$, para quase todo y . De fato, se isto não acontecesse, existiria um subconjunto $N \subset \mathbb{R}^3$ de medida positiva, tal que $\nabla P_{t_0}^*$ seria descontínua em $\Phi_{t_0}(y)$, para todo $y \in N$, ou seja, $\nabla P_{t_0}^*$ seria descontínua em $\Phi_{t_0}(N)$, e $|\Phi_{t_0}(N)|_{\mathbb{R}^3} > 0$, o que é uma contradição.

2.3. Fluxo Lagrangeano no espaço físico

Logo, para quase todo y , $\nabla P_{t_0}^*$ é contínua em $\Phi_{t_0}(y)$, e portanto (2.3.71) implica que (2.3.70) ocorre, o que encerra a demonstração do item (iii). ■

Observação 2.3.3 *Como $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é limitado, do item (iii) da Proposição 2.3.2 podemos concluir que, para todo $r \in [1, \infty)$,*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\Omega} |F_t(x) - F_{t_0}|^r dx = 0, \quad t \in [0, T). \quad (2.3.72)$$

O lema seguinte nos fornece um resultado técnico que será utilizado no decorrer das próximas demonstrações.

Lema 2.3.4 *Seja $Z(x, t) = \nabla P(F(x, t), t)$. Então $Z_t(x) = \Phi_t \circ \nabla P_0(x)$, para quase todo $(x, t) \in \Omega \times [0, T)$.*

Demonstração: Note que, formalmente, temos a seguinte identidade:

$$Z_t := \nabla P_t \circ F_t = \nabla P_t \circ \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0 = \Phi_t \circ \nabla P_0, \quad (2.3.73)$$

uma vez que $\nabla P_t \circ \nabla P_t^* = Id$ sobre o suporte de α_t .

Para provar este lema, precisamos justificar estas igualdades. Como para cada t , P_t é uma aplicação convexa e limitada, ∇P_t está definida sobre $\Omega \setminus N_t^1$, com $|N_t^1|_{\mathbb{R}^3} = 0$, $\forall t \in [0, T)$, e além disso, ∇P está definida em $(\Omega \times [0, T)) \setminus N^1$, com $|N^1|_{\mathbb{R}^4} = 0$. Observe que, como para cada $t \in [0, T)$ F_t é uma aplicação que preserva medida, temos que $|F_t^{-1}(N_t^1)|_{\mathbb{R}^3} = 0$. Agora defina

$$\begin{aligned} G : \Omega \times [0, T) &\rightarrow \Omega \times [0, T) \\ G(x, t) &= (F(x, t), t). \end{aligned}$$

Desta forma, $G^{-1}(N^1)$ é um subconjunto de $\Omega \times [0, T)$ satisfazendo $|G^{-1}(N^1)|_{\mathbb{R}^4} = 0$. De fato, note que

$$\chi_{F_t^{-1}(N_t^1)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in F_t^{-1}(N_t^1); \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e $x \in F_t^{-1}(N_t^1) \iff F_t(x) \in N_t^1 \iff (F(x, t), t) \in N^1 \iff (x, t) \in G^{-1}(N^1)$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_{\Omega} \chi_{F_t^{-1}(N_t^1)}(x) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \chi_{G^{-1}(N^1)}(x, t) dx dt \\ &= \int_{\Omega \times [0, T]} \chi_{G^{-1}(N^1)}(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Desta forma, pelo Lema 2.3.1, podemos concluir que $Z_t(x) = \nabla P_t \circ \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)$ para $(x, t) \in (\Omega \times [0, T]) \setminus \tilde{N}$, $|\tilde{N}|_{\mathbb{R}^4} = 0$. o que justifica a primeira identidade em (2.3.73).

Agora, justifiquemos a identidade $\nabla P_t \circ \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0 = \Phi_t \circ \nabla P_0$. Seja $\tilde{M} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]; \nabla P(\nabla P^*(x, t), t) \neq x\} \cup A$, onde o conjunto A é tal que $A = \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T]; \nabla P^*(x, t) \text{ ou } \nabla P(\nabla P^*(x, t), t) \text{ não existem}\}$. Devemos mostrar que

$$\left| \{(x, t) \in (\Omega \times [0, T]) \setminus \tilde{N}; (\Phi_t \circ \nabla P_0(x), t) \in \tilde{M}\} \right| = 0. \quad (2.3.74)$$

Observe que, se $\tilde{M}_t = \tilde{M} \cap (\mathbb{R}^3 \times \{t\})$, pelo Teorema de Fubini basta mostrarmos que

$$\left| \{x \in \Omega \setminus \tilde{N}_t; \Phi_t \circ \nabla P_0(x) \in \tilde{M}_t\} \right| = 0.$$

Com efeito, primeiramente observe que, como $\nabla P_{t\#} \mathcal{L}_{\Omega} = \alpha_t$ e $\nabla P_t^* \# \alpha_t = 1_{\Omega}$, então, para todo t , temos que,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\nabla P_t(\nabla P_t^*(x))) \alpha_t(x) dx = \int_{\Omega} \varphi(\nabla P_t(y)) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) \alpha_t(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^3),$$

ou seja,

$$\nabla P_t \circ \nabla P_t^*(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha_t - q.s..$$

Logo, da identidade anterior, podemos concluir que o conjunto M_t é de medida α_t nula, isto é,

$$\int_{\tilde{M}_t} \alpha_t(y) dy = 0; \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3.75)$$

2.3. Fluxo Lagrangeano no espaço físico

Assim, como, para qualquer $t \in [0, T]$, $|\tilde{N}_t| = 0$ (e portanto o fato $\nabla P_{0\#} \mathcal{L}_\Omega = \alpha_0$, implica que $\nabla P_{0\#} \mathcal{L}_{\Omega \setminus \tilde{N}_t} = \alpha_0$), da Proposição 2.2.6, ítems (iv) e (vi), de (2.2.50), e de (2.3.75) concluimos que

$$\begin{aligned} \left| \{x \in \Omega \setminus \tilde{N}_t; \Phi_t \circ \nabla P_0(x) \in \tilde{M}_t\} \right| &= \left| \{x \in \Omega \setminus \tilde{N}_t; \nabla P_0(x) \in \Phi_t^*(\tilde{M}_t)\} \right| \\ &= \int_{\Phi_t^*(\tilde{M}_t)} \alpha_0(x) dx \\ &= \int_{\tilde{M}_t} \alpha_0(\Phi_t^*(x)) dx \\ &= \int_{\tilde{M}_t} \alpha_t(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto, utilizando o Teorema de Fubini, obtemos (2.3.74), e por conseguinte temos que $\nabla P_t \circ \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0 = \Phi_t \circ \nabla P_0$. Isto conclui a demonstração. \blacksquare

O resultado seguinte mostra que existe uma aplicação F^* que satisfaz a condição (iii) da Definição 2.1.3.

Proposição 2.3.5 *Existe $F^* : \Omega \times [0, T] \rightarrow \Omega$ tal que para todo $t \in (0, T)$ a aplicação $F_t^* = F^*(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \Omega$ preserva medida de Lebesgue ($F_t^* \# \mathcal{L}_\Omega = \mathcal{L}_\Omega$), e satisfaz $F_t \circ F_t^*(x) = x$ e $F_t^* \circ F_t(x) = x$ para quase todo $x \in \Omega$.*

Demonstração: Defina, para cada $t \in [0, T]$,

$$F_t^*(x) = \nabla P_0^* \circ \Phi_t^* \circ \nabla P_t(x). \quad (2.3.76)$$

Vamos mostrar que esta aplicação satisfaz a condição (iii) da Definição 2.1.3.

Com efeito, observe que, de forma análoga ao Lema 2.3.1 podemos concluir, para todo $t \in [0, T]$, que a expressão $\nabla P_0^* \circ \Phi_t^* \circ \nabla P_t(x)$ está definida para quase todo $x \in \Omega$, e que a aplicação $F_t^* : \Omega \rightarrow \Omega$ definida por (2.3.76) é boreliana.

Além disso, se $\tilde{N} \subset \Omega$ é o conjunto dos pontos tais que F_t^* não está definida, então $|\tilde{N}| = 0$, e portanto, como F_t preserva medida, $|F_t(\tilde{N})| = 0$. Logo, $F_t^* \circ F_t(x) = \nabla P_0^* \circ$

$\Phi_t^* \circ \nabla P_t \circ F_t(x)$ está definida para quase todo $x \in \Omega$ tal que F_t^* está definida. Note que, usando o Lema 2.3.4 temos, $F_t^* \circ F_t(x) = \nabla P_0^* \circ \Phi_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)$ quase sempre em Ω . Note também que, como $\Phi_t^* \circ \Phi_t(y) = y$ quase sempre em \mathbb{R}^3 , e portanto α_0 -quase sempre em \mathbb{R}^3 (pois α_0 é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue), o fato de que $\nabla P_{0\#} \mathcal{L}_\Omega = \alpha_0$ implica que, $\forall \varphi \in C(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \varphi \circ \Phi_t^* \circ \Phi_t(\nabla P_0(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \circ \Phi_t^* \circ \Phi_t(y) \alpha_0(y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) \alpha_0(y) dy = \int_{\Omega} \varphi(\nabla P_0(x)) dx,$$

isto é, $\Phi_t^* \circ \Phi_t(\nabla P_0(x)) = \nabla P_0(x)$ para quase todo x . Desta forma, temos que

$$F_t^* \circ F_t(x) = \nabla P_0^* \circ \nabla P_0(x) = x, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Analogamente, concluímos que $F_t \circ F_t^*(x) = x$, para quase todo $x \in \Omega$, o que conclui esta demonstração. ■

Por fim, mostraremos que $Z(x, t) = \nabla P(F(x, t), t)$ é solução fraca de (2.1.11).

Proposição 2.3.6 *Seja $Z(x, t) = \nabla P(F(x, t), t)$. Então, para qualquer $\phi \in C_c^1(\Omega \times [0, T])$, a identidade em (2.1.12) é satisfeita. Mais ainda, após mudarmos $Z(x, t)$ sobre um subconjunto de $\Omega \times (0, T)$ de medida nula, temos que $Z(x, \cdot) \in W^{1,\infty}([0, T])$, para quase todo $x \in \Omega$, e a identidade (2.1.14) é válida.*

Demonstração: Para mostrarmos que $Z(x, t) = \nabla P(F(x, t), t)$ é solução fraca de (2.1.11), observe que, a definição do fluxo Lagrangeano Φ e a Proposição 2.2.6 implicam que, para quase todo $X \in \mathbb{R}^3$ e todo $t \in [0, T]$, temos que

$$\Phi(X, t) = X + \int_0^t \tilde{U}(\Phi_s(X), s) ds. \quad (2.3.77)$$

Desta forma, a identidade expressa em (2.3.77) é válida para todo $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \hat{N}$, com $|\hat{N}|_{\mathbb{R}^3} = 0$. Como $\nabla P_{0\#} \mathcal{L}_\Omega = \alpha_0$, $\alpha_0 \in L^q(\mathbb{R}^3)$, então

$$\left| (\nabla P_0)^{-1}(\hat{N}) \cap \Omega \right| = \int_{\hat{N}} \alpha_0(z) dz = 0.$$

2.3. Fluxo Lagrangeano no espaço físico

Portanto, para quase todo $x \in \Omega$, podemos tomar $X = \nabla P_0(x)$ em (2.3.77). Assim, obtemos que

$$\Phi(\nabla P_0(x), t) = \nabla P_0(x) + \int_0^T U(\Phi_s(\nabla P_0(x)), s) ds, \quad (2.3.78)$$

para quase todo $x \in \Omega$, e todo $t \in [0, T]$. Note que podemos trocar o campo \tilde{U} pelo campo U baseados na Proposição 2.2.6 (v).

Multiplicando (2.3.78) por $\partial_t \eta(x, t)$, onde $\eta \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, e integrando sobre $\Omega \times [0, T]$, temos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times [0, T]} \partial_t \eta(x, t) \cdot \Phi(\nabla P_0(x), t) dx dt &= \int_{\Omega \times [0, T]} \partial_t \eta(x, t) \cdot \nabla P_0(x) dx dt \\ &+ \int_{\Omega \times [0, T]} \partial_t \eta(x, t) \int_0^T U(\Phi_s(\nabla P_0(x)), s) ds dx dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times [0, T]} \partial_t \eta(x, t) \cdot \Phi(\nabla P_0(x), t) dx dt &= - \int_{\Omega} \eta(x, 0) \cdot \nabla P_0(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} \left[\eta(x, t) \int_0^T U(\Phi_s(\nabla P_0(x)), s) ds \right]_0^T dx \\ &- \int_{\Omega \times [0, T]} \eta(x, t) \partial_t \left[\int_0^T U(\Phi_s(\nabla P_0(x)), s) ds \right] dx dt \\ &= - \int_{\Omega} \partial_t \eta(x, 0) \nabla P_0(x) dx \\ &- \int_{\Omega \times [0, T]} \eta(x, t) U(\Phi_s(\nabla P_0(x)), s) dx dt. \end{aligned} \quad (2.3.79)$$

Agora, como $U(X, t) = J[X - \nabla P^*(X, t)]$, de (2.1.15) e do Lema 2.3.2 temos que

$$\begin{aligned} U(\Phi_t(\nabla P_0(x)), t) &= J[\Phi_t(\nabla P_0(x)) - \nabla P_t^*(\Phi_t(\nabla P_0(x)))] \\ &= J[Z(x, t) - F(x, t)] \end{aligned}$$

para quase todo (x, t) . Logo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times [0, T]} \partial_t \eta(x, t) \cdot Z(x, t) dx dt &= - \int_{\Omega} \eta(x, 0) \nabla P_0(x) dx \\ &- \int_{\Omega \times [0, T]} \eta(x, t) \cdot J[Z(x, t) - F(x, t)] dx dt, \end{aligned}$$

o que prova (2.1.12).

