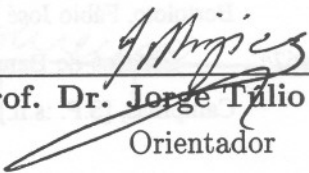


Álgebras de Banach de Funções Analíticas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Fábio José Bertoloto** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de fevereiro de 2005.



Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui.
Prof. Dra. Mary Lilian Lourenço.
Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos.
Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecário: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Bertoloto, Fábio José

B462e Espaços de Banach de funções analíticas / Fábio José Bertoloto --
Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientador : Jorge Túlio Mujica Ascui

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Banach, Espaços de. 2. Funções holomorfas. 3. Funções
analíticas. 4. Hardy, Espaços de. I. Ascui, Jorge Túlio Mujica. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Banach spaces of analytic functions.

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Banach, Spaces of. 2. Holomorphic functions.
3. Analytic functions. 4. Hardy, Spaces of.

Área de concentração: Análise funcional

Titulação: Mestre em matemática

Banca examinadora: 1. Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui (UNICAMP)
2. Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos (UNICAMP)
3. Prof. Dra. Mary Lilian Lourenço (USP-IME)

Data da defesa: 28/02/2005

**Dissertação de Mestrado defendida em 28 de Fevereiro de 2005 e aprovada pela
Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

J. Mujica

Prof (a). Dr (a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

M. L. Lourenço

Prof (a). Dr (a). MARY LILIAN LOURENÇO

M. Carvalho de Matos

Prof (a). Dr (a). MARIO CARVALHO DE MATOS

Agradecimentos

Quero agradecer a todos que me ajudaram durante estes anos de mestrado. Se não fosse pela força dada, eu não teria começado e muito menos terminado esta etapa.

Começo agradecendo Aquele que me colocou tudo o que tenho de bom em minha vida. Aquele que me dá alegria, a esperança, que sabe quando estou sentado e quando estou de pé. Conhece toda a minha vida e todo o meu ser. Me criou e desde minha inicial existência coopera constantemente para a minha felicidade. Este a quem agradeço, e muito, é Deus, Pai de Nosso Senhor Jesus Cristo. Por tudo isto e muito mais dirijo-me a Ele: "Pai, te agradeço, pela companhia constante, em cada segundo da minha vida, por toda ajuda concedida e pelo amor incondicional."

Vou agradecer agora por todas as pessoas que Deus colocou em meu caminho.

Agradeço a minha família: meus pais Arnaldo e Elisabet, minha irmã Marta, por todo o apoio e ajuda, desde muito antes de eu pensar em fazer um mestrado. Agradeço também meus avós, Therezinha e José, que contribuíram muito para a minha chegada até aqui.

Agradeço meu orientador, Jorge Mujica, por toda a paciência e pela grande disponibilidade, desde a primeira vez em que conversamos.

Como nem só de livros e teoremas vive um matemático, não posso deixar de agradecer ao companheirismo de meus amigos: Fábio Dadam, Viviane, Clécio Lopes, Rubão, Rinaldo, Andrielber, Dimas, Bibiana, Fabiano, João Eloir, Marcelo Veloso e tantos outros. Rinaldo e Clécio, se não fosse por eles eu estaria "lascado" na parte computacional. Destaco meus amigos de graduação Júlio e Bibiana, que me deram um ânimo indispensável para começar este mestrado.

Não poderia terminar sem antes agradecer uma pessoa que para mim hoje é muito especial: Regiane. Agradeço a ela por todos os momentos em que estive que comigo, pelo apoio, pela paciência e por toda a preocupação.

Por fim, agradeço a Fapesp pelo apoio financeiro.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é o estudo de certos espaços de Banach de funções analíticas no disco aberto unitário, conhecidos como espaços de Hardy.

Um outro objetivo é o estudo das propriedades básicas de álgebras de Banach, com especial ênfase na álgebra do disco e na álgebra das funções analíticas e limitadas no disco aberto unitário.

Abstract

The main objective of this work is the study of certain Banach spaces of analytic functions on the open unit disc, known as Hardy spaces.

Another objective is the study of the basic properties of Banach algebras, with special emphasis in the disc algebra and the algebra of bounded analytic functions in the open unit disc.

Sumário

Introdução	3
1 Preliminares	5
1.1 Notação	5
1.2 Tópicos em Teoria da Medida	5
1.3 Tópicos em Análise Funcional	14
1.4 Tópicos em Variável Complexa	19
2 Séries de Fourier	21
2.1 Médias de Cesaro	23
2.2 Caracterização das Séries de Fourier	31
3 Funções Analíticas no Disco Unitário	37
3.1 Os Núcleos de Cauchy e Poisson	39
3.2 Valores de Fronteira	44
3.3 A Integral de Poisson	52
3.4 Teorema de Fatou	59
3.4.1 Demonstração do Teorema de Fatou	65
3.4.2 Algumas Consequências do Teorema de Fatou	70
4 Álgebras de Banach	74
4.1 Elementos Invertíveis	76
4.2 Ideais e Homomorfismos	82
4.3 Espaços Quocientes e Álgebras Quocientes	83
4.4 Aplicações	85
4.5 Teorema da Maximalidade de Wermer	87
4.6 Caracterização de Ideais Fechados de $\mathcal{C}(X)$	91
5 Espaços $H^p(D)$	95
5.1 Funções Subharmônicas	95
5.2 Definindo os Espaços $H^p(D)$	97
5.3 O Teorema de F. e M. Riesz	98
5.3.1 Demonstração do Teorema de F. e M. Riesz	107

6	A Álgebra $H^\infty(D)$	108
6.1	Produtos Infinitos	108
6.2	Produtos de Blaschke	112
	Referências Bibliográficas	117

Introdução

Neste trabalho, temos como principal objetivo o estudo de certos espaços de Banach de funções analíticas no disco unitário, denominados espaços de Hardy $H^p(D)$ ($1 \leq p \leq \infty$) e as álgebras do disco $A(D)$.

Um teorema de existência de limites radiais mostra que cada $H^p(D)$ pode ser identificado com um subespaço de $L^p(C)$, o espaço das funções p -integráveis no círculo unitário.

Apresentamos também resultados básicos sobre álgebras de Banach, com especial ênfase na álgebra de funções contínuas $\mathcal{C}(X)$ e nas álgebras de funções analíticas $A(D)$ e $H^\infty(D)$.

O trabalho se divide em seis capítulos. A seguir, descrevemos os assuntos abordados em cada um destes.

No capítulo 1, apresentamos algumas definições e resultados relativos à teoria da medida, à Análise Funcional e à Variável complexa, que serão utilizados ao longo deste trabalho.

O capítulo 2, intitulado Séries de Fourier, apresenta alguns resultados da teoria de séries de Fourier funções integráveis segundo Lebesgue em $[-\pi, \pi]$, que serão utilizados no capítulo 3. Lembramos que uma série de Fourier pode não convergir e, caso convirja em um determinado ponto, pode não coincidir com o valor que f assume neste ponto. Na primeira seção apresentamos as médias de Cesaro, que como pode ser visto na seção seguinte, caracteriza, a partir de determinadas condições impostas sobre a mesmas, as séries de Fourier, no sentido de poder determinar a que classe de funções pode pertencer uma função que tenha uma série do tipo dada.

No capítulo 3, introduzimos os conceitos de Núcleo de Cauchy e Poisson. A partir deste último, definimos a integral de Poisson que pode ser de uma função ou medida. Utilizando de integrais de Poisson, definimos funções no disco unitário D e, analisamos a existência do limite destas funções quando tendemos os valores do domínio para um determinado ponto do círculo, obtendo os chamados valores de fronteira. Os valores de fronteira podem definir funções contínuas ou simplesmente integráveis no disco D . Destacamos dentro deste capítulo o *Teorema de Fatou* e algumas de suas consequências.

No capítulo 4, começamos definindo e dando alguns exemplos de álgebras de Banach. Damos destaque a álgebra das funções contínuas, em um espaço topológico compacto de Hausdorff X , sendo esta denotada por $\mathcal{C}(X)$. Apresentamos a *álgebra do disco* $A(D)$ e mostramos que esta constitui uma subálgebra de $\mathcal{C}(\overline{D})$, utilizando para isto de resultados de variável complexa, como o teorema de Morera, encontrado em [2]. Definimos na sequência, o espectro de um elemento $x \in A$. A partir de propriedades deste, demonstramos o teorema de *Gelfand-Mazur* que caracteriza as álgebras de Banach com elemento unidade e cujos elementos não-nulos são inversíveis, exibindo um isomorfismo entre álgebras deste tipo e o corpo complexo. Definimos

para cada elemento de uma álgebra de Banach A , o raio espectral e damos uma expressão para o mesmo. Apresentamos ainda os conceitos de ideal e de álgebra quociente. Demonstramos o *Teorema da Maximalidade de Wermer*, que afirma que dada uma subálgebra fechada S de $\mathcal{C}(C)$ e que contenha a álgebra $A(D)$, então $S = A(D)$ ou $S = \mathcal{C}(C)$. Por fim, apresentamos um teorema que relaciona conjuntos fechados não-vazios em um espaço topológico compacto X , com ideais fechados em $\mathcal{C}(X)$.

Iniciamos o capítulo 5 com a definição e algumas propriedades de funções subharmônicas, úteis para a definição dos espaços de Hardy $H^p(D)$. Por fim, demonstramos o teorema dos irmãos Frederick e Manuel Riesz, publicado em 1917, que nos permite identificar $H^1(D)$ com um subespaço de $L^1(C)$.

O capítulo 6, começa com alguns resultados sobre produtos infinitos o que possibilita definir determinados elementos do espaço de Hardy $H^\infty(D)$, os chamados *produtos de Blaschke*. Terminamos o capítulo com um teorema atribuído a Frederick Riesz, que relaciona determinadas funções não-nulas $f \in H(D)$ com produtos de Blaschke.

Capítulo 1

Preliminares

*Do Senhor é a terra e tudo o que nela contém,
A órbita terrestre e todos os que nela habitam.
Pois Ele mesmo a assentou sobre as águas do mar
E sobre as águas dos rios a consolidou.*
Salmo 23,1-2.

No que segue, estaremos apresentando definições e resultados necessários para uma melhor compreensão do conteúdo que virá posteriormente

1.1 Notação

Estaremos utilizando a seguinte notação:

$\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais.

$\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{R}$ o corpo dos números reais.

$\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos.

$Re(a)$ parte real do número complexo a .

$Im(a)$ parte imaginária do número complexo a .

$\mathcal{L}(A, B)$ conjunto das transformações lineares e contínuas entre os espaços vetoriais A e B .

1.2 Tópicos em Teoria da Medida

Seja X um conjunto. Começamos esta seção definindo σ -álgebra em X :

Definição 1.1. Uma coleção $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X é dita ser uma σ -álgebra em X se satisfazer as seguintes condições:

1. $X \in \mathcal{X}$;
2. Se $A \in \mathcal{X}$, então $A^c \in \mathcal{X}$, onde A^c é o complementar de A relativo a X .
3. Se $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e se $A_n \in \mathcal{X}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $A \in \mathcal{X}$.

Vejamos agora um exemplo simples de σ -álgebra:

Exemplo 1.2. Sejam $X = \mathbb{N}$ e $\mathcal{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X . Então $\mathcal{P}(X)$ é uma σ -álgebra em X .

Definição 1.3. Se $\mathcal{X}$ é uma σ -álgebra em X , então X é um *espaço mensurável*, e os membros de $\mathcal{X}$ são chamados conjuntos mensuráveis em X .

Definição 1.4. Se X é um espaço mensurável, Y é um espaço topológico, e f é uma função de X em Y , então f é dita ser mensurável se valer que $f^{-1}(V)$ é um conjunto mensurável em X para todo conjunto aberto V em Y .

Teorema 1.5. Se $\mathcal{F}$ é qualquer coleção de subconjuntos de X , então existe uma menor σ -álgebra $\mathcal{X}^*$ em X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}^*$. Esta $\mathcal{X}^*$ é algumas vezes chamada σ -álgebra gerada por $\mathcal{F}$.

Prova: Sugerimos [13], pg. 12. ■

Definição 1.6. Seja X um espaço topológico. Pelo teorema anterior, existe uma menor σ -álgebra $\mathcal{B}$ em X tal que todo o conjunto aberto pertence a $\mathcal{B}$. Os membros de $\mathcal{B}$ são chamados conjuntos de Borel de X e $\mathcal{B}$ é a σ -álgebra de Borel.

Definição 1.7. Uma *medida positiva* é uma função μ , definida em uma σ -álgebra $\mathcal{X}$, cuja imagem está contida em $[0, \infty]$ e é *aditiva enumerável*. Isto significa que se $\{A_n\}$, é uma coleção enumerável de conjunto disjuntos de $\mathcal{X}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Como exemplo de medida positiva podemos dar o seguinte:

Exemplo 1.8. Com a σ -álgebra $\mathcal{X}$ do exemplo (1.2), definimos para cada $A \in \mathcal{X}$ a seguinte medida positiva:

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{se } A \text{ for finito} \\ \infty & \text{se } A \text{ for infinito} \end{cases}$$

onde $|A|$ é o número de elementos que tem o conjunto A .

Definição 1.9. Um *espaço de medida* é um espaço mensurável que admite uma medida positiva definida na σ -álgebra de seus conjuntos mensuráveis.

Definição 1.10. Uma medida finita complexa é uma função aditiva enumerável de valores complexos definida em uma σ -álgebra.

Observação: Diremos que uma medida ou função mensurável é de Borel, quando a σ -álgebra em questão for a σ -álgebra de Borel. Diremos que uma medida positiva μ é finita em uma σ -álgebra $\mathcal{X}$ se $\mu(E) < \infty$ para todo $E \in \mathcal{X}$. Ainda, para completar esta observação, definimos o círculo unitário C do plano complexo

$$C = \{z : |z| = 1\}.$$

No capítulo 2), uma medida finita complexa definida em $[-\pi, \pi]$ será dita periódica, se puder ser identificada com uma medida finita complexa definida em C .

Seguem algumas propriedades de uma medida positiva μ :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$ se $A_1, \dots, A_n$ são subconjuntos disjuntos de $\mathcal{X}$;
3. $A \subset B$ implica que $\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A, B \in \mathcal{X}$.

Funções Simples

Definição 1.11. Uma função s em um espaço mensurável X , cuja imagem consiste de somente um número finito de pontos em $[0, \infty)$, será chamada *função simples*.

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são os valores distintos de uma função simples s , e se nós definimos o conjunto $A_n = \{x : s(x) = \alpha_n\}$, então

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}$$

onde $\mathcal{X}_{A_i}$ é a função característica de A_i .

É claro que s é mensurável se, e somente se, cada conjunto A_i é mensurável.

Teorema 1.12. Seja $f : X \rightarrow [0, \infty]$ mensurável. Então existe uma sequência de funções mensuráveis simples (s_n) em X tal que

- a) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$;
- b) $s_n(x) \rightarrow f(x)$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$.

Prova: Sugerimos [13], pg. 16. ■

Integração de Funções positivas

Nesta subseção, $\mathcal{X}$ será uma σ -álgebra em um conjunto X e μ será uma medida positiva em $\mathcal{X}$.

Definição 1.13. Se s é uma função mensurável simples em X , da forma

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \quad (1.1)$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são os valores distintos de s e se $E \in \mathcal{X}$, definimos

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) \quad (1.2)$$

Será tomado como convenção $0 \cdot \infty = 0$. Se $f : X \rightarrow [0, \infty]$ é mensurável, e $E \in \mathcal{X}$, nós definimos

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E s d\mu \quad (1.3)$$

onde o supremo é tomado com base no conjunto das funções mensuráveis simples s tais que $0 \leq s \leq f$.

Seguem algumas propriedades:

1. Se $0 \leq f \leq g$, então $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$;
2. Se $A \subset B$ e $f \geq 0$, então $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.
3. Se $f \geq 0$ e c é uma constante, $0 \leq c \leq \infty$, então

$$\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu$$

Proposição 1.14. Sejam f e g funções mensuráveis positivas em X . Então,

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 21. ■

Teorema 1.15. (Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue): Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis em X , e suponha que

- a) $0 \leq f_1(x) \leq \dots \leq \infty$ para todo $x \in X$,
- b) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$.

Então f é mensurável, e

$$\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 22. ■

Teorema 1.16. Se $f_n : X \longrightarrow [0, \infty]$ é mensurável, para $n = 1, 2, \dots$, e

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

para todo $x \in X$, então

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 23. ■

Teorema 1.17. Suponha $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ é mensurável, e

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathcal{X})$$

Então φ é uma medida em $\mathcal{X}$, e

$$\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu \quad (1.4)$$

para toda g mensurável em X com imagem em $[0, \infty]$.

Prova: Sugerimos [13], pg. 24. ■

Observação: A segunda asserção do teorema (1.17) é algumas vezes escrita na forma

$$d\varphi = f d\mu$$

não querendo dizer isto que exista alguma associação entre $d\varphi$ e $d\mu$, apenas que (1.4) está segura para toda $g \geq 0$ mensurável.

Integração de Funções Complexas

Como antes, μ será nesta seção uma medida positiva em um espaço mensurável X .

Definição 1.18. Se $0 < p < \infty$ e f é uma função mensurável complexa em X nós definimos $L^p(\mu)$, μ medida positiva, como o conjunto das funções que satisfazem

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Dizemos que $f \in L^p(\mu)$, o espaço das funções Lebesgue p -integráveis com respeito a μ . Nós denominamos $\|f\|_p$ como a L^p -norma de f . Em capítulos posteriores, com C o círculo unitário complexo, utilizaremos da notação $L^p(J)$, onde $J \subset \mathbb{R}$, $L^p[-\pi, \pi]$ ou $L^p(C)$ representando respectivamente as funções Lebesgue integráveis com respeito a medida m de Lebesgue (definida em [13], pg.53) em J , $[-\pi, \pi]$ e em C . Consideramos como σ -álgebra nestes casos, a σ -álgebra de Borel, levando em conta que a topologia adotada é a usual. Sempre que não nos referirmos a topologia, esta deve ser considerada como a topologia usual. Vejamos agora um rápido exemplo:

Exemplo 1.19. Com a medida definida no exemplo (1.8), temos que $f \in L^p(\mu)$ se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p < \infty$ ou ainda se, e somente se, $(f(n))_{n=1}^{\infty} \in l^p(\mathbb{C})$ sendo este, o espaço das sequências de números complexos $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfazem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty.$$

Teorema 1.20. (Desigualdade de Hölder): Se $f \in L^p(\mu)$ e $g \in L^q(\mu)$, com $p^{-1} + q^{-1} = 1$, onde $1 \leq p \leq \infty$, então $fg \in L^1(\mu)$ e vale que:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 67. ■

Como consequência deste teorema de Hölder, temos o seguinte teorema atribuído a Minkowski:

Teorema 1.21. (Minkowski): Se $f, g \in L^p(\mu)$, então $f + g \in L^p(\mu)$ e vale a relação:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 68. ■

Dada uma função mensurável $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$, definimos

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{e} \quad f^- = -\min\{f, 0\}$$

sendo f^+ e f^- respectivamente chamadas de parte positiva e parte negativa de f . Com isto, podemos dar a seguinte definição:

Definição 1.22. Se $f = u + iv$, onde u e v são funções reais mensuráveis em X , e se $f \in L^1(\mu)$, nós definimos

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i \int_E v^+ d\mu - i \int_E v^- d\mu$$

para todo conjunto mensurável E

Teorema 1.23. Suponha $f, g \in L^1(\mu)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Então $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ e

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 26. ■

Teorema 1.24. Se $f \in L^1(\mu)$, então

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 27. ■

Teorema 1.25. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue): Suponha que $\{f_n\}$ seja uma sequência de funções mensuráveis em X tais que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

existe para todo $x \in X$. Se existe uma função $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (n=1,2,3,\dots; x \in X),$$

então $f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Prova: Sugerimos [13], pg.27. ■

Definindo Conjuntos de Medida Nula

Definição 1.26. Seja P uma propriedade que um elemento $x \in X$, X conjunto, pode ou não ter. Se μ é uma medida em uma σ -álgebra $\mathcal{X}$ e se $E \in \mathcal{X}$, afirmar que P vale quase sempre em E ou μ -qs, significa que existe um $N \in \mathcal{X}$ tal que $\mu(N) = 0$, $N \subset E$ e P é válida para todo o ponto de $E - N$. Quando a medida em questão for a medida de Lebesgue m , diremos que a propriedade ocorre quase sempre.

