Uma Prova do

Teorema do Prolongamento Algébrico

Cleusa Iara Albernaz Morga

Orientador

Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com auxílio financeiro da Capes e Finep.

junho de 1978

Oferecimento

A meus pais,
meu esposo Alexandre
e a minhas filhas
Letícia e Alexandra.

UMA PROVA DO TEOREMA DO PROLONGAMENTO ALGÉBRICO

* * *

Introdução

O teorema do prolongamento de pseudo-grupos de Lie infinitesimais foi enunciado por Elie Cartan no início do século [c.f.2]. Este teorema nos garante a integrabilidade de um sistema de equações a derivadas parciais com certas condições, prolongando este sistema suficientemente ao fibrado dos referenciais de uma certa ordem.

A demonstração deste teorema foi feita em 1957 por Kuranishi conhecido hoje como o Teorema do Prolongamento de Cartan-Kuranishi. [c.f.4]. Esta demonstração aparece de maneira melhorada nas notas do curso de Kuranishi na Universidade de São Paulo em 1965. [c.f.3]

Ambas demonstrações são baseadas num teorema do prolongamento algébrico de extrema dificuldade de compreensão e com pré-supostos algébricos elaborados.

Em 1966, Hayashi [c.f.3], quando aluno de Kuranishi, apresentou uma demonstração simplificada do teorema algébrico do prolongamento sem grandes pré-requisitos.

O objetivo deste trabalho foi então de retomar a demonstração de Hayashi, ainda não publicada, e fazer adaptações necessárias para se ter uma demonstração simplificada do teorema algébrico do prolongamento.

Este trabalho foi dividido em quatro capítulos. No primeiro serão apresentados conceitos e resultados da Álgebra Multilinear. No segundo capítulo serão dadas definições e proposições relacionadas ao prolongamento do subespaço vetorial $A \subseteq E \otimes S^{\ell}(F)$. Toda uma teoria sobre datuns se torna necessária para uma melhor compreensão da demonstração do teorema do prolongamento. E isto é mostrado de uma maneira clara e precisa no capítulo 3. Finalmente no capítulo 4 se encontrará o teorema algébrico do prolongamento.

CAPÍTULO I

Neste capítulo serão utilizados os principais conceitos e resultados da Álgebra Multilinear.

Sejam E e F espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo K de característica zero.

Suponha que dimensão de E seja m e a de F seja n.

Seja $A \subseteq E \otimes S^{\ell}(F)$ um subespaço, onde $S^{\ell}(F)$ é o subespaço dos elementos simétricos no produto tensorial ℓ-vezes de F, ou seja $S^{\ell}(F) = F \cdot F \cdot \ldots \cdot F$ (ℓ-vezes) onde $(\cdot)$ denota produto tensorial simétrico. [c.f [1], [3], [5]].

Uma base para $S^{\ell}(F)$ é denotada por $\{ \xi_{m_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{m_\ell} ;$
$1 \leq m_1 \leq \ldots \leq m_\ell \leq n \}$
onde $\mathcal{F} = \{ \xi_1, \ldots, \xi_n \}$ é uma base em F.

Sejam $b^{m_1 \ldots m_\ell}$ as coordenadas de um vetor t relativamente a esta base em $S^{\ell}(F)$. Este t pode ser escrito como $t = \sum_{\sigma} b^{\sigma(m_1), \ldots, \sigma(m_\ell)} \xi_{\sigma(m_1)} \cdot \ldots \cdot \xi_{\sigma(m_\ell)}$, onde σ é uma permutação de

$$M = \{ m_1, \ldots, m_\ell ; 1 \leq m_1 \leq \ldots \leq m_\ell \leq n \} . \qquad [c.f.5] .$$

Considere $\varepsilon = \{ e_1, \ldots , e_m \}$ uma base em E. Um elemento a qualquer de A é da forma

$$a = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_\ell \leq n}} \alpha^{j i_1, \ldots, i_\ell} e_j \otimes \xi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{i_\ell} .$$

Agora, seja F_i um subespaço de F gerado por $\{\xi_i, \ldots, \xi_n\}$. Tem-se, então, que a dimensão de F_i é $n-(i-1)$.

Denote por $A_i = A \cap (E \otimes S^{\ell}(F_i))$ [1.1].

Tem-se que $A_i \subseteq A \cap (E \otimes S^{\ell-1}(F) \otimes F_i)$ pois

$S^{\ell}(F_i) \subset S^{\ell-1}(F_i) \otimes F_i$ e como $S^{\ell-1}(F_i) \subseteq S^{\ell-1}(F)$, logo

$S^{\ell}(F_i) \subset S^{\ell-1}(F_i) \otimes F_i \subset S^{\ell-1}(F) \otimes F_i$.

Então por [1.1] vê-se que é possível extrair de A uma sequência decrescente de subespaços

$$A = A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \quad [1.2].$$

Dado $\xi \in F^*$ um elemento do espaço dual de F, seja a aplicação linear $\nu(\xi)$ de F em K definida por $\nu(\xi)f = \xi(f)$ para todo f em F. Se W é um outro K-espaço vetorial, $\nu(\xi)$ induz uma aplicação linear de $W \otimes F$ em $W \otimes K \cong W$ a qual denota-se por $\nu(\xi)$ também. Portanto se ξ pertence a F^*, w pertence a W e f pertence a F, então

$$\nu(\xi)\ (w \otimes f) = \nu(\xi)(f)(w) = \xi(f)w \qquad [\text{ c.f.5 }].$$

CAPÍTULO II

Utilizando os conhecimentos do capítulo anterior serão expostas aqui, definições e proposições ligadas ao prolongamento do subespaço vetorial $A \subseteq E \otimes S^{\ell}(F)$. Estes conhecimentos básicos serão de muita importância para a conclusão deste trabalho.

<u>Definição 2.1</u>: [c.f.3]. O <u>prolongamento de ordem 1</u> do subespaço A é o subespaço $p(A)$ de $E \otimes S^{\ell+1}(F)$, definido por:

$$p(A) = (A \otimes F) \cap (E \otimes S^{\ell+1}(F)) .$$

<u>Proposição 2.2</u>: [c.f.3] Dado $A_i \subseteq A$, $1 \leq i \leq n$ definido anteriormente tem-se:

$$p(A_i) = p(A) \cap (E \otimes S^{\ell}(F) \otimes F_i) .$$

<u>Prova</u>:

Por definição $p(A_i) = (A_i \otimes F) \cap (E \otimes S^{\ell+1}(F))$.

Conforme [1.1]

$$A_i = A \cap (E \otimes S^{\ell}(F_i)) \subseteq A \cap (E \otimes S^{\ell-1}(F) \otimes F_i) .$$

Pela definição 2.1

$$p(A) = (A \otimes F) \cap (E \otimes S^{\ell+1}(F)) \quad e$$

$$A_i \subseteq A \subseteq E \otimes S^{\ell}(F).$$

Logo

$$p(A_i) = (A_i \otimes F) \cap (E \otimes S^{\ell+1}(F)) \subseteq$$

$$\subseteq (A \otimes F) \cap (E \otimes S^{\ell+1}(F)) = p(A).$$

Por outro lado também pela definição 2.1

$$p(A_i) \subset E \otimes S^{\ell+1}(F_i) \subset E \otimes S^{\ell}(F) \otimes F_i.$$

Logo $p(A_i) \subset p(A)$ e $p(A_i) \subset E \otimes S^{\ell}(F) \otimes F_i$

e então $p\,(A_i) \subset p(A) \cap (E \otimes S^{\ell}(F) \otimes F_i)$.

Seja x pertencente a $p(A) \cap E \otimes S^{\ell}(F) \otimes F_i$.

De x pertencente a $p(A)$ tem-se:

$$x = \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{\ell+1} \leq n}} \lambda^{kj_1 \dots j_{\ell+1}} e_k \otimes \xi_{j_1} \cdot \dots \cdot \xi_{j_{\ell+1}}$$

e de x pertencente a $E \otimes S^{\ell}(F) \otimes F_i$ tem-se

$$x = \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{\ell} \\ i \leq \ell+1 \leq n}} \lambda^{kj_1 \dots j_{\ell+1}} e_k \otimes \xi_{j_1} \cdot \dots \cdot \xi_{j_{\ell+1}} \otimes \xi_{j_{\ell+1}}.$$

Fazendo-se a intersecção tem-se:

$$x = \sum_{\substack{1\leq k\leq m \\ i\leq j_1\leq\cdots\leq j_{\ell+1}\leq n}} \lambda^{kj_1\cdots j_{\ell+1}} e_k \otimes \xi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\xi_{j_{\ell+1}}$$

que pertence a $p(A_i)$, logo

$$p(A_i) \supset p(A) \cap (E \otimes S^{\ell}(F) \otimes F_i) \quad \text{e portanto}$$

$$p(A_i) = p(A) \cap (E \otimes S^{\ell}(F) \otimes F_i).$$

Como $A \subseteq E \otimes S^{\ell}(F)$ tem-se $p(A) \subseteq E \otimes S^{\ell}(F) \otimes F$.

<u>Observação</u>: Se ξ pertence a F^* então a imagem de $\nu(\xi)$ restrito a $p(A)$ está contida em A.