Finalmente, pelo Lema 2.3.4 temos que $Z(x, t) = \nabla P(F(x, t), t) = \Phi(\nabla P_0(x), t)$. Como, pela Proposição 2.2.6(i) temos que $\Phi(X, \cdot) \in W^{1,\infty}([0, T])$ para quase todo $X \in \mathbb{R}^3$, então $\Phi(\nabla P_0(x), t) \in W^{1,\infty}([0, T])$ para os pontos $X = \nabla P_0(x)$ tais que $\nabla P_0(x)$ está definido. Logo, redefinindo, se necessário, Z sobre o conjunto onde $\nabla P_0(x)$ não está definido, temos que $Z(x, \cdot) = \Phi(\nabla P_0(x), \cdot) \in W^{1,\infty}([0, T])$, o que encerra a demonstração. ■

Mediante aos resultados anteriormente demonstrados, podemos demonstrar o Teorema 2.1.4:

Demonstração do Teorema 2.1.4

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto convexo tal que $\bar{\Omega} \subset B(0, S)$, e $P_0(x)$ uma função convexa e limitada satisfazendo $\nabla P_{0\#} \mathcal{L}_\Omega \in L^q(\mathbb{R}^3)$. Defina α_0 por $\alpha_0 dx := \nabla P_{0\#} \mathcal{L}_\Omega$. Observe que $\alpha_0 \in L^q(\mathbb{R}^3)$, $q \geq 1$ e, como já foi observado anteriormente, as hipóteses do Teorema 2.1.4 implicam nas hipóteses do Teorema 1.2.6. Seja P a função convexa dada pelo Teorema 1.2.6. Se F é definida por (2.1.15), então pelo Lema 2.3.1, Proposição 2.3.2, Observação 2.3.3, Proposição 2.3.5 e Proposição 2.3.6 concluímos que o par (P, F) é solução Lagrangeana do problema (1.2.60). ■

Resta-nos mostrar a unicidade do fluxo Lagrangeano F com relação a uma dada aplicação P satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.1.4. Na proposição seguinte denotaremos, para cada $t \in [0, T)$, $(F_1)_t := F_1(\cdot, t)$, $(F_2)_t := F_2(\cdot, t)$.

Proposição 2.3.7 (Unicidade do fluxo Lagrangeano F) *Seja P uma aplicação satisfazendo hipóteses do Teorema 2.1.4. Sejam F_1, F_2 fluxos Lagrangeanos no espaço físico com a seguinte propriedade: $(P, F_1), (P, F_2)$ são soluções Lagrangeanas do prob-*

2.3. Fluxo Lagrangeano no espaço físico

lema (1.2.60), no sentido da Definição 2.1.3. Então, para quase todo ponto $x \in \Omega$, $(F_1)_t = (F_2)_t$. (Consequentemente, dado P , todo fluxo Lagrangeano no espaço físico é da forma (2.1.15).)

Demonstração: Para mostrar este resultado, primeiramente tomemos P satisfazendo hipóteses do Teorema 2.1.4 e F tais que (P, F) é solução Lagrangeana do problema (1.2.60). Vamos mostrar que

$$\Phi = \nabla P \circ F \circ \nabla P_0^* \quad (2.3.80)$$

define um fluxo Lagrangeano no espaço dual.

De fato, mostremos que Φ satisfaz as condições (i)-(iv) da Proposição 2.2.6. Note que, pela definição de Φ e pelas propriedades de P , F é fácil verificar que $\Phi(y, 0) = 0$, $\Phi(y, \cdot) \in W^{1,\infty}([0, T])$ e que, para cada t , $\Phi_t : \Phi(\cdot, t)$ preserva medida. Assim, temos (i), (ii) e (iv).

Agora, denote $\nabla P \circ F = Z$, e $U(y, t) = J[Z_t \circ \nabla P_0^*(y) - F_t \circ \nabla P_0^*(y)]$. Observe que, como (P, F) é solução Lagrangeana, para toda função $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$, F deve satisfazer a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega \times [0, T]} Z(x, t) \cdot \partial_t \phi(x, t) + J[Z(x, t) - F(x, t)] \cdot \phi(x, t) dx dt + \int_{\Omega} \nabla P_0(x) \cdot \phi(x, 0) dx = 0.$$

Considere a mudança de variáveis $x = \nabla P_0^*(y)$ na expressão anterior. Desta forma, temos que,

$$\begin{aligned} & \int_{(\nabla P_0^*)^{-1}(\Omega) \times [0, T]} \{Z(\nabla P_0^*(y), t) \cdot \partial_t \phi(\nabla P_0^*(y), t)\} \alpha_0(y) dy dt \\ & + \int_{(\nabla P_0^*)^{-1}(\Omega) \times [0, T]} \{J[Z(\nabla P_0^*(y), t) - F(\nabla P_0^*(y), t)] \cdot \phi(\nabla P_0^*(y), t)\} \alpha_0(y) dy dt \\ & + \int_{(\nabla P_0^*)^{-1}(\Omega)} y \cdot \phi(\nabla P_0^*(y), 0) \alpha_0(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Note que $\Phi(y, t) = Z(\nabla P_0^*(y), t)$. Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{(\nabla P_0^*)^{-1}(\Omega) \times [0, T]} \{\partial_t \phi(\nabla P_0^*(y), t) \cdot \Phi(y, t)\} \alpha_0(y) dy dt \\ & + \int_{(\nabla P_0^*)^{-1}(\Omega) \times [0, T]} \{J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)] \cdot \phi(\nabla P_0^*(y), t)\} \alpha_0(y) dy dt \quad (2.3.81) \\ & + \int_{(\nabla P_0^*)^{-1}(\Omega)} y \cdot \phi(\nabla P_0^*(y), 0) \alpha_0(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Agora, observe que, se $\phi(\nabla P_0^*(y), t)$ fosse suave, (2.3.81) seria uma formulação fraca para

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(y, t) &= J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)] \\ \Phi(y, 0) &= y, \end{aligned}$$

α_0 -quase sempre. Como $\phi(\nabla P_0^*(y), t) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, vamos utilizar um argumento de aproximação para mostrar primeiramente que (2.3.81) é válida $\forall \phi \in L^\infty(\nabla P_0(\Omega) \times [0, T])$ satisfazendo $\partial_t \phi \in L^\infty(\nabla P_0(\Omega) \times [0, T])$ e $\text{supp } \phi \subset \overline{\nabla P_0(\Omega)} \times [0, T - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Com efeito, seja ϕ uma função satisfazendo a tais condições. Vamos construir uma sequência aproximante $\phi_j \in C_c^1(\nabla P_0(\Omega) \times [0, T])$ como segue:

Estenda ϕ para $\nabla P_0(\Omega) \times [0, \infty)$ definindo $\phi(\cdot, t) = 0$ para $t \geq T$, e depois estenda ϕ para $\nabla P_0(\Omega) \times (-\infty, \infty)$ definindo $\phi(y, t) = \phi(y, -t)$ para $t < 0$ e $y \in \nabla P_0(\Omega)$.

Seja $h > 0$ e $(\nabla P_0(\Omega))_h = \{y \in \nabla P_0(\Omega) \mid \text{dist}(y, \partial(\nabla P_0(\Omega))) > h\}$. Note que $\phi \cdot \chi_{(\nabla P_0(\Omega))_h}$ está definida em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Agora, considere $\eta_h(x, t) = \frac{1}{h^4} \eta\left(\frac{|(x, t)|}{h}\right)$, um mollifier padrão. Tome $j > \frac{1}{\varepsilon}$ um inteiro. Então $\phi_j = (\phi \cdot \chi_{(\nabla P_0(\Omega))_h}) * \eta_h$, com $h = \frac{1}{j} < \varepsilon$ é tal que $\phi_j \in C_c^1(\nabla P_0(\Omega) \times [0, T])$ e $\|\phi_j\|, \|\partial_t \phi_j\| \leq c$, onde c não depende de j .

Temos que

$$(\phi_j, \partial_t \phi_j) \rightarrow (\phi, \partial_t \phi) \text{ q.s. em } \nabla P_0(\Omega) \times [0, T]; j \rightarrow \infty. \quad (2.3.82)$$

Logo, como $\nabla P_0^* \# \alpha_0 = \mathcal{L}_\Omega$, e como $x = \nabla P_0^*(y) \Leftrightarrow y = \nabla P_0(x)$, de (2.3.82) podemos

2.3. Fluxo Lagrangeano no espaço físico

concluir que, para quase todo $y \in (\nabla P_0^*)^{-1}(\Omega)$,

$$\int_{(\nabla P_0^*)^{-1}(\Omega) \times [0, T]} \phi_j(\nabla P_0^*(y)) - \phi(\nabla P_0^*(y)) \alpha_0(x) dx = \int_{\Omega} \phi_j(y) - \phi(y) dx \rightarrow 0,$$

isto é, $\phi_j(\nabla P_0^*(y)) \rightarrow \phi(\nabla P_0^*(y))$ α_0 -q.t.p.

Da mesma forma, temos que $\partial_t \phi_j(\nabla P_0^*(y)) \rightarrow \partial_t \phi(\nabla P_0^*(y))$ α_0 -q.t.p.

Denote por $(2.3.81)_j$ a identidade resultante da substituição de ϕ por ϕ_j em (2.3.81). Logo, das observações acima podemos concluir, pelo Teorema da Convergência Dominada, que o lado esquerdo de $(2.3.81)_j$ converge ao lado direito de (2.3.81), agora para uma função ϕ tal que $\phi \in L^\infty(\nabla P_0(\Omega) \times [0, T])$, $\partial_t \phi \in L^\infty(\nabla P_0(\Omega) \times [0, T])$ e $\text{supp } \phi \subset \overline{\nabla P_0(\Omega)} \times [0, T - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Agora, para $y \in \Omega$, seja $\phi(y, t) = \eta(\nabla P_0(y), t)$, onde $\eta \in C_c^1(\nabla P_0(\Omega) \times [0, T])$. Então $\phi \in L^\infty(\nabla P_0(\Omega) \times [0, T])$ e $\text{supp } \phi \subset \overline{\nabla P_0(\Omega)} \times [0, T - \varepsilon]$, para algum $\varepsilon > 0$, pois $\eta \in C_c^1(\nabla P_0(\Omega) \times [0, T])$. Além disso, $\partial_t \phi(y, t) = (\partial_t \eta)(\nabla P_0(y), t)$ e portanto $\partial \phi_t \in L^\infty(\nabla P_0(\Omega) \times [0, T])$. Desta forma, a formulação fraca (2.3.81) é válida para ϕ . Substituindo $\phi(y, t) = \eta(\nabla P_0(y), t)$ em (2.3.81), temos que

$$\begin{aligned} & \int_{(\nabla P_0^*)^{-1}(\Omega) \times [0, T]} \{\partial_t \eta(y, t) \cdot \Phi(y, t)\} \alpha_0(y) dy dt \\ & + \int_{(\nabla P_0^*)^{-1}(\Omega) \times [0, T]} \{J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)] \cdot \eta(y, t)\} \alpha_0(y) dy dt \\ & + \int_{(\nabla P_0^*)^{-1}(\Omega)} y \cdot \eta(y, 0) \alpha_0(y) dy = 0, \end{aligned} \quad (2.3.83)$$

com $\eta \in C_c^1(\nabla P_0(\Omega) \times [0, T])$. Note que η é arbitrário. Assim, a formulação fraca (2.3.81) é satisfeita para todo $\eta \in C_c^1(\nabla P_0(\Omega) \times [0, T])$.

Observe ainda que, como $\alpha_0 = \nabla P_0 \# \mathcal{L}_\Omega$, então $\text{supp } \alpha_0 \subset \nabla P_0(\Omega) = (\nabla P_0^*)^{-1}(\Omega)$.

Logo, de (2.3.83) segue que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \{\partial_t \eta(y, t) \cdot \Phi(y, t)\} \alpha_0(y) dy dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \{J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)] \cdot \eta(y, t)\} \alpha_0(y) dy dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} y \cdot \eta(y, 0) \alpha_0(y) dy = 0, \end{aligned} \quad (2.3.84)$$

para todo $\eta \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times [0, T))$.

Agora, tome $\eta \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$. De (2.3.84) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \{\partial_t \eta(y, t) \Phi(y, t)\} \alpha_0(y) dy dt = - \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \{\eta(y, t) J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)]\} \alpha_0(y) dy dt,$$

e portanto, no sentido das distribuições, $\partial_t[\Phi(y, t)\alpha_0(y)] = J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)]$. Mas $J[\Phi - \nabla P_t^* \circ \Phi_t] \in L^1(\mathbb{R}^3)$, e portanto $\partial_t[\Phi\alpha_0] \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \left\{ \partial_t[\Phi(y, t)\alpha_0(y)] + J[\tilde{\Phi}(y, t) - \nabla P_t^* \circ \tilde{\Phi}_t(y)]\alpha_0(y) \right\} \cdot \eta(y, t) dy dt = 0. \quad (2.3.85)$$

Observe também que,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \partial_t[\Phi(y, t)\alpha_0(y)]\eta(y, t) dy dt &= \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \Phi(y, t)\alpha_0(y)\partial_t\eta(y, t) dy dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \Phi(y, t)\partial_t(\alpha_0(y)\eta(y, t)) dy dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \partial_t\Phi(y, t)\alpha_0(y)\eta(y, t) dy dt, \end{aligned}$$

ou seja, $\partial_t[\Phi(y, t)\alpha_0(y)] = \alpha_0(y)\partial_t\Phi(y, t)$. Portanto, de (2.3.85), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \{\partial_t\Phi(y, t) + J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)]\} \alpha_0(y)\eta(y, t) dy dt = 0, \quad (2.3.86)$$

$\forall \eta \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$. Como α_0 tem suporte compacto, então,

$$\partial_t\Phi(y, t) + J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)] = 0, \quad (2.3.87)$$

q.t.p. em $\text{supp}\alpha_0$.

