



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC
Departamento de Matemática



Coordenadas Fricke e Empacotamentos Hiperbólicos de Discos[†]

Mercio Botelho Faria

mercio@gmail.com

Tese de Doutorado

Orientador: **Prof. Doutor Marcelo Firer**

07 de março de 2005
Campinas - SP

[†] Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP - processo 00/12468-7.

*Coordenadas Fricke e Empacotamentos
Hiperbólicos de Discos*

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Mercio Botelho Faria** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 07 de março de 2005.



Prof. Dr. **Marcelo Firer**
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Firer IMECC - UNICAMP

Prof. Dr. Osvaldo Germano do Roccio UEM-PR

Prof(a). Dr(a). Simone Maria de Moraes UFV-MG

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Junior FEEC - UNICAMP

Prof. Dr. Pedro J. Catuogno IMECC - UNICAMP

Prof. Dr. Nir Cohen (Suplente) IMECC - UNICAMP

Prof(a). Dr(a). Sueli Irene Rodrigues Costa (Suplente) IMECC - UNICAMP

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção de Título de **Doutor em Matemática**.

2ª CHAMADA	
+1/UNICAMP	
F225c	
EX	
OMBO BCI	63166
ROC.	16-P-00086-05
C ☐	D ☒
PREÇO	11,00
DATA	15/04/05
1ª CPD	

+ 1 CD-ROM

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

3131D - 348229

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves - CRB8a / 5904

Faria, Mercio Botelho

F225c Coordenadas Fricke e Empacotamentos Hiperbólicos de Discos /
Mercio Botelho Faria – Campinas, [S.P.:s.n.], 2005.

Orientador: Marcelo Firer

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria hiperbólica. 2. Empacotamento e cobertura combinatória.
3. Riemann, Superfícies de. 4. Teichmüller, Espaços de. 5. Grupos discretos
(Matemática). I. Firer, Marcelo. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Fricke coordinates and hyperbolics packings of balls

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Hyperbolic geometry. 2. Spheres packing
and converging combinatory. 3. Riemann surfaces. 4. Teichmüller spaces. 5. Discrete
groups.

Área de concentração: Geometria

Titulação: Doutor em matemática

Banca examinadora: 1. Prof. Dr. Osvaldo Germano do Roccio (UEM)
2. Prof(a). Dr(a). Simone Maria de Moraes (UFV)
3. Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Junior (UNICAMP)
4. Prof. Dr. Pedro José Catuogno (UNICAMP)

Data da defesa: 07/03/2005

Título: *Coordenadas Fricke e Empacotamentos Hiperbólicos de Discos*
Autor: *Mercio Botelho Faria*

Tese de Doutorado defendida em 07 de março de 2005 e aprovada
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



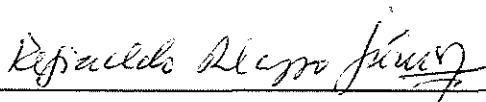
Prof. Dr. **Marcelo Firer**
Departamento de Matemática - IMECC - UNICAMP



Prof. Dr. **Osvaldo Germano do Roccio**
Departamento de Matemática - UEM



Prof((a). Dr(a). **Simone Maria de Moraes**
Departamento de Matemática - UFV



Prof. Dr. **Reginaldo Palazzo Junior**
Departamento de Telemática - FEEC - UNICAMP



Prof. Dr. **Pedro J. Catuogno**
Departamento de Matemática - IMECC - UNICAMP

À minha mãe **Jovelina Alves de Faria Botelho** (in memorian),
ao meu pai **Joanillo Antônio Botelho**,
ao meu irmão **Mosar Faria Botelho**,
e à minha companheira de batalhas **Érica Karine Ramos Queiroz**.

DEDICO

Agradecimentos

Ao meu Deus, pela presença constante em minha vida e por ter me dado saúde, força e esperança nos momentos difíceis desta caminhada.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro (Processo 00/12468-7) concedido durante o período de março de 2001 a fevereiro de 2005, sem o qual não seria possível a realização do Programa de Doutorado em Matemática.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Firer, por sua sabedoria, compreensão, conselhos e amizade que pude contar durante todo o trabalho.

Ao Prof. Dr. Pedro J. Catuogno pelas idéias sugeridas desde o trabalho de mestrado, que aguçaram nossa curiosidade.

Aos amigos Ercílio e Paulo César pelo companheirismo e aprendizagem compartilhados durante este processo. Em particular ao PC pela revisão do texto.

Ao Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr. por encontrar tempo para as nossas discussões teóricas. Além disto, agradeço pela confiança depositada em nós e por acreditar na possibilidade da realização deste trabalho.

À minha esposa Erica Karine Ramos Queiroz pelo companheirismo e amizade ao longo deste período. Em particular, pela revisão gramatical deste texto.

À amiga Irene Onische pela amizade e aprendizagem compartilhados ao longo dos cursos.

Ao amigo Ricardo Menezes Salgado pelos sábados que passamos configurando o micro e instalando os softwares que tanto usei durante este trabalho.

Ao amigo Mário, pela companhia e oportunidade de estarmos avançando juntos na busca por novos conhecimentos.

À Prof. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa pelos convites para as exposições no grupo de trabalho que está coordenando.

Aos funcionários da secretaria de pós-graduação: Edinaldo, Cidinha e Tânia pela amizade e por todo o apoio durante o doutorado.

Às amigas Daniela e à "Cristiane (Juiza)" pela dicas na elaboração dos relatórios e pela amizade.

Aos amigos do "predinho" que convivi durante estes quatro anos. Em especial às pessoas com quem divide sala; Marcela L. Vilela de Souza, Daniela M. Silva Vieira, Daniel Peregrino e Juan.

Aos funcionários da biblioteca do IMECC, por serem tão eficientes. Em particular eu agradeço a Claudia, Osvaldino, Reginaldo, Ruth e Silvania pela paciência e atenção.

Aos funcionários do setor de informática pela presteza. Em particular à Samira pela paciência.

Aos Professores da Universidade Federal de Viçosa pela aprendizagem durante a graduação. Em particular aos profs. Drs. Olímpio Hiroshi Miyagaky e Simone Moraes, pelo incentivo constante.

Ao parecerista FAPESP que acompanhou o desenvolvimento deste trabalho desde seu projeto inicial, pela competência demonstrada em seus pareceres.

Ao Prof. Dr. Nir Cohen pelas discussões teóricas.

À banca examinadora por aceitarem o convite.

Ao amigo Edson Augustini pelas conversas agradáveis e pelas discussões teóricas.

Ao amigo Jaques Silveira Lopes pela amizade e companheirismo que pude contar ao longo dos 70% do meu período estudantil.

Aos amigos e irmãos da Igreja Batista; Claudemir Campagnoli e Marlene, Nicanor e Sônia, Marcos e Daeni. Em particular ao Claudemir pela sabedoria nos conselhos que recebi nos momentos difíceis.

Aos amigos do período de república; Roberto Carlos A. Thome, Wellington Faria e Roger Peres Moura por receberem meu pai de forma tão bacana e gentil no período em que esteve hospitalizado aqui em Campinas.

Ao pastor Paulo Petrizzi e Valéria pelos ensinamentos no período de convivência.

Ao Eduardo (in memoriam) pelo grande amigo que foi num dos momentos mais difíceis da minha vida: o período da morte de minha mãe em Caratinga.

Ao grupo do futebol dos sábados à tarde: Ademir Pastor, Alonso, Ângelo Martarelli, Ednei, Evandro Carlos Ferreira, Edson Licurgo, João de Deus, João Eloir Strapasson, Laércio Santos, Luizinho, Marcelo Furtado, Marcelo Fidelis (Romário), Marcos M S, Francisco Odair, Rinaldo, Roger Perez Moura, Clécio e Fábio Pereira.

Resumo

Este trabalho busca elementos para se determinar a densidade de empacotamento de esferas definida por reticulados no plano hiperbólico.

Consideramos o espaço de teichmüller $\mathcal{T}_g$ de todas as superfícies orientadas compactas e fechadas de gênero $g \geq 2$, as quais tem o plano hiperbólico como recobrimento universal riemanniano. É conhecido o sistema de coordenadas Fricke em $\mathcal{T}_g$ que associa a cada superfície um domínio fundamental de Voronoi-Dirichlet dado por um polígono convexo com $4g$ arestas. Sabemos que, fixado o gênero, a densidade cresce com o número de arestas do domínio de Voronoi-Dirichlet escolhido, de modo que é natural a busca por polígonos com um número máximo de arestas associado ao gênero dado, que é sempre limitado por $12g - 6$.

Neste trabalho, determinamos as coordenadas Fricke em $\mathcal{T}_g$ que associa a cada superfície um domínio de Voronoi-Dirichlet com $4g + 2$ e $12g - 6$ arestas. Além disso, determinamos e implementamos algoritmos para a determinação dos círculos inscrito e circunscrito de um polígono (em superfícies de curvatura constante). Estes algoritmos, em sua generalidade tem complexidade $O(n^4)$ mas, restringindo os polígonos a vizinhanças abertas de um polígono dado, possui complexidade $O(n)$, situação ótima.

A determinação dos domínios de Voronoi-Dirichlet e dos círculos inscritos permitem definir a densidade de empacotamento diretamente nos espaços de teichmüller através de um sistema de equações polinomiais.

Palavras-chave: geometria hiperbólica, isometria, transformações de Möbius, empacotamento de esferas e cobertura combinatória, grupos discretos, espaços de teichmüller, espaços Fricke, superfícies de Riemann.

Abstract

This work searches elements to determine the packing density of spheres defined by lattices in the hyperbolic plane.

We consider the teichmüller space $\mathcal{T}_g$ of all closed compacts oriented surfaces of genus $g \geq 2$, which has the hyperbolic plane as universal covering riemannian surface. It is known that the system of Fricke coordinates in $\mathcal{T}_g$ associates each surface to a fundamental of Voronoi-Dirichlet domain, given by convex polygon with $4g$ edges. We know that, with fixed genus, the density increases with the number of edges of the chosen Voronoi-Dirichlet domain. Thus it is natural looking for polygons with a maximum number of edges associated to a given genus, which is always limited by $12g - 6$.

In this work, we determine Fricke coordinates in $\mathcal{T}_g$ which associates each surface to a Voronoi-Dirichlet domain with $4g + 2$ and $12g - 6$ edges. Furthermore, we determine and we program the algorithms for determination of the inscribed and circumscribed circles of a polygon (in surfaces of constant curvature). These algorithms, have complexity $O(n^4)$, but when restricted to open neighbourhoods of a given polygon, have complexity $O(n)$, best situation.

The determination of the Voronoi-Dirichlet domain from the inscribed circles permits to define the packing of density directly on teichmüller spaces through a polynomials of system equations.

Key-words: hyperbolic geometry, isometry, Möbius transformation, Fuchsian group, spheres packings and covering combinatory, discrete groups, teichmüller spaces, Fricke spaces, Riemann surfaces.

Sumário

Agradecimentos	ix
Resumo	xi
Abstract	xiii
Lista de Símbolos	xvii
Lista de Figuras	xix
Introdução	xxi
1 Superfícies Hiperbólicas	1
1.1 Superfícies de Riemann, Grupos Fuchsianos	1
1.1.1 Representação de superfícies de Riemann como espaços quociente	6
1.1.2 Transformações de Möbius	7
1.1.3 Modelos fuchsianos	10
1.2 Espaço de teichmüller	14
1.2.1 Espaço de teichmüller $\mathcal{T}_g$	16
1.2.2 Espaço de teichmüller $\mathcal{T}(R)$	16
1.2.3 Espaço Fricke	17
1.2.4 Normalização de modelos Fuchsianos	24
1.3 Geometria Hiperbólica Plana	25
1.3.1 Trigonometria hiperbólica	31
2 Empacotamento de Esferas	35
2.1 Empacotamento de Esferas em Espaços Métricos	36
2.1.1 Densidade de empacotamentos em $\mathbb{R}^n$	38
2.1.2 Densidade de empacotamentos em $\mathbb{H}^n$	39

2.1.3	Densidade simplicial	40
2.2	Resultados Recentes	43
3	Espaços Fricke - Variações e Parametrizações	45
3.1	Coordenadas Fricke Associadas a Polígonos com $4g + 2$ Arestas	46
3.1.1	O Polígono fundamental P_{4g+2}	52
3.2	Coordenadas Fricke Associadas a Polígonos com $12g - 6$ Arestas . . .	53
3.2.1	O polígono fundamental P_{12g-6}	66
4	Círculo Máximo Inscrito e Círculo Mínimo Circunscrito	73
4.1	Determinação do Círculo Máximo Inscrito	75
4.1.1	Algoritmo de Karkazis e Karagiorgis	80
4.1.2	Algoritmo para determinação de um CMI	83
4.1.3	Análise de complexidade	90
4.2	Determinação do Círculo Mínimo Circunscrito	92
4.2.1	Determinação do CMC	92
4.2.2	Algoritmo para determinação do CMC	94
A	Apêndice	97
A.1	Bissetores e Mediatrizes no Plano Hiperbólico $\mathbb{H}^2$	97
A.1.1	Geodésicas disjuntas	100
A.1.2	Geodésicas paralelas	104
A.1.3	Geodésicas concorrentes	106
A.1.4	Mediatriz hiperbólica	109
A.2	Algoritmos Implementados no Mathematica	111
	Referências Bibliográficas	143
	Índice Remissivo	146

Lista de símbolos

$Aut(\mathbb{C})$	grupo de autormorfismo biholomorfos de $\mathbb{C}$
$Aut(\widehat{\mathbb{C}})$	grupo de autormorfismo biholomorfos de $\widehat{\mathbb{C}}$
$Aut(\mathbb{D}^2)$	grupo de autormorfismo biholomorfos de $\mathbb{D}^2$
$Aut(\mathbb{H}^2)$	grupo de autormorfismo biholomorfos de $\mathbb{H}^2$
$\mathcal{B}$	empacotamento de esferas
B_r	bola de raio r
BCA	barreira candidata associada
$\mathbb{C}$	plano complexo
$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	esfera de Riemann
C	densidade de uma cobertura qualquer
C_{Γ}	densidade de uma cobertura reticulado
CMI	círculo máximo inscrito num polígono
CMC	círculo mínimo circunscrito
CR	círculo rolante
$C(c, r)$	círculo com centro c e raio r
D	densidade de um empacotamento qualquer
D_{Γ}	densidade de um empacotamento reticulado
$\mathcal{D}_p(\Gamma)$	domínio de Voronoi-Dirichlet centrado em p de Γ
$\mathbb{D}^2$	plano hiperbólico - Modelo de Poincaré
$\partial\mathbb{D}^2$	fronteira de $\mathbb{D}^2$
$\overline{\mathbb{D}^2} = \partial\mathbb{D}^2 \cup \mathbb{D}^2$	plano hiperbólico extendido
$d_{\mathbb{D}^2}$	distância hiperbólica em $\mathbb{D}^2$
$d_{\mathbb{H}^2}$	distância hiperbólica em $\mathbb{H}^2$
$d_n(r)$	densidade simplicial em $\mathbb{E}^n$
$\mathbb{E}^n$	é um dos espaços $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$
F	transformação de Möbius entre os modelos $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$
$\mathcal{F}_{4g}$	espaço Fricke associado a polígonos com $4g$ arestas

$\mathcal{F}_{4g+2}$	espaço Fricke associado a polígonos com $4g + 2$ arestas
$\mathcal{F}_{12g-6}$	espaço Fricke associado a polígonos com $12g - 6$ arestas
$\mathbf{F}_{4g}$	coordenadas Fricke associado a polígonos com $4g$ arestas
$\mathbf{F}_{4g+2}$	coordenadas Fricke associado a polígonos com $4g + 2$ arestas
$\mathbf{F}_{12g-6}$	coordenadas Fricke associado a polígonos com $12g - 6$ arestas
Φ_{4g+2}	emparelhamento de arestas do polígono P_{4g+2}
Φ_{12g-6}	emparelhamento de arestas do polígono P_{12g-6}
Γ	grupo Fuchsiano
Γ_{4g+2}	grupo gerado pelas funções de emparelhamento de P_{4g+2}
Γ_{12g-6g}	grupo gerado pelas funções de emparelhamento de P_{12g-6}
$\mathbb{H}^2$	plano hiperbólico - Modelo de Lobatchevsky
$\partial\mathbb{H}^2$	fronteira de $\mathbb{H}^2$
$\overline{\mathbb{H}^2} = \partial\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{H}^2$	plano hiperbólico estendido
$Isom(\mathbb{H}^2)$	grupo de isometrias de $\mathbb{H}^2$
$Isom(\mathbb{D}^2)$	grupo de isometrias de $\mathbb{D}^2$
$ld_n(r)$	densidade local de um empacotamento em $\mathbb{H}^n$ com bolas de raio r
P_{4g+2}	polígono com $4g + 2$ arestas
P_{12g-6}	polígono com $12g - 6$ arestas
PBT	ponto base de tangência
PPT	ponto piloto de tangência
$\pi_1(R, p_0)$	grupo fundamental de R com ponto base p_0
R	superfície de Riemann
R_g	superfície de Riemann de gênero g
$\tilde{R}$	superfície de recobrimento
$\mathbb{R}^n$	espaço euclidiano n -dimensional
$R(c)$	semi-reta em iniciada c ($c \in \mathbb{R}$) contida em $\mathbb{H}^2$
$S_{reg}(\alpha)$	simplexo regular com ângulo diedral α
$SL(2, \mathbb{R})$	grupo das matrizes 2×2 com determinante 1
$\mathcal{T}_g$	espaço de teichmüller de gênero g
$\mathcal{T}(R)$	espaço de teichmüller de uma superfície de Riemann R

Lista de Figuras

1.1	Superfície de Riemann, R_4 , de gênero $g = 4$	15
1.2	Polígono fundamental associado a R_4	15
1.3	Um emparelhamento com $4g$ arestas para $g = 4$	21
1.4	Ilustração do emparelhamento para $g = 4$	22
1.5	Polígonos gerados pelo Mathematica para $g = 2$ e $g = 4$	24
1.6	Geodésicas de $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$	26
3.1	Emparelhamento de polígonos com $4g + 2$ arestas, sendo $g = 4$	47
3.2	Ilustração do emparelhamento $12g-6$ para $g = 6$	72
4.1	Exemplo de: (a) um CR e sua árvore dos centros e (b) Trajetoria do CR	76
4.2	PBT e PPT convergindo para um vértice convexo - E o CR frente . . .	76
4.3	Exemplo dos pontos críticos	77
4.4	(a) A base e o piloto são arestas; (b) A base é uma aresta e o piloto um vértice não-convexo; (c) Base e pilotos são vértices não convexos . . .	78
4.5	Como encontrar os pontos críticos c_p	79
4.6	A área ativa A_a	79
4.7	Ilustrando a demonstração do teorema	85
A.1	Exemplo ilustrando a obtenção de (A.2)	99
A.2	Geodésicas disjuntas, paralelas e concorrentes	101
A.3	Bissetrizes de geodésicas disjuntas	103
A.4	Bissetrizes de geodésicas paralelas	105
A.5	Bissetrizes de geodésicas concorrentes	108
A.6	Exemplos gerados pelos algoritmos CMIE e CMIH	141
A.7	Exemplos gerados pelos algoritmos CMCE e CMCH	142

Introdução

O *problema de empacotamento de esferas* é um dos mais famosos e explorados problemas da matemática moderna. Embora as principais questões relacionadas ao problema não tenham respostas conclusivas: soluções gerais são conhecidas apenas em dimensão 1 (caso trivial), 2 (caso elementar) e 3 [21], e embora estas tenham sido conjecturadas por Kepler e Gauss, foram demonstradas apenas nas décadas de 20 e 90 do século XX. A literatura acerca do tema é imensa e pode-se ter um apanhado geral muito amplo e bastante atual a partir do trabalho enciclopédico de Sloane e Conway [9].

O problema de empacotamento de esferas, assim como os problemas correlatos de recobrimento, número de adjacência, quantização e codificação de canal estão intimamente relacionados às questões de teoria da codificação ([18],[34],[44]). Em particular, enquanto o raio do círculo inscrito é o parâmetro a ser maximizado no problema de empacotamento, a probabilidade de erro é o principal parâmetro a ser minimizado no problema de codificação de canal. Além disto, se considerarmos um canal discreto binário (ou q -ário), a busca de códigos corretores de erros nada mais é que o estudo de um caso discreto de empacotamento de esferas ([9],[29]).

Neste trabalho relacionamos o estudo de empacotamento de esferas com a teoria de teichmüller, através de um algoritmo que nos permite avaliar a densidade de empacotamento para os pontos no espaço de teichmüller. Também fizemos um estudo detalhado de novas coordenadas Fricke para os espaços de teichmüller, permitindo-nos assim projetar os pontos do espaço de teichmüller no espaço dos polígonos com $4g + 2$ e $12g - 6$ ($g \in \mathbb{N}$) arestas (Capítulo 3).

Esta construção algorítmica gerou em sua estrutura interna, dois algoritmos: um algoritmo para calcular o círculo máximo contido num polígono e outro para calcular o círculo mínimo contendo o polígono (Capítulo 4). Estes foram implementados no programa Mathematica para os planos euclidiano e hiperbólico (Apêndice).

Antes de iniciarmos o trabalho propriamente dito, apresentamos um resumo de cada um dos capítulos, suas seções e subseções.

Superfícies Hiperbólicas

O primeiro capítulo é de caráter introdutório e está dividido em três seções. A elaboração deste contou com a ajuda dos seguintes textos: [2], [4], [6], [7], [8], [18], [23], [35] e [37].

Na primeira seção, discorremos sobre superfícies de Riemann, grupos fuchsianos, representação de superfícies de Riemann como espaços quociente, transformações de Möbius e modelos fuchsianos. Em cada um destes, exibimos as definições e os resultados relevantes ao desenvolvimento do trabalho. Destacamos a parte de transformações de Möbius que procuramos abordar de forma bastante completa.

A segunda seção apresenta os espaços de teichmüller $\mathcal{T}_g$ e $\mathcal{T}(R)$. Também exibimos as coordenadas Fricke $\mathcal{F}_{4g}$ para os espaços de teichmüller, assumindo valores em $\mathbb{R}^{6g-6}$, $g \geq 2$. Concluimos esta seção com uma subseção sobre normalização de modelos fuchsianos.

Finalmente, na terceira seção, tratamos de elementos básicos de geometria hiperbólica plana, apresentando os modelo do plano de Lobatchevski e do disco de Poincaré além de alguns resultados importantes para o desenvolvimento deste texto.

Empacotamento de Esferas

No segundo capítulo apresentamos as definições de empacotamento de esferas, e está dividido em duas seções.

Na primeira seção, descrevemos de forma sucinta, as definições de empacotamento de esferas e cobertura por esferas, bem como as definições de *densidade de empacotamento de esferas* para os espaços euclidiano e hiperbólico.

Concluimos o capítulo com uma seção sobre resultados recentes de empacotamento de esferas no plano hiperbólico.

Espaço Fricke - Variações e Parametrizações

O terceiro capítulo, juntamente com o quarto é o âmago deste trabalho, inicia com a exposição dos passos necessários para construirmos um algoritmo que nos permite avaliar a densidade de empacotamento de esferas para os pontos em espaços de teichmüller. Este capítulo é dividido em duas seções.

Na primeira delas apresentamos as construções que fizemos para definir as coordenadas Fricke $\mathbf{F}_{4g+2}$ associadas a polígonos com $4g+2$ arestas. Além de fixar a notação, definimos o que chamamos de espaços Fricke $\mathcal{F}_{4g+2}$ e concluimos com a apresentação de um proposta para um polígono fundamental no plano hiperbólico que representa o grupo gerado por um ponto em $\mathcal{F}_{4g+2}$.

A última seção é reservada para uma construção análoga à que fizemos na seção anterior. Definimos as coordenadas Fricke $\mathbf{F}_{12g-6}$, o espaço Fricke $\mathcal{F}_{12g-6}$ e concluímos com uma proposta para um polígono fundamental associado ao grupo Γ_{12g-6} a ser gerado por um ponto em $\mathcal{F}_{12g-6}$. Observamos que $12g-6$ é o número máximo de arestas que um polígono, representando uma superfície de Riemann compacta e orientável (como domínio de Voronoi-Dirichlet), com gênero g ($g \geq 2$), pode ter.

Círculo Máximo Inscrito e Círculo Mínimo Circunscrito

No quarto capítulo, apresentamos os algoritmos para encontrar o círculo máximo contido num polígono e o círculo mínimo contendo um polígono. Dividimos este em duas seções.

A primeira delas estende para os planos hiperbólico e esférico, o método euclidiano, para encontrar o círculo máximo contido num polígono, proposto por Karkazis e Karagiorgis em [24]. Devido a dificuldade de implementação do algoritmo original, introduzimos simplificações que permitiram implementar um algoritmo válido simultaneamente para as três geometrias de curvatura constante.

Na segunda seção apresentamos um algoritmo discreto para determinação do círculo mínimo contendo o polígono. Estes algoritmos foram implementados no Mathematica para os planos euclidiano e hiperbólico (Apêndice).

Observamos que ambos algoritmos têm complexidade $O(n^4)$. No entanto, ao se determinar o círculo inscrito ou circunscrito de um polígono qualquer, é possível determinar os círculos correspondentes a qualquer polígono suficientemente próximo com complexidade $O(n)$, situação ótima prevista na literatura.

Ao final desta tese acrescentamos um CD com o seguinte conteúdo:

- Versões da tese de doutorado nos formatos PS e PDF;
- Versão da exposição da tese, no formato PDF, feita no dia 07 de março;
- Algoritmos implementados no Mathematica - CMIE, CMIH, CMCE, CMCH;
- Modelo em TEX do formato desta tese de doutorado;
- Modelo em TEX do formato utilizado na exposição da tese;
- Versões da dissertação de mestrado nos formatos PS e PDF.

Capítulo 1

Superfícies Hiperbólicas

"Duvidar de tudo ou crer em tudo. São duas soluções igualmente cômodas, que nos dispensam ambas de refletir." Henri Poincaré

Para melhor compreender as noções teóricas trabalhadas na tessitura desta tese, situaremos neste capítulo o quadro teórico que nos ancoramos para esta pesquisa.

Iniciamos percorrendo sobre as superfícies de Riemann e alguns resultados sobre grupos Fuchsianos. Em seguida, apresentamos, de forma sucinta, os espaços de teichmüller e as coordenadas Fricke. Findamos o capítulo apresentando a geometria hiperbólica plana a partir dos modelos euclidianos do semi-plano superior de Lobatchevski e do disco de Poincaré, respectivamente.

Como o capítulo é de caráter introdutório, fazemos uma abordagem sem demonstrações. Porém, estas podem ser encontradas nos seguintes textos: [2], [4], [6], [7], [8], [16], [18], [23], [35] e [37].

1.1 Superfícies de Riemann, Grupos Fuchsianos

Iniciamos definindo o que é uma variedade diferenciável.

Definição 1.1.1 *Uma **variedade diferenciável** de dimensão dois é um conjunto M munido de uma família de aplicações injetoras $\varphi_k : A_k \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$, onde k pertencente a um conjunto de índices e A_k abertos de $\mathbb{R}^2$ satisfazendo:*

- (i) $\bigcup_k \varphi_k(A_k) = M$;
- (ii) *Para todo k_1 e k_2 com $\varphi_{k_1}(A_{k_1}) \cap \varphi_{k_2}(A_{k_2}) = V \neq \emptyset$, os conjuntos $\varphi_{k_1}^{-1}(V)$ e $\varphi_{k_2}^{-1}(V)$ são abertos em $\mathbb{R}^2$ e a aplicação $\varphi_{k_2}^{-1} \circ \varphi_{k_1}$ é diferenciável;*

(iii) A família (A_k, φ_k) , chamada de *estrutura diferenciável*, é maximal em relação às condições (i) e (ii) acima.

O par (A_k, φ_k) é chamado de **sistema de coordenadas** (ou parametrização) de M nos pontos $p \in \varphi_k(A_k)$.

A noção de conformidade e preservação de orientação também é importante. Uma aplicação diferenciável $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva ângulos entre curvas continuamente diferenciáveis é dita **conforme**. Além disso, se $\det d\varphi_z > 0, \forall z \in \mathbb{R}^2$, dizemos que φ **preserva orientação** e se $\det d\varphi_z < 0, \forall z \in \mathbb{R}^2$, dizemos que φ **reverte orientação**.

Uma variedade complexa conexa de dimensão um é chamada uma *superfície de Riemann*, isto é, uma variedade onde as cartas são holomorfas com transição holomorfa entre as cartas. Denotamos o plano complexo por $\mathbb{C}$, o plano hiperbólico por $\mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{D}^2$ correspondentes aos modelos do *semi-plano de Lobatchevski* e do *disco de Poincaré*.

Definição 1.1.2 *Seja R uma variedade com um sistema de coordenadas $\{U_j, \varphi_j\}_{j \in I}$ onde cada U_j é um subconjunto aberto de R , com $R = \bigcup_{j \in I} U_j$ e cada φ_j é um homeomorfismo de U_j sobre um subconjunto aberto B_j no plano complexo $\mathbb{C}$. Dizemos que R é uma **superfície de Riemann** se*

$U_j \cap U_k \neq \emptyset$, então a função de transição

$$\varphi_{jk} = \varphi_k \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j \cap U_k) \rightarrow \varphi_k(U_j \cap U_k)$$

é uma aplicação biholomorfa, isto é, um homeomorfismo holomorfo.

Definição 1.1.3 *Seja R uma superfície de Riemann compacta. O gênero de R é*

$$g(R) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi), & \text{se } R \text{ é orientável} \\ (2 - \chi), & \text{se } R \text{ é não-orientável} \end{cases}$$

onde χ é a característica de Euler do polígono associado a R ([26] e [30]). Denotamos o gênero de R simplesmente por g (veja figura 1.1).

Uma superfície de Riemann homeomorfa a uma esfera com g alças, assim como na figura 1.1, é chamada uma *superfície de Riemann fechada de gênero g* . É conhecido que cada superfície de Riemann compacta é uma superfície de Riemann fechada de gênero finito. Uma superfície de Riemann não compacta é chamada uma *superfície de Riemann aberta*. A esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tem gênero zero e um toro tem gênero um.

O próximo passo importante para se lidar de forma mais concreta com superfícies de Riemann é o *teorema de uniformização*.

Teorema 1.1.4 (Teorema de uniformização - Klein, Poincaré e Koebe)
 Cada superfície de Riemann simplesmente conexa é biholomorficamente equivalente a uma das três superfícies de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}^2$.

Observação 1.1.5 Estas superfícies de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}^2$ não são biholomorficamente equivalentes entre si. A transformação de Möbius $-iF(z)$ (veja F em (1.17)) aplica biholomorficamente o modelo do semi-plano $\mathbb{H}^2$ sobre o disco unitário $\mathbb{D}^2$, e consequentemente podemos usar o disco unitário no lugar do semi-plano superior $\mathbb{H}^2$.

A fim de aplicar o teorema da uniformização, apresentamos as definições de superfícies de recobrimento e alguns resultados relacionados a estas. Assim, sejam R e $\tilde{R}$ superfícies de Riemann.

Definição 1.1.6 Uma aplicação holomorfa sobrejetora $\rho : \tilde{R} \longrightarrow R$ é uma **aplicação de recobrimento** se cada ponto $p \in R$ tem uma vizinhança U tal que para cada componente conexa V da imagem inversa $\rho^{-1}(U)$ de U , a aplicação restrita $\rho : V \longrightarrow U$ é biholomorfa. Chamaremos $(\tilde{R}, \rho, R)$ um **recobrimento** de R , e $\tilde{R}$ uma **superfície de recobrimento** de R . A aplicação ρ é também chamada a **projeção** de $\tilde{R}$ sobre R . Mas, quando $\tilde{R}$ é simplesmente conexa, chamamos $(\tilde{R}, \rho, R)$ um **recobrimento universal** de R , e a $\tilde{R}$ uma **superfície de recobrimento universal** de R . Um recobrimento universal de R é a superfície de recobrimento de todos os recobrimentos de R .

Definição 1.1.7 Alguma aplicação biholomorfa $\gamma : \tilde{R} \longrightarrow \tilde{R}$ com $\rho \circ \gamma = \rho$ é chamada uma **transformação de recobrimento** de um recobrimento $(\tilde{R}, \rho, R)$. Para um dado recobrimento $(\tilde{R}, \rho, R)$, denote por Γ o conjunto de todas as suas transformações de recobrimento. Usando a composição de funções temos que Γ tem estrutura de grupo, que chamamos de **grupo das transformações de recobrimento** de $(\tilde{R}, \rho, R)$. Em particular, chamamos Γ o **grupo das transformações de recobrimento universal** se $\tilde{R}$ é um recobrimento universal de R .

Seja $(\tilde{R}, \rho, R)$ um recobrimento de uma superfície de Riemann R . Dizemos que um ponto $\tilde{p} \in \tilde{R}$ está sobre um ponto $p \in R$, se $\rho(\tilde{p}) = p$. Um **levantamento** de um caminho α sobre R é um caminho $\tilde{\alpha}$ sobre $\tilde{R}$ com $\rho \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

Usando caminhos construiremos concretamente uma superfície de recobrimento universal de uma superfície de Riemann. Para isto, fixamos um ponto base p_0 sobre uma

dada superfície de Riemann R . Seja (α, p) um par de algum ponto $p \in R$ e algum caminho α em R ligando p_0 a p . Dois pares (α, p) e (β, q) são equivalentes se $p = q$ e $\alpha \simeq \beta$. Denotamos por $[\alpha, p]$ a classe de equivalência de (α, p) . Seja $\tilde{R}$ o conjunto de todas estas classes de equivalência $[\alpha, p]$.

Para mostrar que $\tilde{R}$ é uma superfície de recobrimento universal de R , introduzimos uma topologia sobre $\tilde{R}$. Para algum ponto $\tilde{p} = [\alpha, p]$ de $\tilde{R}$, consideramos uma vizinhança U_p de p que seja um domínio simplesmente conexo em R . Denotamos por $U_{\tilde{p}}$ o conjunto de todos os pontos $[\alpha \cdot \alpha_q, q]$ em $\tilde{R}$ tal que o ponto q seja um ponto de U_p e α_q seja um caminho conexo arbitrário em U_p de p a q . Como U_p é um domínio simplesmente conexo, temos uma correspondência bijetora canônica entre U_p e $U_{\tilde{p}}$. Por este $U_{\tilde{p}}$, definimos um sistema fundamental de vizinhanças de $\tilde{p}$ em $\tilde{R}$. Então $\tilde{R}$ torna-se um espaço topológico de Hausdorff. Seja $\rho : \tilde{R} \rightarrow R$ a projeção dada por $\rho([\alpha, p]) = p$. Pela construção, temos que ρ é uma aplicação contínua de $\tilde{R}$ sobre R e satisfaz a condição de uma aplicação de recobrimento.

Então, definimos uma estrutura complexa¹ sobre $\tilde{R}$ tal que $\rho : \tilde{R} \rightarrow R$ torna-se uma aplicação holomorfa. De fato, para algum ponto $\tilde{p} = [\alpha, p]$ de $\tilde{R}$ tome a vizinhança coordenada (U_p, φ_p) tal que U_p é um domínio simplesmente conexo em R . Colocando $\varphi_{\tilde{p}} = \varphi_p \circ \rho$, queremos que a família $\{(U_{\tilde{p}}, \varphi_{\tilde{p}})\}$ produza a desejada estrutura complexa sobre $\tilde{R}$.

Proposição 1.1.8 *A superfície $\tilde{R}$, construída como acima, é conexa e simplesmente conexa.*

Temos ainda o seguinte resultado.

Teorema 1.1.9 (Levantamento de uma aplicação) *Para superfícies de Riemann R e S , sejam $(\tilde{R}, \rho_R, R)$ e $(\tilde{S}, \rho_S, S)$ seus recobrimentos universais. Então, dada uma aplicação contínua arbitrária $\psi : R \rightarrow S$ temos que existe uma aplicação contínua $\tilde{\psi} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{S}$ com $\psi \circ \rho_R = \rho_S \circ \tilde{\psi}$. Esta aplicação $\tilde{\psi}$ é unicamente determinada sobre a condição que $\tilde{\psi}(\tilde{p}_1) = \tilde{q}_1$, onde $\tilde{p}_1 \in \tilde{R}$ e $\tilde{q}_1 \in \tilde{S}$ são tais que $\rho_S(\tilde{q}_1) = \psi(\rho_R(\tilde{p}_1))$. Além disso, se ψ é diferenciável ou holomorfa, então $\tilde{\psi}$ é também diferenciável ou holomorfa.*

Como consequência, temos que dados dois recobrimentos universais $(\tilde{R}, \rho, R)$ e $(\tilde{R}_1, \rho_1, R)$ de uma superfície de Riemann R , existe uma aplicação biholomorfa φ de $\tilde{R}$ para $\tilde{R}_1$ com $\rho_1 \circ \varphi = \rho$.

¹Veja definição 1.1.2 de superfície de Riemann.

Para uma dada superfície de recobrimento universal $(\tilde{R}, \rho, R)$ de uma superfície de Riemann R , mostraremos que o grupo das transformações de recobrimento Γ é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(R, p_0)$ de R . Antes porém, definimos o produto de duas curvas e o que entendemos por uma ação.

Definição 1.1.10 *Se α é um caminho em R de x_0 a x_1 e se β é um caminho em R de x_1 a x_2 , definimos a **composição** $\alpha \bullet \beta$ de α e β como sendo o caminho γ dado pelas equações*

$$\gamma(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2s - 1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

A função γ é bem definida e contínua; e ela é um caminho em R de x_0 a x_2 .

Definição 1.1.11 *Dado um grupo G com operação $\bullet$ e uma superfície de Riemann $\tilde{R}$, temos que uma ação de G sobre $\tilde{R}$ é uma função contínua $h_\alpha : \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}$ para cada $\alpha \in G$ tal que:*

- (i) *Se e é o elemento identidade de G , então h_e é a aplicação identidade de $\tilde{R}$;*
- (ii) *Se $\alpha = \beta \bullet \gamma$, então $h_\alpha = h_\beta \circ h_\gamma$.*

Dado $[\alpha_0] \in \pi_1(R, p_0)$, consideramos a ação usual de $[\alpha_0]_*$ sobre $\tilde{R}$ por

$$[\alpha_0]_*([\alpha, p]) = [\alpha_0 \bullet \alpha, p], \quad [\alpha, p] \in \tilde{R}. \quad (1.1)$$

Pela definição, este $[\alpha_0]_*$ pertence a Γ , isto é, é uma transformação de recobrimento de $(\tilde{R}, \rho, R)$. Assumindo (1.1) temos que:

Teorema 1.1.12 *A correspondência $[\alpha_0] \mapsto [\alpha_0]_*$ acarreta um isomorfismo do grupo fundamental $\pi_1(R, p_0)$ de R sobre o grupo das transformações de recobrimento Γ de um recobrimento universal $(\tilde{R}, \rho, R)$.*

Proposição 1.1.13 *Sejam R uma superfície de Riemann, $(\tilde{R}, \rho, R)$ seu recobrimento universal e Γ o grupo das transformações de recobrimento de $(\tilde{R}, \rho, R)$. Então Γ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *Para quaisquer $\tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{R}$, com $\rho(\tilde{p}) = \rho(\tilde{q})$, existe um elemento $\gamma \in \Gamma$ com $\gamma(\tilde{p}) = \tilde{q}$.*
- (ii) *Para cada $\tilde{p} \in \tilde{R}$ existe uma vizinhança conveniente $\tilde{U}$ de $\tilde{p}$ em $\tilde{R}$ tal que $\gamma(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ para cada $\gamma \in \Gamma - \{\text{Id}\}$. Em particular, cada elemento de $\Gamma - \{\text{Id}\}$ não tem pontos fixos.*

(iii) Γ age propriamente descontinuamente sobre $\tilde{R}$; isto é, dado um subconjunto compacto K de $\tilde{R}$, existe apenas um número finito de elementos $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(K) \cap K \neq \emptyset$.

1.1.1 Representação de superfícies de Riemann como espaços quociente

Explicaremos nesta seção, um caminho para construir uma superfície de Riemann quociente $\tilde{R}/\Gamma$ de uma superfície de Riemann $\tilde{R}$ e um subgrupo Γ do grupo de automorfismos biholomorfos $\text{Aut}(\tilde{R})$, onde Γ é assumido satisfazer as propriedades (ii) e (iii) da Proposição 1.1.13. Isto é, cada elemento de Γ , exceto a identidade, não tem pontos fixos em $\tilde{R}$ e age propriamente descontinuamente sobre $\tilde{R}$.

Dois pontos $\tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{R}$ são Γ – *equivalente* ou *equivalentes sobre* Γ se existe um elemento $\gamma \in \Gamma$ satisfazendo $\tilde{q} = \gamma(\tilde{p})$. Denotamos por $[\tilde{p}]$ a classe de equivalência de $\tilde{p}$. Seja $\tilde{R}/\Gamma$ o conjunto de todas estas classes de equivalência $[\tilde{p}]$, que chamamos o **espaço quociente** de $\tilde{R}$ por Γ . Defina a projeção $\rho : \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}/\Gamma$ por $\rho(\tilde{p}) = [\tilde{p}]$.

Introduzimos a topologia quociente sobre $\tilde{R}/\Gamma$ como segue: um subconjunto U de $\tilde{R}/\Gamma$ é aberto se, e somente se, a inversa $\rho^{-1}(U)$ de U for um aberto de $\tilde{R}$. A projeção ρ é uma aplicação contínua de $\tilde{R}$ em $\tilde{R}/\Gamma$. Ainda, $\tilde{R}$ é conexa somente se $\tilde{R}/\Gamma$ for conexa. Além disso, veremos que $\tilde{R}/\Gamma$ é um espaço de Hausdorff para Γ agindo de maneira propriamente descontinua sobre $\tilde{R}/\Gamma$.

Definimos a estrutura complexa sobre $\tilde{R}/\Gamma$ da seguinte maneira: para algum ponto $\tilde{p} \in \tilde{R}$, tome uma vizinhança $\tilde{U}_{\tilde{p}}$ de $\tilde{p}$ satisfazendo a propriedade (ii) da Proposição 1.1.13. Supomos que existe uma coordenada local $\varphi_{\tilde{p}}$ sobre $\tilde{U}_{\tilde{p}}$. Então, colocando $p = \rho(\tilde{p})$, $U_p = \rho(\tilde{U}_{\tilde{p}})$, verificamos que $\rho : \tilde{U}_{\tilde{p}} \rightarrow U_p$ é homeomorfa. Consequentemente, colocando $\varphi_p = \varphi_{\tilde{p}} \circ \rho^{-1}$, concluímos que $\{(U_p, \varphi_p)\}_{p \in \tilde{R}/\Gamma}$ define uma estrutura complexa tal que $(\tilde{R}, \rho, \tilde{R}/\Gamma)$ é um recobrimento de $\tilde{R}/\Gamma$. Chamaremos esta superfície de Riemann $\tilde{R}/\Gamma$ a **superfície de Riemann quociente** de $\tilde{R}$ por Γ . Então, temos imediatamente a seguinte afirmação.

Teorema 1.1.14 *Seja $(\tilde{R}, \rho, R)$ uma superfície de recobrimento universal de R com grupo de transformações de recobrimento Γ . Então a superfície de Riemann quociente $\tilde{R}/\Gamma$ de $\tilde{R}$ por Γ é biholomorficamente equivalente a R pela correspondência $[\tilde{p}] \mapsto \rho(\tilde{p})$.*

1.1.2 Transformações de Möbius

Na seção precedente, verificamos que cada superfície de Riemann R é representada pela superfície de Riemann quociente $\tilde{R}/\Gamma$ de uma superfície de recobrimento universal $\tilde{R}$ e seu grupo de transformações de recobrimento universal Γ . Denotamos por $\text{Aut}(\tilde{R})$ o grupo dos automorfismos biholomorfos de $\tilde{R}$. Da Proposição 1.1.13, Γ é um subgrupo de $\text{Aut}(\tilde{R})$, consistindo de elementos sem pontos fixo em $\tilde{R}$ (exceto a identidade) e age propriamente descontinuamente sobre $\tilde{R}$ [23].

Com isto em mente, estudamos os grupos de automorfismos biholomorfos $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, $\text{Aut}(\mathbb{C})$, $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ e $\text{Aut}(\mathbb{D}^2)$.

Proposição 1.1.15 (i) Cada elemento de $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ tem a forma

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.2)$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ com $ad - bc = 1$.

(ii) Cada elemento de $\text{Aut}(\mathbb{C})$ tem a forma

$$\gamma(z) = az + b,$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$ com $a \neq 0$.

(iii) Cada elemento de $\text{Aut}(\mathbb{D}^2)$ tem a forma

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}},$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$, $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são os conjugados de a e b , respectivamente, com $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Estes podem também ser escritos como

$$\gamma(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{D}^2$.

(iv) Cada elemento de $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ tem a forma

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $ad - bc = 1$.

Observação 1.1.16 Em (1.2) é suficiente que os números complexos a, b, c e d satisfaçam a condição $ad - bc \neq 0$ já que o elemento γ não muda quando multiplicamos os

elementos a, b, c e d por uma constante. Cada elemento de $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ é chamado uma **transformação de Möbius** ou uma **transformação linear fracionária**. Em particular, um elemento de $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ é chamado uma **transformação de Möbius real** ou uma **transformação linear fracionária real**.

A cada $\gamma \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ dado por

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ onde } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ com } ad - bc = 1,$$

temos um elemento

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

do grupo linear especial $\text{SL}(2, \mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}); \det A = 1\}$. Reciprocamente, temos um homomorfismo Ψ de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ sobre $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ definido por

$$\Psi(A, z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

com $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, onde a, b, c e d as entradas da matriz A . Então, o núcleo de Ψ é $\{\pm \text{Id}\}$, e Id é a matriz identidade. Consequentemente, Ψ induz um isomorfismo

$$\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \approx \text{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm \text{Id}\}.$$

Colocamos $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) = \text{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm \text{Id}\}$ e chamamos **grupo topológico especial linear projetivo** de grau 2. Um elemento A de $\Psi^{-1}(\gamma)$ que corresponde a um elemento $\gamma \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ é chamado uma **representação matricial** de γ . Notamos que γ é representado por dois elementos $\pm A$ em $\text{SL}(2, \mathbb{C})$.

Analogamente, temos

$$\text{Aut}(\mathbb{H}^2) \approx \text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}\}$$

e

$$\text{Aut}(\mathbb{D}^2) \approx \text{PSU}_2(1, 1) = \text{SU}_2(1, 1) / \{\pm \text{Id}\}$$

onde $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ e $\text{SU}_2(1, 1)$ são o **grupo especial linear real de grau 2** e o **grupo especial unitário de assinatura (1, 1)**, respectivamente.

Forma canônica das transformações de Möbius

Seja γ uma transformação de Möbius dada por

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ onde } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ com } ad - bc = 1,$$

e $\gamma \neq \text{Id}$. Denotemos $\text{Fix}(\gamma)$ o conjunto dos **pontos fixos**² de γ e por $|\text{Fix}(\gamma)|$ sua cardinalidade.

Dois elementos $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ são *Aut(R) – conjugados* ou **conjugados** em $\text{Aut}(R)$ se existe um elemento $\delta \in \text{Aut}(R)$ tal que $\gamma_2 = \delta \circ \gamma_1 \circ \delta^{-1}$, onde R é um dentre $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}^2$, e $\mathbb{D}^2$. Temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.17 *Cada transformação de Möbius $\gamma (\neq \text{Id})$ tem um ou dois pontos fixos sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, e é $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ – conjugada a uma das seguintes transformações de Möbius γ_0 :*

(i) Se $|\text{Fix}(\gamma)| = 1$, então $\gamma_0(z) = z + b$ para algum $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$.

(ii) Se $|\text{Fix}(\gamma)| = 2$, então $\gamma_0(z) = \lambda z$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$.

Chamamos γ_0 de uma **forma canônica** de γ . A representação matricial das formas canônicas (i) e (ii) são

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix},$$

respectivamente.

Uma transformação de Möbius real $\gamma (\neq \text{Id})$ cujos pontos fixos estão em $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é *Aut($\mathbb{H}^2$) – conjugada* a uma forma canônica γ_0 tal que a entrada b ou λ da representação matricial é real.

Classificação das transformações de Möbius

Classificaremos as transformações de Möbius em três tipos.

Definição 1.1.18 *Seja γ uma transformação que não é a identidade, então:*

(i) γ é **parabólica** se é conjugada a uma translação $\gamma_0(z) = z + b$ para algum $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$.

(ii) γ é **elíptica** se é conjugada a uma rotação $\gamma_0(z) = e^{i\theta}z$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

(iii) γ é **hiperbólica** se é conjugada a uma dilatação $\gamma_0(z) = \lambda z$ para algum $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$.

²Seja $\gamma \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$. Dizemos que um ponto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ satisfazendo $\gamma(z) = z$ é um *ponto fixo* de γ .

Note que existem transformações de Möbius que não são nem parabólica, elíptica ou hiperbólica. Um exemplo é dado por $\gamma(z) = \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \neq 1$ e $\lambda \notin [0, \infty)$).

Sejam z_1 e z_2 os pontos fixos de uma transformação de Möbius loxodrômica γ . Suponha que z_1 e z_2 , respectivamente, correspondem aos pontos fixos 0 e ∞ de uma forma canônica $\gamma_0(z) = \lambda z$ para algum λ com $|\lambda| > 1$. Então z_1 e z_2 são chamados de **ponto fixo repulsor** e **ponto fixo atrator** de γ , respectivamente. Denote por r_γ e a_γ os pontos fixos repulsor e atrator de γ , respectivamente.

Destes resultados, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 1.1.19 *Sejam γ uma transformação de Möbius real que não é a identidade e $\text{tr}(\gamma)$ o traço da matriz associada a γ . Então temos [23]:*

- (i) γ é parabólica $\iff \gamma$ tem somente um ponto fixo sobre $\widehat{\mathbb{R}} \iff \text{tr}^2(\gamma) = 4$.
- (ii) γ é elíptica $\iff \gamma$ tem dois pontos fixos z_1, z_2 tal que $z_1 \in \mathbb{H}^2$ e $z_2 = \overline{z_1} \iff 0 \leq \text{tr}^2(\gamma) < 4$.
- (iii) γ é hiperbólica $\iff \gamma$ tem dois pontos fixos sobre $\widehat{\mathbb{R}} \iff \text{tr}^2(\gamma) > 4$.

Finalmente, definimos o eixo de uma transformação hiperbólica real γ . Suponha que γ é conjugada à uma forma canônica $\gamma_0(z) = \lambda z$ com $\lambda > 1$, por uma transformação de Möbius real δ , ou seja, $\gamma = \delta \gamma_0 \delta^{-1}$. A semi-linha $L = \{iy | 0 < y < \infty\}$ no semi-plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ é uma geodésica, ligando 0 a ∞ . A imagem $\delta(L)$ de L por δ é chamada **eixo**³ de γ e é denotada por A_γ . Então, A_γ é a geodésica ligando os pontos fixos r_γ e a_γ de γ . Analogamente definimos o eixo⁴ A_γ de uma transformação hiperbólica γ em $\text{Aut}(\mathbb{D}^2)$.

1.1.3 Modelos fuchsianos

A seguir determinamos as superfícies de Riemann cujas superfícies de recobrimento universal são biholomorfas a $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}^2$.

Teorema 1.1.20 *Sejam R uma superfície de Riemann e $\tilde{R}$ seu recobrimento universal. Então:*

- (i) $\tilde{R} = \widehat{\mathbb{C}} \iff R$ é biholomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$.
- (ii) $\tilde{R} = \mathbb{C} \iff R$ é biholomorfa a $\mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}$ ou ao toro.

³A geodésica ligando os pontos fixos p_1 e p_2 de uma isometria γ é chamada de **eixo** de γ . Denotamos esta por $\text{Eixo}(\gamma)$.