<u>Proposição 2.3</u>: [c.f. [3], [5]] O núcleo da aplicação $\nu(\xi^i)$ de $p(A_i)$ em A_i é $p(A_{i+1})$, onde ξ^i é o dual ξ_i.

<u>Prova</u>: Sejam $\nu(\xi^i)$ de $p(A_i)$ em A_i e w pertencente ao núcleo de $\nu(\xi^i)$.

Pode-se escrever $w = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq k\leq m \\ i\leq j_1\leq\cdots\leq j_{\ell+1}\leq n}} \lambda^{kj_1\cdots j_{\ell+1}} e_k \otimes \xi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\xi_{j_{\ell+1}}.$

Aplicando $\nu(\xi^i)$ a w tem-se:

$$\nu(\xi^i)(w)=\nu(\xi^i)\left(\sum_{\substack{1\le k\le m\\ i\le j_1\le\cdots\le j_{\ell+1}\le n}} \lambda^{kj_1\cdots j_{\ell+1}}\, e_k\otimes \xi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\xi_{j_{\ell+1}}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{1\le k\le m\\ i\le j_1\le\cdots\le j_{\ell+1}\le n\\ r=1,\ldots,\ell+1}} \lambda^{kj_1\cdots j_{\ell+1}}\,\nu(\xi^i)\xi_{j_r}\, e_k\otimes \xi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\hat{\xi}_{j_r}\cdot\ldots\cdot\xi_{j_{\ell+1}}=$$

$$=\sum_{\substack{1\le k\le m\\ i\le j_1\le\cdots\le j_{\ell+1}\le n\\ r=1,\ldots,\ell+1}} \lambda^{kj_1\cdots j_{\ell+1}}\,\delta^{i}_{j_r}\, e_k\otimes \xi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\hat{\xi}_{j_r}\cdot\ldots\cdot\xi_{j_{\ell+1}}=0$$

onde δ^i_r é o delta de Kronecker, então só restam ξ_{j_r} para $j_r\neq i$. Logo w pertence a $p(A_{i+1})$.

Tem-se então a sequência exata:

$0 \to p(A_{i+1}) \to p(A_i) \to A_i$ [2.4], onde a última seta denota $\nu(\xi^i)$ e a segunda a inclusão natural[c.f.5].

<u>Proposição 2.5</u>:[c.f.5]. Para qualquer base $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$, dim. $p(A)\le \tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{n-1}$, onde τ_i é a dimensão de A_i para $1\le i\le n$.

Prova: Seja $\tau_i = \dim.A_i$ e $\sigma_i = \dim.p(A_i)$. O posto de $\nu(\xi^i)$ = dim.da imagem de $\nu(\xi^i)$ que é menor ou igual a $\dim.A_i = \tau_i$, a nulidade de $\nu(\xi^i)$ é igual a dimensão do núcleo de $\nu(\xi^i)$ que é igual a $\dim.p(A_{i+1}) = \sigma_{n-(i+1)}$ e $\dim.(p(A_i)) = \sigma_{n-i}$

Como $\dim.p(A_i) \geq \dim.\mathrm{Im}(\nu(\xi^i)) + \dim.\mathrm{Ker}(\nu(\xi^i))$ tem-se $\sigma_{n-i} \leq \tau_i + \sigma_{n-(i+1)}$.

Desde que,

$$\dim.p(A_1) = \dim.p(A) \leq \sigma_{n-1} \leq \tau_1 + \sigma_{n-2} \leq$$

$$\leq \tau_1 + \tau_2 + \sigma_{n-3} \leq \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n + \sigma_{n-(n+1)} \quad \text{e}$$

$\sigma_{n-(n+1)} = 0$ então $\dim.p(A) \leq \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$.

Definição 2.6: [c.f.3] A base $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ de F é chamada quasi-regular para A se $\nu(\xi^i)$ de $p(A_i)$ em A_i é sobrejetora para $i = 1, \ldots, n$, ou seja,

$\dim.\ p(A) = \dim.A_1 + \ldots + \dim.A_n$.

Definição 2.7: [c.f.3] O subespaço de $E \otimes S^{\ell}(F)$, A é chamado de involutivo se e somente se, existe uma base quasi-regular para A.

Exemplo 2.7.1: [c.f.5] Seja $A \subseteq E \otimes F$.

Suponha que dim. E seja 1, isto é, $A \subseteq F$. Seja $\mathcal{J} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$

uma base em F tal que $\{\xi_1,\ldots,\xi_k\}$ seja uma base de A. Então:

dim. $A_i = \max\{ k-i, o \}$ ou seja:

dim. $A_o = k = \tau_o$,

dim. $A_1 = k-1 = \tau_1$,

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

dim. $A_i = k-i = \tau_i$,

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

dim. $A_{k-1} = 1 = \tau_{k-1}$.

Então $\tau_o + \tau_1 + \ldots + \tau_i + \ldots + \tau_{k-1} =$

$$= k + k-1 + \ldots + k-i + \ldots + 1 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Por outro lado, como $A \subset F$, $p(A) = S^2(A)$,

logo $\dim. p(A) = \dim.\ S^2(A) = \binom{k+2-1}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$

Então $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ é uma base quasi regular.

<u>Exemplo 2.7.2:</u> [c.f.5] Suponha dim. F = 1, $A \subseteq E \otimes F$. Todo $A \subseteq E$ é involutivo. Com efeito, seja $\{\xi\}$ base em F. Como F tem dimensão 1, A não pode ser decomposto em A_i. Seja agora $\varepsilon = \{ e_1,\ldots,e_m \}$ base em E, $A \subseteq E$. Suponha que $\{e_1,\ldots,e_k\}$ para $k \leq m$, gere A, portanto dim. A = k. Por outro lado $p(A) = A \otimes S^2(F)$ $\dim. p(A) = \dim. A. \dim. S^2(F)$.

$$S^2(F) = F \cdot F$$

Como $\dim. F = 1$, $\dim. S^2(F) = 1$. Logo $\dim. p(A) = k \cdot 1 = k =$
$= \dim. A$.

Logo ξ é uma base quasi regular para A.

* * *

CAPÍTULO III

A demonstração do teorema do prolongamento torna-se bem mais simples usando reduções de datuns. Este capítulo será dedicado a um estudo completo sobre esta teoria. Para isto considere $X_1,\ldots,X_n$ um sistema de indeterminadas. Denote por $P^\ell = P^\ell[X_1,\ldots,X_n]$ o espaço vetorial dos polinômios de grau ℓ, tais que todos os monômios são de grau ℓ sobre $\mathbb{R}$.[c.f.3]

<u>Definição 3.1</u>: [c.f.3] Um <u>datum</u> de grau menor ou igual ℓ é uma terna $(f, i, \alpha) = \mathscr{f}^\ell$ onde f é um monômio $X_{j_1},\ldots,X_{j_k}$, $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_k \leq n$, $k < \ell$, α um inteiro entre 1 e $m = \dim E$ e i um inteiro tal que $i \leq j_1$.

Se $\mathscr{f}^\ell$ é um datum de grau menor ou igual a ℓ, seja $P^\ell_{\mathscr{f}^\ell} = P^\ell_f[X_1,\ldots,X_i]$, o subespaço de P^ℓ gerado pelos monômios da forma $X_{i_1},\ldots,X_{i_{\ell-k}} f$, onde $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_{\ell-k} \leq i$ [c.f.3].

Seja $\rho'_{\mathscr{f}^\ell}$ de P^ℓ em $P^\ell_{\mathscr{f}^\ell}$ a projeção canônica sobre os termos da base

$\{X_{h_1},\ldots,X_{h_\ell};\ 1 \leq h_1 \leq \ldots \leq h_\ell \leq n\}$ de P^ℓ. [c.f.3] .

Seja $\rho''_{\mathscr{f}^\ell}$ de E em $\mathbb{R}$ aplicação linear que leva e_α em 1 e os outros e_β em 0, para $\beta \neq \alpha$, onde β pertence a

$\{1,\ldots,m\}$ e α pertence a $\mathcal{J}^{\ell}$. [c.f.3] .

Dada a base $\xi_1,\ldots,\xi_n$ de F, tem-se um isomorfismo T de $E \otimes S^{\ell}(F)$ em $E \otimes P^{\ell}$, tal que a cada ξ_i associamos X_i [c.f.3].

Seja $\rho^{\ell}_{\mathcal{J}\ell}$ de $E \otimes S^{\ell}(F)$ em $P^{\ell}_{\mathcal{J}\ell}$, composição de $\rho''_{\mathcal{J}\ell} \otimes \rho'_{\mathcal{J}\ell}$ com o isomorfismo T definido acima [c.f.3].