2.3. Fluxo Lagrangeano no espaço físico

Logo, $\forall \eta \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$,

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \partial_t \eta(y, t) \Phi(y, t) + J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)] \eta(y, t) = 0. \quad (2.3.88)$$

Agora, seja $\bar{\eta} \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times [0, T))$, e defina $\eta := \eta(y, t) = \bar{\eta}(y, t) - \bar{\eta}(y, 0)$. Note que $\eta \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$, e $\partial_t \eta = \partial_t \bar{\eta}$. Assim, para η assim definida, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \partial_t \eta(y, t) \Phi(y, t) + J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)] \eta(y, t) = \\ & = \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \partial_t \bar{\eta}(y, t) \Phi(y, t) + J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)] (\bar{\eta}(y, t) - \bar{\eta}(y, 0)) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \partial_t \bar{\eta}(y, t) \Phi(y, t) + J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)] \bar{\eta}(y, t) = \\ & = \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)] \bar{\eta}(y, 0) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\forall \bar{\eta} \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times [0, T))$,

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \partial_t \bar{\eta}(y, t) \Phi(y, t) + J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)] \bar{\eta}(y, t) = 0.$$

Assim, Φ satisfaz $\partial_t \Phi(x, t) = J[\Phi(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)]$ para quase todo ponto $(y, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T)$, o que mostra o item (iii).

Por fim, seja P nas hipóteses do Teorema 2.1.4, e suponhamos que existam F_1, F_2 tais que (P, F_1) e (P, F_2) são soluções Lagrangeanas. Pela exposição anterior, temos que se Φ_1 e Φ_2 são os fluxos Lagrangeanos definidos por (2.3.80) correspondente a F_1 e F_2 , respectivamente, então $\partial_t \Phi_1(y, t) = J[\Phi_1(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)]$ para quase todo ponto $(y, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T)$, e $\partial_t \Phi_2(y, t) = J[\Phi_2(y, t) - \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y)]$ para quase todo ponto $(y, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T)$, e Φ_1, Φ_2 satisfazem as condições (i)-(iv) da Proposição 2.2.6. Portanto, pela Proposição 2.2.8 temos que $\alpha_t = \Phi_{1\#} \alpha_0$, $\alpha_t = \Phi_{2\#} \alpha_0$, isto é, $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times [0, T))$,

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \varphi(\Phi_1(y, t)) \alpha_0(y) dy dt = \int_{\mathbb{R}^3 \times [0, T)} \varphi(\Phi_2(y, t)) \alpha_0(y) dy dt,$$

isto é, para cada $t \in [0, T)$,

$$\Phi_1(\cdot, t) = \Phi_2(\cdot, t)$$

em $\text{supp}\alpha_0$.

Desta forma, para cada $t \in [0, T)$, temos, para $y \in \text{supp}\alpha_0$, que,

$$\nabla P_t \circ (F_1)_t \circ \nabla P_0^*(y) = \Phi(y, t) = \Phi_1(y, t) = \nabla P_t \circ (F_2)_t \circ \nabla P_0^*(y),$$

donde, do fato que $\nabla P_t^* \circ \nabla P_t(x) = x$ quase sempre em Ω , e $\nabla P_{0\#}^* \alpha_0 = \mathcal{L}_\Omega$, podemos concluir que $(F_1)_t = (F_2)_t$ q.t.p. em Ω . ■

Observação 2.3.8 • *Da proposição anterior podemos concluir, em particular, que todo fluxo Lagrangeano no espaço físico é da forma $F(x, t) = \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)$.*

- *Gostaríamos de observar que nossa contribuição com relação à existência de soluções Lagrangeanas no espaço físico está no fato que estendemos o resultado de existência de soluções, originalmente formulado considerando P_0 uma função convexa tal que $\nabla P_{0\#} \mathcal{L}_\Omega \in L^q(\mathbb{R}^3)$, $q > 1$, para o caso limite $q = 1$. O ponto crucial nesta demonstração está na Proposição 2.3.2, item (iii). Sem a estrutura dos espaços de Orlicz, não conseguimos demonstrar que a integral I_1 da referida proposição pode convergir quando $\nabla P_{0\#} \mathcal{L}_\Omega = \alpha_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, visto que $|\nabla P_t^* - \nabla P_{t_0}^*|$ não converge a zero em $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ quando $t \rightarrow t_0$.*

Ressaltamos também que, até o momento, não existia nenhum resultado com relação à unicidade de fluxos Lagrangeanos no espaço físico. Com a Proposição 2.3.6 mostramos que sob condições específicas, temos a unicidade do fluxo Lagrangeano F . Nada podemos afirmar com relação à unicidade de soluções Lagrangeanas.

Capítulo 3

Estabilidade Fraca

A noção de estabilidade fraca foi explorada por G. Loeper em [21] para as equações semigeostróficas em sua formulação dual. Ele mostrou que, para todo $T > 0$, dada uma sequência de medidas de probabilidade $\{\alpha_n\}$, soluções fracas para as equações semigeostróficas em $[0, T]$, se $\{\alpha_n^0\}$ é uma sequência de dados iniciais associada a $\{\alpha_n\}$, com suporte compacto em B_R para algum $R > 0$ independente de n , então a sequência $\{\alpha_n\}$ é precompacta em $C([0, T], \mathcal{P} - w^*)$, e toda subsequência convergente converge para uma solução das equações semigeostróficas (Teorema 1.2.10).

Um resultado equivalente pode ser obtido no contexto Lagrangeano das equações semigeostróficas. Mostraremos que, se α_0 é uma sequência convergente de vorticidades iniciais em L^1 , em variáveis duais, então a sequência correspondente de soluções Lagrangeanas no espaço físico é convergente em L^1_{loc} . Temos também um resultado de estabilidade fraca para a versão Lagrangeana do modelo água-rasa das equações semigeostróficas.

O objetivo deste Capítulo é demonstrar os resultados de estabilidade fraca acima citados. Além disso, daremos uma breve explanação sobre o modelo água-rasa das equações semigeostróficas. No fim deste capítulo mostraremos, a partir de um exemplo, que existe uma sequência de vorticidades iniciais no espaço das medidas de probabilidade, tal que

a sequência correspondente de soluções Lagrangeanas no espaço físico não é convergente.

3.1 Estabilidade fraca em L^1 para as soluções Lagrangeanas das equações semigeostróficas

Sejam $\{\alpha_0^n\} \in L^1(\mathbb{R}^3)$ uma sequência convergente, e $\alpha^n := \alpha^n(x, t)$ uma sequência de soluções fracas para as equações semigeostróficas, com dados iniciais α_0^n . Sejam $\{P_0^n\}$ uma sequência de funções convexas e limitadas tais que, para cada n , $\nabla P_0^n \# \mathcal{L}_\Omega = \alpha_0^n$.

Lembre-se que, ao resolvermos, para cada n , o problema no espaço dual com dado inicial α_0^n , obtemos uma sequência P^n de pressões modificadas associadas às soluções fracas α^n . Denotaremos por Φ^n a sequência de fluxos Lagrangeanos no espaço dual associada a α^n . Seja, para cada n ,

$$F_t^n := (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n \circ \nabla P_0^n \quad (3.1.1)$$

o único fluxo Lagrangeano no espaço físico associado a α_0^n , cuja existência e unicidade com relação a uma aplicação P^n dada está garantida pelos Teorema 2.1.4 e Proposição 2.3.7.

Para mostrarmos um resultado de estabilidade fraca neste contexto, precisamos obter uma noção de convergência para a sequência (3.1.1). Observe que esta não é uma tarefa simples, visto que F_t^n é dada pela composição de três sequências distintas e que convergem independentemente nos espaços dual e físico. No entanto, considerando as relações existentes entre o fluxo Lagrangeano no espaço dual e as soluções para as equações semigeostróficas no espaço dual (Proposição 2.2.8), bem como as propriedades dos fluxos Lagrangeanos nos espaços dual e físico (Proposição 2.2.6 e Definição 2.1.3, respectivamente), é possível estabelecer uma noção de convergência para a sequência (3.1.1), descrita pelo teorema a seguir:

Teorema 3.1.1 *Seja $\alpha_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\alpha_0^n \rightarrow \alpha_0$ fortemente em $L^1(\mathbb{R}^3)$. Seja α uma solução fraca do problema dual com dado inicial α_0 e seja F a aplicação Lagrangeana correspondente. Então existe uma subsequência $\alpha_t^{n_k}$ tal que $F_t^{n_k} \rightarrow F_t$ em $L^1_{loc}(\Omega)$, para $0 < t < T$.*

Este é o resultado principal desta seção. Antes de demonstrarmos o Teorema 3.1.1, precisamos de alguns resultados auxiliares. O próximo lema é uma adaptação do Teorema 2.2.4 para a sequência Φ^n associada à sequência de soluções das equações semigeostróficas no espaço dual $\{\alpha_t^n\}_n$.

Lema 3.1.2 *Seja $\{\Phi_t^n\}_n$ sequência de fluxos Lagrangeanos no espaço dual, associada à sequência de soluções $\{\alpha_t^n\}_n$. Então, para cada t ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} \sup_{t \in [0, T]} |\Phi^n(X, t) - \Phi(X, t)| dX = 0, \quad \forall R > 0, \quad (3.1.2)$$

onde $\Phi_t(X)$ é o fluxo Lagrangeano associado ao campo $\tilde{U}(X, t) = J[H(X) - \nabla P^*(X, t)]$, e $H(X)$ é a aplicação definida em (2.2.27), (2.2.28).

Demonstração: Para mostrarmos (3.1.2), seja, para cada n , Φ_t^n o fluxo Lagrangeano no espaço dual, associado ao campo $\tilde{U}^n(X, t) = J[H(X) - (\nabla P_t^*)^n]$. Por (1.2.75), temos que $(P^{n_k})^*(t, \cdot) \rightarrow P^*(t, \cdot)$ em $W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^3)$. Assim,

$$\tilde{U}^n(X, t) \longrightarrow \tilde{U}(X, t) \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^3). \quad (3.1.3)$$

No entanto, observando o Teorema 2.2.4, vemos que tais condições ainda não são suficientes para obtermos a convergência de $\{\Phi_t^n\}$. Consideremos, então, $\{\tilde{U}^{n,m}(X, t)\}$ uma família de aproximações para \tilde{U}^n descrita por

$$\tilde{U}^{n,m}(X, t) = J[H(X) - (\nabla P_t^*)^n * \eta^m(X, t)] \quad (3.1.4)$$

3.1. Estabilidade fraca em L^1 para soluções Lagrangeanas

onde η^m é um mollifier padrão.

Observe que a família $\{\tilde{U}^{n,m}(X, t)\}$ satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{n,m} &\in C([0, T] \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \\ \sup_m \|\tilde{U}^{n,m}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T], \mathbb{R}^3)} &< \infty \\ \operatorname{div} \tilde{U}^{n,m} &= 0 \\ |\nabla \tilde{U}^{n,m}|_{L^\infty([0, T] \times B_R, \mathbb{R}^3)} &\leq C(n, m, R) < \infty \\ \tilde{U}^{n,m} &\longrightarrow \tilde{U}^n \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times [0, T]). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Desta forma, se $\Phi^{n,m}(X, t)$ é a única solução em $[0, T]$ da EDO

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Phi^{n,m}(X, t) &= \tilde{U}^{n,m}(t, \Phi^{n,m}(X, t)) \\ \Phi^{n,m}(X, 0) &= X \end{cases},$$

pelo Teorema 2.2.4, temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_R} \sup_{t \in [0, T]} |\Phi^n(X, t) - \Phi^{n,m}(X, t)| dX = 0, \quad \forall R > 0. \quad (3.1.6)$$

Por outro lado, observe também que $\tilde{U}^{n,m}(X, t) \rightarrow \tilde{U}(X, t)$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ quando $m, n \rightarrow \infty$. Com efeito, como

$$\|(\nabla P_t^*)^n * \eta^m - \nabla P_t^*\|_1 \leq \|\eta^m\|_\infty \|(\nabla P_t^*)^n - \nabla P_t^*\|_1 + \|\nabla P_t^* * \eta^m - \nabla P_t^*\|_1,$$

temos que, quando $m, n \rightarrow \infty$,

$$\|(\nabla P_t^*)^n * \eta^m - \nabla P_t^*\|_1 \longrightarrow 0,$$

pois $(\nabla P_t^*)^n - \nabla P_t^* \rightarrow 0$, $(\nabla P_t^* * \eta^m - \nabla P_t^*) \rightarrow 0$, e $\|\eta^m\|_\infty \leq 1$.

Desta forma, também temos que

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_{B_R} \sup_{t \in [0, T]} |\Phi(X, t) - \Phi^{n,m}(X, t)| dX = 0, \quad \forall R > 0. \quad (3.1.7)$$

Agora, observe que, da última expressão de (3.1.5), para cada n , $\tilde{U}^{n,m} \longrightarrow \tilde{U}^n$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Portanto, toda subsequência de $\{\tilde{U}^{n,m}\}_m$ deve convergir para \tilde{U}^n , $\forall n$.