⁴A geodésica ligando os pontos fixos p_1 e p_2 de uma isometria γ é chamada de **eixo** de γ . Denotamos esta por $\text{Eixo}(\gamma)$.

(iii) $\tilde{R} = \mathbb{H}^2$, em todos os outros casos.

Sejam R uma superfície de Riemann, $\tilde{R}$ uma superfície de recobrimento universal de R e Γ seu grupo das transformações de recobrimento.

Definição 1.1.21 *Se a superfície de recobrimento universal $\tilde{R}$ de R é o semi-plano superior $\mathbb{H}^2$, chamamos o grupo das transformações de recobrimento universal Γ de **modelo fuchsiano** de R . Neste caso, Γ é um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$. Contudo, ao identificar $\mathbb{H}^2$ com $\mathbb{D}^2$, consideramos um modelo fuchsiano Γ assim como um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{D}^2)$.*

A fim de obtermos uma imagem geométrica de correspondência entre uma superfície de Riemann R e seu modelo fuchsiano Γ , usamos um domínio fundamental para Γ .

Definição 1.1.22 *Um conjunto fechado $\mathcal{D}$ do semi-plano superior $\mathbb{H}^2$ é um **domínio fundamental** para Γ se $\mathcal{D}$ satisfaz as seguintes três condições:*

- i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{\mathcal{D}}) = \mathbb{H}^2$.
- ii) $\text{int}(\mathcal{D}) \cap \gamma(\text{int}(\mathcal{D})) = \emptyset$, para todo $\text{Id} \neq \gamma \in \Gamma$.
- iii) $\text{int}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$.

O conjunto $\partial\mathcal{D} = \mathcal{D} \setminus \text{int}(\mathcal{D})$ é chamado de **fronteira** de $\mathcal{D}$ e a família

$$\{\gamma(\mathcal{D}) \mid \gamma \in \Gamma\}$$

é dita um **ladrilhamento** de $\mathbb{H}^2$. Notemos que sendo $\mathcal{D}$ um domínio fundamental, $\gamma(\mathcal{D})$ também o será, para todo $\gamma \in \Gamma$. Estas condições dizem-nos que a superfície de Riemann $R = \mathbb{H}^2/\Gamma$ é considerada como $\mathcal{D}$ com pontos em $\partial\mathcal{D}$ identificados pelo grupo de recobrimento Γ .

Subgrupos discretos de $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$

Definimos a seguir, uma topologia natural sobre $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$, chamada a topologia compacta-aberta.

Definição 1.1.23 *Sejam X e Y espaços topológicos. Se K é um subconjunto compacto de X e U é um subconjunto aberto de Y , definimos*

$$S(K, U) = \{f \mid f \in C(X, Y) \text{ e } f(K) \subset U\}$$

onde $C(X, Y)$ é o conjunto das funções contínuas de X em Y . O conjunto $S(K, U)$ forma uma subbase para uma topologia sobre $C(X, Y)$ que chamamos de **topologia compacto-aberto**.

Nesta topologia, uma seqüência $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ em $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ converge para $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ se γ_n converge para γ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{H}^2$ quando $n \rightarrow \infty$. Na topologia de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ que é induzida pela topologia de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, temos que uma seqüência $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ com

$$A_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$$

converge para

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

em $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ se, e somente se, a_n, b_n, c_n e d_n convergem para a, b, c e d , respectivamente, quando $n \rightarrow \infty$.

Definição 1.1.24 *Um subgrupo Γ de $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ é **discreto** se Γ é um subconjunto discreto de $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$, isto é, Γ consiste de pontos isolados em relação à topologia relativa sobre Γ induzida de $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$. Nestes casos, chamamos Γ de um **grupo fuchsiano**. Ainda, $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade donde temos que um grupo fuchsiano consiste de pelo menos um número enumerável de elementos.*

Analogamente, definimos um subgrupo discreto de $\text{Aut}(\mathbb{D}^2)$, $\text{Aut}(\mathbb{C})$ e $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$. Um subgrupo discreto de $\text{Aut}(\mathbb{D}^2)$ é também chamado de **grupo fuchsiano**.

A partir deste ponto, restringiremo-nos ao caso hiperbólico ($\mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{D}^2$) que é o nosso maior interesse.

Proposição 1.1.25 *Dado um subgrupo Γ de $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ temos que são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (i) Γ é um grupo fuchsiano.
- (ii) Γ age de modo propriamente descontínuo sobre $\mathbb{H}^2$.
- (iii) Não existem seqüências de elementos distintos de Γ que convergem em $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$.

A seguir, mais algumas propriedades sobre grupos fuchsianos.

Proposição 1.1.26 *Seja Γ um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ fuchsiano. Então os pontos fixos por elementos de Γ , ou seja, o conjunto*

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \exists \gamma \in \Gamma, \gamma(z) = z\}$$

é discreto ([13], capítulo 5 - pág 61).

Proposição 1.1.27 *Sejam γ e δ dois elementos de um grupo Fuchsiano Γ . Se γ é hiperbólico e $\delta \neq \text{Id}$, então uma das seguintes afirmações vale:*

- (i) $\text{Fix}(\gamma) = \text{Fix}(\delta)$;
- (ii) $\text{Fix}(\gamma) \cap \text{Fix}(\delta) = \emptyset$

Proposição 1.1.28 *Seja Γ um grupo fuchsiano contendo uma translação $\gamma_0(z) = z + 1$. Então se $c \neq 0$ temos que cada $\gamma \in \Gamma$ tem uma matriz representada por*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

satisfazendo $|c| \geq 1$ [23].

Usando estes dois últimos resultados, temos o próximo teorema.

Teorema 1.1.29 *Cada elemento de um modelo Fuchsiano para uma superfície de Riemann fechada de gênero g (≥ 2) consiste somente da identidade e elementos hiperbólicos.*

Definição 1.1.30 *Um grupo fuchsiano Γ é dito co-compacto se o espaço quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ for compacto. Analogamente, podemos definir um grupo fuchsiano co-compacto para $\mathbb{D}^2$.*

Seja Γ grupo fuchsiano e $p \in \mathbb{H}^2$ tal que $\gamma(p) \neq p$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Tal ponto existe, pois a Proposição 1.1.26 nos garante que o conjunto dos pontos fixos por algum elemento de Γ é discreto.

Definição 1.1.31 *Definimos o **domínio de Voronoi-Dirichlet** centrado em p como sendo o conjunto*

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) \leq d(z, \gamma(z)), \quad \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Denotaremos tal conjunto por $\mathcal{D}_p(\Gamma)$.

O próximo resultado garante que todo domínio de Voronoi-Dirichlet é um domínio fundamental ([13], capítulo 6 pág 83).

Teorema 1.1.32 *Seja Γ grupo fuchsiano e $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ um domínio de Voronoi-Dirichlet centrado em p . Então $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ é o domínio fundamental da ação de Γ .*

Encerramos com um resultado que consiste de dois corolários encontrados em ([13], capítulo 7, páginas 125 e 128)

Teorema 1.1.33 *Seja Γ um grupo fuchsiano:*

(i) Γ é co-compacto se, e somente se, todo domínio de Voronoi-Dirichlet de Γ for compacto.

(ii) Γ é co-compacto se, e somente se, não possuir elementos parabólicos e $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$.⁵

1.2 Espaço de teichmüller

Seja R uma superfície de Riemann compacta de gênero g . Apresentamos duas maneiras de construirmos os espaços de teichmüller.

Consideramos um ponto p_0 sobre R e o grupo fundamental $\pi_1(R, p_0)$. Sabemos que o grupo fundamental $\pi_1(R, p_0)$ de uma superfície de Riemann de gênero g tem $2g$ geradores. Desta maneira, os caminhos fechados simples no ponto p_0 dados por $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ representam as classes de homotopia $[A_1], [B_1], \dots, [A_g], [B_g]$ que geram o grupo fundamental $\pi_1(R, p_0)$.

Se tomarmos o ponto p_0 sobre R e cortarmos R ao longo das curvas $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ tendo como ponto base p_0 , teremos um domínio homeomorfo a um polígono convexo com $4g$ lados (veja as figuras 1.1 e 1.2).

Definição 1.2.1 *Dizemos que o conjunto de geradores de $\pi_1(R, p_0)$ dados por $\{[A_j], [B_j]\}_{j=1}^g$ é um **sistema canônico de geradores**, se este satisfizer a seguinte relação*

$$\prod_{j=1}^g [A_j] [B_j] [A_j]^{-1} [B_j]^{-1} = \text{Id}.$$

Chamamos $\{[A_j], [B_j]\}_{j=1}^g$ de um **rótulo** sobre R . Por simplicidade de notação, denotaremos um rótulo por $\{A_j, B_j\}_{j=1}^g$.

⁵Veja definição de μ na página 32.

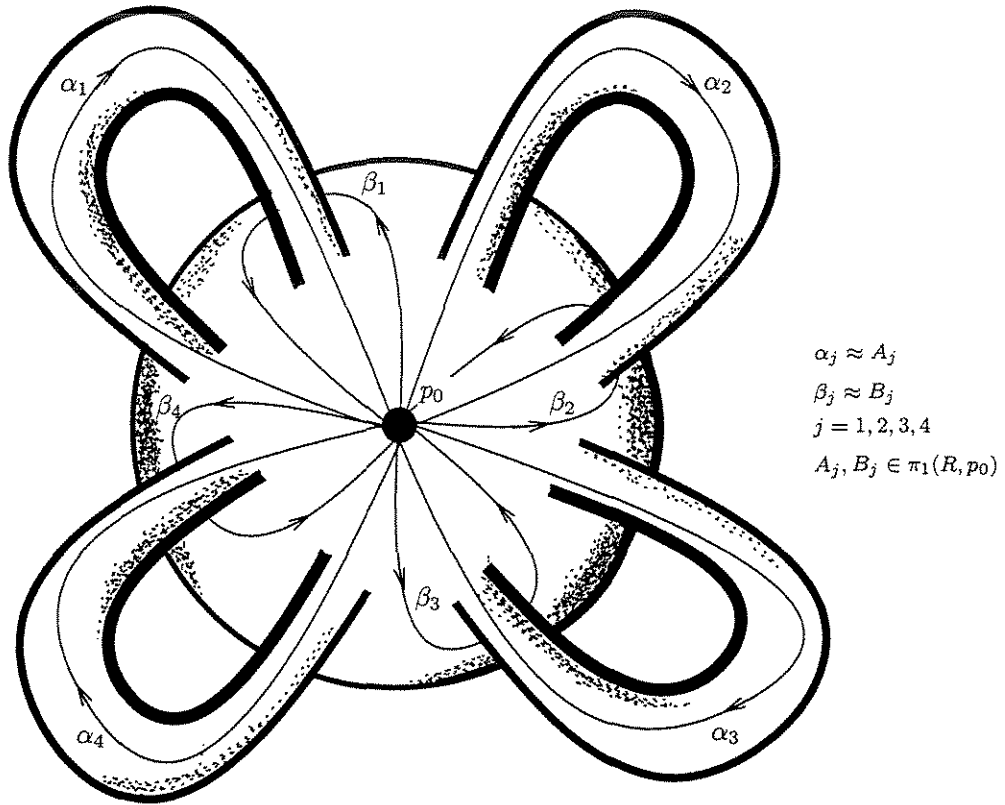


Figura 1.1: Superfície de Riemann, R_4 , de gênero $g = 4$

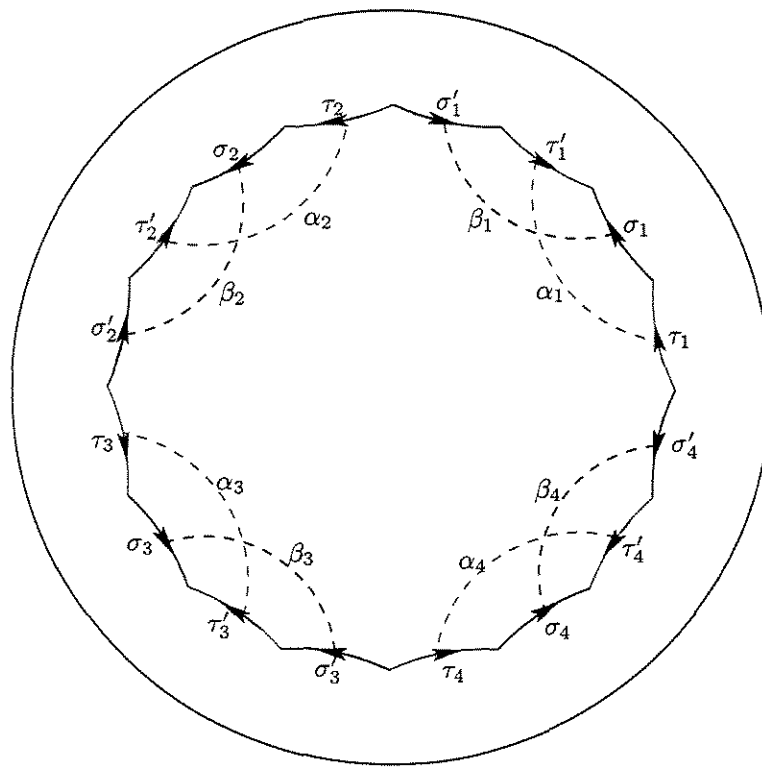


Figura 1.2: Polígono fundamental associado a R_4

1.2.1 Espaço de teichmüller $\mathcal{T}_g$

Seja R uma superfície de Riemann de gênero g , tome um rótulo $\Sigma_p = \{[A_j], [B_j]\}_{j=1}^g$ do grupo fundamental $\pi_1(R, p)$ de R , e considere o par (R, Σ_p) . Estabelecemos agora, a relação de **equivalência dos rótulos**.

Definição 1.2.2 Considere dois rótulos $\Sigma_p = \{[A_j], [B_j]\}_{j=1}^g$ e $\Sigma_{p'} = \{[A'_j], [B'_j]\}_{j=1}^g$ sobre R . Existe uma curva contínua C_0 sobre R , de p a p' , que induz um isomorfismo

$$\begin{aligned} T_{C_0} : \pi_1(R, p) &\rightarrow \pi_1(R, p') \\ [C, p] &\mapsto [C_0^{-1} \cdot C \cdot C_0] \end{aligned}$$

Se $T_{C_0}([A_j]) = [A'_j]$ e $T_{C_0}([B_j]) = [B'_j]$ então dizemos que o rótulo Σ_p é equivalente a $\Sigma_{p'}$, e denotados por, $\Sigma_p \underset{\mathcal{T}_g}{\sim} \Sigma_{p'}$.

A equivalência de dois pares é definida por:

Definição 1.2.3 Dadas as superfícies de Riemann R e S considere sobre estas os respectivos rótulos Σ_p e Σ_q . Existe uma aplicação biholomorfa $h : S \rightarrow R$ que induz um isomorfismo $h_* : \pi_1(S, q) \rightarrow \pi_1(R, p)$. Dizemos que os pares (R, Σ_p) e (S, Σ_q) são equivalentes se $h_*(\Sigma_q) \underset{\mathcal{T}_g}{\sim} \Sigma_p$, onde $h_*(\Sigma_q) = h_*\left(\{[A'_j], [B'_j]\}_{j=1}^g\right) = \{h_*([A'_j]), h_*([B'_j])\}_{j=1}^g$. Denotaremos por $(R, \Sigma_p) \underset{\mathcal{T}_g}{\approx} (S, \Sigma_q)$.

O espaço de teichmüller de gênero g , $\mathcal{T}_g$, é definido por

$$\mathcal{T}_g := \{[R, \Sigma] ; \text{onde } [R, \Sigma] \text{ é a classe do par } (R, \Sigma)\}.$$

A segunda maneira de definirmos o espaço de teichmüller é dada na próxima seção.

1.2.2 Espaço de teichmüller $\mathcal{T}(R)$

Fixamos uma superfície de Riemann R de gênero g e consideramos um par (S, f) arbitrário de uma superfície de Riemann S e um difeomorfismo preservando orientação $f : R \rightarrow S$.

A equivalência de dois pares é dada por

Definição 1.2.4 Dados dois pares (S, f) e (S', g) , dizemos que são equivalentes se $g \circ f^{-1} : S \rightarrow S'$ é homotópica a uma aplicação biholomorfa $h : S \rightarrow S'$. Denotamos por $(S, f) \underset{\mathcal{T}(R)}{\approx} (S', g)$.

O espaço de teichmüller, $\mathcal{T}(R)$, é definido por

$$\mathcal{T}(R) := \{[S, f]; [S, f] \text{ representa a classe de } (S, f)\}.$$

Caso $g \geq 2$ temos que $\mathcal{T}(R)$ e $\mathcal{T}_g$ são equivalentes conforme pode ser visto no teorema dado a seguir. Antes, fixe o rótulo $\Sigma = \{[A_j], [B_j]\}_{j=1}^g$ sobre R com ponto base p_0 e defina

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma : \mathcal{T}(R) &\rightarrow \mathcal{T}_g \\ [S, f] &\mapsto [S, f_*(\Sigma)] \end{aligned}$$

Note que dado $[S, f] \in \mathcal{T}(R)$ temos que $[S, f_*(\Sigma)] \in \mathcal{T}_g$ pois $f_*(\Sigma)$ é um rótulo sobre S . Ainda $[S, f_*(\Sigma)] \in \mathcal{T}_g$ não depende da escolha de $[S, f]$ em $\mathcal{T}(R)$.

Teorema 1.2.5 *A aplicação $\Phi_\Sigma : \mathcal{T}(R) \rightarrow \mathcal{T}_g$ é uma bijeção ([23], pág. 14).*

Deste teorema, temos que $\mathcal{T}_g = \mathcal{T}(R)$ ($g \geq 2$) onde R é uma superfície de Riemann fechada de gênero g .

O próximo passo será demonstrar que o espaço de teichmüller de gênero $g \geq 2$ pode ser considerado como um subconjunto de $\mathbb{R}^{6g-6}$.

1.2.3 Espaço Fricke

Recordamos a definição de um modelo fuchsiano e em seguida apresentamos as condições de normalização.

Definição 1.2.6 *Se uma superfície de recobrimento $\tilde{R}$ de uma superfície de Riemann R é o semi-plano superior $\mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{D}^2$ (disco de Poincaré) então chamamos seu grupo das transformações de recobrimento Γ um **modelo fuchsiano** de R . Neste caso, Γ é um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$.*

Seja $\Sigma = \{[A_j], [B_j]\}_{j=1}^g$ um rótulo sobre R , isto é, um sistema canônico de geradores do grupo fundamental $\pi_1(R, p_0)$ de R . Pelo isomorfismo que existe entre $\pi_1(R, p_0)$ e um modelo fuchsiano Γ de R (veja teorema 1.1.12), denotamos por α_j e β_j os elementos de Γ correspondentes a $[A_j]$ e $[B_j]$ em $\pi_1(R, p_0)$, respectivamente, para cada $j = 1, 2, \dots, g$.

Para definirmos as chamadas coordenadas Fricke sobre o espaço de teichmüller $\mathcal{T}_g$ de uma superfície de Riemann fechada de gênero $g (\geq 2)$, teremos que eliminar uma ambiguidade dos modelos fuchsianos Γ que é causada por automorfismos interno $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$; isto é, para algum $\delta \in \text{Aut}(\mathbb{H}^2)$, o grupo $\Gamma' = \delta\Gamma\delta^{-1}$ é um modelo Fuchsiano

para a mesma R . A fim de estabelecermos a unicidade do modelo Fuchsiano Γ para um rótulo Σ sobre R , impomos as **condições de normalização**;

- (i) β_g tem seus pontos fixados repulsor e atrator em 0 e ∞ .
- (ii) α_g tem seu ponto fixado atrator em 1.

Pelo teorema 1.1.29 concluimos que α_g e β_g são hiperbólicos. Ainda, α_g e β_g não comutam, a proposição 1.1.27 implica que $\text{Fix}(\alpha_g) \cap \text{Fix}(\beta_g) = \emptyset$. Conjugando Γ em $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$, se necessário, podemos assumir que α_g e β_g satisfazem as condições (i) e (ii) de normalização. Portanto, dado um rótulo Σ sobre uma superfície de Riemann de gênero g , existe sempre um modelo Fuchsiano de R que satisfaz as condições de normalização.

Proposição 1.2.7 *Dado um rótulo Σ sobre uma superfície de Riemann R de gênero $g (\geq 2)$, um sistema canônico de geradores $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ de um modelo Fuchsiano Γ de R que satisfaz as condições de normalização com respeito a Σ é unicamente determinado pelo ponto $[R, \Sigma] \in \mathcal{T}_g$ ([23], pág. 47).*

Chamaremos este grupo Fuchsiano Γ o **modelo Fuchsiano normalizado** de uma superfície de Riemann rotulada $[R, \Sigma]$. O sistema de geradores $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ é como o sistema canônico de geradores, que satisfaz a relação fundamental

$$\prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] = \text{Id},$$

onde $[\alpha_j, \beta_j] = \alpha_j \circ \beta_j \circ \alpha_j^{-1} \circ \beta_j^{-1}$.

Proposição 1.2.8 *Seja $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ o sistema canônico de geradores do modelo Fuchsiano normalizado Γ para um ponto $[R, \Sigma] \in \mathcal{T}_g$. Se um elemento $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ de $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ não coincide com β_g , então $bc \neq 0$.*

Pela proposição 1.2.8, o sistema canônico de geradores $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ de um modelo fuchsiano normalizado Γ para um ponto $[R, \Sigma]$ em $\mathcal{T}_g$ é escrito unicamente na forma

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}, & a_j, b_j, c_j &\in \mathbb{R}, & c_j > 0, & a_j d_j - b_j c_j &= 1, \\ \beta_j &= \frac{a'_j z + b'_j}{c'_j z + d'_j}, & a'_j, b'_j, c'_j &\in \mathbb{R}, & c'_j > 0, & a'_j d'_j - b'_j c'_j &= 1, \end{aligned}$$

para cada $j = 1, 2, \dots, g-1$.

Definimos as **coordenadas Fricke** por;

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{4g} : \quad \mathcal{T}_g &\rightarrow \mathbb{R}^{6g-6} \\ [R, \Sigma] &\mapsto (a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, \dots, a_{g-1}, b_{g-1}, c_{g-1}, a'_{g-1}, b'_{g-1}, c'_{g-1}) \end{aligned}$$

A imagem $\mathcal{F}_{4g} = \mathbf{F}_{4g}(\mathcal{T}_g)$ é chamada o **Espaço Fricke** de uma superfície de Riemann de gênero g . A topologia de $\mathcal{F}_{4g}$ é introduzida pela topologia relativa de $\mathcal{F}_{4g}$ em $\mathbb{R}^{6g-6}$.

Teorema 1.2.9 *Dado g , considere o sistema de coordenadas Fricke $\mathbf{F}_{4g} : \mathcal{T}_g \rightarrow \mathbb{R}^{6g-6}$. Temos que ([23], pág. 48):*

- (i) $\mathbf{F}_{4g}$ é injetora
- (ii) $\mathbf{F}_{4g}(\mathcal{T}_g)$ é um domínio aberto e simplesmente conexo de $\mathbb{R}^{6g-6}$.

Deste teorema, temos que $\mathbf{F}_{4g}$ é uma aplicação bijetora de $\mathcal{T}_g$ em $\mathcal{F}_{4g}$. Logo definimos uma topologia em $\mathcal{T}_g$ pela identificação de $\mathcal{T}_g$ com $\mathcal{F}_{4g}$, através de $\mathbf{F}_{4g}$. Portanto, uma topologia do espaço $\mathcal{T}(R)$ de uma superfície de Riemann fechada R de gênero g é induzida de $\mathcal{T}_g$.

Assim, para um ponto $[R, \Sigma] \in \mathcal{T}_g$ temos pelas coordenadas Fricke $\mathbf{F}_{4g}$ uma projeção deste ponto no espaço Fricke, $\mathcal{F}_{4g}$, que é um domínio aberto de $\mathbb{R}^{6g-6}$. A seguir, faremos o processo inverso, ou seja, dado um ponto $p_g \in \mathcal{F}_{4g}$ queremos encontrar $\Sigma_g = \{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ determinando assim o ponto $[R_g, \Sigma_g] \in \mathcal{T}_g$.

Como $p_g \in \mathcal{F}_{4g}$ temos

$$p_g = \mathbf{F}_{4g}([R_g, \Sigma_g]) = (a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, \dots, a_{g-1}, b_{g-1}, c_{g-1}, a'_{g-1}, b'_{g-1}, c'_{g-1})$$

onde $[R_g, \Sigma_g] \in \mathcal{T}_g$.

A determinação das funções $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^{g-1}$ é imediata:

$$\begin{aligned} \alpha_j(z) &= \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}, & b_j &= (1 - a_j d_j) / c_j \\ \beta_j(z) &= \frac{a'_j z + b'_j}{c'_j z + d'_j}, & b'_j &= (1 - a'_j d'_j) / c'_j. \end{aligned}$$

Nosso propósito é encontrar α_g e β_g . Das condições de normalização segue imediatamente que

$$\begin{cases} \beta_g(z) = \lambda z, & \lambda > 1, & B_g = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix} \\ \alpha_g(z) = \frac{a_g z + b_g}{c_g z + d_g}, & a_g d_g - b_g c_g = 1, & a_g + b_g = c_g + d_g \end{cases} \quad (1.3)$$

Colocamos $\gamma = \prod_{j=1}^{g-1} [\alpha_j, \beta_j]$. Assim, da relação $\prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] = \text{Id}$ (relação que define o grupo fundamental de um g -toro) temos

$$\gamma \circ \alpha_g = \beta_g \circ \alpha_g \circ \beta_g^{-1}. \quad (1.4)$$

Denotando

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad ad - bc = 1, \quad (1.5)$$

e substituindo em (1.4), temos

$$(a - 1) a_g + b c_g = 0 \quad (1.6)$$

$$(a - \lambda) b_g + b d_g = 0 \quad (1.7)$$

$$c a_g + (d - \lambda^{-1}) c_g = 0 \quad (1.8)$$

$$c b_g + (d - 1) d_g = 0. \quad (1.9)$$

Resolvendo o sistema de equações de (1.6) a (1.9), encontramos que

$$\begin{cases} \lambda = \frac{a-1}{1-d} \\ a_g = b_g \left(\frac{b}{1-d} \right) \left(\frac{c+d-1}{a+b-1} \right) \\ b_g = \sqrt{\frac{(1-d)^2(a+b-1)}{(a+d-2)(c+d-1)}} \\ c_g = b_g \left(\frac{1-a}{1-d} \right) \left(\frac{c+d-1}{a+b-1} \right) \\ d_g = b_g \frac{c}{1-d}. \end{cases} \quad (1.10)$$

determinando assim os valores de α_g e β_g .

Portanto, a partir de um ponto $p_g \in \mathcal{F}_{4g}$, obtemos o grupo que representa uma superfície de Riemann R_g compacta orientável de gênero g . Pretendemos, a partir de um grupo Γ_g , obter os vértices do polígono emparelhado no plano hiperbólico, que representa tal superfície R_g . Este procedimento é feito por Linda Keen em [25], conforme descrevemos a seguir.

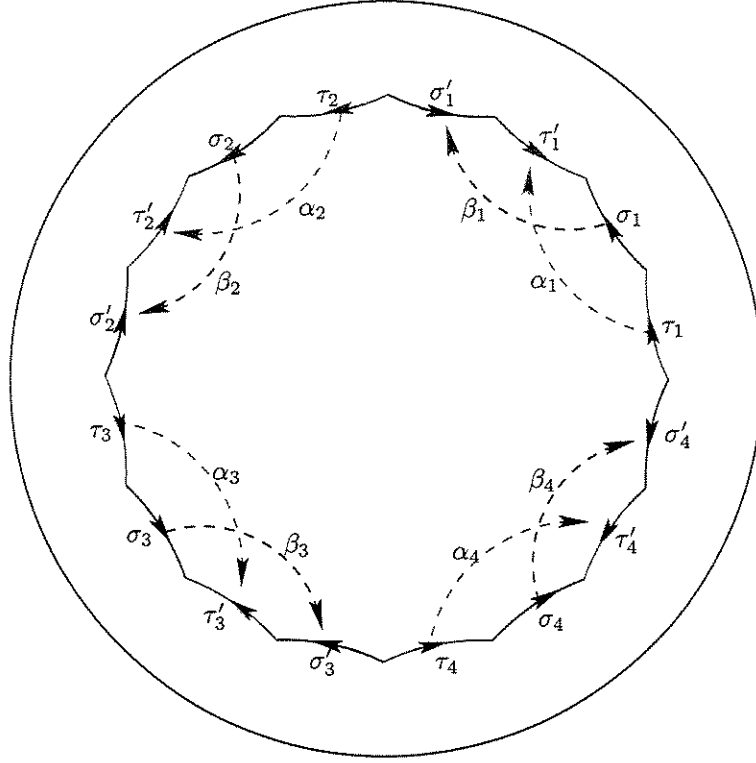
Dada uma superfície de Riemann R_g de gênero g como acima, temos que o grupo Γ_g é gerado por $2g$ elementos, a saber, $\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g\}$. Consideramos que as arestas do polígono estão no sentido anti-horário na seguinte ordem

$$\tau_1, \sigma_1, \tau'_1, \sigma'_1, \tau_2, \sigma_2, \tau'_2, \sigma'_2, \dots, \tau_g, \sigma_g, \tau'_g, \sigma'_g$$

onde $\alpha_i(\tau_i) = \tau'_i$ e $\beta_i(\sigma_i) = \sigma'_i$, com $\{\tau_i, \sigma_i\}$ orientadas no sentido anti-horário e $\{\tau'_i, \sigma'_i\}$ orientadas no sentido horário para $i \in \{1, 2, \dots, g\}$ (veja a figura 1.3).

Os elementos $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^g$ do grupo Γ_g satisfazem a seguinte relação

$$\beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} \alpha_g \cdots \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1 = \text{Id}. \quad (1.11)$$

Figura 1.3: Um emparelhamento com $4g$ arestas para $g = 4$

Desta relação derivamos, a partir de um ponto inicial p_0 , os seguintes pontos

$$\begin{aligned} p_0^1 &= \alpha_1^{-1} \beta_1(p_0), & p_0^2 &= \alpha_1^{-1}(p_0), & p_0^3 &= \beta_1(p_0), & p_0^4 &= p_1 = \beta_1 \alpha_1^{-1}(p_0), \\ p_1^1 &= \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} \alpha_2(p_1), & p_1^2 &= \beta_2^{-1} \alpha_2(p_1), & p_1^3 &= \alpha_2(p_1), & p_1^4 &= p_2 = \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} \alpha_2(p_1), \\ p_2^1 &= \alpha_3^{-1} \beta_3^{-1} \alpha_3(p_2), & p_2^2 &= \beta_3^{-1} \alpha_3(p_2), & p_2^3 &= \alpha_3(p_2), & p_2^4 &= p_3 = \beta_3 \alpha_3^{-1} \beta_3^{-1} \alpha_3(p_2), \end{aligned}$$

.

.

.

$$p_{g-1}^1 = \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} \alpha_g(p_{g-1}), \quad p_{g-1}^2 = \beta_g^{-1} \alpha_g(p_{g-1}), \quad p_{g-1}^3 = \alpha_g(p_{g-1}), \quad p_{g-1}^4 = p_g = \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} \alpha_g(p_{g-1}).$$

No teorema 5 do artigo [25], Keen demonstrou que o polígono com vértices

$$\{p_0^1, p_0^2, p_0^3, p_0^4, p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, p_2^1, p_2^2, p_2^3, p_2^4, \dots, p_{g-1}^1, p_{g-1}^2, p_{g-1}^3, p_{g-1}^4, p_0^1\}$$

é um domínio fundamental onde p_0 é tomado como o ponto de interseção dos eixos⁶ de α_1 e β_1 . Este é chamado **polígono canônico Fricke**.

⁶Definimos o eixo de uma isometria hiperbólica γ como sendo a geodésica que conecta os pontos fixos de γ .

Note que os vértices do polígono apresentado acima dependem somente das isometrias $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$. Assim, exibiremos a seguir uma construção destas isometrias para um polígono regular P_g de $4g$ arestas, no disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$ com baricentro na origem $0 \in \mathbb{D}^2$.

Exemplo 1.2.10 Designaremos seus vértices no sentido anti-horário por $z_1, z_2, \dots, z_{4g}$ e suas arestas, também no sentido anti-horário, por

$$\tau_1, \tau'_1, \sigma_1, \sigma'_1, \dots, \tau_g, \tau'_g, \sigma_g, \sigma'_g$$

onde $(\tau_j, \tau'_j), (\sigma_j, \sigma'_j)$ são emparelhadas por α_j, β_j com $j \in \{1, 2, \dots, g\}$. Denotamos as matrizes de α_j e β_j respectivamente por M_{α_j} e M_{β_j} .

Dado z_1 , podemos representar cada vértice z_k por $z_k = |z_1| e^{i(k-1)\frac{2\pi}{4g}}$, $k = 2, 3, \dots, 4g$.

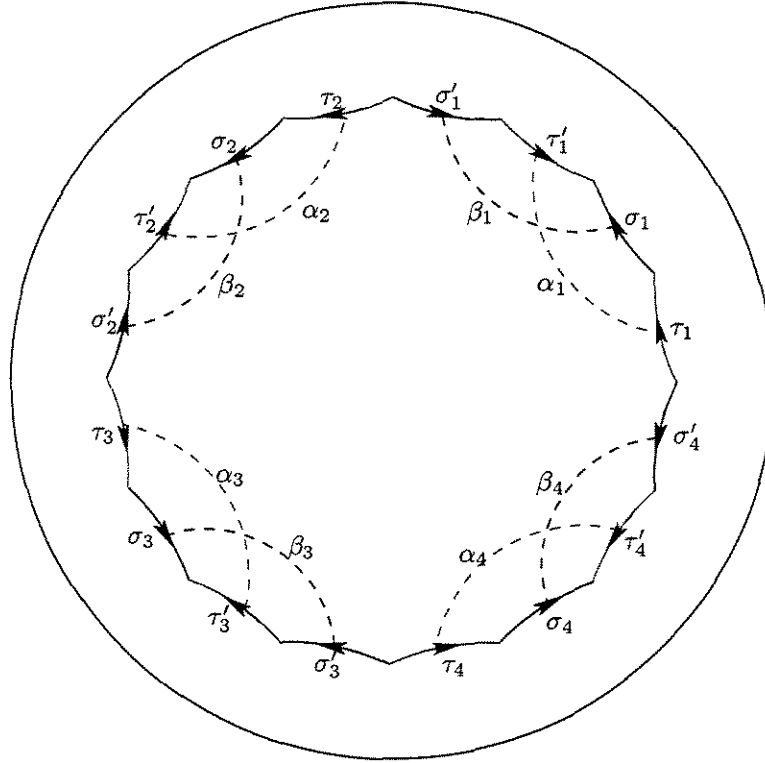


Figura 1.4: Ilustração do emparelhamento para $g = 4$

Consideramos as isometrias elípticas de ordem $\frac{4g}{k}$ que fixam o baricentro do polígono, definidas por

$$\begin{aligned} \rho_k : \mathbb{D}^2 &\rightarrow \mathbb{D}^2 \\ z &\mapsto e^{(i\frac{2\pi}{4g}k)} z, \quad k = 0, \dots, 4g-1, \end{aligned}$$

que é representada matricialmente por

$$M_{\rho_k} = \begin{pmatrix} e^{(i\frac{2\pi}{8g}k)} & 0 \\ 0 & e^{(-i\frac{2\pi}{8g}k)} \end{pmatrix}.$$

A regularidade do polígono nos garante que, conhecendo uma função de emparelhamento, digamos α_1 , podemos determinar todas as outras por conjugação, da seguinte forma:

$$\alpha_{k+1} = \rho_{4k} \circ \alpha_1 \circ \rho_{4k}^{-1}, \quad k = 1, \dots, g-1 \quad (1.12)$$

$$\beta_1 = \rho_1 \circ \alpha_1 \circ \rho_1^{-1} \quad (1.13)$$

$$\beta_{k+1} = \rho_{4k+1} \circ \alpha_1 \circ \rho_{4k+1}^{-1}, \quad k = 1, \dots, g-1. \quad (1.14)$$

Como trabalhamos em $\mathbb{D}^2$, temos que $\alpha_1(z) = \frac{az+b}{bz+a}$ e $\alpha_1^{-1}(z) = \frac{\bar{a}z-\bar{b}}{-bz+a}$.

A matriz de α_1 é dada por [2]:

$$M_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{i\frac{\pi}{2g}} & - \left(\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{i\frac{3\pi}{4g}} \\ \left(\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{-i\frac{3\pi}{4g}} & - \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{-i\frac{\pi}{2g}} \end{pmatrix}.$$

De (1.12), (1.13) e (1.14) mais alguma simplificações obtemos que as matrizes de α_{k+1} , β_1 e β_{k+1} são dadas por

$$\begin{aligned} M_{\alpha_{k+1}} &= \begin{pmatrix} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{i\frac{\pi}{2g}} & - \left(\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{i(\frac{3\pi}{4g} + \frac{2\pi}{g}k)} \\ \left(\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{-i(\frac{3\pi}{4g} + \frac{2\pi}{g}k)} & - \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{-i\frac{\pi}{2g}} \end{pmatrix} \\ M_{\beta_1} &= \begin{pmatrix} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{i\frac{\pi}{2g}} & - \left(\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{i(\frac{5\pi}{4g})} \\ \left(\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{-i(\frac{5\pi}{4g})} & - \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{-i\frac{\pi}{2g}} \end{pmatrix} \\ M_{\beta_{k+1}} &= \begin{pmatrix} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{i\frac{\pi}{2g}} & - \left(\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{i(\frac{3\pi}{4g} + \frac{\pi}{2g}(4k+1))} \\ \left(\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{-i(\frac{3\pi}{4g} + \frac{\pi}{2g}(4k+1))} & - \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2g}} \right) ie^{-i\frac{\pi}{2g}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

com $k = 1, 2, \dots, g-1$.

Observação 1.2.11 Implementamos um algoritmo para exibir o polígono fornecido por Linda Keen a partir da entrada das matrizes. Utilizamos estas matrizes dadas anteriormente como entrada e geramos duas figuras para os gêneros 2 e 4.

Finalizamos, fornecendo as ferramentas necessárias para normalizar um modelo fuchsiano.

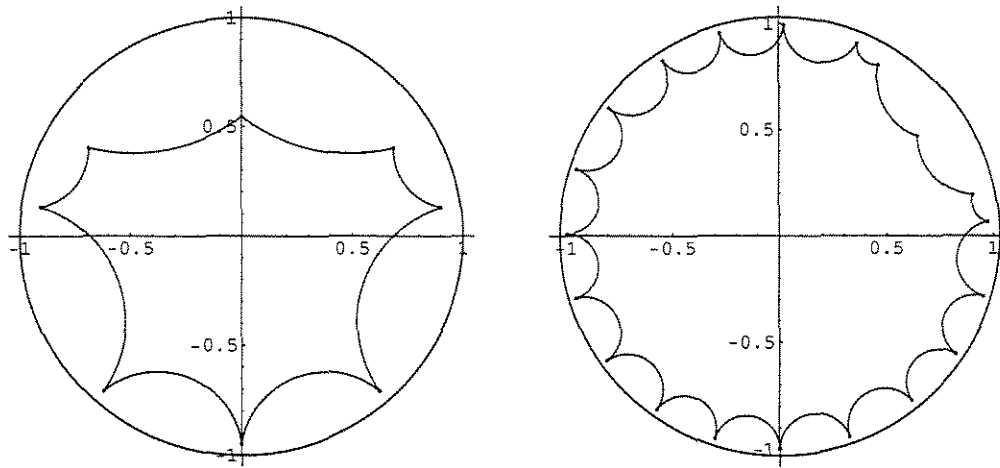


Figura 1.5: Polígonos gerados pelo Mathematica para $g = 2$ e $g = 4$

1.2.4 Normalização de modelos Fuchsianos

Lembramos que um modelo fuchsiano $\Gamma_g = \{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ que satisfaz as condições de normalização apresentadas na seção anterior é chamado um **modelo fuchsiano normalizado**.

Para conseguirmos um modelo fuchsiano normalizado a partir de um dado modelo fuchsiano $\Gamma_g = \{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$, desenvolveremos duas etapas:

- encontramos os pontos fixos $\{q_1, q_2\}$ e $\{q_3\}$ de β_g e α_g ;
- definimos uma aplicação S que leva os pontos fixos $\{q_1, q_2, q_3\}$ em $\{\infty, 0, 1\}$.

Para encontrar os pontos fixos, como trabalhamos em $\mathbb{H}^2$, suponha que

$$\begin{aligned}\beta_g(z) &= \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1 \\ \alpha_g(z) &= \frac{a'z + b'}{c'z + d'}, \quad a', b', c', d' \in \mathbb{R}, \quad a'd' - b'c' = 1.\end{aligned}$$

Os pontos fixos de β_g e α_g são dados por;

$$\begin{aligned}\beta_g(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = z \\ \alpha_g(z) &= \frac{a'z + b'}{c'z + d'} = z.\end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}cz^2 + (d - a)z - b &= 0 \\ c'z^2 + (d' - a')z - b' &= 0,\end{aligned}$$

equações quadráticas em z . Segue que

$$\left\{ \begin{aligned} q_1 &= \frac{(a-d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}, & q_2 &= \frac{(a-d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \\ q_3 &= \frac{(a'-d') + \sqrt{(a'+d')^2 - 4}}{2c'} \end{aligned} \right\}.$$

A aplicação que leva $\{q_1, q_2, q_3\}$ em $\{\infty, 0, 1\}$ é $S : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ dada pela matriz

$$S = \frac{1}{((q_1 - q_2)(q_2 - q_3)(q_3 - q_1))^2} \begin{bmatrix} (q_1 - q_3) & q_2(q_3 - q_1) \\ (q_2 - q_3) & -q_1(q_2 - q_3) \end{bmatrix}.$$

Esta transformação é única ([8], Proposição 3.9 pág. 48).

Assim, o modelo fuchsiano normalizado correspondente a Γ_g é dado pela conjugação de seus elementos, ou seja, este corresponde ao conjunto $S\Gamma_g S^{-1}$.

1.3 Geometria Hiperbólica Plana

A seguinte explanação do estudo de geometria hiperbólica se baseia nos modelos euclidianos para esta geometria. Apresentaremos os modelos do **plano de Lobatchevski** e do **disco de Poincaré** que são variedades riemannianas⁷ de dimensão dois. Antes, denotemos um ponto complexo $z \in \mathbb{C}$, na forma $z = x + iy$ onde $\operatorname{Re} z = x$ e $\operatorname{Im} z = y$.

Definição 1.3.1 *Definimos os modelos do **plano de Lobatchevski** e do **disco de Poincaré** como sendo os conjuntos*

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

$$\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

munidos com as respectivas métricas riemannianas

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

$$ds = \frac{2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - (x^2 + y^2)}.$$

⁷Uma variedade diferenciável com uma dada métrica riemanniana chama-se uma **variedade riemanniana**. A definição de métrica riemanniana pode ser encontrada na página 38 de [7].

As fronteiras dos modelos $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$ são dadas, respectivamente, pelos conjuntos⁸

$$\partial\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z = 0\} \cup \{\infty\}$$

$$\partial\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Utilizamos a notação,

$$\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$$

$$\overline{\mathbb{D}^2} = \mathbb{D}^2 \cup \partial\mathbb{D}^2$$

para denotar a união do modelo e sua fronteira ideal. Um ponto na fronteira ideal de um modelo é dito **ponto ideal**.

As geodésicas nos modelos $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$ são dadas por:

Teorema 1.3.2 (i) *As geodésicas de $(\mathbb{H}^2, ds)$ são as semiretas euclidianas de $\mathbb{H}^2$ ortogonais a $\partial\mathbb{H}^2$ e os semicírculos euclidianos de $\mathbb{H}^2$ com centro em $\partial\mathbb{H}^2$.*

(ii) *As geodésicas de $(\mathbb{D}^2, ds)$ são os diâmetros de $\mathbb{D}^2$ e os arcos de circunferência euclidianas de $\mathbb{D}^2$ ortogonais à $\partial\mathbb{D}^2$.*

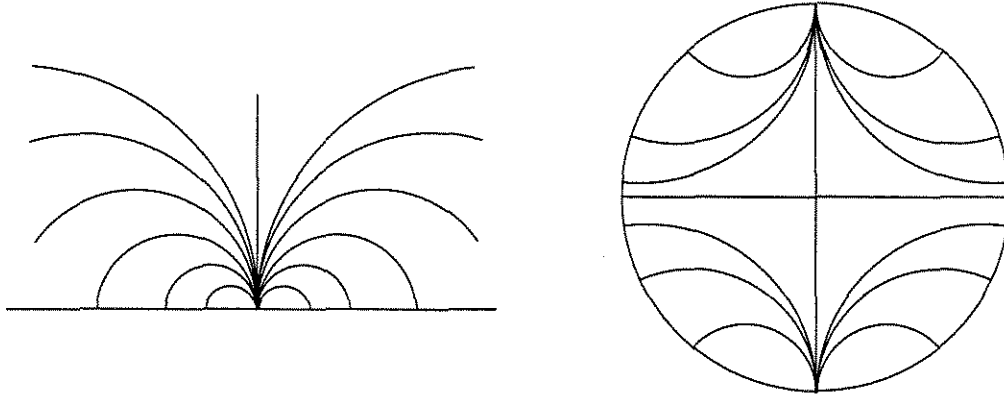


Figura 1.6: Geodésicas de $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$

A seguir vejamos expressões analíticas para a distância hiperbólica nos respectivos modelos.

⁸O ponto ∞ em $\partial\mathbb{H}^2$ é o ponto adicionado na compactificação de Alexandrov.

Distância hiperbólica

Apresentamos a definição de distância hiperbólica e exibimos expressões para a distância entre dois pontos nos dois modelos.

Sejam $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} \gamma: I &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ t &\longmapsto z(t) = x(t) + iy(t) \end{aligned}$$

curva parametrizada diferenciável por partes em $\mathbb{H}^2$.

Definição 1.3.3 Definimos o **comprimento hiperbólico** de γ em $\mathbb{H}^2$ como sendo

$$||\gamma|| = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt.$$

De modo análogo, para I como acima seja

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}: I &\longrightarrow \mathbb{D}^2 \\ t &\longmapsto z(t) = x(t) + iy(t) \end{aligned}$$

uma curva parametrizada diferenciável por partes em $\mathbb{D}^2$.

Definição 1.3.4 Definimos o **comprimento hiperbólico** de $\tilde{\gamma}$ em $\mathbb{D}^2$ como sendo

$$||\tilde{\gamma}|| = \int_a^b \frac{2\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{1 - (x(t)^2 + y(t)^2)} dt.$$

Com as definições de comprimento hiperbólico apresentamos a definição de distância hiperbólica.

Definição 1.3.5 Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$, temos que a **distância hiperbólica** entre z_1 e z_2 é definida por

$$d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2) = \inf \{ \gamma \}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as curvas γ , diferenciável por partes, ligando z_1 e z_2 em $\mathbb{H}^2$. De modo análogo, define-se a distância hiperbólica para $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^2$ o qual denotaremos por $d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2)$.

As expressões analíticas para as funções distância são apresentadas a seguir.

Teorema 1.3.6 *Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$, as seguintes expressões para $d_{\mathbb{H}^2}$ são equivalentes:*

$$\begin{aligned}
 (i) \quad d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2) &= \ln \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|} \\
 (ii) \quad \cosh(d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2)) &= 1 + \frac{|z_1 - z_2|}{2 \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2} \\
 (iii) \quad \sinh\left(\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2)\right) &= \frac{|z_1 - z_2|}{2(\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2)^{\frac{1}{2}}} \\
 (iv) \quad \cosh\left(\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2)\right) &= \frac{|z_1 - \bar{z}_2|}{2(\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2)^{\frac{1}{2}}} \\
 (v) \quad \tanh\left(\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2)\right) &= \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2|}.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Teorema 1.3.7 *Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^2$, a distância $d_{\mathbb{D}^2}$ pode ser expressada por alguma das seguintes equações equivalentes:*

$$\begin{aligned}
 (i^*) \quad d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2) &= \ln \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|} \\
 (ii^*) \quad \sinh^2\left(\frac{1}{2}d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2)\right) &= \frac{|z_1 - z_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \\
 (iii^*) \quad \cosh^2\left(\frac{1}{2}d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2)\right) &= \frac{|1 - z_1 \bar{z}_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \\
 (iv^*) \quad \tanh\left(\frac{1}{2}d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2)\right) &= \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \bar{z}_2|}.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Isometrias

Nesta parte, apresentamos a definição de isometria bem como as isometrias dos modelos $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$.

Definição 1.3.8 *Uma transformação $T : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma **isometria** se preserva a distância hiperbólica $d_{\mathbb{H}^2}$ sobre $\mathbb{H}^2$, isto é, $d_{\mathbb{H}^2}(T(z_1), T(z_2)) = d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2)$. Denotaremos este conjunto por $\operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$. Analogamente, temos que uma transformação $T : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ é uma **isometria** se preserva a distância hiperbólica $d_{\mathbb{D}^2}$ sobre $\mathbb{D}^2$, isto é, $d_{\mathbb{D}^2}(T(z_1), T(z_2)) = d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2)$. Denotaremos este conjunto por $\operatorname{Isom}(\mathbb{D}^2)$.*

Os conjuntos $\operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$ e $\operatorname{Isom}(\mathbb{D}^2)$ têm estrutura de grupo.

Consideremos o grupo

$$\operatorname{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } \det M = 1 \right\}.$$

Definimos

$$\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R}) = \frac{\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})}{\{\pm \operatorname{Id}\}}$$

como sendo o **grupo topológico especial linear projetivo** e a transformação

$$\begin{aligned} T_M: \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

onde $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$. Notemos que $T_M(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$.

É possível estender o domínio de T_M a $\overline{\mathbb{H}^2}$, para isto é suficiente definirmos T_M do seguinte modo:

$$\begin{cases} T_M(\infty) = \infty, & \text{se } c = 0 \\ T_M(\infty) = \frac{a}{c} \text{ e } T_M\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty, & \text{se } c \neq 0 \\ T_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

$\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, agindo em $\mathbb{H}^2$ como transformações de Möbius, é o grupo de isometrias que preservam orientação do plano hiperbólico.

Para obtermos as isometrias que revertem orientação, consideramos as inversões em círculos e reflexões em hiperplanos. Denotaremos um círculo em $\widehat{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ por $C = C(c; r)$ sendo o raio r e o centro $c \in \mathbb{R}^2$. A um hiperplano compactificado denotamos por $P = P_t(c) \cup \{\infty\}$ sendo $P_t(c) = \{z \in \mathbb{R}^2 - \{0\} : \langle c, z \rangle = t\}$ subespaço afim de $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.3.9 Dado um círculo $C = C(c; r)$ no espaço euclidiano a **inversão** $i_C: \widehat{\mathbb{R}^2} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^2}$ em torno de C é a aplicação tal que

$$\begin{aligned} i_C: \widehat{\mathbb{R}^2} &\rightarrow \widehat{\mathbb{R}^2} \\ z &\longmapsto \begin{cases} \infty; & \text{se } z = c \\ c; & \text{se } z = \infty \\ \text{o único ponto da reta } \overleftrightarrow{cz} \text{ tal que } |c - z||c - i_C(z)| = r^2; & \text{se } z \neq c, \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Definição 1.3.10 Dado um hiperplano P no espaço euclidiano compactificado, a **reflexão** $i_P: \widehat{\mathbb{R}^2} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^2}$ em relação a P é a aplicação tal que

$$\begin{aligned} i_P: \widehat{\mathbb{R}^2} &\rightarrow \widehat{\mathbb{R}^2} \\ z &\longmapsto \begin{cases} \infty; & \text{se } z = \infty \\ \text{o único ponto } i_P(z) \text{ tal que a reta } \overline{zi_P(z)} \text{ é ortogonal a } P \text{ e} \\ \text{intercepta } P \text{ no ponto médio de } \overline{zi_P(z)}; & \text{se } z \neq \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Definamos também o grupo

$$\text{PSL}^*(2, \mathbb{R}) = \frac{\text{SL}^*(2, \mathbb{R})}{\{\pm \text{Id}\}}$$

sendo $SL^*(2, \mathbb{R})$ o grupo das matrizes 2×2 com determinante ± 1 . Com esta definição, $PSL(2, \mathbb{R})$ é subgrupo de índice dois de $PSL^*(2, \mathbb{R})$ e temos o seguinte resultado.