Seja ν pertencente a $E \otimes S^{\ell}(F)$,

$$\nu = \sum_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq i_1\leq\ldots\leq i_\ell\leq n}} \lambda^{ji_1\ldots i_{\ell+1}} \; e_j \otimes \xi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_\ell} \quad \text{então}$$

$$T(\nu) = T\left(\sum_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq i_1\leq\ldots\leq i_\ell\leq n}} \lambda^{ji_1\ldots i_\ell} \; e_j \otimes \xi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_\ell}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq i_1\leq\ldots\leq i_\ell\leq n}} \lambda^{ji_1\ldots i_\ell} \; T(e_j \otimes \xi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_\ell}) =$$

$$= \sum_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq i_1\leq\ldots\leq i_\ell\leq n}} \lambda^{ji_1\ldots i_\ell} \; e_j \otimes X_{i_1}\cdot\ldots\cdot X_{i_\ell} \; .$$

Agora

$$\rho''_{\mathcal{f}\ell} \otimes \rho'_{\mathcal{f}\ell}(T(v)) =$$

$$= \rho''_{\mathcal{f}}{}^{\ell} \otimes \rho'_{\mathcal{f}}{}^{\ell} \Big(\sum_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le i_1\le \dots\le i_\ell\le n}} \lambda^{ji_1\dots i_\ell} e_j \otimes X_{i_1}\cdot\ldots\cdot X_{i_\ell}\Big) =$$

$$= \sum_{1\le i_1\le \dots\le i_\ell\le n} \lambda^{i_1\dots i_\ell} X_{i_1}\cdot\ldots\cdot X_{i_{\ell-k}} f \; .$$

Esta aplicação $\rho_{\mathcal{f}\ell}$ depende da escolha da base.

Em geral seja $\underline{\mathcal{f}}^{\ell} = (\mathcal{f}_1^{\ell}, \dots, \mathcal{f}_S^{\ell})$ uma coleção de datuns de grau menor ou igual a ℓ, e seja $P_{\underline{\mathcal{f}}\ell}^{\ell} = \sum_{1\le\lambda\le S} P_{\mathcal{f}_\lambda^{\ell}}^{\ell}$, soma direta formal dos espaços vetoriais.

Tem-se a aplicação $\rho_{\underline{\mathcal{f}}\ell}^{\ell} = \sum_{1\le\lambda\le S} \rho_{\mathcal{f}_\lambda^{\ell}}^{\ell}$ de $E \otimes S^{\ell}(F)$ em $P_{\underline{\mathcal{f}}\ell}^{\ell}$ |c.f.3|.

Notação: $\mathcal{f}_\lambda^{\ell} = (f_\lambda, i(\lambda), \alpha(\lambda))$.

Definição 3.4: [c.f.3] Diz-se que $\underline{\mathcal{f}}^{\ell}$ é ampla em A em relação a base $\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ se e somente se $\rho_{\underline{\mathcal{f}}}^{\ell}{}_{\ell}$ restrito a A é injetiva.

Sejam $\mathcal{F} = \{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ base em F e $\mathcal{E} = \{e_1,\dots,e_m\}$ base em E.

Se g pertence a $E \otimes S^{\ell}(F)$, escreve-se

$$g = \sum_{\substack{1\leq\beta\leq m \\ 1\leq i_1\leq\ldots\leq i_\ell\leq n}} g^{\beta i_1 \ldots i_\ell} e_\beta \otimes \xi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{i_\ell} .$$

<u>Notação</u>: Se $f = X_{j_1} \ldots X_{j_k}$, denota-se

$$g^{\beta i_1 \ldots i_{\ell-k}, j_1, \ldots, j_k} = g^{\beta i_1 \ldots i_{\ell-k}} f .$$

<u>Proposição 3.5.</u>: [c.f.3] O $\mathscr{f}^{\ell} = (\mathscr{f}^{\ell}_1, \ldots, \mathscr{f}^{\ell}_s)$ é amplo para A se e somente se a seguinte condição é válida: "Para g pertencente a A a condição $g^{\alpha(\lambda) i_1 \ldots i_{\ell-k_\lambda}} f_\lambda = 0$, onde k_λ é o grau de f_λ, para todo $1\leq i_1\leq\ldots\leq i_{\ell-k_\lambda} \leq i(\lambda)$ implica que g=0".

<u>Prova</u>: Para se provar que a condição é necessária, suponha $\rho^{\ell}_{\mathscr{f}^{\ell}}$ restrito a A injetivo. Seja g pertencente a A, então:

$$\rho^{\ell}_{\mathscr{f}^{\ell}} \left(\sum_{\substack{1\leq\alpha\leq m \\ 1\leq i_1\leq\ldots\leq i_\ell\leq n}} g^{\alpha i_1 \ldots i_\ell} e_\alpha \otimes \xi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{i_\ell} \right) =$$

$$= \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq m \\ 1\leq i_1\leq\ldots\leq i_\ell\leq n}} g^{\alpha i_1 \ldots i_\ell} \rho^{\ell}_{\mathscr{f}^{\ell}} (e_\alpha \otimes \xi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{i_\ell}) =$$

$$= \sum_{\substack{1 \le i_1 \le \cdots \le i_{\ell-k_\lambda} \le i(\lambda) \le n \\ 1 \le \lambda \le S}} g^{\alpha(\lambda) i_1 \cdots i_{\ell-k_\lambda} f_\lambda} X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_{\ell-k_\lambda}} f_\lambda = 0 .$$

Como $X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_{\ell-k_\lambda}} f_\lambda$ são linearmente independentes, $\rho^{\ell}_{\mathscr{F}\ell}$ restrito a A é injetivo e $g^{\alpha(\lambda) i_1 \cdots i_{\ell-k_\lambda} f_\lambda} = 0$ implica $g = 0$.

Reciprocamente, seja g pertencente a A e ao núcleo de $\rho^{\ell}_{\mathscr{F}\ell}$.

$$\text{Então} \quad \rho^{\ell}_{\mathscr{F}\ell}(g) = \sum_{1 \le \lambda \le S} g^{\alpha(\lambda) i_1 \cdots i_{\ell-k_\lambda} f_\lambda} X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_{\ell-k_\lambda}} \cdot f_\lambda = 0$$

Como os $X_{i_1} \ldots X_{i_{\ell-k_\lambda}} f_\lambda$ são linearmente independentes para $1 \le i_1 \le \cdots \le i_{\ell-k_\lambda} \le i(\lambda)$, então $g^{\alpha(\lambda) i_1 \cdots i_{\ell-k_\lambda} f_\lambda} = 0$ e por hipótese $g = 0$, logo $\rho^{\ell}_{\mathscr{F}\ell}$ é injetivo.

Para a sequência deste trabalho, tornam-se necessários, os seguintes resultados.

<u>Lema 3.6</u>: [c.f.3]. Se $\mathscr{F}^{\ell}$ é amplo para A com relação $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, então $\mathscr{F}^{\ell}$ é amplo para $p(A)$ com relação a mesma base.

Prova:

Seja $\mathcal{F} = \{ \xi_1, \ldots, \xi_n \}$ base em F e $\mathcal{F}^* = \{ \xi^1, \ldots, \xi^n \}$ sua base dual. Considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \rho^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}\ell} : E \otimes S^{\ell}(F) \arrow[r] & P^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}\ell} \arrow[d, "s^j"] \\ \rho^{\ell+1}_{\underline{\mathcal{F}}\ell} : E \otimes S^{\ell+1}(F) \arrow[r] \arrow[u, "\nu^j"] & P^{\ell+1}_{\underline{\mathcal{F}}\ell} \end{tikzcd} ,$$

onde as aplicações:

$\rho^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}\ell}$ de A em $P^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}}$ é linear e injetiva, já definida anteriormente.

A aplicação $\nu^j = \nu(\xi^j)$ de $E \otimes S^{\ell+1}(F)$ em $E \otimes S^{\ell}(F)$ definida pela proposição[2.3].

A aplicação s^j de $P^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}\ell}$ em $P^{\ell+1}_{\underline{\mathcal{F}}\ell}$ é que simetriza o elemento X_j em $P^{\ell+1}_{\underline{\mathcal{F}}\ell}$.

Suponha h pertencente a $p(A)$ e pertencente ao núcleo de $\rho^{\ell+1}_{\underline{\mathcal{F}}\ell}$.

Pelo diagrama acima

$$\rho^{\ell+1}_{\underline{\mathcal{F}}\ell}(h) = s^j \cdot \rho^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}\ell} \circ \nu^j(h) \qquad [\ 3.7\ ] .$$

Deve-se mostrar em primeiro lugar que $\nu^j(h) = 0$ para todo j. Então tem-se:

1º caso: $j \leq i(\lambda)$.

Se $j \leq i(\lambda)$ então $a=0$ pois a está no núcleo de $\rho^{\ell+1}_{\mathcal{F}\ell}$.

2º caso: $j \geq i(\lambda)$.

Para este caso prova-se por indução em j.

Suponha que $\nu^1(h) = \ldots = \nu^{j-1}(h) = 0$.

Então no caso em que $j > i(\lambda)$ suponha $i_1 < j$ então

$a = h^{\alpha(\lambda) j\, i_1 \ldots i_{\ell-k_\lambda} f_\lambda} = h^{\alpha(\lambda) i_1 j, i_2, \ldots, i_{\ell-k_\lambda} f_\lambda}$ e essa é a coordenada $j\, i_2, \ldots, i_{\ell-k_\lambda} f_\lambda$ de $\nu^{i_1}(h)$, mas pela hipótese de indução, como $i_1 < j$ segue $\nu^{i_1}(h) = 0$. Então $a = 0$.