Considere, então, uma subsequência $\{\tilde{U}^{n,m(n)}\}$ de $\{\tilde{U}^{n,m}\}_m$ de tal forma que $m(n) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, para tal subsequência, se $\Phi^{n,m(n)}$ é o fluxo Lagrangeano associado no espaço dual, temos,

$$\lim_{m(n) \rightarrow \infty} \int_{B_R} \sup_{t \in [0, T]} |\Phi^n(X, t) - \Phi^{n,m(n)}(X, t)| dX = 0, \quad \forall R > 0. \quad (3.1.8)$$

Das convergências anteriores, e valendo-se do fato que

$$|\Phi^n(X, t) - \Phi(X, t)| \leq |\Phi^n(X, t) - \Phi^{n,m(n)}(X, t)| + |\Phi^{n,m(n)}(X, t) - \Phi(X, t)|$$

podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} \sup_{t \in [0, T]} |\Phi^n(X, t) - \Phi(X, t)| dX = 0, \quad \forall R > 0.$$

Isto mostra o desejado. ■

A proposição a seguir caracteriza a convergência das aplicações Lagrangeanas no espaço físico associadas a uma sequência $\{\alpha^n\}$ de soluções fracas da formulação dual das equações semigeostróficas satisfazendo a condições específicas de convergência.

Proposição 3.1.3 *Seja $\{\alpha^n\}$ uma sequência de soluções fracas associada ao problema dual, e seja α tal que, para cada $t \in [0, T)$,*

$$\begin{aligned} \alpha^n(\cdot, t) &\rightharpoonup \alpha(\cdot, t) & w^* - L_A(B(0, R_0)) \\ P^n(\cdot, t) &\longrightarrow P(\cdot, t) & W^{1,r}(\Omega) \\ P_0^n &\longrightarrow P_0 & W^{1,1}(\Omega) \\ (P^n)^*(\cdot, t) &\longrightarrow P^*(\cdot, t) & W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^3) \\ (\nabla P^n)^*(\cdot, t) &\longrightarrow \nabla P^*(\cdot, t) & (E_{A^*})_{loc}(\mathbb{R}^3), \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

onde A é uma N -função, A^* é a transformada de Legendre de A , $L_A(\mathbb{R}^3)$ é o espaço de Orlicz associado a A , e $E_{A^*}(\mathbb{R}^3) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^3)}^{L^*}$.

Seja F^n a aplicação Lagrangeana no espaço físico correspondente a α^n , e seja F a aplicação Lagrangeana correspondente a α . Então $F_t^n \rightarrow F_t$ em $L_{loc}^1(\Omega)$.

Demonstração: Dado uma sequência de soluções fracas $\{\alpha^n\}$ no espaço dual satisfazendo (3.1.9), sejam $\{F^n\}$ a sequência de aplicações Lagrangeanas associada a $\{\alpha^n\}$, e F a aplicação Lagrangeana associada a α . Para mostrarmos que $F_t^n \rightarrow F_t$ em $L^1_{loc}(\Omega)$, primeiramente observemos que, para cada t , temos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |F_t^n(x) - F_t(x)| dx &= \int_{\Omega} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)| dx \\
 &\leq c \left\{ \int_{\Omega} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x)| dx \right. \\
 &\quad + \int_{\Omega} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x)| dx \\
 &\quad \left. + \int_{\Omega} |(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)|^r dx \right\} \\
 &= c \{I_1 + I_2 + I_3\},
 \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

onde c é uma constante que depende apenas de Ω .

Vamos mostrar que as integrais resultantes I_1, I_2, I_3 convergem a zero quando n tende ao infinito. De fato, tome a integral I_1 . Note que, para cada n , $P_0^n \# \mathcal{L}_{\Omega} = \alpha_0^n$. Assim,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{\Omega} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x)| dx = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t(y)| \alpha_0^n(y) dy \\
 &\leq c_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t^n(y)| \alpha_0^n(y) dy + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t(y)| \alpha_0^n(y) dy \right\} \\
 &= c_1 \{I_1^1 + I_1^2\}.
 \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Analisemos as integrais I_1^1 e I_1^2 . Para a análise de I_1^1 , observe que, da Proposição 2.2.8 temos que $\|\alpha_0^n\| = \|\alpha_t^n\|$ e $\alpha_t^n = \Phi_t^n \# \alpha_0^n$, para todo n e para $t \in (0, T)$. Assim, utilizando a desigualdade de Holder em espaços de Orlicz, temos que a integral I_1^1 satisfaz

$$\begin{aligned}
 I_1^1 &= \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t^n(y)| \alpha_0^n(y) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla P_t^*)^n(z) - (\nabla P_t^*)(z)| \alpha_t^n(z) dz \\
 &\leq \|\nabla(P_t^*)^n - (\nabla P_t^*)\|_{E_{A^*}} \|\alpha_t^n\|_{L_A} \\
 &= \|\nabla(P_t^*)^n - (\nabla P_t^*)\|_{E_{A^*}} \|\alpha_0^n\|_{L_A} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
 \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

localmente em \mathbb{R}^3 , pois de (3.1.9) temos que $(\nabla P^n)^*(\cdot, t) \rightarrow \nabla P^*(\cdot, t)$ em $(E_{A^*})_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

Agora tome a integral I_1^2 . Observe que

$$\begin{aligned}
 I_1^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t(y)| \alpha_0^n(y) dy \\
 &= c_2 \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t(y)| \alpha_0^n(y) dy + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t(y) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t(y)| \alpha_0^n(y) dy \right\} \\
 &= c_2 \{I_1^{2,1} + I_1^{2,2}\}.
 \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Estimemos a integral $I_1^{2,1}$. Queremos mostrar que

$$I_1^{2,1} = \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t(y)| \alpha_0^n(y) dy \rightarrow 0.$$

Para isto, iremos utilizar o Teorema da Convergência Dominada generalizado (Lema 4).

De fato, observe que, como $\nabla P_t^*(\mathbb{R}^3) \subset B(0, S)$, $\forall t$, temos que $|(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t(y)| \leq \tilde{c}S$. Além disso, como $\alpha_0^n \rightarrow \alpha_0$, ao definirmos $f_n = (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t(y)$, $g_n = \tilde{c}S$ e $\mu_n = \alpha_0^n$, se mostrarmos que, para todo t ,

$$(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t(y) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \tag{3.1.14}$$

podemos concluir que $I_1^{2,1} \rightarrow 0$. Para mostrarmos (3.1.14), note que, para cada t , temos por hipótese que $\Phi_t^n(y) - \Phi_t(y) \rightarrow 0$ em $B(0, R)$, $\forall R > 0$. Além disso, como P_t^* é convexa, ∇P_t^* é diferenciável quase sempre, e portanto ∇P_t^* é contínua para quase todo y (pois P_t^* é convexa na variável espacial, para cada t , e portanto duas vezes diferenciável pelo Teorema de Aleksandrov, veja [18] e resultados auxiliares descritos na introdução

3.1. Estabilidade fraca em L^1 para soluções Lagrangeanas

deste texto). Portanto, se $\Phi_t(y)$ for um ponto de continuidade para ∇P_t^* , obtemos a convergência (3.1.14). Note que, como ∇P_t^* é contínua em \mathbb{R}^3/N , com $|N|_{\mathbb{R}^3} = 0$, para que ∇P_t^* seja contínua em $\Phi_t(y)$, devemos ter que

$$|\{y \in \mathbb{R}^3; \Phi_t(y) \in N\}| = 0.$$

Mas, como Φ_t^* preserva medida, temos que

$$\begin{aligned} |\{y \in \mathbb{R}^3; \Phi_t(y) \in N\}| &= |\{y \in \mathbb{R}^3; y \in \Phi_t^{-1}(N)\}| \\ &= |\{y \in \mathbb{R}^3; y \in \Phi_t^*(N)\}| \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que mostra que $\Phi_t(y)$ é um ponto de continuidade para ∇P_t^* , para quase todo y . Portanto, temos que

$$(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t(y) \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

para quase todo $y \in \mathbb{R}^3$ e, desta forma, concluímos que,

$$I_1^{2,1} = \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t(y)| \alpha_0^n(y) dy \rightarrow 0, \quad (3.1.15)$$

localmente em \mathbb{R}^3

Agora estimemos a integral $I_1^{2,2}$. Note que, $\forall t, n$, temos que $\nabla P_t^*(\mathbb{R}^3), (\nabla P_t^*)^n(\mathbb{R}^3) \subset B(0, S)$. Além disso, $(\nabla P_t^*)^n \rightarrow \nabla P_t^*$, localmente em $E_{A^*}(\mathbb{R}^3)$. Como Φ_t preserva medida, temos que

$$(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t(y) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t(y) \longrightarrow 0,$$

localmente em $E_{A^*}(\mathbb{R}^3)$, para quase todo y . Como $\alpha_0^n \rightarrow \alpha_0$, por um raciocínio análogo ao utilizado para a integral $I_1^{2,1}$, podemos concluir, pelo Teorema da Convergência Dominada generalizado, que

$$\int_{B(0,R)} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t(y) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t(y)| \alpha_0^n(y) dy \rightarrow 0, \quad \forall B(0, R). \quad (3.1.16)$$

Como $I_1^2 = I_1^{2,1} + I_1^{2,2}$, de (3.1.15) e (3.1.16) segue que $I_1^2 \rightarrow 0$ localmente em \mathbb{R}^3 .

Assim, como $I_1 = I_1^1 + I_1^2$, e $I_1^1 \rightarrow 0$ localmente em \mathbb{R}^3 , $I_1^2 \rightarrow 0$ localmente em \mathbb{R}^3 , concluímos que

$$I_1 = \int_{\Omega} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x)| dx \rightarrow 0, \quad (3.1.17)$$

localmente em Ω .

Passemos a analisar a integral I_2 . Observe que, como $\nabla P_0^n \# 1_{\Omega} = \alpha_0^n$, temos que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x)| dx &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t(y) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t(y)| \alpha_0^n(y) dy, \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

ou seja, $I_2 = I_1^{2,2}$. Portanto, de (3.1.16), concluímos que $I_2 \rightarrow 0$ localmente em Ω .

Agora, analisemos a última das integrais. Como

$$I_3 = \int_{\Omega} |(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)| dx,$$

e $|(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)| \leq \tilde{c}_1 S$, pelo Teorema da Convergência dominada ("não-generalizado"), resta-nos mostrar que

$$(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x) \rightarrow 0. \quad (3.1.19)$$

Com efeito, como ∇P_t^* é contínua em $\mathbb{R}^3 \setminus N$, $|N|_{\mathbb{R}^3} = 0$, para obtermos (3.1.19), devemos mostrar que para quase todo x , $\Phi_t \circ \nabla P_0(x)$ é um ponto de continuidade para ∇P_t^* , isto é

$$|\{x \in \Omega; \Phi_t \circ \nabla P_0(x) \in N\}| = 0.$$

Para isto, observe que,

$$|\{x \in \Omega; \Phi_t \circ \nabla P_0(x) \in N\}| = |\{x \in \Omega; \nabla P_0(x) \in \Phi_t^*(N)\}|.$$

3.1. Estabilidade fraca em L^1 para soluções Lagrangeanas

Assim, como $\nabla P_{0\#}\mathcal{L}_\Omega = \alpha_0$ e, para cada t , Φ_t^* preserva medida, temos que

$$\begin{aligned} |\{x \in \Omega; \Phi_t \circ \nabla P_0(x) \in N\}| &= |\{x \in \Omega; \nabla P_0(x) \in \Phi_t^*(N)\}| \\ &= \int_{\Phi_t^*(N)} \alpha_0(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Logo $I_3 \rightarrow 0$ em Ω .

Portanto, de (3.1.10) e das análises das integrais I_1, I_2, I_3 concluímos que $F_t^n \rightarrow F_t$ em $L^1_{loc}(\Omega)$. ■

Face ao resultados acima expostos, estamos aptos a demonstrar o resultado principal desta tese.

Demonstração do Teorema 3.1.1

Observe que, se $\alpha_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ é tal que $\alpha_0^n \rightarrow \alpha_0$ fortemente em $L^1(\mathbb{R}^3)$, e se P_0 é uma função convexa e limitada tal que $\nabla P_{0\#}\mathcal{L}_\Omega$, então, pelos Teorema 1.2.6 e Observação 1.2.7, existem α solução do problema na forma dual, e uma subsequência $\{\alpha_t^{n_k}\}$ que satisfaz as hipóteses da Proposição 3.1.4. Logo, se $\{F_t^{n_k}\}$ é a subsequência de fluxos Lagrangeanos associada à $\{\alpha_t^{n_k}\}$, então, pela Proposição 3.1.4, temos que

$$F_t^{n_k} \rightarrow F_t$$

em $L^1_{loc}(\Omega)$. ■

Observação 3.1.4 *Observe que, como $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto limitado, do Teorema 3.3.1 podemos concluir que*

$$F_t^{n_k} \rightarrow F_t \text{ em } L^r_{loc}(\Omega), \quad r \in [1, \infty).$$

3.2 Estabilidade fraca do modelo água rasa para equações semigeostróficas no espaço físico

Nesta seção estaremos estendendo os resultados obtidos com relação à estabilidade de soluções Lagrangeanas para o modelo água rasa das equações semigeostróficas.