Proposição 1.3.11 *$Isom(\mathbb{H}^2)$ é isomorfo a $PSL^*(2, \mathbb{R})$.*

Uma consequência é que podemos pensar nas isometria de $\mathbb{H}^2$ como

$$Isom(\mathbb{H}^2) = \left\langle T_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \varphi(z) = -\bar{z} \right\rangle, M \in SL(2, \mathbb{R}).$$

Notamos que φ é uma reflexão pelo eixo imaginário no plano $\mathbb{C}$.

O conjunto $Isom(\mathbb{D}^2)$ pode ser representado de modo análogo. Para isto, tomemos

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } \det M = 1 \right\}$$

e a transformação

$$\begin{aligned} T_M : \mathbb{D}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

o detalhe aqui é a imposição da condição $c = \bar{b}$ e $d = \bar{a}$ para que tenhamos $T_M(\mathbb{D}^2) = \mathbb{D}^2$. Assim, considerando $\Upsilon = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \text{ e } \det M = 1 \right\} \subset SL(2, \mathbb{C})$ e definindo

$$\Omega = \frac{\Upsilon}{\{\pm \text{Id}\}}$$

pode ser demonstrado que

$$Isom(\mathbb{D}^2) \approx \left\langle T_M(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, \varphi(z) = -\bar{z} \right\rangle, M \in \Omega.$$

Uma aplicação importante que nos permite ora trabalhar com o modelo do semi-plano $\mathbb{H}^2$ e ora trabalhar com o modelo do disco $\mathbb{D}^2$ é a transformação F^9 que define uma isometria bijetora entre $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$ onde

$$F(z) = i + \frac{2(\bar{z} - i)}{|\bar{z} - i|^2} = \frac{iz + 1}{z + i}. \quad (1.17)$$

⁹Definimos $F = i_C \circ i_\infty$ sendo i_C a inversão sobre o círculo $C(i; \sqrt{2})$ e i_∞ a reflexão $i_\infty(z) = \bar{z}$. Ainda, i_C pode ser expressada por

$$i_C(z) = i + \frac{2(z - i)}{|z - i|^2}.$$

Como F é transformação de Möbius determinada pela matriz $M_F = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ sua inversa é dada pela matriz $M_{F^{-1}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

Assim, a cada isometria $\zeta : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ temos uma isometria correspondente em $\mathbb{D}^2$ dada por $F \circ \zeta \circ F^{-1}$.

Para $\zeta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$, temos

$$F \circ \zeta \circ F^{-1} : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$$

$$z \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+d) + i(b-c) & (b+c) + i(a-d) \\ (b+c) - i(a-d) & (a+d) - i(b-c) \end{pmatrix} (z). \quad (1.18)$$

Note também que, para uma dada transformação de Möbius $\xi : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ temos uma correspondente em $\mathbb{H}^2$ dada por $F^{-1} \circ \xi \circ F$.

Para $\zeta = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$, temos

$$F^{-1} \circ \zeta \circ F : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$$

$$z \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a + \operatorname{Im} b & \operatorname{Re} b + \operatorname{Im} a \\ \operatorname{Re} b - \operatorname{Im} a & \operatorname{Re} a - \operatorname{Im} b \end{pmatrix} (z). \quad (1.19)$$

1.3.1 Trigonometria hiperbólica

Na sequência consideramos triângulos com os três ângulos estritamente positivos, e temos:

Teorema 1.3.12 *Seja Δ um triângulo com ângulos α , β e γ e lados opostos a , b e c com comprimentos $|a|$, $|b|$ e $|c| < \infty$ respectivamente. Então valem as seguintes igualdades:*

(i) *Lei do Seno:*

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

(ii) *Lei do cosseno I:*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma.$$

(iii) *Lei do cosseno II:*

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Observação 1.3.13 *A segunda lei dos cossenos não possui análogo euclidiano, pois esta significa que os ângulos de um triângulo determinam o comprimento de suas arestas! Uma consequência deste fato é que dados dois triângulos com os mesmos ângulos, existe isometria de $\mathbb{H}^2$ em que um é a imagem do outro.*

Área Hiperbólica

Dado um subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{H}^2$, definimos sua área $\mu(\mathcal{A})$ como sendo a integral,

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \frac{dx dy}{y^2}, \quad (1.20)$$

se esta existir e for finita. Áreas, assim como comprimentos, são invariantes por isometrias, isto é, dada isometria T temos que $\mu(T(\mathcal{A})) = \mu(\mathcal{A})$. Visto isso, apresentamos a seguir uma versão simplificada do Teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema 1.3.14 *Seja Δ um triângulo em $\mathbb{H}^2$ com ângulos internos α, β e γ . Então,*

$$\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Uma consequência imediata do teorema é o corolário abaixo que usamos para calcular a área de um polígono regular.

Corolário 1.3.15 *Se P é um polígono com ângulos interiores $\theta_1, \dots, \theta_n$, então $\mu(P) = (n-2)\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n)$. Em particular, se o polígono for regular e tiver todos os ângulos iguais a θ , temos que $\mu(P) = (n-2)\pi - n\theta = n(\pi - \theta) - 2\pi$.*

Observação 1.3.16 *Outra consequência importante deste teorema é o fato de a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico ser estritamente menor do que π , podendo ser inclusive 0 quando todos os vértices forem vértices ideais¹⁰. Neste caso obtemos um triângulo de área máxima, igual a π .*

Área de triângulos e círculos: A seguir apresentamos o teorema de Pitágoras hiperbólico.

Teorema 1.3.17 *Dado um triângulo com ângulos $\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}$ e lados opostos de comprimentos a, b, c , temos que*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$

¹⁰Quando um triângulo possui vértices sobre a fronteira do plano hiperbólico, nós chamamos estes vértices de **vértices ideais**.

A prova deste é uma consequência direta da segunda lei dos cossenos. Temos ainda as seguintes relações entre dois lados e um ângulo:

Teorema 1.3.18 *Para algum triângulo com ângulos $\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}$ e lados opostos de comprimentos a, b, c temos*

$$\begin{aligned} (i) \quad \tanh b &= \sinh a \tan \beta; \\ (ii) \quad \sinh b &= \sinh c \sin \beta; \\ (iii) \quad \tanh a &= \tanh c \cos \beta. \end{aligned}$$

Vejamos então uma fórmula para a área de um disco hiperbólico de raio r e o comprimento de um círculo hiperbólico de raio r .

Teorema 1.3.19 *i) A área de um disco hiperbólico de raio r é $4\pi \sinh^2 \left(\frac{r}{2}\right)$;
ii) O comprimento de um círculo hiperbólico de raio r é $2\pi \sinh r$.*

Considerando um triângulo Δ de vértices v_a, v_b, v_c e ângulos α, β, γ , temos que os bissetores dos ângulos (bissetrizes dos ângulos) cruzam-se em um ponto c ([4], Capítulo 7 - pág 152). O círculo com centro em c é chamado **círculo inscrito** do triângulo Δ e seu raio é dado por:

Teorema 1.3.20 *O raio r do círculo inscrito no triângulo Δ é dado por*

$$\tanh^2 r = \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1}{2(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma)}.$$

As demonstrações dos resultados ora apresentados podem ser encontrados em ([4], Capítulo 7).

Capítulo 2

Empacotamento de Esferas

Neste capítulo exibimos os conceitos básicos sobre empacotamento de esferas¹, cujo principal objetivo é obter a maior densidade possível de empacotamento, isto é, queremos maximizar a proporção entre o volume das bolas e o volume total do recipiente que as contém. Apesar de nosso interesse primordial ser em empacotamento, apresentamos em paralelo resultados sobre coberturas² pois a introdução destes conceitos não exige esforços adicionais.

Com o objetivo de levar estes conceitos para um espaço métrico $\mathbb{E}$ qualquer precisamos admitir que o conceito de convexidade possa ser utilizado substituindo o fato de serem bolas em $\mathbb{R}^n$. Além disso, é necessário que os membros desta nova família em $\mathbb{E}$ tenham interiores não vazios e uma certa noção de congruência substituindo o fato das bolas em $\mathbb{R}^n$ serem disjuntas e possuírem o mesmo raio. Portanto, não perdemos muito se assumirmos que o espaço $\mathbb{E}$ seja uma variedade riemanniana. Também, consideraremos somente espaços de curvatura constante devido à homogeneidade e ao grande uso de simetrias.

Alguns resultados a respeito de empacotamentos e coberturas podem ser encontrados na obra de Lagrange [27] (que realizou estudos sobre a teoria de formas quadráticas e quem implicitamente determinou a densidade de empacotamentos de reticulados de um disco em $\mathbb{R}^2$) e de Gauss [17] em 1831 que explicitamente considerou empacotamentos reticulados de esferas em $\mathbb{R}^3$. Entretanto, foi Minkowski que sistematizou estes temas dentro de uma teoria isolada e denominou-a de Geometria dos Números. Um desenvolvimento da teoria de empacotamentos e coberturas foi estimulado pela sua

¹Um empacotamento de esferas em $\mathbb{R}^n$ é a uma família $\{B_i\}$ de bolas disjuntas duas a duas, $B_i \subset \mathbb{R}^n$, de mesmo raio r .

²Uma **cobertura** consiste de arranjos de regiões cuja união contém o domínio a ser coberto.

conexão com a Teoria dos Números e a Cristalografia, porém mais recentemente tem sido desenvolvida numa gama muito grande de teorias incluindo uma grande quantidade de problemas. Alguns procedem de vários conceitos de eficiência de densidades de outros tipos de arranjos, enquanto outros são caracterizados por tipos especiais de conjuntos convexos.

O presente capítulo está dividido em duas seções: empacotamento de esferas em espaços métricos e resultados recentes. Na primeira seção apresentamos as definições de empacotamento além da definição de densidade que estaremos utilizando neste texto. A segunda contém um pouco sobre as recentes pesquisas de empacotamentos de esferas.

Prossigamos agora com os conceitos necessários para a definição de empacotamento.

2.1 Empacotamento de Esferas em Espaços Métricos

Seja $\mathbb{E}$ um espaço métrico. Denotaremos por $\mathbb{E}^n$ um dos espaços de curvatura gaussiana constante -1 , 0 ou 1 ; a saber, o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$, euclidiano $\mathbb{R}^n$ ou a esfera unitária $\mathbb{S}^n$.

Começamos com algumas definições necessárias para apresentar a definição de empacotamentos

Definição 2.1.1 *Seja $\mathbb{E}$ um espaço métrico. Uma **geodésica** em $\mathbb{E}$ é um caminho $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{E}$ tal que, para todo $t \in I$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(\alpha(s), \alpha(s')) = |s - s'|$ se $|s - t|, |s' - t| < \varepsilon$ para quaisquer $s, s' \in I$.*

Definição 2.1.2 *Seja $\mathbb{E}$ um espaço métrico. Um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}$ é um subconjunto fechado com interior não vazio. Se em $\mathbb{E}$ existirem geodésicas, diremos que $\mathcal{D}$ é **convexo geodesicamente** se toda geodésica $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{E}$ minimal com pontos inicial e final $\alpha(0)$ e $\alpha(l)$ em $\mathcal{D}$ estiver contida em $\mathcal{D}$.*

Agora apresentamos a definição de empacotamento de esferas, recobrimentos e a seguir mais algumas definições que nos serão úteis mais adiante.

Definição 2.1.3 *Um **empacotamento** por um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}$ é uma família $\{\mathcal{D}_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{E}$ sendo todos isométricos a $\mathcal{D}$ com $\text{int}(\mathcal{D}_i) \cap \text{int}(\mathcal{D}_j) = \emptyset$ se $i \neq j$.*

Definição 2.1.4 *Uma **cobertura** por um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}$ é uma família $\{\mathcal{D}_i\}_{i \in I}$ de conjuntos isométricos a $\mathcal{D}$ com $\bigcup_{i \in I} \mathcal{D}_i = \mathbb{E}$. De modo geral, assume-se que os domínios são convexos.*

A noção mais importante associada com empacotamentos e coberturas é a de densidade. Para um empacotamento de $\mathbb{E}$, a densidade D representa, intuitivamente, a razão entre a soma das medidas (áreas em $\mathbb{E}^2$, volumes em $\mathbb{E}^3$, etc.) dos conjuntos convexos empacotados e a do espaço no qual foram empacotados, que é sempre um número menor ou igual a 1. Analogamente, para coberturas, temos que C é a razão entre a soma do volume dos conjuntos convexos e o espaço inicialmente coberto, donde temos que é sempre um número maior ou igual a 1. A princípio nos contentaremos com estas definições de densidade, pois outras mais precisas envolvem questões de limites e serão tratadas mais adiante.

Os principais problemas em ambas as teorias são: dada uma família de empacotamentos encontrar uma densidade que é máxima e, dada uma família de coberturas selecione uma densidade que é mínima. Por exemplo, para uma dado conjunto K convexo, considere a família de todos os empacotamentos de $\mathbb{E}$ consistindo de cópias congruentes a K . Quais dos empacotamentos é de densidade máxima? Uma demonstração de que a densidade máxima é atingida pode ser encontrada em [19]. Esta densidade máxima é denotada por $D(K)$ e é chamada de *densidade do empacotamento* de K . A densidade mínima de cobertura de K , $C(K)$, é definida analogamente.

Como visto até o presente, temos que $D(K) \leq 1 \leq C(K)$.

Considerando a importância dos reticulados para empacotamentos de esferas e coberturas apresentaremos agora suas definições.

Definimos um domínio de Voronoi-Dirichlet do mesmo modo que o fizemos no caso hiperbólico. De modo mais genérico, temos

Definição 2.1.5 *Seja Γ um subgrupo discreto de isometrias de $\mathbb{E}^n$ e um ponto $p \in \mathbb{E}^n$ que não é fixo por qualquer elemento de Γ distinto da Id. Um **domínio de Voronoi-Dirichlet** $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ de Γ centrado em p , é o conjunto*

$$\mathcal{D}_p(\Gamma) = \{x \in \mathbb{E}^n \mid d(x, p) \leq d(x, T(p)), \forall T \in \Gamma\}.$$

Definição 2.1.6 *Um subgrupo discreto $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ é um reticulado se $\mathbb{E}^n/\Gamma$ tiver volume finito, ou seja, se algum (e portanto todo) **domínio de Voronoi-Dirichlet** tiver volume finito.*

Definição 2.1.7 *Um empacotamento $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{E}^n$ é um **empacotamento reticulado** se para alguma bola $B_1 \in \mathcal{B}$ existir um reticulado Γ com $\Gamma(B_1) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(B_1) = \bigcup B_i$. Em particular, se cada B_i for uma esfera de centro c_i .*

Se a família de empacotamentos é restrita a reticulados de K , então obtemos $D_\Gamma(K)$, a densidade máxima de empacotamentos reticulados de K ou, analogamente para coberturas, a densidade de coberturas reticulados de K , $C_\Gamma(K)$. Nestes espaços, com algumas restrições, é possível falar em densidade. Assim, temos que

$$D_\Gamma(K) \leq D(K) \leq 1 \leq C(K) \leq C_\Gamma(K) \quad (2.1)$$

para todo domínio K .

Determinar os valores de $D(K)$, $D_\Gamma(K)$, $C(K)$, e $C_\Gamma(K)$ é um problema diferente para cada conjunto K , Γ em $\mathbb{E}^n$ e usualmente muito difícil. Em vista destas dificuldades, o principal problema da teoria de empacotamentos e coberturas é obter boas estimativas da densidade em termos de limites superiores e inferiores para uma classe geral de conjuntos convexos.

Obviamente, existem constantes $p > 0$ e $c > 1$ (dependendo somente de n) tais que $p \leq D_\Gamma(K)$ e $C_\Gamma(K) \leq c$ para todo $K \in \mathbb{R}^n$, bastando para isto considerarmos um empacotamento e um recobrimento específico. Alguns dos principais problemas com respeito às melhores constantes possíveis para as correspondentes densidades $D(K)$, $D_\Gamma(K)$, $C(K)$, $C_\Gamma(K)$ e para alguma classe especial de conjuntos convexos, pode ser dado por conjuntos centralmente simétricos. Também, uma indagação sobre as desigualdades apresentadas em (2.1) é que se as restrições sobre K podem ter igualdades, ou, mais especificamente, para descrever classes de conjuntos convexos K para as quais teremos igualdades em (2.1).

Nas próximas seções, apresentaremos as definições de densidade e alguns dos principais resultados sobre empacotamentos em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}^n$. Porém, antes de prosseguirmos lembramos ao leitor que quando falamos em empacotamento de esferas, temos sempre em mente que estes são associados a reticulados, e que iremos utilizar $\mathbb{E}^n$ para representar qualquer um dos espaços de curvatura constante citados anteriormente.

2.1.1 Densidade de empacotamentos em $\mathbb{R}^n$

Seja $\mathcal{A} = \{B_k\}$ uma família de esferas disjuntas de raio idêntico e $B(x_0, r)$ uma esfera de raio r centrada em um ponto qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$. No caso euclidiano, podemos considerar a definição de densidade do empacotamento como

$$d(\mathcal{A}) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\bigcup_{\forall k} B_k \right) \cap B(x_0, r) \right)}{\text{vol}_{\mathbb{R}^n} (B(x_0, r))}. \quad (2.2)$$

No entanto, a existência de um máximo para a função densidade não dá qualquer indicação sobre como determinar este máximo, e muito menos sobre o empacotamento para o qual este máximo é atingido. Na realidade, conhece-se o empacotamento ótimo em poucos casos.

Por um resultado de A. Thue [39], temos que o valor $d_2 \approx 0.90690$ é a densidade máxima para empacotamento de discos em $\mathbb{R}^2$, e ele é atingido por um empacotamento associado com reticulados do tipo A_2 ([41], p. 94 – 95). Para $n = 3$, não existe um consenso na comunidade matemática sobre a exatidão da prova apresentada por S.P. Ferguson e T.C. Hales em 1998 (veja [33] para uma discussão sobre a matéria). Nos casos $n > 3$, a questão da densidade de empacotamento em $\mathbb{R}^n$ é um problema em aberto (veja conjectura de Kepler's, [20], [22]). Para $2 \leq n \leq 8$, as densidades de empacotamentos reticulados $\mathcal{B}_\Gamma$ são conhecidas e todas associadas a reticulados Γ dos tipos A , D , E ([38], tabela 1, p. 3). Para se calcular o valor da densidade, basta lembrar que, no caso de um empacotamento reticulado $\mathcal{B}_\Gamma$, a densidade $d_\Gamma = d(\mathcal{B}_\Gamma)$ é igual a razão do volume de uma bola $B \in \mathcal{B}_\Gamma$ pelo volume de um domínio fundamental $\mathcal{D}_\Gamma$ do reticulado (veja [39] para detalhes sobre a tabela abaixo).

n	Γ	d_Γ	Matemáticos	Ano
2	A_2	$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cong 0.90690$	J. L. Lagrange	1773
3	D_3	$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \cong 0.74048$	C. F. Gauss	1831
4	D_4	$\frac{\pi^2}{16} \cong 0.61685$	A. Korkine-G. Zolotareff	1872
5	D_5	$\frac{\pi^2}{15\sqrt{2}} \cong 0.46526$	A. Korkine-G. Zolotareff	1877
6	E_6	$\frac{\pi^3}{48\sqrt{3}} \cong 0.37295$	H. F. Blichfeldt	1925
7	E_7	$\frac{\pi^3}{105} \cong 0.29530$	H. F. Blichfeldt	1926
8	E_8	$\frac{\pi^4}{384} \cong 0.25367$	H. F. Blichfeldt	1934

Tabela 1. Densidade de empacotamentos reticulados em $\mathbb{R}^n$

Considerando a dificuldade de se tratar diretamente a questão, procura-se limitantes superiores ótimos para a função densidade. O principal deles é dado pela densidade simplicial d_n que apresentaremos na subseção 2.1.3.

2.1.2 Densidade de empacotamentos em $\mathbb{H}^n$

A fim de termos um conceito de densidade sem ambiguidades consideramos empacotamentos reticulados³. Mesmo, assim, para contornarmos o problema da definição de

³Para mais informações sobre os problemas na definição da densidade veja [11].

densidade, precisamos de um novo conceito de densidade [11].

Seja $\mathcal{B} = \mathcal{B}(r)$ um empacotamento de esferas de raio r , $\mathcal{B} = \{B_i = B(c_i, r)\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{D} := \mathcal{D}(B_{i_0}, \mathcal{B}) = \{p \in \mathbb{H}^n | d(p, c_{i_0}) \leq d(p, c_j), \forall j \in \mathbb{N}\}$. Para contornar esta dificuldade, introduzimos o conceito de densidade local. Consideramos domínios $\mathcal{D}$ de Voronoi-Dirichlet como visto na subseção 2.1.5.

Definição 2.1.8 [39] *A densidade local $ld_n(B, \mathcal{B})$ de B em $\mathcal{B}$ é dada pela densidade de B com respeito ao seu domínio de Voronoi-Dirichlet $\mathcal{D}$, isto é,*

$$ld_n(B, \mathcal{B}) := \frac{vol_n(B)}{vol_n(\mathcal{D})}. \quad (2.3)$$

onde $\mathcal{D} \supset B$ é a célula de Voronoi-Dirichlet que o contém. É imediato constatar que $ld_n(B, \mathcal{B}) < 1$.

É fácil constatar que, se $\mathcal{B}$ for um empacotamento reticulado, então a densidade local independe da escolha de $B \in \mathcal{B}$, pois neste caso, todos os domínios de Voronoi-Dirichlet são isométricos. Assim, esta é uma noção razoável de densidade e é com esta que trabalharemos ao longo deste trabalho. Mais ainda, se $d(\mathcal{B})$ existe, então $d(\mathcal{B}) \leq ld_n(\mathcal{B})$.

De modo geral, assim como no caso euclidiano, pouco é conhecido sobre empacotamentos ótimos e boa parte da literatura se dedica a encontrar limitantes superiores para a densidade local. O principal dentre eles, é novamente a densidade simplicial.

2.1.3 Densidade simplicial

Iniciamos com a apresentação de conceitos necessários para sua definição.

Definição 2.1.9 *Seja P um poliedro convexo n -dimensional em $\mathbb{E}^n$. Sejam S e T faces de P . Definimos o ângulo diedral $\alpha = \alpha(S, T)$ de P entre S e T da seguinte maneira:*

- Se $S = T$, então o ângulo diedral α é π .
- Se S e T são distintos, lados não adjacentes de P , então α é 0.
- Se S e T são adjacentes então, se $\mathbb{E} = S^1$, α é o ângulo entre os pontos finais de P . De outra forma, dado $x \in S \cap T$, seja $m_S(t)$ a geodésica passando por x ortogonal a S tal que $m_S(0) = x$ e $m_S(t)$ pertence ao exterior de P para $t > 0$ (suficientemente pequeno). Defina $m_T(t)$ de modo análogo e seja θ o ângulo entre $m'_S(0)$ e $m'_T(0)$. Então $\alpha = \pi - \theta$ [36].

Definição 2.1.10 Um **n -simplexo** em $\mathbb{E}^n$ é o fecho convexo (por geodésicas) de $n+1$ pontos não contidos em um hiperplano (hiper-variedade totalmente geodésica).

Definição 2.1.11 Um n -simplexo em $\mathbb{E}^n$, é um **simplexo regular** de dimensão n se seu grupo de simetrias atua transitivamente sobre suas faces k -dimensionais ($0 \leq k \leq n-1$). Neste caso, ele tem um único baricentro (o ponto fixo do grupo de simetrias), e todas as suas arestas e ângulos diedrais são de medida iguais. Denotaremos por $S_{reg} = S_{reg}(\alpha) \subset \mathbb{E}^n$ um simplexo regular de dimensão n e de ângulo diedral $2\alpha \in [0, 2\pi]$.

No contexto hiperbólico, admitimos os vértices de um simplexo regular estarem no infinito, caso em que o simplexo é chamado ideal e será denotado por $S_{reg}^\infty = S_{reg}^\infty(2\alpha_\infty)$.

Em geral, $S_{reg}(2\alpha)$ é realizável [39]

$$\begin{cases} \text{em } \mathbb{S}^n \text{ para } -1 < \cos(2\alpha) < \frac{1}{n} \\ \text{em } \mathbb{R}^n \text{ para } \cos(2\alpha) = \frac{1}{n} \\ \text{em } \overline{\mathbb{H}^n} \text{ para } \frac{1}{n} < \cos(2\alpha) \leq \frac{1}{n-1} \end{cases} \quad (2.4)$$

No caso limite $2\alpha \rightarrow 2\alpha_0^n := \arccos \frac{1}{n}$, um n -simplexo não-Euclidiano $S_{reg}(2\alpha)$ degenera em dimensão e atinge o volume zero. Note que $\alpha_\infty^n = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{n-1} = \alpha_0^{n-1} < \alpha_0^n < \frac{\pi}{4}$.

No caso Euclidiano, $S_{reg}(2\alpha)$ é determinado por seus ângulos diedrais 2α a menos de homotetias, nos espaços de curvatura $k \neq 0$, o ângulo diedral 2α e o comprimento $2r$ da aresta de $S_{reg}(2\alpha)$ são relacionados por

$$\cos\left(\frac{2r}{b}\right) = \frac{\cos(2\alpha)}{1 - (n-1)\cos(2\alpha)}, \quad (2.5)$$

onde $b := \sqrt{k} \in \{1, i\}$.

Introduziremos o conceito de **densidade simplicial** $d_n(r)$, como sendo um limitante superior para a densidade local.

Definição 2.1.12 Considere $n+1$ bolas em $\mathbb{E}^n$ de mesmo raio, mutuamente tangentes entre si. Seus centros determinam um n -simplexo regular $S_{reg} \subset \mathbb{E}^n$ de aresta de comprimento $2r$. Definimos $d_n(r)$ por

$$d_n(r) = (n+1) \frac{\text{vol}_n(B \cap S_{reg})}{\text{vol}_n(S_{reg})} \quad (2.6)$$

e B é uma das bolas em questão.

Uma vez que apresentamos a definição de d_n e esta envolve o volume, então se faz necessário apresentar uma fórmula para calcular o volume de uma bola em $\mathbb{H}^n$ [28].

Observação 2.1.13 *O volume de uma bola hiperbólica B_r de raio r centrada em p é dado por*

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(B_r(p)) &= \Omega_{n-1} \int_0^r \sinh^{n-1} t \, dt \\ &= \Omega_{n-1} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} \int_0^r e^{(n-2j)t} dt \right), \end{aligned}$$

onde $\Omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ e Γ é a função gama ([14], [39]). Então segue

$$\begin{cases} \text{se } j = \frac{n}{2} & \implies \text{vol}_n(B_r(p)) = \Omega_{n-1} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} r \right) \\ \text{se } j \neq \frac{n}{2} & \implies \text{vol}_n(B_r(p)) = \Omega_{n-1} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{(n-2j)} \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} (e^{(n-2j)r} - 1) \right) \end{cases}$$

Observação 2.1.14 *No caso euclidiano, a função densidade simplicial independe do raio r , com isso*

$$d_n = (n+1) \frac{\text{vol}_n(B \cap S_{\text{reg}})}{\text{vol}_n(S_{\text{reg}})}$$

e B é uma das bolas em questão.

Um resultado importante, apresentado por K. Böröczky ([5], teorema 1), para empacotamentos de esferas de $\mathbb{E}^n$, é o seguinte:

Teorema 2.1.15 *Seja $\mathbb{E}^n$ o espaço de curvatura constante, e considere um empacotamento $\mathcal{B}$ de esferas de raio r . No caso esférico suponha que $r < \frac{\pi}{4}$. Então a densidade de cada esfera em suas células de Voronoi-Dirichlet não pode exceder a densidade de $n+1$ esferas de raio r mutuamente tangentes para o simplexo expandido por seus centros, isto é,*

$$ld_n(B, \mathcal{B}) \leq d_n(r), \forall B \in \mathcal{B}.$$

Neste momento, parece-nos apropriado apresentar alguns resultados recentes de empacotamento de esferas que acreditamos serem relevantes para a teoria. Mediante estes, constataremos a relevância do teorema 2.1.15 de Böröczky.

2.2 Resultados Recentes

Seja R uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$. Em [3], Bavard determinou o tamanho máximo dos discos métricos⁴ mergulhados dentro de R e o tamanho mínimo dos discos que recobrem R . O teorema apresentado a seguir explicita tais resultados.

Teorema 2.2.1 *Seja R uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$ e $\beta_g = \frac{\pi}{12g-6}$.*

(i) *Se um disco aberto de raio r é mergulhado dentro de R então*

$$\cosh r \leq \frac{1}{2 \sin \beta_g}.$$

(ii) *Se um disco fechado de raio r recobre R então*

$$\cosh r \geq \frac{1}{\sqrt{3} \tan \beta_g}.$$

(iii) *Se um destes discos é atingido por um certo disco, o outro também o será por um disco concêntrico. Neste caso, R é uma superfície modular.*

(iv) *Para todo gênero $g \geq 2$ estes limitantes são atingidos (simultaneamente) por certas superfícies modulares.*

Uma consequência deste Teorema é a obtenção de dois invariantes globais de R : a **sístole** $l(R)$ e o **diâmetro** $d(R)$. A sístole, em superfícies com curvatura negativa, é o menor comprimento de uma geodésica fechada.

Corolário 2.2.2 *Para toda superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$, temos:*

$$\cosh \frac{l(R)}{2} \leq \frac{1}{2 \sin \beta_g} \quad e \quad \cosh d(R) \geq \frac{1}{\sqrt{3} \tan \beta_g}.$$

O que nos chama a atenção nestes resultados é a idéia utilizada na demonstração do teorema, que consiste essencialmente em confrontar a definição de densidade hiperbólica (seção 2.1.2 - definição 2.1.8) com a definição de densidade simplicial (seção 2.1.3 - definição 2.1.12), que conforme foi demonstrado por Borösky [5], é um limitante superior para densidade de empacotamento (teorema 2.1.15).

⁴Estes discos mergulhados são homeomorfos a um disco hiperbólico.

A relevância de tais resultados para empacotamento de esferas, está no fato que um ladrilhamento hiperbólico do tipo $\{12g - 6, 3\}$ ⁵ fornece um empacotamento ótimo com relação à densidade de empacotamento no plano hiperbólico (seção 2.1.2). Além disso, para $g \rightarrow \infty$ temos que as densidades, de empacotamento e de cobertura, do referido ladrilhamento⁶ atingem os valores, máximo e mínimo, apresentados por Toth.

Em [42] (pág. 241), Toth apresentou os limitantes, máximo e mínimo, para a densidade de empacotamento e densidade de cobertura no plano hiperbólico. Segundo ele, a densidade de empacotamento é limitada superiormente por $\frac{3}{\pi}$ enquanto que a densidade de cobertura é limitada inferiormente por $\frac{\sqrt{12}}{\pi}$. Em [11] (Cap. 4, teorema 4.1.1) fizemos estudos assintóticos para ladrilhamentos do tipo $\{p, q\}$. Demonstramos que assintoticamente⁷, a densidade de empacotamento não atinge o valor $\frac{3}{\pi}$.

⁵Entendemos por um ladrilhamento da forma $\{p, q\}$ a um ladrilhamento por polígonos regulares com p arestas onde cada vértice contém q polígonos.

⁶Dado um ladrilhamento $\{p, q\}$ no plano hiperbólico, podemos associar a este um empacotamento de esferas e uma cobertura por esferas. O empacotamento de esferas consiste em colocar em cada polígono o disco de raio máximo. Analogamente temos uma cobertura por esferas.

⁷Assintoticidade no sentido de enviar p e q ao infinito, onde p e q determinam um ladrilhamento $\{p, q\}$.

Capítulo 3

Espaços Fricke - Variações e Parametrizações

Neste capítulo, apresentamos nossa contribuição que consiste de uma construção algorítmica com a qual podemos avaliar a densidade de empacotamento hiperbólico a partir de pontos do espaço de teichmüller. Deste, temos condições de avaliar (ao menos numericamente) singularidades para a função densidade de empacotamento no plano hiperbólico que denotamos simplesmente por d .

A estrutura básica para nosso algoritmo é:

I) Consideramos $p_g \in \mathcal{F}_{4g}$, então

$$p_g = (a_1, c_1, d_1, a'_1, c'_1, d'_1, \dots, a_{g-1}, c_{g-1}, d_{g-1}, a'_{g-1}, c'_{g-1}, d'_{g-1}) .$$

A partir destes pontos determinamos as funções de emparelhamento $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ em $\mathbb{H}^2$ (etapa realizada na seção 1.2.3 do capítulo 1).

II) Para facilitar a visualização, trabalhamos com o modelo de Poincaré $\mathbb{D}^2$. Determinamos então as funções de emparelhamento correspondentes;

III) Construimos o polígono associado a p_g , ou seja, o polígono P_g que tem as arestas emparelhadas por $\left\{ \tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j \right\}_{j=1}^g$ (seção 1.2.3);

IV) Calculamos o raio do círculo máximo inscrito em P_g (etapa realizada no capítulo 4);

V) Determinamos o valor da densidade do empacotamento $d(P_g)$.

Além disso, observamos nas seções 3.1 e 3.2 as variações e parametrizações dos espaços Fricke com o objetivo de fornecer novos sistemas de coordenadas¹ Fricke, ou seja, pretendemos projetar o espaço Fricke no espaço dos polígonos com $4g+2$ ou $12g-6$ arestas que representem uma superfície de Riemann compacta orientável de gênero g . A inspiração para tais explorações provém do teorema 10.5.1 em [4]. Este afirma, que o número de arestas N de um polígono P , associado a um grupo Γ finitamente gerado do primeiro tipo² com assinatura $(g:0)$ ³, está entre $4g$ e $12g-6$ arestas, ou seja, $4g \leq N \leq 12g-6$.

O mínimo é conhecido na literatura e pode ser encontrado na seção 1.2.3 do capítulo 1. Exploramos os casos $4g+2$ e $12g-6$ nos espaços de teichmüller. O máximo, $12g-6$, é abordado na seção 3.2 deste capítulo.

3.1 Coordenadas Fricke Associadas a Polígonos com $4g+2$ Arestas

Considere um polígono $P_{4g+2} \subset \mathbb{D}^2$ com $4g+2$ arestas, $g \geq 2$. Denotamos seus vértices no sentido anti-horário por $\{v_1, v_2, \dots, v_{4g+2}\}$ e suas arestas por $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{4g+2}\}$ onde τ_i é o segmento geodésico iniciando em v_i e findando em v_{i+1} , $i \bmod (4g+2)$. Denotando os vértices inicial e final de uma aresta τ por $I(\tau)$ e $F(\tau)$, temos pela construção do polígono que $I(\tau_i) = v_i$ e $F(\tau_i) = v_{i+1}$.

Dado o polígono P_{4g+2} como descrito acima, supomos que os pares de arestas $\{\tau_i, \tau_{2g+1+i}\}$ tem o mesmo comprimento, sendo $i \in \{1, 2, \dots, 2g+1\}$. As isometrias que emparelham os pares de arestas são dadas por

$$\begin{aligned}\beta_i(\tau_{2i-1}) &= \tau_{2g+2i}, \\ \alpha_k(\tau_{2k}) &= \tau_{2g+2k+1},\end{aligned}$$

onde $i = 1, 2, \dots, g+1$ e $k = 1, 2, \dots, g$. Dizemos que o conjunto

$$\Phi_{4g+2} = \{\alpha_k, \beta_i, ; k = 1, 2, \dots, g \text{ e } i = 1, 2, \dots, g+1\}$$

¹Os espaços Fricke (que é um domínio simplesmente conexo de $\mathbb{R}^{6g-6}$) se projetam no espaço dos polígonos com $4g$ arestas. Entendemos como sistemas de coordenadas Fricke a projeção dos pontos Fricke neste espaço.

²Dizemos que um grupo Γ é do primeiro tipo se o conjunto dos pontos de acumulação das orbitas $\Gamma(z)_{z \in \mathbb{D}^2}$ é igual à fronteira do disco de Poincaré $\partial\mathbb{D}^2$.

³Esta assinatura nos diz que o grupo Γ em questão, contém somente isometrias hiperbólicas. De uma forma mais geral, a definição de assinatura pode ser encontrada em [4, pág. 268].

é um emparelhamento para o polígono P_{4g+2} .

Seja $\varphi \in \Phi_{4g+2}$ e suponha que $\varphi(\tau_i) = \tau_j$. Então temos que φ satisfaz

$$\varphi(I(\tau_i)) = F(\varphi(\tau_i)) = F(\tau_j)$$

$$\varphi(F(\tau_i)) = I(\varphi(\tau_i)) = I(\tau_j)$$

noutras palavras, como $I(\tau_l) = v_l$ e $F(\tau_l) = v_{l+1}$, obtemos que, nesta situação

$$\varphi(v_i) = v_{j+1}$$

$$\varphi(v_{i+1}) = v_j.$$

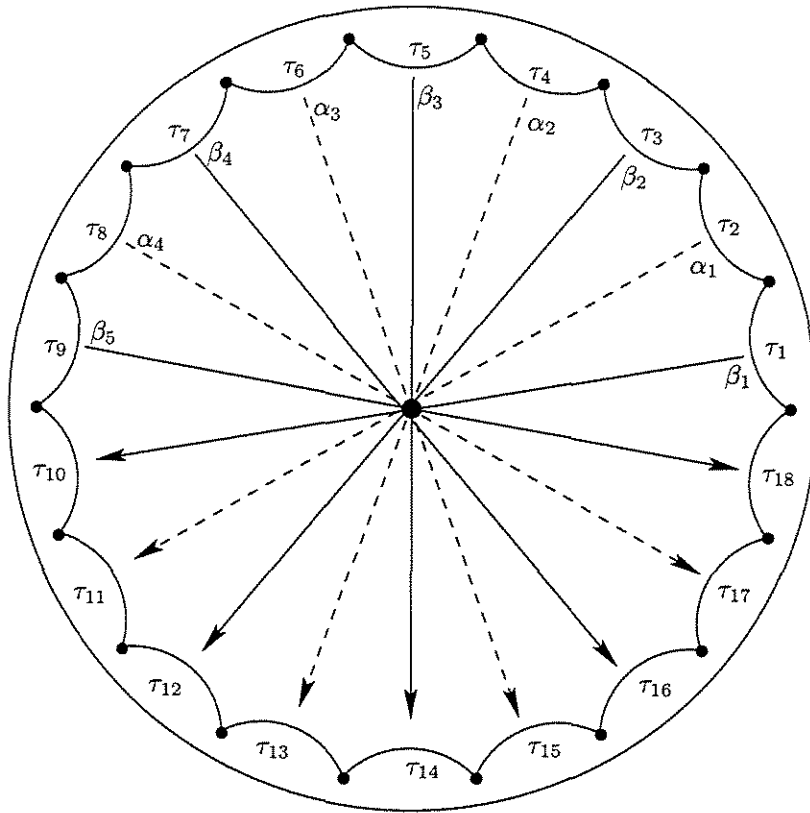


Figura 3.1: Emparelhamento de polígonos com $4g + 2$ arestas, sendo $g = 4$

Em [13], encontramos que Φ_{4g+2} tem dois ciclos⁴ de vértices que são

$$\{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{4g+1}\} \text{ e } \{v_2, v_4, \dots, v_{4g+2}\}.$$

⁴Seja $\Gamma_{4g+2} = \langle \Phi_{4g+2} \rangle$. Um *ciclo* é uma classe de equivalência de vértices congruentes, ou seja, é um conjunto da forma

$$\{T(z) \mid T \in \Gamma_{4g+2} \text{ e } z \text{ e } T(z) \text{ são vértices de } P_{4g+2}\}.$$

Sendo $2g + 1$ o número de arestas identificadas, temos que o emparelhamento Φ_{4g+2} representa uma superfície de Riemann compacta orientável de gênero g pois a característica de Euler é dada por

$$\chi(P_{4g+2}) = 1 - (2g + 1) + 2 = 2 - 2g.$$

A superfície de Riemann representada por Φ_{4g+2} é obtida pelo quociente de $\mathbb{D}^2$ pelo grupo gerado pelas funções Φ_{4g+2} , isto é, $\mathbb{D}^2/\Gamma_{4g+2}$ onde

$$\Gamma_{4g+2} = \left\langle \Phi_{4g+2} \mid \begin{array}{l} \beta_{g+1}\alpha_g^{-1}\beta_g\alpha_{g-1}^{-1}\dots\beta_3\alpha_2^{-1}\beta_2\alpha_1^{-1}\beta_1 = \text{Id} \\ \beta_{g+1}^{-1}\alpha_g\beta_g^{-1}\alpha_{g-1}\dots\beta_3^{-1}\alpha_2\beta_2^{-1}\alpha_1\beta_1^{-1} = \text{Id} \end{array} \right\rangle. \quad (3.1)$$

Neste caso, o grupo Γ_{4g+2} é um subgrupo discreto do grupo de isometrias de $\mathbb{D}^2$ em que todos os elementos são hiperbólicos (veja teorema 1.1.29). Ainda, podemos considerar o grupo Γ_{4g+2} como um subgrupo do grupo de isometrias de $\mathbb{H}^2$. Para isto, é suficiente conjugarmos Γ_{4g+2} pela função F (veja seção 1.3).

A partir deste ponto estaremos considerando Γ_{4g+2} agindo em $\mathbb{H}^2$ e abusaremos da notação mantendo a mesma notação para Γ_{4g+2} . Desta forma, os elementos $\{\alpha_k, \beta_i\}$ são isometrias hiperbólicas de $\mathbb{H}^2$ e daí segue que

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ b_k & d_k \end{bmatrix} \text{ tal que } a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R} \text{ e } a_k d_k - b_k c_k = 1$$

$$\beta_i = \begin{bmatrix} a'_i & b'_i \\ b'_i & d'_i \end{bmatrix} \text{ tal que } a'_i, b'_i, c'_i, d'_i \in \mathbb{R} \text{ e } a'_i d'_i - b'_i c'_i = 1$$

com $k = 1, 2, \dots, g$, $i = 1, 2, \dots, g + 1$.

Pretendemos projetar o ponto $[R_g, \Gamma_{4g+2}] \in \mathcal{T}_g$ com $R_g = \mathbb{H}^2/\Gamma_{4g+2}$, em $\mathbb{R}^{6g-6}$ utilizando um sistema de coordenadas tal como feito na seção 1.2.3 para os casos onde os grupos Σ_g estavam ligados a polígonos com $4g$ arestas. Desta maneira estaremos estabelecendo um sistema de coordenadas semelhante às utilizadas por Fricke para grupos com $2g$. Antes de prosseguirmos, observe que neste caso temos uma projeção em $\mathbb{R}^{6g+3}$. Para isto, basta levarmos $[R_g, \Gamma_{4g+2}]$ em

$$\left(a_1, c_1, d_1, a'_1, c'_1, d'_1, \dots, a_g, c_g, d_g, a'_g, c'_g, d'_g, a'_{g+1}, c'_{g+1}, d'_{g+1} \right).$$

Vimos em (3.1) que os geradores do grupo Γ_{4g+2} satisfazem as seguintes relações

$$\beta_{g+1}\alpha_g^{-1}\beta_g\alpha_{g-1}^{-1}\dots\beta_3\alpha_2^{-1}\beta_2\alpha_1^{-1}\beta_1 = \text{Id} \quad (3.2)$$

$$\beta_{g+1}^{-1}\alpha_g\beta_g^{-1}\alpha_{g-1}\dots\beta_3^{-1}\alpha_2\beta_2^{-1}\alpha_1\beta_1^{-1} = \text{Id}. \quad (3.3)$$

De (3.3) obtemos $\beta_{g+1} = \alpha_g \beta_g^{-1} \alpha_{g-1} \beta_{g-1}^{-1} \dots \alpha_2 \beta_2^{-1} \alpha_1 \beta_1^{-1}$. Substituindo α_{g+1} em (3.2) encontramos

$$\alpha_g \beta_g^{-1} \alpha_{g-1} \beta_{g-1}^{-1} \dots \alpha_2 \beta_2^{-1} \alpha_1 \beta_1^{-1} \alpha_g^{-1} \beta_g \alpha_{g-1}^{-1} \beta_{g-1} \dots \alpha_2^{-1} \beta_2 \alpha_1^{-1} \beta_1 = \text{Id}. \quad (3.4)$$

Neste ponto, conseguimos reduzir o número de geradores de Γ_{4g+2} para $2g$ geradores, $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$. Assim, temos uma projeção destes em $\mathbb{R}^{6g}$. Nosso objetivo é projetarmos este em $\mathbb{R}^{6g-6}$.

Analogamente ao feito por Fricke para $\mathcal{F}_{4g}$, para eliminarmos a ambiguidade existente, impomos as **condições de normalização**:

(i) β_g tem seus pontos fixos repulsor e atrator em 0 e ∞ .

(ii) α_g tem seu ponto fixo atrator em 1.

Da proposição 1.2.8, o sistema de geradores $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ de um modelo fuchsiano normalizado Γ_{4g+2} para um ponto $[R_g, \Gamma_{4g+2}]$ em $\mathcal{T}_g$ é escrito unicamente na forma

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}, & a_j, b_j, c_j &\in \mathbb{R}, & c_j > 0, & a_j d_j - b_j c_j = 1, \\ \beta_j &= \frac{a'_j z + b'_j}{c'_j z + d'_j}, & a'_j, b'_j, c'_j &\in \mathbb{R}, & c'_j > 0, & a'_j d'_j - b'_j c'_j = 1, \end{aligned}$$

para cada $j = 1, 2, \dots, g-1$.

Definimos as **coordenadas Fricke** $\mathbf{F}_{4g+2}$ por;

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{4g+2} : \mathcal{T}_g &\rightarrow \mathbb{R}^{6g-6} \\ [R_g, \Gamma_{4g+2}] &\mapsto (a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, \dots, a_{g-1}, b_{g-1}, c_{g-1}, a'_{g-1}, b'_{g-1}, c'_{g-1}) \end{aligned}$$

Chamaremos a imagem $\mathcal{F}_{4g+2} = \mathbf{F}_{4g+2}(\mathcal{T}_g)$ de **Espaço Fricke** $\mathcal{F}_{4g+2}$ de uma superfície de Riemann de gênero g .

Teorema 3.1.1 *Seja $\mathbf{F}_{4g+2} : \mathcal{T}_g \rightarrow \mathbb{R}^{6g-6}$ definida como acima. Então $\mathbf{F}_{4g+2}$ é injetora para quase todo ponto em $\mathcal{T}_g$.*

Demonstração: Queremos mostrar que cada ponto $p_g \in \mathcal{F}_{4g+2}$ determina o sistema de geradores $\{\alpha_j, \beta_j, \beta_{g+1}\}_{j=1}^g$ do emparelhamento Φ_{4g+2} que gera um grupo fuchsiano Γ_{4g+2} normalizado.

Assim, para $p_g \in \mathcal{F}_{4g+2}$, temos que

$$p_g = (a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, \dots, a_{g-1}, b_{g-1}, c_{g-1}, a'_{g-1}, b'_{g-1}, c'_{g-1}),$$

donde obtemos as isometrias

$$\alpha_j, \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, g-1.$$

Sendo conhecido o valor de β_{g+1} então teremos que encontrar os valores de α_g e β_g .

Das condições (i) e (ii) de normalização temos que

$$\begin{cases} \beta_g(z) = \lambda z, \quad \lambda > 1, \quad B_g = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix} \\ \alpha_g(z) = \frac{a_g z + b_g}{c_g z + d_g}, \quad a_g d_g - b_g c_g = 1, \Rightarrow a_g + b_g = c_g + d_g. \end{cases}$$

Colocando $A = \alpha_{g-1} \beta_{g-1}^{-1} \dots \alpha_2 \beta_2^{-1} \alpha_1 \beta_1^{-1}$ e $B = \alpha_{g-1}^{-1} \beta_{g-1} \dots \alpha_2^{-1} \beta_2 \alpha_1^{-1} \beta_1$ a relação (3.4) torna-se

$$\alpha_g \beta_g^{-1} A \alpha_g^{-1} \beta_g B = \text{Id}. \quad (3.5)$$

Note que (3.5) é equivalente a

$$\begin{aligned} \beta_g B \alpha_g \beta_g^{-1} A \alpha_g^{-1} &= \text{Id} \\ \beta_g B \alpha_g \beta_g^{-1} &= \alpha_g A^{-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Observe que na equação (3.6) queremos determinar os valores de α_g e β_g , sendo conhecidos, diretamente de p_g , os valores de B e A . Supondo que $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ com $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{R}$, obtemos de (3.6) o sistema de equações

$$(b_{11} - a_{11}) a_g - a_{21} b_g + b_{12} c_g = 0 \quad (3.7)$$

$$-a_{12} a_g + (\lambda b_{11} - a_{22}) b_g + \lambda b_{12} d_g = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{\lambda} b_{21} a_g + \left(\frac{1}{\lambda} b_{22} - a_{11} \right) c_g - a_{21} d_g = 0 \quad (3.9)$$

$$b_{21} b_g - a_{12} c_g + (b_{22} - a_{22}) d_g = 0. \quad (3.10)$$

Mediante algumas simplificações, o determinante do sistema de equações (de (3.7) a (3.10)) é

$$\frac{(\lambda(a_{11} - b_{11}) + (a_{22} - b_{22}))^2}{\lambda}.$$

Pretendemos garantir que o sistema de equações, (3.7) a (3.10), tem solução não trivial, isto é, existem a_g, b_g, c_g, d_g e λ não nulos que satisfazem estas equações. Para isto, é suficiente garantir que o determinante seja nulo

$$(\lambda(a_{11} - b_{11}) + (a_{22} - b_{22}))^2 = 0.$$

Mostraremos que $(a_{11} - b_{11}) \neq 0$ para quase todo ponto

$$p_g = (a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, \dots, a_{g-1}, b_{g-1}, c_{g-1}, a'_{g-1}, b'_{g-1}, c'_{g-1}).$$

Daí, segue que para $\lambda = \frac{b_{22}-a_{22}}{a_{11}-b_{11}}$, o determinante é nulo.

Considere a seguinte função

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{4g+2} : \mathcal{F}_{4g+2} \subset \mathbb{R}^{6g-6} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p_g &\mapsto (a_{11} - b_{11}) \end{aligned}.$$

Notamos que $\mathbf{P}_{4g+2}$ é não nula. Para isto tome o ponto p_g^{4g+2} dado no exemplo 3.1.4 pelas funções $\{\alpha_j, \beta_j, \beta_{g+1}\}_{j=1}^g$. Destas seguem que

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \beta_1 \left(\prod_{k=1}^{g-1} (A_g \beta_1 A_g \beta_1^{-1}) \right) A_g \beta_1 A_g^{-(2g-1)} \\ B &= A_g^{2g-1} \left(\prod_{k=1}^{g-1} (\beta_1 A_g^{-1} \beta_1^{-1} A_g^{-1}) \right) \beta_1 A_g^{-1}, \end{aligned}$$

onde $A_g = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4g+2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4g+2}} \end{bmatrix}$. Assim, temos que $a_{11} - b_{11}$ é

$$e^{i\frac{-2g\pi}{4g+2}} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2g+1} \right) \left(-e^{i\frac{\pi(2g)}{4g+2}} + e^{i\frac{\pi g}{2g+1}} \left(1 + 3 \cos \frac{\pi}{2g+1} \right) \right).$$

Portanto, $a_{11} - b_{11} = 0$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \left(-e^{i\frac{\pi(2g)}{4g+2}} + e^{i\frac{\pi g}{2g+1}} \left(1 + 3 \cos \frac{\pi}{2g+1} \right) \right) &= 0 \\ e^{i\frac{\pi g}{2g+1}} \left(1 + 3 \cos \frac{\pi}{2g+1} \right) &= e^{i\frac{\pi(2g)}{4g+2}} \end{aligned}$$

o que é um absurdo pois $\left\| e^{i\frac{\pi(2g)}{4g+2}} \right\| = 1 \neq \left\| e^{i\frac{\pi g}{2g+1}} \left(1 + 3 \cos \frac{\pi}{2g+1} \right) \right\|$. Logo, $\mathbf{P}_{4g+2}$ é não nula.