Como $\rho^{\ell}_{\mathcal{F}\ell}$ é injetivo por hipótese e X_j é linearmente independente, vê-se em [3.7] que $\rho^{\ell+1}_{\mathcal{F}\ell}(h) = 0$ e como h pertence ao núcleo de $\rho^{\ell+1}_{\mathcal{F}\ell}$ isto implica que $\rho^{\ell+1}_{\mathcal{F}\ell}$ é injetivo.

Portanto $\mathcal{F}^{\ell}$ é amplo sobre $p(A)$ com relação $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

Lema 3.8: [c.f.3]. Seja $\mathcal{F}^{\ell}$ amplo sobre A em re lação a $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$. Então podemos achar uma vizinhança de $\nu(\xi_j)$ do ξ_j para $1 \le j \le n$ em relação a topologia habitual, tal que para toda escolha de η_j em $\nu(\xi_j)$, $\underline{\mathcal{F}}^{\ell}$ é também ampla sobre A em relação a base $\{\eta_1,\ldots,\eta_j\}$.

Prova:

Fixe uma base de $E \otimes S^{\ell}(F)$ da forma $(e_1,\ldots,e_m,\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_\ell}\ ;\ 1 \le i_1 \le\ldots\le i_\ell \le n)$. Por hipótese, $\underline{\mathcal{F}}^{\ell}$ é amplo para A com relação $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$.

Tem-se em correspondência uma base de $P^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}^{\ell}}$ representada pelos monômios $X_{i_1}\ldots X_{i_\ell}\ ;\ 1 \le i_1 \le\ldots\le i_\ell$. O núcleo de $\rho^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}^{\ell}}$ é representado por um sistema linear homogêneo.

Como $\rho^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}^{\ell}}$ restrito a A é injetivo o

$\operatorname{Ker} \rho^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}^{\ell}} \cap A = \{0\}$.

O sistema linear homogêneo determinado pela igualdade

$$\sum_{\substack{1\le k\le m \\ 1\le i_1\le\ldots\le i_\ell\le n}} h^{k i_1\cdots i_\ell}\, e_k \otimes X_{i_1}\cdot\ldots\cdot X_{i_\ell} = 0$$

tem uma matriz $M = [\,h^{k i_1\cdots i_\ell}\,]_{\substack{k=1,\ldots m \\ 1\le i_1\le\ldots\le i_\ell\le n}}$ com determinante diferente de zero numa vizinhança $\mathcal{U}_j$ de cada ξ_j, $j = 1, \ldots, n$.

Então para toda base $\{\eta_j\}_{j=1,\dots,m}$ com η_j pertencente a $\mathcal{V}_j$ o determinante de M é diferente de zero. Logo $\underline{\mathcal{f}}^{\ell}$ é amplo para A com relação a estas duas bases.

<u>Definição 3.9</u>: [c.f.3] Seja $\underline{\mathcal{f}}^{\ell} = (\mathcal{f}_1^{\ell},\dots,\mathcal{f}_s^{\ell})$ uma coleção de datuns. Seja τ_j o número de índices λ tais que $i(\lambda) = j$. A sequência $(\tau_n, \tau_{n-1}, \dots, \tau_1)$ é chamada <u>característica</u> de $\underline{\mathcal{f}}^{\ell}$ e será denotada por $\tau(\underline{\mathcal{f}}^{\ell})$.

<u>Definição 3.10</u>: [c.f.3]. A coleção $\underline{\mathcal{f}}^{\ell}$ é <u>irredutível</u> em A se e somente se a imagem de A por $\rho^{\ell}_{\underline{\mathcal{f}}^{\ell}}$ é igual a $P^{\ell}_{\underline{\mathcal{f}}^{\ell}}$.

<u>Notação</u>: Seja $d(j,\ell) = \dim S^{\ell}(\mathbb{R}^j)$.

As definições acima implicam na seguinte proposição:

<u>Proposição 3.11</u>: [c.f.3]. Suponha que $\underline{\mathcal{f}}^{\ell}$ é amplo para A. Então $\dim A \leq \sum_{1\leq j\leq m} \tau_j\, d(j,\ell)$. Se $\underline{\mathcal{f}}^{\ell}$ é amplo e irredutível para A então $\dim A = \sum_{1\leq j\leq n} \tau_j\, d(j,\ell)$.

<u>Prova</u>: Dizer que $\underline{\mathcal{f}}^{\ell}$ é amplo e irredutível sobre A é equivalente a dizer que a aplicação $\rho^{\ell}_{\underline{\mathcal{f}}^{\ell}}$ de A em

$P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}} = \sum_{\lambda=1}^{S} P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_{\lambda}}$ é injetiva e sobre, portanto $\rho^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}}(A) = \dim P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}} =$

$= \dim P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_{1}} + \ldots + \dim P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_{S}}$. [3.12]

Sabe-se que $\mathcal{F}^{\ell}_{\lambda} = (f_{\lambda},\ i(\lambda), \alpha(\lambda))$,

$\lambda = 1, \ldots, S$ e que $P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_{\lambda}} = P^{\ell}_{f_{\lambda}}[X_1, \ldots, X_{i(\lambda)}]$ é subespaço de

P^{ℓ} gerado pelos monômios do tipo:

$$X_{(i(\lambda))_1} \cdots X_{(i(\lambda))_{\ell-k_{\lambda}}} f_{k_{\lambda}},\ 1 \leq i(\lambda)_1 \leq \cdots \leq i(\lambda)_{\ell-k_{\lambda}} \leq i(\lambda)$$

(k_{λ} é o grau de f_{λ}). Logo a dimensão de $P^{\ell}_{\mathcal{F}_{\lambda}}$ é o número de mo-

nômios do tipo $X_{i(\lambda)_1} \cdots X_{i(\lambda)_{\ell-k_{\lambda}}} f_{\lambda}$, onde $\lambda = 1, \ldots, S$.

Pode-se fazer uma correspondência que a cada $X_i \in P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}}$ associa $\nu_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{i(\lambda)}$ onde 1 aparece na posição i.

Considere então a aplicação Q_{λ} de $P^{\ell}_{\mathcal{F}_{\lambda}}$ em $S^{\ell-k_{\lambda}}(\mathbb{R}^{i(\lambda)})$ definida por; a cada $X_{i(\lambda)_1} \cdots X_{i(\lambda)_{\ell-k_{\lambda}}}$ associa-se o elemento

$\nu_{i(\lambda)_1}, \ldots, \nu_{i(\lambda)_{\ell-k_{\lambda}}}$.

Verifica-se então que $P^{\ell}_{\mathscr{f}_j}$ é isomorfo a $S^{\ell-k_j}(\mathbb{R}^{i(j)})$. Logo $\dim. P^{\ell}_{\mathscr{f}_j} = \dim. S^{\ell-k_j}(\mathbb{R}^{i(j)}) = \tau_{i(j)} d(i(j),\ell-k_j)$ para $1 \leq j \leq S$, onde $\tau_{i(j)}$ é o número de λ tal que $i(\lambda) = i(j)$, $1 \leq j \leq S$.

Portanto por [3.12] tem-se:

$$\dim. \rho^{\ell}_{\underline{\mathscr{f}}^{\ell}}(A) = \dim. P^{\ell}_{\underline{\mathscr{f}}^{\ell}} = \tau_{i(1)} d(i(1), \ell-k_1) + \ldots + \tau_{i(S)} d(i(S),\ell-k_S).$$

Como A pode ser incluido em $P^{\ell}_{\underline{\mathscr{f}}^{\ell}}$ como subespaço,

$$\dim. A \leq \dim. P^{\ell}_{\mathscr{f}} = \sum_{\lambda=1}^{S} \tau(i(\lambda))\, d(i(\lambda),\ell-k_{\lambda}).$$

A igualdade é verificada quando A for o próprio subespaço $P^{\ell}_{\underline{\mathscr{f}}^{\ell}}$, ou seja quando $\underline{\mathscr{f}}^{\ell}$ for irredutível sobre A, além de já ser amplo sobre A.

Seja $\underline{\mathscr{f}}^{\ell} = (f, i,\alpha)$ um datum. Se $i=1$ então $P^{\ell}_{\underline{\mathscr{f}}^{\ell}}$ é gerado por $X_1^{\ell-k} f$ e $\dim. P^{\ell}_{\underline{\mathscr{f}}^{\ell}} = 1$.

Se $i \geq 2$ tem-se a seguinte decomposição:

$$P^{\ell}_{\mathscr{f}^{\ell}} = \mathbb{R} X_i^{\ell-k} f \oplus \sum_{t=0}^{\ell-k-1} P^{\ell}_{\mathscr{f}^{\ell}(t)} \qquad [3.13],$$

onde $\mathscr{f}^{\ell}(t) = (X_i^t f, i-1,\alpha)$.

Para provar que:

$$P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}} \subset \mathbb{R}X_i^{\ell-k} f \oplus P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}(0)} \oplus P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}(1)} \oplus \ldots \oplus P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}(\ell-k-1)}$$

tem-se que $P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}}$ é gerado por $X_{i_1} \ldots X_{i_{\ell-k}} f$, $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_{\ell-k}$.

Se $i_1 = i_2 = \ldots = i_{\ell-k} = i$, então $P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}}$ é gerado por $X_i^{\ell-k} f$, portanto os elementos de $P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}}$ pertencem a A e $P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}} \subset$ A.