3.2.1 O modelo água-rasa: Formulação e existência de soluções

O modelo água rasa para as equações semigeostróficas é um problema de fronteira livre para o sistema (1.2.56) em uma região $\mathcal{D}(t)$ que varia com o tempo. A condição de fronteira livre é definida por

$$u \cdot \nu := \text{velocidade normal da fronteira}, \quad (3.2.21)$$

sobre $\partial[\cup_{t \in [0, T]} \{t\} \times \mathcal{D}]$. Dados \mathcal{D}_0 um conjunto, e p_0 uma função, as condições iniciais para este problema são

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(0) &= \mathcal{D}_0 \\ p(x, 0) &= p_0(x), \text{ em } \Omega. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Este modelo foi estudado por Cullen e Gangbo em [14], onde, a partir da condição de fronteira livre e uma aproximação denominada “**água rasa**”, o problema (1.2.56) é reescrito como um problema no domínio 2-dimensional $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$, envolvendo a altura $h(x, t)$ do fluido definida sobre $\tilde{\Omega} \times [0, T)$, e as componentes horizontais da velocidade $v = (v_1, v_2)$.

Com efeito, como este é um problema de fronteira livre, temos que o fluido está contido em uma região do plano xy , no entanto a altura acima do nível de referência não é conhecida, e varia com o tempo. Desta forma, se para cada t , $\mathcal{D}(t)$ descreve a região em que o fluido está contido no instante t , então $\mathcal{D}(t)$ é descrito por

$$\mathcal{D}(t) = \{(x_1, x_2, x_3); (x_1, x_2) \in \tilde{\Omega}, 0 \leq x_3 \leq h(x_1, x_2, t)\}. \quad (3.2.23)$$

3.2. Estabilidade fraca para o modelo água rasa

Representaremos a pressão sobre a fronteira livre por uma constante p_0 dada, e a pressão p por

$$p(x_1, x_2, x_3, t) = [h(x_1, x_2, t) - x_3] + p_0. \quad (3.2.24)$$

Logo, podemos concluir que o gradiente da pressão é independente de x_3 , e portanto, de (1.2.56) segue que as componentes horizontais da velocidade são independentes de x_3 . De fato, denotando por v o campo de velocidades resultante desta aproximação, temos que v está definido sobre $\tilde{\Omega} \times [0, T)$, e

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2) &= (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)) \\ &= (u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3)) \\ &= (-D_t(\partial_1 h(x_1, x_2, t)) - \partial_2 h(x_1, x_2, t), -D_t(\partial_2 h(x_1, x_2, t)) + \partial_1 h(x_1, x_2, t)). \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Além disso, a altura h do fluido satisfaz a equação de continuidade:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(hv) = 0 \text{ em } \tilde{\Omega} \times [0, \infty). \quad (3.2.26)$$

Isto posto, podemos redefinir o sistema semigeostrófico (1.2.56) para um sistema 2-dimensional chamado **modelo água-rasa das equações semigeostróficas**. Este sistema é descrito como segue:

$$\begin{aligned} D_t(v_1^g, v_2^g) + (\partial_1 p, \partial_2 p) &= (v_2, -v_1) && \text{em } \tilde{\Omega} \times [0, \infty) \\ (v_1^g, v_2^g) &= (-\partial_2 p, \partial_1 p) && \text{em } \tilde{\Omega} \times [0, \infty) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(hv) &= 0 && \text{em } \tilde{\Omega} \times [0, \infty) \\ v \cdot n &= 0 && \text{sobre } \partial\tilde{\Omega} \times [0, \infty) \\ h(\cdot, 0) &= h_0 && \text{em } \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Através da mudança de variáveis

$$P(x, t) = h(x, t) + \frac{1}{2}|x|^2,$$

podemos reescrever o sistema (3.2.27) como:

$$\begin{aligned}
 D_t X &= J(X - x) && \Omega \times [0, T) \\
 \partial_t h + \operatorname{div}(hv) &= 0 && \Omega \times [0, T) \\
 X &= \nabla P && P(x_1, x_2, t) = h(x_1, x_2, t) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \\
 D_t &= \partial_t + v \cdot \nabla; && \nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) \\
 v \cdot \nu &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T) \\
 h(x, 0) &= P_0(x) && \text{em } \Omega.
 \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

Aqui, $J = J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Assim como no caso incompressível, temos uma formulação dual para este problema, dada por

$$\begin{aligned}
 \partial_t \alpha + \nabla \cdot (U\alpha) &= 0 && \mathbb{R}^2 \times [0, T) \\
 \nabla P_{t\#} h_t &= \alpha_t; && \forall t \in [0, T) \\
 U(X, t) &= J_2[X - \nabla P^*(X, t)] && \mathbb{R}^2 \times [0, T) \\
 P^*(X, t) &= \sup_{x \in \Omega} (x \cdot X - P(x, t)), && \forall (X, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T) \\
 \alpha(X, 0) &= \alpha_0(X) \text{ é definida sobre } \mathbb{R}^2.
 \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Um resultado de existência de soluções fracas para este sistema foi obtido por Cullen e Gangbo [14], para dados iniciais em $L^p(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$.

Teorema 3.2.1 (Cullen e Gangbo, 2001) *Seja $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado, tal que $\overline{(\tilde{\Omega})} \subset B$ onde B é uma bola aberta $B(0, S)$. Seja $h_0 \geq 0$ tal que $P_0(x) = h_0(x) + \frac{1}{2}|x|^2$ é uma função convexa e limitada em B , satisfazendo*

$$DP_{0\#} h_0 \in L^q(\nabla P_0(\tilde{\Omega}))$$

para algum $q > 1$. Então para qualquer $T > 0$ existem funções $\alpha(X, t), P(X, t)$ sobre $\mathbb{R}^2 \times [0, T)$ tais que

(i) α, P satisfazem

$$\begin{aligned}
 \alpha &\in L^\infty([0, T), L^q(\mathbb{R}^3)) \cap C([0, T), L^q_w(\mathbb{R}^2)) \\
 P &\in L^\infty([0, T), W^{1,\infty}(\tilde{\Omega})) \cap C([0, T), W^{1,r}(\tilde{\Omega})),
 \end{aligned}$$

3.2. Estabilidade fraca para o modelo água rasa

onde r é um número real pertencente ao intervalo $[1, \infty)$;

(ii) seja $R_0 = S(1 + T)$. Então

$$\text{supp}(\alpha(\cdot, t)) \subset B(0, R_0); \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.2.30)$$

(iii) $P(\cdot, t)$ é convexa em $\tilde{\Omega}$;

(iv) P^* satisfaz

$$\begin{aligned} P^*(\cdot, t) &\text{ é convexa em } \mathbb{R}^2 \quad \forall t \in [0, T), \\ P^* &\in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, T)), \\ \nabla P^* &\in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, T)) \cap C([0, T), L^r(B(0, R))) \end{aligned}$$

para todo $R > 0$, e todo $r \in [1, \infty)$. Mais ainda,

$$\|\nabla P^*(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq S \quad \forall t \in [0, T), \quad (3.2.31)$$

(v) (α, P, P^*) satisfazem (3.2.29), onde a equação de evolução e o dado inicial para α são entendidos no sentido fraco, a saber: para qualquer $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times [0, T))$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \times [0, T)} [\partial_t \phi(X, t) + U(X, t) \cdot \nabla \phi(X, t)] \alpha(X, t) dX dt \\ + \int_{\mathbb{R}^2} \alpha_0(X) \phi(X, 0) dX = 0. \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Como no caso 3D, também estamos interessados em soluções do modelo água-rasa do sistema SG no espaço físico, e como anteriormente, a alternativa é também definir soluções Lagrangeanas (F, P) . Observe que, no modelo água-rasa, o campo de velocidades não tem divergente nulo, mas a equação do transporte $\partial_t h + \text{div}(hv) = 0$ é satisfeita. Logo, se F um fluxo Lagrangeano pelo campo v , as soluções h desta equação do transporte

satisfazem $F_{t\#}h_0 = h_t$, $\forall t \in [0, T)$. Tal propriedade substitui o fato de que F deve preservar medida de Lebesgue.

A seguir, definimos as soluções Lagrangeanas para este modelo.

Definição 3.2.2 (*Soluções Lagrangeanas*) *Seja $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ uma aberto limitado, e $T > 0$. Seja P_0 uma função convexa e limitada em $\tilde{\Omega}$ tal que $h_0(x) = P_0(x) - \frac{1}{2}|x|^2 \geq 0$ em $\tilde{\Omega}$. Sejam $r \in [0, \infty)$ e $P : \tilde{\Omega} \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$P \in L^\infty([0, T), W^{1,\infty}(\tilde{\Omega})) \cap C([0, T), W^{1,r}(\tilde{\Omega})) \quad (3.2.33)$$

$$P(., t) \text{ é convexa em } \tilde{\Omega} \text{ para cada } t \in [0, T). \quad (3.2.34)$$

Seja $h(x, t) = P(x, t) - \frac{1}{2}|x|^2$. Seja $F : \tilde{\Omega} \times [0, T) \rightarrow \tilde{\Omega}$ uma aplicação de Borel satisfazendo

$$F \in C([0, T), L^r(\tilde{\Omega}, h_0 dx)). \quad (3.2.35)$$

Então o par (P, F) é chamado uma solução Lagrangeana fraca de (3.2.28) em $\tilde{\Omega} \times [0, T)$ se

(i) $F(x, 0) = x$, h_0 -q.s. em $\tilde{\Omega}$, $P(x, 0) = P_0(x)$ q.s em $\tilde{\Omega}$,

(ii) para todo $t > 0$ a aplicação $F_t = F(., t) : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$ satisfaz $F_{t\#}h_0 = h_t$,

(iii) Existe uma aplicação de Borel $F^* : \tilde{\Omega} \times [0, T) \rightarrow \tilde{\Omega}$ tal que para todo $t \in (0, T)$ a aplicação $F_t^* = F^*(., t) : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$ satisfaz $F_{t\#}^*h_t = h_0$, e $F_t \circ F_t^*(x) = x$ h_t - q.s. em $\tilde{\Omega}$ e $F_t^* \circ F_t(x) = x$ h_0 - q.s. em $\tilde{\Omega}$,

(iv) A função

$$Z(x, t) = \nabla P(F_t(x), t) \quad (3.2.36)$$

3.2. Estabilidade fraca para o modelo água rasa

é uma solução fraca de

$$\begin{aligned} \partial_t Z(x, t) &= J[Z(x, t) - F(x, t)], & \text{sobre } \text{supp } h_0 \text{ em } \tilde{\Omega} \times [0, T) \\ Z(x, 0) &= \nabla P_0(x), & \text{sobre } \text{supp } h_0 \text{ em } \tilde{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

no seguinte sentido: para todo $\varphi \in C_c^1(\tilde{\Omega} \times [0, T))$,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega} \times [0, T)} [Z(x, t) \cdot \partial_t \varphi(x, t) + J(Z(x, t) - F(x, t)) \cdot \varphi(x, t)] h_0(x) dx dt + \\ + \int_{\tilde{\Omega}} \nabla P_0(x) \cdot \varphi(x, 0) h_0(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Com relação à existência de soluções Lagrangeanas para este modelo, temos o seguinte resultado, também devido a Cullen e Feldman :

Teorema 3.2.3 (Cullen e Feldman, 2006) *Seja $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado, e $\bar{\Omega} \subset B$, onde B é uma bola aberta $B(0, S)$. Seja $h_0 \geq 0$ tal que $P_0(x) = h_0(x) + \frac{1}{2}|x|^2$ é uma função convexa e limitada em B , e além disto, que*

$$DP_{0\#}h_0 \in L^q(\nabla P_0(\tilde{\Omega})) \quad (3.2.39)$$

para algum $q > 1$. Então para todo $T > 0$ existe uma solução Lagrangeana (P, F) de (3.2.28) em $\Omega \times [0, T)$, onde (46), (47) são satisfeitas para todo $r \in [1, \infty)$. Mais ainda, a função $Z(x, t)$ definida por (3.2.36) satisfaz $Z(x, \cdot) \in W^{1, \infty}([0, T))$ h_0 -quase sempre em $\tilde{\Omega}$, e (3.2.37) e sua forma fraca (3.2.38) são satisfeitas, no seguinte sentido

$$\begin{aligned} \partial_t Z(x, t) &= J(Z(x, t) - F(x, t)), & h_0(\mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^1) \text{ quase sempre em } \tilde{\Omega} \times (0, T), \\ Z(x, 0) &= \nabla P_0(x), & h_0 \mathcal{L}^2 \text{ quase sempre em } \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

Como anteriormente, obtemos P a partir do problema dual, e F é definida através da seguinte expressão

$$F(x, t) = \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x),$$

onde, para cada t , $\Phi_t(X)$ é o fluxo Lagrangeano no espaço dual associado ao campo $U(X, t) = J_2[H(X) - \nabla P_t^*(X)]$, e cuja construção em \mathbb{R}^2 segue os mesmos passos realizados anteriormente. Além disso, como no caso incompressível, o fluxo Lagrangeano F satisfaz:

Proposição 3.2.4 *Seja F uma aplicação definida por $F(x, t) = \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)$, para cada $(x, t) \in \tilde{\Omega} \times [0, T]$. Então F está bem definida h_0 -q.s., e satisfaz as propriedades (i)-(iv) da Definição 3.2.1.*

Demonstração: Esta demonstração segue os mesmo passos desenvolvidos na Proposição 2.3.2, observando que, nesta situação, ao invés de $\nabla P_{t\#} \mathcal{L}_\Omega = \alpha_t$, $\nabla P_{t\#}^* \alpha_t = \mathcal{L}_\Omega$, temos que $\nabla P_{t\#} h_t = \alpha_t$, $\nabla P_{t\#}^* \alpha_t = h_t$, $\forall t \in [0, T]$.

Como $h_0(x) \geq 0$ é tal que $P_0(x) = h_0(x) + \frac{1}{2}|x|^2$ é uma função convexa e limitada em $B(0, S)$, então $\|h_0\|_{L^\infty} \leq S$. Defina uma medida h_0 por $h_0 = h_0 dx$. Logo, se N é um subconjunto tal que $|N| = 0$, $h_0[N] = 0$.