Como a função $\mathbf{P}_{4g+2}$ é um polinômio não identicamente nulo com domínio em um aberto $\mathcal{F}_{4g+2} \subset \mathbb{R}^{6g-6}$, o conjunto de seus zeros é uma subvariedade de co-dimensão um, de modo que, para quase todo (a menos de medida nula) $p_g \in \mathcal{F}_{4g+2}$, temos que $a_{11} - b_{11} \neq 0$, ou seja, o sistema de equações, (3.7) a (3.10), tem solução não trivial.

■

3.1.1 O Polígono fundamental P_{4g+2}

Considere o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_{4g+2}\}$ de vértices do polígono P_{4g+2} . Pretendemos expressar estes vértices em função dos dois ciclos de vértices. Sabemos que os ciclos de vértices são dados por:

$$c_{\text{impar}} = \{v_{2k-1}\}_{k=1}^{2g+1} \text{ e } c_{\text{par}} = \{v_{2k}\}_{k=1}^{2g+1}.$$

Escolhemos para cada um dos ciclos um representante, ou seja, $v_1 \in c_{\text{impar}}$ e $v_{2g+2} \in c_{\text{par}}$.

Assim, temos que os vértices de P_{4g+2} são dados por:

$$\begin{aligned} v_{2j+1} &= \alpha_j^{-1} \beta_j \alpha_{j-1}^{-1} \beta_{j-1} \dots \alpha_2^{-1} \beta_2 \alpha_1^{-1} \beta_1 (v_1), \\ v_{2g+1} &= \beta_{g+1}^{-1} (v_1), \\ v_{2i+2g+1} &= \beta_i \alpha_{i-1}^{-1} \beta_{i-1} \alpha_{i-2}^{-1} \dots \beta_2 \alpha_1^{-1} \beta_1 (v_1), \\ v_{2i} &= \beta_i^{-1} \alpha_{i-1} \beta_{i-1}^{-1} \alpha_{i-2} \dots \beta_2^{-1} \alpha_1 \beta_1^{-1} (v_{2g+2}), \\ v_{2i+2g+2} &= \alpha_i \beta_i^{-1} \alpha_{i-1} \beta_{i-1}^{-1} \dots \alpha_2 \beta_2^{-1} \alpha_1 \beta_1^{-1} (v_{2g+2}), \end{aligned}$$

onde $j = 1, 2, \dots, g-1$ e $i = 1, 2, \dots, g$.

Conjectura 3.1.2 *Seja Γ_{4g+2} um grupo finitamente gerado de primeiro tipo com assinatura $(g : 0)$. Então, para alguma sequência de geradores*

$$\{\alpha_k, \beta_j; k = 1, 2, \dots, g \text{ e } j = 1, 2, \dots, g+1\}$$

de Γ_{4g+2} satisfazendo (3.2) e (3.3), temos que existem pelo menos dois pontos distintos de interseção entre os eixos⁵. A estes elementos, associamos os vértices v_1 e v_{2g+2} donde obtemos um polígono fundamental para Γ_{4g+2} cujos vértices são

$$\begin{aligned} v_{2j+1} &= \alpha_j^{-1} \beta_j \alpha_{j-1}^{-1} \beta_{j-1} \dots \alpha_2^{-1} \beta_2 \alpha_1^{-1} \beta_1 (v_1), \\ v_{2g+1} &= \beta_{g+1}^{-1} (v_1), \\ v_{2g+2i+1} &= \beta_i \alpha_{i-1}^{-1} \beta_{i-1} \alpha_{i-2}^{-1} \dots \beta_2 \alpha_1^{-1} \beta_1 (v_1), \\ v_{2i} &= \beta_i^{-1} \alpha_{i-1} \beta_{i-1}^{-1} \alpha_{i-2} \dots \beta_2^{-1} \alpha_1 \beta_1^{-1} (v_{2g+2}), \\ v_{2g+2i+2} &= \alpha_i \beta_i^{-1} \alpha_{i-1} \beta_{i-1}^{-1} \dots \alpha_2 \beta_2^{-1} \alpha_1 \beta_1^{-1} (v_{2g+2}), \end{aligned}$$

onde $j = 1, 2, \dots, g-1$ e $i = 1, 2, \dots, g$.

⁵A geodésica ligando os pontos fixos p_1 e p_2 de uma isometria γ é chamada de **eixo** de γ . Denotamos esta por $\text{Eixo}(\gamma)$.

Observação 3.1.3 Para solucionar a conjectura acima, acreditamos ser suficiente encontrar um exemplo de um emparelhamento com pelo menos dois pontos distintos de inteseção entre os eixos⁶. A partir disto, seguimos os mesmos argumentos de Linda Keen e provamos o resultado [25].

Note que os vértices do polígono apresentado acima dependem somente das isometrias geradoras de Γ_{4g+2} . A seguir exibimos uma construção destas isometrias para um polígono regular P_{4g+2} .

Exemplo 3.1.4 Seja P_{4g+2} um polígono regular com $4g+2$ arestas, no disco de poincaré $\mathbb{D}^2$ com baricentro na origem $0 \in \mathbb{D}^2$. Designamos seus vértices no sentido anti-horário por $z_1, z_2, \dots, z_{4g}$ e suas arestas, também no sentido anti-horário, por

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{4g+2}$$

onde $(\tau_{2k}, \tau_{2g+2k+1})$ e $(\tau_{2i-1}, \tau_{2g+2i})$ são emparelhadas por α_k, β_i com $k \in \{1, 2, \dots, g\}$ e $i \in \{1, 2, \dots, g+1\}$.

Para exibirmos os elementos α_j e β_i é suficiente conhecer uma das funções, digamos β_1 , pois utilizando transformações elípticas todas as outras se tornam conhecidas a partir de β_1 . Admitindo ser conhecida a matriz de β_1 , todas as outras são dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \rho_1 \beta_1 \rho_1^{-1}, & \alpha_{k+1} &= \rho_{2k+1} \beta_1 \rho_{2k+1}^{-1}, \\ \beta_{k+1} &= \rho_{2k} \beta_1 \rho_{2k}^{-1}, & \beta_{g+1} &= \rho_{2g} \beta_1 \rho_{2g}^{-1} \end{aligned}$$

onde $k \in \{1, 2, \dots, g-1\}$ e $\rho_k = e^{ik \frac{2\pi}{4g+2}}$.

Segue então que, a isometria hiperbólica β_1 que emparelha os pares $\{\tau_1, \tau_{2g+2}\}$ tem sua matriz dada por

$$\begin{bmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{2g+1} + 1 \right) & \left(\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{2g+1} \left(\cos \frac{\pi}{2g+1} + 1 \right)} \right) ie^{i \frac{(2g+2)\pi}{4g+2}} \\ - \left(\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{2g+1} \left(\cos \frac{\pi}{2g+1} + 1 \right)} \right) ie^{-i \frac{(2g+2)\pi}{4g+2}} & \left(\cos \frac{\pi}{2g+1} + 1 \right) \end{bmatrix}.$$

3.2 Coordenadas Fricke Associadas a Polígonos com $12g - 6$ Arestas

Considere um polígono $P_{12g-6} \subset \mathbb{D}^2$ com $12g-6$ arestas, $g \geq 2$. Denotamos seus vértices no sentido anti-horário por $\{v_1, v_2, \dots, v_{12g-6}\}$ e suas arestas por $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{12g-6}\}$ onde

⁶A geodésica ligando os pontos fixos p_1 e p_2 de uma isometria γ é chamada de eixo de γ . Denotamos esta por $\text{Eixo}(\gamma)$.

τ_i é o segmento geodésico iniciando em v_i e findando em v_{i+1} , $i \bmod (12g - 6)$. Denotando os vértices inicial e final de uma aresta τ por $I(\tau)$ e $F(\tau)$, temos pela construção do polígono que $I(\tau_i) = v_i$ e $F(\tau_i) = v_{i+1}$.

Considerando o gênero g igual a 2 temos um polígono com 18 arestas, P_{18} . Os pares de arestas, emparelhadas da seguinte forma

$$\left[\begin{array}{l} \{\tau_1, \tau_{10}\}, \{\tau_2, \tau_{11}\}, \{\tau_5, \tau_{14}\}, \{\tau_6, \tau_{16}\}, \\ \{\tau_3, \tau_{18}\}, \{\tau_4, \tau_7\}, \{\tau_8, \tau_{17}\}, \{\tau_{12}, \tau_9\}, \{\tau_{13}, \tau_{16}\} \end{array} \right], \quad (3.11)$$

forneem um emparelhamento que representa uma superfície de Riemann compacta de gênero 2 (veja [3]). Antes de prosseguirmos para avaliar as coordenadas Fricke conforme pretendemos, é necessário fazermos a generalização deste emparelhamento [12].

- Dado o polígono P_{12g-6} descrito acima, assumimos, para permitir emparelhamento de arestas por isometrias, que os seguintes pares de arestas possuem o mesmo comprimento:

$$\begin{aligned} & \{\tau_i, \tau_{i+6g-3}\}, \quad \{\tau_{i+1}, \tau_{i+6g-2}\}, \quad i \in \{1, k_0, k_1, k_2, \dots, k_{g-2}\}, \quad k_m := (m+1)5 \\ & \left\{ \begin{array}{l} \{\tau_{3+5k}, \tau_{12g-6-k}\}, \quad \{\tau_{4+5k}, \tau_{7+5k}\}, \\ \{\tau_{5g-2}, \tau_{11g-5}\}, \\ \{\tau_{6g+5k}, \tau_{6g-3-k}\}, \quad \{\tau_{6g+1+5k}, \tau_{6g+4+5k}\} \end{array} \right\}, \quad k \in \{0, 1, \dots, g-2\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Considere as isometrias hiperbólicas (únicas) que indentificam os pares conforme segue:

$$\begin{aligned} & \alpha_1(\tau_1) = \tau_{6g-2}, \quad \beta_1(\tau_2) = \tau_{6g-1} \\ & \alpha_{j+1}(\tau_{5j}) = \tau_{6g+5j-3}, \quad \beta_{j+1}(\tau_{5j+1}) = \tau_{6g+5j-2}, \quad j \in \{1, 2, \dots, g-1\} \\ & \gamma_j^a(\tau_{3+5(j-1)}) = \tau_{12g-6-(j-1)}, \quad \gamma_j^b(\tau_{4+5(j-1)}) = \tau_{7+5(j-1)}, \quad j \in \{1, 2, \dots, g-1\} \\ & \delta(\tau_{5g-2}) = \tau_{11g-5} \\ & \xi_j^a(\tau_{6g+5(j-1)}) = \tau_{6g-3-(j-1)}, \quad \xi_j^b(\tau_{6g+1+5(j-1)}) = \tau_{6g+4+5(j-1)}, \quad j \in \{1, 2, \dots, g-1\}. \end{aligned}$$

Dizemos que o conjunto

$$\Phi_{12g-6} = \{\alpha_k, \beta_k, \gamma_j^a, \gamma_j^b, \xi_j^a, \xi_j^b; k = 1, 2, \dots, g \text{ e } j = 1, 2, \dots, g-1\}$$

é um emparelhamento para o polígono P_{12g-6} . Particularmente, se tomarmos $g = 2$ teremos o emparelhamento apresentado em (3.11).

Seja $\varphi \in \Phi_{12g-6}$ e suponha que $\varphi(\tau_i) = \tau_j$. Então temos que φ satisfaz

$$\begin{aligned}\varphi(I(\tau_i)) &= F(\varphi(\tau_i)) = F(\tau_j) \\ \varphi(F(\tau_i)) &= I(\varphi(\tau_i)) = I(\tau_j).\end{aligned}$$

Em outras palavras, como $I(\tau_l) = v_l$ e $F(\tau_l) = v_{l+1}$, obtemos que, nesta situação

$$\begin{aligned}\varphi(v_i) &= v_{j+1} \\ \varphi(v_{i+1}) &= v_j.\end{aligned}$$

Proposição 3.2.1 *Seja Φ_{12g-6} um emparelhamento do polígono P_{12g-6} . Então os ciclos⁷ de vértices possuem comprimento 3.*

Demonstração: Iniciamos obtendo os dois ciclos que contém os vértices v_1 e v_2 . Note que

$$v_1 = I(\tau_1) = F(\tau_{12g-6}).$$

Pela definição das funções de emparelhamento, temos que τ_{12g-6} é emparelhada à aresta τ_3 através da transformação γ_1^{a-1} . Segue então que

$$\begin{aligned}\gamma_1^{a-1}(v_1) &= \gamma_1^{a-1}(F(\tau_{12g-6})) \\ &= I(\gamma_1^{a-1}(\tau_{12g-6})) \\ &= I(\tau_3) \\ &= v_3,\end{aligned}$$

de modo que v_3 pertence ao ciclo determinado por v_1 . Mas, além de ser o vértice inicial de τ_3 , temos que v_3 é o vértice final de τ_2 e como τ_2 é emparelhado a τ_{6g-1} por β_1 , obtemos

$$\begin{aligned}\beta_1(v_3) &= \beta_1(F(\tau_2)) \\ &= I(\beta_1(\tau_2)) \\ &= I(\tau_{6g-1}) \\ &= v_{6g-1},\end{aligned}$$

⁷Seja $\Gamma_{12g-6} = \langle \Phi_{12g-6} \rangle$. Um *ciclo* é uma classe de equivalência de vértices congruentes, ou seja, é um conjunto da forma

$$\{T(z) \mid T \in \Gamma_{12g-6} \text{ e } z \text{ e } T(z) \text{ são vértices de } P_{12g-6}\}.$$

de modo que v_{6g-1} pertence ao ciclo determinado por v_1 e v_3 . Novamente, temos que $v_{6g-1} = F(\tau_{6g-2})$ e τ_{6g-2} é emparelhada a τ_1 através da isometria α_1^{-1} . Segue que

$$\begin{aligned}\alpha_1^{-1}(v_{6g-1}) &= \alpha_1^{-1}(F(\tau_{6g-2})) \\ &= I(\alpha_1^{-1}(\tau_{6g-2})) \\ &= I(\tau_1) \\ &= v_1,\end{aligned}$$

completando um ciclo. Assim, o ciclo determinado por v_1 é

$$\{v_1, v_3 = \gamma_1^{a^{-1}}(v_1), v_{6g-1} = \beta_1 \gamma_1^{a^{-1}}(v_1)\}. \quad (3.13)$$

Do mesmo modo, temos

$$\begin{aligned}v_2 &= I(\tau_2) &= F(\tau_1) \\ \alpha_1(v_2) &= \alpha_1(F(\tau_1)) &= I(\alpha_1(\tau_1)) &= I(\tau_{6g-2}) &= v_{6g-2} \\ \xi_1^{a^{-1}}(v_{6g-2}) &= \xi_1^{a^{-1}}(F(\tau_{6g-3})) &= I(\xi_1^{a^{-1}}(\tau_{6g-3})) &= I(\tau_{6g}) &= v_{6g} \\ \beta_1^{-1}(v_{6g}) &= \beta_1^{-1}(F(\tau_{6g-1})) &= I(\beta_1^{-1}(\tau_{6g-1})) &= I(\tau_2) &= v_2.\end{aligned}$$

Visto isso, completamos mais um ciclo e obtemos que o ciclo determinado por v_2 é

$$\{v_2, v_{6g-2} = \alpha_1(v_2), v_{6g} = \xi_1^{a^{-1}} \alpha_1(v_2)\}. \quad (3.14)$$

Note que o vértice v_4 determina um novo ciclo conforme segue

$$\begin{aligned}v_4 &= I(\tau_4) &= F(\tau_3) \\ \gamma_1^b(v_4) &= \gamma_1^b(I(\tau_4)) &= F(\gamma_1^b(\tau_4)) &= F(\tau_7) &= v_8 \\ \gamma_2^a(v_8) &= \gamma_2^a(I(\tau_8)) &= F(\gamma_2^a(\tau_8)) &= F(\tau_{12g-5}) &= v_{12g-6} \\ \gamma_1^{a^{-1}}(v_{12g-6}) &= \gamma_1^{a^{-1}}(I(\tau_{12g-6})) &= F(\gamma_1^{a^{-1}}(\tau_{12g-6})) &= F(\tau_3) &= v_4,\end{aligned}$$

donde temos que o ciclo determinado por v_4 é

$$\{v_4, v_8 = \gamma_1^b(v_4), v_{12g-6} = \gamma_2^a \gamma_1^b(v_4)\}. \quad (3.15)$$

O vértice v_5 determina um novo ciclo. Para isto, observe que

$$\begin{aligned}v_5 &= I(\tau_5) &= F(\tau_4) \\ \gamma_1^b(v_5) &= \gamma_1^b(F(\tau_4)) &= I(\gamma_1^b(\tau_4)) &= I(\tau_7) &= v_7 \\ \beta_2(v_7) &= \beta_2(F(\tau_6)) &= I(\beta_2(\tau_6)) &= I(\tau_{6g+3}) &= v_{6g+3} \\ \alpha_2^{-1}(v_{6g+3}) &= \alpha_2^{-1}(F(\tau_{6g+2})) &= I(\alpha_2^{-1}(\tau_{6g+2})) &= I(\tau_5) &= v_5,\end{aligned}$$

e daí segue que o ciclo determinado por v_5 é

$$\{v_5, v_7 = \gamma_1^b(v_5), v_{6g+3} = \beta_2 \gamma_1^b(v_5)\}. \quad (3.16)$$

Da mesma maneira anterior, temos pelo vértice v_6

$$\begin{aligned} v_6 &= I(\tau_6) = F(\tau_5) \\ \alpha_2(v_6) &= \alpha_2(F(\tau_5)) = I(\alpha_2(\tau_5)) = I(\tau_{6g+2}) = v_{6g+2} \\ \xi_1^b(v_{6g+2}) &= \xi_1^b(F(\tau_{6g+1})) = I(\xi_1^b(\tau_{6g+1})) = I(\tau_{6g+4}) = v_{6g+4} \\ \beta_2^{-1}(v_{6g+4}) &= \beta_2^{-1}(F(\tau_{6g+3})) = I(\beta_2^{-1}(\tau_{6g+3})) = I(\tau_6) = v_6, \end{aligned}$$

de onde segue

$$\{v_6, v_{6g+2} = \alpha_2(v_6), v_{6g+4} = \xi_1^b \alpha_2(v_6)\}. \quad (3.17)$$

Analogamente, para os vértices $v_{4+5(k-1)}$, $v_{5+5(k-1)}$, e $v_{6+5(k-1)}$ temos que

$$\begin{aligned} v_{4+5(k-1)} &= I(\tau_{4+5(k-1)}) = F(\tau_{3+5(k-1)}) \\ \gamma_k^b(v_{4+5(k-1)}) &= \gamma_k^b(I(\tau_{4+5(k-1)})) = F(\gamma_k^b(\tau_{4+5(k-1)})) = F(\tau_{7+5(k-1)}) = v_{8+5(k-1)} = v_{3+5k} \\ \gamma_{k+1}^a(v_{3+5k}) &= \gamma_{k+1}^a(I(\tau_{3+5k})) = F(\gamma_{k+1}^a(\tau_{3+5k})) = F(\tau_{12g-6-k}) = v_{12g-5-k} = v_{12g-6-(k-1)} \\ \gamma_k^{a^{-1}}(v_{12g-6-(k-1)}) &= \gamma_k^{a^{-1}}(I(\tau_{12g-6-(k-1)})) = F(\gamma_k^{a^{-1}}(\tau_{12g-6-(k-1)})) = F(\tau_{3+5(k-1)}) = v_{4+5(k-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{5+5(k-1)} &= I(\tau_{5+5(k-1)}) = F(\tau_{4+5(k-1)}) \\ \gamma_k^b(v_{5+5(k-1)}) &= \gamma_k^b(F(\tau_{4+5(k-1)})) = I(\gamma_k^b(\tau_{4+5(k-1)})) = I(\tau_{7+5(k-1)}) = v_{7+5(k-1)} \\ \beta_{k+1}(v_{7+5(k-1)}) &= \beta_{k+1}(F(\tau_{6+5(k-1)})) = I(\beta_{k+1}(\tau_{6+5(k-1)})) = I(\tau_{6g+3+5(k-1)}) = v_{6g+3+5(k-1)} \\ \alpha_{k+1}^{-1}(v_{6g+3+5(k-1)}) &= \alpha_{k+1}^{-1}(F(\tau_{6g+2+5(k-1)})) = I(\alpha_{k+1}^{-1}(\tau_{6g+2+5(k-1)})) = I(\tau_{5+5(k-1)}) = v_{5+5(k-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{6+5(k-1)} &= I(\tau_{6+5(k-1)}) = F(\tau_{5+5(k-1)}) \\ \alpha_{k+1}(v_{6+5(k-1)}) &= \alpha_{k+1}(F(\tau_{5+5(k-1)})) = I(\alpha_{k+1}(\tau_{5+5(k-1)})) = I(\tau_{6g+2+5(k-1)}) = v_{6g+2+5(k-1)} \\ \xi_k^b(v_{6g+2+5(k-1)}) &= \xi_k^b(F(\tau_{6g+1+5(k-1)})) = I(\xi_k^b(\tau_{6g+1+5(k-1)})) = I(\tau_{6g+4+5(k-1)}) = v_{6g+4+5(k-1)} \\ \beta_{k+1}^{-1}(v_{6g+4+5(k-1)}) &= \beta_{k+1}^{-1}(F(\tau_{6g+3+5(k-1)})) = I(\beta_{k+1}^{-1}(\tau_{6g+3+5(k-1)})) = I(\tau_{6+5(k-1)}) = v_{6+5(k-1)}, \end{aligned}$$

determinam os ciclos de vértices

$$\{v_{4+5(k-1)}, v_{8+5(k-1)} = \gamma_k^b(v_{4+5(k-1)}), v_{12g-6-(k-1)} = \gamma_{k+1}^a \gamma_k^b(v_{4+5(k-1)})\}, \quad (3.18)$$

$$\{v_{5+5(k-1)}, v_{7+5(k-1)} = \gamma_k^b(v_{5+5(k-1)}), v_{6g+3+5(k-1)} = \beta_{k+1} \gamma_k^b(v_{5+5(k-1)})\}, \quad (3.19)$$

$$\{v_{6+5(k-1)}, v_{6g+2+5(k-1)} = \alpha_{k+1}(v_{6+5(k-1)}), v_{6g+4+5(k-1)} = \xi_k^b \alpha_{k+1}(v_{6+5(k-1)})\}, \quad (3.20)$$

onde $k = 2, 3, \dots, g - 1$.

Até aqui, temos um total de $9g - 3$ vértices dispostos em $3g - 1$ ciclos. Nestes casos, temos todos os ciclos com comprimento três, restando-nos avaliar os $3g - 3 = ((12g - 6) - (9g - 3))$ vértices restantes.

Note que os vértices $\{v_{5g-1}, v_{11g-9}, v_{11g-5}\}$ e $\{v_{5g-1+j}, v_{11g-9-5j}, v_{11g-5(j+1)}\}_{j=1}^{(g-2)}$ não estão dentre os $9g - 3$ vértices analisados anteriormente. Obteremos os próximos ciclos a partir dos vértices v_{5g-1} e v_{6g-3-k} , utilizando respectivamente as funções $\{\xi_{g-1}^{a-1}, \xi_{g-1}^b, \delta^{-1}\}$ e $\{\xi_{g-j-1}^{a-1}, \xi_{g-j-1}^b, \xi_{g-j}^a\}$.

Do vértice v_{5g-1} temos

$$\begin{aligned} v_{5g-1} &= I(\tau_{5g-1}) &= F(\tau_{5g-2}) \\ \xi_{g-1}^{a-1}(v_{5g-1}) &= \xi_{g-1}^{a-1}(I(\tau_{5g-1})) &= F(\xi_{g-1}^{a-1}(\tau_{5g-1})) &= F(\tau_{11g-10}) &= v_{11g-9} \\ \xi_{g-1}^b(v_{11g-9}) &= \xi_{g-1}^b(I(\tau_{11g-9})) &= F(\xi_{g-1}^b(\tau_{11g-9})) &= F(\tau_{11g-6}) &= v_{11g-5} \\ \delta^{-1}(v_{11g-5}) &= \delta^{-1}(I(\tau_{11g-5})) &= F(\delta^{-1}(\tau_{11g-5})) &= F(\tau_{5g-2}) &= v_{5g-1}, \end{aligned}$$

donde segue o ciclo

$$\left\{ v_{5g-1}, v_{11g-9} = \xi_{g-1}^{a-1}(v_{5g-1}), v_{11g-5} = \xi_{g-1}^b \xi_{g-1}^{a-1}(v_{5g-1}) \right\}. \quad (3.21)$$

Dos vértices v_{5g-1+j} segue que

$$\begin{aligned} v_{5g-1+j} &= I(\tau_{5g-1+j}) &= F(\tau_{5g-2+j}) \\ \xi_{g-j-1}^{a-1}(v_{5g-1+j}) &= \xi_{g-j-1}^{a-1}(I(\tau_{5g-1+j})) &= F(\xi_{g-j-1}^{a-1}(\tau_{5g-1+j})) &= F(\tau_{11g-10-5j}) &= v_{11g-9-5j} \\ \xi_{g-j-1}^b(v_{11g-9-5j}) &= \xi_{g-j-1}^b(I(\tau_{11g-9-5j})) &= F(\xi_{g-j-1}^b(\tau_{11g-9-5j})) &= F(\tau_{11g-6-5j}) &= v_{11g-5-5j} \\ \xi_{g-j}^a(v_{11g-5-5j}) &= \xi_{g-j}^a(I(\tau_{11g-5-5j})) &= F(\xi_{g-j}^a(\tau_{11g-5-5j})) &= F(\tau_{5g-2+j}) &= v_{5g-1+j}, \end{aligned}$$

e daí temos os ciclos

$$\left\{ v_{5g-1+j}, v_{11g-9-5j} = \xi_{g-j-1}^{a-1}(v_{5g-1+j}), v_{11g-5-5j} = \xi_{g-j-1}^b \xi_{g-j-1}^{a-1}(v_{5g-1+j}) \right\} \quad (3.22)$$

para $j = 1, 2, \dots, g - 2$.

Nesta última etapa, obtemos os $3g - 3$ vértices⁸ que estavam faltando, o que nos permite encerrar a prova concluindo que todos os ciclos têm comprimento três. Notamos ainda que temos um total de $4g - 2$ ciclos. ■

⁸Em (3.21) e (3.22) temos $3g - 3$ vértices dispostos em $g - 1$ ciclos.

Podemos resumir os dados obtidos na seguinte tabela:

Notação	Ciclos	Representante do ciclo
c_1	v_1, v_3, v_{6g-1}	v_1
c_2	v_2, v_{6g-2}, v_{6g}	v_2
$c_{3+3(k-1)}$	$v_{5(k-1)+4}, v_{5(k-1)+8}, v_{12g-6-(k-1)}$	$v_{5(k-1)+4}$
$c_{4+3(k-1)}$	$v_{5(k-1)+5}, v_{5(k-1)+7}, v_{5(k-1)+6g+3}$	$v_{5(k-1)+5}$
$c_{5+3(k-1)}$	$v_{5(k-1)+6}, v_{5(k-1)+6g+2}, v_{5(k-1)+6g+4}$	$v_{5(k-1)+6}$
c_{3g}	$v_{5g-1}, v_{11g-9}, v_{11g-5}$	v_{5g-1}
c_{3g+j}	$v_{5g-1+j}, v_{11g-9-5j}, v_{11g-5(j+1)}$	v_{5g-1+j}

(3.23)

onde $k = 1, 2, \dots, g-1$ e $j = 1, 2, \dots, (g-2)$.

Seja Γ_{12g-6} o grupo gerado pelo emparelhamento Φ_{12g-6} do polígono P_{12g-6} . A partir da proposição 3.2.1 concluímos que o número de ciclos de vértices são $4g-2$ $((12g-6)/3)$.

Corolário 3.2.2 *Se a soma dos ângulos em cada ciclo é 2π , então Γ_{12g-6} é grupo propriamente descontínuo, isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(R_g)$, e $\mathbb{D}^2/\Gamma_{12g-6}$ é difeomorfo à superfície de Riemann R_g .*

Demonstração: Assumindo que a soma dos ângulos em cada ciclo é 2π e sendo as arestas emparelhadas de mesmo comprimento concluímos, pelo teorema de Poincaré, que Γ_{12g-6} é discreto. Como $\Gamma_{12g-6} \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ temos um grupo propriamente descontínuo⁹. Além disto, pelo teorema de Poincaré, segue que o polígono é domínio fundamental do grupo gerado pelas funções de emparelhamento, de modo que o quociente $\mathbb{D}^2/\Gamma_{12g-6}$ é difeomorfo a uma superfície de Riemann, R_g , compacta orientável de gênero g e $\pi_1(R_g)$ é isomorfo a Γ_{12g-6} . ■

Resta apenas determinar seu gênero, que pode ser obtido através da característica de Euler-Poincaré. Da proposição 3.2.1 temos que o número de ciclos de vértices são $4g-2$. Sendo $6g-3$ o número de arestas identificadas, concluímos que o emparelhamento Φ_{12g-6} representa uma superfície de Riemann compacta orientável de gênero g pois a característica de Euler-Poincaré é dada por

$$\chi(P_{12g-6}) = 1 - (6g-3) + (4g-2) = 2-2g.$$

⁹Um subgrupo $\Gamma \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ é discreto se e somente se sua ação em $\mathbb{H}^2$ for propriamente descontínua [13, capítulo 5].

Através da demonstração da proposição 3.2.1, encontramos as relações entre os elementos que representam o grupo Γ_{12g-6} . Denotamos estas por r_k e apresentamo-nas na tabela dada a seguir:

Notação	Equações
r_1	$\alpha_1^{-1} \beta_1 \gamma_1^{a^{-1}} = \text{Id}$
r_2	$\beta_1^{-1} \xi_1^{a^{-1}} \alpha_1 = \text{Id}$
$r_{3+3(k-1)}$	$\gamma_k^{a^{-1}} \gamma_{k+1}^a \gamma_k^b = \text{Id}$
$r_{4+3(k-1)}$	$\alpha_{k+1}^{-1} \beta_{k+1} \gamma_k^b = \text{Id}$
$r_{5+3(k-1)}$	$\beta_{k+1}^{-1} \xi_k^b \alpha_{k+1} = \text{Id}$
r_{3g}	$\delta^{-1} \xi_{g-1}^b \xi_{g-1}^{a^{-1}} = \text{Id}$
r_{3g+j}	$\xi_{g-j}^a \xi_{g-j-1}^b \xi_{g-j-1}^{a^{-1}} = \text{Id}$

(3.24)

onde $k = 1, 2, \dots, g-1$ e $j = 1, 2, \dots, (g-2)$. Quando tivermos $k = g-1$, o elemento γ_{k+1}^a de $r_{3+3(k-1)}$ em (3.24) deverá ser substituído pelo elemento δ .

Desta maneira, temos

$$\Gamma_{12g-6} = \langle \alpha_k, \beta_k, \gamma_j^a, \gamma_j^b, \xi_j^a, \xi_j^b \mid r_1, r_2, \dots, r_{4g-2} \rangle \quad \text{onde } k = 1, 2, \dots, g \text{ e } j = 1, 2, \dots, g-1.$$

Diante dos resultados acima, o próximo passo é demonstrar que o grupo Γ_{12g-6} pode ser determinado por somente $2g$ dentre os atuais geradores.

Teorema 3.2.3 *Sejam $\alpha_k, \beta_k, \gamma_j^a, \gamma_j^b, \xi_j^a, \xi_j^b$ e δ com $k \in \{1, 2, \dots, g\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, g-1\}$ como descrito acima. Então, $\Gamma_{12g-6} = \langle \alpha_k, \beta_k; k = 1, 2, \dots, g \rangle$.*

Demonstração: É suficiente mostrarmos que $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k=1}^g$ geram os elementos $\gamma_j^a, \gamma_j^b, \xi_j^a, \xi_j^b$ e δ com $j \in \{1, 2, \dots, g-1\}$. Iniciamos mostrando que os elementos α_1 e β_1 determinam γ_1^a e ξ_1^a . De fato, das equações r_1 e r_2 da tabela dada em (3.24) temos

$$\alpha_1^{-1} \beta_1 \gamma_1^{a^{-1}} = \text{Id} \quad \implies \quad \gamma_1^a = \alpha_1^{-1} \beta_1 \quad (3.25)$$

$$\beta_1^{-1} \xi_1^{a^{-1}} \alpha_1 = \text{Id} \quad \implies \quad \xi_1^a = \alpha_1 \beta_1^{-1}. \quad (3.26)$$

A seguir mostramos que α_2 e β_2 determinam $\gamma_1^b, \xi_1^b, \gamma_2^a$ e ξ_2^a . Considere os elementos r_4 e r_5 da tabela dada em (3.24). Destes determinamos os elementos γ_1^b e ξ_1^b da seguinte forma

$$\alpha_2^{-1} \beta_2 \gamma_1^b = \text{Id} \quad \implies \quad \gamma_1^b = \beta_2^{-1} \alpha_2 \quad (3.27)$$

$$\beta_2^{-1} \xi_1^b \alpha_2 = \text{Id} \quad \implies \quad \xi_1^b = \beta_2 \alpha_2^{-1}. \quad (3.28)$$

Conhecidos γ_1^a e γ_1^b (veja (3.25) e (3.27)) e usando r_3 da tabela dada em (3.24), obtemos o elemento γ_2^a ,

$$\gamma_1^{a^{-1}} \gamma_2^a \gamma_1^b = \text{Id} \quad \implies \quad \gamma_2^a = \gamma_1^a \gamma_1^{b^{-1}}. \quad (3.29)$$

E de ξ_1^a e ξ_1^b (veja (3.26) e (3.28)) e usando r_{4g-2} da tabela dada em (3.24), obtemos ξ_2^a da seguinte forma

$$\xi_2^a \xi_1^b \xi_1^{a^{-1}} = \text{Id} \quad \implies \quad \xi_2^a = \xi_1^a \xi_1^{b^{-1}}. \quad (3.30)$$

De modo análogo ao feito para α_2 e β_2 , mostraremos que α_3 e β_3 determinam γ_2^b , ξ_2^b , γ_3^a e ξ_3^a . Considere os elementos r_7 e r_8 da tabela dada em (3.24). Destes determinamos os elementos γ_2^b e ξ_2^b da seguinte forma

$$\alpha_3^{-1} \beta_3 \gamma_2^b = \text{Id} \quad \implies \quad \gamma_2^b = \beta_3^{-1} \alpha_3 \quad (3.31)$$

$$\beta_3^{-1} \xi_2^b \alpha_3 = \text{Id} \quad \implies \quad \xi_2^b = \beta_3 \alpha_3^{-1}. \quad (3.32)$$

Conhecidos γ_2^a e γ_2^b (veja (3.29) e (3.31)) e usando r_6 da tabela dada em (3.24), obtemos o elemento γ_3^a ,

$$\gamma_2^{a^{-1}} \gamma_3^a \gamma_2^b = \text{Id} \quad \implies \quad \gamma_3^a = \gamma_2^a \gamma_2^{b^{-1}}. \quad (3.33)$$

E de ξ_2^a e ξ_2^b (veja (3.30) e (3.32)) e usando r_{4g-3} da tabela dada em (3.24) obtemos ξ_3^a da seguinte forma

$$\xi_3^a \xi_2^b \xi_2^{a^{-1}} = \text{Id} \quad \implies \quad \xi_3^a = \xi_2^a \xi_2^{b^{-1}}. \quad (3.34)$$

Procedendo de maneira análoga aos desenvolvimentos feitos para $\{\alpha_2, \beta_2\}$ e $\{\alpha_3, \beta_3\}$, temos que os elementos $\{\alpha_{m+1}, \beta_{m+1}\}_{m=3}^{g-2}$ determinam os elementos γ_m^b , ξ_m^b , γ_{m+1}^a e ξ_{m+1}^a . Para isto, considere os elementos $r_{4+3(m-1)}$ e $r_{5+3(m-1)}$ da tabela dada em (3.24). Destes determinamos os elementos γ_m^b e ξ_m^b da seguinte forma

$$\alpha_{m+1}^{-1} \beta_{m+1} \gamma_m^b = \text{Id} \quad \implies \quad \gamma_m^b = \beta_{m+1}^{-1} \alpha_{m+1} \quad (3.35)$$

$$\beta_{m+1}^{-1} \xi_m^b \alpha_{m+1} = \text{Id} \quad \implies \quad \xi_m^b = \beta_{m+1} \alpha_{m+1}^{-1}. \quad (3.36)$$

De γ_m^a , conhecido anteriormente, e de γ_m^b , apresentado em (3.35), usamos $r_{3+3(m-1)}$ da tabela dada em (3.24) para obtermos o elemento γ_{m+1}^a ,

$$\gamma_m^{a^{-1}} \gamma_{m+1}^a \gamma_m^b = \text{Id} \quad \implies \quad \gamma_{m+1}^a = \gamma_m^a \gamma_m^{b^{-1}}. \quad (3.37)$$

Do conhecido valor de ξ_m^a e de ξ_m^b obtido em (3.36), usando $r_{4g-(m+1)}$ da tabela dada em (3.24), obtemos ξ_{m+1}^a da seguinte forma

$$\xi_{m+1}^a \xi_m^b \xi_m^{a^{-1}} = \text{Id} \quad \implies \quad \xi_{m+1}^a = \xi_m^a \xi_m^{b^{-1}}. \quad (3.38)$$

Observamos que até o presente momento encontramos os elementos $\{\gamma_j^a, \xi_j^a\}_{j=1}^{g-1}$ e $\{\gamma_j^b, \xi_j^b\}_{j=1}^{g-2}$. Resta-nos obter os elementos $\gamma_{g-1}^b, \xi_{g-1}^b$ e δ . Estes são obtidos de α_g e β_g considerando as equações $r_{4+3(g-2)}$ e $r_{5+3(g-2)}$ (fazendo $k = g - 1$ em $r_{4+3(k-1)}$ e $r_{5+3(k-1)}$) da tabela em (3.24) obtemos

$$\alpha_g^{-1} \beta_g \gamma_{g-1}^b = \text{Id} \quad \implies \quad \gamma_{g-1}^b = \beta_g^{-1} \alpha_g \quad (3.39)$$

$$\beta_g^{-1} \xi_{g-1}^b \alpha_g = \text{Id} \quad \implies \quad \xi_{g-1}^b = \beta_g \alpha_g^{-1}. \quad (3.40)$$

De γ_{g-1}^b e ξ_{g-1}^b obtidos em (3.39) e (3.40), usando r_{3g} encontramos o último elemento δ ,

$$\delta^{-1} \xi_{g-1}^b \xi_{g-1}^{a^{-1}} = \text{Id} \quad \implies \quad \delta = \xi_{g-1}^b \xi_{g-1}^{a^{-1}}.$$

■

A partir deste ponto estaremos considerando Γ_{12g-6} agindo em $\mathbb{H}^2$ e abusaremos da notação mantendo a mesma notação para Γ_{12g-6} .

Pretendemos projetar o ponto $[R_g, \Gamma_{12g-6}] \in \mathcal{T}_g$ com $R_g = \mathbb{H}^2/\Gamma_{12g-6}$, em $\mathbb{R}^{6g-6}$ utilizando um sistema de coordenadas tal como feito na seção 1.2.3 para os casos onde os grupos Σ_g estavam ligados a polígonos com $4g$ arestas. Desta maneira estaremos estabelecendo um sistema de coordenadas semelhante às utilizadas por Fricke para grupos com $2g$ geradores. Antes de prosseguirmos, observe que neste caso temos uma projeção¹⁰ em $\mathbb{R}^{18g-9}$. No teorema 3.2.3 conseguimos reduzir o número de geradores de Γ_{12g-6} para $2g$ geradores, $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k=1}^g$. Assim, temos uma projeção destes em $\mathbb{R}^{6g}$. Nosso objetivo é projetarmos este em $\mathbb{R}^{6g-6}$.

Analogamente ao feito por Fricke em $\mathcal{F}_{4g+2}$, para eliminarmos a ambiguidade existente, impomos as *condições de normalização*:

- (i) β_g tem seus pontos fixados repulsor e atrator em 0 e ∞ .
- (ii) α_g tem seu ponto fixado atrator em 1.

Do teorema 3.2.3 temos que Γ_{12g-6} é gerado somente por $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$. Assim da proposição 1.2.8, o sistema de geradores $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ de um modelo fuchsiano normalizado Γ_{12g-6} para um ponto $[R_g, \Gamma_{12g-6}]$ em $\mathcal{T}_g$ é escrito unicamente na forma

$$\alpha_j = \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}, \quad a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}, \quad c_j > 0, \quad a_j d_j - b_j c_j = 1,$$

$$\beta_j = \frac{a'_j z + b'_j}{c'_j z + d'_j}, \quad a'_j, b'_j, c'_j \in \mathbb{R}, \quad c'_j > 0, \quad a'_j d'_j - b'_j c'_j = 1,$$

¹⁰A projeção em $\mathbb{R}^{18g-9}$ está ligada ao fato que temos $6g - 3$ funções de emparelhamento onde cada função depende somente de três incógnitas, pois os determinantes das matrizes que representam as isometrias nos fornecem uma das quatro incógnitas em função das outras.

para cada $j = 1, 2, \dots, g - 1$.

Definimos as **coordenadas Fricke** F_{12g-6} por;

$$F_{12g-6} : \mathcal{T}_g \rightarrow \mathbb{R}^{6g-6} \\ [R_g, \Gamma_{12g-6}] \mapsto (a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, \dots, a_{g-1}, b_{g-1}, c_{g-1}, a'_{g-1}, b'_{g-1}, c'_{g-1})$$

Pela proposição 1.2.7 e do teorema¹¹ 10.5.1 em [4] temos que a função F_{12g-6} está bem definida. A imagem $\mathcal{F}_{12g-6} = F_{12g-6}(\mathcal{T}_g)$ será chamada de **Espaço Fricke** $\mathcal{F}_{12g-6}$ de uma superfície de Riemann de gênero g .

Antes de demonstrarmos que F_{12g-6} é quase-sempre injetora, apresentaremos um lema que será utilizado na demonstração.

Lema 3.2.4 *Os elementos $\{\alpha_m, \beta_m\}_{m=1}^{g-1}$ determinam os elementos γ_{g-2}^b , ξ_{g-2}^b , ξ_{g-1}^a e γ_{g-1}^a . Em particular,*

$$\gamma_{g-1}^a = \prod_{i=1}^{g-1} \alpha_i^{-1} \beta_i \quad e \quad (\xi_{g-1}^a)^{-1} = \prod_{i=1}^{g-1} \beta_{g-i} \alpha_{g-i}^{-1}.$$

Demonstração: De fato, temos que os elementos α_1 e β_1 determinam os elementos γ_1^a e ξ_1^a (veja (3.25) e (3.26) na demonstração do teorema 3.2.3). Usaremos indução sobre m para provar que os elementos $\{\alpha_m, \beta_m\}_{m=2}^{g-1}$ determinam os elementos γ_{m-1}^b , ξ_{m-1}^b , γ_m^a e ξ_m^a .

Para $m = 2$ temos da demonstração do teorema 3.2.3 (veja (3.27), (3.28), (3.29) e (3.30)) que α_2 e β_2 determinam γ_1^b , ξ_1^b , γ_2^a e ξ_2^a .

Por hipótese de indução, temos que α_{g-2} e β_{g-2} determinam os elementos γ_{g-3}^b , ξ_{g-3}^b , γ_{g-2}^a e ξ_{g-2}^a . Devemos provar que α_{g-1} e β_{g-1} determinam os elementos γ_{g-2}^b , ξ_{g-2}^b , γ_{g-1}^a e ξ_{g-1}^a .

Para isto, considere os elementos $r_{4+3(g-3)}$ e $r_{5+3(g-3)}$ da tabela dada em (3.24). Destes determinamos os elementos γ_{g-2}^b e ξ_{g-2}^b da seguinte forma

$$\alpha_{g-1}^{-1} \beta_{g-1} \gamma_{g-2}^b = \text{Id} \quad \implies \quad \gamma_{g-2}^b = \beta_{g-1}^{-1} \alpha_{g-1} \quad (3.41)$$

$$\beta_{g-1}^{-1} \xi_{g-2}^b \alpha_{g-1} = \text{Id} \quad \implies \quad \xi_{g-2}^b = \beta_{g-1} \alpha_{g-1}^{-1}. \quad (3.42)$$

Da hipótese de indução temos γ_{g-2}^a e do conhecido γ_{g-2}^b apresentado em (3.41), usando $r_{3+3(g-3)}$ da tabela dada em (3.24) obtemos o elemento γ_{g-1}^a , da seguinte forma

$$\gamma_{g-2}^{a^{-1}} \gamma_{g-1}^a \gamma_{g-2}^b = \text{Id} \quad \implies \quad \gamma_{g-1}^a = \gamma_{g-2}^a \gamma_{g-2}^{b^{-1}}.$$

¹¹Este afirma que o número de arestas N de um polígono P , associado a um grupo Γ finitamente gerado do primeiro tipo de assinatura $(g : 0)$, está entre $4g$ e $12g - 6$ arestas, ou seja, $4g \leq N \leq 12g - 6$.

Da hipótese de indução temos ξ_{g-2}^a e de ξ_{g-2}^b obtido em (3.42), usando r_{3g+1} da tabela dada em (3.24) obtemos ξ_{g-1}^a da seguinte forma

$$\xi_{g-1}^a \xi_{g-2}^b \xi_{g-2}^{a^{-1}} = \text{Id} \quad \implies \quad \xi_{g-1}^a = \xi_{g-2}^a \xi_{g-2}^{b^{-1}}.$$

As expressões para γ_{g-1}^a e $(\xi_{g-1}^a)^{-1}$ apresentadas no lema, são obtidas diretamente da substituição dos elementos em função dos α_j e β_j . ■

Teorema 3.2.5 *Seja $\mathbf{F}_{12g-6} : \mathcal{T}_g \rightarrow \mathbb{R}^{6g-6}$ definida como acima. Então $\mathbf{F}_{12g-6}$ é injetora para quase todo ponto em $\mathcal{T}_g$.*

Demonstração: Mostraremos que cada ponto $p_g \in \mathcal{F}_{12g-6}$ determina um sistema de geradores

$$\{\alpha_k, \beta_k, \gamma_j^a, \gamma_j^b, \xi_j^a, \xi_j^b; k = 1, 2, \dots, g \text{ e } j = 1, 2, \dots, g-1\}$$

do emparelhamento Φ_{12g-6} que gera um grupo fuchsiano Γ_{12g-6} normalizado.

Portanto, dado $p_g \in \mathcal{F}_{12g-6}$, segue

$$p_g = (a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, \dots, a_{g-1}, b_{g-1}, c_{g-1}, a'_{g-1}, b'_{g-1}, c'_{g-1})$$

donde derivamos os valores das isometrias

$$\alpha_j, \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, g-1.$$

Diante do teorema 3.2.3, devemos demonstrar que a partir de $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k=1}^{g-1}$ podemos obter os elementos α_g e β_g . Como α_g e β_g satisfazem as condições de normalização, temos

$$\alpha_g = \begin{pmatrix} a_g & b_g \\ c_g & d_g \end{pmatrix} \quad \beta_g = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda > 1 \quad ; \quad a_g + b_g = c_g + d_g \quad ; \quad a_g d_g - b_g c_g = 1.$$

Pela demonstração do teorema 3.2.3, temos que os elementos $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k=1}^{g-1}$ determinam os elementos $\{\gamma_j^a, \xi_j^a\}_{j=1}^{g-1}$ e $\{\gamma_j^b, \xi_j^b\}_{j=1}^{g-1}$. Tomando $k = g-1$ nas equações $r_{3+3(k-1)}$, $r_{4+3(k-1)}$ e $r_{5+3(k-1)}$ (em (3.24)) obtemos as seguintes equações equivalentes

$$\delta \gamma_{g-1}^b \gamma_{g-1}^{a^{-1}} = \text{Id} \tag{3.43}$$

$$\gamma_{g-1}^b \alpha_g^{-1} \beta_g = \text{Id} \tag{3.44}$$

$$\xi_{g-1}^b \alpha_g \beta_g^{-1} = \text{Id}. \tag{3.45}$$

E de r_{3g} temos a equação equivalente

$$\xi_{g-1}^b \xi_{g-1}^{a^{-1}} \delta^{-1} = \text{Id}. \quad (3.46)$$

Isolando δ em (3.46) e substituindo em (3.43) obtemos

$$\xi_{g-1}^b \xi_{g-1}^{a^{-1}} \gamma_{g-1}^b \gamma_{g-1}^{a^{-1}} = \text{Id} \implies \xi_{g-1}^b \xi_{g-1}^{a^{-1}} = \gamma_{g-1}^a \gamma_{g-1}^{b^{-1}}. \quad (3.47)$$

Do lema 3.2.4, temos os elementos $\xi_{g-1}^{a^{-1}}$ e $\gamma_{g-1}^{a^{-1}}$ determinados pelos elementos $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k=1}^{g-1}$ que denotaremos por

$$\xi_{g-1}^{a^{-1}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \gamma_{g-1}^a = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix},$$

onde $a, b, c, d, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c},$ e $\tilde{d} \in \mathbb{R}$ com $ad - bc = 1$, $\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} = 1$. Observamos que somente as matrizes ξ_{g-1}^b e $\gamma_{g-1}^{b^{-1}}$ em (3.47) são desconhecidas.