Se $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{\ell-k} \leq i$, todos os elementos de $P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}}$ pertencem a A, visto que

$$1 \leq (i-1)_1 \leq \ldots \leq (i-1)_{\ell-k} \leq i-1 < i_1 \leq \ldots \leq i_{\ell-k} \leq i.$$

Além de se ter os elementos $X_{(i-1)_1} \ldots X_{(i-1)_{\ell-k}}$ tem-se $X_i f$ $(\ell-k)!$ vezes, sendo i o maior de todos os índices, portanto $P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}}$ que é gerado por $X_{i_1} \ldots X_{i_{\ell-k}} f$ que está contido em A.

Para provar que

$$P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}} \supset \mathbb{R}X_i^{\ell-k} f \oplus P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}(0)} \oplus \ldots \oplus P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}(\ell-k-1)},$$

note-se que um elemento de A vai ser da forma

$$\sum_{1 \leq (i-1)_1 \leq \ldots \leq (i-1)_{\ell-k} \leq (i-1) \leq i_1 \leq \ldots \leq i_{\ell-k} \leq i} \beta^{(i-1)_1 \ldots (i-1)_{\ell-k} i} X_{(i-1)_1} \ldots X_{(i-1)_{\ell-k}} X_i^j f.$$

Como $P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}(0)} \subset P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}(1)} \subset \ldots \subset P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}(\ell-k-1)}$, basta mostrar que $\mathbb{R}\, X_i^{\ell-k} \oplus P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}(\ell-k-1)} \subset P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}}$.

Seja

$$x = \sum_{\substack{1\leq j\leq \ell-k \\ 1\leq (i-1)_1\leq\ldots\leq(i-1)_{\ell-k}\leq(i-1)\leq\ldots\leq i}} \beta^{j(i-1)_1\ldots(i-1)_{\ell-k}(i-1)\ldots i} \; X_i^j \, X_{(i-1)_1}\ldots X_{(i-1)_{\ell-k}} \, f \in P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}}$$

porque $P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}}$ é gerado por monômios do tipo $X_{i_1}\ldots X_{i_{\ell-k}} f$, onde $(i-1)_1\leq\ldots\leq(i-1)_{\ell-k}\leq(i-1)\leq i_1\leq\ldots\leq i_{\ell-k}\leq i$.

<u>Definição 3.14</u>: [c.f.3] Seja $\underline{\mathcal{F}}^{\ell} = (\mathcal{F}_1^{\ell},\ldots,\mathcal{F}_s^{\ell})$ uma coleção de datuns. A coleção $\underline{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}_1,\ldots,\mathcal{G}_n)$ é chamada <u>redução direta</u> de $\underline{\mathcal{F}}^{\ell}$, quando $\mathcal{G}$ é obtida de $\underline{\mathcal{F}}^{\ell}$ substituindo um dos seus membros, digamos $\mathcal{F}^{\ell}_{\lambda_0}$ pela seguinte coleção de datuns:

- quando $i(\lambda_0)=1$ é substituido por um conjunto vazio.
- quando $i(\lambda_0)\geq 2$ é substituido por:

$$\mathcal{F}^{\ell}_{\lambda}(0),\ \mathcal{F}^{\ell}_{\lambda}(1),\ \ldots\ ,\mathcal{F}^{\ell}_{\lambda}(\ell-k-1).$$

Então $\underline{\mathcal{G}}$ é chamado uma redução de $\underline{\mathcal{F}}^{\ell}$ quando $\underline{\mathcal{G}}$ é obtido por uma sucessão de reduções diretas de $\underline{\mathcal{F}}^{\ell}$.

A fórmula da decomposição [3.13] mostra o seguinte:

<u>Proposição 3.15</u>: [c.f.3] Se $\underline{\mathcal{G}}$ é uma redução de $\underline{\mathcal{F}}^{\ell}$ então dim. $P^{\ell}_{\underline{\mathcal{G}}} \lneq P^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}^{\ell}}$.

<u>Prova</u>:

Sejam $\underline{\mathcal{F}}^{\ell} = (\mathcal{F}^{\ell}_1, \ldots, \mathcal{F}^{\ell}_{\lambda_0}, \ldots, \mathcal{F}^{\ell}_S)$

e $\underline{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n)$ duas coleções de datuns.

Suponha $\underline{\mathcal{G}}$ uma redução de $\underline{\mathcal{F}}^{\ell}$, logo

$$\underline{\mathcal{G}} = \begin{cases} (\mathcal{F}^{\ell}_1, \ \ldots, \ \phi, \ \ldots, \mathcal{F}^{\ell}_S) \text{ se } i(\lambda_0) = 1 \\ (\mathcal{F}^{\ell}_1, \ \ldots, \mathcal{F}^{\ell}_{\lambda}(0), \ \ldots, \mathcal{F}^{\ell}_{\lambda}\ (\ell-k-1)\ , \ldots, \mathcal{F}_S) \text{ se } i(\lambda_0) \geq 2. \end{cases}$$

Seja $P^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}^{\ell}} = \sum_{1 \leq m \leq S} P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_m}$, sendo

$\mathcal{F}^{\ell}_m = (f_m, \ i(m), \ \alpha(m))$

$$P^{\ell}_{\underline{\mathcal{G}}} = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{1 \leq m \leq S \\ m \neq i(\lambda_0)}} P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}_m} & \text{se} \quad i(\lambda_0) = 1 \\ \\ \sum\limits_{\substack{1 \leq m \leq S \\ m \neq \lambda_0}} P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}_m} \oplus \sum\limits_{0 \leq t \leq \ell-k-1} P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}_{\lambda_0}(t)} & \text{se} \quad i(\lambda_0) \geq 2 . \end{cases}$$

Logo $P^{\ell}_{\underline{\mathcal{G}}} \subset P^{\ell}_{\underline{\mathcal{f}}^{\ell}}$ e

$$\dim. P^{\ell}_{\underline{\mathcal{G}}} = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{1 \leq m \leq S \\ m \neq i(\lambda_0)}} \dim. P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}_m} & \text{se} \quad i(\lambda_0) = 1 \\ \\ \sum\limits_{\substack{1 \leq m \leq S \\ m \neq \lambda_0}} \dim. P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}_m} + \sum\limits_{0 \leq t \leq \ell-k-1} \dim. P^{\ell}_{\mathcal{f}_{\lambda_0}(t)} & \text{se} \quad i(\lambda_0) \geq 2 \end{cases}$$

portanto por [3.13] como

$$P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}_{\lambda_0}} = \mathbb{R}\, X_i^{\ell-k} f \oplus \sum_{t=0}^{\ell-k-1} P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}_{\lambda_0}(t)} \text{ , então}$$

$$\dim. P^{\ell}_{\underline{\mathcal{G}}} \underset{\neq}{<} \sum_{1 \leq m \leq S} \dim. P^{\ell}_{\mathcal{f}^{\ell}_m} = \dim. P^{\ell}_{\underline{\mathcal{f}}^{\ell}} .$$

Sejam $\underline{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n)$ e

$\underline{\mathcal{f}}^{\ell} = (\mathcal{f}^{\ell}_1, \dots, \mathcal{f}^{\ell}_S)$, onde $\underline{\mathcal{G}}$ é uma redução de $\underline{\mathcal{f}}^{\ell}$, então $\underline{\mathcal{G}}$ é obtido por uma sucessão de reduções diretas de $\underline{\mathscr{f}}^{\ell}$. Portanto existe pelo menos um λ_0 tal que

$$\underline{\mathscr{G}} = \begin{cases} (\mathscr{f}_1^{\ell}, \ldots, \phi, \ldots, \mathscr{f}_s^{\ell}) & \text{se } i(\lambda_0) = 1 \\ \\ (\mathscr{f}_1^{\ell}, \ldots, \mathscr{f}_{\lambda}^{\ell}(0), \ldots, \mathscr{f}_{\lambda}^{\ell}(\ell-k-1), \ldots, \mathscr{f}_s^{\ell}) & \text{se } i(\lambda_0) \geq 2. \end{cases}$$

Sejam $\tau(\underline{\mathscr{G}}) = (\tau_n', \tau_{n-1}', \ldots, \tau_1')$ e $\tau(\underline{\mathscr{f}}^{\ell}) = (\tau_n, \tau_{n-1}, \ldots, \tau_1)$ onde τ_j é o número de λ tal que $i(\lambda) = j$ [c.f.3].

Supondo $i(\lambda_0) = 1$, então $\underline{\mathscr{G}} = (\mathscr{f}_1^{\ell}, \ldots, \phi, \ldots, \mathscr{f}_s^{\ell})$ e $\tau(\underline{\mathscr{G}}) < \tau(\underline{\mathscr{f}}^{\ell})$.

Se $i(\lambda_0) \geq 2$ então

$$\underline{\mathscr{G}} = (\mathscr{f}_1^{\ell}, \ldots, \mathscr{f}_{\lambda}^{\ell}(0), \ldots, \mathscr{f}_{\lambda}^{\ell}(\ell-k-1), \ldots, \mathscr{f}_s^{\ell})$$

e para $1 \leq i \leq \lambda_0$, $\tau_j = \tau_j'$ e para

$i > \lambda_0$, $\tau_i > \tau_i'$ logo

$\tau(\underline{\mathscr{f}}^{\ell}) \underset{\neq}{>} \tau(\underline{\mathscr{G}})$.