Medidas Regulares de Borel

Definição 1.27. Seja X um espaço topológico. Uma medida de Borel é regular se todo conjunto de Borel E em $\mathcal{X}$ satisfaz as seguintes propriedades:

- a) $\mu(E) = \inf \{ \mu(V) : E \subset V, V \text{ aberto} \};$
- b) $\mu(E) = \sup \{ \mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto} \}.$

Variação Total de uma Medida Complexa

Como sempre, $\mathcal{X}$ é uma σ -álgebra sobre um conjunto X .

Definição 1.28. Sejam $E \in \mathcal{X}$ e $\{E_n\}$ uma coleção enumerável de elementos de uma partição de E , ou seja, $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $E = \bigcup E_n$. Seja μ uma medida complexa em $\mathcal{X}$. Definimos a variação total $|\mu|$ de μ como sendo:

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|$$

onde o supremo é obtido considerando-se todas as partições $\{E_n\}$ de E .

Notemos que $|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$. Se μ é uma medida positiva é claro que $|\mu| = \mu$.

Teorema 1.29. A variação total $|\mu|$ de uma medida complexa μ em $\mathcal{X}$ é uma medida positiva em $\mathcal{X}$.

Prova: Sugerimos [13], pg. 125. ■

Teorema 1.30. Se μ é uma medida complexa em X , então

$$|\mu|(X) < \infty.$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 126. ■

A partir deste teorema podemos afirmar que se μ é uma medida complexa, então a variação total $|\mu|$ é uma medida positiva finita.

O Teorema de Fubini

Antes de apresentarmos o teorema de Fubini, falaremos um pouco sobre medida produto, começando com algumas definições.

Definição 1.31. Dado um subconjunto E de um produto cartesiano $X \times Y$, definimos os seguintes subconjuntos de E :

$$E_x = \{y : (x, y) \in E\}$$

$$E^y = \{x : (x, y) \in E\}$$

Definição 1.32. Denotaremos um conjunto X com σ -álgebra $\mathcal{X}$ e com medida μ definida em $\mathcal{X}$ por $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e denominaremos este *espaço de medida*. Diremos que este espaço de medida é σ -finito, se dado $E \in \mathcal{X}$ então E é a união enumerável de conjuntos E_n com $\mu(E_n) < \infty$.

Teorema 1.33. Sejam $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{Y}, \lambda)$ espaços de medida σ -finito. Suponha $Q \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Se

$$\varphi(x) = \lambda(Q_x), \psi(y) = \mu(Q^y) \quad (1.5)$$

então para todo $x \in X$ e $y \in Y$, φ é $\mathcal{X}$ -mensurável, ψ é $\mathcal{Y}$ -mensurável, e

$$\int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\lambda \quad (1.6)$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 148. ■

Definição 1.34. Sejam $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{Y}, \lambda)$ como no teorema anterior. Se $Q \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, definimos

$$(\mu \times \lambda)(Q) = \int_X \lambda(Q_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y) d\lambda(y)$$

Teorema 1.35. (Fubini) Sejam $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{Y}, \lambda)$ espaços de medida σ -finito e a função $F \in L^1(\mu \times \lambda)$ dada por $F((x, y)) = f(x, y)$. Então vale:

$$\int_Y \left[\int_X f(x, y) d\mu(x) \right] d\lambda(y) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) d\lambda(y) \right] d\mu(x)$$

Prova: Sugerimos [1], pg. 119. ■

Teoremas de Radon-Nikodym e da Decomposição de Lesbegue

Definição 1.36. Uma medida λ em uma σ -álgebra $\mathcal{X}$ é *absolutamente contínua* com respeito a uma medida μ também em $\mathcal{X}$ se $E \in \mathcal{X}$ e $\mu(E) = 0$ implicam que $\lambda(E) = 0$. Neste caso, escrevemos $\lambda \ll \mu$.

Definição 1.37. Duas medidas μ, λ em $\mathcal{X}$ são mutuamente singulares se existem conjuntos disjuntos A e B em $\mathcal{X}$ tais que $X = A \cup B$ e $\lambda(A) = \mu(B) = 0$.

Teorema 1.38. (Radon-Nikodym) Sejam λ e μ medidas σ -finitas definidas em uma σ -álgebra $\mathcal{X}$ e suponha $\lambda \ll \mu$. Então existe uma função f , $f \in L^1(\mu)$, que é unicamente determinada μ -quase sempre, satisfazendo:

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu$$

para todo $E \in \sigma$ -álgebra.

Prova: Sugerimos [1], pg. 85. ■

Teorema 1.39. (decomposição de Lebesgue) Sejam λ e μ medidas σ -finitas definidas em uma σ -álgebra. Então existem uma medida λ_1 mutuamente singular com μ , e uma medida λ_2 que é absolutamente contínua com respeito a μ tal que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. As medidas λ_1 e λ_2 são unicamente determinadas.

Prova: Sugerimos [1], pg. 88. ■

1.3 Tópicos em Análise Funcional

Espaços de Banach

Seja X um espaço vetorial complexo ou real. Uma norma em X é uma função não-negativa real $\|\cdot\|$ tal que:

- (i) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Um espaço linear normado complexo é um espaço vetorial X junto com uma norma especificada em X .

Se X é um espaço normado que é completo na métrica ρ definida pela sua norma, então denominamos X espaço de Banach. No caso, para todo $x, y \in X$, temos:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

Exemplo 1.40. O espaço euclidiano X de dimensão n é um espaço de Banach.

Exemplo 1.41. Para $1 \leq p \leq \infty$ e para toda medida positiva μ , o espaço $L^p(\mu)$ da definição (1.18) é um espaço de Banach, com a norma $\|\cdot\|_p$.

Exemplo 1.42. Seja X um espaço topológico compacto de Hausdorff. Um exemplo importante de espaço de Banach, como veremos mais adiante, é o espaço $\mathcal{C}(X)$ das funções contínuas complexas definidas em X , com a norma do supremo dada por

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

sendo tal norma algumas vezes denominada uniforme, pois se $f_n \longrightarrow f$ nesta norma, $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em X .

Dual Topológico

Definição 1.43. Definimos o espaço vetorial X' a partir de um espaço de Banach X como sendo o conjunto dos funcionais lineares contínuos em X .

Lembramos que um funcional linear h é contínuo se, e só se, for limitado. Isto equivale a afirmar que existe $k > 0$ tal que:

$$|h(x)| \leq k\|x\| \quad (*)$$

para todo $x \in X$.

A norma de h como funcional é dada pelo menor valor de k tal que $(*)$ é satisfeita e pode ser expressa também por $\|h\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |h(x)|$.

Com esta norma X' torna-se um espaço de Banach, denominado *dual topológico* de X .

A respeito do exemplo (1.42), podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.44. (Representação de Riesz): Para cada funcional linear limitado em $\mathcal{C}(K)$, onde K é um espaço topológico compacto de Hausdorff, corresponde uma única medida complexa regular de Borel μ tal que

$$\phi(f) = \int_K f d\mu \quad (f \in \mathcal{C}(K))$$

e mais ainda, a partir desta relação, temos

$$\|\phi\| = |\mu|(K).$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 139. ■

Podemos então dar o seguinte exemplo:

Exemplo 1.45. Seja X um espaço topológico compacto de Hausdorff. O dual topológico de $\mathcal{C}(X)$ é o espaço das medidas complexas regulares de Borel em X .

Vejamos um teorema:

Teorema 1.46. Suponhamos $1 \leq p < \infty$, μ é uma medida finita em $\mathcal{X}$, uma σ -álgebra de um conjunto X , e ϕ é um funcional linear limitado em $L^p(\mu)$. Então existe uma única $g \in L^q(\mu)$, onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$, tal que

$$\phi(f) = \int_X f g d\mu$$

e mais ainda, temos ϕ e g relacionados da seguinte forma:

$$\|\phi\| = \|g\|_q$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 136. ■

Podemos afirmar deste teorema, que $L^q(\mu)$ é isometricamente isomorfo ao dual do espaço $L^p(\mu)$. De outra forma, $(L^p(\mu))' = L^q(\mu)$. Para o caso $p = \infty$ vale apenas $L^1(\mu) \subseteq (L^\infty(\mu))'$, ocorrendo a igualdade apenas em casos triviais.

Topologia Fraca*

Vamos definir agora para cada $g \in X'$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ e $\epsilon > 0$, o seguinte subconjunto de X' :

$$V(g, x_1, x_2, \dots, x_n, \epsilon) = \{f \in X' : \sup_{1 \leq k \leq n} |f(x_k) - g(x_k)| < \epsilon\}$$

Definição 1.47. (Topologia fraca*) Seja $G \subseteq X'$ um subconjunto não-vazio. Dizemos que G é fraca* aberto ou $\sigma(X', X)$ -aberto, se $\forall g \in G$, existem $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ e $\epsilon > 0$ tais que:

$$V(g, x_1, x_2, \dots, x_n, \epsilon) \subseteq G.$$

Não é difícil ver que o conjunto de todos os subconjuntos de X' que são fraca* abertos é uma topologia para X' . A notação $(X', \sigma(X', X))$ indicará que estaremos considerando em X' a topologia fraca estrela.

Teorema 1.48. (Alaoglu) Se X é um espaço normado, então $\overline{B}_{X'}$ é $\sigma(X', X)$ -compacta, onde:

$$\overline{B}_{X'} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

Prova: Sugerimos [3], pg. 424. ■

Definição 1.49. Diremos que um espaço métrico é sequencialmente compacto, se toda a sequência do mesmo, admitir subsequência convergente.

Teorema 1.50. Todo espaço métrico compacto é sequencialmente compacto.

Prova: Sugerimos [14], pg. 124. ■

Definição 1.51. Um espaço topológico X é *separável* se existe um subconjunto enumerável Y denso em X .

Definição 1.52. Um espaço topológico é dito *metrizável* com métrica d , se a topologia em X coincide com a topologia induzida por d .

Teorema 1.53. Seja X um espaço de Banach. Então a bola $(B_{X'}, \sigma(X', X))$ é metrizável se, e só se o espaço X é separável.

Prova: Sugerimos [3], pg. 425. ■

Convergência Uniforme da translação na L^p -norma

Decidimos aqui, fazer algumas demonstrações, devido ao raciocínio 'elegante' nelas apresentado. Aqui X denotará um espaço topológico.

Definição 1.54. Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$. O conjunto suporte, é o fecho do conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

Lema 1.55. Seja S a classe de todas as funções complexas, mensuráveis e simples em X tais que:

$$\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty \quad (s \in S)$$

Se $1 \leq p < \infty$, então S é denso em $L^p(\mu)$.

Prova: É imediato que $S \subset L^p(\mu)$. Suponha $f \geq 0$ (função que assume apenas valores reais não-negativos), $f \in L^p(d\mu)$. Seja agora $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções como apresentada no teorema (1.12). Como $0 \leq s_n \leq f$, $s_n \in L^p(d\mu)$ e, assim $s_n \in S$. Desde que $|f - s_n|^p \leq (2f)^p$, o teorema da Convergência Dominada mostra que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, $f \in \overline{S}$. Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, escreva $f = f^+ + f^-$, onde:

$$f^+(x) = \max \{f, 0\}$$

$$f^-(x) = -\min \{f, 0\}$$

e o resultado é obtido para toda f mensurável, lembrando que as funções f^+ e f^- como definidas são mensuráveis. Se $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, considere $Re f$ e $Im f$.

Definição 1.56. Definimos $C_c(X)$ como sendo o conjunto das funções contínuas em X cujo suporte é compacto.

Teorema 1.57. (Lusin): Sejam f uma função complexa mensurável em X , A um conjunto de medida μ finita, tal que $f(x) = 0$ se $x \notin A$ e $\epsilon > 0$. Então existe $g \in C_c(X)$ tal que:

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 56. ■

Lema 1.58. Para $1 \leq p < \infty$, $C_c(X)$ é denso em $L^p(\mu)$

Prova: Defina S como no lema (1.55). Se $s \in S$, dado $\epsilon > 0$ pelo teorema de Lusin, existe uma $g \in C_c(X)$, tal que $g(x) = s(x)$ exceto num conjunto de medida menor que ϵ , de forma que valha ainda $|g| \leq \|s\|_\infty$. Assim:

$$\begin{aligned} \|g - s\|_p &= \left(\int_X |g - s|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_J |g - s|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_J |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_J (\|s\|_\infty)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2\|s\|_\infty(\epsilon)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

onde $J = \{x : s(x) \neq g(x)\}$ com $\mu(J) < \epsilon$ é o conjunto que existe pelo teorema de Lusin.

Como o número ϵ acima é arbitrário, podemos escrever:

$$\|g - s\|_p < \epsilon$$

Pelo lema (1.55), como S é denso em $L^p(\mu)$, completamos a prova. ■

Teorema 1.59. Para qualquer função f que está em $L^p(\mathbb{R})$, dado $y \in \mathbb{R}$, seja f_y a translação de f definida por:

$$f_y(x) = f(x - y)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $1 \leq p < \infty$ e se $f \in L^p(\mathbb{R})$, a função:

$$y \rightarrow f_y$$

é uma função uniformemente contínua de $\mathbb{R}$ em $L^p(\mathbb{R})$.

Prova: Fixe $\epsilon > 0$. Desde que $f \in L^p(\mathbb{R})$, pelo lema (1.58) existe uma função $g \in C_c(X)$ que por ter suporte compacto, este está contido em algum intervalo da forma $I = [-A, A]$, $A > 0$, tal que:

$$\|f - g\|_p < \epsilon \quad (1.7)$$

Pelo fato de I ser compacto e g ser contínua, podemos afirmar que g é uniformemente contínua. Isto implica que existe um $\delta \in (0, A)$ tal que para $|s - t| < \delta$ vale:

$$|g(s) - g(t)| \leq (3A)^{-\frac{1}{p}} \epsilon \quad (1.8)$$

e portanto,

$$\|g_s - g_t\|_p^p = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x - s) - g(x - t)|^p dx < (3A)^{-1} \epsilon^p (2A + \delta) < \epsilon^p \quad (1.9)$$

sendo a penúltima desigualdade acima justificada por (1.8) e pelo fato de $2A + \delta$ ser maior que o comprimento do maior intervalo I tal que $|g(x - s) - g(x - t)| \neq 0$ com $x \in A$.

Já a última desigualdade, vem de $\delta \in (0, A)$.

Como $\|f\|_p = \|f_t\|_p$, segue que:

$$\begin{aligned} \|f_s - f_t\|_p &\leq \|f_s - g_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|g_t - f_t\|_p \\ &= \|(f - g)_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|(g - f)_t\|_p \end{aligned}$$

daí decorre de (1.7) e (1.9) que:

$$\|f_s - f_t\|_p < 3\epsilon$$

e, portanto, a função translação é uniformemente contínua em L^p . ■

Teoremas de Hahn-Banach e Banach-Steinhaus

Teorema 1.60. (Hahn-Banach): Se M é um subespaço de um espaço normado X e se f é um funcional linear limitado em M , então f pode ser estendida para um funcional linear limitado F em X tal que $\|F\| = \|f\|$,

Prova: Sugerimos [13], pg. 111. ■

O próximo corolário que segue, é um resultado que utilizaremos em capítulos posteriores:

Corolário 1. Se X é um espaço vetorial normado e se $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, então existe um funcional linear limitado f em X , de norma 1, tal que $f(x_0) = \|x_0\|$.

Prova: Sugerimos [13], pg. 114. ■

Teorema 1.61. (Banach-Steinhaus): Sejam E e F espaços normados, com E completo, e seja $\Gamma \subset \mathcal{L}(E, F)$. Se $\sup\{\|Tx\| : T \in \Gamma\} < \infty$ para cada $x \in E$, então

$$\sup\{\|T\| : T \in \Gamma\} < \infty$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 103. ■

1.4 Tópicos em Variável Complexa

Começemos com a definição de função analítica.

Definição 1.62. Suponha que f é uma função de valores complexos definida em D . Se a derivada

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe para todo $z_0 \in D$, então diremos que f é analítica (holomorfa) em D . Denotamos o espaço das funções analíticas em D por $H(D)$.

Mais resultados sobre funções analíticas apresentaremos no capítulo 3).

Definição 1.63. Diremos que um subconjunto Ω do plano complexo é uma região se este conjunto for não-vazio, aberto e conexo.

Teorema 1.64. (Morera): Seja G uma região e seja $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua tal que $\int_T f = 0$ para toda a região triangular T em G . Então f é analítica em G .

Prova: Sugerimos [2], pg. 86. ■

Teorema 1.65. (Liouville): Seja f uma função analítica de valores complexos definida em todo o plano $\mathbb{C}$. Então f é constante.

Prova: Sugerimos [2], pg. 77. ■

Capítulo 2

Séries de Fourier

Neste capítulo, trabalharemos com os coeficientes de Fourier de uma dada função $f \in L^1[-\pi, \pi]$ (função Lebesgue-integrável no intervalo $[-\pi, \pi]$). A partir destes coeficientes, definiremos as chamadas médias de Cesaro da série de Fourier de f , sobre as quais colocaremos condições necessárias e suficientes para que f pertença a uma determinada classe de funções. O mesmo faremos para medidas complexas finitas definidas em $[-\pi, \pi]$.

Definição 2.1. Se $f \in L^1[-\pi, \pi]$, então, para $n \in \mathbb{Z}$, os números complexos:

$$c_n = c_n f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

são denominados coeficientes de Fourier de f .

Diremos que c_n é o n -ésimo coeficiente de Fourier de f e que a série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

é a série de Fourier de f .

Escrevemos:

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Notemos que usamos $\sim$ e não $=$. Isto porque uma série de Fourier pode não convergir e, muito menos, convergir para $f(x)$ para algum ou todos os valores de x . Vejamos um exemplo com a seguinte função dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 & (-\pi \leq x < 0), \\ f(x) &= 1 & (0 \leq x \leq \pi). \end{aligned}$$

Então, os coeficientes de Fourier de f são dados, para cada $n \in \mathbb{Z}$ por:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-i) \sin(nx) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (-i) \sin(nx) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx + \left(\frac{-i}{2} \right) \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \\
&= \frac{a_n}{2} - \frac{i}{2} b_n
\end{aligned}$$

onde $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx$ e $b_n = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi}$ e, temos que $a_0 = 1$ e $a_n = 0$ ($n \neq 0, n \in \mathbb{Z}$) além de $b_n = 0$ para $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ e $b_n = 2/n\pi$ para $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Segue portanto, que:

$$f \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right]$$

e observemos que em $x = 0$ a soma da série de Fourier de f tem valor $1/2$ que é diferente de $f(0)$.