Para verificarmos que a boa definição de F h_0 -q.s., note que, como P_0 é uma função convexa e limitada sobre B então ∇P_0 está definida sobre $\tilde{\Omega} \setminus N_0^1$, com N_0^1 um subconjunto Borel mensurável de $\tilde{\Omega}$ tal que $|N_0^1|_{\mathbb{R}^2} = 0$, e portanto $h_0[N_0^1] = 0$.

Como visto anteriormente, P^* é uma aplicação de Borel e limitada sobre $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$, convexa em x . Logo ∇P^* está definida sobre $(\mathbb{R}^2 \times [0, T]) \setminus N^2$, com N^2 um subconjunto boreliano de $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$ tal que $|N^2|_{\mathbb{R}^3} = 0$. Mais ainda, denotando $N_t^2 = N^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{t\})$, pelo teorema de Fubini temos que $|N_t^2|_{\mathbb{R}^2} = 0$, $\forall t \in [0, T]$. Desta forma, $(\nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0)$ está definida no seguinte conjunto:

$$\left\{ (x, t) \in \tilde{\Omega} \times [0, T]; (x, t) \notin [(N_0^1 \times [0, T]) \cup M] \right\},$$

3.2. Estabilidade fraca para o modelo água rasa

onde $M = \{(y, s) \in (\tilde{\Omega} \setminus N_0^1) \times [0, T]; (\Phi(\nabla P_0(y), s), s) \in N^2\}$, que é um subconjunto boreliano.

Resta-nos mostrar que $h_0[M]_{\mathbb{R}^3} = 0$, e $h_0[M_t]_{\mathbb{R}^2} = 0$ para todo $t \in [0, T)$, onde $M_t := M \cap (\mathbb{R}^2 \times \{t\})$. Pelo Teorema de Fubini é suficiente mostrarmos que $h_0[M_t]_{\mathbb{R}^2} = 0$ para todo $t \in [0, T)$. Com efeito, fixe $t \in [0, T)$. Como $\Phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ preserva medida de Lebesgue, então $|\Phi_t^{-1}(N_t^2)|_{\mathbb{R}^2} = 0$, e portanto, $h_0[\Phi_t^{-1}(N_t^2)]_{\mathbb{R}^2} = 0$. Uma vez que $\nabla P_0 \# h_0 = \alpha_0$ e ∇P_0 não está definido sobre N_0^1 , segue que $\nabla P_0 \# h_0|_{(\tilde{\Omega} \setminus N_0^1)} = \alpha_0$. Assim, como $\alpha \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$, temos que,

$$\begin{aligned} h_0[M_t] &= h_0 \left[\left\{ x \in \tilde{\Omega} \setminus N_0^1; \nabla P_0(x) \in \Phi_t^{-1}(N_t^2) \right\} \right] \\ &= \int_{\Phi_t^{-1}(N_t^2)} \alpha_0(z) dz = 0 \end{aligned}$$

Portanto, podemos definir $F : \tilde{\Omega} \times [0, T) \rightarrow \tilde{\Omega}$ por $F(x, t) = \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)$, e tal aplicação é Borel mensurável.

Procedendo de forma análoga ao item (i) da Proposição 2.3.2, para concluirmos que $F(x, 0) = x$ h_0 -q.s, resta-nos mostrar que

$$h_0[\nabla P_0^{-1}(N_2 \cup N_3) \cap \tilde{\Omega}]_{\mathbb{R}^2} = 0,$$

onde $N_2, N_3 \subset \mathbb{R}^2$ são tais que P_0^* é diferenciável sobre $\mathbb{R}^2 \setminus N_2$, $\Phi_0(x) = x$ em $\mathbb{R}^2 \setminus N_3$, e $|N_2|_{\mathbb{R}^2} = 0, |N_3|_{\mathbb{R}^2} = 0$. Com efeito, como P_0 é convexa, então P_0 é duas vezes diferenciável, e portanto ∇P_0 é contínua para quase todo x . Desta forma, $|(\nabla P_0)^{-1}(N_2 \cup N_3)|_{\mathbb{R}^2} = 0$, e portanto $h_0[\nabla P_0^{-1}(N_2 \cup N_3) \cap \tilde{\Omega}]_{\mathbb{R}^2} = 0$.

Para mostrarmos que, para todo $t > 0$, F_t satisfaz $F_t \# h_0 = h_t$, observe primeiramente que, formalmente, temos a seguinte identidade:

$$\int_{\tilde{\Omega}} \varphi(F_t(x)) h_0(x) dx = \int_{\tilde{\Omega}} \varphi \circ \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x) h_0(x) dx \quad (3.2.41)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \circ \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y) \alpha_0(y) dy \quad (3.2.42)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \circ \nabla P_t^*(z) \alpha_t(z) dz \quad (3.2.43)$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} \varphi(x) h_t(x) dx. \quad (3.2.44)$$

Precisamos justificar estas igualdades. De fato, (3.2.41) segue da definição de F_t . Além disso, como $\nabla P_{0\#} h_0 = \alpha_0$, temos que

$$\int_{\tilde{\Omega}} \psi \circ \nabla P_0(x) h_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(y) \alpha_0(y) dy, \quad \forall \psi \in C(\mathbb{R}^2).$$

Uma vez que $\alpha_0 \in L^q(\mathbb{R}^3)$ tem suporte compacto, a identidade acima também é válida para todo $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Tome $\psi = \varphi \circ \nabla P_t^* \circ \Phi_t \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Logo,

$$\int_{\tilde{\Omega}} \varphi \circ \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x) h_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \circ \nabla P_t^* \circ \Phi_t(y) \alpha_0(y) dy,$$

o que mostra a identidade (3.2.42). Como $\varphi \circ \nabla P_t^* \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, α_0 tem suporte compacto, e $\alpha_t = \Phi_{t\#} \alpha_0$ (por (2.2.49)), argumentando como acima obtemos (3.2.43). Finalmente, (3.2.44) segue do fato que $\nabla P_{t\#}^* \alpha_t = h_t$.

Assim, concluímos que F satisfaz o item (ii) da Definição 3.2.1.

Agora verifiquemos que F satisfaz o item (iii) da Definição 3.2.1. Para isto, defina, para cada $t \in [0, T)$,

$$F_t^*(x) = \nabla P_0^* \circ \Phi_t^* \circ \nabla P_t(x). \quad (3.2.45)$$

Fazendo uma análise semelhante à realizada para a aplicação F podemos concluir que, para todo $t \in [0, T)$, a expressão $\nabla P_0^* \circ \Phi_t^* \circ \nabla P_t(x)$ está bem definida, e a aplicação $F_t^* : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$ definida por (3.2.45) é boreliana.

3.2. Estabilidade fraca para o modelo água rasa

Além disso, usando o Lema 2.3.4, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} F_t^* \circ F_t(x) h_0(x) dx &= \int_{\tilde{\Omega}} \nabla P_0^* \circ \Phi_t^* \circ \nabla P_t \circ F_t(x) h_0(x) dx \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \nabla P_0^* \circ \Phi_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x) h_0(x) dx, \end{aligned}$$

e portanto $F_t^* \circ F_t(x) = \nabla P_0^* \circ \Phi_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)$ h_0 -quase sempre em $\tilde{\Omega}$. Como $\Phi_t^* \circ \Phi_t(y) = y$ quase sempre em \mathbb{R}^3 , e também α_0 -quase sempre em \mathbb{R}^3 , o fato de que $\nabla P_0 \# h_0 = \alpha_0$ implica que, $\forall \varphi \in C(\tilde{\Omega})$,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} \varphi \circ \Phi_t^* \circ \Phi_t(\nabla P_0(x)) h_0(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \circ \Phi_t^* \circ \Phi_t(y) \alpha_0(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(y) \alpha_0(y) dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \varphi(\nabla P_0(x)) h_0(x) dx, \end{aligned}$$

isto é, $\Phi_t^* \circ \Phi_t(\nabla P_0(x)) = \nabla P_0(x)$ h_0 -q.s.. Desta forma,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} \varphi \circ F_t^* \circ F_t(x) h_0(x) dx &= \int_{\tilde{\Omega}} \varphi \circ \nabla P_0^* \circ \nabla P_0(x) h_0(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\nabla P_0^*(z)) \alpha_0(z) dz \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \varphi(x) h_0(x) dx, \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in C(\tilde{\Omega})$, e portanto $F_t^* \circ F_t(x) = x$ h_0 -quase sempre em $\tilde{\Omega}$

Analogamente, concluímos que $F_t \circ F_t^*(x) = x$, h_t -q.s. em $\tilde{\Omega}$, o que demonstra que F satisfaz o item (iii).

Para mostrarmos que a função $Z(x, t) = \nabla P(F_t(x), t)$ é uma solução fraca de

$$\begin{aligned} \partial_t Z(x, t) &= J[Z(x, t) - F(x, t)], & \text{sobre } \text{supp } h_0 & \text{ em } \tilde{\Omega} \times [0, T) \\ Z(x, 0) &= \nabla P_0(x), & \text{sobre } \text{supp } h_0 & \text{ em } \tilde{\Omega}, \end{aligned}$$

tal que, para todo $\varphi \in C_c^1(\tilde{\Omega} \times [0, T))$,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega} \times [0, T)} [Z(x, t) \cdot \partial_t \varphi(x, t) + J(Z(x, t) - F(x, t)) \cdot \varphi(x, t)] h_0(x) dx dt + \\ + \int_{\tilde{\Omega}} \nabla P_0(x) \cdot \varphi(x, 0) h_0(x) dx = 0, \end{aligned}$$

basta observar que, como no caso incompressível, para quase todo $x \in \tilde{\Omega}$, e todo $t \in [0, T)$, temos que

$$\Phi(\nabla P_0(x), t) = \nabla P_0(x) + \int_0^t U(\Phi_s(\nabla P_0(x)), s) ds. \quad (3.2.46)$$

Multiplicando esta última equação por $\partial_t \eta(x, t)$, onde $\eta \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times [0, T))$, e integrando, temos que,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega} \times [0, T)} \partial_t \eta(x, t) \cdot \Phi(\nabla P_0(x), t) h_0(x) dx dt &= \int_{\tilde{\Omega} \times [0, T)} \partial_t \eta(x, t) \cdot \nabla P_0(x) h_0(x) dx dt \\ &+ \int_{\tilde{\Omega} \times [0, T)} \partial_t \eta(x, t) \int_0^t U(\Phi_s(\nabla P_0(x)), s) ds h_0(x) dx dt. \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga à demonstração da Proposição 2.3.6, obtém-se o desejado.

Por fim, mostremos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\tilde{\Omega}} |F_t(x) - F_{t_0}|^r h_0(x) dx = 0, \quad t \in [0, T)$$

para quaisquer $t_0 \in [0, T)$, $r \in [1, \infty)$. De fato, como F está definida h_0 -q.s, e como $\nabla P_{0\#} h_0 = \alpha_0$ e $\Phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ preserva medida, temos, para $t, t_0 \in [0, T)$, que

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} |F_t(x) - F_{t_0}(x)|^r h_0(x) dx &= \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_{t_0} \circ \nabla P_0(x)|^r h_0(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla P_t^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_{t_0}(y)|^r \alpha_0(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla P_t^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_t(y) + \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_{t_0}(y)|^r \alpha_0(y) dy \\ &\leq c_1 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla P_t^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_t(y)|^r \alpha_0(y) dy + \\ &\quad + c_2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_t(y) - \nabla P_{t_0}^* \circ \Phi_{t_0}(y)|^r \alpha_0(y) dy \\ &\leq c(I_1 + I_2). \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

3.2. Estabilidade fraca para o modelo água rasa

A análise das integrais I_1 e I_2 são neste caso são feitas de forma análoga ao caso 3D, donde concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\tilde{\Omega}} |F_t(x) - F_{t_0}|^r h_0(x) dx = 0, \quad t \in [0, T).$$

Do acima exposto podemos concluir que F satisfaz as propriedades (i)-(iv) da Definição 3.2.1. Isto encerra a demonstração. ■

As considerações anteriores nos permitem demonstrar o Teorema 3.2.3.

Demonstração do Teorema 3.2.3

Sejam $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ um aberto convexo tal que $\bar{\Omega} \subset B(0, S)$, $h_0 \geq 0$ tal que $P_0(x) = h_0(x) + \frac{1}{2}|x|^2$ é uma função convexa e limitada em B , e $DP_{0\#}h_0 \in L^q(\nabla P_0(\tilde{\Omega}))$, para algum $q > 1$. Defina α_0 por $\alpha_0 := DP_{0\#}h_0$, e observe que as hipóteses do Teorema 3.2.3 implicam nas hipóteses do Teorema 3.2.1. Como no caso incompressível, seja P a função convexa dada pelo Teorema 3.2.1. Utilizando a Proposição 3.2.4, podemos concluir que a aplicação F definida por $F(x, t) = \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)$ é tal que (P, F) é solução Lagrangeana para o modelo água-rasa das equações semigeostróficas. ■

3.2.2 Estabilidade fraca para soluções Lagrangeanas no modelo água-rasa

Para estudarmos a estabilidade fraca de soluções para o modelo água rasa, consideraremos $\alpha_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$, $\alpha^n := \alpha^n(x, t)$ com dados iniciais α_0^n . Sejam P^n as pressões modificadas associadas, e h^n a sequência associada a α^n, P^n , satisfazendo

$$\begin{aligned} h_0^n &\rightarrow h_0 \text{ em } L^1(\tilde{\Omega}) \\ h^n(\cdot, t) &\rightarrow h(\cdot, t) \text{ em } W^{1,\infty}(\tilde{\Omega}), \end{aligned} \tag{3.2.48}$$

para cada t . Seja Φ^n o fluxo Lagrangeano no espaço dual e $F_t^n := (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n \circ \nabla P_n^0$, as aplicações Lagrangeanas no espaço físico associadas às seqüências acima relacionadas.