Então dando uma ordem lexicográfica ao conjunto das sequências $(\tau_n, \ldots, \tau_1)$ pode-se enunciar o seguinte lema:

Lema 3.16: [c.f.3]. A desigualdade $(\tau_n, \ldots, \tau_1) \geq (\tau'_n, \ldots, \tau'_1)$ se verifica se e somente se pode-se achar i tal que $\tau_j = \tau'_j$ para $j<i$ e $\tau_i > \tau'_i$.

Corolário 3.17: [c.f.3]. Se $\underline{\mathcal{G}}$ é uma redução de $\underline{\mathcal{J}}^\ell$ e se $\underline{\mathcal{G}} \neq \underline{\mathcal{J}}^\ell$ então $\tau(\underline{\mathcal{G}}) \lneq \tau(\underline{\mathcal{J}}^\ell)$.

Resumindo, como $\underline{\mathcal{G}}$ é uma redução de $\underline{\mathcal{J}}^\ell$, então $\underline{\mathcal{G}}$ é obtido de $\mathcal{J}^\ell$ por reduções diretas sucessivas, logo existirá pelo menos um λ_0 no qual é feita a redução direta.

Lema 3.18: [c.f.3]. Seja $\underline{\mathcal{J}}^\ell = (\mathcal{J}_1^\ell, \ldots, \mathcal{J}_s^\ell)$ uma coleção de datuns o qual é amplo para A com respeito a base $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ $\underline{\mathcal{J}}^\ell$ não é irredutível. Seja v_i uma vizinhança de ξ_i, $i = 1,\ldots,n$. Então pode-se encontrar uma redução direta $\underline{\mathcal{G}}$ de $\underline{\mathcal{J}}^\ell$ e um conjunto não vazio aberto de V_i em v_i tal que existe uma base $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$, com η_i pertencente a V_i para a qual $\underline{\mathcal{G}}$ é amplo para A.

Prova: A aplicação $\rho^\ell_{\underline{\mathcal{J}}^\ell}$ de A em $P^\ell_{\underline{\mathcal{J}}^\ell} = \sum_{\lambda=1}^{s} P^\ell_{\mathcal{J}_\lambda}$ é injetiva, então pode-se considerar $\rho^\ell_{\underline{\mathcal{J}}^\ell}(A)$ como subespaço vetorial de $P^\ell_{\underline{\mathcal{J}}^\ell}$. Existe uma aplicação w de $E \otimes S^\ell(F)$ em $\mathbb{R}$, tal que w restrito a A é igual a zero.

Pela propriedade de divisibilidade de soma direta, existe uma aplicação b_λ de $P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_\lambda}$ em $\mathbb{R}$ tal que $w = \sum_{1\leq\lambda\leq s} b_\lambda \circ \rho^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_\lambda}$.

Notação: $b_\lambda (X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_{\ell-k_\lambda}} f_\lambda) = b_{\lambda_{i_1 \ldots i_{\ell-k_\lambda}}}$.

Seja $q = \min \{ i(\lambda) \ ; \ b_\lambda \neq 0\}$ que é diferente de zero porque $\underline{\mathcal{F}}^{\ell}$ não é irredutível ou seja

$$\rho^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}^{\ell}}(A) \subsetneq P^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}^{\ell}} = \sum_{\lambda=1}^{s} P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_\lambda}$$

Se $q = 1$ então $i(\lambda_0) = 1$ e $\dim P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_{\lambda_0}} = 1$, logo a condição $b_{\lambda_0} \neq 0$ significa que $P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_{\lambda_0}} \cap \operatorname{Im} \rho^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}^{\ell}}(A) = \{0\}$ pois como

já foi visto anteriormente $\rho^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_{\lambda_0}}(A)$ está contido em $P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_{\lambda_0}}$ e

como a dimensão de $P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_{\lambda_0}}$ é 1, a dimensão de $\rho^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_{\lambda_0}}(A)$ é 1 ou

zero. No entanto como b_λ é diferente de zero e $b_\lambda(A) = 0$

tem-se que a $\operatorname{Im} \rho^{\ell}_{\underline{\mathcal{F}}^{\ell}}(A) \cap P^{\ell}_{\mathcal{F}^{\ell}_{\lambda_0}} = \{0\}$

Então toma-se uma coleção de datuns $\mathcal{G}$, redução direta de $\underline{\mathcal{F}}^{\ell}$, tal que $\underline{\mathcal{G}} = (\mathcal{F}^{\ell}_1, \ldots, \hat{\mathcal{F}}^{\ell}_{\lambda_0}, \ldots, \mathcal{F}^{\ell}_s)$ de modo que $\underline{\mathcal{G}}$ é também amplo com relação a $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Logo o lema segue do lema[3.8].

Se $q = 2$ considere a base do tipo

$$\begin{cases} \eta_j = \xi_j & \text{se } j \neq 2 \\ \eta_2 = \xi_2 + \varepsilon_1 \xi_1 & \text{se } j = 2 \end{cases}$$ onde ε_1 é um número a

ser escolhido.

Denote por $\bar{g}^{\beta i_1 \ldots i_\ell}$ os coeficientes de g pertencentes a $E \otimes S^\ell(F)$ nos termos da base $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$, ou seja

$$g = \sum_{\substack{1 \leq \beta \leq m \\ 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_\ell \leq n}} \bar{g}^{\beta i_1 \ldots i_\ell} e_\beta \otimes \eta_{i_1} \cdot \ldots \cdot \eta_{i_\ell} .$$

Seja $i_1 = i_2 = \ldots = i_a = 1$ e suponhamos que

$i_{a+1} = i_{a+2} = i_{a+3} = 2$, $3 \leq i_{a+4} \leq \ldots \leq i_\ell$ então coloca-se

$\bar{g}^{\beta I_a, b, J_c} = \bar{g}^{i_1 \ldots i_\ell}$ onde $I_a = i_1, \ldots, i_a$, $J_c = i_{a+4}, \ldots, i_\ell$

então

$$g = \sum_{\substack{1 \leq \beta \leq m \\ 1 = i_1 = \ldots = i_a \\ 3 \leq i_{a+4} \leq \ldots \leq i_\ell}} \bar{g}^{\beta, I_a, 3, J_c} e_\beta \otimes \eta_{I_a} \cdot \eta_2^3 \cdot \eta_{J_c} .$$

Notação: $\eta_{I_a} = \eta_{i_1} \cdot \eta_{i_2} \cdot \ldots \cdot \eta_{i_a}$.

Logo:

$$g = \sum_{\substack{1\le\beta\le m\\ 1=i_1=\ldots=i_a\\ 3\le i_{a+4}\le\ldots\le i_\ell}} \bar{g}^{\beta I_a,3,J_c}\, e_\beta \otimes \xi_{I_a}\cdot(\xi_2+\varepsilon_1\xi_1)^3\cdot \xi_{J_c} =$$

$$= \sum_{\substack{1\le\beta\le m\\ 1=i_1=\ldots=i_a\\ 3\le i_{a+4}\le\ldots\le i_\ell}} \bar{g}^{\beta,I_a,i_{a+1},i_{a+2},i_{a+3},i_{a+4},\ldots i_\ell}\, e_\beta \otimes \xi_{I_a}(\xi_2\ \xi_2\ \ \xi_2+\varepsilon_1\xi_1\xi_2\xi_2+\ \xi_2\varepsilon_1\xi_1\xi_2+$$

$$+\ \varepsilon_1\xi_1\varepsilon_1\xi_1\xi_2\ +\xi_2\xi_2\varepsilon_1\xi_1\ +\ \varepsilon_1\xi_1\xi_2\varepsilon_1\xi_1\ +\ \xi_2\varepsilon_1\xi_1\varepsilon_1\xi_1\ +$$

$$+\ \varepsilon_1\xi_1\varepsilon_1\xi_1\varepsilon_1\xi_1)\cdot\ \xi_{i_{a+4}}\cdot\ldots\cdot\ \xi_{i_\ell}\ =$$

$$= \sum_{\substack{1\le\beta\le m\\ 1=i_1=\ldots=i_a\\ 3\le i_{a+4}\le\ldots\le i_\ell}} \bar{g}^{\beta,I_a,i_{a+1},i_{a+2},i_{a+3},i_{a+4},\ldots,i_\ell}\, e_\beta \otimes (\xi_{I_a}\xi_2\xi_2\xi_2\ +\xi_{I_a}\varepsilon_1\xi_1\xi_2\xi_2\ +\xi_{I_a}\xi_2\varepsilon_1\xi_1\xi_2\ +$$

$$+\ \xi_{I_a}\varepsilon_1\xi_1\varepsilon_1\xi_1\xi_2\ +\ \xi_{I_a}\xi_2\xi_2\varepsilon_1\xi_1\ +\ \xi_{I_a}\varepsilon_1\xi_1\xi_2\varepsilon_1\xi_1\ +\ \xi_{I_a}\xi_2\varepsilon_1\xi_1\varepsilon_1\xi_1\ +$$

$$+\ \xi_{I_a}\varepsilon_1\xi_1\varepsilon_1\xi_1\varepsilon_1\xi_1)\cdot\xi_{i_{a+4}}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_\ell}\ =$$