Apresentaremos agora uma nova expressão, para a série de Fourier de uma função $f \in L^1[-\pi, \pi]$. Começemos com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right) e^{inx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-i) \sin(nx) dx \right) (\cos(nx) + i \sin(nx))
\end{aligned}$$

e definindo, para cada $n \in \mathbb{Z}$, os números:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

a expressão acima fica reduzida para:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + (-i) \frac{b_n}{2} \right) (\cos(nx) + i \sin(nx)) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2} \cos(nx) + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2} \sin(nx) - \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{2} \cos(nx) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{2} \sin(nx)
\end{aligned}$$

temos então quatro expressões de soma; utilizando de $a_n = a_{-n}$, $b_n = -b_{-n}$, $\text{sen}(-nx) = -\text{sen}(nx)$ e $\cos(-nx) = \cos(nx)$, resumimos estas quatro expressões para:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(nx)$$

e quando expressa desta forma, dizemos que os elementos a_n são os coeficientes de Fourier de cosseno e que os elementos b_n são os coeficientes de Fourier de seno da função f .

Apresentaremos na seção que segue, as médias de Cesaro para uma determinada série de Fourier de uma função $f \in L^1[-\pi, \pi]$, bem como de medidas finitas definidas em $[-\pi, \pi]$.

2.1 Médias de Cesaro

A n -ésima média de Cesaro da série de Fourier de uma função $f \in L^1[-\pi, \pi]$ é a média aritmética:

$$\sigma_n = \sigma_n f = \frac{1}{n}(s_0 + \dots + s_{n-1})$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $s_n(x) = s_n f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

Agora temos:

$$s_n f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} dt$$

Assim,

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) k_n(x-t) dt \quad (2.1)$$

onde $k_n(x)$ é a n -ésima média de Cesaro da série $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$, ou seja, $k_n(x) = \frac{1}{n}(t_0(x) + \dots + t_{n-1}(x))$, sendo $t_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$.

Façamos agora alguns cálculos:

$$(n+1)k_{n+1}(x) - nk_n(x) = t_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^n e^{ikx} + \sum_{k=1}^n e^{-ikx}$$

Notemos que $\sum_{k=0}^n e^{ikx}$ e $\sum_{k=1}^n e^{-ikx}$ são séries geométricas de razão respectivamente e^{ix} e e^{-ix} . Utilizando da expressão para a soma de progressões geométricas temos que:

$$(n+1)k_{n+1}(x) - nk_n(x) = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} + \frac{1 - e^{-i(n+1)x}}{1 - e^{-ix}} - 1$$

Fazendo-se agora algumas contas e lembrando que $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, nós escrevemos:

$$(n+1)k_{n+1}(x) - nk_n(x) = \frac{\cos(nx) - \cos((n+1)x)}{1 - \cos(x)} \quad (*)$$

Sabemos pela definição da família $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que $k_1(x) = 1$. Agora utilizando do obtido em (*), podemos ver que:

$$2k_2(x) - k_1(x) = \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{1 - \cos(x)} \Rightarrow k_2(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos(2x)}{1 - \cos(x)} \right)$$

Admitamos agora, por hipótese de indução que $k_j(x) = \frac{1}{j} \left[\frac{1 - \cos(jx)}{1 - \cos(x)} \right]$, para algum $j \in \mathbb{N}$.

Agora de (*) podemos escrever que:

$$(j+1)k_{j+1}(x) - \left[\frac{1 - \cos(jx)}{1 - \cos(x)} \right] = \frac{\cos(jx) - \cos((j+1)x)}{1 - \cos(x)}$$

disto resulta:

$$k_{j+1}(x) = \frac{1}{j+1} \left[\frac{1 - \cos((j+1)x)}{1 - \cos(x)} \right]$$

Logo provamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$k_n(x) = \frac{1}{n} \left[\frac{1 - \cos(nx)}{1 - \cos(x)} \right]$$

Utilizando da identidade geométrica:

$$\cos(nx) = \cos^2\left(\frac{n}{2}x\right) - \sin^2\left(\frac{n}{2}x\right)$$

nós podemos reescrever cada k_n da seguinte forma:

$$k_n(x) = \frac{1}{n} \left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \right]^2 \quad (2.2)$$

Esta família de funções $\{k_n\}$ é chamada de *Núcleo de Fejer*. Verifiquemos agora que os elementos do Núcleo de Fejer satisfazem as seguintes três propriedades:

1. $k_n \geq 0$;

$$2. \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(x) dx = 1;$$

3. Se I é um intervalo aberto qualquer em torno de $x = 0$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \notin I} |k_n(x)| = 0. \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

Prova: O item 1) segue diretamente da relação (2.2) obtida para cada k_n . O item 2) vem do fato de que $\sigma_n f(x)$ da função constante $\mathbf{1}(x) = 1$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$ valer sempre 1 e de:

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) k_n(x-t) dt$$

para toda função $f \in L^1[-\pi, \pi]$, o que inclui a função constante $\mathbf{1}(x) = 1$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

Agora falta verificar o último item. Seja $0 < \delta < \pi$ e $\pi \geq |x| \geq \delta$. Vale então que:

$$(\operatorname{sen}(\frac{1}{2}x))^2 \geq (\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\delta))^2$$

Da equação (2.2) e desta última desigualdade, como $|\operatorname{sen}(\frac{n}{2})|^2 \leq 1$, resulta:

$$|k_n(x)| \leq \frac{1}{n(\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\delta))^2}$$

mostrando portanto, o item 3).

Uma sequência de funções Lebesgue integráveis que têm estas três condições, como é o caso das funções que constituem o núcleo de Fejer, é denominada *identidade aproximada para $L^1[-\pi, \pi]$* .

Nos dois teoremas que seguem, mostraremos que se f pertence a uma determinada classe de funções, então sua respectiva sequência de médias de Cesaro convergirá para f em alguma topologia.

Teorema 2.2. Se $f \in L^p[-\pi, \pi]$ ($1 \leq p < \infty$), então $\sigma_n f \rightarrow f$ em $L^p[-\pi, \pi]$. Se $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ e $f(-\pi) = f(\pi)$, então $\sigma_n f \rightarrow f$ uniformemente em $[-\pi, \pi]$.

Prova: Mostramos no início desta seção que:

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) k_n(x-t) dt$$

onde k_n é a n -ésima média de Cesaro da série $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$.

Se estendermos f para uma função, que também indicaremos por f , definida agora em toda a reta real e com período 2π podemos reescrever $\sigma_n f$, a partir da mudança de variável $t \rightarrow x - t$, como:

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) k_n(t) dt$$

e do fato de $\int_{-\pi}^{\pi} k_n dt = 1$, vem:

$$\sigma_n f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] k_n(t) dt \quad (2.3)$$

Se tomarmos um número real $\pi \geq \delta > 0$, podemos decompor a integral em (2.3) na soma de outras duas como segue:

$$\sigma_n f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x-t) - f(x)] k_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq \delta} [f(x-t) - f(x)] k_n(t) dt$$

e agora como $\int_{-\delta}^{\delta} k_n(t) dt \leq 1$, se $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, então f é limitada quando restrita ao intervalo $[-\pi, \pi]$ e segue que:

$$|\sigma_n f(x) - f(x)| \leq \sup_{-\delta < t < \delta} |f(x-t) - f(x)| + 2\|f\|_{\infty} \sup_{|t| \geq \delta} k_n(t)$$

Ainda pelo fato de f ser contínua, como $[-\pi, \pi]$ é compacto, temos que f é uniformemente contínua. Daí, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|t| < \delta$:

$$|f(x-t) - f(x)| < \epsilon$$

e pela propriedade 3) da família $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \geq \delta} k_n(t) = 0$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n f(x) = f(x)$$

sendo esta convergência uniforme.

Agora assumiremos que $f \in L^p[-\pi, \pi]$ num caso geral. Queremos estimar $\|\sigma_n f - f\|_p$. Seja $g \in L^q$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Assim, a partir equação (2.3), temos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_n f(x) - f(x)] g(x) dx = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] g(x) k_n(t) dt dx$$

Assim, utilizando do teorema de Fubini, podemos escrever:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_n f(x) - f(x)] g(x) dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] g(x) dx \right| k_n(t) dt \quad (2.4)$$

Utilizando da desigualdade de Hölder em (2.4), para a integral que tem x como variável, obtemos:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_n f(x) - f(x)] g(x) dx \right| \leq \|g\|_q \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(x-t) - f(x)\|_p k_n(t) dt$$

para toda $g \in L^q[-\pi, \pi]$.

Como consequência do teorema de Hahn-Banach, podemos tomar $g \in L^q[-\pi, \pi]$ tal que $\|g\|_q = 1$ e

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_n f(x) - f(x)] g(x) dx = \|\sigma_n f - f\|_p$$

Portanto,

$$\|\sigma_n f - f\|_p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(x-t) - f(x)\|_p k_n(t) dt$$

Agora se $\delta > 0$ escrevemos de forma semelhante ao que já fizemos nesta demonstração:

$$\begin{aligned} \|\sigma_n f - f\|_p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \|f_t - f\|_p k_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq \delta} \|f_t - f\|_p k_n(t) dt \\ &\leq \sup_{-\delta < t < \delta} \|f_t - f\|_p + 2\|f\|_p \sup_{|t| \geq \delta} k_n(t) \end{aligned}$$

onde $f_t(x) = f(x-t)$ e $\sup_{-\delta < t < \delta} \|f_t - f\|_p$ existe para $\delta > 0$ pequeno o suficiente, o que é justificado pelo teorema (1.59).

Do fato de:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \geq \delta} k_n(t) = 0$$

e também pelo teorema (1.59) resulta o desejado, ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n f - f\|_p = 0$$

e assim concluímos a demonstração ■.

Teorema 2.3. Se $f \in L^\infty[-\pi, \pi] = L^\infty$, então $\sigma_n f \longrightarrow f$ na topologia $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Prova: Para mostrar que a sequência $\sigma_n f$ converge para f na topologia $\sigma(L^\infty, L^1)$, basta mostrarmos que para cada $g \in L^1$ vale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n f(x) g(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

Analisemos então este fato. Utilizando da equação (2.3) e o teorema de Fubini temos:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_n f(x) - f(x)] g(x) dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] g(x) dx \right| k_n(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)]g(x)dx \right| k_n(t)dt + \int_{|t| \geq \delta} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)]g(x)dx \right| k_n(t)dt \right) \\
&\leq \sup_{-\delta < t < \delta} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)]g(x)dx \right| + \sup_{\|t\| \geq \delta} k_n(t)(2\|f\|_{\infty})\|g\|_1
\end{aligned}$$

Utilizando agora do teorema de Hahn-Banach obtemos com $\|g\|_1 = 1$ que:

$$\|\sigma_n f - f\|_1 \leq \sup_{-\delta < t < \delta} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)]g(x)dx \right| + \sup_{\|t\| \geq \delta} k_n(t)(2\|f\|_{\infty})$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|t\| \geq \delta} k_n(t)(2\|f\|_{\infty}) = 0$ basta mostrar que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)]g(x)dx = 0 \quad (2.5)$$

ou, equivalentemente, mostrar (2.5) é mesmo que provar que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(y+t) - g(y)]dy = 0 \quad (2.6)$$

para ver isto quebramos a integral em (2.5) em duas parcelas da seguinte forma:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

e fazemos a mudança de variável em cada caso, considerando na primeira parcela f e g como funções estendidas na reta real de período 2π .

Para justificar o resultado do limite apresentado em (2.6), basta lembrarmos que f é limitada pois, $f \in L^{\infty}[-\pi, \pi]$ e que $g \in L^1[-\pi, \pi]$, sendo portanto a função $t \mapsto g_t$ onde $g_t(x) = g(x+t)$, uniformemente contínua em $L^1[-\pi, \pi]$, o que é justificado pelo teorema (1.59) do primeiro capítulo.

Com isto tudo, concluímos o resultado. ■

Este último teorema tem um análogo para medidas em geral, como veremos a seguir.

Definição 2.4. Se μ é uma medida finita complexa de Borel regular em $[-\pi, \pi]$, nós podemos definir os coeficientes de Fourier de μ da seguinte maneira:

$$c_n = c_n \mu = \int_{[-\pi, \pi]} e^{-int} d\mu(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} d\mu(t)$$

e a partir destes coeficientes podemos definir, com $t \in [-\pi, \pi]$, a série de Fourier associada:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

Tais coeficientes são geralmente denominados *coeficientes de Fourier-Stieljes* da medida μ .

Temos ainda para todo $x \in [-\pi, \pi]$ que:

$$s_n(x) = s_n\mu(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} d\mu(t)$$

e, portanto, a n -ésima média de Cesaro da medida μ é dada por:

$$\sigma_n(x) = \sigma_n\mu(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k_n(x-t) d\mu(t) \quad (2.7)$$

onde k_n é a n -ésima média de Cesaro da série $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$ como vimos na equação (2.1).

Teorema 2.5. Seja μ uma medida finita complexa de Borel regular e periódica no intervalo $[-\pi, \pi]$. Então $\frac{1}{2\pi} \sigma_n \mu dx \longrightarrow \mu$ na topologia fraca*, ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sigma_n \mu(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\mu(x)$$

para toda $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ com $f(-\pi) = f(\pi)$.

Lembremos que o dual de $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ é o espaço das medidas complexas de Borel regulares em $[-\pi, \pi]$, como citado no exemplo (1.45).

Prova: Pela equação (2.7) temos que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sigma_n \mu(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) k_n(x-t) dx \right] d\mu(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n f(t) d\mu(t)$$

Pelo teorema (2.2), sendo f contínua e de período 2π , valendo portanto, $f(-\pi) = f(\pi)$, obtemos que $\sigma_n f \longrightarrow f$ uniformemente e assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sigma_n \mu(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n f(t) d\mu(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\mu(t)$$

como desejado. ■

As duas definições seguintes apresentam o conceito de convolução. Como veremos, a convolução entre duas funções consiste em um "produto" entre elas de maneira tal que a multiplicação dos respectivos coeficientes de Fourier de mesma ordem das mesmas, seja o coeficiente de Fourier, daquela ordem, da função que se obtém a partir da convolução. O mesmo comentário pode ser feito para a convolução entre uma função e uma medida.

Definição 2.6. Dadas $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$, denominamos como convolução de f por g a expressão dada por:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt \quad (2.8)$$

pelo teorema de Fubini, temos $f * g \in L^1[-\pi, \pi]$ e que:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Analisemos agora a relação dos coeficientes de Fourier de $f * g$ com os respectivos coeficientes de Fourier de f e g . Temos então:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} (f * g)(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) dt dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x-t) dx \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y_t) e^{-iny_t} dy_t \end{aligned}$$

sendo que para a segunda igualdade utilizamos do teorema de Fubini e da mudança de variável $y_t = x - t$, considerando f uma função 2π -periódica, quando estendida para toda a reta real e, lembrando que e^{it} é 2π -periódica.

Logo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} (f * g)(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y_t) e^{-iny_t} dy_t \quad (2.9)$$

Assim, $\sigma_n(f * g) = \sigma_n f \cdot \sigma_n g$.

Definição 2.7. Definimos a convolução de uma função $f \in L^1[-\pi, \pi]$ por uma medida μ absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue (ou seja, tem a forma $\frac{1}{2\pi} g(x) dx$, com $g \in L^1[-\pi, \pi]$) da seguinte maneira:

$$(f * \mu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) d\mu(t) \quad (2.10)$$

e conseqüentemente, $\sigma_n(f * \mu) = \sigma_n f \cdot \sigma_n \mu$ como podemos verificar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} (f * \mu)(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) d\mu(t) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) e^{-inx} d\mu(t) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y_t) e^{-iny_t} e^{-int} d\mu(t) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} d\mu(t) \int_{-\pi}^{\pi} f(y_t) e^{-iny_t} dy_t
\end{aligned}$$

sendo que para obter as igualdades utilizamos da mudança de variável $y_t = x - t$ e da 2π -periodicidade de f e h , onde $h(x) = e^{-inx}$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

2.2 Caracterização das Séries de Fourier

Temos como objetivo nesta seção, como já mencionado, dar algumas condições necessárias e suficientes sobre os médias de cesaro de uma série de Fourier de uma dada função f , para que esta pertença ou não a uma dada classe de funções. O mesmo faremos para medidas finitas complexas definidas em $[-\pi, \pi]$. Por exemplo, para que $f \in L^2[-\pi, \pi]$ devemos ter que a sequência dos coeficientes de Fourier $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja de quadrado somável e ainda:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Antes de prosseguirmos são necessários a definição e o lema que seguem:

Definição 2.8. Chamaremos de *série de Fourier formal* uma sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções da forma

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

onde c_k é um número complexo para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $x \in [-\pi, \pi]$.

Denominaremos *sequência de médias de Cesaro* da série de Fourier formal $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, a sequência $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções da forma:

$$\sigma_n = \frac{1}{n} (s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1})$$

Lema 2.9. Seja $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de médias de Cesaro de uma série de Fourier formal. Então:

1. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) e^{-imx} dx = \frac{n - |m|}{n} c_m$ se $n > |m|$;
2. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) e^{-imx} dx = 0$ se $n \leq |m|$.

Prova: Seja $s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$. Temos que se $n > |m|$ então:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) e^{-imx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} \frac{1}{n} (s_0 + \dots + s_{n-1}) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (s_j(x)) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=-j}^j c_k e^{ikx} \right) dx \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=-j}^j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{i(k-m)x} dx \\
&= \frac{1}{n} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{k=-j \\ k \neq m}}^j \frac{c_k}{2\pi} \frac{e^{(k-m)x}}{i(k-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n-|m|}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_m dx \right] \\
&= \frac{1}{n} (n-|m|) c_m
\end{aligned}$$

Se $n \leq |m|$ é claro que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} \sigma_n(x) dx = 0$$

concluindo a demonstração. ■

Deste lema, notemos que temos válido o resultado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} \sigma_n(x) dx = c_m$$

Nos cinco teoremas que seguem, $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sempre denotará a sequência de médias de Cesaro de uma série de Fourier formal.

Teorema 2.10. Seja $1 < p \leq \infty$. Existe $f \in L^p[-\pi, \pi]$ tal que $\sigma_n f = \sigma_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se, e só se, a sequência $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^p[-\pi, \pi]$.

Prova: ($\Rightarrow$) Temos pelo teorema (2.2) que $\sigma_n f \rightarrow f$ em $L^p[-\pi, \pi]$. Daí segue que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ temos:

$$\|\sigma_n f\|_p \leq \|\sigma_n f - f\|_p + \|f\|_p < \epsilon + \|f\|_p$$

e assim segue que as médias de Cesaro são limitadas, pois para $0 \leq n < n_0$, como cada $\sigma_n f \in L^p$, temos $k_1 = \max\{\|\sigma_n f\|_p : 1 \leq n \leq n_0\}$ como limitante e para $n \geq n_0$ temos $k_2 = \epsilon + \|f\|_p$.

($\Leftarrow$) Suponhamos $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ limitada em $L^p[-\pi, \pi]$. Podemos supor $\|\sigma_n\|_p \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $L^p[-\pi, \pi]$ é isometricamente isomorfo a $(L^q[-\pi, \pi])'$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pelo teorema de Alaoglu, $\overline{B}_{L^p}$ é $\sigma(L^p, L^q)$ -compacto. Pelo teorema (1.53) $\overline{B}_{L^p}$ é $\sigma(L^p, L^q)$ -metrizável, pois $L^q[-\pi, \pi]$ é separável. Logo a sequência $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite subsequência $(\sigma_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ que converge a uma função f na topologia $\sigma(L^p, L^q)$, ou seja,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{n_k}(x) g(x) dx \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

para toda $g \in L^q[-\pi, \pi]$. Em particular,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) e^{-imx} dx \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$. Usando o lema (2.9) vemos que

$$\frac{n - |m|}{n} c_m \longrightarrow c_m f$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$. Segue que $c_m = c_m f$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Como $f \in L^p[-\pi, \pi]$, a demonstração está completa. ■

Teorema 2.11. Existe $f \in L^1[-\pi, \pi]$ tal que $\sigma_n f = \sigma_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se, e só se, a sequência $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em $L^1[-\pi, \pi]$.