Note que de (3.44) obtemos a matriz de α_g em função das matrizes de β_g e γ_{g-1}^b , ou seja,

$$\alpha_g = \beta_g \gamma_{g-1}^b.$$

Substituindo α_g em (3.45) temos

$$\xi_{g-1}^b \beta_g \gamma_{g-1}^b \beta_g^{-1} = \text{Id} \implies \xi_{g-1}^b \beta_g = \beta_g \gamma_{g-1}^{b^{-1}}. \quad (3.48)$$

Neste ponto, observamos que a determinação de α_g resume-se em obter as matrizes β_g e γ_{g-1}^b . Para isto, usaremos as equações (3.47) e (3.48). Desta forma, suponha que

$$\xi_{g-1}^b = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{g-1}^{b^{-1}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

onde $y_1, y_2, y_3, y_4, x_1, x_2, x_3$ e $x_4 \in \mathbb{R}$. Devemos encontrar os valores de y_k e x_k sabendo que

$$y_1 y_4 - y_2 y_3 = 1, \quad (3.49)$$

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 1. \quad (3.50)$$

De (3.48) segue

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda} y_1 - \sqrt{\lambda} x_1 = 0 \\ y_2 - \lambda x_2 = 0 \\ \lambda y_3 - x_3 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} y_4 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = \lambda x_2 \\ y_3 = \frac{1}{\lambda} x_3 \\ y_4 = x_4 \end{cases}. \quad (3.51)$$

Usando (3.51) em (3.47), temos

$$\begin{cases} (a - \tilde{a})x_1 + c\lambda x_2 - \tilde{b}x_3 = 0 \\ bx_1 + (\lambda d - \tilde{a})x_2 - \tilde{b}x_4 = 0 \\ -\tilde{c}x_1 + \left(\frac{a}{\lambda} - \tilde{d}\right)x_3 + cx_4 = 0 \\ -\tilde{c}x_2 + \frac{b}{\lambda}x_3 + (d - \tilde{d})x_4 = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

Das equações (3.50) e (3.52) procuramos os elementos x_1, x_2, x_3, x_4 e λ . A matriz correspondente ao sistema em (3.52) é dada por,

$$\begin{pmatrix} (a - \tilde{a}) & c\lambda & -\tilde{b} & 0 \\ b & (\lambda d - \tilde{a}) & 0 & -\tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 & \left(\frac{a}{\lambda} - \tilde{d}\right) & c \\ 0 & -\tilde{c} & \frac{b}{\lambda} & (d - \tilde{d}) \end{pmatrix}.$$

Mediante simplificações, o determinante da matriz do sistema é dado por

$$\frac{1}{\lambda} \left((a - \tilde{a}) + (d - \tilde{d})\lambda \right)^2.$$

Analogamente ao feito na seção anterior, podemos assumir que $(d - \tilde{d}) \neq 0$ para quase todo ponto em $\mathbb{R}^{6g-6}$. Disto, podemos considerar $\lambda = \frac{(a - \tilde{a})}{(d - \tilde{d})}$, de modo que o determinante da matriz associada a (3.52) é nulo e portanto temos que o sistema (3.52) tem solução não trivial. ■

3.2.1 O polígono fundamental P_{12g-6}

Consideramos um grupo fuchsiano Γ_g isomorfo ao grupo fundamental de $\pi_1(R_g)$ de uma superfície de Riemann fechada R_g , compacta orientável de gênero g . É fato conhecido que um domínio de Voronoi-Dirichlet genérico de Γ_{12g-6} é um polígono convexo com $12g - 6$ arestas (teorema 10.5.1 em [4]) e os $6g - 3$ emparelhamentos destas arestas fornecem um sistema de geradores para Γ_{12g-6} . Na seção anterior, este sistema de geradores contém enormes redundâncias, sendo na realidade gerado por $2g$ destas funções de emparelhamento $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g\}$ (teorema 3.2.3). Mais ainda, considerando as condições de normalização usuais, na realidade as isometrias α_g e β_g quase sempre podem ser determinadas a partir das anteriores, obtendo assim um novo sistema de coordenadas para os espaços de teichmüller, que denominamos de coordenadas Fricke do tipo $12g - 6$.

Nesta seção faremos o caminho inverso e, a partir das coordenadas Fricke do tipo $12g - 6$ construiremos o domínio de Voronoi-Dirichlet correspondente, ou seja, obtaremos uma parametrização do espaço de teichmüller. Conforme vimos acima, podemos (quase sempre) obter as $6g - 3$ funções de emparelhamento a partir das coordenadas Fricke, de modo que o problema se reduz a determinarmos os vértices do polígono a partir das isometrias de emparelhamento.

Assim, considere o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_{12g-6}\}$ de vértices do polígono P_{12g-6} . Pretendemos reconstruir estes vértices em função dos $4g - 2$ ciclos de vértices. Sabemos que os ciclos de vértices são dados por

Notação	Ciclos
c_1	v_1, v_3, v_{6g-1}
c_2	v_2, v_{6g-2}, v_{6g}
$c_{3+3(k-1)}$	$v_{5(k-1)+4}, v_{5(k-1)+8}, v_{12g-6-(k-1)}$
$c_{4+3(k-1)}$	$v_{5(k-1)+5}, v_{5(k-1)+7}, v_{5(k-1)+6g+3}$
$c_{5+3(k-1)}$	$v_{5(k-1)+6}, v_{5(k-1)+6g+2}, v_{5(k-1)+6g+4}$
c_{3g-1+k}	$v_{5g-2+k}, v_{11g-4-5k}, v_{11g-5k}$

onde $k = 1, 2, \dots, g - 1$. Supondo que um ciclo c_k tem um conjunto de vértices $\{v_m, v_l, v_n\}$, definimos $c_k[1] = v_m$, $c_k[2] = v_l$ e $c_k[3] = v_n$. Com estas notações, os vértices do polígono, apresentados no sentido anti-horário iniciando em v_1 , são dados por

$$v_1 = c_1[1], \quad v_2 = c_2[1], \quad v_3 = c_1[2]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{4+5(k-1)} = c_{3+3(k-1)}[1] \\ v_{5+5(k-1)} = c_{4+3(k-1)}[1] \\ v_{6+5(k-1)} = c_{5+3(k-1)}[1] \\ v_{7+5(k-1)} = c_{4+3(k-1)}[2] \\ v_{8+5(k-1)} = c_{3+3(k-1)}[2] \end{array} \right.$$

onde $k = 1, 2, \dots, g - 1$. Os próximos vértices são

$$v_{5g-2+k} = c_{3g-1+k}[1], \quad k = 1, 2, \dots, g - 1.$$

Conforme desenvolvido anteriormente, temos

$$v_{6g-2} = c_2 [2], \quad v_{6g-1} = c_1 [3], \quad v_{6g} = c_2 [3]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{6g+1+5(k-1)} = c_{4g-2-(k-1)} [2] \\ v_{6g+2+5(k-1)} = c_{5+3(k-1)} [2] \\ v_{6g+3+5(k-1)} = c_{4+3(k-1)} [3] \\ v_{6g+4+5(k-1)} = c_{5+3(k-1)} [3] \\ v_{6g+5+5(k-1)} = c_{4g-2-(k-1)} [3] \end{array} \right.$$

onde $k = 1, 2, \dots, g-1$. Encerramos com os vértices

$$v_{11g-5+k} = c_{3g-3k} [3], \quad k = 1, 2, \dots, g-1.$$

Na tabela apresentada em (3.23), fornecemos um representante para cada classe de ciclos. A seguir apresentamos a descrição dos outros vértices em função destes representantes. Das relações apresentadas em (3.24) encontramos a seguinte tabela

Notação	Ciclos
c_1	$\{v_1, \gamma_1^{a^{-1}}(v_1), \beta_1 \gamma_1^{a^{-1}}(v_1)\}$
c_2	$\{v_2, \alpha_1(v_2), \xi_1^{a^{-1}} \alpha_1(v_2)\}$
$c_{3+3(k-1)}$	$\{v_{4+5(k-1)}, \gamma_k^b(v_{4+5(k-1)}), \gamma_{k+1}^a \gamma_k^b(v_{4+5(k-1)})\}$
$c_{4+3(k-1)}$	$\{v_{5+5(k-1)}, \gamma_k^b(v_{5+5(k-1)}), \beta_{k+1} \gamma_k^b(v_{5+5(k-1)})\}$
$c_{5+3(k-1)}$	$\{v_{6+5(k-1)}, \alpha_{k+1}(v_{6+5(k-1)}), \xi_k^b \alpha_{k+1}(v_{6+5(k-1)})\}$
c_{3g}	$\{v_{5g-1}, \xi_{g-1}^{a^{-1}}(v_{5g-1}), \xi_{g-1}^b \xi_{g-1}^{a^{-1}}(v_{5g-1})\}$
c_{3g+j}	$\{v_{5g-1+j}, \xi_{g-j-1}^{a^{-1}}(v_{5g-1+j}), \xi_{g-j-1}^b \xi_{g-j-1}^{a^{-1}}(v_{5g-1+j})\}$

(3.53)

onde $k = 1, 2, \dots, g-1$ e $j = 1, 2, \dots, g-2$.

Através da escolha dos vértices representantes dos ciclos montaremos o polígono fundamental e para tal associaremos esta escolha com os pontos de interseções dos eixos¹². Desta forma, apresentamos na ordem (anti-horária) em que aparecem um

¹²A geodésica ligando os pontos fixos p_1 e p_2 de uma isometria γ é chamada de **eixo** de γ . Denotamos esta por $\text{Eixo}(\gamma)$.

grupo de candidatos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Eixo}(\gamma_1^a) \cap \text{Eixo}(\alpha_1), \text{Eixo}(\gamma_1^a) \cap \text{Eixo}(\beta_1) \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Eixo}(\gamma_j^b) \cap \text{Eixo}(\alpha_{j+1}) \\ \text{Eixo}(\gamma_j^b) \cap \text{Eixo}(\beta_{j+1}) \end{array} \right. \quad j = 1, 2, \dots, g-1 \\ \text{Eixo}(\xi_1^a) \cap \text{Eixo}(\alpha_1), \text{Eixo}(\xi_1^a) \cap \text{Eixo}(\beta_1) \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Eixo}(\xi_j^b) \cap \text{Eixo}(\alpha_{j+1}) \\ \text{Eixo}(\xi_j^b) \cap \text{Eixo}(\beta_{j+1}) \end{array} \right. \quad j = 1, 2, \dots, g-1. \end{array} \right. \quad (3.54)$$

Portanto, associaremos os vértices

$$v_1, v_{5(k-1)+7}, v_{5g-1+j}, v_{6g-2}, v_{5(k-1)+6g+4}, v_{11g-5}, v_{12g-6-(k-1)}, \quad (3.55)$$

$k = 1, 2, \dots, g-1$ e $j = 1, 2, \dots, g-2$, com $4g-2$ dentre os pontos encontrados em (3.54). Porém, em (3.54) temos $4g$ pontos e como estamos interessados somente em $4g-2$ destes, descartaremos os dois pontos

$$\text{Eixo}(\xi_1^a) \cap \text{Eixo}(\alpha_1), \text{Eixo}(\xi_1^a) \cap \text{Eixo}(\beta_1).$$

Logo, temos condições de enunciar a seguinte conjectura:

Conjectura 3.2.6 *Seja Γ_{12g-6} um grupo finitamente gerado do primeiro tipo com assinatura $(g : 0)$. Então, para alguma sequência de geradores*

$$\{\alpha_k, \beta_k, \gamma_j^a, \gamma_j^b, \xi_j^a, \xi_j^b; k = 1, 2, \dots, g \text{ e } j = 1, 2, \dots, g-1\}$$

de Γ_{12g-6} satisfazendo (3.24) temos que os eixos destes elementos interceptam-se conforme descrito em (3.54) e que estes elementos determinam um polígono fundamental para Γ_{12g-6} cujos vértices são

$$\begin{aligned} v_1 &= c_1 [1], \quad v_2 = c_2 [1], \quad v_3 = c_1 [2] \\ \left\{ \begin{array}{l} v_{4+5(k-1)} = c_{3+3(k-1)} [1] \\ v_{5+5(k-1)} = c_{4+3(k-1)} [1] \\ v_{6+5(k-1)} = c_{5+3(k-1)} [1] \\ v_{7+5(k-1)} = c_{4+3(k-1)} [2] \\ v_{8+5(k-1)} = c_{3+3(k-1)} [2] \end{array} \right. \\ v_{5g-2+k} &= c_{3g-1+k} [1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{6g-2} &= c_2 [2], \quad v_{6g-1} = c_1 [3], \quad v_{6g} = c_2 [3] \\
\left\{ \begin{array}{l} v_{6g+1+5(k-1)} = c_{4g-2-(k-1)} [2] \\ v_{6g+2+5(k-1)} = c_{5+3(k-1)} [2] \\ v_{6g+3+5(k-1)} = c_{4+3(k-1)} [3] \\ v_{6g+4+5(k-1)} = c_{5+3(k-1)} [3] \\ v_{6g+5+5(k-1)} = c_{4g-2-(k-1)} [3] \end{array} \right. \\
v_{11g-5+k} &= c_{3g-3k} [3],
\end{aligned}$$

onde $k = 1, 2, \dots, g-1$.

Observação 3.2.7 Apesar de não termos provado esta conjectura, acreditamos que a solução desta está ligada ao fato de encontrarmos $4g-2$ interseções entre os eixos das isometrias de Γ_{12g-6} . É necessário verificar se o grupo de candidatos que estamos sugerindo em 3.54 interceptam-se. A partir daí, basta seguirmos o raciocínio de Linda Keen.

Note que os vértices do polígono apresentado acima dependem somente das isometrias geradoras de Γ_{12g-6} . Assim, exibimos a seguir uma construção destas isometrias para um polígono regular P_{12g-6} .

Exemplo 3.2.8 Seja P_{12g-6} um polígono regular com $12g-6$ arestas no disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$ e baricentro na origem $0 \in \mathbb{D}^2$. Designamos seus vértices no sentido anti-horário por $z_1, z_2, \dots, z_{12g-6}$ e suas arestas, também no sentido anti-horário, por

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{12g-6}.$$

Sabemos que o emparelhamento Φ_{12g-6} de P_{12g-6} é igual ao conjunto

$$\{\alpha_k, \beta_k, \gamma_j^a, \gamma_j^b, \xi_j^a, \xi_j^b; k = 1, 2, \dots, g \text{ e } j = 1, 2, \dots, g-1\}.$$

Para expressarmos os elementos de Φ_{12g-6} é suficiente conhecer uma das funções, digamos α_1 , pois utilizando transformações elípticas conseguimos todas as outras a partir α_1 . Admitindo ser conhecida a matriz de α_1 temos:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \rho_1 \alpha_1 \rho_1^{-1} \\
\alpha_{k+1} &= \rho_{5k-1} \alpha_1 \rho_{5k-1}^{-1}, \quad \beta_{k+1} = \rho_{5k} \alpha_1 \rho_{5k}^{-1} \\
\gamma_k^a &= \rho_{6g-4-(k-1)} \alpha_1 \rho_{2+5(k-1)}^{-1}, \quad \gamma_k^b = \rho_{6+5(k-1)} \alpha_1^{-1} \rho_{6g-6-5(k-1)} \\
\delta &= \rho_{5g-3} \alpha_1 \rho_{5g-3}^{-1} \\
\xi_k^a &= \rho_{6g-4-(k-1)} \alpha_1^{-1} \rho_{2+5(k-1)}^{-1}, \quad \xi_k^b = \rho_{6g+3+5(k-1)} \alpha_1^{-1} \rho_{3+5(k-1)}^{-1}
\end{aligned}$$

onde $k \in \{1, 2, \dots, g-1\}$ e $\rho_k = e^{ik\frac{2\pi}{12g-6}}$.

A isometria hiperbólica α_1 que emparelha os pares $\{\tau_1, \tau_{6g-2}\}$ é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) & \sqrt{2 \cos \frac{\pi}{6g-3} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right)} i e^{i\frac{(6g-2)\pi}{12g-6}} \\ -\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{6g-3} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right)} i e^{-i\frac{(6g-2)\pi}{12g-6}} & \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) \end{bmatrix}.$$

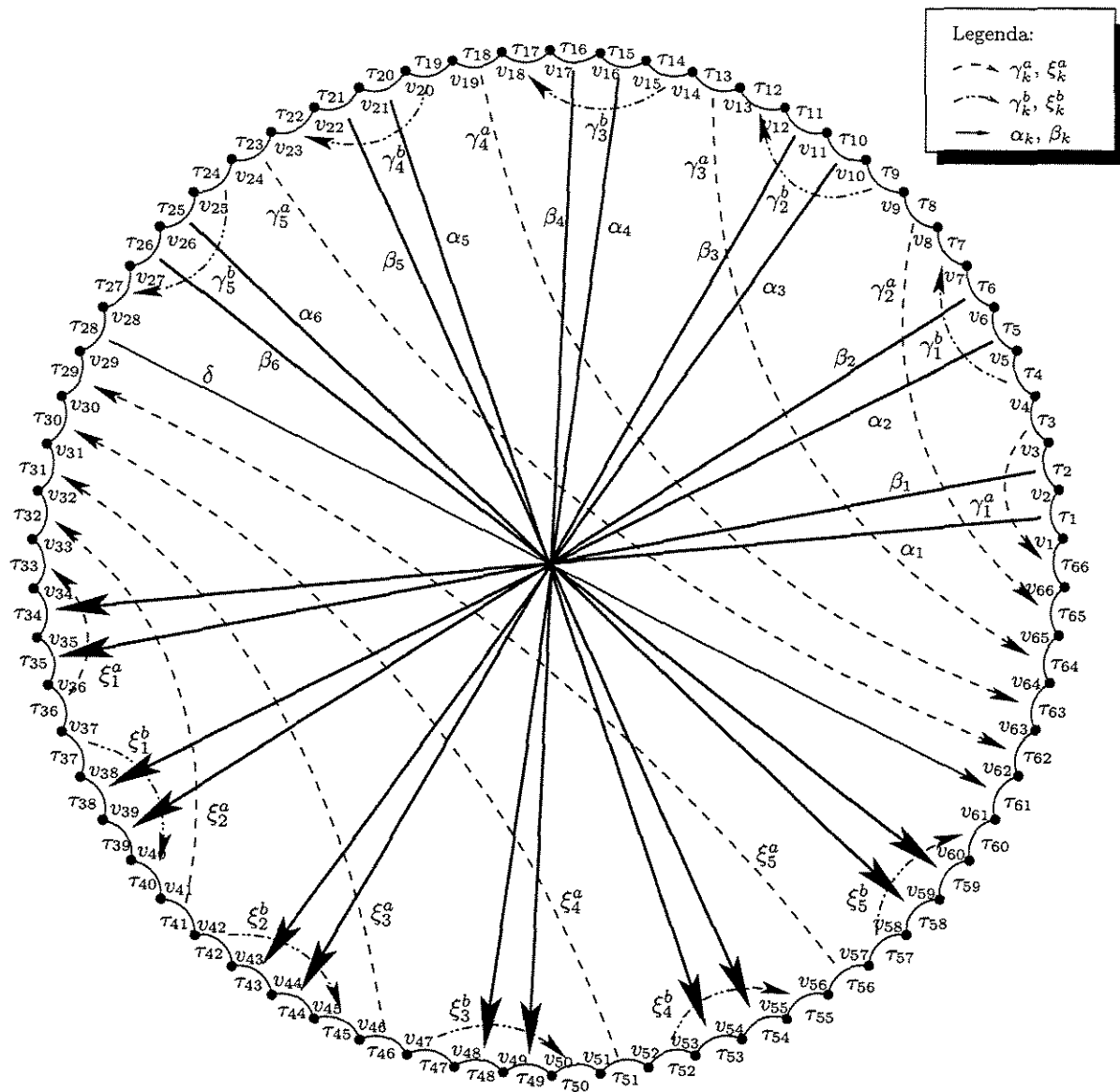


Figura 3.2: Ilustração do emparelhamento $12g-6$ para $g = 6$

Capítulo 4

Círculo Máximo Inscrito e Círculo Mínimo Circunscrito

Neste capítulo apresentamos a construção de três algoritmos. Na seção 4.1 estendemos para os planos hiperbólico e esférico o método euclidiano para encontrar o círculo máximo contido num polígono feito por Karkazis e Karagiorgis em [24]. Em seguida, na seção 4.1.2, exibimos o método que geramos para fazer a determinação de um círculo máximo contido (inscrito - CMI) num polígono. Este é válido para qualquer uma das três geometrias planas de curvatura constante. O terceiro é um algoritmo discreto para determinação do círculo mínimo contendo o polígono conforme pode ser visto na seção 4.2. Estes dois últimos foram implementados no software Mathematica para os planos euclidiano e hiperbólico (veja apêndice - página 97).

Estes problemas surgiram do desejo de avaliar a densidade de empacotamento de esferas. Da busca pelo círculo máximo contido num polígono também tivemos inspiração para elaborar um método para encontrar o menor círculo que contém o polígono. Este está ligado ao problema de cobertura por esferas o qual também temos interesse.

Salientamos que o propósito de encontrar o CMI dá continuidade ao algoritmo estabelecido no capítulo 3. A determinação do círculo inscrito de raio máximo é um problema menos simples do que aparenta. Um método para solucionar o problema foi encontrado no plano euclidiano em 1986 por Karkazis e Karagiorgis [24]. Este método tem procedimento contínuo¹. O resultado apresentado por Karkazis e Karagiorgis para a determinação do CMI de um polígono, convexo ou não, contido no plano euclidiano

¹Denominamos um método com procedimento contínuo por um *método contínuo*, no sentido de envolver uma parametrização de uma curva contínua e considerar as singularidades desta.

é simples porém engenhoso. A principal idéia no desenvolvimento é o resultado que diz: *"a trajetória determinada pelos centros de todos os círculos inscritos num polígono constitui uma árvore cujos vértices são os candidatos ao círculo máximo inscrito neste polígono"*. Além disto, eles observaram que no caso euclidiano *existe pelo menos um CMI com três pontos de tangência em comum com o bordo do polígono*. Ainda, existem casos em que temos mais que um CMI com três pontos de tangência.

Para encontrar o CMI de um dado polígono convexo hiperbólico, P_g , usamos as idéias adotadas em [24] e estendemos o método para um polígono geodésico em uma superfície de curvatura constante $\mathbb{E}$, isto é, para as geometrias bi-dimensionais não-euclidianas. Deste trabalho, fizemos os algoritmos (seções 4.1.2 e 4.2) que foi implementado no Mathematica (Apêndice).

Lembramos que os polígonos P_g correspondem a um toro de gênero g no espaço de teichmüller², T_g . O espaço de recobrimento riemanniano de um g – toro T_g é o plano hiperbólico, no qual o grupo fundamental de T_g age como transformações de recobrimento que são isometrias do plano. Seu domínio de Voronoi-Dirichlet é um polígono com $4g$ arestas, identificadas através de um conjunto de geradores de $\pi_1(T_g)$. Considerando a representação matricial destas transformações em $SL(2, \mathbb{R})$, e algumas condições de uniformização, associamos a cada g -toro um ponto de $\mathbb{R}^{6g-6}$ (coordenadas Fricke do espaço de teichmuller), cuja imagem é um domínio aberto e convexo de $\mathbb{R}^{6g-6}$.

O principal objetivo alcançado nesta etapa é a determinação da densidade de empacotamento associada a cada um desses g – toros. Sabemos que, conhecendo um domínio de Voronoi-Dirichlet, a densidade é definida como o quociente da área do círculo inscrito pela área do domínio. Como a área do domínio é conhecida e a área do círculo inscrito é uma função de seu raio, o principal problema é a determinação deste. Aqui, faremos a explicitação das definições em um contexto um tanto mais amplo e, para tanto, denotaremos por $\mathbb{E}$ o plano euclidiano, hiperbólico ou esférico e por d a distância correspondente.

Definição 4.0.9 *Dado um polígono $P \subset \mathbb{E}$, dizemos que um círculo $C \subset P$ é um círculo inscrito se for maximal com esta propriedade, ou seja, se C' é um círculo tal que $C \subsetneq C'$, então $C' \not\subset P$. Ainda, C será dito um círculo máximo inscrito (CMI) se este tiver raio máximo dentre os raios dos círculos inscritos em P .*

Portanto, iniciamos apresentando um método para encontrar o CMI.

²Estamos interessados somente nos casos onde $g \geq 2$. Nesta situação temos que T_g corresponde ao espaço Fricke $\mathcal{F}_{4g}$.

4.1 Determinação do Círculo Máximo Inscrito

Consideramos um polígono P (convexo ou não) contido em $\mathbb{E}$, representando uma das duas geometrias de curvatura constante não-euclidianas. O conjunto das arestas de P é dado por $\mathcal{A} = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ e o conjunto de vértices de P por $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, onde cada aresta τ_j é determinada pelo segmento geodésico ligando os vértices v_j e v_{j+1} (j é tomado mod n). Denotaremos por $C = C(c, r)$ o círculo com centro c e raio r e por ∂P o bordo do polígono P .

Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{E}$ denotaremos o segmento geodésico entre p e q por $\overline{pq}$. A semi-geodésica iniciada em p e passado por q será denotada por $\overrightarrow{pq}$. Denotamos por $d(p, q)$ a distância entre p e q . Destacamos que as ilustrações estão no modelo hiperbólico do disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$, embora todas as definições e demonstrações tenham validade também em $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{R}^2$.

A noção mais importante para o desenvolvimento desta parte é a idéia de círculo rolante (abreviado por CR).

Definição 4.1.1 *Considere uma parametrização $\mathcal{P} : [0, 1) \rightarrow \partial P$, denotando $\mathcal{P}(t) = p_t$, isto é, uma função contínua e bijetora. Para cada ponto $p_t \in \partial P$, associamos um círculo C_t , que é o maior círculo inscrito em P tangente a p_t . C_t será chamado de **círculo rolante (CR)** e p_t de **ponto base de tangência (PBT)** (veja figura 4.1, (a) e (b)). Denotaremos por c_t o centro de C_t e por r_t seu raio.*

Percorreremos todo o ∂P iniciando no vértice v_1 , seguindo no sentido anti-horário até retornarmos ao vértice v_1 . O ponto base de tangência, p_t , é movido de maneira contínua; isso determina que os centros dos círculos rolantes (CR), C_t , determinam segmentos geodésicos contínuos por todos os pontos em que os maiores círculos inscritos são centrados (veja figura 4.1 (a)).

O método que propomos segue a idéia desenvolvida em [24] para o plano euclidiano. Este consiste em limitar apropriadamente o movimento de PBT em ∂P e com isto decompormos a trajetória do centro CR em simples pedaços que são segmentos geodésicos ou parte de parábolas³, o que nos permite ter a estrutura de um grafo (veja figura 4.1 (a)).

Seja p a posição de PBT, em seu movimento anti-horário, e $C(c, r)$ o associado CR. Segundo o Lema 4.1.10 (apresentado na Seção 4.1.2), o círculo C é tangente em ∂P não somente em p , mas em pelo menos algum outro ponto distinto. Seja q este ponto

³Entendemos por uma *parábola* em $\mathbb{E}$ ao lugar geométrico entre um ponto e uma geodésica de $\mathbb{E}$.

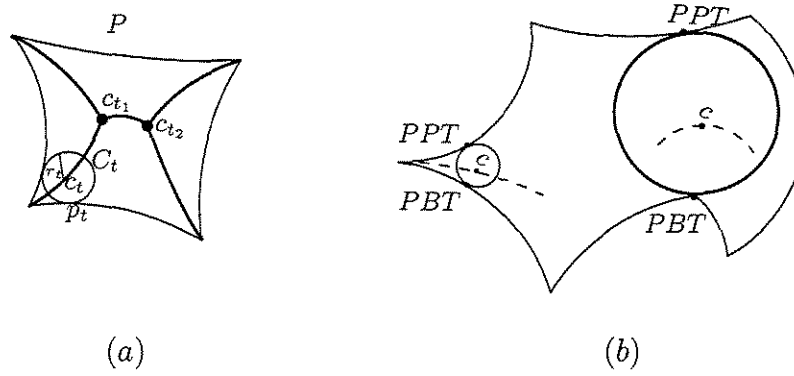


Figura 4.1: Exemplo de: (a) um CR e sua árvore dos centros e (b) Trajetória do CR

mais próximo de p , na direção anti-horária sobre o bordo de C . Chamaremos este de **ponto piloto de tangência**, abreviadamente PPT. Note que a direção do movimento de PPT é horário sobre ∂P , assim como o PBT move-se no sentido anti-horário sobre ∂P . Estes pontos PPT e PBT encontram-se sobre os vértices convexos do polígono (veja figura 4.2).

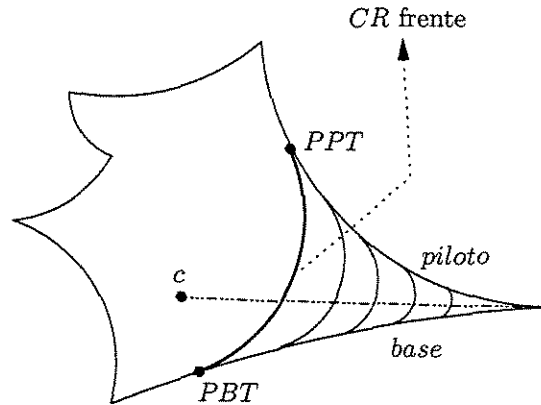


Figura 4.2: PBT e PPT convergindo para um vértice convexo - E o CR frente

Introduziremos mais dois importantes conceitos que chamaremos de "**base**" e "**piloto**".

Definição 4.1.2 Chamamos de "**base**" a aresta do polígono que contém o ponto PBT. Note que, quando o PBT é um vértice não convexo, a base será o próprio PBT. Chamamos de "**piloto**" a aresta do polígono que contém o ponto PPT. Assim como na base, quando PPT é um vértice não convexo temos que o piloto e o PPT coincidem. Seguindo este raciocínio, chamamos de "**CR frente**" (veja figura 4.2) ao segmento do

círculo CR iniciado no PBT , no sentido do movimento do PBT , e findando no PPT . Note que incluímos a CR frente os pontos PBT e PPT .

Definiremos a seguir o que chamamos de **elemento tangencial**.

Definição 4.1.3 *O elemento tangencial consiste de um vértice sobre o bordo do círculo CR ou de uma aresta do polígono P que seja tangente a CR .*

Note que é possível termos uma aresta e um de seus vértices, sendo simultaneamente, elementos tangentes (isto ocorre quando o CR é tangente à aresta em um de seus vértices). Quando um terceiro elemento, ao lado dos atuais base e piloto, colide com o CR frente, a trajetória do centro de CR é alterada. Por isso, tais elementos serão chamados de **barreiras** (veja figura 4.6 na página 79). Chamamos de **ponto crítico** ao ponto sobre a trajetória dos centros CR 's em que ocorre a mudança de trajetória (ou de parâmetro). Especificamos ainda que em um ponto crítico o tipo de trajetória pode permanecer inalterado considerando que seus parâmetros mudam (mudando somente a inclinação da geodésica), ou caso contrário, podemos ter que o tipo de trajetória é mudado (passando de geodésica para parábola e vice-versa) (veja figura 4.3).

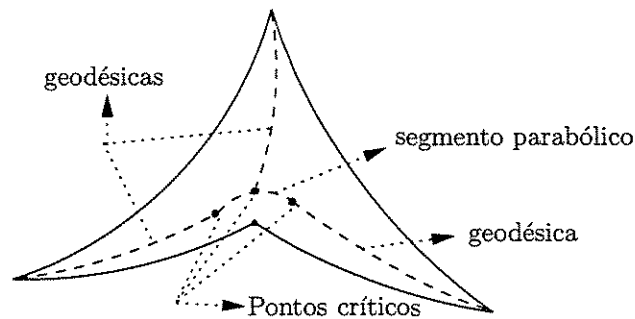


Figura 4.3: Exemplo dos pontos críticos

O tipo e os parâmetros da trajetória, entre dois pontos críticos (ou entre a velha posição do centro, em C , e a nova posição, no momento de colisão do CR frente com a barreira) é determinado pela base e pelo piloto. Veja figura 4.4 para as relações entre os elementos base e piloto.

Por outro lado, os pontos críticos da trajetória são determinados pelo tipo e pela posição da barreira que pode ser um vértice ou um ponto interior de uma aresta. Procuramos determinar os pontos críticos de uma trajetória, relacionando com os dois elementos anteriores (base e piloto) as **barreiras**.

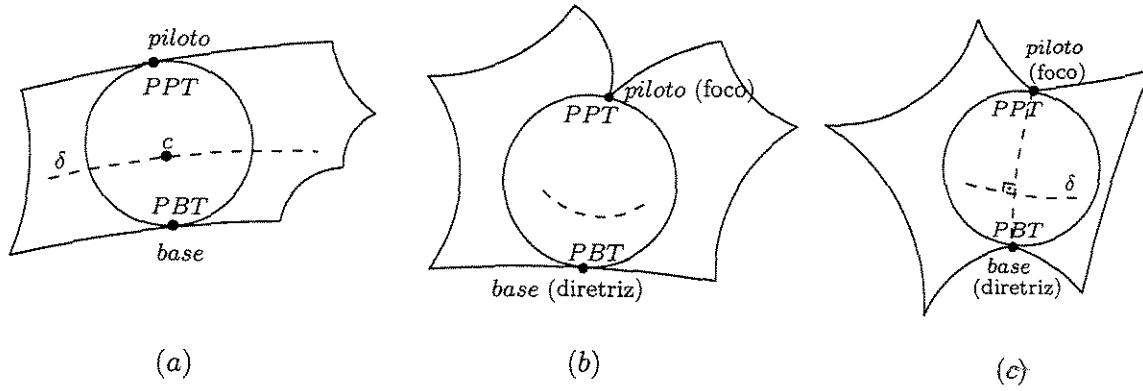
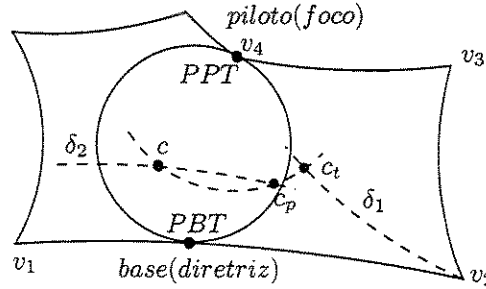


Figura 4.4: (a) A base e o piloto são arestas; (b) A base é uma aresta e o piloto um vértice não-convexo; (c) Base e pilotos são vértices não convexos

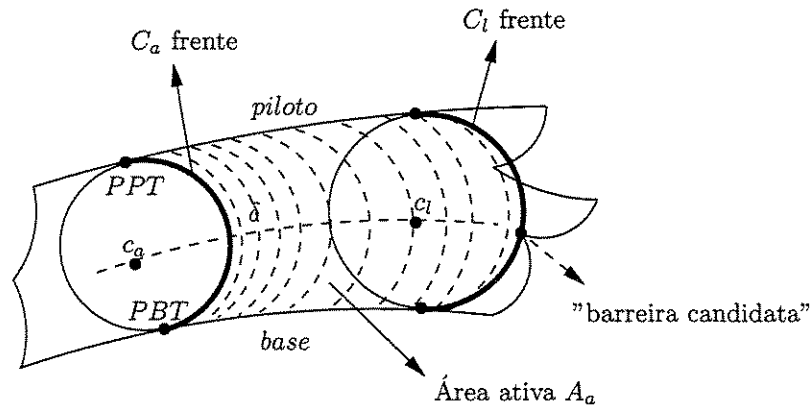
Os tipos de trajetórias dependem somente dos elementos de base e piloto. Um terceiro elemento em ∂P , sobre o caminho que liga PBT a PPT (sentido anti-horário), representa uma **barreira candidata** para CR que na ausência de outras barreiras forçaria a trajetória do centro a ser alterada em um ponto que chamamos **ponto crítico candidato**. Se c_p é o atual ponto crítico sobre a trajetória, então a **barreira candidata** que é associada com o **ponto crítico candidato** mais próximo para c_p (ao longo da trajetória) é a barreira que atualmente força a trajetória a mudar de direção. Esta barreira será chamada de **barreira atual** (veja figura 4.5).

Depois da colisão do CR frente com a barreira atual, devemos automaticamente trocar o piloto e manter este lugar até a nova barreira encontrada. O papel da barreira atual, assim como o novo piloto, é dar uma dica de como localizar os pontos críticos sobre a trajetória do centro CR.

Suponhamos que a **trajetória atual** do centro CR, i.e., a trajetória correspondente aos *atuais base e piloto*, foi encontrada. Desse modo, para cada *barreira candidata*, observamos que uma nova trajetória é obtida por repetitivas aplicações do método acima. A intersecção da *trajetória corrente* com cada nova trajetória (correspondente a alguma barreira candidata) é um **ponto crítico candidato** (c_t), cuja distância ao longo da trajetória corrente do último *ponto crítico* pode ser claramente comparada com a distância dos restantes. Então, a posição do ponto crítico candidato mais próximo - que será o próximo ponto crítico - é um processo simples (basta intersectar todos os bissetores da base com as barreiras candidatas correspondentes, com o atual bissetor dado pela base e pelo piloto e tomar o mais próximo do atual ponto crítico).

Figura 4.5: Como encontrar os pontos críticos c_p

Observamos que temos que calcular os *pontos críticos candidatos* correspondente a **barreira candidata associada**, abreviadamente **BCA**. Nós desconsideramos todos elementos (exceto a base, o piloto e BCA), partindo da base e piloto para ajustar o caminho iniciando da atual posição de CR, $C_a(c_a, r_a)$ círculo atual, e somente BCA para limitá-los (veja figura 4.6).

Figura 4.6: A área ativa A_a

O CR, no momento da colisão com o BCA, define um **círculo limitante** denotado por $C_l(c_l, r_l)$. Outrossim, a parte da circunferência de C_l que liga a direita do PBT à esquerda do PPT, é chamada de **C_l frente** e de modo análogo temos **C_a frente**. A área confinada entre C_a frente e C_l frente é chamada de **área ativa** e denominada por A_a .

A área ativa A_a será utilizada para localizar a barreira atual (dentre todas as candidatas). Para isto, iterativamente reduzimos A_a , em cada momento utilizando a BCA, como a primeira barreira candidata encontrando a área interna A_a . O esquema termina quando todas as barreiras candidatas forem verificadas. Lembramos que para

as barreiras candidatas são considerados todos os elementos (arestas e vértices de ∂P) que estão à direita da base e à esquerda do piloto.

4.1.1 Algoritmo de Karkazis e Karagiorgis

Lembramos que os conjuntos dos vértices e arestas do polígono são dados por $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{A} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$, considerando τ_j ligando v_j a v_{j+1} .

As arestas e os vértices podem agir como bases e pilotos, na formação da trajetória do centro do CR e por este motivo não os trataremos de forma diferente no algoritmo. Introduzimos a noção de **elemento** do polígono (sendo a aresta ou o vértice, conforme a posição dos PBT e PPT, ao longo do perímetro do polígono) segundo a atual indicação da base e piloto. Definiremos o conjunto ordenado

$$\mathcal{E} = \{e_1 (= v_1), e_2 (= \tau_1), \dots, e_{2n-1} (= v_n), e_{2n} (= \tau_n)\}$$

e a subsequente ordenação $e_k < e_j$ diz que o elemento e_j está mais à direita de e_k , ao longo do perímetro do polígono⁴.

O algoritmo tem a vantagem da trajetória dos centros dos CR ter uma estrutura de árvore (teorema 4.1.12). Assim, procedemos (atualmente pulando) de um ponto crítico desta trajetória ao próximo, e verificando em cada momento se o novo ponto crítico é um nó, isto é, se é uma junção onde dois ou mais ramos (e subsequente subárvore) são emanados desta. Note que isto acontece quando o número de pontos de tangência sobre o *CR frente* (que é tangente ao perímetro do polígono) é mais que dois, ou equivalentemente, quando o *CR frente* colide com uma ou mais barreiras, não adjacentes aos atuais base e piloto. Também, note que v_1 é considerado como um nó raiz da árvore e na trajetória do centro do CR. Usamos *nó – pai* e *nó – filho* para descrever a relação entre dois sucessivos nós.

Com relação ao conjunto $\mathcal{E}$ dos elementos tangenciais (tangentes ao CR frente), cada dois elementos sucessivos em $\mathcal{E}$ define uma região principal para alguma parte do polígono, onde uma sub-árvore da trajetória do centro do CR é separada.

A exploração de sub-árvores emanadas de uma particular junção (nó n_a) deve continuar até todas as respectivas regiões serem exploradas. Então, um próximo nó, o $n_a - \text{pai}$ deve ser considerado (novo $n_a = n_a - \text{pai}$). A exploração continua de uma antiga posição com as restantes regiões e subseqüentes sub-árvores que não tenham até

⁴Queremos dizer que e_k está antes de e_j considerando que o leitor está caminhando no sentido anti-horário sobre o perímetro do polígono tendo iniciado e findado sua caminhada em v_1 .

o momento sido exploradas (correspondendo para as barreiras que são ainda "ativas"). Além do mais, quando o ponto crítico T_a coincide com um vértice convexo (atinge um nó final da árvore), o algoritmo representa uma inflexão neste ponto, isto é, envia T_a de volta para a posição do nó precedente, e o caminho principal deste nó para o nó final é considerado como explorado, e a associada região é tomada como sendo inativa.

Finalmente, em relação ao processo de atualização do círculo máximo atual, lembremos que todo CMI tem três ou mais pontos de tangência (veja teorema 4.1.5). Esta condição pode ser satisfeita somente nos nós da trajetória do centro do CR (pois um ponto crítico, que não é um nó, corresponde a uma fase do procedimento de rolar, onde existem exatamente dois pontos de tangência). Isto sugere que o processo de atualização deve ser aplicado somente nos nós de trajetória da árvore.

A seguir apresentaremos os passos do algoritmo não-convexo:

Passo 1) "Iniciando o algoritmo"

$\mathcal{A} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$: o conjunto das arestas de um polígono

$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$: o conjunto dos vértices de um polígono

$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$: o conjunto de elementos do polígono

$base = \tau_1$ e $piloto = \tau_n$

$C_{\max} : (c_{\max} = v_1, r_{\max} = 0)$: o círculo máximo atual

$C_a = C_{\max}$: o círculo atual

$T_a = v_1$: o ponto crítico atual

$n_a = v_1$: o nó atual (nó raiz)

Passo 2) O cálculo do próximo ponto crítico

(a) $\mathcal{E}^* = \{e \in \mathcal{E} : base < e < piloto\}$

$Status_de_e = \text{"ativo"} \ \forall e \in \mathcal{E}^*$

(b) $t = Trajetoria(base, piloto)$: *Trajetoria* é a rotina calculando a trajetória modulada pela base e piloto atuais

(c) procura por um elemento $e \in \mathcal{E}^*$ com status "ativo"

Se não existe tal elemento então vá para o 2f

(d) $t_a = Trajetoria(base, e)$: a *Trajetoria* candidata correspondente para a barreira candidata e

$T_a^* = t_a \cap t$: o ponto crítico candidato correspondente para barreira candidata e

$C_l : (c_l = T_a^*, r_l = d(T_a^*, e))$, o círculo limitante

$A_a = \text{Area}(\text{base}, \text{piloto}, C_a \text{ frente}, C_l \text{ frente})$: Area é a rotina calculando a área ativa

(e) Procura por um elemento "ativo" $e \in \mathcal{E}^*$

Se não existe tal elemento então vá para o passo 2f

senão se $e \notin \mathcal{E}^$ então $\text{Status_de_e} = \text{"inativo"}$ e vá para o passo 2e*

senão vá para o passo 2d

(f) atualização de C_a e T_a

$$c_a = c_l, T_a = T_a^*$$

Passo 3) Verificando o nó final

Se T_a é final então $T_a = n_a$ e vá para o passo 5b : (n_a é o último nó do qual T_a é emanado)

Passo 4) Cálculo de Elemento tangentes do atual CR frente e para uma junção

(a) Calcula o conjunto $\mathcal{E}$ de elementos tangentes de C_a frente

(b) *Se $|\mathcal{E}| > 2$ então T_a é uma junção (e portanto um nó), atualize o círculo máximo corrente e vá para o passo 5 (Se $r_a > r_{\max}$ então $C_{\max} = C_a$) senão vá para o passo 2*

Passo 5) Procura da sub-árvore emanando do nó atual

(a) Coloque $n_a - \text{pai} = T_a$

$$n_a \rightarrow T_a$$

(b) ordene os elementos tangentes de $\mathcal{E}$ no sentido anti-horário, ao longo da circunferência de C_a , iniciando do elemento de *base* e terminando com o elemento *piloto*

$$\mathcal{E} = \{e_{n_a \text{ índice } 1} = \text{elemento de base}, e_{n_a \text{ índice } 2}, \dots, e_{n_a \text{ índice } (\max n_a)} = \text{elemento de piloto}\}$$

onde ($n_a \text{ índice } i$) é o índice do i -ésimo elemento tangencial (em relação ao nó n_a) no conjunto original $\mathcal{E}$

Coloque $i(n_a) = 0$: o índice do elemento de base, principal para a próxima região a ser explorada.

(c) $i(n_a) = i(n_a) = +1$

Se $i(n_a) = \max n_a$ então $n_a = n_a - \text{pai}$ e $T_a = n_a$: todas regiões emanados de n_a foram explorados e portanto retorne para o $n_a - \text{pai}$

e vá para o passo 5c

senão coloque $\text{base} = e_{n_a \text{ índice}(i(n_a))}$, $\text{piloto} = e_{n_a \text{ índice}(i(n_a))+1}$: explore o $i(n_a)$ da região do nó

Se $\text{piloto} = v_{n-1}$ ou τ_{n-1} então vá para o passo 6

senão vá para o passo 2

Passo 6) Fim do algoritmo

Devido às dificuldades na implementação deste, desenvolvemos um outro algoritmo para determinação de um CMI no caso onde os polígonos são convexos, que são nosso maior interesse (próxima seção). A inclusão dos polígonos não convexos poderá ser feita acrescentando-se as possíveis parábolas que são geradas pelos vértices não-convexos.

4.1.2 Algoritmo para determinação de um CMI

Iniciamos apresentando os resultados que validam o algoritmo apresentado a seguir. Destes, temos que o algoritmo da seção 4.1.1 é estendido para as duas geometrias não-euclidianas.

Lema 4.1.4 *Considere um polígono P em $\mathbb{E}$. Todo círculo máximo inscrito (CMI), é tangente ao polígono em pelo menos dois pontos.*

Demonstração: Provaremos que algum CMI é tangente ao ∂P em pelo menos um ponto.

Suponha por absurdo que exista um CMI, $C(c, r)$ que não tenha pontos de tangência em comum com ∂P . Logo, sabemos que $r^* = \min \{d_{\mathbb{E}}(c, x) : x \in \partial P\} > r$. Assim, considerando o círculo $C'(c, r')$, onde $r' = r + \frac{r^* - r}{2}$, temos que este círculo C' esta inscrito em P , pois

$$r < r' = r + \frac{r^* - r}{2} = \frac{r}{2} + \frac{r^*}{2} < \frac{r^*}{2} + \frac{r^*}{2} = r^* \Rightarrow r < r' \quad \text{e} \quad r' < r^*$$

é claramente maior que o CMI $C(c, r)$ o que contraria o fato de ser CMI.

Agora, assumiremos que o CMI $C(c, r)$ tem somente um ponto de tangência com ∂P , e este é denotado por p . Seja λ a geodésica tangente a este círculo no ponto

p . Temos que esta geodésica divide $\mathbb{E}$ em dois subplanos, denote por R_1 o subplano aberto contendo o centro c do círculo C . Definimos $P_1 = R_1 \cap \partial P$ e $P_2 = \partial P - P_1$. Encontraremos um novo círculo $C'(c', r')$ inscrito em ∂P e com $r' > r$. Basta considerar o centro c' sobre a semi-geodésica $\overrightarrow{p\tilde{c}}$, com $d_{\mathbb{E}}(c, c') = \frac{r^* - r}{2}$ onde $r^* = \min \{d_{\mathbb{E}}(c, x) ; x \in P_1\} > r$ (pois tem um único ponto de tangência). Ao escolher o raio $r' = r + \frac{r^* - r}{2} > r$, observamos que $r' = d_{\mathbb{E}}(c', p)$.

Então averiguamos que C' está inscrito em P :

$$d_{\mathbb{E}}(c', x) \geq r', \quad \forall x \in \partial P.$$

Para todo $x \in P_2$, temos que

$$d_{\mathbb{E}}(c', x) > d_{\mathbb{E}}(c', p) = r'$$

e $\forall x \in P_1$ temos

$$d_{\mathbb{E}}(c, x) \geq r^*$$

mas $r^* = r + \frac{r^* - r}{2} + \frac{r^* - r}{2} = r' + \frac{r^* - r}{2}$. Logo

$$d_{\mathbb{E}}(c, x) \geq r' + \frac{r^* - r}{2}. \quad (4.1)$$

Considerando o triângulo $cc'x$ e 4.1 temos:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{E}}(c, x) &\leq d_{\mathbb{E}}(c, c') + d_{\mathbb{E}}(c', x) \\ d_{\mathbb{E}}(c, c') + d_{\mathbb{E}}(c', x) &\geq r' + \frac{r^* - r}{2} \\ d_{\mathbb{E}}(c', x) &\geq r' + \frac{r^* - r}{2} - d_{\mathbb{E}}(c, c') = r' + \frac{r^* - r}{2} - \frac{r^* - r}{2} = r'. \end{aligned}$$

Portanto, temos um absurdo visto que $C(c, r)$ é um CMI e por isso concluimos que o todo CMI em um polígono P tem pelos menos dois pontos em comum com ∂P . ■

Teorema 4.1.5 *Dado um polígono P em $\mathbb{D}^2$, todo CMI tem pelo menos três pontos de tangência em comum com ∂P (o bordo do polígono P).*

Demonstração: Denote por $\mathcal{A} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}$ as arestas do polígono P ordenado no sentido anti-horário, e seja $C(c, r)$ seu círculo inscrito máximo, CMI. Sabemos do lema 4.1.4 que $C(c, r)$ tem pelo menos dois pontos de tangência com P .

Suponha por absurdo que $C(c, r)$ tenha exatamente dois pontos em comum com ∂P , o perímetro do polígono. Denote estes pontos por $\{p_1, p_2\}$ e sejam $\{\tau_{i_1}, \tau_{i_2}\}$ ($i_1 < i_2$)

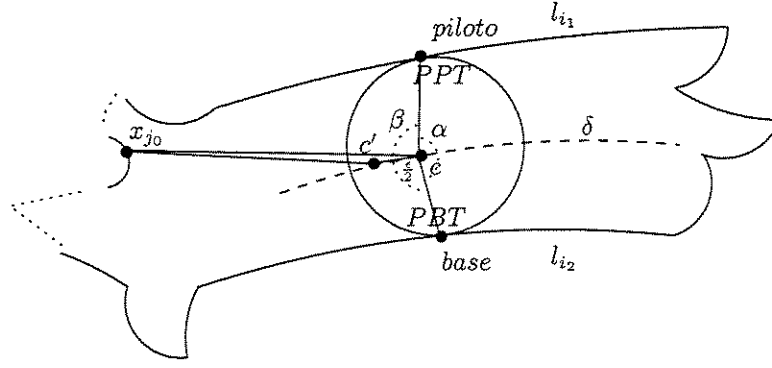


Figura 4.7: Ilustrando a demonstração do teorema

as arestas que os contém, com $\{\tau_{i_1}, \tau_{i_2}\} \subset \mathcal{A}$. Sejam α e β os dois ângulos no centro c determinados pelos dois raios geodésicos $\overline{cp_1}$ e $\overline{cp_2}$ (de comprimento r) (veja figura 4.7).

Considere por δ ($\delta = \{z \in \mathbb{D}^2 : d_{\mathbb{D}^2}(z, \tau_{i_1}) = d_{\mathbb{D}^2}(z, \tau_{i_2})\}$) o bissetor das duas geodésicas τ_{i_1} e τ_{i_2} . Assumimos aqui que δ é somente a parte do bissetor que esta contida no interior do polígono P .

Seja $c' \in \delta$, na direção do maior ângulo β e

$$\mathcal{A}_1 = \{\text{arestas do polígono compreendidos entre } \tau_{i_1} \text{ e } \tau_{i_2} \text{ na direção de } \beta\}.$$

Observe que

$$d_{\mathbb{D}^2}(c, x_{j_0}) = \min \{d_{\mathbb{D}^2}(c, x_j) : x_j \in \tau_j \text{ e } \tau_j \in \mathcal{A}_1\} = r + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

pois o círculo $C(c, r)$ tem somente dois pontos em comum com ∂P . Assumimos que c' dista $\frac{\varepsilon}{2}$ de c , ou seja, $d_{\mathbb{D}^2}(c, c') = \frac{\varepsilon}{2}$ e $\varepsilon > 0$. Agora tome o círculo $C'(c', r')$ onde $r' = \min \left\{ r + \frac{\varepsilon}{2}, r + \frac{d_{\mathbb{D}^2}(c', \tau_{i_1}) - r}{2} \right\}$. Note que $d_{\mathbb{D}^2}(c', \tau_{i_1}) > r$, pois no plano hiperbólico não temos geodésicas equidistantes, e temos que os dois pontos $\{p_1, p_2\}$ determinam a única geodésica ortogonal a τ_{i_1} e τ_{i_2} sendo assim a menor distância entre as duas.