$$= \bar{g}^{\beta,I_a,2,2,2,i_{a+4},\ldots,i_\ell}\, e_\beta \otimes (\xi_{I_a}\cdot\xi_2\cdot\xi_2\cdot\xi_2\cdot\xi_{i_{a+4}}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_\ell})\ +$$

$$+\ \bar{g}^{\beta,I_a,1,1,2,2,i_{a+4},\ldots i_\ell}\, e_\beta \otimes (\ \xi_{I_a},\varepsilon_1,\xi_1,\xi_2,\xi_2,\xi_{i_{a+4}},\ldots,\xi_{i_\ell})+$$

$$+\ \bar{g}^{\beta I_a,2,1,1,2,i_{a+4},\dots,i_\ell}\ e_\beta \otimes (\xi_{I_a}\ \xi_2\varepsilon_1\xi_1\xi_2\xi_{i_{a+4}}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_\ell}) +$$

$$+\ \bar{g}^{\beta,I_a,1,1,1,1,2,i_{a+4},\dots,i_\ell}\ e_\beta \otimes (\xi_{I_a}\varepsilon_1\xi_1\varepsilon_1\xi_1\xi_2\xi_{i_{a+4}}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_\ell}) +$$

$$+\ \bar{g}^{\beta,I_a,2,2,1,1,i_{a+4},\dots,i_\ell}\ e_\beta \otimes (\xi_{I_a}\xi_2\xi_2\varepsilon_1\xi_1\xi_{i_{a+4}}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_\ell}) +$$

$$+\ \bar{g}^{\beta,I_a,1,1,2,1,1,i_{a+4},\dots,i_\ell}\ e_\beta \otimes (\xi_{I_a}\varepsilon_1\xi_1\xi_2\varepsilon_1\xi_1\xi_{i_{a+4}}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_\ell})+$$

$$+\ \bar{g}^{\beta,I_a,2,1,1,1,1,i_{a+4},\dots,i_\ell}\ e_\beta \otimes (\xi_{I_a}\xi_2\varepsilon_1\xi_1\varepsilon_1\xi_1\xi_{i_{a+4}}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_\ell}) +$$

$$+\ \bar{g}^{\beta,I_a,1,1,1,1,1,1,i_{a+4},\dots,i_\ell}\ e_\beta \otimes (\xi_{I_a}\varepsilon_1\xi_1\varepsilon_1\xi_1\varepsilon_1\xi_1\xi_{i_{a+4}}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_\ell}) =$$

$$=\ \bar{g}^{\beta I_a,2,2,2,i_{a+4},\dots,i_\ell}\ e_\beta \otimes (\xi_1\xi_2^3\ \xi_{i_{a+4}}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_\ell}) +$$

$$+ \bar{g}^{\beta,I_a,1,2,2,i_{a+4},\dots,i_\ell} \varepsilon_1 e_\beta \otimes (\xi_{I_{a+1}} \xi_2^2 \xi_{i_{a+4}} \cdot \dots \cdot \xi_{i_\ell}) +$$

$$+ \bar{g}^{\beta I_a,1,2,2,i_{a+4},\dots,i_\ell} \varepsilon_1 e_\beta \otimes (\xi_{I_{a+1}} \xi_2^2 \xi_{i_{a+4}} \cdot \dots \cdot \xi_{i_\ell}) +$$

$$+ \bar{g}^{\beta I_a,1,1,2,i_{a+4},\dots,i_\ell} \varepsilon_1^2 e_\beta \otimes (\xi_{I_{a+2}} \xi_2 \xi_{i_{a+4}} \cdot \dots \cdot \xi_{i_\ell}) +$$

$$+ \bar{g}^{\beta,I_a,1,2,2,i_{a+4},\dots,i_\ell} \varepsilon_1 e_\beta \otimes (\xi_{I_{a+1}} \xi_2^2 \xi_{i_{a+4}} \cdot \dots \cdot \xi_{i_\ell}) +$$

$$+ \bar{g}^{\beta I_a,1,1,2,i_{a+1},\dots,i_\ell} \varepsilon_1^2 e_\beta \otimes (\xi_{I_{a+1}} \xi_2 \xi_{i_{a+4}} \cdot \dots \cdot \xi_{i_\ell}) +$$

$$+ \bar{g}^{\beta I_a,1,1,2,i_{a+4},\dots,i_\ell} \varepsilon_1^2 e_\beta \otimes (\xi_{I_{a+2}}, \xi_2 \xi_{i_{a+4}} \cdot \dots \cdot \xi_{i_\ell}) +$$

$$+ \bar{g}^{\beta I_a,1,1,1,i_{a+4},\dots,i_\ell} \varepsilon_1^3 e_\beta \otimes (\xi_{I_{a+3}} \xi_{i_{a+4}} \cdot \dots \cdot \xi_{i_\ell}) =$$

$$= \bar{g}^{\beta,I_a,2,2,2,i_{a+4},\dots,i_\ell} \; e_\beta \otimes (\xi_{I_a} \, \xi_2^3 \, \xi_{i_{a+4}} \cdot \ldots \cdot \xi_{i_\ell}) +$$

$$+ \bar{g}^{\beta,I_a,1,2,2,i_{a+4},\dots,i_\ell} \; 3\,\varepsilon_1 \, e_\beta \otimes (\xi_{I_{a+1}} \, \xi_2^2 \, \xi_{i_{a+4}} \cdot \ldots \cdot \xi_{i_\ell}) +$$

$$+ \bar{g}^{\beta,I_a,1,1,2,i_{a+4},\dots,i_\ell} \; 3\,\varepsilon_1^2 \, e_\beta \otimes (\xi_{I_{a+1}} \cdot \xi_2 \cdot \xi_{i_{a+4}} \cdot \ldots \cdot \xi_{i_\ell}) +$$

$$+ \bar{g}^{\beta I_a,1,1,1,i_{a+4},\dots,i_\ell} \; \varepsilon_1^3 \, e_\beta \otimes (\xi_{I_{a+3}} \, \xi_{i_{a+4}},\ldots,\xi_{i_\ell}) \; .$$

Seja

$$\bar{g}^{\beta,I_a,2,2,2,i_{a+4},\dots,i_\ell} = \bar{g}^{\beta,I_a,2,2,2,i_{a+4},\dots,i_\ell}$$

$$\bar{g}^{\beta,I_a,1,2,2,i_{a+4},\dots,i_\ell} = \bar{g}^{\beta,I_a,1,2,2,i_{a+4},\dots,i_\ell} \; 3\,\varepsilon_1$$

$$\bar{g}^{\beta,I_a,1,1,2,i_{a+4},\dots,i_\ell} = \bar{g}^{\beta,I_a,1,1,2,i_{a+4},\dots,i_\ell} \; 3\,\varepsilon_1^2$$

$$\bar{g}^{\beta,I_a,1,1,1,i_{a+4},\dots,i_\ell} = \bar{g}^{\beta,I_a,1,1,1,i_{a+4},\dots,i_\ell} \; \varepsilon_1^3 \; .$$

De um modo geral, analisando para o caso $q > 2$, o somatório acima adquire a seguinte forma

$$g^{\beta L_t,u,J_c} = \sum_{H_s} \bar{g}^{\beta,I_a,b,J_c} \varepsilon_{H_s} ,$$

onde $b = \ell - c - a$, $t = a + s$ e Σ é para todo (I_a, H_s) tal que L_t é uma permutação de $I_a H_s$ sendo

$H_s = h_1 ,\ldots, h_s$, $1 \leq h_1 \leq\ldots\leq h_s \leq q-1$, $0\leq s\leq b$ e $b\geq u$.

Seja $f_\lambda = \eta_q^{u_\lambda} \eta_{J_\lambda}$ onde $J_\lambda = j_{\lambda_1}\ldots j_{\lambda_c}$

com $q < j_{\lambda_1} \leq \ldots \leq j_{\lambda_c}$.

Portanto

$$\sum_{\lambda=1}^{s} b_\lambda \circ \rho^{\ell}_{\not{f}^{\ell}_{\lambda}} = \sum_{\lambda=1}^{s} b_{\lambda L_t,u} \quad g^{\alpha(\lambda)L_t,u+u_\lambda,J_\lambda} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{s} b_{\lambda L_t,u} \quad \bar{g}^{\alpha(\lambda)I_a,b+u_\lambda,J_\lambda} \text{ ,onde}$$

$$\bar{b}_{\lambda,I_a,b} = \sum_{\lambda=1}^{s} b_{\lambda L_t,u} \quad \varepsilon_{H_s} \qquad u = \ell-k_\lambda-t,$$

o somatório é para todo (L_t, H_s) tal que L_t é uma permutação de $I_a H_s$.