Prova: ($\Rightarrow$) Pelo teorema (2.2) se $f \in L^1[-\pi, \pi]$, então $\sigma_n f \longrightarrow f$ em $L^1[-\pi, \pi]$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\sigma_n \longrightarrow h$ em $L^1[-\pi, \pi]$. Então dado $\epsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ apropriado tal que:

$$\epsilon + \|\sigma_n\|_1 \geq \|\sigma_n - h\|_1 + \|\sigma_n\|_1 \geq \|h\|_1 \quad (*_1)$$

Para $n \geq n_0$ resulta:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [h(x) - \sigma_n(x)] e^{-imx} dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |h(x) - \sigma_n(x)| dx = \|h - \sigma_n\|_1 < \epsilon$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) e^{-imx} dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} h(x) e^{-imx} dx = c_m h$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Usando o lema (2.9), segue que para todo $m \in \mathbb{Z}$

$$\frac{n - |m|}{n} c_m \longrightarrow c_m h$$

Por fim, obtemos $c_m = c_m h$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, completando a demonstração, com $f = h$. ■

Teorema 2.12. Existe $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, com $f(-\pi) = f(\pi)$, tal que $\sigma_n f = \sigma_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se, e só se, $\sigma_n \rightarrow f$ uniformemente em $[-\pi, \pi]$.

Prova: ($\Rightarrow$) Basta aplicar o teorema (2.2).

($\Leftarrow$) Por hipótese $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para uma função f , sendo $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, pelo fato da convergência ser uniforme, com $f(-\pi) = f(\pi)$.

Agora dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ vale:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \sigma_n(x)] e^{-imx} dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_n(x)| dx = \|f - \sigma_n\|_1 < \epsilon$$

Usando o lema (2.9), segue que $c_m = c_m f$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. ■

Teorema 2.13. Existe uma medida finita complexa de Borel regular μ em $[-\pi, \pi]$ tal que $\sigma_n \mu = \sigma_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se, e só se a sequência $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^1[-\pi, \pi]$.

Prova: ($\Rightarrow$) Vimos na equação (2.7) que cada média de Cesaro de μ pode ser dada por:

$$\sigma_n \mu(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k_n(x-t) d\mu(t)$$

Daí segue que:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n \mu(x) dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n \mu(x)| dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(x-t) d|\mu|(t) dx = |\mu|([- \pi, \pi]) < \infty$$

sendo portanto as médias de Cesaro da medida limitadas pela variação total da medida μ , o que é justificado pelo teorema (1.30).

($\Leftarrow$) Suponhamos que $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja limitada em $L^1[-\pi, \pi]$, com $\|\sigma_n\|_1 \leq 1$. Seja μ_n a medida de Borel em $[-\pi, \pi]$ definida por

$$d\mu_n = \frac{1}{2\pi} \sigma_n dx$$

Pelo Teorema de Representação de Riesz, o dual de $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ é isometricamente isomorfo ao espaço de Banach das medidas complexas de Borel regulares em $[-\pi, \pi]$. Segue do Teorema de Alaoglu e do Teorema (1.53) que a sequência (μ_n) admite uma subsequência (μ_{n_k}) que converge na topologia fraca* a uma medida de Borel μ . Assim,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sigma_{n_k}(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f d\mu_{n_k} \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f d\mu$$

para toda $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, e em particular para $f(x) = e^{-imx}$.

Usando o lema (2.9) segue que

$$c_m \mu = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} d\mu = c_m$$

completando a demonstração. ■

Teorema 2.14. Existe μ medida de Borel regular positiva finita tal que $\sigma_n \mu = \sigma_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se, e só se a sequência $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^1[-\pi, \pi]$ e σ_n é não negativa para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova: ($\Rightarrow$) Pelo teorema anterior, $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^1[-\pi, \pi]$. Temos que:

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k_n(x-t) d\mu(t)$$

Como cada k_n é uma função mensurável e $k_n(x) \geq 0$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$, então existe uma sequência crescente de funções mensuráveis simples $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tais que:

$$s_j(x) \longrightarrow k_n(x)$$

quando $j \rightarrow \infty$, para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

Sendo $k_n(x) \geq 0$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$, resulta para algum $j \in \mathbb{N}$ grande o suficiente: o suficiente teremos:

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k_n(x-t) d\mu(t) \geq \int_{-\pi}^{\pi} s_j(t) d\mu(t) = \sum_{k=1}^{m_j} \alpha_k \mu(E_k)$$

onde $\alpha_k \geq 0$ para todo $k \in \{0, \dots, m_j\}$ e cada E_k é um elemento da σ -álgebra de Borel em $[-\pi, \pi]$.

Como estamos supondo μ positiva, então $\mu(E_k) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí segue que $\sigma_n(x) \geq 0$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$ e $n \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Pelo teorema anterior, existe uma medida de Borel regular finita complexa, tal que $\sigma \mu_n = \sigma_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Do fato de ser $\sigma_n(x) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [-\pi, \pi]$ obtemos:

$$\|\sigma_n\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) dx = c_0$$

onde c_0 é o coeficiente de Fourier de ordem zero da série de Fourier associada à sequência de médias de Cesaro $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Disto tudo, a sequência $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada na L^1 -norma. Pelo teorema anterior, a série de Fourier dada é a série de Fourier de uma medida μ regular de Borel, finita complexa e periódica.

Desta maneira, pelo teorema (2.5), μ é o limite na topologia fraca* das medidas $\frac{1}{2\pi} \sigma_n(x) dx$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sigma_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) d\mu(x) \quad (*)$$

para toda $g \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, com $g(-\pi) = g(\pi)$.

Se $g \geq 0$, assim é $g \sigma_n$. Pelo limite apresentado em (*) segue que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g d\mu \geq 0$$

e isto conclui que μ é uma medida positiva. ■

Capítulo 3

Funções Analíticas no Disco Unitário

Para começar este capítulo, iniciemos definindo o disco unitário em $\mathbb{C}$

$$D = \{z : |z| < 1\}$$

Diremos que f é analítica em $\bar{D}$ se for analítica numa vizinhança aberta de D .

Lembremos que se uma função de valores complexos definida em D é analítica, então ela pode ser expressa como uma série convergente da forma:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

onde cada $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

Diremos que uma função $u = u(x, y)$ definida em D é harmônica, se ela admitir derivadas contínuas até segunda ordem satisfazendo a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

sendo que dado $z = x + yi \in D \subset \mathbb{C}$, estamos considerando $z = (x, y)$.

Uma função analítica em D dada por $f = u + iv$, onde u e v são funções reais definidas em D , deve satisfazer as condições de Cauchy-Riemann:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = v_y \quad \text{e} \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -v_x$$

A partir das condições de Cauchy-Riemann e do teorema de Schwartz, que garante que dada $h : U \subset D \rightarrow \mathbb{R}$, U aberto, duas vezes diferenciável num ponto $c \in U$ então

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(c) = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(c)$$

podemos mostrar facilmente que $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica é harmônica, ou seja, satisfaz a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Por este fato, apesar de quase todos os resultados que obtemos neste capítulo serem creditados a funções harmônicas no disco D , podemos estender os mesmos para as funções analíticas.

Na sequência, apresentamos dois resultados importantes em variáveis complexas.

Proposição 3.1. Se $u = u(x, y)$ é harmônica em $G = B(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : \|z - \alpha\| \leq r\}$ (ou $G = \mathbb{C}$), então u possui harmônica conjugada v em G , ou seja, $f = u + iv$ é analítica. Se v_1 é outra harmônica conjugada de u em G então $v_1 - v$ é uma função constante.

Para a demonstração desta proposição precisamos da Regra de Leibniz:

Teorema 3.2. (Regra de Leibniz): Dado $U \subset \mathbb{R}^2$, aberto, seja $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:

1. Para todo $x \in U$, a função $t \mapsto f(x, t)$ é integrável em $a \leq t \leq b$.
2. A i -ésima derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$ existe para cada $(x, t) \in U \times [a, b]$ e a função $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, assim definida, é contínua.

Então a função $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \int_a^b f(x, t)dt$, possui i -ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)dt$$

Prova: Sugerimos [12], pg. 143.

Vamos agora para a demonstração da proposição, denotando cada número complexo como um elemento de $\mathbb{R}^2$:

Prova: Seja $\alpha = (a, b) \in \mathbb{C}$ e defina $v : B(\alpha, r) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$v(x, y) = \int_a^x -u_y(t, b)dt + \int_b^y u_x(x, t)dt$$

Então temos:

$$v_y(x, y) = u_x(x, y) \quad \text{e} \quad v_x(x, y) = -u_y(x, b) + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^y u_x(x, t)dt$$

Segue da harmonicidade de u e da Regra de Leibniz que:

$$\begin{aligned}
 v_x(x, y) &= -u_y(x, b) + \int_b^y u_{xx}(x, t) dt \\
 &= -u_y(x, b) - \int_b^y u_{yy}(x, t) dt \\
 &= -u_y(x, b) - u_y(x, y) + u_y(x, b) \\
 &= -u_y(x, y)
 \end{aligned}$$

e portanto, v é harmônica conjugada de u .

Suponhamos $f_1 = u + iv_1$ também seja analítica em $B(\alpha, r)$. Então $g = f - f_1 = i(v - v_1)$ também é analítica. Utilizando-se das equações de Cauchy-Riemann prova-se que:

$$v = v_1 + k$$

onde k é uma constante. ■

Proposição 3.3. Uma função $u : U \subset D \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica se e só se, é a parte real de uma função analítica $f = u + iv$.

Prova: ($\Rightarrow$) Utilizando-se da proposição anterior, podemos afirmar que para esta função u existe uma função v harmônica conjugada tal que $f = u + iv$ é analítica.

($\Leftarrow$) Esta implicação é obtida diretamente das equações de Cauchy-Riemann. ■

A seguir enunciamos um teorema clássico dentro do estudo de funções de variável complexa, atribuído a Cauchy:

Teorema 3.4. (Cauchy): Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analítica e suponha $\overline{B(a; r)} \subset G$, onde $B(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : \|z - a\| < r\}$, G é um conjunto aberto, $r > 0$ é um número real e $a \in \mathbb{C}$. Se $\gamma(t) = a + re^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$, então temos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

para $|z - a| < r$, onde a integral dada representa a integral de linha ao longo de γ .

A expressão dada para f neste teorema é denominada *fórmula integral de Cauchy*.

3.1 Os Núcleos de Cauchy e Poisson

Nesta seção, temos como objetivo apresentar duas famílias distintas de funções. Elas serão úteis nas seções seguintes quando investigaremos a existência do limite:

$$\tilde{f}(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$$

e quando a função limite define uma função no círculo.

Seja f uma função analítica em um disco de raio $1 + \epsilon$. Assim, pelo teorema (3.4) f tem seus valores na fronteira de D bem definidos e dados por:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (3.1)$$

Para os nosso propósitos, será mais conveniente escrever (3.1) na forma:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} d\theta$$

onde utilizamos da mudança de variável $\xi = e^{i\theta}$.

Se f é meramente harmônica no disco de raio $1 + \epsilon$, não podemos utilizar a fórmula integral de Cauchy. No entanto, podemos obter em alguns casos, os valores de f no bordo através da chamada *fórmula integral de Poisson*. Esta fórmula está intimamente relacionada com as séries de Fourier. Antes de apresentá-la, nós relacionaremos funções harmônicas em D com séries de Fourier.

Suponhamos agora f analítica no disco unitário D . Lembremos então que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

para todo $z \in D$, onde $a_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $0 \leq r < 1$, seja $\tilde{f}_r(\theta) = f(re^{i\theta})$, onde $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Escrevemos então:

$$\tilde{f}_r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

E daí notamos que o n -ésimo coeficiente de Fourier de $\tilde{f}_r$ é $a_n r^n$ para $n \geq 0$ e zero para $n < 0$. Se f é analítica num aberto contendo o disco fechado, então os coeficientes de Fourier da função dada por $\tilde{f}_1(\theta) = f(e^{i\theta})$ são a_n para $n \geq 0$ e zero para $n < 0$. Analisemos a fórmula integral de Cauchy neste caso, considerando $0 \leq r < 1$:

$$\tilde{f}_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - re^{i\theta}} dt$$

Façamos agora a troca $f(e^{it})$ por $\tilde{f}(t)$ podendo reescrever esta última expressão da forma:

$$\tilde{f}_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) \frac{1}{1 - re^{i(\theta-t)}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_r(\theta - t) \tilde{f}(t) dt \quad (3.2)$$

onde $C_r(\theta) = \frac{1}{1 - re^{i\theta}}$

A família de funções $\{C_r\}_{0 \leq r < 1}$ é denominada *Núcleo de Cauchy*. Notemos que $\tilde{f}_r$ é a convolução $C_r * \tilde{f}$, como definida no capítulo sobre séries de Fourier e, portanto, como $\tilde{f}_r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$, para $0 \leq r < 1$, segue que:

$$\tilde{f}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

e ainda:

$$C_r(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}$$

Suponhamos agora que u seja uma função harmônica (de valores reais) no disco D . Esta u é a parte real de alguma função f analítica em D , ou seja:

$$u(z) = f(z) + \overline{f(z)} \quad (*)$$

Se a expansão de f em série tem a forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, então escrevemos a partir de (*):

$$u(z) = 2\operatorname{Re}(a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n z^n}$$

Se restringirmos u para o círculo de raio r , $0 \leq r < 1$, nós temos:

$$u(re^{i\theta}) = \tilde{u}_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

onde $c_0 = 2\operatorname{Re}(a_0)$, $c_n = a_n$ para $n > 0$ e $c_n = \bar{a}_{-n}$ para $n < 0$.

Vejamos que:

$$\overline{c_n r^{|n|} e^{in\theta}} = \bar{c}_n r^{|n|} e^{-in\theta} \quad (**)$$

Pelo fato de u ser uma função real, temos $\bar{u} = u$ e, assim, resulta de (**) que:

$$\bar{c}_n r^{|n|} = c_{-n} r^{|-n|}$$

e daí obtemos imediatamente $\bar{c}_n = c_{-n}$.

Se u é harmônica no disco fechado (ou seja, é a parte real de uma função analítica definida numa vizinhança aberta de D) vemos que cada coeficiente de Fourier de ordem n de $\tilde{u}_r$ é obtido a partir do produto do coeficiente de Fourier de ordem n de $\tilde{u}_1$ pelo valor $r^{|n|}$, $0 \leq r < 1$. Isto significa que u_r é a convolução de $\tilde{u}_1(\theta) = u(e^{i\theta})$ com a função P_r , cujo coeficiente de Fourier de ordem n é $r^{|n|}$ e, daí, escrevendo em série temos:

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = C_r(\theta) + \overline{C_r(\theta)} - 1$$

pois $C_r(\theta) = \frac{1}{1 - re^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}$, onde $r < 1$.

Dando continuidade, utilizando da expressão de C_r temos:

$$P_r(\theta) = 2\operatorname{Re}C_r(\theta) - 1 = \operatorname{Re}[2C_r(\theta) - 1] = \operatorname{Re}\left[\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right] = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}$$

A família de funções $\{P_r\}_{0 \leq r < 1}$ é denominada *Núcleo de Poisson*. Assim, para u função real harmônica definida no disco fechado temos a convolução:

$$u(re^{i\theta}) = \tilde{u}_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(t) P_r(\theta - t) dt \quad (3.3)$$

onde $\tilde{u}(t) = u(e^{it})$.

Imediatamente a fórmula (3.3) pode ser definida para funções harmônicas de valores complexos no disco fechado, bastando para isto aplicar o resultado para as partes real e imaginária de uma função deste tipo. Em particular, está segura para uma função f analítica no disco fechado. Veremos logo em seguida que C_r e P_r têm os mesmos coeficientes de Fourier para $n \geq 0$. Consequentemente, as convoluções $C_r * f$ e $P_r * f$ constituem a mesma função, se f for analítica.

Temos então:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P_r(\theta) d\theta = r^{|n|}$$

e para cada elemento do Núcleo de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} C_r(\theta) d\theta = \begin{cases} r^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Isto nos leva a concluir que C_r é ortogonal a qualquer função analítica no disco fechado que se anula na origem, segundo o produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) \overline{\tilde{g}(t)} dt$$

onde f e g são funções analíticas no disco fechado.

De fato, sabemos que se f é analítica no disco fechado, então:

$$\overline{f(e^{i\theta})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} e^{-in\theta}$$

Assim, para os elementos do Núcleo de Cauchy, resulta:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(e^{it})} C_r(\theta - t) dt = \overline{a_0} = \overline{f(0)} \quad (3.4)$$

e para os elementos do Núcleo de Poisson temos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(e^{it})} P_r(\theta - t) dt = \overline{f(re^{i\theta})} \quad (3.5)$$

A igualdade (3.5) decorre do fato de que sendo f analítica, então sua conjugada $\bar{f}$ é harmônica complexa, o que pode-se mostrar facilmente, a partir das condições de Cauchy-Riemann e, portanto, o resultado vem da equação (3.3).

Definamos agora para cada $0 \leq r < 1$ a seguinte função:

$$H_r(\theta) = 2C_r(\theta) - 1 = \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}$$

Podemos notar de imediato que $P_r(\theta) = \operatorname{Re}(H_r(\theta))$. Seja u a parte real de f analítica no disco fechado. Suponhamos daqui em diante que $f(0)$ seja real. Mostremos então que $f_r = \tilde{u} * H_r$, ou seja:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(t) H_r(\theta - t) dt \quad (3.6)$$

onde $\tilde{u}(t) = u(e^{it})$.

De fato, sabemos que $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ seguindo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(t) H_r(\theta - t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (f(e^{it}) + \overline{f(e^{it})}) H_r(\theta - t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (f(e^{it}) + \overline{f(e^{it})}) [2C_r(\theta - t) - 1] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(e^{it}) + \overline{f(e^{it})}] C_r(\theta - t) dt - \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(e^{it}) + \overline{f(e^{it})}] dt \\ &= f(re^{i\theta}) + \overline{f(0)} - \operatorname{Re} f(0). \end{aligned}$$

sendo que a igualdade final decorre das equações (3.2) e (3.4) e sendo $f(0)$ um número real segue o resultado, obtendo $f_r = \tilde{u} * H_r$.

Podemos reescrever a expressão (3.6) como segue:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) H_r(\theta - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \frac{1 + re^{i(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} dt$$

e tomando $z = re^{i\theta}$ temos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt$$

Definamos agora a família $\{Q_r\}_{0 \leq r < 1}$ onde para cada $0 \leq r < 1$ temos $Q_r = \text{Im}H_r$. Esta família de funções é denominada *conjugado do Núcleo de Poisson*. Como H_r é analítica ($0 \leq r < 1$), P_r e Q_r , para cada $0 \leq r < 1$, são funções harmônicas conjugadas no disco. Definindo então,

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(t) Q_r(\theta - t) dt$$

esta função constitui uma harmônica conjugada de u o que vem do fato de P_r e Q_r serem harmônicas conjugadas para cada $0 \leq r < 1$ e, portanto, $v(re^{i\theta}) = \text{Im}f(re^{i\theta})$. Veja que se $r = 0$, então $v(0) = \text{Im}f(0) = 0$, pois $f(0)$ é um número real.

3.2 Valores de Fronteira

Nesta seção, a partir de determinadas funções definidas no círculo unitário, queremos encontrar formas de estender estas funções ao disco unitário D , de maneira que neste, as funções obtidas sejam harmônicas.