Considerando os pontos c, c' e x_{j_0} , temos pela desigualdade triangular que

$$r + \frac{\varepsilon}{2} = r + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \leq d_{\mathbb{D}^2}(c, \tau_j) - d_{\mathbb{D}^2}(c, c') \leq d_{\mathbb{D}^2}(c', \tau_j) \quad j \notin \{i_1, i_2\} \quad (4.2)$$

$$r + \frac{d_{\mathbb{D}^2}(c', \tau_{i_1}) - r}{2} = \frac{r}{2} + \frac{d_{\mathbb{D}^2}(c', \tau_{i_1})}{2} < \frac{d_{\mathbb{D}^2}(c', \tau_{i_1})}{2} + \frac{d_{\mathbb{D}^2}(c', \tau_{i_1})}{2} = d_{\mathbb{D}^2}(c', \tau_{i_1}) \quad (4.3)$$

e como $r' \leq r + \frac{\varepsilon}{2}$ e $r' \leq r + \frac{d_{\mathbb{D}^2}(c', \tau_{i_1}) - r}{2}$ (pois $\frac{d_{\mathbb{D}^2}(c', \tau_{i_1}) - r}{2} > 0$) segue de 4.2 e 4.3 que o círculo $C'(c', r')$ está inscrito em P . Como $r < r'$ temos um absurdo pois C é CMI.

Logo temos que C não pode ter somente dois pontos de tangência seguindo assim que C tem pelo menos três pontos de tangência. ■

Analogamente podemos demonstrar que:

Teorema 4.1.6 *Dado um polígono P em $\mathbb{S}^2$, todo CMI tem pelo menos três pontos de tangência em comum com ∂P (o bordo do polígono P).*

Em [24] temos o seguinte teorema

Teorema 4.1.7 *Se um CMI de um polígono $P \subset \mathbb{R}^2$ tem dois pontos de tangência em comum com ∂P então para este polígono temos:*

- (i) *existem infinitos CMI's, tendo cada um deles exatamente dois pontos em comum com ∂P ;*
- (ii) *existem pelo menos dois CMI's, tendo cada um deles três pontos em comum com ∂P .*

Desta forma, podemos concluir o seguinte resultado.

Corolário 4.1.8 *Para um polígono $P \subset \mathbb{E}$, existe um CMI contendo pelo menos três pontos de tangência em comum com ∂P (o bordo do polígono P).*

Além disto, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.1.9 *Todo arco aberto de π contém pelo menos um ponto de tangência de um CMI.*

Demonstração: Sabemos pelo teorema 4.1.5, que existe CMI contendo pelo menos três pontos de tangência em comum com P .

Seja $\mathcal{A} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}$ ordenados no sentido anti-horário e $C(c, r)$ um CMI em P . Suponha que exista um arco aberto de π que não contém nenhum ponto de tangência. Agora, se considerarmos l , como sendo o diâmetro que determina tal arco aberto de π .

Sabemos que no complementar deste arco, temos pelo menos três pontos de tangência. Seja δ a semi-geodésica iniciada em $c \in l$ e ortogonal a l . Considere $c' \in \delta$, distando $\frac{\varepsilon}{2}$ de c onde $\varepsilon = \min \{d_{\mathbb{E}}(c, \tau_j) ; \tau_j \text{ está na parte do arco aberto } \pi\} - r > 0$.

Assim, tomando $r' = r + \frac{\varepsilon}{2}$. Temos que o círculo $C'(c', r')$ está inscrito em P e é maior que $C(c, r)$ o que um absurdo pois C é CMI. ■

Lema 4.1.10 *O círculo máximo $C(c, r)$, inscrito em um polígono P que é tangente ao seu perímetro em um ponto p , possui pelo menos mais um ponto de tangência.*

Demonstração: Assumindo que não exista outro ponto diferente de p em comum com o ∂P , e procedendo como na prova do lema 4.1.4, podemos calcular um círculo C' (c', r') maior que C e tangente ao ∂P em p . Analiticamente, temos $c' \in \overline{p'c}$ e $r' = r + \frac{r^* - r}{2}$, onde $r^* = \min\{d_{\mathbb{E}^2}(c, x); x \in P_1\} > r$, p' o antípoda de p sobre C , e P_1 a parte do polígono P que está no subplano R_1 definida pela tangente λ (para C em p) e centro c . Isto contradiz a afirmação inicial visto que $r' > r$. ■

Teorema 4.1.11 *O centro de um círculo $C(c, r)$ inscrito em um polígono P pertence à trajetória do centro do CR (círculo rolante) se, e somente se, o bordo do círculo tem pelo menos dois pontos em comum com o bordo do polígono P .*

Demonstração: Sabemos que um CR sobre a trajetória é tangente em um ponto p_t (PBT) sobre ∂P . Logo, pelo lema 4.1.10 segue que o bordo do círculo tem pelo menos dois pontos em comum com o bordo do polígono P . Resta-nos provar então a recíproca deste resultado, isto é, queremos provar que se o círculo inscrito possui dois ou mais pontos de tangência (em comum com ∂P) então seu centro c está sobre a trajetória dos centros CR, sendo C portanto um círculo CR.

Seja p_1 um dos dois pontos tangentes (e p_2 o outro) e seja λ a geodésica tangente a C . Então o ponto p_2 está no interior de algum círculo centrado em $\overrightarrow{p_1c}$, maior que C , tangente a λ em p_1 . Mas $p_2 \in \partial P$ e, conseqüentemente, não pode ser ponto interior de um círculo inscrito. Logo C é um círculo máximo, dentre todos inscritos no polígono e tangentes a λ em p_1 . Portanto, seu centro pertence a trajetória do centro CR. ■

As proposições anteriores, junto com algumas simulações numéricas, corroboram a validade do resultado abaixo, embora ainda não plenamente demonstrado.

Teorema 4.1.12 *A trajetória do centro CR, em um polígono, consiste de segmentos ligados que determinam uma árvore.*

Lembramos do corolário 4.1.8:

Dado um polígono P em $\mathbb{E}$, existe um CMI que tem pelo menos três pontos de tangência em comum com o ∂P .

Mais ainda,

Todo arco aberto de π contém pelo menos um ponto de tangência de um CMI.

Neste momento, torna-se importante apresentarmos as seguintes definições:

Definição 4.1.13 *Dados dois conjuntos A_1 e A_2 contidos em $\mathbb{E}$, definimos o(s) **bis-setor(es)** de dois conjuntos por*

$$\beta_{12} = \{z \in \mathbb{E} \mid d(z, A_1) = d(z, A_2)\}$$

onde $d(z, A) = \inf_{w \in A} d(z, w)$.

É elementar demonstrar o seguinte resultado:

Lema 4.1.14 *Se γ_1 e γ_2 forem duas geodésicas em $\mathbb{E}$, então*

$$\beta_{12} = \{z \in \mathbb{E} \mid d(z, \gamma_1) = d(z, \gamma_2)\}$$

é o par de geodésicas que bissectam os ângulos formados por estas, caso sejam concorrentes, e uma única geodésica caso sejam disjuntas.

Consideremos agora um polígono P com vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e arestas $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, com τ_i unindo os vértices v_i e v_{i+1} (módulo n) e denotemos por $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ o conjunto das geodésicas suportes, isto é, cada γ_i é a geodésica que contém a aresta τ_i . O algoritmo desenvolvido está baseado no seguinte teorema:

Teorema 4.1.15 *Sejam P um polígono convexo, $C(c, r)$ o círculo máximo inscrito em P . Então, c está na interseção de bissetrizes de geodésicas suporte de P .*

Demonstração: Segundo o corolário 4.1.8, temos que existe CMI, $C(c, r)$, tendo pelo menos três pontos de tangência em comum com o ∂P . Supomos que $C(c, r)$ tangencia as arestas τ_l, τ_k e τ_m para m, k, l distintos nos pontos p_l, p_k e p_m . Assim, temos que $d(c, p_l) = d(c, p_k)$ donde segue que c está sobre a bissetriz das geodésicas suportes $\{\gamma_l, \gamma_k\}$ de $\{\tau_l, \tau_k\}$. Por outro lado, $d(c, p_k) = d(c, p_m)$ donde segue que c está sobre uma bissetriz das geodésicas suportes $\{\gamma_k, \gamma_m\}$ de $\{\tau_k, \tau_m\}$. Concluimos assim que o centro c está na interseção de pelo menos duas bissetrizes de geodésicas suportes.

■

Diante deste teorema, analisamos somente os pontos de interseção das bissetrizes de geodésicas suportes com o objetivo de encontrar o maior círculo inscrito em um polígono convexo.

Para determinarmos o centro dos CMI, consideramos o polígono P com vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e procedemos do seguinte modo:

Passo 1) Determinamos todos os pontos de intersecção p_{ijkl} correspondentes as intersecções das bissetrizes β_{ij} e β_{kl} , onde as bissetrizes $\{\beta_{ij}, \beta_{kl}\}$ das geodésicas suportes $\{\{\gamma_i, \gamma_j\}, \{\gamma_k, \gamma_l\}\}$ são correspondentes as arestas $\{\{\tau_i, \tau_j\}, \{\tau_k, \tau_l\}\}$ e $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Combinando as n arestas duas a duas, obtemos $n(n-1)/2$ bissetrizes que, consideradas duas a duas, podem gerar até $\frac{1}{4}n - \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{1}{8}n^4$ pontos de intersecção. No entanto, diversos destes pontos podem ser descartados.

Passo 2) A cada ponto p_{ijkl} encontramos os pontos $\{M_i, M_j, M_k, M_l\}$ sobre as geodésicas suportes $\{\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k, \gamma_l\}$ que satisfazem $d(p_{ijkl}, \gamma_t) = \inf_{z \in \gamma_t} d(p_{ijkl}, z) = d(p_{ijkl}, M_t)$ para $t \in \{i, j, k, l\}$. Considerando $\{v_{t-1}, v_t\}$ os vértices correspondentes às arestas τ_t para $t \in \{i, j, k, l\}$, testamos;

- (a) $d(v_{i-1}, v_i) = d(v_{i-1}, M_i) + d(M_i, v_i)$;
- (b) $d(v_{j-1}, v_j) = d(v_{j-1}, M_j) + d(M_j, v_j)$;
- (c) $d(v_{k-1}, v_k) = d(v_{k-1}, M_k) + d(M_k, v_k)$;
- (d) $d(v_{l-1}, v_l) = d(v_{l-1}, M_l) + d(M_l, v_l)$;

Estes testes utilizam a desigualdade triangular para determinar se os pontos que realizam a distância de p_{ijkl} às geodésicas suportes pertencem ou não às arestas em questão.

Passo 3) Escolhemos os pontos p_{ijkl} que satisfazem os quatro testes anteriores, e fazemos um novo teste:

$$d(p_{ijkl}, M_j) = d(p_{ijkl}, M_k)$$

O fato de p_{ijkl} pertencer a intersecção de duas geodésicas garante que equidista a cada um dos pares, mas não que equidista de três deles. Considerando uma geodésica de cada par, este teste nos garante este fato. Então, passamos ao seguinte:

Passo 4) Seja $r := d(p_{ijkl}, M_j) = d(p_{ijkl}, M_k)$. Verificamos se

$$r \leq d(p_{ijkl}, \tau_t), \text{ onde } t \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Considerando que o polígono é convexo, este teste nos garante que o círculo de centro p_{ijkl} e raio r é de fato um círculo inscrito. Obtivemos com isto todos os círculos inscritos e procedemos agora a sua comparação:

Passo 5) Dentre todos os pontos encontrados no passo quatro, terminamos com a escolha do ponto p_{ijkl} com maior raio r .

Este breve algoritmo nos permite explicitar um círculo máximo inscrito num polígono P . Implementamos este para os casos onde $\mathbb{E}$ é o plano euclidiano ou hiperbólico.

4.1.3 Análise de complexidade

Baseamos no roteiro do algoritmo expressado na seção anterior para fazer a análise de complexidade.

No primeiro passo, determinamos os bissetores de cada par de arestas do polígono, num total de

$$\binom{n}{2} = n(n-1)$$

operações. A seguir, determinamos a intersecção de cada par de bissetores, num total de

$$\begin{aligned} \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{2} &= [n(n-1)][n(n-1)-1] \\ &= \frac{1}{8}n^4 - \frac{1}{4}n^3 - \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{4}n. \end{aligned}$$

Cada um destes pontos será submetido a seis testes, que são: quatro testes no passo dois, um no passo três e um no passo quatro. Estes testes estão excluindo os pontos que não pertencem ao interior do polígono. Digamos que seja $k(n)$ o número de pontos excluídos. Então, temos que $k(n) < (\frac{1}{4}n - \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{1}{8}n^4) < (\frac{1}{4}n + \frac{1}{8}n^4)$.

No passo cinco temos que escolher o CMI dentre um total de $(\frac{1}{4}n - \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{1}{8}n^4) - k(n)$ pontos.

Notamos que a eliminação dos $k(n)$ pontos envolve à aplicação de seis testes sobre os $(\frac{1}{4}n - \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{1}{8}n^4)$ pontos, fornecendo assim um total de $6(\frac{1}{4}n - \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{1}{8}n^4)$ operações.

Portanto a ordem do algoritmo é $O(n^4)$.

Note ainda que, se considerarmos um polígono regular de n arestas com vértices $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ e tomarmos uma vizinhança de $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{E}^n$, nesta vizinhança, os vértices considerados no passo 2 correspondem aos bissetores $\beta_{12} \cap \beta_{23}, \beta_{23} \cap \beta_{34}, \dots, \beta_{n-1,n} \cap \beta_{n,1}$. Assim sendo, em uma vizinhança suficientemente pequena de $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, podemos determinar o CMI com complexidade $O(n)$.

Similarmente, sejam $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{E}^n$ os vértices de um polígono P convexo qualquer. Como todas as condições de teste são abertas, se considerarmos um polígono P'

com vértices $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ suficientemente próximo de P (considerando-se a métrica produto usual em $\mathbb{E}^n$, temos que as interseções de bissetores de P' que passam pelos testes dos passos dois, três e quatro serão exatamente as interseções dos bissetores correspondentes de P . Assim, em uma vizinhança de P podemos determinar o CMI com complexidade $O(n)$.

Observação 4.1.16 *Em [1], é apresentado um algoritmo com complexidade $O(n)$ para o caso euclidiano. Este algoritmo é realizado considerando-se uma linha poligonal em $\mathbb{R}^3$ que se projeta sobre o polígono dado e trabalhando-se com o fecho convexo desta linha. Como o conceito de projeção é dúbio (no caso de esferas) e o conceito de fecho convexo é bem mais complexo nos casos de esferas e espaços projetivos (envolve o conceito de subvariedades totalmente geodésicas), este algoritmo não é passível de ser adaptado (ao menos não de modo simples) para os casos em questão.*

4.2 Determinação do Círculo Mínimo Circunscrito

Apresentamos anteriormente, um algoritmo discreto para determinação do *círculo máximo inscrito (CMI)* num polígono. Este resultado nos levou a questionar qual seria o menor círculo que contém este polígono, isto é, o *círculo mínimo circunscrito (CMC)*⁵, uma vez que sabemos como determinar o maior círculo contido. A determinação deste nos permite avaliar a densidade de cobertura que se insere no contexto de *cobertura por esferas* que é um problema que caminha próximo ao de empacotamento por esferas, daí a pertinência de estudá-lo.

4.2.1 Determinação do CMC

Iniciamos definindo um CMC.

Definição 4.2.1 *Um círculo mínimo circunscrito (CMC) de um conjunto $P \subset \mathbb{E}$ é um círculo de raio mínimo dentre aqueles círculos que contém P .*

Considere um polígono P em $\mathbb{E}$ de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Lema 4.2.2 *Seja $C(c, r)$ um CMC de P . Então $C(c, r)$ contém pelo menos um vértice do polígono P .*

Demonstração: Suponha que $C(c, r)$ não contém nenhum vértice de P . Então,

$$d(c, v_i) < r, \quad \forall i \quad (4.4)$$

onde v_i é vértice de P . Considere $r' = \max_{\forall i} d(c, v_i)$. Sabemos que $r' < r$ por 4.4.

Considerando $C'(c, r')$ temos $r' < r$ e portanto $C' \subset C$. Se provarmos que $d(c, v_i) \leq r', \forall i$ teremos que C' contém P e tem raio menor que $C(c, r)$ o que é um absurdo pois $C(c, r)$ é CMC, i.e., o menor que circunscreve. De fato $r' = \max d(c, v_i) \geq d(c, v_i) \forall i$.

■

Lema 4.2.3 *Seja $C(c, r)$ um CMC de P . Então $C(c, r)$ contém em seu bordo pelo menos dois vértices de P .*

⁵Dado um polígono P , entendemos por círculo circunscrito de P aos círculos que circunscrevem P , ou seja, aos círculos que contém P .

Demonstração: Suponha que $C(c, r)$ toca somente em um vértice de P e que seja v_1 este vértice, temos que $r = d(c, v_1)$. Como $C(c, r)$ é círculo circunscrito, temos que $d(c, v_i) < r = d(c, v_1)$, $\forall i \neq 1$. Seja $m = \max_{i \neq 1} d(c, v_i)$, então $m < r$. Considere a semi-geodésica ligando c a v_1 , iniciando em c e denote-a por γ . Escolhemos c' sobre γ distando $\varepsilon > 0$ de c , onde $\varepsilon = \frac{r-m}{2}$.

Seja $r' = \max \left\{ d(c', v_1), \max_{i \neq 1} d(c', v_i) \right\}$. Note que $d(c', v_1) = r - \varepsilon < r$ e

$$\begin{aligned} \max_{i \neq 1} d(c', v_i) &\leq \max_{i \neq 1} (d(c', c) + d(c, v_i)) = \max_{i \neq 1} (\varepsilon + d(c, v_i)) \\ &= \varepsilon + \max_{i \neq 1} d(c, v_i) = \frac{r-m}{2} + \max_{i \neq 1} d(c, v_i) \\ &= \frac{r-m}{2} + m = \frac{r}{2} + \frac{m}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \end{aligned}$$

Logo, $r' < r$.

Ainda, $d(c', v_i) \leq \max_{i \neq 1} d(c', v_i) \leq r'$, $\forall i$.

Portanto, se considerarmos o círculo $C'(c', r')$, observamos que este contém P e tem menor raio que $C(c, r)$, o que é um absurdo pelo fato que C é o CMC. ■

Deste último lema, compreendemos que o CMC contém pelo menos dois vértices do polígono. Vejamos a definição de mediatriz e em seguida mais um resultado, antes de apresentarmos o algoritmo que determina o CMC.

Definição 4.2.4 Dados dois conjuntos A_1 e A_2 contidos em $\mathbb{E}$, definimos o(s) **bissetor(es)** de dois conjuntos por

$$\beta_{12} = \{z \in \mathbb{E} \mid d(z, A_1) = d(z, A_2)\}$$

onde $d(z, A) = \inf_{w \in A} d(z, w)$. Caso A_1 e A_2 contenham somente um ponto, denotaremos por μ_{12} e chamaremos esta por **mediatriz** de A_1 e A_2 .

Teorema 4.2.5 Seja $C(c, r)$ um CMC de P . Suponha que $C(c, r)$ contém três ou mais vértices de P . Então, o centro c de $C(c, r)$ está sobre a interseção de duas mediatrizes.

Demonstração: Suponha que $C(c, r)$ contém os vértices v_k, v_l e v_t de P . Logo $d(c, v_k) = d(c, v_l) = d(c, v_t) = r$, donde segue que $c \in \mu_{kl}$ e $c \in \mu_{lt} \Rightarrow c \in \mu_{kl} \cap \mu_{lt}$ sendo μ_{kl} a mediatriz da geodésica que liga v_k a v_l . ■

Diante deste teorema, e dos lemas anteriores, notamos que para encontrar o CMC em um polígono (convexo ou não) devemos analisar os pontos de interseção das mediatrizes (CMC contém pelo menos três pontos) e os pontos médios dos segmentos geodésicos que unem dois vértices (CMC contém somente dois pontos).

Nosso próximo passo é apresentar o algoritmo discreto que determina o CMC.

4.2.2 Algoritmo para determinação do CMC

Para estabelecer o roteiro do nosso algoritmo, considere o polígono P de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Os procedimentos que nos permitem escolher um CMC, são:

Passo 1) Considere os pares distintos de vértices $\{v_i, v_j\}$ e $\{v_k, v_l\}$ e denote suas mediatrizes por μ_{ij} e μ_{kl} , $\forall i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Determinamos todos os pontos de interseção p_{ijkl} correspondentes as interseções das mediatrizes μ_{ij} e μ_{kl} e todos os pontos médios p_{ij} dos segmentos geodésicos que ligam os vértices v_i a v_j , $\forall i, j$. O Teorema 4.2.5 garante que o centro do CMC deve ser algum destes pontos.

Passo 2) A cada ponto p_{ijkl} verificamos se;

- a) $d(p_{ijkl}, v_i) \geq d(p_{ijkl}, v_s), \quad \forall s \neq i, j, k, l.$
- b) $d(p_{ijkl}, v_i) = d(p_{ijkl}, v_k);$

Se a condição a é satisfeita, temos que o círculo de centro p_{ijkl} e raio $d(p_{ijkl}, v_i)$ contém o polígono P . A condição b garante que este círculo contém ao menos três vértices do polígono, podendo então ser mantido como candidato a CMC. Assim, retemos os pontos p_{ijkl} que satisfazem as condições "a" e "b" e descartamos os outros.

O próximo passo é avaliar os pontos médios.

A cada ponto médio p_{ij} verificamos se;

- c) $d(p_{ij}, v_i) \geq \max_{s \neq i, j} d(p_{ij}, v_s).$

Retemos os pontos que satisfazem esta condição, pois nestes casos os pontos p_{ij} são centros de círculos com raios $r_{ij} := d(p_{ij}, v_i)$ que contém o polígono e o intercepta em pontos diametralmente opostos.

Passo 3) Dentre todos os pontos encontrados no passo dois, escolhemos o ponto com raio $r = \min \{r_{ijkl}, r_{ij}\}.$

Observação 4.2.6 *As demonstrações dos resultados para o caso euclidiano podem ser feitos de maneira diferente [32], utilizando resultados mais fortes que podem ser encontrado em Osserman [31] e Firer [10]. Destes temos a unicidade do CMC para o caso euclidiano, que pode ser estendida aos casos não-euclidianos.*

A implementação dos algoritmos apresentados nas seções 4.1 e 4.2 dependem do conhecimento dos bissetores de duas geodésicas e da mediatriz de dois pontos. Apresentamos no apêndice, expressões analíticas para os bissetores e mediatrizes no plano hiperbólico, modelo $\mathbb{H}^2$, que é nosso maior interesse.

Apêndice A

Apêndice

Encerramos esta tese com a exibição deste apêndice em duas seções. Na primeira seção A.1 exibimos as bissetrizes e mediatrizes no plano hiperbólico, modelo $\mathbb{H}^2$. A segunda seção (seção A.2) contém os algoritmos implementados no Mathematica, a saber:

- Algoritmo do CMI - Hiperbólico: faz o cálculo do círculo máximo que contém o polígono, no plano hiperbólico (página 111);
- Algoritmo do CMI - Euclidiano: faz o cálculo do círculo máximo que contém o polígono, no plano euclidiano (página 120);
- Algoritmo do CMC - Hiperbólico: faz o cálculo do círculo mínimo que contém o polígono, no plano hiperbólico (página 125);
- Algoritmo do CMC - Euclidiano: faz o cálculo do círculo mínimo que contém o polígono, no plano euclidiano (página 132);
- Algoritmo de Keen : exibe o polígono a partir das matrizes fornecidas pelas funções de emparelhamento (página 136).

A.1 Bissetores e Mediatrizes no Plano Hiperbólico $\mathbb{H}^2$

Dadas as duas geodésicas disjuntas γ_i e γ_j no modelo do semi-plano $\mathbb{H}^2$, vejamos como encontrar sua bissetriz. Lembramos que

Definição A.1.1 A bissetriz de duas geodésicas γ_i e γ_j é dada pelo conjunto de pontos que estão à mesma distância de γ_i e γ_j , isto é,

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_i) = d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_j)\}$$

onde $d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma) = \inf_{z' \in \gamma} d_{\mathbb{H}^2}(z, z')$. Observamos que este conjunto de pontos é uma geodésica em $\mathbb{H}^2$ que denotamos por β_{ij} .

Diante da definição, percebemos que a busca das bissetrizes depende essencialmente de como encontrar a distância de um ponto z a uma geodésica γ . Assim, tratamos primeiramente, de apresentar uma expressão analítica para $d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma)$. Trabalhamos no semi-plano de $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$. Considere $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

Seja a geodésica dada pela semi-reta $\gamma = \{w \in \mathbb{H}^2 \mid w = 0 + iy\}$. Dado um ponto $z \notin \gamma$ vemos que $d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma) = \inf_{t>0} d_{\mathbb{H}^2}(z, it) = d_{\mathbb{H}^2}(z, i|z|)$. De fato,

$$\begin{aligned} \cosh d_{\mathbb{H}^2}(z, it) &= 1 + \frac{|z - it|^2}{2yt} = \frac{2yt + x^2 + (y - t)^2}{2yt} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + t^2}{2yt} = \frac{|z|^2 + t^2}{2yt} = \frac{|z|}{2y} \left(\frac{|z|}{t} + \frac{t}{|z|} \right) \\ &\geq \frac{|z|}{y} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde $z = x + iy$ e $t > 0$. Note que

$$\cosh d_{\mathbb{H}^2}(z, it) = \frac{|z|}{y} \iff t = |z|. \quad (\text{A.2})$$

Donde concluímos que $d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma) = d_{\mathbb{H}^2}(z, i|z|)$ (veja figura A.1).

Seja θ o ângulo entre a semi-reta γ e a semi-reta que liga o ponto 0 a z . Utilizando (A.2) temos que

$$\begin{aligned} \cosh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma) &= \frac{1}{\cos \theta} \\ \sinh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma) &= \tan \theta \\ \tanh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma) &= \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Se $\gamma = \{w \in \mathbb{H}^2 \mid w = c + iy\}$, temos por um desenvolvimento análogo que¹

$$\cosh d_{\mathbb{H}^2}(z, c + it) = \frac{|z - c|}{y} \iff t = |z - c|. \quad (\text{A.4})$$

¹O ponto sobre γ que realiza a menor distância de z a γ é dado por $w = c + i|z - c|$.

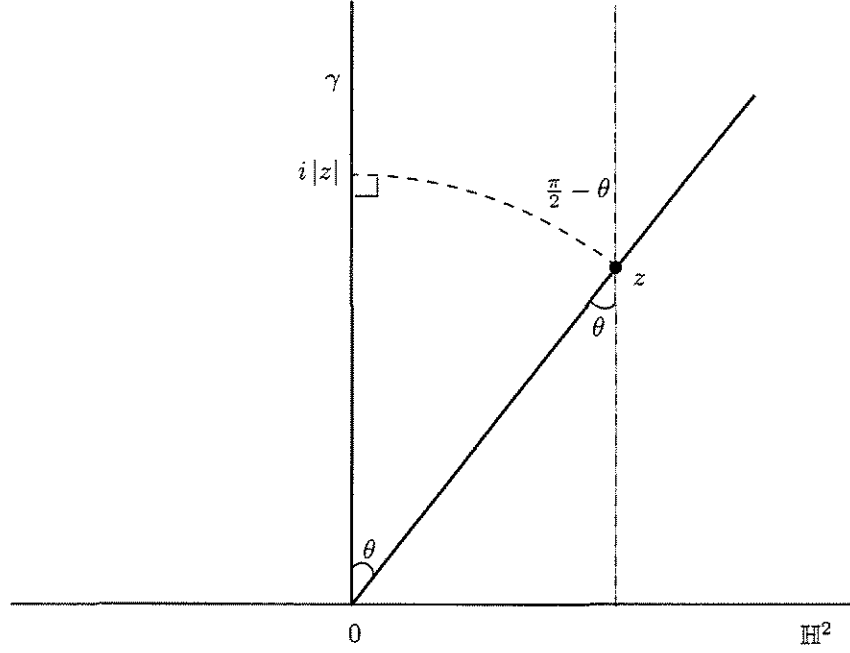


Figura A.1: Exemplo ilustrando a obtenção de (A.2)

Observamos também que (A.3) permanece inalterado onde o ângulo θ é o ângulo entre as semi-retas γ e a semi-reta ligando $(c, 0)$ a z .

Agora, consideramos que a geodésica γ seja dada pelo semi-círculo $\gamma = \{w \in \mathbb{H}^2 \mid |w|^2 = r^2\}$ e dado $z \notin \gamma$, supomos que $|z| < r$.

Tome o círculo euclidiano C_z que passa por z , $-r$ e r . Sendo θ o ângulo dado por C_z e γ no ponto $(r, 0)$ temos que o centro de C_z será dado por $-irtan \theta$ e o raio por $\frac{r}{\cos \theta}$, isto é,

$$C_z = \left\{ w \in \mathbb{R} \mid |w + irtan \theta|^2 = \left(\frac{r}{\cos \theta} \right)^2 \right\}.$$

Mas, C_z pode ser obtido também pela solução das equações

$$\begin{cases} |(a, b) - (x, y)| = |(a, b) - (r, 0)| \\ |(a, b) - (-r, 0)| = |(a, b) - (r, 0)| \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

onde (a, b) representa o centro de C_z , e $z = (x, y)$. A solução de (A.5) nos fornece $a = 0$ e $b = \frac{x^2 + y^2 - r^2}{2y} = \frac{|z|^2 - r^2}{2y}$. Assim, temos que

$$-irtan \theta = i \frac{|z|^2 - r^2}{2y} \implies \tan \theta = \frac{r^2 - |z|^2}{2yr}.$$

Para o caso onde $|z| > r$ obtém-se de maneira análoga que

$$\tan \theta = \frac{|z|^2 - r^2}{2yr}.$$

Utilizando (A.3), temos que

$$\sinh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma) = \left| \frac{|z|^2 - r^2}{2yr} \right|.$$

O caso onde $\gamma = \{w \in \mathbb{H}^2 \mid |w - (c, 0)|^2 = r^2\}$ é desenvolvido de forma análoga. Para $z \notin \gamma$ obtemos que²

$$\sinh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma) = \left| \frac{|z - (c, 0)|^2 - r^2}{2yr} \right|.$$

A fim de darmos sequência em nosso propósito primordial, dividiremos nossa busca pelas bissetrizes em três situações:

1. as geodésicas γ_i e γ_j são disjuntas (desenvolvido na seção A.1.1);
2. as geodésicas γ_i e γ_j são paralelas, isto é, somente um ponto de interseção (ocorrendo no bordo) entre os dois círculos contendo γ_i e γ_j (desenvolvido na seção A.1.2);
3. as geodésicas γ_i e γ_j são concorrentes (desenvolvido na seção A.1.3).

Para analisar estes casos, sabendo que as geodésicas são semi-retas e semi-círculos, olhamos as diversas combinações possíveis entre estas. Desta maneira, iniciamos analisando o caso onde as geodésicas são disjuntas.

A.1.1 Geodésicas disjuntas

Neste caso, temos duas possibilidades:

- i) γ_i e γ_j são semi-círculos;

²O ponto sobre γ que realiza a menor distância de z a γ é dado por

$$\omega = \frac{\left(|\bar{z} - c - r|^2 (c - r) + |\bar{z} - c + r|^2 (c + r) \right) + i2r |\bar{z} - c - r| |\bar{z} - c + r|}{|\bar{z} - c - r|^2 + |\bar{z} - c + r|^2}.$$

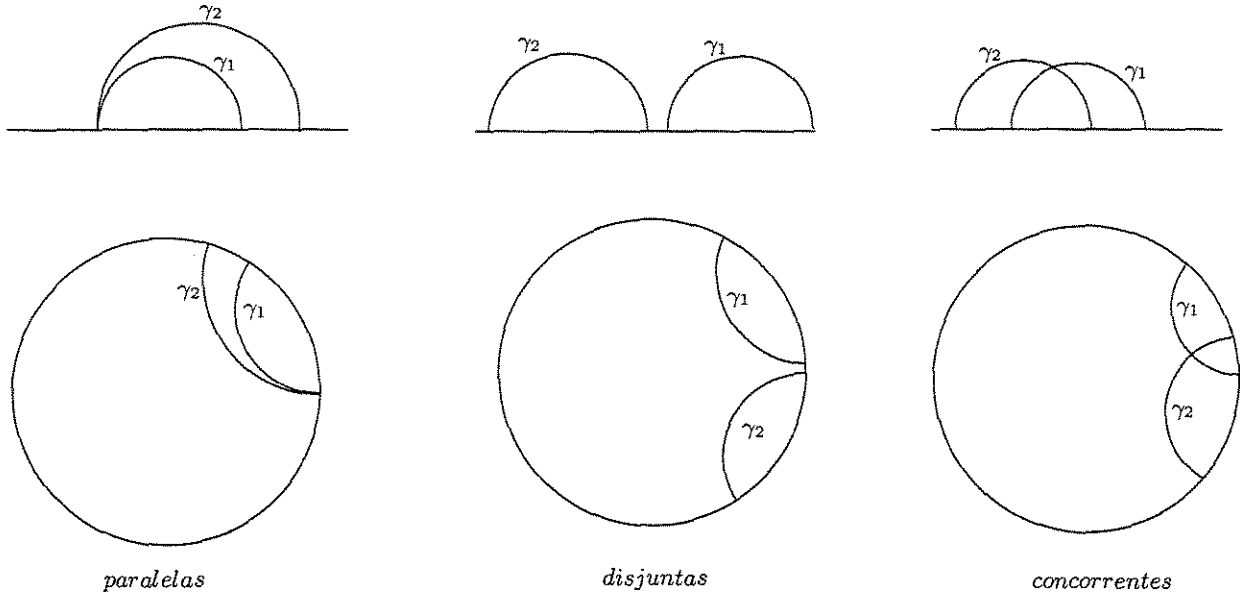


Figura A.2: Geodésicas disjuntas, paralelas e concorrentes

ii) γ_i é uma semi-reta e γ_j é um semi-círculo.

Suponhamos que γ_i e γ_j são dadas por

$$(x - c_i)^2 + y^2 = r_i^2 \quad e \quad (x - c_j)^2 + y^2 = r_j^2$$

onde $y > 0$.

Como as geodésicas são disjuntas, sabemos que $|c_i - c_j| \neq r_i + r_j$. Assim, devemos analisar quando $|c_i - c_j| < \max\{r_i, r_j\} < r_i + r_j$ e $|c_i - c_j| > r_i + r_j$.

- Se $|c_i - c_j| < \max\{r_i, r_j\} < r_i + r_j$ temos que $r_i \neq r_j$, pois as geodésicas são disjuntas. Supomos que $r_i < r_j$, assim

$$\begin{aligned}
 z \in \beta_{ij} &\iff d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_i) = d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_j) \iff \sinh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_i) = \sinh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_j) \\
 &\iff \frac{||z - (c_i, 0)|^2 - r_i^2|}{2yr_i} = \frac{||z - (c_j, 0)|^2 - r_j^2|}{2yr_j} \\
 &\iff r_j (|z - (c_i, 0)|^2 - r_i^2) = r_i (r_j^2 - |z - (c_j, 0)|^2) \\
 &\iff r_j ((x - c_i)^2 + y^2 - r_i^2) = r_i (r_j^2 - (x - c_j)^2 - y^2) \\
 &\iff \left(x - \left(\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i}\right)\right)^2 + y^2 = r_j r_i - \left(\frac{r_j c_i^2 + r_i c_j^2}{r_j + r_i}\right) + \left(\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i}\right)^2
 \end{aligned}$$

Desse modo, temos que a bissetriz β_{ij} é dada pelo semi-círculo de centro $\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i}$ e raio

$$\sqrt{r_j r_i - \left(\frac{r_j c_i^2 + r_i c_j^2}{r_j + r_i} \right) + \left(\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i} \right)^2}.$$

No caso particular onde $c_i = c_j$ ($|c_i - c_j| = 0$), β_{ij} é o semi-círculo centrado em c_i de raio $\sqrt{r_i r_j}$.

- Se $|c_i - c_j| > r_i + r_j$, temos que

$$\begin{aligned} z \in \beta_{ij} &\iff d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_i) = d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_j) \iff \sinh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_i) = \sinh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_j) \\ &\iff \frac{||z - (c_i, 0)|^2 - r_i^2|}{2yr_i} = \frac{||z - (c_j, 0)|^2 - r_j^2|}{2yr_j} \\ &\iff r_j (|z - (c_i, 0)|^2 - r_i^2) = r_i (|z - (c_j, 0)|^2 - r_j^2) \\ &\iff r_j ((x - c_i)^2 + y^2 - r_i^2) = r_i ((x - c_j)^2 + y^2 - r_j^2) \\ &\iff (r_j - r_i)x^2 - 2(r_j c_i - r_i c_j)x + (r_j - r_i)y^2 = r_j r_i^2 - r_i r_j^2 + r_i c_j^2 - r_j c_i^2 \\ &\iff \begin{cases} \text{se } r_i = r_j \implies x = \frac{c_i + c_j}{2} \\ \text{se } r_i \neq r_j \implies \left(x - \left(\frac{r_j c_i - r_i c_j}{r_j - r_i} \right) \right)^2 + y^2 = -r_i r_j + \left(\frac{r_i c_j^2 - r_j c_i^2}{r_j - r_i} \right) + \left(\frac{r_j c_i - r_i c_j}{r_j - r_i} \right)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Neste caso, a bissetriz β_{ij} é dada por uma semi-reta (se $r_i = r_j$) ou um semi-círculo (se $r_i \neq r_j$) conforme demonstrado.

Os casos onde γ_i e γ_j são dadas por

$$x = c_i \quad \text{e} \quad (x - c_j)^2 + y^2 = r_j^2$$

onde $y > 0$, a bissetriz β_{ij} é dada por

$$\begin{aligned} z \in \beta_{ij} &\iff d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_i) = d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_j) \iff \sinh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_i) = \sinh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_j) \\ &\iff \frac{|x - c_i|}{y} = \frac{||z - (c_j, 0)|^2 - r_j^2|}{2yr_j} = \frac{|z - (c_j, 0)|^2 - r_j^2}{2yr_j} = \frac{(x - c_j)^2 + y^2 - r_j^2}{2yr_j} \\ &\iff 2r_j |x - c_i| = (x - c_j)^2 + y^2 - r_j^2. \end{aligned}$$

Notamos que se $c_i < c_j$, então $|x - c_i| = x - c_i$. Enquanto $|x - c_i| = -(x - c_i)$ ocorre quando $c_i > c_j$. Desta maneira, temos

$$\begin{cases} c_i < c_j \implies (x - (c_j + r_j))^2 + y^2 = 2r_j ((c_j + r_j) - c_i) \\ c_i > c_j \implies (x - (c_j - r_j))^2 + y^2 = 2r_j (c_i - (c_j - r_j)) \end{cases}.$$

Em resumo, denotando um semi-círculo de centro c e raio r por $C(c; r)$ e uma semi-reta em $\mathbb{H}^2$ iniciada em c (no eixo real, $c \in \mathbb{R}$) por $R(c)$, temos o seguinte teorema:

Teorema A.1.2 Se as geodésicas γ_i e γ_j são disjuntas temos duas possibilidades:

1) γ_i e γ_j são semi-círculos disjuntos $C(c_i; r_i)$ e $C(c_j; r_j)$;

a) Se $|c_i - c_j| > r_i + r_j$ ((a) e (b) na figura A.3) então

$$\begin{cases} \beta_{ij} = R\left(\frac{c_i + c_j}{2}\right), & \text{se } r_i = r_j \\ \beta_{ij} = C\left(\left(\frac{r_j c_i - r_i c_j}{r_j - r_i}\right); \sqrt{-r_i r_j + \left(\frac{r_i c_j^2 - r_j c_i^2}{r_j - r_i}\right) + \left(\frac{r_j c_i - r_i c_j}{r_j - r_i}\right)^2}\right), & \text{se } r_i \neq r_j \end{cases};$$

b) Se $|c_i - c_j| < r_i + r_j$ ((c) e (d) na figura A.3) então

$$\beta_{ij} = C\left(\left(\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i}\right); \sqrt{r_j r_i - \left(\frac{r_j c_i^2 + r_i c_j^2}{r_j + r_i}\right) + \left(\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i}\right)^2}\right), \quad \text{se } r_i \neq r_j.$$

2) γ_i é a semi-reta $R(c_i)$ e γ_j é o semi-círculo $C(c_j, r_j)$ ((e) e (f) na figura A.3);

$$\begin{cases} c_i < c_j \implies \beta_{ij} = C\left((c_j + r_j); \sqrt{2r_j((c_j + r_j) - c_i)}\right) \\ c_i > c_j \implies \beta_{ij} = C\left((c_j - r_j); \sqrt{2r_j(c_i - (c_j - r_j))}\right) \end{cases}.$$

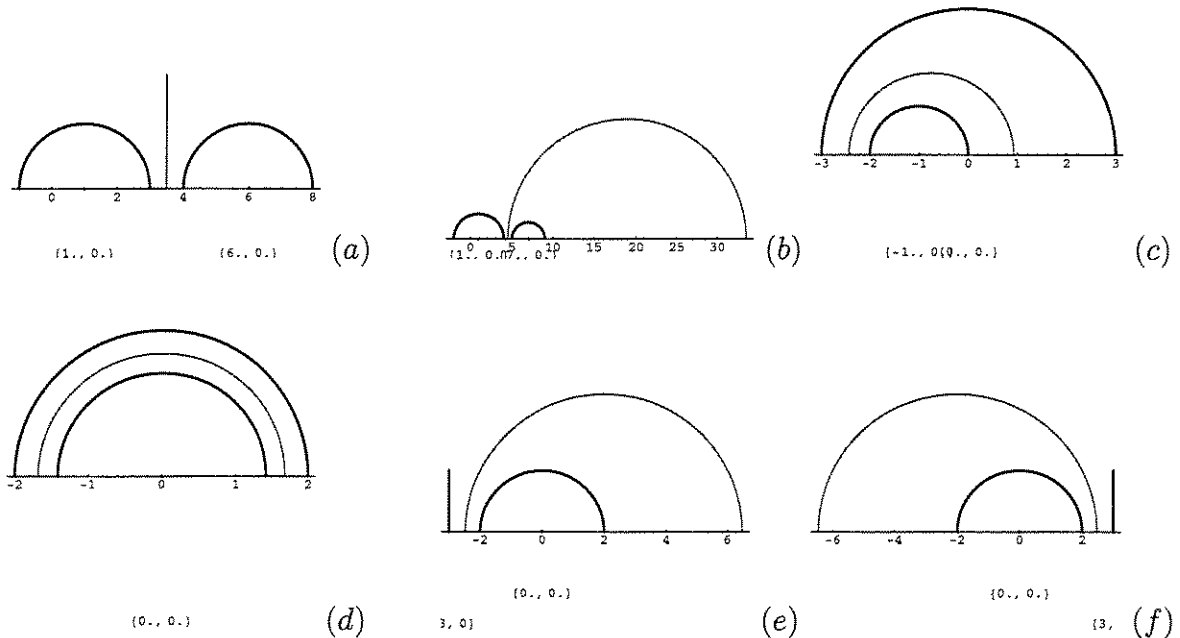


Figura A.3: Bissetrizes de geodésicas disjuntas

A.1.2 Geodésicas paralelas

Dadas as geodésicas paralelas, γ_i e γ_j , temos as seguintes situações:

- i) γ_i e γ_j são semi-retas;
- ii) γ_i é uma semi-reta e γ_j é um semi-círculo;
- iii) γ_i e γ_j são semi-círculos.

Conforme dito anteriormente, entendemos como paralelas às geodésicas cujos círculos euclidianos (que as contém) tem somente um ponto de interseção e este está sobre o bordo de $\mathbb{H}^2$. Notamos ainda que os casos (ii) e (iii) são resolvidos da mesma maneira como no caso onde as geodésicas são disjuntas, obtendo as mesmas bissetrizes. Assim, temos que analisar somente o caso (i).

Considerando que as geodésicas γ_i e γ_j dadas por

$$z = c_i + iy \quad e \quad z' = c_j + iy \quad \text{onde } y > 0.$$

A bissetriz β_{ij} será dada por

$$\begin{aligned} z \in \beta_{ij} &\iff d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_i) = d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_j) \iff \cosh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_i) = \cosh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_j) \\ &\iff \frac{|z - (c_i, 0)|}{y} = \frac{|z - (c_j, 0)|}{y} \iff (x - c_i)^2 = (x - c_j)^2 \\ &\iff x = \frac{c_j^2 - c_i^2}{2(c_j - c_i)} = \frac{c_j + c_i}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso a bissetriz β_{ij} será dada pela semi-reta $x = \frac{c_j + c_i}{2}$.

Em resumo, apresentamos o próximo teorema:

Teorema A.1.3 *Se as geodésicas γ_i e γ_j são paralelas temos três possibilidades:*

- 1) γ_i e γ_j são as semi-retas $R(c_i)$ e $R(c_j)$ ((a) na figura A.4);

$$\beta_{ij} = R\left(\frac{c_i + c_j}{2}\right).$$

- 2) γ_i é a semi-reta $R(c_i)$ e γ_j é o semi-círculo $C(c_j, r_j)$ ((b) e (c) na figura A.4);

$$\left\{ \begin{array}{l} c_i < c_j \implies \beta_{ij} = C\left((c_j + r_j); \sqrt{2r_j((c_j + r_j) - c_i)}\right) \\ c_i > c_j \implies \beta_{ij} = C\left((c_j - r_j); \sqrt{2r_j(c_i - (c_j - r_j))}\right) \end{array} \right\}.$$

- 3) γ_i e γ_j são os semi-círculos $C(c_i; r_i)$ e $C(c_j; r_j)$;

a) Se $|c_i - c_j| = r_i + r_j$ ((d) e (e) na figura A.4) então

$$\begin{cases} r_i = r_j \Rightarrow \beta_{ij} = R\left(\frac{c_i + c_j}{2}\right) \\ r_i \neq r_j \Rightarrow \beta_{ij} = C\left(\left(\frac{r_j c_i - r_i c_j}{r_j - r_i}\right); \sqrt{-r_i r_j + \left(\frac{r_i c_j^2 - r_j c_i^2}{r_j - r_i}\right) + \left(\frac{r_j c_i - r_i c_j}{r_j - r_i}\right)^2}\right) \end{cases}.$$

b) Se $|c_i - c_j| \neq r_i + r_j$ ((f) e (g) na figura A.4) então

$$\begin{cases} r_i \neq r_j \Rightarrow \beta_{ij} = C\left(\left(\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i}\right); \sqrt{r_j r_i - \left(\frac{r_j c_i^2 + r_i c_j^2}{r_j + r_i}\right) + \left(\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i}\right)^2}\right) \end{cases}.$$

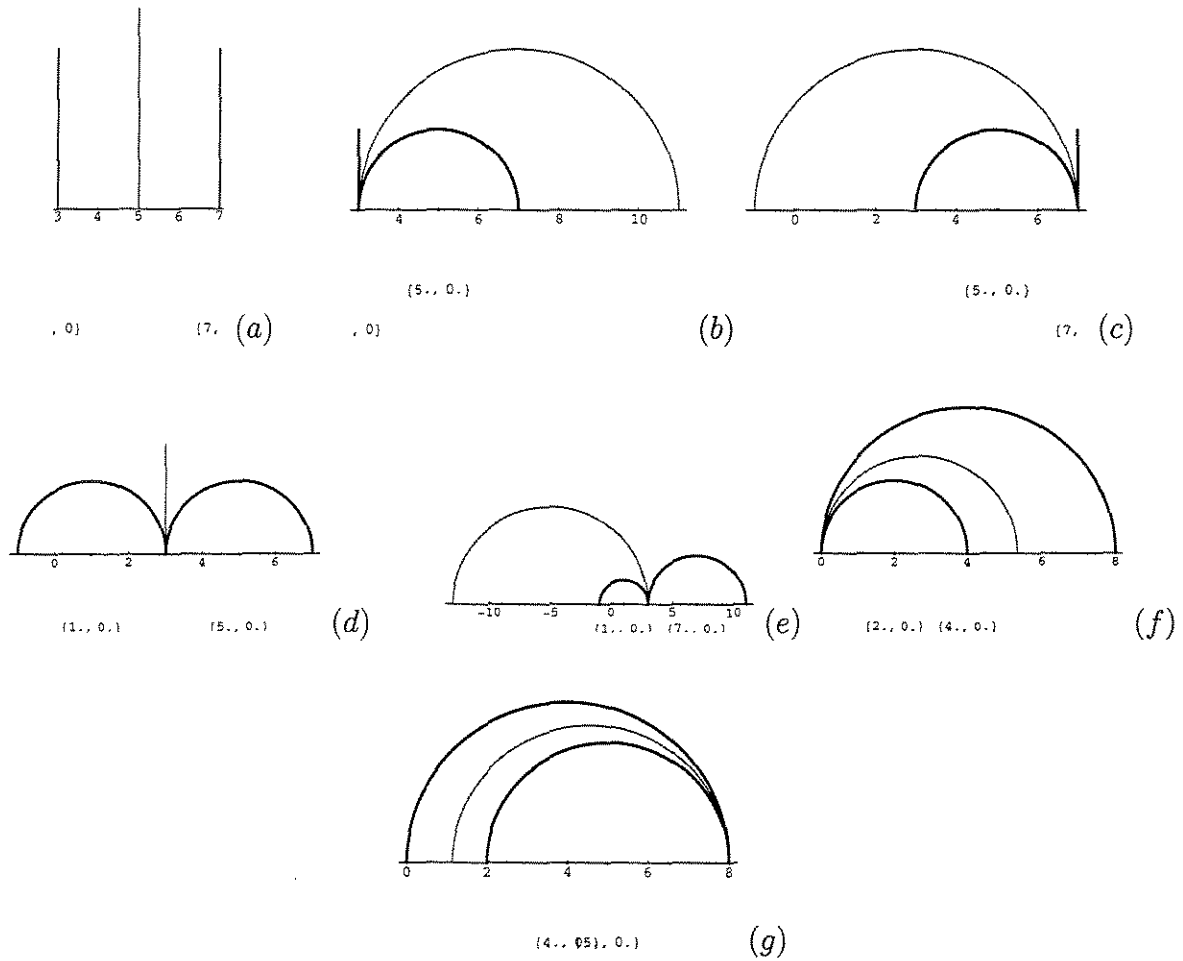


Figura A.4: Bissetrizes de geodésicas paralelas

A.1.3 Geodésicas concorrentes

O caso onde γ_i e γ_j são concorrentes, temos as seguintes situações:

- i) γ_i é uma semi-reta e γ_j é um semi-círculo;
- ii) γ_i e γ_j são semi-círculos.

Neste caso, temos duas bissetrizes, β_{ij} e β'_{ij} , para cada uma das duas situações.

Suponha inicialmente que γ_i e γ_j são dadas por

$$x = c_i \quad e \quad (x - c_j)^2 + y^2 = r_j^2$$

onde $y > 0$.

Assumimos que o ponto z sobre as bissetrizes não está no interior do semi-círculo γ_j . Desta forma, as duas bissetrizes β_{ij} e β'_{ij} serão dadas simplesmente pela escolha da parte real de z à esquerda ($\operatorname{Re} z = x < c_i$) ou à direita ($\operatorname{Re} z = x > c_i$) da semi-reta γ_i .