Vamos estabelecer uma noção de convergência nesta situação. O procedimento é análogo ao realizado no caso 3D. Além disso, o Lema 3.1.2 permanece válido aqui, com as alterações óbvias provenientes do fato de estarmos trabalhando em um espaço 2-dimensional.

A proposição a seguir caracteriza a convergência no espaço físico das aplicações Lagrangeanas do modelo em questão.

Proposição 3.2.5 *Seja $\{\alpha^n\}$ uma seqüência de soluções fracas associada ao modelo água rasa no espaço dual, e seja α tal que, para cada $t \in [0, T)$,*

$$\begin{aligned}
 \alpha^n(., t) &\rightharpoonup \alpha(., t) && L^p(\mathbb{R}^2), \quad 1 < p < \infty \\
 P^n(., t) &\longrightarrow P(., t) && W^{1,r}(\tilde{\Omega}) \\
 P_0^n &\longrightarrow P_0 && W^{1,1}(\tilde{\Omega}) \\
 (P^n)^*(., t) &\longrightarrow P^*(., t) && W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2) \\
 h_0^n &\rightarrow h_0 && L^1(\tilde{\Omega}) \\
 h^n(., t) &\rightarrow h(., t) && W^{1,\infty}(\tilde{\Omega}).
 \end{aligned} \tag{3.2.49}$$

Seja F^n a aplicação Lagrangeana no espaço físico correspondente a α^n e seja F a aplicação Lagrangeana correspondente a α . Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |F_t^n(x) - F_t(x)|^r h_0(x) dx = 0; \quad r \in [1, \infty), \tag{3.2.50}$$

localmente em $\tilde{\Omega}$.

Demonstração: Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{\Omega}} |F_t^n(x) - F_t(x)|^r h_0(x) dx &= \int_{\tilde{\Omega}} |F_t^n(x) - F_t(x)|^r (h_0(x) - h_0^n(x)) dx \\
 &+ \int_{\tilde{\Omega}} |F_t^n(x) - F_t(x)|^r h_0^n(x) dx.
 \end{aligned} \tag{3.2.51}$$

3.2. Estabilidade fraca para o modelo água rasa

Além disso, observe que, como $\nabla P_t^*(\mathbb{R}^2), (\nabla P_t^*)^n(\mathbb{R}^2) \subset B(0, S)$, temos que $|F_t^n(x) - F_t(x)|^r \leq (2S)^r$. Temos também que $h_0^n \rightarrow h_0$ em $L^1(\tilde{\Omega})$, e $|(h_0(x) - h_0^n(x))| \leq \|P_0\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} + \|P_0^n\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq C \leq \infty$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} |F_t^n(x) - F_t(x)|^r (h_0(x) - h_0^n(x)) dx &\leq (2S)^r \int_{\tilde{\Omega}} (h_0(x) - h_0^n(x)) dx \\ &\leq (2S)^r \int_{\tilde{\Omega}} |(h_0(x) - h_0^n(x))| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (3.2.52)$$

Portanto, para mostramos (3.2.50), resta verificarmos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\Omega}} |F_t^n(x) - F_t(x)|^r h_0^n(x) dx = 0.$$

Para isto, observe que,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} |F_t^n(x) - F_t(x)|^r h_0^n(x) dx &\leq \\ &\leq \tilde{c}(r) \left\{ \int_{\tilde{\Omega}} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x)|^r h_0^n(x) dx \right. \\ &\quad + \int_{\tilde{\Omega}} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x)|^r h_0^n(x) dx \\ &\quad \left. + \int_{\tilde{\Omega}} |(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)|^r h_0^n(x) dx \right\} \\ &= \tilde{c}(r) \{ \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 \}. \end{aligned} \quad (3.2.53)$$

Analisemos as integrais $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3$. Com efeito, valendo-se do fato que $\nabla P_0^n \neq h_0^n = \alpha_0^n$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \int_{\tilde{\Omega}} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x)|^r h_0^n(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t(y)|^r \alpha_0^n(y) dy \\ &\leq \tilde{c}_1(r) \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t^n(y)|^r \alpha_0^n(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^2} |(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t^n(y) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t(y)|^r \alpha_0^n(y) dy \right\} \\ &= \tilde{c}_1(r) \{ \tilde{I}_1^1 + \tilde{I}_1^2 \}. \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

As integrais resultantes $\tilde{I}_1^1, \tilde{I}_1^2$ são estimadas de forma análoga às suas correspondentes I_1^1, I_1^2 obtidas nas Proposição 3.1.3. Portanto, podemos concluir que

$$\tilde{I}_1 = \int_{\tilde{\Omega}} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t^n \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x)|^r h_0^n(x) dx \longrightarrow 0 \quad (3.2.55)$$

localmente em $\tilde{\Omega}$.

Com relação à integral \tilde{I}_2 , note que

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \int_{\tilde{\Omega}} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x)|^r h_0^n(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |(\nabla P_t^*)^n \circ \Phi_t(y) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t(y)|^r \alpha_0^n(y) dy, \end{aligned} \quad (3.2.56)$$

e portanto, conforme as estimativas anteriormente obtidas com relação à integral correspondente I_2 (Proposição 3.1.3), temos que $\tilde{I}_2 \rightarrow 0$ localmente em $\tilde{\Omega}$.

Finalmente, analisemos a integral \tilde{I}_3 . Observe que,

$$\tilde{I}_3 = \int_{\tilde{\Omega}} |(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)|^r h_0^n(x) dx. \quad (3.2.57)$$

Desta forma, como $\nabla P_t^*(\mathbb{R}^2) \subset B(0, S)$, $\forall t$, e $h_0^n \rightarrow h_0$, ao definirmos as seqüências $f_n = (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x)$, $g_n = \tilde{c}S^r$ e $\mu_n = h_0^n$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue generalizado (Lema 4), devemos mostrar que, para todo t ,

$$(\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0^n(x) - (\nabla P_t^*) \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.2.58)$$

Com efeito, na Proposição 3.1.3 mostramos que esta convergência ocorre (veja (3.1.19)). Portanto, $\tilde{I}_3 \rightarrow 0$ em $\tilde{\Omega}$.

Do acima exposto podemos então concluir que, para cada t ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |F_t^n(x) - F_t(x)|^r h_0^n(x) dx = 0 \quad (3.2.59)$$

3.3. Um exemplo no espaço das medidas

localmente em $\tilde{\Omega}$.

De (3.2.51), (3.2.52) e (3.2.59) segue que, para $r \in [1, \infty)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |F_t^n(x) - F_t(x)|^r h_0(x) dx = 0,$$

localmente em $\tilde{\Omega}$. Isto conclui a demonstração. \blacksquare

O resultado principal desta seção é apresentado a seguir:

Teorema 3.2.6 *Seja $\alpha_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$ $p > 1$ tal que $\alpha_0^n \rightarrow \alpha_0$ fortemente em $L^p(\mathbb{R}^2)$. Seja α uma solução fraca para (3.2.29) com dado inicial α_0 e seja F a aplicação Lagrangeana no espaço físico correspondente. Então existe uma subsequência $\alpha_t^{n_k}$ tal que, para $0 < t < T$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |F_t^{n_k}(x) - F_t(x)|^r h_0(x) dx = 0; \quad r \in [1, \infty), \quad (3.2.60)$$

localmente em $\tilde{\Omega}$.

Demonstração: Como no caso incompressível, se $\alpha_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$ $p > 1$ é tal que $\alpha_0^n \rightarrow \alpha_0$ fortemente em $L^p(\mathbb{R}^2)$, então existem α solução no espaço dual do modelo água rasa, e uma subsequência $\alpha_t^{n_k}$ satisfazendo as hipóteses da Proposição 3.2.5. \blacksquare

A próxima seção mostra que não é possível obter um resultado de estabilidade fraca no espaço físico quando o dado inicial α_0 é tomado no espaço das medidas de Radon.

3.3 Um exemplo no espaço das medidas

Considere $\Omega = B(0, 1)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Queremos discutir a estabilidade do sistema semi-geostrófico nos espaços dual e físico quando tomamos como dado inicial $\alpha_0(x) = \delta_{x_0}$.

Para encontrarmos uma solução para o problema em questão, precisamos inicialmente encontrar P^* tal que $\det D^2P^* = \delta_{x_0}$, isto é, encontrar $P = P(y)$ convexa e tal que

$$\int_{\Omega} f(\nabla P(y)) \frac{dy}{\pi} = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) d\alpha_0(x) = f(x_0). \quad (3.3.61)$$

Observe que, como a identidade acima é válida para qualquer função f contínua, temos em particular que

$$\int_{\Omega} f \left(\frac{\partial P}{\partial y_i}(y) \right) \frac{dy}{\pi} = x_{0_i}, \quad (3.3.62)$$

isto é, $P_t(y) = x_0 \cdot y + b$, $\forall b \in \mathbb{R}^2$, para todo $t \in [0, T)$, é uma função convexa que satisfaz as condições do Teorema de Fatorização Polar de Brenier nesta situação e, além disso, ∇P_t é determinado unicamente. Logo podemos considerar, sem perda da generalidade, que $P_t(y) = x_0 \cdot y$, $\forall t \in [0, T)$. Também, por definição, temos que

$$P_t^*(x) = \sup_{x \in \Omega} \{x \cdot y - x_0 \cdot y\}, \quad (3.3.63)$$

e portanto $P_t^*(x) = \|x - x_0\|$. Note que, para cada t , P_t^* é uma função convexa e, além disso,

$$\nabla P_t^*(x) = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}; \quad x \neq x_0.$$

Desta forma, se $x = x_0$,

$$\det D^2P^*(x) = \delta_{x_0}.$$

Este fato dificulta a análise do fluxo Lagrangeano no espaço físico no ponto $x = x_0$, visto que a aplicação $\nabla P_t^*(x)$ não está definida neste ponto.

Para contornarmos este problema, considere $B(x_0, \varepsilon)$, uma bola centrada no ponto x_0 e raio ε , para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Faremos uma análise do problema neste caso, e tomaremos $\varepsilon \rightarrow 0$ para estimarmos o comportamento do problema na situação inicial. De fato, note que, pelo Teorema de fatorização Polar, ao transportarmos Ω para $B(x_0, \varepsilon)$,

3.3. Um exemplo no espaço das medidas

para cada t , este transporte é realizado através de uma única aplicação ∇P_t , onde P_t é uma função convexa em Ω . Em verdade, $P_t(y) = x_0 \cdot y + \varepsilon \frac{|y|^2}{2}$, donde $\nabla P_t(y) = x_0 + \varepsilon y$. Como, para cada $t \in [0, T)$, temos por definição que $P_t^*(x) = \sup_{y \in \Omega} \{x \cdot y - P_t(y)\}$, então neste caso, segue que, para cada ε ,

$$(P_t^*)_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\|x - x_0\|^2}{2\varepsilon}; & x \in B(x_0, \varepsilon) \\ \|x - x_0\| - \frac{\varepsilon}{2}; & x \notin B(x_0, \varepsilon). \end{cases} \quad (3.3.64)$$

Desta forma, para $x \in B(x_0, \varepsilon)$, o campo de velocidades $U_\varepsilon(x, t) = J[x - \nabla(P_t^*)_\varepsilon(x)]$, na formulação dual, é dado por

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(x, t) &= [x - \nabla(P_t^*)_\varepsilon(x, t)]^\perp \\ &= \left[\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right) x + \frac{x_0}{\varepsilon} \right]^\perp. \end{aligned}$$

Observe também que o fluxo Lagrangeano $\Phi_\varepsilon(x, t)$ no espaço dual é dado por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_\varepsilon(x, t) &= U(x, t) \\ \Phi_\varepsilon(x, 0) &= x. \end{aligned} \quad (3.3.65)$$

Seja $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Logo, existe $0 \leq \gamma \leq 1$ tal que $\|x - x_0\| = \gamma\varepsilon$, e portanto temos que $x = \gamma\varepsilon(\cos \theta_0, \sin \theta_0) + x_0$. Fixe este γ, θ_0 . Logo, para $x \in B(x_0, \varepsilon)$, o fluxo Lagrangeano Φ_ε é dado por

$$\Phi_\varepsilon(x, t) = \gamma\varepsilon \left(\cos \left(\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right] t + \theta_0 \right), \sin \left(\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right] t + \theta_0 \right) \right) + (x_0^1, x_0^2). \quad (3.3.66)$$

Assim, no espaço dual, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que $\Phi_\varepsilon(x, t) \rightarrow x_0$, uniformemente em x e t .

Note que, no espaço físico, a aplicação

$$F_t(y) = \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(y),$$

que define o fluxo Lagrangeano neste espaço, nos fornece, para $y \in \Omega = B(0, 1)$, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 F_t(y) &= \nabla P_t^* \circ \Phi_t \circ \nabla P_0(y) \\
 &= \nabla P_t^* \circ \Phi_t(x_0 + \varepsilon y) \\
 &= \nabla P_t^* \left(\gamma \varepsilon \left[\cos \left(\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right] t + \theta_0 \right) \right] + x_0^1, \gamma \varepsilon \left[\sin \left(\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right] t + \theta_0 \right) \right] + x_0^2 \right) \\
 &= \frac{\gamma \varepsilon}{\varepsilon} \left(\cos \left(\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right] t + \theta_0 \right), \sin \left(\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right] t + \theta_0 \right) \right) \\
 &= \gamma \left(\cos \left(\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right] t + \theta_0 \right), \sin \left(\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right] t + \theta_0 \right) \right), \quad \gamma \leq 1,
 \end{aligned}$$

onde γ e θ_0 provêm do fato que, como $(x_0 + \varepsilon y) \in B(x_0, \varepsilon)$, então existe $0 \leq \gamma \leq 1$ tal que $\|x - x_0\| = \gamma \varepsilon$, e portanto $x = \gamma \varepsilon (\cos \theta_0, \sin \theta_0) + x_0$.