Iniciaremos mostrando que o Núcleo de Poisson é uma identidade aproximada para $L^1[-\pi, \pi]$, ou seja, as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $P_r(\theta) \geq 0$ e $P_r \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, para todo $0 \leq r < 1$;
2. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$, $0 \leq r < 1$;
3. Se $0 < \delta < \pi$, então:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sup_{|\theta| \geq \delta} |P_r(\theta)| = 0.$$

Prova: Para provar o primeiro item, lembremos que

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}$$

para todo $0 \leq r < 1$. Disto, $1 - r^2 > 0$. Temos ainda que:

$$1 - 2r \cos(\theta) + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 = (1 - r)^2 > 0$$

e logo $P_r(\theta) \geq 0$.

A continuidade de P_r para cada $0 \leq r < 1$ vem do fato de esta função ser o quociente de funções contínuas, sendo que o denominador nunca se anula, como mostramos.

Agora para provar o item 2), lembremos que já foi provado na seção anterior que se f for uma função harmônica no disco unitário fechado, a seguinte fórmula é válida:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) P_r(\theta - t) dt$$

onde $\tilde{f}(t) = f(e^{it})$, para $-\pi \leq t \leq \pi$. O resultado é obtido de imediato, observando que a função constante $\mathbf{1}(x) = x$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$ é harmônica.

Para o último item, como $\delta \leq |\theta| \leq \pi$, mostraremos que:

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\delta) + r^2} \quad (*)$$

Dando continuidade, temos da condição de $0 \leq r < 1$:

$$\cos(\theta) \leq \cos(\delta) \Rightarrow -2r\cos(\delta) \leq -2r\cos(\theta) \Rightarrow 1 - 2r\cos(\delta) + r^2 \leq 1 - 2r\cos(\theta) + r^2$$

Ainda desta mesma condição sobre os valores r , vem que:

$$1 - 2r\cos(\theta) + r^2, 1 - 2r\cos(\delta) + r^2 > 0$$

o que mostra a validade de (*).

Ademais,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\delta) + r^2} = \frac{0}{2 - 2\cos(\delta)} = 0$$

lembrando que $2 - 2\cos(\delta) \neq 0$ pois $0 < \delta < \pi$.

Assim, utilizando de (*) segue diretamente o resultado desejado.

Assumiremos sempre nos teoremas que seguem, como em alguns casos anteriores, $\tilde{f}(t) = f(e^{it})$, para $t \in [-\pi, \pi]$ e $0 \leq r < 1$.

Teorema 3.5. Seja $f \in L^p(C)$, onde $1 \leq p < \infty$. Definamos f no disco unitário D por:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) P_r(\theta - t) dt = f_r(e^{i\theta}) \quad (3.7)$$

Então f estendida ao disco fechado é harmônica em D e, quando $r \rightarrow 1$, as funções $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$ convergem para f em $L^p(C)$. Se $f \in \mathcal{C}(C)$, as funções do conjunto $\{f_r\}$ convergem uniformemente para f ; neste caso, a extensão de f é contínua no disco fechado e harmônica em D .

Prova: Fazendo as mudanças de variável na equação (3.7) de t para $\theta + t$ temos:

$$\tilde{f}_r(\theta) = f_r(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta + t) P_r(t) dt$$

isto considerando $\tilde{f}$ uma função 2π -periódica na reta real e lembrando que P_r é uma função par para todo $0 \leq r < 1$.

Dando continuidade, desde que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1$$

segue que:

$$\tilde{f}_r(\theta) - \tilde{f}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{f}(\theta + t) - \tilde{f}(\theta)] P_r(t) dt \quad (3.8)$$

Se $0 < \delta \leq \pi$ podemos escrever:

$$\tilde{f}_r(\theta) - \tilde{f}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\delta}^{\delta} [\tilde{f}(\theta + t) - \tilde{f}(\theta)] P_r(t) dt + \int_{\|t\| \geq \delta} [\tilde{f}(\theta + t) - \tilde{f}(\theta)] P_r(t) dt \right]$$

Daí temos:

$$|\tilde{f}_r(\theta) - \tilde{f}(\theta)| \leq \sup_{-\delta < t < \delta} |\tilde{f}(\theta + t) - \tilde{f}(\theta)| + 2\|\tilde{f}\|_{\infty} \sup_{\|t\| \geq \delta} P_r(t)$$

onde sempre admitiremos $\|\tilde{f}\|_{\infty} = \sup\{|\tilde{f}(x)| : x \in [-\pi, \pi]\}$

Se supormos f contínua em C , dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\sup_{-\delta < t < \delta} |\tilde{f}(\theta + t) - \tilde{f}(\theta)| < \epsilon$$

pois como $[-\pi, \pi]$ é compacto, temos $\tilde{f}$ uniformemente contínua em $[-\pi, \pi]$, se admitirmos que f é contínua em C .

Do fato de

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sup_{\|t\| \geq \delta} P_r(t) = 0$$

é imediato que $\lim_{r \rightarrow 1} 2\|\tilde{f}\|_{\infty} \sup_{\|t\| \geq \delta} P_r(t) = 0$

Disto tudo resulta que:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \tilde{f}_r(\theta) = \tilde{f}(\theta)$$

e tal convergência é uniforme em $[-\pi, \pi]$.

Tomemos agora $f \in L^p(C)$ num caso geral. Seja $g \in L^q(C)$, onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Escrevemos a partir da equação (3.8):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{f}_r(\theta) - \tilde{f}(\theta)] \tilde{g}(\theta) d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{f}(\theta - t) - \tilde{f}(\theta)] P_r(t) \tilde{g}(\theta) dt d\theta$$

Daí resulta:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{f}_r(\theta) - \tilde{f}(\theta)] \tilde{g}(\theta) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{f}(\theta - t) - \tilde{f}(\theta)] \tilde{g}(\theta) d\theta \right| P_r(t) dt$$

sendo que no caso utilizamos do teorema de Fubini.

Utilizando da desigualdade de Hölder e denominando $\tilde{f}t(\theta) = \tilde{f}(\theta - t)$ obtemos:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{f}_r(\theta) - \tilde{f}(\theta)]g(\theta)d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_q \int_{-\pi}^{\pi} \|\tilde{f}t - \tilde{f}\|_p P_r(t)dt$$

Temos que se ψ é um funcional linear contínuo, com $\psi : L^p[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, então existe $\tilde{g} \in L^q[-\pi, \pi]$, onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$, tal que para toda $\tilde{h} \in L^p[-\pi, \pi]$:

$$\psi(\tilde{h}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{h}(t)\tilde{g}(t)dt$$

Pelo teorema de Hanh-Banach, segue que dada $\tilde{h} \in L^p[-\pi, \pi]$, existe $\tilde{g} \in L^q[-\pi, \pi]$ tal que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{h}(t)\tilde{g}(t)dt = \|\tilde{h}\|_p \quad \text{e} \quad \|\tilde{g}\|_q = 1$$

Para o nosso caso, denotando $\tilde{h}_r = \tilde{f}_r - \tilde{f}$, existe $\tilde{g}_r \in L^q$ tal que $\|\tilde{g}_r\|_q = 1$ seguindo que para $0 < \delta \leq \pi$:

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_r - \tilde{f}\|_p &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \|\tilde{f}_t - \tilde{f}\|_p P_r(t)dt \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \|\tilde{f}_t - \tilde{f}\|_p P_r(t)dt + \int_{|t| \geq \delta} \|\tilde{f}_t - \tilde{f}\|_p P_r(t)dt \\ &\leq \sup_{-\delta < t < \delta} \|\tilde{f}_t - \tilde{f}\|_p + 4\pi \|\tilde{f}\|_p \sup_{|t| \geq \delta} P_r(t) \end{aligned}$$

sendo a última desigualdade vinda, dentre outros fatos, de $\tilde{f}$ estendida ser 2π -periódica e assim, $\|\tilde{f}_t\|_p = \|\tilde{f}\|_p$.

Como a translação é uniformemente contínua em $L^p[-\pi, \pi]$ temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\tilde{f}_t - \tilde{f}\|_p = 0$$

e como

$$\lim_{r \rightarrow 1} \|\tilde{f}\|_p \sup_{|t| \geq \delta} P_r(t) = 0$$

segue o resultado de que $f_r \rightarrow f$ em $L^p(C)$, quando $r \rightarrow 1$.

Lembremos, como visto logo acima, que para cada $0 \leq r < 1$, vale que, sendo $H_r(\theta) = \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, então:

$$P_r(\theta) = \operatorname{Re}(H_r(\theta))$$

Assim procede:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) \operatorname{Re} \left[\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} \right] dt$$

Se f for uma função real, temos:

$$f(re^{i\theta}) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} dt \right]$$

e sendo analítica a função $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt$$

temos de imediato que $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é harmônica.

Caso f seja uma função contínua de valores complexos, escreve-se $f = u + iv$ e, da forma que mostramos que f é harmônica quando f é real, obtemos que u e v são harmônicas, podendo-se mostrar facilmente que f é harmônica em D .

Se $f \in \mathcal{C}(C)$, pelo fato de ser harmônica em D resulta que f é contínua em D , obtendo que a função f estendida para o disco fechado é contínua, devido a convergência $f_r \rightarrow f$ ser uniforme. ■

Teorema 3.6. Seja f uma função limitada de Borel no círculo unitário e

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) P_r(\theta - t) dt$$

A extensão de f é uma função harmônica no disco D e, quando $r \rightarrow 1$, as funções do conjunto $\{f_r\}$ dadas por $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$, convergem para f na topologia fraca* em $L^\infty(C)$.

Prova: Lembrando que pela equação (3.8) vale:

$$\tilde{f}_r(\theta) - \tilde{f}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{f}(\theta - t) - \tilde{f}(\theta)] P_r(t) dt$$

então vale para toda $g \in L^1(C)$ e para todo $0 < \delta \leq \pi$ que:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{f}_r(\theta) - \tilde{f}(\theta)] \tilde{g}(\theta) d\theta \right| \leq \sup_{-\delta < t < \delta} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{f}(\theta - t) - \tilde{f}(\theta)] \tilde{g}(\theta) d\theta \right| + 2\|\tilde{f}\|_\infty \sup_{\|t\| \geq \delta} P_r(t)$$

sendo que para obter tal desigualdade, utilizamos de

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1$$

Como $\lim_{r \rightarrow 1} 2\|\tilde{f}\|_\infty \sup_{\|t\| \geq \delta} P_r(t) = 0$, segue então que para obtermos o resultado desejado,

basta provar que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{f}(\theta - t) - \tilde{f}(\theta)] g(\theta) d\theta = 0 \quad (3.9)$$

e daí teremos provado a convergência $f_r \rightarrow f$ na topologia fraca* em $L^\infty(C)$.

Mas a integral em (3.9) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta - t) g(\theta) d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) g(\theta) d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) g(y + t) dy - \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) g(y) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) [g(y + t) - g(y)] dy \\ &\leq \|\tilde{f}\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |g(y + t) - g(y)| dy \end{aligned}$$

Na primeira igualdade utilizamos das mudanças de variável $\theta - t = y$ e $\theta = y$ em cada respectiva parcela da soma. A desigualdade vem do fato de f ser limitada em C e de $g \in L^1[-\pi, \pi]$, pois disto, com $gt(y) = g(t + y)$ resulta:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|gt - g\|_1 = 0$$

Prova-se que f é harmônica em D de maneira análoga ao que foi feito no teorema anterior. ■

Antes de fazermos um teorema semelhante aos teoremas (3.5) e (3.6), só que voltado para o caso de medidas finitas no círculo unitário, apresentemos um lema e uma definição necessários para a demonstração do mesmo.

Lema 3.7. Sejam μ medida complexa finita em um espaço mensurável X , φ uma função mensurável complexa em X e Ω um conjunto aberto do plano complexo tal que $\Omega \cap \varphi(X) = \emptyset$. Definamos

$$f(z) = \int_X \frac{d\mu(\xi)}{\varphi(\xi) - z} \quad (3.10)$$

para todo $z \in \Omega$. Então f pode ser representada localmente por uma série de potências em X . Se X for compacto, é imediato do que foi obtido que se definirmos

$$f(z) = \int_X \frac{g(\xi)}{\varphi(\xi) - z} d\mu(\xi)$$

onde a função g é uma função analítica complexa em X , então f pode ser expressa localmente por série de potências.

Prova: Sejam $a \in \Omega$ e $B = B(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \subset \Omega$. Desde que

$$\left| \frac{z - a}{\varphi(\xi) - a} \right| \leq \frac{|z - a|}{r} < 1$$

pois $|\varphi(\xi) - a| \geq r$ devido a $\varphi(\xi) \notin \Omega$, $\forall \xi \in X$, então podemos afirmar que:

$$\frac{1}{\varphi(\xi) - z} = \frac{1}{\varphi(\xi) - a} \left(\frac{1}{1 - \frac{z - a}{\varphi(\xi) - a}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\varphi(\xi) - a)^{n+1}}$$

onde a série geométrica converge uniformemente, para todo $z \in B$ fixo. Pelo fato desta convergência ser uniforme, substituindo a série em (3.10) resulta:

$$f(z) = \int_X \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\varphi(\xi) - a)^{n+1}} d\mu(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_X \frac{1}{(\varphi(\xi) - a)^{n+1}} d\mu(\xi) \right) (z - a)^n$$

Denominando a partir de agora

$$c_n = \int_X \frac{1}{(\varphi(\xi) - a)^{n+1}} d\mu(\xi)$$

nós vemos que:

$$|c_n| \leq \int_X \left| \frac{1}{(\varphi(\xi) - a)^{n+1}} \right| d|\mu|(\xi) \leq \frac{|\mu|(X)}{r^{n+1}}$$

Como o raio de convergência R da série é dado através de:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |c_n|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mu|(X)}{r^{1 + \frac{1}{n}}}$$

segue diretamente que:

$$\frac{1}{R} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mu|(X)}{r^{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{r}$$

o que implica que $r \leq R$ e, portanto, a série converge em B , podendo-se de fato expressar f localmente como uma série de potências.

Para a conclusão final, note que teremos

$$c_n = \int_X \frac{g(\xi)}{(\varphi(\xi) - a)^{n+1}} d\mu(\xi)$$

e portanto,

$$|c_n| \leq \frac{|\mu|(X)}{r^{n+1}} K$$

onde $K > 0$ é um limitante de g em X , lembrando que como g é analítica num compacto, esta é limitada no mesmo. No caso, ela poderá ser expressa por uma série uniformemente convergente na bola de centro em a e raio r . ■

Teorema 3.8. Seja μ uma medida complexa finita de Borel. Seja também

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)$$

Então f é harmônica no disco unitário D e as medidas:

$$d\mu_r = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}_r(\theta) d\theta$$

convergem para μ na topologia fraca* do espaço das medidas.

Prova: Temos que

$$P_r(\theta - t) = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right]$$

com $z = re^{i\theta}$.

Basta provarmos que a função $l : D \rightarrow \mathbb{C}$, onde D é o disco unitário, dada por

$$l(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t)$$

é analítica que obteremos de imediato f harmônica no disco unitário D , pois $f = \operatorname{Re}(l)$.

Sejam, no lema anterior, $a = 0$, $\Omega = B = B(0; r)$, $X = [-\pi, \pi]$, $g(t) = \varphi(t) = e^{it}$ para $-\pi < t < \pi$ e $z \in D$. Como $[-\pi, \pi]$ é compacto, segue da segunda parte do lema anterior que como g é analítica, podemos então expressar a função

$$j(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - z} d\mu(t)$$

localmente como uma série de potências.

Mas então temos:

$$l(z) = j(z) + zt(z)$$

onde

$$t(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{it} - z} d\mu(t)$$

sendo que t também, pelo lema anterior, pode ser localmente expressa como uma série de potências, ou seja, t é analítica em D . Logo l é analítica em D como desejado e, portanto f é uma função harmônica, em D .

Para mostrar que $\{\mu_r\}_{0 < r < 1}$, converge quando $r \rightarrow 1$, para μ , basta mostrar que dada uma função contínua $\tilde{\alpha} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, vale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\alpha}(x) d\mu_r(x) \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\alpha}(x) d\mu(x)$$

Temos por definição para cada $0 \leq r < 1$

$$d\mu_r(x) = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}_r(\theta) d\theta(x)$$

Daí segue

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\alpha}(x) d\mu_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\alpha}(x) \tilde{f}_r(\theta) d\theta(x)$$

Dando continuidade, por definição temos que:

$$\tilde{f}_r(\theta) d\theta(x) = f(re^{i\theta}) d\theta(x) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - x) d\mu(x) \right) d\theta$$

Prosseguindo,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\alpha}(x) d\mu_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\alpha}(x) P_r(\theta - x) d\mu(x) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\alpha}(x) P_r(\theta - x) d\theta d\mu(x)$$

sendo a última igualdade justificada pelo teorema de Fubini.

Como $\tilde{\alpha}$ é contínua, pelo teorema (3.5) temos:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\alpha}(x) d\mu_r(x) &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\alpha}(x) P_r(\theta - x) d\theta d\mu(x) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\alpha}(x) P_r(\theta - x) d\theta d\mu(x) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\alpha}(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. ■

3.3 A Integral de Poisson

Nos três teoremas da seção anterior, dizemos que $f(re^{i\theta})$ é a *integral de Poisson* de uma correspondente função no círculo nos dois primeiros casos e de uma medida no círculo no último caso. Vimos que as funções dadas por integrais de Poisson, são harmônicas no disco D . Agora o "caminho reverso": dada uma função harmônica em D , analisaremos, nos cinco teoremas seguintes, algumas condições necessárias e suficientes para que esta função seja a integral de Poisson de alguma função ou medida. Para isto, utilizaremos de resultados sobre as respectivas médias de Cesaro de f . Lembremos que se f é harmônica em D , então a mesma é dada por:

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

onde $c_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, bastando para isto, observar que as partes real e imaginária de f são harmônicas.

Nos cinco teoremas que seguem, f sempre denotará uma função harmônica de valores complexos no disco unitário D .

Teorema 3.9. Se $1 < p \leq \infty$, então f é a integral de Poisson de uma função em $L^p = L^p(C)$ se e só se, as funções $\tilde{f}_r$ são limitadas em $L^p[-\pi, \pi]$.

Prova: ($\Rightarrow$) Sendo

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) P_r(\theta - t) dt$$

pelo teorema (3.5) segue que $\tilde{f}_r(\theta) \rightarrow \tilde{f}(\theta)$ quando $r \rightarrow 1$. Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $r_0 \in (0, 1)$ tal que para $r_0 \leq r < 1$ temos:

$$\|\tilde{f}_r\|_p \leq \|\tilde{f}_r - f\|_p + \|f\|_p \leq \epsilon + \|f\|_p$$

ou seja, o conjunto $\{\tilde{f}_r\}_{r_0 \leq r < 1}$ é limitado. Vejamos agora quando $0 \leq r < r_0$. Neste caso, temos:

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} \leq \frac{1}{(1 - r)^2} \leq \frac{1}{(1 - r_0)^2} \quad (3.11)$$

Logo para $0 \leq r \leq r_0$ temos:

$$\begin{aligned} \|f_r\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) P_r(\theta - t) dt \right|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t)| |P_r(\theta - t)| dt \right)^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} (\|\tilde{f}\|_p \|P_r\|_q)^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$, sendo que $P_r \in L^q = L^q[-\pi, \pi]$ pois tal função é contínua para todo $r \in [0, 1)$ fixo. Como visto em (3.11), resulta que $\{P_r\}_{0 \leq r \leq r_0}$ é um conjunto limitado. Assim, resulta de imediato que $\{\tilde{f}_r\}_{0 \leq r \leq r_0}$ é limitado em $L^p[-\pi, \pi]$.