Assim, um ponto z sobre qualquer uma das bissetrizes satisfaz

$$\begin{aligned} z \in \beta_{ij} &\iff d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_i) = d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_j) \iff \sinh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_i) = \sinh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_j) \\ &\iff \frac{|x - c_i|}{y} = \frac{||z - (c_j, 0)|^2 - r_j^2|}{2yr_j} = \frac{|z - (c_j, 0)|^2 - r_j^2}{2yr_j} = \frac{(x - c_j)^2 + y^2 - r_j^2}{2yr_j} \\ &\iff 2r_j |x - c_i| = (x - c_j)^2 + y^2 - r_j^2. \end{aligned}$$

Portanto, se $z \in \beta_{ij}$ temos que $x < c_i$ e então segue que $|x - c_i| = c_i - x$. Logo,

$$\begin{aligned} z \in \beta_{ij} &\iff 2r_j (c_i - x) = (x - c_j)^2 + y^2 - r_j^2 \\ &\iff (x - (c_j - r_j))^2 + y^2 = 2r_j (c_i - (c_j - r_j)). \end{aligned}$$

Se $z \in \beta'_{ij}$ temos, de forma análoga, que

$$(x - (c_j + r_j))^2 + y^2 = 2r_j ((c_j + r_j) - c_i).$$

Agora, tomaremos γ_i e γ_j dadas por

$$(x - c_i)^2 + y^2 = r_i^2 \quad e \quad (x - c_j)^2 + y^2 = r_j^2$$

onde $y > 0$.

Um ponto z está sobre as bissetrizes se

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_i) = d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_j) &\iff \sinh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_i) = \sinh d_{\mathbb{H}^2}(z, \gamma_j) \\ &\iff \frac{||z - (c_i, 0)|^2 - r_i^2|}{2yr_i} = \frac{||z - (c_j, 0)|^2 - r_j^2|}{2yr_j} \end{aligned}$$

Da igualdade acima, observamos que considerar os pontos z no interior dos dois semi-círculos é o mesmo que considerá-los no exterior de ambos. Disto segue que a bissetriz β_{ij} será obtida tomando z no exterior de γ_i e γ_j enquanto que β'_{ij} será obtida tomando z no exterior de γ_i e no interior de γ_j .

Assim, para β_{ij}

$$\begin{aligned} z \in \beta_{ij} &\iff r_j (|z - (c_i, 0)|^2 - r_i^2) = r_i (|z - (c_j, 0)|^2 - r_j^2) \\ &\iff (r_j - r_i) x^2 - 2(r_j c_i - r_i c_j) x + (r_j - r_i) y^2 = r_j r_i^2 - r_i r_j^2 + r_i c_j^2 - r_j c_i^2 \\ &\iff \begin{cases} \text{se } r_i = r_j \implies x = \frac{c_i + c_j}{2} \\ \text{se } r_i \neq r_j \implies \left(x - \left(\frac{r_j c_i - r_i c_j}{r_j - r_i}\right)\right)^2 + y^2 = -r_i r_j + \left(\frac{r_i c_j^2 - r_j c_i^2}{r_j - r_i}\right) + \left(\frac{r_j c_i - r_i c_j}{r_j - r_i}\right)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

e para β'_{ij}

$$\begin{aligned} z \in \beta'_{ij} &\iff r_j (|z - (c_i, 0)|^2 - r_i^2) = r_i (r_j^2 - |z - (c_j, 0)|^2) \\ &\iff r_j ((x - c_i)^2 + y^2 - r_i^2) = r_i (r_j^2 - (x - c_j)^2 - y^2) \\ &\iff \left(x - \left(\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i}\right)\right)^2 + y^2 = r_j r_i - \left(\frac{r_j c_i^2 + r_i c_j^2}{r_j + r_i}\right) + \left(\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i}\right)^2. \end{aligned}$$

Concluimos que as bissetrizes são dadas por

$$\begin{cases} r_i = r_j \implies \begin{cases} z \in \beta_{ij} \iff x = \frac{c_i + c_j}{2} \\ z \in \beta'_{ij} \iff \left(x - \left(\frac{c_i + c_j}{2}\right)\right)^2 + y^2 = r_i^2 - \left(\frac{c_i^2 + c_j^2}{2}\right) + \left(\frac{c_i + c_j}{2}\right)^2 \end{cases} \\ r_i \neq r_j \implies \begin{cases} z \in \beta_{ij} \iff \left(x - \left(\frac{r_j c_i - r_i c_j}{r_j - r_i}\right)\right)^2 + y^2 = -r_i r_j + \left(\frac{r_i c_j^2 - r_j c_i^2}{r_j - r_i}\right) + \left(\frac{r_j c_i - r_i c_j}{r_j - r_i}\right)^2 \\ z \in \beta'_{ij} \iff \left(x - \left(\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i}\right)\right)^2 + y^2 = r_j r_i - \left(\frac{r_j c_i^2 + r_i c_j^2}{r_j + r_i}\right) + \left(\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i}\right)^2 \end{cases} \end{cases}.$$

Resumindo:

Teorema A.1.4 *Se as geodésicas γ_i e γ_j são concorrentes, temos duas possibilidades:*

1) γ_i é a semi-reta $R(c_i)$ e γ_j é o semi-círculo $C(c_j, r_j)$ ((a) e (b) na figura A.5);

$$\begin{cases} \beta_{ij} = C\left((c_j - r_j); \sqrt{2r_j(c_i - (c_j - r_j))}\right) \\ \beta'_{ij} = C\left((c_j + r_j); \sqrt{2r_j((c_j + r_j) - c_i)}\right) \end{cases}.$$

2) γ_i e γ_j são os semi-círculos $C(c_i; r_i)$ e $C(c_j; r_j)$;

a) Se $r_i = r_j$ ((c) na figura A.5) então

$$\begin{cases} \beta_{ij} = R\left(\frac{c_i + c_j}{2}\right) \\ \beta'_{ij} = C\left(\left(\frac{c_i + c_j}{2}\right); \sqrt{r_i^2 - \left(\frac{c_i^2 + c_j^2}{2}\right) + \left(\frac{c_i + c_j}{2}\right)^2}\right) \end{cases}.$$

b) Se $r_i \neq r_j$ ((d) na figura A.5) então

$$\begin{cases} \beta_{ij} = C \left(\left(\frac{r_j c_i - r_i c_j}{r_j - r_i} \right); \sqrt{-r_i r_j + \left(\frac{r_i c_j^2 - r_j c_i^2}{r_j - r_i} \right) + \left(\frac{r_j c_i - r_i c_j}{r_j - r_i} \right)^2} \right) \\ \beta'_{ij} = C \left(\left(\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i} \right); \sqrt{r_j r_i - \left(\frac{r_j c_i^2 + r_i c_j^2}{r_j + r_i} \right) + \left(\frac{r_j c_i + r_i c_j}{r_j + r_i} \right)^2} \right) \end{cases}.$$

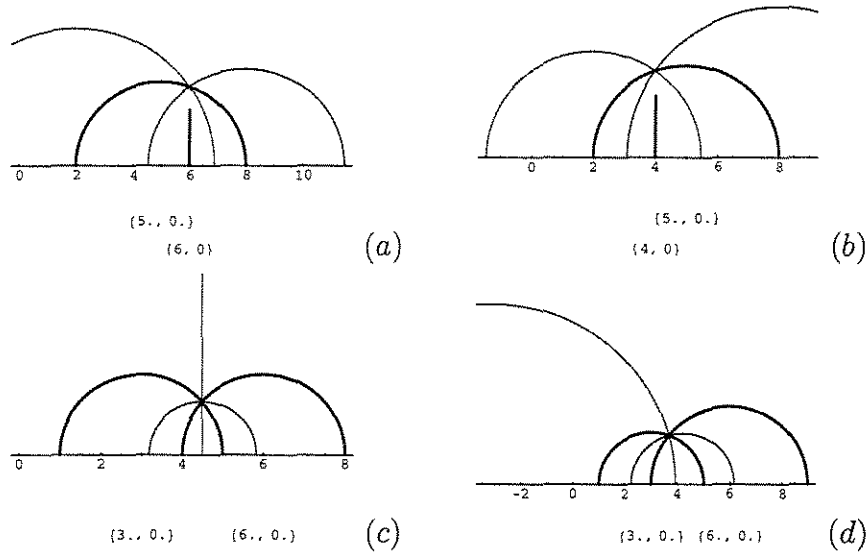


Figura A.5: Bissetrizes de geodésicas concorrentes

Concluimos a busca pelas bissetrizes no plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$. Tendo em vista uma implementação algorítmica, observamos que o direcionamento para encontrar bissetrizes de geodésicas disjuntas, paralelas ou concorrentes se dá com o conjunto solução, S , dos pontos em comum entre os dois círculos euclidianos contendo as duas geodésicas, ter cardinalidade zero, um ou dois $\{|S| = 0, |S| = 1 \text{ ou } |S| = 2\}$. Ainda, isto independe de serem estas bissetrizes de duas semi-retas, dois semi-círculos ou semi-reta e semi-círculo.

Na próxima seção, apresentamos expressões para a mediatriz.

A.1.4 Mediatrix hiperbólica

Sejam $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ com $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. A mediatrix de v_1 e v_2 é dada pelos pontos $z \in \mathbb{H}^2$ tal que $d_{\mathbb{H}^2}(z, v_1) = d_{\mathbb{H}^2}(z, v_2)$. Mas

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^2}(z, v_1) &= d_{\mathbb{H}^2}(z, v_2) \\ \iff \cosh d_{\mathbb{H}^2}(z, v_1) &= \cosh d_{\mathbb{H}^2}(z, v_2) \\ \iff \frac{|z - v_1|^2}{y_1} &= \frac{|z - v_2|^2}{y_2} \\ \iff y_2(x - x_1)^2 + y_2(y - y_1)^2 &= y_1(x - x_2)^2 + y_1(y - y_2)^2 \end{aligned}$$

donde temos

$$(y_1 - y_2)x^2 + (y_1 - y_2)y^2 + 2(x_1y_2 - y_1x_2)x + y_1(x_2^2 + y_2^2) - y_2(x_1^2 + y_1^2) = 0. \quad (\text{A.6})$$

De (A.6) temos dois casos:

1. $y_1 = y_2$;
2. $y_1 \neq y_2$ (este caso é também encontrado em [40]).

Se $y_1 = y_2$ então

$$x = \frac{y_2(x_1^2 + y_1^2) - y_1(x_2^2 + y_2^2)}{2(x_1y_2 - y_1x_2)} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

com $y > 0$.

Caso $y_1 \neq y_2$, temos

$$\left(x + \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{y_1 - y_2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{x_1y_2 - y_1x_2}{y_1 - y_2}\right)^2 + \frac{y_2(x_1^2 + y_1^2) - y_1(x_2^2 + y_2^2)}{(y_1 - y_2)}$$

onde $y > 0$. Portanto, concluímos que a mediatrix é uma geodésica e donde apresentamos o seguinte resultado:

Teorema A.1.5 *Considere dois pontos distintos $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ com $v_1, v_2 \in \mathbb{H}^2$. Então a mediatrix é dada por:*

- i) *Se $y_1 = y_2$, a mediatrix é a semi-reta iniciada em $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$;*
- ii) *Se $y_1 \neq y_2$, a mediatrix é o semi-círculo de centro*

$$\left(\frac{x_1y_2 - y_1x_2}{y_2 - y_1}, 0\right)$$

e raio

$$\sqrt{\left(\frac{x_1y_2 - y_1x_2}{y_1 - y_2}\right)^2 + \frac{y_2(x_1^2 + y_1^2) - y_1(x_2^2 + y_2^2)}{(y_1 - y_2)}}.$$

Encerramos esta seção observando que o ponto médio de v_1 e v_2 é obtido da interseção da geodésica ligando v_1 a v_2 , com a mediatriz

A.2 Algoritmos Implementados no Mathematica

Algoritmo do CMI - Hiperbólico

(* Declarando os vértices do polígono :

Forneça na variável `vértices` abaixo os vértices do polígono desejado.

Observe que os vértices devem ser fornecidos de forma ordenada pelo caminhar sobre o perímetro do polígono iniciando em um vértice no sentido horário (ou anti-horário) até chegar ao seu antecessor nesta caminhada;

Abaixo apresento alguns exemplos:

```
{(6,3),(3,5),(0,5),(-2,3),(-2,2),(0,1),(3,1)};→ Início-{6,3} Término-{3,1}
{(8,20),(3,26),(0,26),(-5,22),(-5,18),(0,14),(3,14)};→
Início-{8,20} Término-{3,14}
{(7,3),(5,5),(3,7),(0,5),(-2,3),(-2,2),(0,1),(3,1)};→ Início-{7,3} Término-{3,1}
*)
```

```
vertices := {{0, 5}, {-2, 3}, {0, 1}}
```

```
v := Partition[Flatten[{vertices, vertices[[1]]}], 2]
```

```
Print["O polígono tem ", Length[vertices],
```

```
" arestas e o conjunto dos vértices é: ", v];
```

(* Distancia Hiperbólica e círculo hiperbólico no plano *)

$$\text{distancia}[u_ , v_] := 2 \text{ArcTanh} \left[\sqrt{\frac{(u[[1]] - v[[1]])^2 + (u[[2]] - v[[2]])^2}{(u[[1]] - v[[1]])^2 + (u[[2]] + v[[2]])^2}} \right]$$

```
circuloH[u_, r_] := Circle[{u[[1]], u[[2]] Cosh[r]}, u[[2]] Sinh[r]]
```

(* Segmento geodésico entre dois pontos *)

$$c[u_ , v_] := \text{If}[u[[1]] \neq v[[1]], \left\{ \frac{u[[1]]^2 + u[[2]]^2 - v[[1]]^2 - v[[2]]^2}{2(u[[1]] - v[[1]])}, 0 \right\}, \{u[[1]], 0\}]$$

$$r[u_ , v_] := \frac{1}{2} \sqrt{\left(4u[[1]]^2 + 4u[[2]]^2 + \frac{(u[[1]]^2 + u[[2]]^2 - v[[1]]^2 - v[[2]]^2)^2}{(u[[1]] - v[[1]])^2} - \frac{4u[[1]](u[[1]]^2 + u[[2]]^2 - v[[1]]^2 - v[[2]]^2)}{(u[[1]] - v[[1]])} \right)}$$

$$\theta[u_ , v_] := \text{ArcSin} \left[\frac{u[[2]]}{\sqrt{(u[[1]] - c[u, v][[1]])^2 + u[[2]]^2}} \right]$$

```
 $\alpha[u\_ , v\_ ] := \text{If}[u[[1]] \leq c[u, v][[1]], \pi - \theta[u, v], \theta[u, v]]$ 
```

```
geod[u_, v_] := If[u[[1]] ≠ v[[1]], Graphics[
```

```
{PointSize[0.015], Point[N[c[u, v]]], Thickness[.005], Circle[c[u, v], r[u, v],
{Min[{α[u, v], α[v, u]}], Min[{α[u, v], α[v, u]}] + Abs[α[u, v] - α[v, u]]}],
AspectRatio → Automatic, Axes → {True, False}],
```

```
Graphics[{PointSize[0.015], Point[u], Thickness[.005], Line[{u, v}]},
AspectRatio → Automatic, Axes → {True, False}]]
```

```

(* Distância de um ponto a um segmento geodésico *)
d[u_, v_, p_] := If[u[[1]] == v[[1]],
  Min[Table[distancia[p, {u[[1]], u[[2]] + n  $\frac{\text{Abs}[u[[2]] - v[[2]]}{100}$ }, {n, 1, 100, 1}]],
  Min[Table[distancia[p,
    {c[u, v] [[1]] + r[u, v] Cos[Min[{α[u, v], α[v, u]}] + n  $\frac{\text{Abs}[α[u, v] - α[v, u]]}{100}$ ],
    r[u, v] Sin[Min[{α[u, v], α[v, u]}] + n  $\frac{\text{Abs}[α[u, v] - α[v, u]]}{100}$  }]], {n, 1, 100, 1}]]]

(* Plotando a geodésica definida por dois pontos *)
f1[u_, v_] :=
  Graphics[{Text[c[u, v], {c[u, v] [[1]], -3}], Point[c[u, v]], Thickness[.007],
    Line[{c[u, v] [[1]], 0}, {c[u, v] [[1]], 2 Max[{u[[2]], v[[2]]}]}],
    AspectRatio → Automatic, Axes → {True, False}]
f2[u_, v_] := Graphics[{Text[N[c[u, v]], {c[u, v] [[1]], -2}],
  Point[c[u, v]], Thickness[.007], Circle[c[u, v], r[u, v], {0, π}],
  AspectRatio → Automatic, Axes → {True, False}]
g[u_, v_] := If[u[[1]] == v[[1]], f1[u, v], f2[u, v]]

```

```

(* Ponto de interseção de duas retas *)
ptintereta[u_, v_, w_, z_] := If[N[u[[1]]] = N[v[[1]]] && N[w[[1]]] ≠ N[z[[1]]],
  If[Abs[c[u, v] [[1]] - c[w, z] [[1]]] < r[w, z],
    {c[u, v] [[1]],  $\sqrt{r[w, z]^2 - (c[u, v] [[1]] - c[w, z] [[1]])^2}$ , 2},
    If[Abs[c[u, v] [[1]] - c[w, z] [[1]]] = r[w, z],
      {c[u, v] [[1]],  $\sqrt{r[w, z]^2 - (c[u, v] [[1]] - c[w, z] [[1]])^2}$ , 1}, {0, 0, 0}]],
  If[N[u[[1]]] ≠ N[v[[1]]] && N[w[[1]]] = N[z[[1]]],
    If[Abs[c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]]] < r[u, v],
      {c[w, z] [[1]],  $\sqrt{r[u, v]^2 - (c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]])^2}$ , 2},
      If[Abs[c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]]] = r[u, v],
        {c[w, z] [[1]],  $\sqrt{r[u, v]^2 - (c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]])^2}$ , 1}, {0, 0, 0}]],
    If[N[u[[1]]] ≠ N[v[[1]]] && N[w[[1]]] ≠ N[z[[1]]],
      If[Abs[c[u, v] [[1]] - c[w, z] [[1]]] = r[u, v] + r[w, z],
        {
 $\frac{r[u, v]^2 - r[w, z]^2}{2 (c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]])} + \frac{c[u, v] [[1]] + c[w, z] [[1]]}{2}$ ,
 $\sqrt{\left( r[u, v]^2 - \left( \frac{r[u, v]^2 - r[w, z]^2}{2 (c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]])} + \frac{c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]]}{2} \right)^2} \right)$ , 1},
        If[Abs[c[u, v] [[1]] - c[w, z] [[1]]] < (r[u, v] + r[w, z]),
          If[c[w, z] [[1]] = c[u, v] [[1]], {0, 0, 0}, If[N[r[u, v]^2] =
            N[ $\left( \frac{r[u, v]^2 - r[w, z]^2}{2 (c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]])} + \frac{c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]]}{2} \right)^2]$ ,
              {
 $\frac{r[u, v]^2 - r[w, z]^2}{2 (c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]])} + \frac{c[u, v] [[1]] + c[w, z] [[1]]}{2}$ ,
 $\sqrt{\left( r[u, v]^2 - \left( \frac{r[u, v]^2 - r[w, z]^2}{2 (c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]])} + \frac{c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]]}{2} \right)^2} \right)$ ,
              1}, If[N[r[u, v]^2] >
                N[ $\left( \frac{r[u, v]^2 - r[w, z]^2}{2 (c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]])} + \frac{c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]]}{2} \right)^2]$ ,
                  {
 $\frac{r[u, v]^2 - r[w, z]^2}{2 (c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]])} + \frac{c[u, v] [[1]] + c[w, z] [[1]]}{2}$ ,
 $\sqrt{\left( r[u, v]^2 - \left( \frac{r[u, v]^2 - r[w, z]^2}{2 (c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]])} + \frac{c[w, z] [[1]] - c[u, v] [[1]]}{2} \right)^2} \right)$ ,
                  2}, {0, 0, 0}]]], {0, 0, 0}]], {0, 0, 1}]]]

```

```

(* Comando que gera o polígono hiperbólico *)
t :=
  Max[Table[v[[i, 1]], {i, 1, Length[v]}]] + Min[Table[v[[i, 1]], {i, 1, Length[v]}]]
  2
polihip[v_] := {Graphics[{PointSize[0.02], Point /@ v,
  RGBColor[0, 0, 1], Text["Plano Hiperbólico", {t, -2}]}],
  Table[geod[v[[i]], v[[i + 1]], {i, 1, Length[v] - 1}]}
Print[" O polígono dos vértices fornecidos "];
Show[{polihip[v], Graphics[{PointSize[0.02], Point /@ vertices}]}],
  AspectRatio -> Automatic, Axes -> {True, False}];

(* Bissetrizes em funcao dos pontos que determinam as retas *)
(* Definindo as bissetrizes *)
(* Geodésicas Disjuntas *)
disj1[u_, v_, w_, z_] := {
  
$$\frac{c[u, v][[1]] + c[w, z][[1]]}{2}, 0$$

}
disj2[u_, v_, w_, z_] := {
  
$$\frac{r[u, v] c[w, z][[1]] - r[w, z] c[u, v][[1]]}{r[u, v] - r[w, z]},$$


$$\sqrt{\left(-r[u, v] r[w, z] + \frac{r[w, z] c[u, v][[1]]^2 - r[u, v] c[w, z][[1]]^2}{r[u, v] - r[w, z]} + \left(\frac{r[u, v] c[w, z][[1]] - r[w, z] c[u, v][[1]]}{r[u, v] - r[w, z]}\right)^2\right)}$$

}
disj3[u_, v_, w_, z_] := {
  
$$\frac{r[u, v] c[w, z][[1]] + r[w, z] c[u, v][[1]]}{r[u, v] + r[w, z]},$$


$$\sqrt{\left(r[u, v] r[w, z] - \frac{r[w, z] c[u, v][[1]]^2 + r[u, v] c[w, z][[1]]^2}{r[u, v] + r[w, z]} + \left(\frac{r[u, v] c[w, z][[1]] + r[w, z] c[u, v][[1]]}{r[u, v] + r[w, z]}\right)^2\right)}$$

}
disj4[u_, v_, w_, z_] := {c[w, z][[1]] + r[w, z],
  
$$\sqrt{2 r[w, z] (c[w, z][[1]] + r[w, z] - c[u, v][[1]])}$$

}
disj5[u_, v_, w_, z_] := {c[w, z][[1]] - r[w, z],
  
$$\sqrt{2 r[w, z] (c[u, v][[1]] - (c[w, z][[1]] - r[w, z]))}$$

}
bissd[u_, v_, w_, z_] :=
  If[u[[1]] ≠ v[[1]] && w[[1]] ≠ z[[1]],
  If[Abs[c[u, v][[1]] - c[w, z][[1]]] > (r[u, v] + r[w, z]),
  If[r[u, v] = r[w, z], disj1[u, v, w, z], disj2[u, v, w, z]], disj3[u, v, w, z]],
  If[u[[1]] = v[[1]] && w[[1]] ≠ z[[1]],
  If[c[u, v][[1]] < c[w, z][[1]], disj4[u, v, w, z], disj5[u, v, w, z]],
  If[c[w, z][[1]] < c[u, v][[1]], disj4[w, z, u, v], disj5[w, z, u, v]]]

```

```

(* Geodésicas Paralelas *)
bissp[u_, v_, w_, z_] :=
  If[u[[1]] ≠ v[[1]] && w[[1]] ≠ z[[1]],
    If[Abs[c[u, v] - c[w, z]] == (r[u, v] + r[w, z]),
      If[r[u, v] = r[w, z], disj1[u, v, w, z], disj2[u, v, w, z], disj3[u, v, w, z]],
    If[u[[1]] = v[[1]] && w[[1]] ≠ z[[1]],
      If[c[u, v] < c[w, z], disj4[u, v, w, z], disj5[u, v, w, z]],
    If[u[[1]] ≠ v[[1]] && w[[1]] = z[[1]], If[c[w, z] < c[u, v],
      disj4[w, z, u, v], disj5[w, z, u, v]], If[u[[1]] = v[[1]] && w[[1]] = z[[1]],
      disj1[u, v, w, z], Print["Há Algum erro - teste paralelas"]]]]]

(* Geodésicas Concorrentes *)
bissc[u_, v_, w_, z_] :=
  If[u[[1]] ≠ v[[1]] && w[[1]] ≠ z[[1]],
    If[r[u, v] = r[w, z], {disj1[u, v, w, z], disj3[u, v, w, z]},
      {disj2[u, v, w, z], disj3[u, v, w, z]}],
  If[u[[1]] = v[[1]] && w[[1]] ≠ z[[1]], {disj5[u, v, w, z], disj4[u, v, w, z]},
    {disj5[w, z, u, v], disj4[w, z, u, v]}}]

(* Comando que vai para bissd, bissp ou bissc -
  biss1 → {bissd, bissp, bissc[[1]]} - biss2 → {bissd, bissp, bissc[[2]]} *)
biss1[u_, v_, w_, z_] := If[ptintereta[u, v, w, z][[3]] = 0,
  bissd[{u[[1]], u[[2]]}, {v[[1]], v[[2]]}, {w[[1]], w[[2]]}, {z[[1]], z[[2]]}],
  If[ptintereta[u, v, w, z][[3]] = 1, bissp[{u[[1]], u[[2]]}, {v[[1]], v[[2]]},
    {w[[1]], w[[2]]}, {z[[1]], z[[2]]}], bissc[{u[[1]], u[[2]]},
    {v[[1]], v[[2]]}, {w[[1]], w[[2]]}, {z[[1]], z[[2]]}][[1]]]]
biss2[u_, v_, w_, z_] := If[ptintereta[u, v, w, z][[3]] = 0,
  bissd[{u[[1]], u[[2]]}, {v[[1]], v[[2]]}, {w[[1]], w[[2]]}, {z[[1]], z[[2]]}],
  If[ptintereta[u, v, w, z][[3]] = 1, bissp[{u[[1]], u[[2]]}, {v[[1]], v[[2]]},
    {w[[1]], w[[2]]}, {z[[1]], z[[2]]}], bissc[{u[[1]], u[[2]]},
    {v[[1]], v[[2]]}, {w[[1]], w[[2]]}, {z[[1]], z[[2]]}][[2]]]]

```

```

(* Ponto de interseção de duas bissetrizes *)
ptinter[{u_, r_, v_, t_}] :=
  If[r == 0 && t != 0, If[Abs[u - v] ≤ t, {u,  $\sqrt{t^2 - (u - v)^2}$ }, {0, -1}],
    If[r != 0 && t == 0, If[Abs[v - u] ≤ r, {v,  $\sqrt{r^2 - (v - u)^2}$ }, {0, -1}], If[r != 0 && t != 0,
      If[Abs[u - v] ≤ (r + t), If[v == u, {0, -1}, If[N[r^2] ≥ N[ $\left(\frac{r^2 - t^2}{2(v - u)} + \frac{v - u}{2}\right)^2$ ],
        { $\frac{r^2 - t^2}{2(v - u)} + \frac{u + v}{2}$ ,  $\sqrt{r^2 - \left(\frac{r^2 - t^2}{2(v - u)} + \frac{v - u}{2}\right)^2}$ }, {0, -1}]], {0, -1}], {0, -1}]]]

ptinterBiss1[{u_, v_, w_, z_, p_, q_, r_, t_}] := ptinter[{biss1[u, v, w, z][[1]],
  biss1[u, v, w, z][[2]], biss1[p, q, r, t][[1]], biss1[p, q, r, t][[2]]}]
ptinterBiss2[{u_, v_, w_, z_, p_, q_, r_, t_}] := ptinter[{biss1[u, v, w, z][[1]],
  biss1[u, v, w, z][[2]], biss2[p, q, r, t][[1]], biss2[p, q, r, t][[2]]}]
ptinterBiss3[{u_, v_, w_, z_, p_, q_, r_, t_}] := ptinter[{biss2[u, v, w, z][[1]],
  biss2[u, v, w, z][[2]], biss1[p, q, r, t][[1]], biss1[p, q, r, t][[2]]}]
ptinterBiss4[{u_, v_, w_, z_, p_, q_, r_, t_}] := ptinter[{biss2[u, v, w, z][[1]],
  biss2[u, v, w, z][[2]], biss2[p, q, r, t][[1]], biss2[p, q, r, t][[2]]}]
ptinterBiss[{u_, v_, w_, z_, p_, q_, r_, t_}] :=
  {ptinterBiss1[{u, v, w, z, p, q, r, t}], ptinterBiss2[{u, v, w, z, p, q, r, t}],
  ptinterBiss3[{u, v, w, z, p, q, r, t}], ptinterBiss4[{u, v, w, z, p, q, r, t}]}

(* Distância de um ponto a uma geodésica *)
PontoM[u_, v_, p_] := If[u[[1]] == v[[1]], {u[[1]],  $\sqrt{(p[[1]] - u[[1]])^2 + p[[2]]^2}$ },
  {(((p[[1]] - c[u, v][[1]] - r[u, v])^2 + (-p[[2]])^2) (c[u, v][[1]] - r[u, v]) +
    ((p[[1]] - c[u, v][[1]] + r[u, v])^2 + (-p[[2]])^2) (c[u, v][[1]] + r[u, v])) /
    (((p[[1]] - c[u, v][[1]] - r[u, v])^2 + (-p[[2]])^2) +
    ((p[[1]] - c[u, v][[1]] + r[u, v])^2 + (-p[[2]])^2)),
  1 / (((p[[1]] - c[u, v][[1]] - r[u, v])^2 + (-p[[2]])^2) +
    ((p[[1]] - c[u, v][[1]] + r[u, v])^2 + (-p[[2]])^2))
  (2 r[u, v]  $\sqrt{((p[[1]] - c[u, v][[1]] - r[u, v])^2 + (-p[[2]])^2)}$ 
   $\sqrt{((p[[1]] - c[u, v][[1]] + r[u, v])^2 + (-p[[2]])^2)}$ )}]

rH[u_, v_, p_] := distancia[p, PontoM[u, v, p]]

```

```

(* Lista dos vértices que definem as bissetrizes *)
m[j_, i_] := {v[[j]], v[[j + 1]], v[[i + 1]], v[[i + 2]]}
L1 := Partition[Partition[
  Flatten[Table[m[j, i], {j, 1, Length[v] - 1}, {i, j, (Length[v] - 1) - 1}]], 2], 4]
Print["O número de arestas do polígono é: ", Length[L1]]
Print["O número máximo possível de interseções das bissetrizes é : ",
  
$$\frac{\text{Length}[L1] (\text{Length}[L1] - 1)}{2} * 4]$$
]

(* Variáveis da próxima rotina *)
M[i_, j_, k_, l_] := PontoM[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[k]],
  Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[k + 1]],
  ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[1]]]
centro := {0, -1}
raio := 0
i1 := 0
i2 := 0
k1 := 0

```

(* Rotina que plota o gráfico dos candidatos, sendo o último o MIC *)

```

RotinaPonto[i_, j_, k_] := If[
  N[M[i, j, 1, k]] ≠ Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[1]] &&
  N[M[i, j, 1, k]] ≠ Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[2]] &&
  N[distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[1]],
    Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[2]]] =
    N[(distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[1]], M[i, j, 1, k]] +
      distancia[M[i, j, 1, k], Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[2]])] &&
  N[M[i, j, 3, k]] ≠ Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[3]] &&
  N[M[i, j, 3, k]] ≠ Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[4]] &&
  N[distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[3]],
    Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[4]]] =
    N[(distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[3]], M[i, j, 3, k]] +
      distancia[M[i, j, 3, k], Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[4]])] &&
  N[M[i, j, 5, k]] ≠ Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[5]] &&
  N[M[i, j, 5, k]] ≠ Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[6]] &&
  N[distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[5]],
    Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[6]]] =
    N[(distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[5]], M[i, j, 5, k]] +
      distancia[M[i, j, 5, k], Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[6]])] &&
  N[M[i, j, 7, k]] ≠ Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[7]] &&
  N[M[i, j, 7, k]] ≠ Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[8]] &&
  N[distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[7]],
    Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[8]]] =
    N[(distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[7]], M[i, j, 7, k]] +
      distancia[M[i, j, 7, k], Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[8]])] &&
  N[distancia[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]][[k]], M[i, j, 3, k]] =
  N[distancia[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]][[k]], M[i, j, 5, k]]
, If[N[distancia[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]][[k]],
  M[i, j, 3, k]] ≤ Min[Table[
    N[d[v[[1]], v[[1 + 1]], ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]][[k]]],
    {1, 1, Length[v] - 1}]] &&
  N[distancia[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]][[k]], M[i, j, 3, k]] ≥
  raio, Print["Candidato ao Centro: ",
centro = N[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]][[k]],
" de Raio: ", raio =
  N[distancia[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]][[k]], M[i, j, 3, k]],
" j = ", i1 = j, " i = ", i2 = i, " k = ", k1 = k, " GRAFICO ",
Show[Graphics[{PointSize[0.02], Point /@ {M[i, j, 1, k], M[i, j, 3, k], M[i, j, 5, k],
  M[i, j, 7, k], ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]][[k]],
  circuloH[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]][[k]], N[distancia[
    ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]][[k]], M[i, j, 3, k]]]}],
  polihip[v], Axes → {True, False}, AspectRatio → Automatic]],
Print["Ponto inválido pelo SEGUNDO teste", " {j,i,k} : { ",
j, " , ", i, " , ", k, " }"]

, Print["Ponto inválido pelo PRIMEIRO teste",
" {j,i,k} : { ", j, " , ", i, " , ", k, " }"] ]

```

```

For[j = 2, j < (Length[L1] + 1), For[i = j, i < (Length[L1] + 1),

If[
ptintereta[L1[[j - 1, 1]], L1[[j - 1, 2]], L1[[j - 1, 3]], L1[[j - 1, 4]]][[3]] = 2 &&
ptintereta[L1[[i, 1]], L1[[i, 2]], L1[[i, 3]], L1[[i, 4]]][[3]] = 2,
For[k = 1, k < 5, If[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1]][[k, 2]] > 0,
RotinaPonto[i, j, k], Print["Não há ponto de interseção entre as bissetrizes ",
" { j, i, k} = { ", j, " , ", i, " , ", k, " }"]]; k++],
If[ptintereta[L1[[j - 1, 1]], L1[[j - 1, 2]], L1[[j - 1, 3]], L1[[j - 1, 4]]][[3]] = 1 &&
ptintereta[L1[[i, 1]], L1[[i, 2]], L1[[i, 3]], L1[[i, 4]]][[3]] = 2,
For[k = 3, k < 5, If[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1]][[k, 2]] > 0,
RotinaPonto[i, j, k], Print["Não há ponto de interseção entre as
bissetrizes ", " { j, i, k} = { ", j, " , ", i, " , ", k, " }"]]; k++],
If[ptintereta[L1[[j - 1, 1]], L1[[j - 1, 2]], L1[[j - 1, 3]], L1[[j - 1, 4]]][[3]] =
2 && ptintereta[L1[[i, 1]], L1[[i, 2]], L1[[i, 3]], L1[[i, 4]]][[3]] = 2,
For[k = 1, k < 3, If[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1]][[k, 2]] > 0,
RotinaPonto[i, j, k], Print["Não há ponto de interseção entre as
bissetrizes ", " { j, i, k} = { ", j, " , ", i, " , ", k, " }"]]; k++],
Print["Não há ponto de interseção entre as bissetrizes ",
" { j, i, k} = { ", j, " , ", i, " , ", k, " }"]]]];

; i++; j++;

Print[
"##### FIM #####",
"O MIC tem centro: ", centro, " e Raio: ",
raio, " Veja o gráfico do CMI abaixo!",
" ##### FIM #####"];

Print["O MIC tem centro: ", centro,
" Raio: ", raio, " # Veja o gráfico acima # ",
Show[{polihip[v], Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], circuloH[centro, raio],
RGBColor[1, 0, 0], PointSize[0.02], Point[centro],
Text["Centro", centro + {0, -0.3}], RGBColor[1, 0, 1],
Line[{centro, M[i2, i1, 1, k1]}], Text["Raio", M[i2, i1, 1, k1] + {0.3, 0.2}]}]},
AspectRatio -> Automatic, Axes -> {True, False}];];

```

Algoritmo do CMI - Euclidiano

(* Declarando os vértices do polígono :

Forneça na variável `vértices` abaixo os vértices do polígono desejado.

Observe que os vértices devem ser fornecidos de forma ordenada pelo caminhar sobre o perímetro do polígono iniciando em um vértice no sentido horário (ou anti-horário) até chegar ao seu antecessor nesta caminhada;

Abaixo apresento alguns exemplos:

`{{4,0},{4,2},{0,2},{-2,1},{-1,-1},{0,-2},{4,-2}};`→

Início-{4,0} Término-{4,-2};

`{{8,20},{3,26},{0,26},{-5,22},{-5,18},{0,14},{3,14}};`→

Início-{8,20} Término-{3,14};

`{{6,28},{1,32},{0,32},{-3,30},{-3,26},{0,24},{3,24}};`→

Início-{6,28} Término-{3,24};

*)

```
vertices := {{4, 0}, {4, 2}, {0, 2}, {-2, 1}, {-1, -1}, {0, -2}, {4, -2}}
```

```
v := Partition[Flatten[{vertices, vertices[[1]}], 2]
```

```
Print["O polígono tem ", Length[vertices],
```

```
" arestas e o conjunto dos vértices é: ", v]
```

(* Distancia Euclidiana *)

$$\text{distancia}[u_ , v_] := \sqrt{(u[[1]] - v[[1]])^2 + (u[[2]] - v[[2]])^2}$$

(* Coeficientes da forma geral de uma reta*)

`a[v_, w_] := -(w[[2]]-v[[2]])`

`b[v_, w_] := (w[[1]] - v[[1]])`

`c[v_, w_] := (-v[[1]] a[v, w] - v[[2]] b[v, w])`

`ortc[v_, w_, p_] := (p[[1]] b[v, w] - p[[2]] a[v, w])`

`reta[v_, w_, x_, y_] := a[v, w] x + b[v, w] y + c[v, w]`

`ortreta[v_, w_, p_, x_, y_] := -b[v, w] x + a[v, w] y + ortc[v, w, p]`

```

(* Ponto de interseção de duas retas *)
ptintereta[u_, v_, w_, z_] := If[(a[u, v] b[w, z] - a[w, z] b[u, v]) ≠ 0,
  {
    
$$\frac{b[u, v] c[w, z] - b[w, z] c[u, v]}{a[u, v] b[w, z] - a[w, z] b[u, v]}, \frac{c[u, v] a[w, z] - c[w, z] a[u, v]}{a[u, v] b[w, z] - a[w, z] b[u, v]}$$
,
  },
  Print["Não possui ponto de interseção"]]

(* Bissetrizes em funcao dos pontos que determinam as retas *)
μ[v_, w_] := 
$$\frac{-\text{Sign}[c[v, w]]}{\sqrt{a[v, w]^2 + b[v, w]^2}}$$

Biss1A[u_, v_, w_, z_] := μ[u, v] a[u, v] - μ[w, z] a[w, z]
Biss1B[u_, v_, w_, z_] := μ[u, v] b[u, v] - μ[w, z] b[w, z]
Biss1C[u_, v_, w_, z_] := μ[u, v] c[u, v] - μ[w, z] c[w, z]
retabiss[u_, v_, w_, z_, x_, y_] :=
  Biss1A[u, v, w, z] x + Biss1B[u, v, w, z] y + Biss1C[u, v, w, z]

Biss2A[u_, v_, w_, z_] := μ[u, v] a[u, v] + μ[w, z] a[w, z]
Biss2B[u_, v_, w_, z_] := μ[u, v] b[u, v] + μ[w, z] b[w, z]
Biss2C[u_, v_, w_, z_] := μ[u, v] c[u, v] + μ[w, z] c[w, z]
retabiss2[u_, v_, w_, z_, x_, y_] :=
  Biss2A[u, v, w, z] x + Biss2B[u, v, w, z] y + Biss2C[u, v, w, z]

(* Ponto de interseção de duas retas da forma Biss1 *)
ptinterBiss[{u_, v_, w_, z_, p_, q_, r_, t_}] :=
  If[N[(Biss1A[u, v, w, z] Biss1B[p, q, r, t] - Biss1A[p, q, r, t] Biss1B[u, v, w, z])] ≠ 0,
    N[{(Biss1B[u, v, w, z] Biss1C[p, q, r, t] - Biss1B[p, q, r, t] Biss1C[u, v, w, z]) /
      (Biss1A[u, v, w, z] Biss1B[p, q, r, t] - Biss1A[p, q, r, t] Biss1B[u, v, w, z]),
      (Biss1C[u, v, w, z] Biss1A[p, q, r, t] - Biss1C[p, q, r, t] Biss1A[u, v, w, z]) /
      (Biss1A[u, v, w, z] Biss1B[p, q, r, t] - Biss1A[p, q, r, t] Biss1B[u, v, w, z])}],
    {"Não possui ponto de interseção", 0}]

(* Distância de um ponto a uma reta *)
PontoM[u_, v_, p_] :=
  {
    
$$\frac{\text{ortc}[u, v, p] b[u, v] - a[u, v] c[u, v]}{a[u, v]^2 + b[u, v]^2}, \frac{-c[u, v] b[u, v] - \text{ortc}[u, v, p] a[u, v]}{a[u, v]^2 + b[u, v]^2}$$

  }
r[u_, v_, p_] := distancia[p, PontoM[u, v, p]]

(* Definindo um polígono *)
PolEucl[v_] := Graphics[Line[v], AspectRatio → Automatic, Axes → True]
Show[PolEucl[v], AspectRatio → Automatic]

```

```

(* Lista dos vértices que definem os bissetores *)
m[j_, i_] := {v[[j]], v[[j+1]], v[[i+1]], v[[i+2]]}
L1 := Partition[Partition[
  Flatten[Table[m[j, i], {j, 1, Length[v] - 1}, {i, j, (Length[v] - 1) - 1}], 2], 4]
Print["O número de mediatrizes do polígono é: ", Length[L1]]
Print["O número máximo possível de interseções das mediatrizes é : ",
  
$$\frac{\text{Length}[L1] (\text{Length}[L1] - 1)}{2}$$
]
(* Variáveis da próxima rotina *)
M[i_, j_, k_] := PontoM[Flatten[{L1[[j-1]], L1[[i]]}, 1][[k]],
  Flatten[{L1[[j-1]], L1[[i]]}, 1][[k+1]],
  ptinterBiss[Flatten[{L1[[j-1]], L1[[i]]}, 1]]]
centro := 0
raio := 0
i1 := 0
i2 := 0

```

```
(*      Rotina que plota o gráfico dos candidatos, sendo o último o MIC *)

For[j = 2, j < (Length[L1] + 1), For[i = j, i < (Length[L1] + 1),
  If[NumberQ[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]][[1]]] == True,
    If[
      N[M[i, j, 1]] != Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[1]] &&
      N[M[i, j, 1]] != Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[2]] &&
      N[distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[1]],
        Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[2]]]] ==
      N[(distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[1]], M[i, j, 1]] +
        distancia[M[i, j, 1], Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[2]])] &&
      N[M[i, j, 3]] != Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[3]] &&
      N[M[i, j, 3]] != Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[4]] &&
      N[distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[3]],
        Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[4]]]] ==
      N[(distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[3]], M[i, j, 3]] +
        distancia[M[i, j, 3], Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[4]])] &&
      N[M[i, j, 5]] != Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[5]] &&
      N[M[i, j, 5]] != Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[6]] &&
      N[distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[5]],
        Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[6]]]] ==
      N[(distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[5]], M[i, j, 5]] +
        distancia[M[i, j, 5], Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[6]])] &&
      N[M[i, j, 7]] != Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[7]] &&
      N[M[i, j, 7]] != Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[8]] &&
      N[distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[7]],
        Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[8]]]] ==
      N[(distancia[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[7]], M[i, j, 7]] +
        distancia[M[i, j, 7], Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1][[8]])] &&
      N[distancia[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]], M[i, j, 3]]] =
      N[distancia[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]], M[i, j, 5]]]
    , If[N[distancia[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]], M[i, j, 3]]] ≤
      Min[Table[N[r[v[[k]]], v[[k + 1]],
        ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]]], {k, 1, Length[v] - 1}]] &&
      N[distancia[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]], M[i, j, 3]]] ≥ raio,
      Print["Candidato ao Centro: ",
        centro = N[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]], " de Raio: ",
        raio = N[distancia[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]], M[i, j, 3]]],
        " j = ", i1 = j, " i = ", i2 = i, " GRAFICO ",
        Show[Graphics[{PointSize[0.02], Point /@ {M[i, j, 1], M[i, j, 3], M[i, j, 5],
          M[i, j, 7], ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]]},
          Circle[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]], N[
            distancia[ptinterBiss[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]], M[i, j, 3]]]]],
          PolEucl[v], Axes → Automatic, AspectRatio → Automatic]], Print[
            "Ponto inválido pelo SEGUNDO teste", " {j,i} : { ", j, " , ", i, " }"]]]

    , Print["Ponto inválido pelo PRIMEIRO teste",
      " {j,i} : { ", j, " , ", i, " }"]]]
  ]
,
Print["As bissetrizes não intersectam-se", " {j,i} : { ", j, " , ", i, " }"]]]
; i++; j++;
```

```

If[raio ≠ 0,
  Print["O MIC tem centro: ", centro,
    "      Raio: ", raio, "      # Veja o gráfico acima # ",
    Show[{PolEucl[v], Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Circle[centro, raio],
      RGBColor[1, 0, 0], PointSize[0.02], Point[centro], Text["Centro",
        centro + {0, -0.3}], RGBColor[1, 0, 1], Line[{centro, M[i2, i1, 1]}],
        Text["Raio", M[i2, i1, 1] + {0.3, 0.2}]}]}, AspectRatio → Automatic];],
  Print["Este polígono não tem Círculo Inscrito !"]]

```

Algoritmo do CMC - Hiperbólico

(* Declarando os vértices do polígono :

Forneça na variável `vértices` abaixo os vértices do polígono desejado.