Defina $\theta(t) = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right) t + \theta_0$. Portanto, ao tomarmos o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que $F_t(y)$ descreve a rotação ao redor de um círculo com centro na origem e raio γ , com velocidade angular $\theta'(t) = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right) \rightarrow \infty$, o que nos mostra que o fluxo Lagrangeano no espaço físico não é convergente em nenhum sentido razoável.

Portanto, este exemplo nos sugere que não há estabilidade fraca para as soluções Lagrangeanas das equações semigeostróficas quando o dado inicial α_0 no espaço dual é tomado no espaço das medidas de Radon.

3.3. Um exemplo no espaço das medidas

Considerações Finais

Existem outras questões naturais que aparecem no estudo de propriedades das equações semigeotróficas. Uma delas, por exemplo, é se podemos estender a noção de solução Lagrangeana para o modelo compressível das equações semigeotróficas, cuja formulação dual foi estudada por Cullen e Maroofi em [12]. Considerando a solução proposta por Cullen e Feldman aqui discutida, a grande dificuldade no caso compressível é obter um fluxo Lagrangeano no espaço físico. O campo vetorial no espaço dual não possui regularidade suficiente para que seja aplicada a teoria clássica de Equações Diferenciais Ordinárias, nem para aplicarmos a teoria desenvolvida por Ambrosio em [2], com respeito às equações diferenciais ordinárias e equações de transporte definidas sobre campos vetoriais de variação limitada. Para resolver este problema, uma idéia é tentar melhorar as estimativas no espaço dual a fim de que possamos resolvê-lo no espaço físico usando as idéias propostas por Cullen e Feldman.

Uma outra questão está relacionada à existência de soluções para as equações semigeotróficas sobre uma esfera. Neste caso a força de Coriolis não pode ser considerada constante. Além disso, há uma grande dificuldade em resolver estas equações em variáveis duais. Se tentamos encontrar uma solução para o problema sobre uma esfera pelo mesmo método utilizado para as equações definidas em um espaço Euclidiano, as equações resultantes que são obtidas após uma mudança de coordenadas são difíceis de se resolver.

Neste contexto uma questão também muito interessante, é sobre o comportamento das equações semigeostróficas quando nos aproximamos da linha do Equador, onde temos que a força de Coriolis f é igual a zero.

Finalmente, uma outra questão interessante, surge ao olharmos para a formulação original do problema. A condição de fronteira aqui imposta exclui alguns casos que são, do ponto de vista físico e de aplicações, interessantes. Neste ponto, um problema em aberto muito interessante seria o estudo desta equações com outros dados de fronteira.

Apêndice A

Espaços de Orlicz

Faremos aqui algumas considerações sobre os espaços de Orlicz, relacionando algumas propriedades e resultados importantes. Para mais detalhes, veja [1].

Os espaços de Orlicz são definidos a partir de N -funções A , cuja definição segue abaixo:

Definição A.1 *Considere uma função $a : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ com as seguintes propriedades:*

(i) $a(0) = 0$, $a(t) > 0$ se $t > 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \infty$,

(ii) a é não decrescente,

(iii) a é contínua à direita.

Então a função de valores reais A definida sobre $[0, \infty)$, e tal que

$$A(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau \tag{A.1}$$

é chamada uma N -função.

Observe que N -funções são contínuas em $[0, \infty)$, convexas, pois $A''(t) = a'(t) > 0$, e estritamente crescentes. Note que, geometricamente, $A(t)$ representa a área abaixo do gráfico de $y = a(x)$, de $x = 0$ até $x = t$.

Exemplo A.2 São N -funções:

$$\begin{aligned} A(t) &= t^p, \quad 1 < p < \infty; \\ A(t) &= e^t - t - 1; \\ A(t) &= (1 + t) \log(1 + t) - t, \end{aligned}$$

entre outras.

A seguir definiremos as N -funções denominadas Δ -regulares. Conforme veremos a seguir, as N -funções Δ -regulares são importantes no nosso estudo visto que os espaços de Orlicz definidos a partir de N -funções Δ -regulares apresentam propriedades topológicas interessantes.

Definição A.3 Uma N -função é dita Δ -regular se existe uma constante positiva C e $t_0 > 0$ tal que $A(2t) \leq CA(t)$, $\forall t \geq t_0$.

De posse do conceito de N -função, estamos aptos para definir os espaços de Orlicz.

Definição A.4 Seja Ω um domínio em R^n , e A uma N -função. O espaço de Orlicz $L_A(\Omega)$ é definido como o fecho linear das funções $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que $A(|u|)$ é integrável.

O espaço de Orlicz $L_A(\Omega)$ é um espaço de Banach com respeito a norma

$$\|u\|_A = \inf \left\{ k > 0, \int_{\Omega} A \left(\frac{|u(x)|}{k} \right) dx \leq 1 \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Estes espaços generalizam os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$, que são associados às N -funções $A(t) = t^p$.

Vamos denotar por $E_A(\Omega)$ o fecho em $L_A(\Omega)$ das funções suaves de suporte compacto. Com relação aos espaços $L_A(\Omega)$ e $E_A(\Omega)$, observe que:

- (I) Para toda N -função A , $E_A(\Omega)$ é separável;
- (II) em geral, $L_A(\Omega)$ e $E_A(\Omega)$ são distintos, e $L_A(\Omega)$ não é separável. A identidade $L_A = E_A$ ocorre quando A é Δ -regular.

A exemplo dos espaços L^p , existem relações de dualidade nos espaços de Orlicz. Antes de mostrarmos estas relações necessitamos da definição da transformada de Legendre de uma N -função.

Definição A.5 *Seja A uma N -função. Definimos a transformada de Legendre A^* de A por*

$$A^* = A^*(s) = \max_{t \geq 0} (st - A(t)). \quad (\text{A.3})$$

Pode-se verificar que A^* é uma N -função e $A^{**} = A$. Além disso, se A é uma N -função, e A^* é a transformada de Legendre de A , temos uma versão generalizada da desigualdade de Holder para os espaços de Orlicz:

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq 2\|u\|_A\|v\|_{A^*}. \quad (\text{A.4})$$

Com relação às relações de dualidade em espaços de Orlicz, temos o seguinte resultado:

Teorema A.6 ([1]) *O espaço dual de $E_A(\Omega)$ é $L_{A^*}(\Omega)$.*

Os próximos resultados são referentes a algumas propriedades topológicas importantes envolvendo o uso dos espaços de Orlicz. O lema a seguir é um corolário da caracterização de integrabilidade uniforme de la Vallée-Poussin.

Lema A.7 ([6]) *Sejam Ω um domínio limitado em R^n e $f \in L^1(\Omega)$. Existe uma N -função A tal que $f \in L_A(\Omega)$.*

O próximo resultado, que também pode ser encontrado em [22], caracteriza a convergência em L_A de seqüências limitadas.

Lema A.8 ([22]) *Sejam $\{u_n\}$ uma seqüência de funções limitada em $L^\infty(\Omega)$. Se $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, então $u_n \rightarrow u$ em $L_A(\Omega)$, para qualquer N -função A .*

Demonstração: Sejam $\{u_n\}$ uma seqüência limitada, e u tais que $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$. Sejam A uma N -função, fixe $\varepsilon < 0$, e defina

$$v^n \equiv \frac{u_n - u}{\varepsilon}. \quad (\text{A.5})$$

Para mostrarmos que $u_n \rightarrow u$ em $L_A(\Omega)$, basta verificar que existe $n_0 > 0$ tal que, se $n > n_0$, então

$$\int_{\Omega} A(|v^n|) dx \leq 1, \quad (\text{A.6})$$

pois, como $\|u\|_A = \inf \left\{ k > 0, \int_{\Omega} A\left(\frac{|u(x)|}{k}\right) dx \leq 1 \right\}$, se (A.6) se verifica, então $\|u_n - u\|_A < \varepsilon$. Com efeito, defina

$$\lambda \equiv A^{-1}\left(\frac{1}{2|\Omega|}\right).$$

Defina também, para cada n , o conjunto $\Omega^n = \{x \in \Omega \mid |v^n| \geq \lambda\}$. Temos então,

$$|\Omega^n| \leq \frac{\|v^n\|_{L^1}}{\lambda} = \frac{\|u_n - u\|_{L^1}}{\lambda\varepsilon}. \quad (\text{A.7})$$

Desta forma, como $\{u^n\}$ é limitada, temos que $\|u^n\|_{L^\infty} \leq C$, e portanto $\|v^n\|_{L^\infty} \leq \frac{2C}{\varepsilon}$.

Logo, pelas propriedades da N -função A , do conjunto Ω^n , e de (A.7), concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A(|v^n|)dx &= \int_{\Omega^n} A(|v^n|)dx + \int_{\Omega - \Omega^n} A(|v^n|)dx \\ &\leq A\left(\frac{2C}{\varepsilon}\right) |\Omega^n| + A(\lambda)|\Omega| \\ &\leq A\left(\frac{2C}{\varepsilon}\right) \frac{\|u_n - u\|_{L^1}}{\lambda\varepsilon} + \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Também, como $u_n \rightarrow u$ em L^1 , existe $n_1 > 0$ tal que, se $n > n_1$, então,

$$\|u_n - u\|_{L^1} \leq \frac{\lambda\varepsilon}{2A(2C/\varepsilon)}. \tag{A.9}$$

Desta forma, de (A.8) e (A.9) obtemos que

$$\int_{\Omega} A(|v^n|)dx \leq 1,$$

o que conclui a demonstração. ■

Referências Bibliográficas

- [1] R. Adams. *Sobolev spaces*. Pure and Applied mathematics, vol. 65 (Academic, 1975).
- [2] L. Ambrosio. Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields. *Inventiones Mathematicae*. **158** (2004), 227-260.
- [3] J.-D. Benamou, Y. Brenier. Weak existence for the semigeostrophic equations formulated as a coupled Monge- Ampère/ transport problem. *SIAM J. Appl. Math.* **58** (1998), 1450- 1461.
- [4] Y. Brenier. Polar factorization and monotone rearrangement of vector- valued functions. *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), 375- 417.
- [5] H. Brèzis. *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.
- [6] D. Chae. Weak solutions of two-dimensional incompressible Euler equations. *Non- lin. Analysis* **23** (1994), 375- 417.
- [7] A. D. Chorin, J. E. Marsden. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1993.

- [8] M. Cullen. *Large- scale atmosphere/ ocean flow*. Imperial College Press, London, 2006.
- [9] M. Cullen. On the accuracy of the semi- geostrophic approximation. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **126** (2000), 1099- 1115.
- [10] M. Cullen, R. J. Douglas. Applications of the Monge- Ampère equation and Monge transport problem to meteorology and oceanography. *Contemp. Math.* **226** (1999), 33- 53.
- [11] M. Cullen, M. Feldman. Lagrangian solutions of semigeostrophic equations in physical space. *SIAM J. Math. Anal.* **37** (2006), 1371- 1395.
- [12] M. Cullen, H. Maroofi. The fully compressible semi-geostrophic system from meteorology. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **167** (2003), 309-336.
- [13] M. Cullen, J. Norbury and R. J. Purser. Generalized Lagrangian solutions from atmosphere and oceanic flows. *SIAM J. Appl. Math.* **51** (1991), 20- 31.
- [14] M. Cullen, W. Gangbo. A variational approach for the 2-dimensional semi-geostrophic shallow water equations. *Arch. rational Mech. Anal.* **56** 2001, 241- 273.
- [15] M. Cullen, R. J. Purser. An extended Lagrangian theory of semi- geostrophic frontogenesis. *J. Atmos. Sci.* **41** (1984), 1477- 1497.
- [16] R. J. DiPerna, P.-L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.* **98** (1989), 511- 547.

- [17] L.C. Evans. Partial differential equations and Monge- Kantorovich mass transfer. In *Current developments in mathematics*, pp. 65-126, Boston, MA: International Press, 1999.
- [18] L.C. Evans, R. F. Gariepy. Measure theory and fine properties of functions. *Studies in advanced mathematics*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [19] B.J. Hoskins. The geostrophic momentum approximation and the semi- geostrophic equations. *J. Atmos. Sci.* **32** (1975), 233- 242.
- [20] B.J. Hoskins, F.P. Bretherton. Atmospheric frontogenesis models: mathematical formulation and solution. *J. Atmos. Sci.* **29** (1972), 11- 37.
- [21] G. Loeper, A fully nonlinear version of the incompressible Euler equations: the semigeostrophic system, *SIAM J. Math. Analysis* v. 38 (2006) 795–823.
- [22] M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzveig Lopes. Existence of a weak solution for the semigeostrophic equation with integrable initial data. *Proc. of the Roy. Soc. of Edinburgh.* **132A** (2002), 329- 339.
- [23] M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzveig Lopes. *Uma introdução a soluções de viscosidade para equações de Hamilton-Jacobi*. Publicações Matemáticas, IMPA.
- [24] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1972.
- [25] H. L. Royden. *Real Analysis*. Macmillan Publishing Co., Inc., New York; Collier-Macmillan Canada, Ltd., 2nd. ed.,1968.
- [26] J. V. Tiel. *Convex Analysis*. John Wiley and Sons Ltd., 1984.

- [27] C. Villani. Topics in Optimal Transportation. *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 58. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.