Antes de fazermos a outra implicação, demonstremos o seguinte lema:

Lema 3.10. Seja U uma função de valores reais, harmônica para $|z| < R$, onde $R > 1$. Se $0 \leq r < 1$, então temos que U é dada por:

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{it}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} dt$$

Prova: Sendo U harmônica e real, resulta, pela proposição (3.1), que $U = \operatorname{Re}(F)$ onde F é uma função analítica para $|z| < R$.

Portanto, $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, sendo $|z| < R$.

Como $U = \frac{1}{2}(F + \bar{F})$ segue para $0 \leq r \leq 1$ fixo:

$$U(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n r^{|n|} e^{in\theta} \quad (*_1)$$

onde:

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{2}a_n, n > 0 \\ A_0 = \operatorname{Re}(a_0) \\ A_n = \frac{1}{2}\bar{a}_{-n}, n < 0 \end{cases}$$

De $(*_1)$ resulta:

$$U(e^{it}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l e^{ilt} \quad (*_2)$$

Como a convergência em $(*_2)$ é uniforme e do fato de

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ segue o resultado desejado. Para o caso onde f assume valores complexos, o resultado vale de forma análoga, bastando analisar suas partes real e complexa. ■

Notemos que podemos reescrever U do lema acima, para $0 \leq r < 1$, da seguinte forma:

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{it}) P_r(\theta - t) dt$$

onde cada P_r é um elemento do núcleo de Poisson.

Voltemos a demonstração do teorema.

($\Leftarrow$) Suponhamos sem perda de generalidade que o conjunto $\{\tilde{f}_r\}_{0 \leq r < 1}$ seja limitado por 1 em $L^p[-\pi, \pi]$.

Sendo $X = L^p = L^p[-\pi, \pi]$, $1 < p < \infty$, resulta que o conjunto:

$$\overline{B}_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

é $\sigma(L^p, L^q)$ -metrizável, pelo teorema 1.53, pois seu dual topológico $X' = L^q[-\pi, \pi]$, onde $q^{-1} + p^{-1} = 1$, é separável e, é $\sigma(L^p, L^q)$ -compacta, pelo teorema (1.48) (Alaoglu).

Disto tudo, $\overline{B}_X$ é sequencialmente compacto na topologia $\sigma(L^p, L^q)$. Assim, existe subsequência $\{\tilde{f}_{r_{n_j}}\}$ de $\{\tilde{f}_{r_n}\}$ que converge nesta topologia, onde $\tilde{f}_{r_n}(\theta) = f((1 - \frac{1}{n})e^{i\theta})$. Portanto, para toda $G \in L^q$, temos bem definido o funcional linear $L : L^q[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dado por:

$$L(G) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) f_{r_{n_j}}(t) dt$$

Temos que

$$|L(G)| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|G\|_q \|f_{r_{n_j}}\|_p \leq \|G\|_q \quad (3.12)$$

daí segue que L é um funcional linear limitado e, portanto, existe $F \in L^p$ tal que:

$$L(G) = \int_{-\pi}^{\pi} G(t) F(t) dt \quad (3.13)$$

Tomemos $G(t) = P_r(\theta - t) \in L^q$. Pela definição, segue que cada função f_{r_n} é harmônica. Assim, pelo lema (3.10),

$$f_{r_{n_j}}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f_{r_{n_j}}(e^{it}) dt$$

ou ainda,

$$f((1 - \frac{1}{n_j})re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f((1 - \frac{1}{n_j})e^{it}) dt$$

Assim,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f_{r_{n_j}}(e^{it}) dt = \lim_{j \rightarrow \infty} 2\pi f((1 - \frac{1}{n_j})re^{i\theta}) = 2\pi f(re^{i\theta})$$

sendo a última igualdade proveniente do fato de f ser harmônica no disco aberto D e, portanto, contínua.

Disto tudo e da equação (3.13) segue que para $0 \leq r < 1$ que :

$$2\pi f(re^{i\theta}) = L(G) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(t) dt$$

E portanto,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(t) dt$$

onde $F \in L^p$, obtendo o desejado.

Para o caso $p = \infty$ a demonstração é análoga, bastando utilizar do teorema de Alaoglu, onde sendo $X = L^\infty$, temos que a bola

$$\overline{B_X} = \{x \in X' : \|x\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia fraca* de $X = L^\infty$ sendo ainda tal bola metrizável pois, L^1 é separável e $(L^1)' = L^\infty$. ■

Teorema 3.11. Temos que f é a integral de Poisson de uma função integrável no círculo se e só se, as funções do conjunto $\{\tilde{f}_r\}_{0 \leq r < 1}$ convergem em $L^1[-\pi, \pi]$ para alguma função $\tilde{g} \in L^1[-\pi, \pi]$, quando $r \rightarrow 1$.

Prova: ($\Rightarrow$) Esta implicação foi provada no teorema (3.5).

($\Leftarrow$) Como f é harmônica em D , então para $0 \leq r < 1$

$$\tilde{f}_r(\theta) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

Temos $\tilde{f}_r \rightarrow \tilde{g}$ em $L^1[-\pi, \pi]$. Daí

$$\|\tilde{g}\|_1 \leq \|\tilde{g} - \tilde{f}_r\|_1 + \|\tilde{f}_r\|_1 < \epsilon + \|\tilde{f}_r\|_1$$

e assim $\tilde{g} \in L^1[-\pi, \pi]$.

Agora segue que:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}_r(\theta) e^{-in\theta} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(\theta) e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}_r(\theta) - \tilde{g}(\theta)| d\theta = \|\tilde{f}_r - \tilde{g}\|_1$$

Portanto, temos $c_n r^{|n|} \rightarrow \tilde{c}_n$, quando $r \rightarrow 1$, onde $\{\tilde{c}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é o conjunto dos coeficientes de Fourier de $\tilde{g}$. Mas também $c_n r^{|n|} \rightarrow c_n$. Logo $c_n = \tilde{c}_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Disto segue que como

$$P_r(\theta - t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)}$$

então

$$\tilde{f}_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(t) P_r(\theta - t) dt$$

lembrando que este resultado vem do que foi provado quando definimos convolução de duas funções no capítulo 2. E com isto concluímos o resultado, podendo-se escrever:

$$\tilde{f}(\theta) = \tilde{g}(\theta)$$

para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$. ■

Teorema 3.12. Temos que f é a integral de Poisson de uma função contínua $\tilde{f}$ no círculo unitário se e somente se, f_r converge uniformemente para $\tilde{f}$ quando $r \rightarrow 1$.

Prova: ($\Leftarrow$) O lema (3.10) possibilita escrever

$$f_r(r_1 e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}_r(t) P_{r_1}(\theta - t) dt$$

para $0 \leq r < 1$ e $0 \leq r_1 < 1$,

Daí pela hipótese, temos

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) P_{r_1}(\theta - t) dt$$

onde $\tilde{f} = \lim_{r \rightarrow 1} \tilde{f}_r$ e esta convergência é uniforme. Portanto, $\tilde{f} \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, com $f(\pi) = f(-\pi)$ e segue o resultado.

($\Rightarrow$) Pelo teorema (3.5), temos de imediato esta implicação. ■

Teorema 3.13. Temos que f é a integral de Poisson de uma medida finita complexa de Borel se e somente se, $\{\tilde{f}_r\}_{0 < r < 1}$ é um conjunto limitado em $L^1[-\pi, \pi]$.

Prova: ($\Rightarrow$) Temos por hipótese que

$$\tilde{f}_r(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)$$

onde μ é uma medida finita de Borel. Resulta portanto que,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}_r(\theta)| d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d|\mu|(t) d\theta = |\mu|([-\pi, \pi])$$

e como μ é finita complexa, segue o resultado.

($\Leftarrow$) Tomemos a família de medidas dadas por

$$d\mu_r = \tilde{f}_r(\theta) d\theta$$

Como o conjunto $\{\tilde{f}_r\}_{0 < r < 1}$ é limitado em $L^1 = L^1[-\pi, \pi]$, segue que existe um $K > 0$ tal que:

$$\mu_r([-\pi, \pi]) < K$$

para todo $0 \leq r < 1$.

Suponhamos, sem perda de generalidade que $|\mu_r| < 1$, para todo $0 \leq r < 1$. Já sabemos que o dual topológico, X' , de $X = \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, o espaço das funções contínuas em $[-\pi, \pi]$, é o espaço das medidas regulares de Borel em $[-\pi, \pi]$. Como X é separável, temos que

$$\overline{B}_{X'} = \{x \in X' : \|x\| \leq 1\}$$

é metrizável na topologia fraca* pelo teorema (1.53).

Pelo teorema (1.48) (Alaoglu), temos que $\overline{B}_{X'}$ é compacta na topologia fraca* de X' . Assim, $\overline{B}_{X'}$ é sequencialmente compacta na topologia $\sigma(X', X)$. Tomemos então uma sequência de medidas dadas por

$$d\mu_{r_n} = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}_{r_n}(\theta) d\theta$$

onde $r_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Segue de $\overline{B}_{X'}$ ser sequencialmente compacto que $\{\mu_{r_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ admite subsequência $\sigma(X', X)$ -convergente, digamos $\{\mu_{r_{n_j}}\}_{n_j \in \mathbb{N}}$, o que equivale a dizer que para toda $h \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, vale que existe o seguinte limite:

$$L(h) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} h d\mu_{r_{n_j}}$$

sendo que L é um funcional linear limitado, pois $\{\mu_r\}_{0 < r < 1}$ é limitado e, portanto, temos L como um elemento do dual de $X = \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, isto é, $L \in X'$. Assim, existe μ medida regular de Borel em $[-\pi, \pi]$ tal que:

$$L(h) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t) d\mu(t)$$

Tomando $h(\theta) = P_r(\theta - t)$, com $0 \leq r < 1$, segue do lema (3.10), lembrando que f é harmônica no disco aberto D , que

$$\tilde{f}_{r_{n_j}r}(\theta) = f\left(\left(1 - \frac{1}{n_j}\right)re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \tilde{f}_{r_{n_j}}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu_{r_{n_j}}(t)$$

Como f é harmônica no disco D , temos que f é contínua em D e, por este fato, obtemos para $0 \leq r < 1$:

$$f(re^{i\theta}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f\left(\left(1 - \frac{1}{n_j}\right)re^{i\theta}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)$$

concluindo o resultado. ■

Teorema 3.14. Definamos, como já feito em teoremas anteriores

$$\tilde{f}_r(\theta) = f(re^{i\theta})$$

para todo $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e $0 < r < 1$.

Então f é a integral de Poisson de uma medida de Borel finita positiva se e somente se, f é não-negativa.

Prova:($\Rightarrow$) Como para cada $0 \leq r < 1$, $P_r > 0$ e é contínua em $[-\pi, \pi]$ segue que

$$P_r(\theta - t) \geq k > 0$$

para todo $t \in [-\pi, \pi]$

Daí resulta da hipótese o seguinte:

$$\tilde{f}_r(\theta) = f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) \geq \int_{-\pi}^{\pi} K d\mu(t) = K\mu([-\pi, \pi]) > 0$$

e obtemos de imediato que f é não-negativa.

($\Leftarrow$) Sendo f harmônica em D , temos para $0 \leq r < 1$ que

$$\tilde{f}_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

Disto resulta,

$$2\pi f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \quad (*)$$

sendo a última das duas igualdades resultante do fato de que cada f_r é não-negativa.

Notemos que resulta imediatamente de (*) que $\{\tilde{f}_r\}_{0 \leq r < 1}$ é limitado em $L^1 = L^1[-\pi, \pi]$.

Pelo teorema anterior, segue que

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)$$

onde μ é uma medida finita complexa de Borel.

Pelo teorema (3.8), para toda $G \geq 0$ e contínua definida em $[-\pi, \pi]$, definindo $d\mu_r = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}_r(\theta) d\theta$ procede que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(t) d\mu(t) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) d\mu_r(t) \geq 0$$

pois para $0 \leq r < 1$, temos por hipótese que f é não-negativa e, disto, cada função do conjunto $\{\tilde{f}_r\}_{0 \leq r < 1}$ é não-negativa, o que implica que cada μ_r é não-negativa, obtendo assim o resultado desejado. ■

Este último teorema apresentado, é algumas vezes chamado *Teorema de Herglotz*.

3.4 Teorema de Fatou

Nesta seção, teremos como principal objetivo a apresentação do teorema de Fatou. Mas para isto, é necessário que antes apresentemos algumas definições e resultados, sempre considerando em cada caso μ medida de Borel. Começemos com o seguinte lema que auxiliará na demonstração do teorema de Fatou:

Lema 3.15. Seja a família de funções $\{K_r\}_{0 \leq r < 1}$ onde seus elementos são dados por:

$$K_r(t) = \frac{-\operatorname{sen}(t)}{r} P'_r(t)$$

para todo $t \in [-\pi, \pi]$. Então a família $\{K_r\}_{0 < r < 1}$ é uma identidade aproximada para $L^1 = L^1[-\pi, \pi]$.

Prova: Devemos mostrar que esta família satisfaz as seguintes três propriedades:

1. $K_r(t) \geq 0$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$
2. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_r(t) dt = 1$
3. Se $0 < \delta < \pi$, então:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sup_{|\theta| \geq \delta} |K_r(\theta)| = 0$$

Prova: Para o primeiro item, basta lembrar que:

$$P'_r(t) = \frac{-(1-r^2)2r \operatorname{sen}(t)}{(1-2r \cos(t) + r^2)^2}$$

daí segue de imediato que multiplicando tal função por $-\frac{1}{r} \operatorname{sen}(t) P'_r(t)$ esta constitui uma função positiva.

Para resolver o item 2) comecemos lembrando que $P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}$. Utilizando de integração por partes:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{r} \operatorname{sen}(t) P'_r(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{r} \operatorname{sen}(t) P_r(t) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{r} \cos(t) P_r(t) dt \right)$$

Do fato de $\operatorname{sen}(\pi) = \operatorname{sen}(-\pi) = 0$ obtemos que a primeira parcela da soma acima é nula. Utilizando da expressão usual para a função cosseno e da representação em série, para cada r , da função P_r vem que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) P_r(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r+r}{2} dt = 2\pi r$$

obtendo-se então o item 2).

Para o terceiro e último item, notemos que:

$$|K_r(t)| = \frac{1}{r} |\operatorname{sen}(t)| |P_r(t)| \leq \frac{1}{r} |P_r(t)|$$

Daí segue que:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sup_{|\theta| \geq \delta} |K_r(\theta)| \leq \lim_{r \rightarrow 1} \sup_{|\theta| \geq \delta} \frac{|P_r(\theta)|}{r} = \lim_{r \rightarrow 1} \sup_{|\theta| \geq \delta} |P_r(\theta)| = 0$$

e assim terminamos a demonstração do lema, sendo que neste último caso utilizamos do fato da família $\{P_r\}_{0 \leq r < 1}$ ser uma identidade aproximada para L^1 . ■

Definição 3.16. Seja μ uma medida finita complexa de Borel regular definida em $\mathbb{R}$. Diremos que μ é diferenciável, com respeito a medida de Lebesgue m , em um ponto $\theta_0 \in \mathbb{R}$ com $\frac{d\mu}{d\theta}(\theta_0) = \mu'(\theta_0) = a$, se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tal que:

$$\left| \frac{\mu(I)}{m(I)} - a \right| < \epsilon$$

onde I é um segmento aberto que contém θ_0 cujo comprimento é menor que δ .

Definição 3.17. A cada função complexa definida em $\mathbb{R}$, associamos sua função variação total T_f definida por:

$$T_f(x) = \sup \sum_{j=1}^N |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

onde o supremo é tomado sobre todo N e sobre todas as escolhas $\{x_j\}$ tais que:

$$-\infty \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N = x$$

Em geral,

$$0 \leq T_f(x) \leq T_f(y) \leq \infty \quad (*)$$

se $x < y$.

Se T_f é uma função limitada, $(*)$ implica que $V(f) = \lim_{x \rightarrow \infty} T_f(x)$ existe e é finito. Dizemos então que f é uma função de variação limitada e denotaremos a classe destas funções por BV.

No nosso caso, em lugar de $\mathbb{R}$, nos trabalhamos com $[-\pi, \pi]$.

Definição 3.18. Diremos que uma medida μ em $[-\pi, \pi]$ é induzida por uma função complexa f em $[-\pi, \pi]$ se $f(x) = \mu([-\pi, x])$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

Ainda se μ é diferenciável em θ_0 então f também o é. Prova-se ainda que f é uma função de variação limitada. Para isto, ver referência [13].

Definição 3.19. Diremos que $re^{i\theta}$ tende a $e^{i\theta_0}$ por um caminho não-tangencial ao círculo, quando tal caminho está contido dentro de um setor angular, de maneira que a abertura tal setor, feita com vértice no ponto $e^{i\theta_0}$, é simétrica com relação ao raio que une 0 a $e^{i\theta_0}$ e tem ângulo de abertura de medida inferior a 180° , para que o caminho não tangencie o círculo.

Proposição 3.20. Suponhamos que $re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta_0}$ por um caminho não-tangencial ao círculo, onde $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq r < 1$. Então, para todos os valores de r e θ considerados, existe $c > 0$ tal que:

$$\frac{\theta}{1-r} \leq c$$

Prova: Para cada r , o ângulo θ deve oscilar entre $\theta - \epsilon_r$ e $\theta + \epsilon_r$, ϵ_r alguma constante positiva, isto para que o caminho permaneça dentro do setor de convergência. O ângulo θ é considerado como sendo o ângulo entre o raio que une 0 a $e^{i\theta_0}$ e o eixo horizontal, com θ aumentando quando caminhamos em sentido anti-horário. Tudo isto pode ser traduzido da seguinte maneira:

$$|\theta - \theta_0| \leq a(1 - r)$$

onde a determina a abertura do setor angular e, notamos que a oscilação de θ deve diminuir a medida que r aumenta. Vejamos que para cada r podemos considerar $\epsilon_r = a(1 - r)$.

Daí segue diretamente que:

$$\frac{|\theta|}{1 - r} \leq a + \left| \frac{\theta_0}{1} \right| 1 - r$$

obtendo-se o resultado enunciado com $c = a + \frac{\theta_0}{1 - r}$. ■

Lema 3.21. Seja $\{\psi_\alpha\}_{0 \leq \alpha \leq 1}$ uma família de funções sendo cada elemento da família dado por:

$$\psi_\alpha(t) = \text{sen}(t)P'_r(\theta - t)$$

onde $\theta = \theta(\alpha)$ e $r = r(\alpha)$ são funções contínuas com $0 < r(\alpha) < 1$, $-\pi \leq \theta(\alpha) \leq \pi$, para $0 \leq \alpha < 1$ e quando $\alpha = 1$, $r(1) = 1$ e $\theta(1) = \theta_0 = 0$.

Nas condições dadas, esta família de funções satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} |\psi_\alpha(t)| dt$ é limitada quando $\alpha \rightarrow 1$;
2. $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_\alpha(t) dt = 1$;
3. Se $0 < \delta < \pi$, então

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\psi_\alpha(t)| = 0$$

Prova: Começemos provando o item 1):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi_\alpha(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\text{sen}(t+\theta)P'_r(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\text{sen}(t)\cos(\theta) + \text{sen}(\theta)\cos(t)| |P'_r(t)| dt \quad (*)$$

para a primeira igualdade utilizamos da mudança de variável de t para $t + \theta$, além da periodicidade das funções sen e P'_r para todo $0 \leq r < 1$.