Observe que os vértices devem ser fornecidos de forma ordenada pelo caminhar sobre o perímetro do polígono iniciando em um vértice no sentido horário (ou anti-horário) até chegar ao seu antecessor nesta caminhada;

Abaixo apresento alguns exemplos:

```
{ {6,3}, {3,5}, {0,5}, {-2,3}, {-2,2}, {0,1}, {3,1} } -> Início-{6,3} Término-{3,1}
{ {8,20}, {3,26}, {0,26}, {-5,22}, {-5,18}, {0,14}, {3,14} } ->
Início-{8,20} Término-{3,14}
```

*)

```
vertices := {{200, 0.1}, {0, 2}, {-200, 0.1}, {0, 0.1}}
```

```
v := Partition[Flatten[{vertices, vertices[[1]]}], 2]
```

```
Print["O polígono tem ", Length[vertices],
```

```
" arestas e o conjunto dos vértices é: ", v]
```

(* Distancia hiperbólica e círculo hiperbólico *)

$$\text{distancia}[u_ , v_] := 2 \operatorname{ArcTanh} \left[\sqrt{\frac{(u[[1]] - v[[1]])^2 + (u[[2]] - v[[2]])^2}{(u[[1]] - v[[1]])^2 + (u[[2]] + v[[2]])^2}} \right]$$

```
circuloH[u_, r_] := Circle[{u[[1]], u[[2]] Cosh[r]}, u[[2]] Sinh[r]]
```

(* Segmento geodésico entre dois pontos *)

$$c[u_ , v_] := \text{If}[u[[1]] \neq v[[1]], \left\{ \frac{u[[1]]^2 + u[[2]]^2 - v[[1]]^2 - v[[2]]^2}{2(u[[1]] - v[[1]])}, 0 \right\}, \{u[[1]], 0\}]$$

```
r[u_, v_] :=
```

$$\text{If}[u[[1]] \neq v[[1]], \frac{1}{2} \sqrt{\left(4u[[1]]^2 + 4u[[2]]^2 + \frac{(u[[1]]^2 + u[[2]]^2 - v[[1]]^2 - v[[2]]^2)^2}{(u[[1]] - v[[1]])^2} - \frac{4u[[1]](u[[1]]^2 + u[[2]]^2 - v[[1]]^2 - v[[2]]^2)}{(u[[1]] - v[[1]])} \right)}, 0]$$

$$\theta[u_ , v_] := \operatorname{ArcSin} \left[\frac{u[[2]]}{\sqrt{(u[[1]] - c[u, v][[1]])^2 + u[[2]]^2}} \right]$$

```
 $\alpha[u\_ , v\_ ] := \text{If}[u[[1]] \leq c[u, v][[1]], \pi - \theta[u, v], \theta[u, v]]$ 
```

```
geod[u_, v_] := If[u[[1]] ≠ v[[1]], Graphics[
```

```
{PointSize[0.015], Point[N[c[u, v]]], Thickness[.005], Circle[c[u, v], r[u, v],
```

```
{Min[{ $\alpha[u, v]$ ,  $\alpha[v, u]$ }], Min[{ $\alpha[u, v]$ ,  $\alpha[v, u]$ ]} + Abs[ $\alpha[u, v]$  -  $\alpha[v, u]$ ]}],
```

```
AspectRatio → Automatic, Axes → {True, False}],
```

```
Graphics[{PointSize[0.015], Point[u], Thickness[.005], Line[{u, v}]},
```

```
AspectRatio → Automatic, Axes → {True, False}]]
```

```

(* Plotando a geodésica definida por dois pontos *)
f1[u_, v_] :=
  Graphics[{Text[c[u, v], {c[u, v][[1]], -3}], Point[c[u, v], Thickness[.007],
    Line[{c[u, v][[1]], 0}, {c[u, v][[1]], 2 Max[{u[[2]], v[[2]]}]}],
    AspectRatio → Automatic, Axes → {True, False}]
f2[u_, v_] := Graphics[{Text[N[c[u, v]], {c[u, v][[1]], -2}],
  Point[c[u, v], Thickness[.007], Circle[c[u, v], r[u, v], {0, π}],
  AspectRatio → Automatic, Axes → {True, False}]
g[u_, v_] := If[u[[1]] == v[[1]], f1[u, v], f2[u, v]]

(* Bissetor de dois vértices *)
bc[u_, v_] :=
  If[u[[2]] == v[[2]], { $\frac{u[[1]] + v[[1]]}{2}$ , 0}, { $\frac{u[[2]] v[[1]] - u[[1]] v[[2]]}{u[[2]] - v[[2]]}$ , 0}]

br[u_, v_] := If[u[[2]] == v[[2]], 0,  $\sqrt{\left(\frac{u[[1]] v[[2]] - u[[2]] v[[1]]}{u[[2]] - v[[2]]}\right)^2 + \frac{v[[2]] (u[[1]]^2 + u[[2]]^2) - u[[2]] (v[[1]]^2 + v[[2]]^2)}{u[[2]] - v[[2]]}}]$ 

grafretabiss[u_, v_] :=
  If[u[[2]] == v[[2]], Graphics[{Point[bc[u, v], Thickness[.007], RGBColor[0, 0, 1],
    Line[{bc[u, v], {bc[u, v][[1]], 2  $\sqrt{\left(\frac{1}{(u[[2]] + v[[2]])^2} (u[[2]] v[[2]] (u[[1]]^2 - 2 u[[1]] v[[1]] + v[[2]]^2 + u[[2]]^2 + v[[1]]^2 + 2 u[[2]] v[[2]])}\right)}$ }}],
    AspectRatio → Automatic, Axes → {True, False}], Graphics[
    {Text[N[bc[u, v]], {bc[u, v][[1]], -2}], Point[bc[u, v],
      Thickness[.007], RGBColor[0, 0, 1], Circle[bc[u, v], br[u, v], {0, π}],
      AspectRatio → Automatic, Axes → {True, False}]}]
```

(* Raio e o Centro do CMC quando toca em dois vértices *)

```

Centrol[u_, v_] := If[u[[2]] == v[[2]], {

$$\frac{u[[2]] v[[1]] + u[[1]] v[[2]]}{u[[2]] + v[[2]]},$$


$$\sqrt{\left( \frac{1}{(u[[2]] + v[[2]])^2} (u[[2]] v[[2]] (u[[1]]^2 - 2 u[[1]] v[[1]] + v[[2]]^2 + \right.$$


$$\left. u[[2]]^2 + v[[1]]^2 + 2 u[[2]] v[[2]]) \right)}, \text{If}[u[[1]] \neq v[[1]],$$


$$\left\{ \left( \frac{br[u, v]^2 - r[u, v]^2}{2 (c[u, v] [[1]] - bc[u, v] [[1]])} + \frac{c[u, v] [[1]] + bc[u, v] [[1]]}{2} \right), \right.$$


$$\sqrt{\left( r[u, v]^2 - \left( \left( \frac{br[u, v]^2 - r[u, v]^2}{2 (c[u, v] [[1]] - bc[u, v] [[1]])} + \right. \right.$$


$$\left. \left. \frac{c[u, v] [[1]] + bc[u, v] [[1]]}{2} \right) - c[u, v] [[1]] \right)^2 \right)},$$


$$\{c[u, v] [[1]], \sqrt{br[u, v]^2 - (c[u, v] [[1]] - bc[u, v] [[1]])^2}\}]]$$

r1[u_, v_] := distancia[u, Centrol[u, v]]

```

(* Raio e o Centro do CMC quando toca em três vértices *)

Centro2[{u_, v_, w_, z_}] :=

```

If[N[br[u, v]] = 0 && N[br[w, z]] ≠ 0, If[Abs[bc[u, v][[1]] - bc[w, z][[1]]] < br[w, z],
  {bc[u, v][[1]],  $\sqrt{br[w, z]^2 - (bc[u, v][[1]] - bc[w, z][[1]])^2}$ , 2},
  If[Abs[bc[u, v][[1]] - bc[w, z][[1]]] = br[w, z],
    {bc[u, v][[1]],  $\sqrt{br[w, z]^2 - (bc[u, v][[1]] - bc[w, z][[1]])^2}$ , 1}, {0, 0, 0}]],
If[N[br[w, z]] ≠ 0 && N[br[u, v]] = 0, If[Abs[bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]]] < br[u, v],
  {bc[w, z][[1]],  $\sqrt{br[u, v]^2 - (bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]])^2}$ , 2},
  If[Abs[bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]]] = br[u, v], {bc[w, z][[1]],
     $\sqrt{br[u, v]^2 - (bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]])^2}$ , 1}, {0, 0, 0}]], If[N[br[w, z]] ≠ 0 &&
  N[br[u, v]] ≠ 0, If[Abs[bc[u, v][[1]] - bc[w, z][[1]]] = br[u, v] + br[w, z],
    {
       $\frac{br[u, v]^2 - br[w, z]^2}{2(bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]])} + \frac{bc[u, v][[1]] + bc[w, z][[1]]}{2}$ ,  $\sqrt{\left(x[u, v]^2 - \left(\frac{br[u, v]^2 - br[w, z]^2}{2(bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]])} + \frac{bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]]}{2}\right)^2}\right)}$ , 1},
    If[Abs[bc[u, v][[1]] - bc[w, z][[1]]] < (br[u, v] + br[w, z]),
      If[bc[w, z][[1]] = bc[u, v][[1]], {0, 0, 0}, If[N[br[u, v]^2] =
        N[ $\left(\frac{br[u, v]^2 - br[w, z]^2}{2(bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]])} + \frac{bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]]}{2}\right)^2]$ ],
        {
           $\frac{br[u, v]^2 - br[w, z]^2}{2(bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]])} + \frac{bc[u, v][[1]] + bc[w, z][[1]]}{2}$ ,
           $\sqrt{\left(br[u, v]^2 - \left(\frac{br[u, v]^2 - br[w, z]^2}{2(bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]])} + \frac{bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]]}{2}\right)^2}\right)}$ , 1}, If[N[br[u, v]^2] >
          N[ $\left(\frac{br[u, v]^2 - br[w, z]^2}{2(bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]])} + \frac{bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]]}{2}\right)^2]$ ],
          {
             $\frac{br[u, v]^2 - br[w, z]^2}{2(bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]])} + \frac{bc[u, v][[1]] + bc[w, z][[1]]}{2}$ ,
             $\sqrt{\left(br[u, v]^2 - \left(\frac{br[u, v]^2 - br[w, z]^2}{2(bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]])} + \frac{bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]]}{2}\right)^2}\right)}$ ,
            {
               $\frac{br[u, v]^2 - br[w, z]^2}{2(bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]])} + \frac{bc[w, z][[1]] - bc[u, v][[1]]}{2}$ ,
              {
                2}, {0, 0, 0}]]], {0, 0, 0}]]], {0, 0, 0}]]]

```

```

(* Comando que gera o polígono hiperbólico *)
t :=

$$\frac{\text{Max}[\text{Table}[v[[i, 1]], \{i, 1, \text{Length}[v]\}] + \text{Min}[\text{Table}[v[[i, 1]], \{i, 1, \text{Length}[v]\}]]}{2}$$

polihip[v_] := {Graphics[{PointSize[0.02], Point /@ v,
  RGBColor[0, 0, 1], Text["Plano Hiperbólico", {t, -2}]}],
  Table[geod[v[[i]], v[[i + 1]]], {i, 1, Length[v] - 1}]}

Print[" O polígono dos vértices fornecidos "];
Show[{polihip[v], Graphics[{RGBColor[1, 0, 0],
  PointSize[0.02], Point[{Centro2[{v[[1]], v[[4]], v[[1]], v[[3]]}][[1]],
    Centro2[{v[[1]], v[[2]], v[[1]], v[[3]]}][[2]]}]}],
  AspectRatio -> Automatic, Axes -> {True, False}];

(* Lista dos vértices que definem os bissetores *)
m[j_, i_] := {v[[j]], v[[i + 1]]}
L1 := Partition[Partition[
  Flatten[Table[m[j, i], {j, 1, Length[v] - 1}, {i, j, (Length[v] - 1) - 1}], 2], 2]
Print["O número de bissetores do polígono é: ", Length[L1]]
Print["O número máximo possível de interseção dos bissetores é: ",

$$\frac{\text{Length}[L1] (\text{Length}[L1] - 1)}{2}$$
]

(* Variáveis utilizadas na próxima rotina *)
centro := {0, 0}
lista := Array[b, Length[L1]]
b[i_] := N[distancia[L1[[i]][[1]], L1[[i]][[2]]]]
raio := Max[100 * lista]
i1 := 0
i2 := 0
Centro[{u_, v_, w_, z_}] := {Centro2[{u, v, w, z}][[1]], Centro2[{u, v, w, z}][[2]]}

```

```

(*      Rotina que plota o gráfico dos candidatos, sendo o último o CMC      *)

For[j = 2, j < (Length[L1] + 1), For[i = j, i < (Length[L1] + 1),
  If[
    Centro2[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]][[3]] = 2
    ,
    If[
      N[distancia[Centro[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]], L1[[j - 1, 1]]] =
        N[distancia[Centro[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]], L1[[i, 1]]]
      &&
      N[distancia[L1[[j - 1, 1]], Centro[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]]] ≥
        Max[Table[N[distancia[v[[k]], Centro[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]]],
          {k, 1, Length[v] - 1}]]
      && N[distancia[L1[[j - 1, 1]], Centro[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]]] ≤ raio,
      Print[
        "Candidato ao Centro:  ", centro = N[Centro[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]],
        " de Raio:  ",
        raio = N[distancia[L1[[j - 1, 1]], Centro[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]]],
        " j =  ", i1 = j, "      i =  ", i2 = i, "  GRAFICO      ",
        Show[{
          polihip[v],
          Graphics[{
            PointSize[0.02],
            Point /@ {L1[[j - 1, 1]], L1[[j - 1, 2]], L1[[i, 1]],
              L1[[i, 2]], Centro[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]],
            circuloH[Centro[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]], N[
              distancia[L1[[j - 1, 1]], Centro[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}, 1]]
            ]
          ]
        ]
      ], Axes → {True, False}, AspectRatio → Automatic]
    ]
  ], Print["O círculo obtido não circunscreve ou tem raio maior que o
    anterior (SEGUNDO teste)", " {j,i} :  { ", j, " , ", i, " }"]

  , Print["Estes bissetores não intersectam-se em H! ",
    " {j,i} :  { ", j, " , ", i, " }"]
]
; i++
; j++;

```

```

Print["##### ATENÇÃO #####
#####", " Até este ponto o RAIO É: ", raio,
" Agora verificaremos se existe algum CMC tocando em apenas dois pontos!",
" #####
ATENÇÃO #####"];

For[j = 2, j < Length[v], For[i = j, i < Length[v],

If[N[r1[v[[j - 1]], v[[i]]]] > Max[
    Table[N[distancia[v[[k]], Centrol[v[[j - 1]], v[[i]]]], {k, 1, Length[v] - 1}]
    &&
    N[r1[v[[j - 1]], v[[i]]]] ≤ raio,
Print[

"Candidato ao Centro foi dado pela segunda rotina : ",
centro = N[Centrol[v[[j - 1]], v[[i]]], " de Raio: ",
raio = N[r1[v[[j - 1]], v[[i]]], i2 = j - 1,
Show[{
    polihip[v],
    Graphics[{
        PointSize[0.02],
        Point /@ {v[[j - 1]], v[[i]], Centrol[v[[j - 1]], v[[i]]],
        circuloH[Centrol[v[[j - 1]], v[[i]], N[r1[v[[j - 1]], v[[i]]]]
    }], Axes → {True, False}, AspectRatio → Automatic]
    ]
, Print[" Este ponto não é um círculo circunscrito
    ou não é menor que o atual CMC! j = ", j, " , i = ", i]
    ]

; i++]
; j++];

Print[
"##### ENCERRAMOS OS TESTES #####",
" ##### ABAIXO
SEGUE O RESULTADO #####"];

If[centro[[2]] ≠ 0,
Print[" O CMC tem centro: ", centro,
" Raio: ", raio, " - Veja o gráfico - ",
Show[{polihip[v], Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], circuloH[centro, raio],
    RGBColor[1, 0, 0], PointSize[0.02], Point[centro],
    Text["Centro", centro + {0, -0.3}], RGBColor[1, 0, 1],
    Line[{centro, L1[[i2, 1]]}, Text["Raio", L1[[i2, 1]] + {0.3, 0.2}]]}],
    Axes → {True, False}, AspectRatio → Automatic];],
Print["Este polígono não tem Círculo Circunscrito !"]]
```

Algoritmo do CMC - Euclidiano

(* Declarando os vértices do polígono :

Forneça na variável `vértices` abaixo os vértices do polígono desejado.

Observe que os vértices devem ser fornecidos de forma ordenada pelo caminhar sobre o perímetro do polígono iniciando em um vértice no sentido horário (ou anti-horário) até chegar ao seu antecessor nesta caminhada;

Abaixo apresento alguns exemplos:

```
{ {4,0}, {4,2}, {0,2}, {-2,1}, {-1,-1}, {0,-2}, {4,-2} }; →
Início-{4,0} Término-{4,-2};
{ {7,3}, {5,5}, {3,7}, {0,5}, {-2,3}, {-2,2}, {0,1}, {3,1} }; → Início-{7,3} Término-{3,1};
*)
```

```
vertices := {{6, 0}, {4, 1}, {2, 1.70}, {0, 2}, {-2, 1}, {-1, -1}, {0, -2}, {4, -1.5}, {5, -
v := Partition[Flatten[{vertices, vertices[[1]}], 2]
Print["O polígono tem ", Length[vertices],
" arestas e o conjunto dos vértices é: ", v]
```

(* Distancia Euclidiana *)

```
distancia[u_, v_] :=  $\sqrt{(u[[1]] - v[[1]])^2 + (u[[2]] - v[[2]])^2}$ 
```

(* Coeficientes da forma geral de uma reta*)

```
a[v_, w_] := -(w[[2]] - v[[2]])
```

```
b[v_, w_] := (w[[1]] - v[[1]])
```

```
c[v_, w_] := -(v[[1]] a[v, w] + v[[2]] b[v, w])
```

```
ortc[v_, w_, p_] := (p[[1]] b[v, w] - p[[2]] a[v, w])
```

```
reta[v_, w_, x_, y_] := a[v, w] x + b[v, w] y + c[v, w]
```

```
ortreta[v_, w_, p_, x_, y_] := -b[v, w] x + a[v, w] y + ortc[v, w, p]
```

(* Ponto de interseção de duas retas *)

```
ptintereta[u_, v_, w_, z_] := If[(a[u, v] b[w, z] - a[w, z] b[u, v]) ≠ 0,
```

$$\left\{ \frac{b[u, v] c[w, z] - b[w, z] c[u, v]}{a[u, v] b[w, z] - a[w, z] b[u, v]}, \frac{c[u, v] a[w, z] - c[w, z] a[u, v]}{a[u, v] b[w, z] - a[w, z] b[u, v]} \right\},$$

```
Print["Não possui ponto de interseção"]]
```

(* Bissetor de dois vértices que neste caso chamaremos de mediatriz *)

(* Este comando coincide com o comando "ortreta" acima *)

```
Biss1A[u_, v_] := v[[1]] - u[[1]]
```

```
Biss1B[u_, v_] := v[[2]] - u[[2]]
```

```
Biss1C[u_, v_] :=  $\frac{u[[1]]^2 + u[[2]]^2 - v[[1]]^2 - v[[2]]^2}{2}$ 
```

```
retabiss[u_, v_, x_, y_] := Biss1A[u, v] x + Biss1B[u, v] y + Biss1C[u, v]
```

```

(* Raio e o Centro do CMC quando toca em dois vértices *)
Centrol[u_, v_] := { $\frac{u[[1]] + v[[1]]}{2}$ ,  $\frac{u[[2]] + v[[2]]}{2}$ }
r1[u_, v_] := distancia[u, Centrol[u, v]]

(* Raio e o Centro do CMC quando toca em três vértices *)
Centro2[{u_, v_, w_, z_}] :=
If[(Biss1A[u, v] Biss1B[w, z] - Biss1A[w, z] Biss1B[u, v]) ≠ 0,
N[{(Biss1B[u, v] Biss1C[w, z] - Biss1B[w, z] Biss1C[u, v]) /
(Biss1A[u, v] Biss1B[w, z] - Biss1A[w, z] Biss1B[u, v]),
(Biss1C[u, v] Biss1A[w, z] - Biss1C[w, z] Biss1A[u, v]) /
(Biss1A[u, v] Biss1B[w, z] - Biss1A[w, z] Biss1B[u, v])}],
{"Não possui ponto de interseção", 0}]

(* Ponto de interseção de dois bissetores *)
ptinterBiss[{u_, v_, w_, z_}] :=
If[(Biss1A[u, v] Biss1B[w, z] - Biss1A[w, z] Biss1B[u, v]) ≠ 0,
{(Biss1B[u, v] Biss1C[w, z] - Biss1B[w, z] Biss1C[u, v]) /
(Biss1A[u, v] Biss1B[w, z] - Biss1A[w, z] Biss1B[u, v]),
(Biss1C[u, v] Biss1A[w, z] - Biss1C[w, z] Biss1A[u, v]) /
(Biss1A[u, v] Biss1B[w, z] - Biss1A[w, z] Biss1B[u, v])},
{Print["Não possui ponto de interseção"], 0}]

(* Definindo um polígono *)
PolEucl[v_] := Graphics[Line[v], AspectRatio → Automatic, Axes → True]
Show[PolEucl[v]]

(* Lista dos vértices que definem os bissetores *)
m[j_, i_] := {v[[j]], v[[i+1]]}
L1 := Partition[Partition[
Flatten[Table[m[j, i], {j, 1, Length[v] - 1}, {i, j, (Length[v] - 1) - 1}], 2], 2]
Print["O número de arestas do polígono é: ", Length[L1]]
Print["O número máximo possível de interseções das mediatrizes é : ",
 $\frac{\text{Length}[L1] (\text{Length}[L1] - 1)}{2}$ ]

(* Variáveis utilizadas na próxima rotina *)
centro := 0
lista := Array[b, Length[L1]]
b[i_] := N[distancia[L1[[i]][[1]], L1[[i]][[2]]]]
raio := 100 * Max[lista]
i1 := 0
i2 := 0

```

```

(* Rotina que plota o gráfico dos candidatos, sendo o último o CMC *)

For[j = 2, j < (Length[L1] + 1), For[i = j, i < (Length[L1] + 1),
  If[
    NumberQ[Centro2[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1]][[1]] == True
    ,
    If[
      N[distancia[Centro2[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1], L1[[j - 1, 1]]] =
        N[distancia[Centro2[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1], L1[[i, 1]]]
      &&
      distancia[L1[[j - 1, 1]], Centro2[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1]] ≥
        Max[Table[N[distancia[v[[k]], Centro2[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1]]],
          {k, 1, Length[v] - 1}]]
      &&
      N[distancia[L1[[j - 1, 1]], Centro2[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1]] ≤ raio,
      Print[
        "Candidato ao Centro: ", centro = N[Centro2[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1]],
        " de Raio: ",
        raio = N[distancia[L1[[j - 1, 1]], Centro2[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1]]],
        " j = ", i1 = j, " i = ", i2 = i, " GRAFICO " ,
        Show[{
          PolEucl[v],
          Graphics[{
            PointSize[0.02],
            Point /@ {L1[[j - 1, 1]], L1[[j - 1, 2]], L1[[i, 1]],
              L1[[i, 2]], Centro2[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1]],
            Circle[Centro2[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1], N[
              distancia[L1[[j - 1, 1]], Centro2[Flatten[{L1[[j - 1]], L1[[i]]}], 1]]
            ]]]
          ]],
          ], Axes → Automatic, AspectRatio → Automatic]
        ]
      ,
      Print["Ponto inválido pelo SEGUNDO teste", " {j,i} : { ", j, " , ", i, " }"]

      , Print["Estas mediatrizes não intersectam-se! ",
        " {j,i} : { ", j, " , ", i, " }"]
    ]
    ; i++; j++;
  ]

```

```

Print["##### ATENÇÃO #####
#####", " Até este ponto o RAIÃO É: ", raio,
" Agora verificaremos se existe algum CMC tocando em apenas dois pontos!",
" #####
ATENÇÃO #####"];

For[j = 2, j < Length[v], For[i = j, i < Length[v],
  If[r1[v[[j - 1]], v[[i]]] > Max[
    Table[N[distancia[v[[k]], Centrol[v[[j - 1]], v[[i]]]], {k, 1, Length[v] - 1}]
    && r1[v[[j - 1]], v[[i]]] ≤ raio,
  Print[

    "Candidato ao Centro foi dado pela segunda rotina : ",
    centro = N[Centrol[v[[j - 1]], v[[i]]], " de Raio: ",
    raio = N[r1[v[[j - 1]], v[[i]]], i2 = j - 1,
    Show[{
      PolEucl[v],
      Graphics[{
        PointSize[0.02],
        Point[/{v[[j - 1]], v[[i]], Centrol[v[[j - 1]], v[[i]]}],
        Circle[Centrol[v[[j - 1]], v[[i]], N[r1[v[[j - 1]], v[[i]]]]
      }]], Axes → Automatic, AspectRatio → Automatic]
    ]
    , Print["Este ponto não é um círculo circunscrito
      ou não é menor que o atual CMC! j = ", j, " , i = ", i]
    ]

    ; i++]
    ; j++];

Print[
  "##### ENCERRAMOS OS TESTES #####",
  " ##### ABAIXO
  SEGUE O RESULTADO #####"];

Print[" O CMC tem centro: ", centro, " Raio: ",
  raio, " # Veja o gráfico acima # ",
  Show[{PolEucl[v], Graphics[{RGBColor[0, 0, 1],
    Circle[centro, raio], RGBColor[1, 0, 0], PointSize[0.02], Point[centro],
    Text["Centro", centro + {0, -0.3}], RGBColor[1, 0, 1], Line[{centro, L1[[i2, 1]]}],
    Text["Raio", L1[[i2, 1]] + {0.3, 0.2}]]}], AspectRatio → Automatic];

```

Algoritmo de Keen

(* Algoritmo para expressar um polígono fundamental dependendo somente do gênero *)
 (* ELABORAÇÃO POLÍGONO KEEN MODELO DISCO DE POINCARÉ *)
 (* Vértices ordenados no sentido anti-horário *)

(* Comando que gera a transformação de Möbius correspondente a uma matriz *)

$$M[A_ , z_] := \frac{A[[1, 1]] (z[[1]] + i z[[2]]) + A[[1, 2]]}{A[[2, 1]] (z[[1]] + i z[[2]]) + A[[2, 2]]}$$

(* Pontos fixos de uma transformação a partir de sua matrix *)

ptfixo1[A_] :=

$$\left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{2 i \operatorname{Im}[N[A[[1, 1]]]] + \sqrt{-4 \operatorname{Im}[A[[1, 1]]]^2 + 4 A[[1, 2]] \operatorname{Conjugate}[A[[1, 2]]]}}{2 \operatorname{Conjugate}[A[[1, 2]]]} \right], \right. \\ \left. \operatorname{Im} \left[\frac{2 i \operatorname{Im}[N[A[[1, 1]]]] + \sqrt{-4 \operatorname{Im}[A[[1, 1]]]^2 + 4 A[[1, 2]] \operatorname{Conjugate}[A[[1, 2]]]}}{2 \operatorname{Conjugate}[A[[1, 2]]]} \right] \right\}$$

ptfixo2[A_] :=

$$\left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{2 i \operatorname{Im}[N[A[[1, 1]]]] - \sqrt{-4 \operatorname{Im}[A[[1, 1]]]^2 + 4 A[[1, 2]] \operatorname{Conjugate}[A[[1, 2]]]}}{2 \operatorname{Conjugate}[A[[1, 2]]]} \right], \right. \\ \left. \operatorname{Im} \left[\frac{2 i \operatorname{Im}[N[A[[1, 1]]]] - \sqrt{-4 \operatorname{Im}[A[[1, 1]]]^2 + 4 A[[1, 2]] \operatorname{Conjugate}[A[[1, 2]]]}}{2 \operatorname{Conjugate}[A[[1, 2]]]} \right] \right\}$$

(* Centro da geodésica que liga os pontos fixos de uma transformação hiperbólica *)

centro[{p_, q_}] :=

$$N[\text{Flatten}[\{x, y\} /. \text{Solve}[(2 p[[1]] x + 2 p[[2]] y = p[[1]]^2 + p[[2]]^2 + 1) \&\& \\ (2 q[[1]] x + 2 q[[2]] y = q[[1]]^2 + q[[2]]^2 + 1), \{x, y\}]]]$$

(* Ponto de interseção de duas geodésicas a partir de seus centros *)

$$\text{norma}[p_] := \sqrt{(p[[1]])^2 + (p[[2]])^2}$$

ptinter[{p_, q_}] := If[norma[{x, y}] /.

$$\text{Solve}[\{(2 p[[1]] x + 2 p[[2]] y = x^2 + y^2 + 1) \&\& (2 q[[1]] x + 2 q[[2]] y = x^2 + y^2 + 1)\}, \\ \{x, y\}][[1]] < 1, \{x, y\} /. \\$$

$$\text{Solve}[\{(2 p[[1]] x + 2 p[[2]] y = x^2 + y^2 + 1) \&\& (2 q[[1]] x + 2 q[[2]] y = x^2 + y^2 + 1)\}, \\ \{x, y\}][[1]], \{x, y\} /. \\$$

$$\text{Solve}[\{(2 p[[1]] x + 2 p[[2]] y = x^2 + y^2 + 1) \&\& (2 q[[1]] x + 2 q[[2]] y = x^2 + y^2 + 1)\}, \\ \{x, y\}][[2]]]$$

```

(* Definindo os vértices do polígono canônico *)
p0[g_] := ptinter[{centro[{ptfixo1[Inverse[α1[k, g]]], ptfixo2[Inverse[α1[k, g]]]}],
  centro[{ptfixo1[Inverse[β1[k, g]]], ptfixo2[Inverse[β1[k, g]]]}]}]

p0[g_] := Inverse[α1[k, g]].β1[k, g]
p1[g_] := Inverse[α1[k, g]]
p2[g_] := β1[k, g]
p3[g_] := β1[k, g].Inverse[α1[k, g]]

(* Abaixo descrevemos as colunas Ck=1,2,3,4 conforme apresentado no artigo *)
p4[j_, g_] [H_] := β[j, g].Inverse[α[j, g]].Inverse[β[j, g]].α[j, g].H
C4[g_] := ComposeList[Flatten[Table[{p4[j, g]}, {j, 2, g}], p0[g]]
C3[g_] := Table[{α[j, g].C4[g][[j - 1]]}, {j, 2, g}]
C2[g_] := Table[{Inverse[β[j, g]].α[j, g].C4[g][[j - 1]]}, {j, 2, g}]
C1[g_] := Table[{Inverse[α[j, g]].Inverse[β[j, g]].α[j, g].C4[g][[j - 1]]}, {j, 2, g}]

(* Descrevendo os Vértices do Polígono Canônico *)
v1[g_] := {Re[M[p0[g], p0[g]]], Im[M[p0[g], p0[g]]]}
v2[g_] := {Re[M[p2[g], p0[g]]], Im[M[p2[g], p0[g]]]}
v3[g_] := p0[g]
v4[g_] := {Re[M[p3[g], p0[g]]], Im[M[p3[g], p0[g]]]}
v5[g_] := {Re[M[p4[g], p0[g]]], Im[M[p4[g], p0[g]]]}
semiVertices[g_] :=
  Partition[Flatten[Table[{Re[M[Partition[Flatten[C1[g][[k - 1]]], 2], p0[g]]],
    Im[M[Partition[Flatten[C1[g][[k - 1]]], 2], p0[g]]],
    {Re[M[Partition[Flatten[C2[g][[k - 1]]], 2], p0[g]]],
    Im[M[Partition[Flatten[C2[g][[k - 1]]], 2], p0[g]]],
    {Re[M[Partition[Flatten[C3[g][[k - 1]]], 2], p0[g]]],
    Im[M[Partition[Flatten[C3[g][[k - 1]]], 2], p0[g]]],
    {Re[M[C4[g][[k]], p0[g]]], Im[M[C4[g][[k]], p0[g]]]}], {k, 2, g}], 2]
vertices[g_] := Partition[Flatten[{v1[g], v2[g], v3[g], v4[g], v5[g], semiVertices[g]}],
  2]

```

```

(* Ferramentas hiperbólicas necessária
para plotar o polígono no disco de Poincaré *)
(* O PROBLEMA DA GEODÉSICA ESTÁ RESOLVIDO ABAIXO - DEPOIS Deveremos verificar se
existe a necessidade dos comandos acima para outras etapas aqui descritas. *)

ce[p_, q_] := (((q[[1]]^2 + q[[2]]^2 + 1) * p[[2]] - (p[[1]]^2 + p[[2]]^2 + 1) * q[[2]]) /
(2 (q[[1]] p[[2]] - p[[1]] q[[2]])),
((p[[1]]^2 + p[[2]]^2 + 1) * q[[1]] - (q[[1]]^2 + q[[2]]^2 + 1) * p[[1]]) /
(2 (q[[1]] p[[2]] - p[[1]] q[[2]])))

raio[p_, q_] := Sqrt[ce[p, q][[1]]^2 + ce[p, q][[2]]^2 - 1]
p := {0.5, 0.4}
q := {-0.5, 0.4}
ag1[p_, q_] := ArcTan[p[[1]] - ce[p, q][[1]], (p[[2]] - ce[p, q][[2]])]
ag2[p_, q_] := ArcTan[q[[1]] - ce[p, q][[1]], (q[[2]] - ce[p, q][[2]])]
ang1[p_, q_] :=
If[ag1[p, q] < 0 && Abs[ag1[p, q] - ag2[p, q] + 2 π] < π, 2 π + ag1[p, q], ag1[p, q]]
ang2[p_, q_] := If[ag2[p, q] < 0 && Abs[ag1[p, q] - ag2[p, q] - 2 π] < π,
2 π + ag2[p, q], ag2[p, q]]
var[p_, q_] := {Min[{ang2[p, q], ang1[p, q]}, Max[{ang2[p, q], ang1[p, q]}]}
geodesica[p_, q_] := Circle[ce[p, q], raio[p, q], var[p, q]]

Hline[{P_, Q_}] := If[Det[{P, Q}] = 0, Line[{P, Q}], geodesica[P, Q]]

(* Função que define as linhas do bordo do polígono *)
poligonoH[v_] := Table[
Hline[{{v[[i, 1]], v[[i, 2]]}, {v[[i + 1, 1]], v[[i + 1, 2]]}}, {i, 1, Length[v] - 1}]

```

```
(* Definindo as matrizes do grupo fuchsiano que corresponde
a uma superfície compacta orientável de gênero g. Plotando a
região fundamental Ford que coincide com o domínio de Dirichlet *)
(* Acrescentarei aqui as matrizes dos cálculos que obtive para o
caso de genero g no modelo do disco de Poincaré. k representa
o número de funções de emparelhamento e g o gênero. *)


$$\theta[g\_]:= \frac{\pi}{g}$$



$$\alpha1[k\_ , g\_]:= \left\{ \left\{ \frac{1 + \cos\left[\frac{\theta[g]}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\theta[g]}{2}\right]} i e^{i \frac{\theta[g]}{2}}, -\sqrt{\frac{2 \cos\left[\frac{\theta[g]}{2}\right]}{1 - \cos\left[\frac{\theta[g]}{2}\right]}} i e^{i \frac{3\theta[g]}{4}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ -\sqrt{\frac{2 \cos\left[\frac{\theta[g]}{2}\right]}{1 - \cos\left[\frac{\theta[g]}{2}\right]}} \text{Conjugate}\left[i e^{i \frac{3\theta[g]}{4}}\right], \frac{1 + \cos\left[\frac{\theta[g]}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\theta[g]}{2}\right]} \text{Conjugate}\left[i e^{i \frac{\theta[g]}{2}}\right] \right\} \right\}$$



$$\beta1[k\_ , g\_]:= \left\{ \left\{ \alpha1[k, g][[1, 1]], \alpha1[k, g][[1, 2]] e^{i \frac{\theta[g]}{2}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \text{Conjugate}\left[\alpha1[k, g][[1, 2]] e^{i \frac{\theta[g]}{2}}\right], \text{Conjugate}\left[\alpha1[k, g][[1, 1]]\right] \right\} \right\}$$



$$\alpha[k\_ , g\_]:= \text{If}[k=1, \alpha1[k, g], \left\{ \left\{ \alpha1[k, g][[1, 1]], \alpha1[k, g][[1, 2]] e^{i 2 \theta[g] (k-1)} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \text{Conjugate}\left[\alpha1[k, g][[1, 2]] e^{i 2 \theta[g] (k-1)}\right], \text{Conjugate}\left[\alpha1[k, g][[1, 1]]\right] \right\} \right\}]$$



$$\beta[k\_ , g\_]:= \text{If}[k=1, \beta1[k, g], \left\{ \left\{ \alpha1[k, g][[1, 1]], \alpha1[k, g][[1, 2]] e^{i \frac{\theta[g]}{2} (4k-3)} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \text{Conjugate}\left[\alpha1[k, g][[1, 2]] e^{i \frac{\theta[g]}{2} (4k-3)}\right], \text{Conjugate}\left[\alpha1[k, g][[1, 1]]\right] \right\} \right\}]$$


(* Definindo os círculos isométricos *)
CentroRaioIsom $\alpha$ [k_, g_] :=

$$\left\{ \left\{ -\text{Re}\left[\frac{\alpha[k, g][[2, 2]]}{\alpha[k, g][[2, 1]]}\right], -\text{Im}\left[\frac{\alpha[k, g][[2, 2]]}{\alpha[k, g][[2, 1]]}\right] \right\}, \frac{1}{\text{Abs}[\alpha[k, g][[2, 1]]]} \right\}$$

InvCentroRaioIsom $\alpha$ [k_, g_] :=

$$\left\{ \left\{ \text{Re}\left[\frac{\alpha[k, g][[1, 1]]}{\alpha[k, g][[2, 1]]}\right], \text{Im}\left[\frac{\alpha[k, g][[1, 1]]}{\alpha[k, g][[2, 1]]}\right] \right\}, \frac{1}{\text{Abs}\left[\frac{\alpha[k, g][[2, 1]]}{\text{Det}[\alpha[k, g]]}\right]} \right\}$$

CentroRaioIsom $\beta$ [k_, g_] :=

$$\left\{ \left\{ -\text{Re}\left[\frac{\beta[k, g][[2, 2]]}{\beta[k, g][[2, 1]]}\right], -\text{Im}\left[\frac{\beta[k, g][[2, 2]]}{\beta[k, g][[2, 1]]}\right] \right\}, \frac{1}{\text{Abs}[\beta[k, g][[2, 1]]]} \right\}$$

InvCentroRaioIsom $\beta$ [k_, g_] :=

$$\left\{ \left\{ \text{Re}\left[\frac{\beta[k, g][[1, 1]]}{\beta[k, g][[2, 1]]}\right], \text{Im}\left[\frac{\beta[k, g][[1, 1]]}{\beta[k, g][[2, 1]]}\right] \right\}, \frac{1}{\text{Abs}\left[\frac{\beta[k, g][[2, 1]]}{\text{Det}[\beta[k, g]]}\right]} \right\}$$


(* Definindo a Região fundamental de Ford que coincide com a de Dirichlet *)
FordDirich[g_] := Flatten[
Table[{Text[" $\alpha_k$ ", CentroRaioIsom $\alpha$ [k, g][[1]]], Circle[CentroRaioIsom $\alpha$ [k, g][[1]],
CentroRaioIsom $\alpha$ [k, g][[2]]], Text[" $\alpha^{-1}_k$ ", InvCentroRaioIsom $\alpha$ [k, g][[1]]],
Circle[InvCentroRaioIsom $\alpha$ [k, g][[1]], InvCentroRaioIsom $\alpha$ [k, g][[2]]],
Text[" $\beta_k$ ", CentroRaioIsom $\beta$ [k, g][[1]]], Circle[CentroRaioIsom $\beta$ [k, g][[1]],
CentroRaioIsom $\beta$ [k, g][[2]]], Text[" $\beta^{-1}_k$ ", InvCentroRaioIsom $\beta$ [k, g][[1]]],
Circle[InvCentroRaioIsom $\beta$ [k, g][[1]], InvCentroRaioIsom $\beta$ [k, g][[2]]]}, {k, 1, g}]]
```

```

(* PLOTANDO - A região fundamental de Ford=
domínio de Dirichlet centrado na origem do disco *)
(* Comando que plota a região Ford para qualquer gênero g *)
Show[Graphics[{Circle[{0, 0}, 1], FordDirich[4]}],
      AspectRatio → Automatic, Axes → Automatic];

(* Um exemplo colorido da região Ford-Dirichlet *)
g = 4
Show[Graphics[
  {Circle[{0, 0}, 1], RGBColor[1, 0, 0], Text["Alfa 1", CentroRaioIsoma[1, g][[1]]],
    Circle[CentroRaioIsoma[1, g][[1]], CentroRaioIsoma[1, g][[2]]],
    Circle[InvCentroRaioIsoma[1, g][[1]], InvCentroRaioIsoma[1, g][[2]]],
    RGBColor[0, 0, 1], Text["Beta 1", CentroRaioIsomβ[1, g][[1]]],
    Circle[CentroRaioIsomβ[1, g][[1]], CentroRaioIsomβ[1, g][[2]]],
    Circle[InvCentroRaioIsomβ[1, g][[1]], InvCentroRaioIsomβ[1, g][[2]]],
    RGBColor[1, 0, 1], Text["Alfa 2", CentroRaioIsoma[2, g][[1]]],
    Circle[CentroRaioIsoma[2, g][[1]], CentroRaioIsoma[2, g][[2]]],
    Circle[InvCentroRaioIsoma[2, g][[1]], InvCentroRaioIsoma[2, g][[2]]],
    RGBColor[0, 1, 0], Text["Beta 2", CentroRaioIsomβ[2, g][[1]]],
    Circle[CentroRaioIsomβ[2, g][[1]], CentroRaioIsomβ[2, g][[2]]],
    Circle[InvCentroRaioIsomβ[2, g][[1]], InvCentroRaioIsomβ[2, g][[2]]]}],
      AspectRatio → Automatic, Axes → Automatic];

(* PLOTANDO UM EXEMPLO Keen - do grupo que calculamos para o modelo do disco *)
g = 2
Show[
  Graphics[{Circle[{0, 0}, 1], RGBColor[0, 0, 1], PointSize[0.02], Point /@ vertices[g],
    poligonoH[vertices[g]]}], AspectRatio → Automatic, Axes → Automatic];

```

Exemplos gerados pelos algoritmos CMIE e CMIH

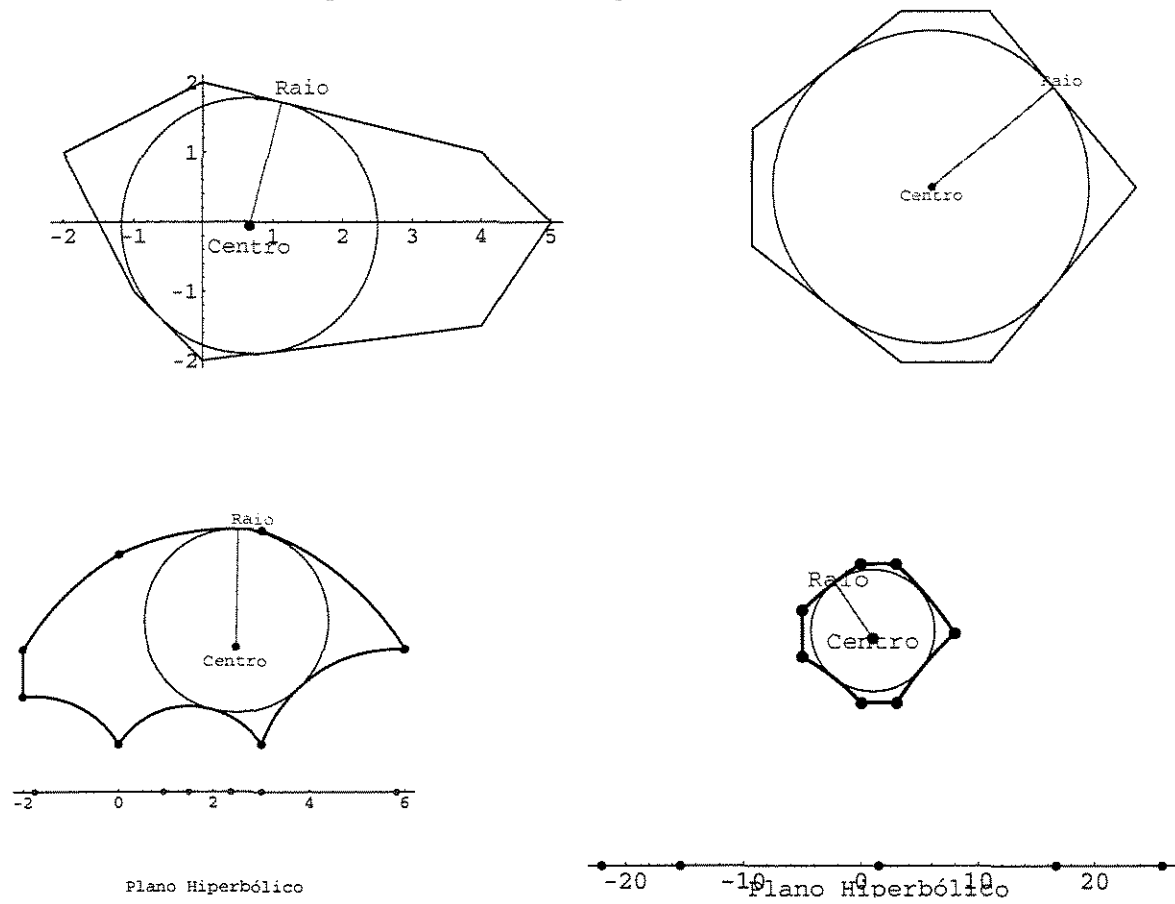


Figura A.6: Exemplos gerados pelos algoritmos CMIE e CMIH

Exemplos gerados pelos algoritmos CMCE e CMCH

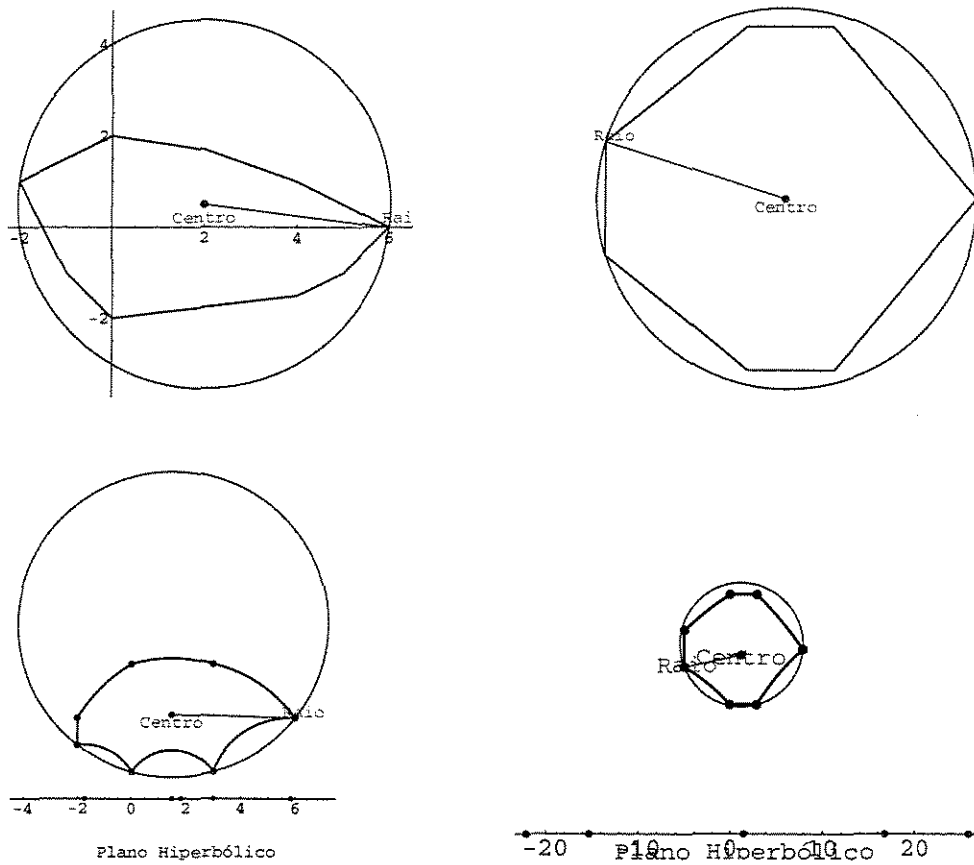


Figura A.7: Exemplos gerados pelos algoritmos CMCE e CMCH

Referências Bibliográficas

- [1] Aggarwal, Alok & Guibas, Leonidas J. & Saxe, James & Shor, Peter W. *A linear-time algorithm for computing the Voronoi diagram of a convex polygon*. Discrete & Computational Geometry, vol. 4, 591 – 604, 1989.
- [2] Agustini, Edson. *Constelações de sinais em espaços hiperbólicos*. Tese de doutorado, departamento de matemática, Imecc-Unicamp, 2002.
- [3] Bavard, Christophe. *Disques extrémaux et surfaces modulaires*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. V, n. 2, 191 – 202, 1996.
- [4] Beardon, Alan F. *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [5] Böröczky, K. *Packing of spheres in spaces of constant curvature*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., vol. 32, 243 – 261, 1978.
- [6] Benedetti, R. & Petronio, C. *Lectures on hyperbolic geometry*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [7] Carmo, Manfredo Perdigão. *Geometria riemanniana*. Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2a. edição, 1988.
- [8] Conway, John B. *Functions of one complex variable I*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [9] Conway, J.H. & Sloane, N.J. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer Verlag, 1988.
- [10] Costa, Sueli I. R. & Firer, Marcelo. *The Four-or-More Vertex Theorem*, em Real and Complex Singularities (J. Bruce, Editor), CRC Press Research Notes in Mathematics, vol. 412, 164 – 172, 2000.

- [11] Faria, Mercio Botelho. *Empacotamento de esferas em espaços hiperbólicos*. Dissertação de mestrado, departamento de matemática, Imecc-Unicamp, 2001.
- [12] Faria, M. B. & Souza, M. & Palazzo-Jr., R. & Firer, M. *Construção de constelações de sinais*. (Artigo em elaboração).
- [13] Firer, Marcelo. *Grupos Fuchsianos*. Imecc-Unicamp, Campinas, (livro em elaboração - versão 05/11/1999).
- [14] Folland, Gerald B. *Real Analysis - Modern techniques and their applications*. John Wiley, 1984.
- [15] Ford, Lester R. *Automorphic functions*. Chelsea Publishing Company, New York, 1929.
- [16] Gardiner, Frederick P. & Lakic, Nikola. *Quasiconformal Teichmüller Theory*. American Mathematical Society, 1999.
- [17] Gauss, C. F. *Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seber*. Göttingische gelehrte Anzeigen, Juli 9 [J. Reine Angew. Math. 20 (1840) 312-320; Werke, vol. 2 (Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1876) pp. 188-196]. 1831.
- [18] Goodman, Jacob E. & Rourke, Joseph O. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press LLC, New York, 1997.
- [19] Groemer, H. *Existenzsätze für Lagerungen im Euklidischen Raum*. Math. Zeitsch., vol. 81, 260 – 278, 1963.
- [20] Hales, T. C. *The status of the Kepler Conjecture*. Math. Intell., vol. 16 (3), 47 – 58, 1994.
- [21] Hales, T. C. M. - *Sphere Packing II*. Discrete Comput. Geom., vol. 18, 135 – 149, 1997.
- [22] Hsiang, W.-Y. *On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture*. Int. J. Math., vol. 4, 739 – 831, 1993.
- [23] Iwayoshi, Y. & Taniguchi, M. *An Introduction to Teichmüller Spaces*. Springer-Verlag, Tokyo, 1999.

- [24] Karkazis, J. & Karagiorgis, P. *A method to locate the maximum circle(s) inscribed in a polygon*. Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science (JORBEL), vol. 26, n. 3, 3 – 36, 1986.
- [25] Keen, Linda. *Canonical polygons for finitely generated fuchsian groups*. Acta Mathematica, vol. 115, 1 – 16, 1966.
- [26] Kinsey, L. Christine. *Topology of Surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [27] Lagrange, J. L. *Recherches d'arithmétique*. Nouv. Mem. Acad. Roy. Sci. Belles Lettres Berlin, 265 – 312. 1773. [Oeuvres, Vol. III (Gauthier-Villars, Paris, 1869) pp. 693 – 758].
- [28] Marshall, T. H. *Asymptotic volume formulae and hyperbolic ball packing*. Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica, 24, no. 1, 31 – 43, 1999 [J. London Math. Soc.].
- [29] MacWilliams, F.J & Sloane, N.J. *The Theory of Error-Correcting Codes*. Springer Verlag, 1977.
- [30] Munkres, James R. *Topology - A first course*. Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
- [31] Osserman, Robert. *The four-or-more vertex theorem*. Amer. Math. Monthly, vol. 92, 332 – 337, 1985.
- [32] Osserman, Robert. *Circumscribed circles*. Amer. Math. Monthly, vol. 98, 419–422, 1991.
- [33] Osterlé, J. *Densité Maximale des Empilements de Sphères en Dimension 3*. Séminaire Bourbaki, Astérisque **266**, 405-413, 2000.
- [34] Pach, János & Agarwal, Pankaj K. *Combinatorial Geometry*. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1995.
- [35] Ramsay, A. & Richtmeyer, Robert D. *Introduction to hyperbolic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [36] Ratcliffe, John G. *Foundations of hyperbolic manifolds*. Springer-Verlag, New York, 1994.

- [37] Rocha, Luiz Fernando Carvalho. *Introdução à geometria hiperbólica plana*. Impa, Rio de Janeiro, 1987.
- [38] Rogers, C. A. *Packing and covering*. Cambridge University Press, 1964.
- [39] Kellerhals, Ruth. *Ball packing in spaces of constant curvature and the simplicial density function*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, New York, vol. 494, 189 – 203, 1998.
- [40] Silva, Eduardo Brandani. *Constelações de sinais e análise de desempenho no plano hiperbólico*. Tese de doutorado, departamento de telemática, Feec-Unicamp, 2000.
- [41] Tóth, L. Fejes. *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1972.
- [42] Tóth, L. Fejes. *Regular Figures*. International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, Pergamon Press, Oxford, vol. 48, 1964.
- [43] Wills, J.M. Gruber, P.M. *Handbook of convex geometry*. Elsevier (Science Publishers), vol. A e B, (799 – 860), 1993.
- [44] Zong, Chuanming. *Sphere Packings*. Springer-Verlag, New York, 1999.

Índice Remissivo

- $Aut(\mathbb{C})$, 7
- $Aut(\mathbb{D}^2)$, 7
- $Aut(\mathbb{H}^2)$, 7
- $Aut(\hat{\mathbb{C}})$, 7
- Área do círculo hiperbólico, 33
- Ângulo diedral, 40
- Aplicação de recobrimento, 3
- Böröczky, 42
- Bavard, 43
- BCA - barreira candidata associada, 79
- CMC - círculo mínimo circunscrito, 92
- CMI - círculo máximo inscrito, 74
- Cobertura, 36
- Comprimento do círculo hiperbólico, 33
- Comprimento hiperbólico em $\mathbb{D}^2$, 27
- Comprimento hiperbólico em $\mathbb{H}^2$, 27
- Condições de normalização, 18
- Convexo, domínio
 - domínio, 36
- Coordenadas Fricke F_{12g-6} , 63
- Coordenadas Fricke F_{4g+2} , 49
- Coordenadas Fricke F_{4g} , 18
- Corolário Gauss-Bonnet, 32
- CR - círculo rolante, 75
- Densidade local, 40
- Densidade simplicial, 41
- Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$, 25
- Distância hiperbólica, 27
- Distância no disco de Poincaré, 28
- Distância no semi-plano Lobatchevsky, 28
- Domínio de Voronoi geral, 37
- Domínio de Voronoi-Dirichlet, 13, 37
- Eixo de uma transformação de Möbius, 10
- Empacotamento, 36
- Empacotamento reticulado, 37
- Espaço de teichmüller $\mathcal{T}(R)$, 16
- Espaço de teichmüller $\mathcal{T}_g$, 16
- Espaço Fricke, 17
- Espaço Fricke $\mathcal{F}_{12g-6}$, 63
- Espaço Fricke $\mathcal{F}_{4g+2}$, 49
- Espaço Fricke $\mathcal{F}_{4g}$, 19
- Fronteira de um domínio, 11
- Gênero, 2
- Geodésica, 36
- Geodésicas de $\mathbb{D}^2$, 26
- Geodésicas de $\mathbb{H}^2$, 26
- Grupos co-compactos, 13
- Implementação alg. CMC euclidiano, 132
- Implementação alg. CMC hiperbólico, 125
- Implementação alg. CMI euclidiano, 120
- Implementação alg. CMI hiperbólico, 111
- Inversão em esfera, 29
- Isometria, 28

Karagiorgis, xxiii, 73
Karkazis, xxiii, 73
Keen, 20

Ladrilhamento, 11
Lei do cosseno I, 31
Lei do cosseno II, 31
Lei do seno, 31

Modelo fuchsiano, 17
Modelo fuchsiano , 11

PBT - ponto base de tangência, 75
Plano de Lobatchevski $\mathbb{H}^2$, 25
Polígono canônico Fricke, 21
Ponto fixo atrator, 10
Ponto fixo repulsor, 10
Ponto piloto de tangência, 76

Simplexo, 41
Simplexo regular, 41
Superfície de Riemann, 2

Teorema de Gauss-Bonnet, 32
Teorema de Pitágoras, 32
Teorema de uniformização, 3
Toth, 44
Transformações de Möbius, 9

Variedade diferenciável, 1
Volume de uma bola hiperbólica, 42