Em um caso particular

se $I_a = \phi$ $\quad \bar{b}_{\lambda,\phi,\ell-k_\lambda} = \sum_{\substack{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_t\leq q-1 \\ t\leq \ell-k_\lambda}} b_{\lambda i_1\ldots i_t,\ell-k_\lambda-t} \, \varepsilon_{i_1}\ldots\varepsilon_{i_t}$

Escolhendo ε_i tal que

$$\bar{b}_{\lambda_{0,\phi,\ \ell-k_\lambda}} \neq 0 \qquad [\ 3.19\ ]$$

$$b_{\lambda_0 i_1 \ldots i_t, \ell-k_{\lambda_0}-t} = b_{\lambda_0}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_t}, X_q, \ldots, X_q) \neq 0 \,.$$

Seja $\bar{\rho}^{\ell}_{\mathscr{f}^{\ell}}$ de $E \otimes S\ (F)$ em $P^{\ell}_{\mathscr{f}^{\ell}}$,

$i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_t \leq q-1$ na base $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$.

Por [3.19] então $X_q^{\ell-k_{\lambda_0}} f_{\lambda_0}$ não pertence a

Im $\bar{\rho}^{\ell}_{\mathscr{f}^{\ell}}$ (A).

Tem-se então uma coleção $\mathscr{G}$ de datuns que é uma redução direta de $\mathscr{f}^{\ell}$ em λ_0. Então $\mathscr{G}$ é amplo sobre A com relação a base $\{\eta_1 \ldots \eta_n\}$.

* * *

CAPÍTULO IV

Neste capítulo se dará uma demonstração do teorema do prolongamento.

Seja $f_i^{(1)} = X_i$. Então a coleção $\mathscr{F}^{(1)} = (\mathscr{F}^{(1)}_{(1,\alpha)}, \ldots \mathscr{F}^{(1)}_{(n,\alpha)}, \ldots)$ onde $\mathscr{F}^{(1)}_{(i,\alpha)} = (f_i^{(1)}, i, \alpha)$ é amplo para A_ℓ (def.[1.1]) com relação a base $\xi_1, \ldots, \xi_n$, para todo $\ell \geq 2$, porque

$$p^\ell_{\mathscr{F}^{(1)}_\Gamma} = p^\ell_{\mathscr{F}^{(1)}_{(1,1)}} + p^\ell_{\mathscr{F}^{(1)}_{(2,1)}} + \ldots + p^\ell_{\mathscr{F}^{(1)}_{(n,1)}} + p^\ell_{\mathscr{F}^{(1)}_{(1,2)}} + \ldots + p^\ell_{\mathscr{F}^{(1)}_{(n,m)}}$$

e cada $p^\ell_{\mathscr{F}^{(1)}_{(m,j)}}$ é isomorfo a $p^\ell[X_1, \ldots, X_n]$ espaço dos polinômios homogêneos de grau ℓ.[c.f. 3] .

Então se pode tomar abertos não vazios $v_1^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)}$ e uma redução $\mathscr{G}^{(1)}$ de $\mathscr{F}^{(1)}$ por reduções diretas sucessivas tais que, para alguma escolha de $\xi_i^{(1)}$ pertencente a $v_i^{(1)}$, $\mathscr{G}^{(1)}$ é amplo e irredutível para A_2, conforme o lemma [3.18]. Então, pelo [3.6], $\mathscr{G}^{(1)}$ é amplo para $p(A_2)$ e como $p(A_2) \supseteq A_3$, $\rho^\ell_{\mathscr{G}^{(1)}}$ restrito a A_3 é uma aplicação linear injetiva, portanto $\mathscr{G}^{(1)}$ é amplo para A_3, sendo por [3.6] amplo para $p(A_3)$. Agora, pelo lemma [3.18], pode-se encontrar abertos $V_i^{(2)} \subseteq v_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, n$, e uma redução $\mathscr{G}^{(2)}$ de $\mathscr{G}^{(1)}$ tais que $\mathscr{G}^{(2)}$ é amplo e irredutível para A_3 para algum $\xi_i^{(2)}$ pertencente a $v_i^{(2)}$. Então, da mesma forma, tem-se uma sequencia de abertos não vazios $v_i^{(1)} \supseteq v_i^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq v_i^{(\ell)} \supseteq v_i^{(\ell+1)} \supseteq \ldots$ e uma coleção de datuns $\mathscr{G}^{(\ell)}$ tal que $\mathscr{G}^{(\ell+1)}$ é uma redução de $\mathscr{G}^{(\ell)}$ e para algum $\xi_i^{(\ell)} \in v_i^{(\ell)}$, $\mathscr{G}^\ell$ é amplo e irredutível para $A_{\ell+1}$ com relação a $\xi_1^{(\ell)}, \ldots, \xi_n^{(\ell)}$.

Seja $\tau(\ell)$ a característica de $\mathcal{G}^{(\ell)}$. Então por [3.16] $\tau(\mathcal{G}) \gneqq \tau(\mathcal{F})$ e $\tau^{(1)} \geq \tau^{(2)} \geq \ldots \geq \tau^{(\ell)} \geq \tau^{(\ell+1)} \geq \ldots$, porque cada $\tau i = (\tau_n^{(i)}, \ldots, \tau_1^{(i)})$ $\tau_j^i \leq$ n.m, então existe ℓ_1 tal que $\tau^{\ell_1} = \tau^{(\ell_1+k)}$ $k \geq 1$, portanto por |3.16| $\mathcal{G}^{(\ell)} = \mathcal{G}^{(\ell+1)}$ onde $\ell \geq \ell_1$.

Como $\mathcal{G}^{(\ell)}$ é amplo para $p(A_\ell)$ pelo lema [3.6] e $\dim. p(A_\ell) \leq \sum_{\lambda=1}^{s} \tau_{i(\lambda)}\, d(i(\lambda), \ell+1-k_\lambda)$ pela proposição [2.2] , onde $\mathcal{G}^{\ell} = \mathcal{G}^{(\ell+1)} = (\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_s)$.

Pela mesma proposição $\dim. A_{\ell+1} = \sum_{\lambda=1}^{s} = \tau_{i(\lambda)} d(i(\lambda), \ell+1-k_\lambda)$

Como $A_{\ell+1} \subset p(A_\ell)$ para todo $\ell \geq \ell_1$ e dim. $A_{\ell+1} = \dim. p(A_\ell)$ segue que $A_{\ell+1} = p(A_\ell)$ $(\ell \geq \ell_1)$.

Seja $\mathcal{G}^{(\ell)} = \mathcal{F}^{\ell} = (\mathcal{F}_\lambda^{\ell})$ para todo $\ell \geq \ell_1$ e ξ_i pertencente a $\nu_i^{(\ell)}$. Define-se $A_{\ell,i} = A_\ell \cap (E \otimes S^\ell(F_i))$. Por:

$$\rho^{\ell}_{\mathcal{G}_\lambda}(A_{\ell,i}) = \begin{cases} \leq P^{\ell}_{\mathcal{G}_\lambda}[X_i \ldots X_{i(\lambda)}] & \text{se } i \leq (i(\lambda)) \\ = \{0\} \text{ se } i > i(\lambda), \end{cases}$$

então para $i \leq i(\lambda)$, como $\mathcal{G}$ é amplo

$$\dim. A_{\ell,i} \leq \sum_{\lambda=1}^{s} \tau_{i(\lambda)-i+1}\, d(i(\lambda)-i+1, \ell-k_\lambda).$$

Então $\sum_{i=1}^{n} \dim A_{\ell,i} \leq$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{s} \tau_{(i(\lambda)-i+1)}\, d(i(\lambda)-i+1,\ \ell-k_\lambda) =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{i=1}^{i(\lambda)} \tau_{(i(\lambda)-i+1)}\, d(i(\lambda)-i+1,\ \ell-k_\lambda) =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{s} \tau_{i(\lambda)}\, d(i(\lambda),\ \ell+1-k_\lambda)$$

porque $d(1,\ell) + d(2,\ell) + \ldots + d(k,\ell) = d(k,\ell+1)$.

Por outro lado, $\ell \geq \ell_1$

$$\dim.p(A_\ell) = \dim.A_{\ell+1} = \sum_{\lambda=1}^{s} \tau_{i(\lambda)}\, d(i(\lambda),\ell+1-k_\lambda) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{s} \dim.A_{\ell,i}$$, pela proposição [2.2].

Desde que $\dim.p(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \dim.A_{\ell,i}$ então

$\dim.p(A_\ell) = \sum_{i=1}^{n} \dim.A_{\ell,1}$, isto é, A_ℓ é involutivo, o que demonstra o seguinte teorema:

TEOREMA DO PROLONGAMENTO: [c.f.3] Sejam $A_\ell \subseteq E \otimes S^\ell(F)$ para $\ell = 1,2,\ldots,$ subespaços vetoriais, tais que $A_{\ell+1} \subseteq p(A_\ell)$ para todo ℓ . Existe um ℓ_1 inteiro tal que para todo $\ell \geq \ell_1$ A_ℓ é involutivo e igual a $p(A_{\ell-1})$.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI - "Elements de Mathématique Algebre". Chap. I, II, III (1970), Edição Nº 2290.

[2] E. CARTAN - "Sur la structure des groupes infinis de transformations". Anl. Ec. Normale t. 21 (1904), pp. 219 - 308.

[3] I. HAYASHI - "An elementary proof of prolongation theorem". (A ser publicado).

[4] M. KURANISHI - "Lectures on involutive systems of partial differential equations". Public. Soc. Math. São Paulo (1967).

[5] E. L. LIMA - "Cálculo tensorial". Notas de matemática Nº 32 IMPA - (1965).