Dando continuidade, pelo que temos em (*):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi_\alpha(t)| dt \leq \frac{1}{2\pi} |\text{sen}(\theta)| \int_{-\pi}^{\pi} |P'_r(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\text{sen}(t)P'_r(t)| dt \quad (3.14)$$

Lembremos da família $\{K_r\}_{0 < r < 1}$ apresentada no lema (3.15). Provamos que esta família é uma identidade de aproximada para $L^1 = L^1[-\pi, \pi]$. Daí quando $\alpha \rightarrow 1$, temos que $r(\alpha) \rightarrow r(1) = 1$ e, assim:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} |K_r(t)| = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left| -\frac{\operatorname{sen}(t)}{r} P'_r(t) \right| = 0 \quad (3.15)$$

para $|t| \geq \delta$ onde $0 < \delta < \pi$.

Trabalhemos com a segunda parcela da soma a direita da desigualdade em (3.14). Dado $\epsilon > 0$ existe um $\pi > \delta > 0$ tal que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen}(t) P'_r(t)| dt = \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\operatorname{sen}(t)}{r} P'_r(t) \right| dt \leq \frac{r}{2\pi} \left(\int_{|t| \geq \delta} |\operatorname{sen}(t) P'_r(t)| dt + \epsilon \right)$$

para $|\alpha - 1| < \delta$ e, pelo que apresentamos em (3.15), resulta que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen}(t) P'_r(t)| dt = 0$$

Lembremos que:

$$P'_r(t) = \frac{-(1-r^2)2r\operatorname{sen}(t)}{(1-2r\cos(t)+r^2)^2}$$

e portanto, $|P'_r|$ é uma função par, donde obtemos

$$|\operatorname{sen}(\theta)| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P'_r(t)| dt = |\operatorname{sen}(\theta)| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 |P'_r(t)| dt = |\operatorname{sen}(\theta)| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 P'_r(t) dt$$

mas,

$$|\operatorname{sen}(\theta)| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 P'_r(t) dt = \frac{1}{\pi} |\operatorname{sen}(\theta)| [P_r(0) - P_r(-\pi)] = \frac{1}{\pi} |\operatorname{sen}(\theta)| \left[\frac{1+r}{1-r} - \frac{1-r}{1+r} \right] \quad (3.16)$$

utilizando da desigualdade $|\operatorname{sen}(\theta)| \leq |\theta|$ e desconsiderando a subtração da parcela

$$\frac{1-r}{1+r}$$

na expressão dada em (3.16), nós temos:

$$|\operatorname{sen}(\theta)| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 P'_r(t) dt \leq \frac{1+r}{\pi} \left(\frac{|\theta|}{1-r} \right) \quad (3.17)$$

lembrando que para $\alpha < 1$ temos pela proposição (3.20) que

$$\left(\frac{|\theta|}{1-r} \right) \leq K \quad (3.18)$$

onde K é alguma constante positiva.

Segue agora das expressões (3.17) e (3.18) que

$$0 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi_{\alpha}(t)| dt \leq \frac{2}{\pi} K$$

e com isto, demonstramos o item 1).

Demonstremos agora o item 2). Temos, por definição que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{\alpha}(t) dt = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(t) P_r'(\theta - t) dt$$

utilizando de integração por partes segue:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(t) P_r'(\theta - t) dt = -\operatorname{sen}(t) P_r(\theta - t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) P_r(\theta - t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) P_r(\theta - t) dt$$

isto porque $-\operatorname{sen}(t) P_r(\theta - t) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Agora,

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{e} \quad P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)}$$

Logo,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) P_r(\theta - t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(e^{it} + e^{-it})}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r e^{i\theta}}{2} + \frac{r e^{-i\theta}}{2} dt = 2\pi r \cos(\theta)$$

Disto tudo,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{\alpha}(t) dt = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{2\pi r \cos(\theta)}{2\pi} = \cos(\theta_0) = \cos(0) = 1$$

concluindo a demonstração do item 2).

Terminemos então este lema, com a demonstração do item 3).

Temos então que:

$$\psi_{\alpha}(t) = \operatorname{sen}(t) P_r'(\theta - t)$$

onde

$$\frac{dP_r}{dt}(\theta - t) = P_r'(\theta - t) = \frac{(-1)(1 - r^2)(2r \operatorname{sen}(\theta - t))}{(1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2)^2}$$

Como $\operatorname{sen}(t - \theta) = -\operatorname{sen}(\theta - t)$ resulta:

$$\operatorname{sen}(t)P'_r(\theta - t) = \frac{2r\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(t - \theta)}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}P_r(\theta - t)$$

lembrando que $P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}$.

Assim, se $|t| \geq \delta > 0$, nós temos:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ \theta \rightarrow 0}} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\psi_\alpha(t)| = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ \theta \rightarrow 0}} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left| \frac{2r\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(t - \theta)}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \right| P_r(\theta - t)$$

E como $\{P_r\}_{0 \leq r \leq 1}$ é uma identidade de aproximada para L^1 e quando fazemos o limite em r e θ vale que

$$\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left| \frac{2r\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(t - \theta)}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \right|$$

é limitado, então o limite acima é igual a zero, concluindo a demonstração de 3). ■

3.4.1 Demonstração do Teorema de Fatou

Teorema 3.22. (Teorema de Fatou): Seja μ uma medida finita complexa de Borel regular sobre o círculo unitário, e seja f harmônica no disco unitário aberto definida por:

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)$$

Seja θ_0 um ponto qualquer onde μ é diferenciável com respeito a medida de Lebesgue. Então

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta_0}) = 2\pi\mu'(\theta_0)$$

E ainda,

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ \theta \rightarrow \theta_0}} f(re^{i\theta}) = 2\pi\mu'(\theta_0)$$

quando o ponto $z = re^{i\theta}$ aproxima de $e^{i\theta_0}$ ao longo de qualquer caminho no disco aberto não tangencial ao círculo unitário.

Prova: Como μ é diferenciável em θ_0 e é uma medida de Borel, definindo $F(x) = \mu([-\pi, x])$, $-\pi \leq x \leq \pi$, temos μ induzida por F com $F \in BV$ diferenciável em θ_0 obtendo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} g dF \tag{3.19}$$

para toda g integrável em $[-\pi, \pi]$.

Veamos que se $d\mu = d\theta$, então:

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\theta = 2\pi = 2\pi \frac{d\theta}{d\theta}(\theta_0)$$

lembrando que a família $\{P_r\}_{0 \leq r \leq 1}$ uma identidade aproximada.

Neste caso é claro que quando $r \rightarrow 1$, obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta_0}) = 2\pi$$

e o resultado vale para a medida de Lebesgue, representada no caso por θ . Agora temos:

$$\mu([-\pi, \pi]) = \mu(C) = \int_{-\pi}^{\pi} d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} dF = F(\pi) - F(-\pi)$$

Podemos assumir $\mu(C) = 0$, trocando $d\mu - kd\theta$, para algum $k \in \mathbb{R}$, onde $k2\pi = \mu(C)$. Agora a função F que induz μ será tal que:

$$F(\pi) = F(-\pi)$$

Utilizemos de integração por partes no que segue:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P'_r(\theta - t) F(t) dt = -\frac{1}{2\pi} P_r(\theta - t) F(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) dF(t) \quad (3.20)$$

Lembremos que

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2}$$

Daí,

$$P'_r(\theta - t) = \frac{(-1)(1 - r^2)(2r \sin(\theta - t))}{(1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2)^2}$$

Como $F(\pi) = F(-\pi)$ e $P_r(\theta - \pi) = P_r(\theta + \pi)$, pois P_r tem período 2π , segue que a primeira parcela da soma da direita da equação em (3.20) é identicamente nula. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) dF(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P'_r(\theta - t) F(t) dt \end{aligned}$$

Agora segue com a mudança de variável de t para $\theta - t$ que:

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P'_r(\theta - t) F(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} P'_r(t) F(\theta - t) dt \\
&= \int_0^{\pi} P'_r(t) F(\theta - t) dt + \int_{-\pi}^0 P'_r(t) F(\theta - t) dt \\
&= \int_0^{\pi} P'_r(t) F(\theta - t) dt - \int_0^{\pi} P'_r(t) F(\theta + t) dt \quad (*)
\end{aligned}$$

Para a primeira igualdade utilizamos da 2π -periodicidade de P'_r e de F quando esta é estendida para toda a reta real e, para a última igualdade, utilizamos da mudança de variável de t para $-t$ e do fato de P'_r ser uma função ímpar.

Dando prosseguimento a partir de (*):

$$\begin{aligned}
f(re^{i\theta}) &= \int_{-\pi}^{\pi} P'_r(\theta - t) F(t) dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} P'_r(t) [F(\theta - t) - F(\theta + t)] dt \\
&= \int_0^{\pi} -\text{sen}(t) P'_r(t) \frac{[F(\theta + t) - F(\theta - t)]}{\text{sen}(t)} dt
\end{aligned}$$

Pelo fato de P'_r ser uma função ímpar segue que a função g dada por:

$$g(t) = -\text{sen}(t) P'_r(t) \frac{[F(\theta + t) - F(\theta - t)]}{\text{sen}(t)}$$

é par e, portanto,

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} -\text{sen}(t) P'_r(t) \frac{[F(\theta + t) - F(\theta - t)]}{2\text{sen}(t)} dt$$

Definamos a função G dada por:

$$G(t) = \frac{F(\theta_0 + t) - F(\theta_0 - t)}{2\text{sen}(t)}$$

e da diferenciabilidade de F em θ_0 podemos definir G contínua em $t = 0$ da seguinte maneira:

$$G(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\theta_0 + t) - F(\theta_0 - t)}{2\text{sen}(t)} = F'(\theta_0)$$

Como mostrado no lema (3.15) a família $\{K_r\}_{0 < r < 1}$ é uma identidade aproximada para $L^1[-\pi, \pi]$, onde para cada $0 \leq r < 1$

$$K_r(t) = \frac{-\text{sen}(t)}{r} P'_r(t)$$

Assim, deste fato e da continuidade da função G em 0 temos:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} f(re^{i\theta_0}) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) K_r(t) dt = G(0)$$

Mostremos que este limite é válido. Para isto, seja $0 < \delta < \pi$. Escrevamos:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|t| \geq \delta} [G(t) - G(0)] K_r(t) dt + \int_{-\delta}^{\delta} [G(t) - G(0)] K_r(t) dt \right| \\ & \leq \left| \int_{|t| \geq \delta} [G(t) - G(0)] K_r(t) dt \right| + \max_{-\delta \leq t \leq \delta} |G(t) - G(0)| \int_{-\delta}^{\delta} K_r(t) dt \quad (**) \end{aligned}$$

$$\text{Agora temos } G(t) - G(0) = \frac{F(\theta_0 + t) - F(\theta_0 - t)}{2\operatorname{sen}(t)} - F'(\theta_0)$$

Como F tem variação limitada, segue que para todo $t \in [-\pi, \pi]$ vale que

$$|G(t) - G(0)| < K$$

para algum $K > 0$.

Pela continuidade de G em zero, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $|t| < \delta$:

$$\max_{-\delta \leq t \leq \delta} |G(t) - G(0)| \int_{-\delta}^{\delta} K_r(t) dt < \epsilon$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que com o δ positivo acima indicado, podemos majorar a primeira parcela da soma em (**), utilizando do item 3) do lema (3.15), da seguinte forma:

$$\left| \int_{|t| \geq \delta} [G(t) - G(0)] K_r(t) dt \right| \leq \max_{|t| \geq \delta} |G(t) - G(0)| \int_{|t| \geq \delta} K_r(t) dt \leq K\epsilon$$

isto com $|r - 1| < \delta_1$.

Disto provamos que

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta_0}) = 2\pi F'(\theta_0) = 2\pi \frac{d\mu}{d\theta}(\theta_0) = 2\pi \mu'(\theta_0)$$

concluindo a demonstração da primeira parte do teorema.

Mostremos agora a segunda parte, ou seja, que

$$\lim f(re^{i\theta}) = 2\pi \mu'(\theta_0)$$

quando $re^{i\theta}$ tende a $e^{i\theta_0}$ por um caminho não-tangencial ao círculo.

Sem perda de generalidade consideraremos $\theta_0 = 0$. Subtraindo uma constante conveniente da função F que induz μ , não mudamos nem dF e nem a condição $F(-\pi) = F(\pi)$ e podemos supor $F(0) = 0$. Desta maneira:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{\operatorname{sen}(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t} \frac{t}{\operatorname{sen}(t)} = F'(0)$$

lembrando que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{sen}(t)} = 1$$

Definamos agora,

$$G(t) = \frac{F(t)}{\operatorname{sen}(t)} - F'(0) \quad \text{e} \quad I(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{\alpha}(t) dt$$

onde $\{\psi_{\alpha}\}_{0 \leq \alpha \leq 1}$ é a família de funções do lema (3.21).

Denotaremos $f(re^{i\theta}) = f(r, \theta)$, onde $r = r(\alpha)$ e $\theta = \theta(\alpha)$.

Como nós temos

$$\frac{1}{2\pi} f(r(\alpha), \theta(\alpha)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{\alpha}(t) \frac{F(t)}{\operatorname{sen}(t)} dt$$

nós obtemos considerando $G(0) = 0$ que:

$$\frac{1}{2\pi} f(r(\alpha), \theta(\alpha)) - I(\alpha) F'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \psi_{\alpha}(t) dt$$

Mostrando que quando $\alpha \rightarrow 1$, resulta que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \psi_{\alpha}(t) dt \rightarrow 0 \quad (3.21)$$

De fato, seja $\delta > 0$ e escrevamos as expressões:

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} G(t) \psi_{\alpha}(t) dt \right| \leq \max_{-\delta \leq t \leq \delta} |G(t)| \int_{-\delta}^{\delta} |\psi_{\alpha}(t)| dt \quad (3.22)$$

$$\left| \int_{|t| \geq \delta} G(t) K_{\alpha}(t) dt \right| \leq \max_{\delta \leq |t| \leq \pi} |G(t)| \int_{|t| \geq \delta} |\psi_{\alpha}(t)| dt \quad (3.23)$$

Como G é contínua em zero, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que a expressão à direita em (3.22) satisfaz:

$$\max_{-\delta \leq t \leq \delta} |G(t)| \int_{-\delta}^{\delta} |\psi_{\alpha}(t)| dt < \epsilon$$

Pelo item 3) do lema (3.21) para o δ positivo acima fixado e um $\epsilon > 0$ dado, como já feito nesta demonstração, existe um $\delta_1 > 0$ tal que a expressão a direita em (3.23) satisfaz:

$$\max_{\delta \leq |t| \leq \pi} |G(t)| \int_{|t| \geq \delta} |\psi_{\alpha}(t)| dt < \epsilon$$

sempre que $|\alpha - 1| < \delta_1$.

Do fato de $I(\alpha) \rightarrow 1$ quando $\alpha \rightarrow 1$, pelo item 2) do lema (3.21), nós obtemos por fim que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} f(r(\alpha), \theta(\alpha)) = F'(0) = \mu'(0)$$

demonstrando o desejado. ■

Observação: Consideramos na demonstração do teorema acima $\theta_0 = 0$. Para mostrar o mesmo resultado para $\theta_0 \neq 0$, devemos considerar as seguintes modificações:

$$F'(\theta_0) = \lim_{t \rightarrow \theta_0} \frac{F(t)}{\operatorname{sen}(t - \theta_0)}$$

isto porque sempre podemos reorganizar de forma que $F(\theta_0) = 0$; e como outra modificação:

$$G(t) = \frac{F(t)}{\operatorname{sen}(t - \theta_0)} - F'(\theta_0)$$

onde $F'(\theta_0) = \mu'(\theta_0)$.

3.4.2 Algumas Consequências do Teorema de Fatou

Na sequência terminamos este capítulo apresentando alguns corolários relacionados com o teorema de Fatou.

Corolário 2. Seja $f \in L^1(C)$. Então a integral de Poisson de f

$$\tilde{f}_r(\theta) = f_r(e^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)$$

onde $d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(t) dt$, é a medida de Lebesgue m normalizada e, $\tilde{f}(t) = f(e^{it})$, é tal que

$$\lim_{r \rightarrow 1} f_r(e^{i\theta})$$

existe quase-sempre para cada $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e ainda, vale quase-sempre que

$$\lim_{r \rightarrow 1} f_r(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) = \tilde{f}(\theta)$$

Mais geralmente, a integral de Poisson de uma medida finita μ tem limite não-tangencial igual quase-sempre a derivada de μ com respeito a medida de Lebesgue normalizada.

Prova: No caso, basta mostrar que $\frac{d\mu}{dt}(t)$ existe e vale quase-sempre que:

$$\frac{d\mu}{dt}(t) = \frac{\tilde{f}(t)}{2\pi}$$

para poder aplicar o Teorema de Fatou e obter o resultado.

Consideremos m a medida de Lebesgue. No nosso caso, $[-\pi, \pi] \in \sigma$ -álgebra. Como $\mu \ll m$, e

$$\mu([-\pi, \pi]) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) dt$$

segue do teorema de Radon-Nikodým, que a derivada de μ existe e é dada, quase-sempre, por

$$\frac{d\mu}{dt}(t) = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(t)$$

Agora seja μ uma medida σ -finita. Pelo teorema da decomposição de Lebesgue, $d\mu = d\lambda_1 + d\lambda_2$, onde λ_2 é absolutamente contínua com respeito a m . Pelo teorema de Radon-Nikodým, temos para alguma $\tilde{h} \in L^1[-\pi, \pi]$:

$$d\lambda_2 = \frac{\tilde{h}(t)}{2\pi} dt$$

Daí segue que

$$d\mu = \frac{\tilde{h}(t)}{2\pi} dt + d\lambda_1$$

Do fato de λ_1 ser mutuamente singular com respeito a m temos quase sempre que:

$$\frac{d\lambda_1}{dt}(t) = 0$$

Do fato de λ_2 ser tal que

$$\frac{d\lambda_2}{dt}(t) = \frac{1}{2\pi} \tilde{h}(t)$$

segue quase sempre que

$$\frac{d\mu}{dt}(t) = \frac{1}{2\pi} \tilde{h}(t)$$

Agora pelo teorema de Fatou, temos quase-sempre

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = 2\pi\mu'(\theta) = \tilde{h}(\theta)$$

e concluímos o desejado. ■

Corolário 3. Seja f uma função harmônica de valores complexos no disco unitário e suponha que as integrais

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta$$

são limitadas quando $r \rightarrow 1$ para $1 \leq p < \infty$ fixo. Então o limite radial

$$\tilde{f}(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$$

existe quase-sempre, e define uma função $\tilde{f}$ em $L^p[-\pi, \pi]$.

Se $p > 1$, então f é a integral de Poisson de $\tilde{f}$. Se $p = 1$, então f é a integral de Poisson de uma (única) medida finita, cuja parte absolutamente contínua é

$$\frac{1}{2\pi} \tilde{f} d\theta$$

Se f é uma função harmônica limitada, os valores em C existem quase sempre e definem uma função mensurável limitada $\tilde{f}$ cuja integral de Poisson é f .

Prova: Afirmar que as integrais

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \quad (*)$$

são limitadas quando $r \rightarrow 1$ é afirmar que existe $c > 0$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq c$$

para todo $r \geq r_0$, sendo r_0 algum número real positivo.

Caso $p > 1$, temos pelo teorema (3.9), que

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \tilde{f}(\theta) d\theta$$

para todo $r \geq r_0$ com $\tilde{f}$ uma função em $L^p[-\pi, \pi]$.

Pelo teorema de Fatou, definindo

$$d\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta$$

segue, quase-sempre que

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = 2\pi\mu'(\theta)$$

e pelo corolário anterior temos quase-sempre

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = \tilde{f}(\theta)$$

Caso tenhamos $p = 1$, segue do teorema (3.13) que

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)$$

onde μ é medida de Borel finita.

Assim, pelo teorema de Fatou, nós temos

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(r, \theta) = 2\pi\mu'(\theta)$$

pois do teorema de Radon-Nikodým, vale que

$$d\mu(\theta) = \tilde{f}(\theta)d\theta$$

onde $\tilde{f} \in L^1[-\pi, \pi]$.

O resultado segue do corolário anterior.

Para mostrar a unicidade, notemos que se μ_1 é uma outra medida finita de Borel tal que

$$d\mu_1 = \frac{1}{2\pi} \tilde{f} d\theta$$

então resulta que

$$0 = \int_{[-\pi, \pi]} 1 d(\mu_1 - \mu)$$

pois $d(\mu_1 - \mu) = d\mu_1 - d\mu = 0$, pois as duas medidas têm partes absolutamente contínuas iguais.

Se f harmônica é limitada, então para todo $p > 1$ fixo as integrais

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta$$

são limitadas quando r varia, seguindo o resultado, notando que $\tilde{f}$ é limitada pois

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = \tilde{f}(\theta)$$

quase-sempre. ■

Corolário 4. Uma função harmônica não-negativa no disco unitário, tem limites não-tangenciais em quase todo o ponto do círculo unitário.

Prova: Lembremos que pelo teorema (3.14), como f é harmônica não-negativa, então f é a integral de Poisson de uma medida μ finita positiva de Borel. Daí

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)$$

Utilizando do Teorema de Fatou, e do fato de $d\mu = \frac{\tilde{f}(\theta)}{2\pi} d\theta$, onde $\tilde{f} \in L^1[-\pi, \pi]$, segue o resultado desejado. ■

Capítulo 4

Álgebras de Banach

Começemos este capítulo com a seguinte definição:

Definição 4.1. Uma álgebra complexa A é um espaço vetorial complexo e um anel tal que a multiplicação do anel é uma aplicação bilinear.

Vamos supor que A tem um elemento unidade e , ou seja, vale $xe = ex = x$ para todo $x \in A$. Um elemento $x \in A$ será chamado invertível se ele admitir inverso, ou seja, existe x^{-1} tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. Mostra-se facilmente que tal inverso é único.

Definição 4.2. Uma álgebra complexa A é uma *álgebra de Banach* se for um espaço de Banach, onde a multiplicação e a norma são relacionadas pela desigualdade:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad (4.1)$$

para todo $x, y \in A$.

Uma álgebra de Banach é comutativa se $xy = yx$ para todo $x, y \in A$. Numa álgebra de Banach, vamos supor ainda que o elemento unidade e verifica que $\|e\| = 1$.

Observemos que a equação (4.1) faz com que a operação de multiplicação seja contínua. Ou seja, se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ em A , então $x_n y_n \rightarrow xy$ em A . Basta verificar a seguinte igualdade:

$$x_n y_n - xy = x_n y_n + xy_n - xy_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y)$$

Vejamos agora alguns exemplos de álgebras de Banach. O primeiro que segue já foi citado no capítulo 1), mas relembremos o mesmo por sua importância neste texto.

Exemplo 4.3. Seja $\mathcal{C}(X)$ o espaço do exemplo (1.42). Temos que $\mathcal{C}(X)$ é uma álgebra comutativa de Banach cuja a função constante $\mathbf{1}(x) = 1$ para todo $x \in X$, é a unidade desta álgebra.

Exemplo 4.4. Seja D o disco unitário aberto no plano complexo. Denotamos por $A(D)$ o conjunto das funções contínuas no fecho de D ($\overline{D}$) e, cujas restrições a D são holomorfas. É claro que esta constitui uma álgebra complexa, com a norma do supremo, denominada *álgebra do disco*.

Com o resultado da proposição seguinte e do que comentamos no exemplo (4.3), temos que a álgebra do disco é uma álgebra de Banach.

Proposição 4.5. Seja $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, o disco unitário fechado no plano complexo. Então a álgebra do disco, $A(D)$, é uma subálgebra fechada complexa da álgebra $\mathcal{C}(\overline{D})$, considerando em $\overline{D}$ a topologia induzida pela topologia usual (euclidiana) do plano complexo.

Prova: É claro que $A(D)$ é uma subálgebra de $\mathcal{C}(\overline{D})$. Dado $f \in \overline{A(D)}$, provaremos que $f \in A(D)$. Como $f \in \overline{A(D)} \subset \mathcal{C}(\overline{D})$, logo será suficiente provar que f é analítica em D . Sendo $f \in \overline{A(D)}$, existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset A(D)$ tal que $f_n \rightarrow f$. Logo $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre todos os subconjuntos compactos de D . Seja T um caminho triangular em D , logo T é compacto. Segue-se $f_n \rightarrow f$ uniformemente em T e, logo temos que

$$\int_T f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n$$

Como $f_n \in A(D)$ é analítica em D e T é um caminho fechado em D , temos que $\int_T f_n = 0$. Portanto, $\int_T f = 0$ para qualquer caminho triangular T . Logo, pelo teorema de Morera, temos que f é analítica em D . Assim, temos que $f \in A(D)$. Logo $A(D)$ é fechado. ■

É interessante notarmos que $A(D) \neq \mathcal{C}(\overline{D})$, bastando para isto notar que a função $f(z) = \bar{z}$, para todo $z \in \overline{D}$ é tal que $f \in \mathcal{C}(\overline{D})$ mas $f \notin A(D)$.

Exemplo 4.6. Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X, X)$ (espaço dos operadores lineares contínuos de X em X) com a operação de composição e com norma dada por

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

Então $\mathcal{L}(X, X)$ é uma álgebra não comutativa de Banach cujo elemento unidade é o operador identidade denotado por Id .

Exemplo 4.7. Seja o espaço $H^{\infty}(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é analítica e limitada no disco } D\}$. Munido da norma do supremo, $H^{\infty}(D)$ é uma álgebra de Banach comutativa com elemento unidade. Estudaremos este exemplo nos capítulos posteriores.

Exemplo 4.8. Para n um inteiro positivo, denotemos por $C^{(n)}[0, 1]$ o espaço vetorial das funções contínuas de valores complexos no intervalo $[0, 1]$, cujas derivadas até ordem n são contínuas. O espaço $C^{(n)}[0, 1]$ é uma álgebra de Banach com a multiplicação usual, e a norma dada por:

$$\|f\|_{C^{(n)}} = \sum_{k=0}^n \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|f^{(k)}(t)|}{k!}$$

Exemplo 4.9. Seja l^1 o conjunto das sequências $a = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ cujas normas $\|a\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$ são finitas. Se $a, b \in l^1$, definimos a multiplicação $c = a.b$ da forma

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_k$$

Com esta multiplicação, l^1 é uma álgebra comutativa de Banach.

4.1 Elementos Invertíveis

Nesta seção A sempre denotará uma álgebra complexa de Banach e G sempre denotará o conjunto dos elementos invertíveis de A .

Proposição 4.10. Se $x \in A$ e $\|x\| < k < 1$, então $e - x \in G$, e valem:

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (4.2)$$

$$\|(e - x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|} \quad (4.3)$$

Prova: Como $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, $\forall x, y \in A$, então $\|x^n\| \leq \|x\|^n$. Segue da hipótese que $\|x^n\| < k^n < 1$. Desta forma, temos que a sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $s_n = \sum_{j=0}^n x^j$, é de Cauchy. De fato:

$$\|s_n - s_m\| = \|x^{m+1} + \dots + x^n\| < \sum_{j=m+1}^n k^j = \frac{k^{m+1}}{k-1}(k^{n-m} - 1) < \frac{k^{m+1}}{1-k}$$

isto tudo utilizando de resultado sobre soma de séries geométricas e considerando-se $n \geq m$; vale ainda que a sequência $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$, com $t_m = \frac{k^{m+1}}{1-k}$, converge para zero, pois $k < 1$, mostrando que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy e, portanto convergente para algum $y \in A$.

Escrevamos agora as igualdades:

$$(e - x)s_n = e + (-x)^{n+1} = s_n(e - x)$$

Da convergência de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para y e do fato de $x^{n+1} \rightarrow 0$, pois $\|x^{n+1}\| \leq \|x\|^{n+1} < k^{n+1}$, obtemos:

$$(e - x)y = e = y(e - x)$$

seguindo que $(e - x)^{-1} = y$ e obtendo (4.2).

Agora analisando a equação (4.3), notamos que:

$$(e - x)^{-1} - (e + x) = \sum_{j=2}^{\infty} x^j + e + x - (e + x) = \sum_{j=2}^{\infty} x^j$$

Assim, resulta:

$$\|(e-x)^{-1} - (e+x)\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{1}{1-\|x\|} - 1 - \|x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$$

concluindo o resultado. ■

Proposição 4.11. Suponha $x \in G$, $\|x^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$, $h \in A$ e, $\|h\| = \beta < \alpha$. Então $x+h \in G$, e vale:

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$

Prova: Temos $\|x^{-1}h\| \leq \frac{\beta}{\alpha} < 1$, assim pela proposição (4.10) anterior, $e+x^{-1}h \in G$. Desde que $x+h = x(e+x^{-1}h)$, temos também $x+h \in G$ e $(x+h)^{-1} = (e+x^{-1}h)^{-1}x^{-1}$

Assim,

$$(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} = [(e+x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h]x^{-1}$$

e a desigualdade desejada é obtida também pela proposição (4.10) colocando $x^{-1}h$ no lugar de $-x$. ■

Corolário 5. G é um conjunto aberto e a função $x \mapsto x^{-1}$ é um homeomorfismo de G em G .

Prova: Provamos na proposição anterior que:

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$

onde $\|h\| = \beta$ e $\|x^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$.

Agora quando $\|h\| \rightarrow 0$, temos:

$$\|x^{-1}hx^{-1}\| \leq \|x^{-1}\|\|h\|\|x^{-1}\| \rightarrow 0 \quad (*_1)$$

Vale também,

$$\|[(x+h)^{-1} - x^{-1}] - [x^{-1}hx^{-1}]\| \leq \|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)} \quad (*_2)$$

Agora de $(*_1)$ e $(*_2)$ quando $\beta = \|h\| \rightarrow 0$:

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1}\| \rightarrow 0$$

mostrando portanto, que a função g que leva x em seu inverso x^{-1} é contínua.

Notemos que $g(G) \subset G$ e que $g : G \rightarrow G$ é invertível com $g^{-1} = g$ e, portanto, um homeomorfismo de G em G .

O fato de G ser um conjunto aberto vem da proposição (4.11). ■

Antes do próximo corolário, enunciemos uma definição.

Definição 4.12. O espectro de um elemento $x \in A$ é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $x - \lambda e$ não é invertível. Denotaremos o espectro de x por $\sigma(x)$.

Nota: Escreveremos $\lambda e = \lambda$.

Corolário 6. A função $x \mapsto x^{-1}$ é diferenciável. Sua diferencial em $\forall x \in G$ é o operador linear que leva $h \in A$ em $-x^{-1}hx^{-1}$.

Prova: Lembremos que dada $F : U \subset A \rightarrow B$ (A e B espaços vetoriais normados e U aberto de A) diremos que F é diferenciável, com diferencial T se dados $\epsilon > 0$ e $x \in U$ existir $\delta > 0$ tal que:

$$\|F(x+h) - F(x) - T(x)h\| \leq \epsilon \|h\|$$

para todo $\|h\| \leq \delta$, onde T é, por definição, uma função tal que:

$$\begin{aligned} T : A &\rightarrow \mathcal{L}(A, B) \\ x &\mapsto T(x) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}(A, B)$ representa o conjunto das transformações lineares e contínuas de A em B .

No caso, temos $g : G \rightarrow G \subset A$ diferenciável em cada $x \in G$.

$$x \mapsto x^{-1}$$

Basta tomar,

$$\begin{aligned} T : G &\longrightarrow \mathcal{L}(G) \\ x &\longmapsto T(x) \end{aligned}$$

onde $T(x)(h) = xh^{-1}x^{-1}$, $\forall h \in A$ que com $\|h\| = \beta$ temos:

$$\left\| \frac{g(x+h) - g(x) - T(x)(h)}{h} \right\| \leq \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta)}$$

Assim quando $\|h\| \rightarrow 0$, ou seja, $\beta \rightarrow 0$, segue o resultado.

O fato de $T(x)$ ser linear para cada $x \in A$, é imediato das propriedades das operações em A e da definição de T . ■

Corolário 7. Para todo $x \in A$, $\sigma(x)$ é compacto, e $|\lambda| \leq \|x\|$ se $\lambda \in \sigma(x)$.

Prova: Mostraremos que $\sigma(x)$ é fechado e limitado. Como $\sigma(x) \subseteq \mathbb{C}$, seguirá que $\sigma(x)$ é compacto.

a) $\sigma(x)$ é limitado:

Suponhamos que seja válido para algum $\lambda \in \sigma(x)$ que $|\lambda| > \|x\|$. Assim, $1 > \left\| \frac{x}{\lambda} \right\|$ e pela proposição (4.10), $e - \lambda^{-1}x \in G$. Disto, $x - \lambda e = -\lambda(e - \lambda^{-1}x) \in G$, ou seja, $\lambda \notin \sigma(x)$. Logo, se $\lambda \in \sigma(x)$, então $|\lambda| \leq \|x\|$, resultando que $\sigma(x)$ é limitado por $\|x\|$.

b) $\sigma(x)$ é fechado:

Por definição, $x - \lambda e \notin G \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(x)$. Como G é aberto pelo corolário (8), temos que G^c é fechado. Definamos $j : \mathbb{C} \rightarrow A$, dada por $j(\lambda) = x - \lambda e$. Dado $\epsilon > 0$, se $|\lambda - \lambda_1| < \delta$ segue:

$$\|x - \lambda_1 e - (x - \lambda e)\| = \|(\lambda - \lambda_1)e\| = |\lambda - \lambda_1|\|e\| = |\lambda - \lambda_1| < \epsilon \quad (4.4)$$

lembrando que impomos $\|e\| = 1$.

Resulta de (4.4) que j como definida é contínua. Daí como $j^{-1}(G^c) = \sigma(x)$, do fato de ser G^c fechado, obtemos que $\sigma(x)$ é fechado. ■

Corolário 8. $\sigma(x) \neq \emptyset, \forall x \in A$.

Prova: Seja $\lambda \notin \sigma(x)$, que existe pelo corolário anterior. Seja F um funcional linear limitado(contínuo) sobre A tal que $F[(x - \lambda)^{-1}] \neq 0$, que existe pelo teorema de Hahn-Banach. Definamos $f(\lambda) = F[(x - \lambda)^{-1}]$. Segue que f é analítica pois:

$$\begin{aligned} \frac{f(\lambda + h) - f(\lambda)}{h} &= \frac{1}{h}[F((x - \lambda - h)^{-1}) - F((x - \lambda)^{-1})] \\ &= \frac{1}{h}F((x - \lambda - h)^{-1} - (x - \lambda)^{-1}) \\ &= \frac{1}{h}F(h(x - \lambda - h)^{-1}(x - \lambda)^{-1}) \\ &= F((x - \lambda - h)^{-1}(x - \lambda)^{-1}) \end{aligned}$$

Portanto, quando $h \rightarrow 0$, da continuidade de F temos $f'(\lambda) = F((x - \lambda)^{-2})$. Logo f tem derivada contínua em todos os pontos.

Observemos ainda que $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0$ pois

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}F((\frac{1}{\lambda}x - 1)^{-1})$$

e sendo $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} F((\frac{1}{\lambda}x - 1)^{-1}) = F(-1)$, segue o resultado.

Se o espectro de x fosse vazio, então a cada funcional linear limitado F a função associada f é uma função inteira que tende a zero no infinito.

Sendo esta função f analítica e limitada, temos $f \equiv 0$, pelo teorema de Liouville. Em particular, $0 = f(0) = F(x^{-1})$. Daí $F(x^{-1}) = 0$ para todo funcional linear limitado F em A . Segue que $x^{-1} = 0$ pelo teorema de Hahn-Banach, o que é um absurdo completo. ■

Teorema 4.13. (Gelfand-Mazur): Se A é uma álgebra de Banach complexa com unidade na qual cada elemento não-nulo é invertível, então A é isometricamente isomorfo ao corpo complexo.

Prova: Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então ou $x - \lambda_1 e \neq 0$ ou $x - \lambda_2 e \neq 0$, isto é, pelo menos um deles é invertível por hipótese. Como $\sigma(x) \neq \emptyset$, pelo corolário (8), segue que $\sigma(x)$ é constituído de apenas um elemento, digamos $\lambda(x)$. Desde que $x - \lambda(x)e$ é não invertível ele deve ser 0 e, assim, $x = \lambda(x)e$.

Definamos:

$$\begin{aligned} \lambda &: A \longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \lambda(x) \end{aligned}$$

onde $x = \lambda(x)e$.

É fácil observar que esta função é bijetora e linear. Disto tudo, segue que λ é um isomorfismo. O fato de ser isometria decorre de:

$$|\lambda(x)| = \|\lambda(x)e\| = \|x\|, \forall x \in A$$

■

Definição 4.14. Para todo $x \in A$, o raio espectral $\rho(x)$ de x é o raio do menor disco fechado com centro na origem que contém $\sigma(x)$. (também chamado de norma espectral de x)

Observação: Notemos que tal disco fechado sempre existe, o que é afirmado pelo corolário (7).

Teorema 4.15. (Fórmula do Raio Espectral): Para todo $x \in A$, vale que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(x)$$

Prova: Sejam $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda^n \notin \sigma(x^n)$. Antes de prosseguirmos na demonstração propriamente dita, analisemos um fato. Sejam b_1, b_2 e a elementos de A tais que:

$$b_1 a = e = a b_2$$

Disto segue $(b_1 a) b_2 = b_2 \implies b_1 (a b_2) = b_2 \implies b_1 = b_2$

Dando continuidade, temos:

$$(x^n - \lambda^n e) = (x - \lambda e)(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1} e) \quad (4.5)$$

Multiplicando ambos os lados de (4.5) à direita por $(x^n - \lambda^n e)^{-1}$ resulta:

$$e = (x - \lambda e)[(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1} e)](x^n - \lambda^n e)^{-1}$$

Do comentário intermediário que fizemos segue que $(x - \lambda e)$ é invertível com inverso dado por $[(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1} e)](x^n - \lambda^n e)^{-1}$. Isto equivale a afirmar que $\lambda \notin \sigma(x)$. Portanto, se $\lambda \in \sigma(x)$, então $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$

Vale pelo corolário (7) que $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$ resultando desta maneira:

$$|\lambda| \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

para todo $\lambda \in \sigma(x)$.

Isto faz perceber de imediato, que pela definição de raio espectral vale:

$$\rho(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \quad (*_1)$$

Agora suponhamos que $|\lambda| > \|x\|$ ($\lambda \notin \sigma(x)$). Disto a sequência $(t_j) = \left(\sum_{n=0}^j \lambda^{-n-1} x^n \right)$ é convergente, pois prova-se que a mesma é de Cauchy lembrando que A é tido como espaço de Banach.

As seguintes igualdades são verificáveis:

$$(\lambda e - x) \left(\sum_{n=0}^j \lambda^{-n-1} x^n \right) = 1 + \lambda^{-j-1} x^{j+1} = \left(\sum_{n=0}^j \lambda^{-n-1} x^n \right) (\lambda e - x)$$

Da hipótese sobre a norma de x podemos afirmar que a sequência (t_j) converge para $-(x - \lambda e)^{-1}$. Como já vimos no corolário (8), se ϕ é um funcional linear limitado (contínuo) sobre A , a função definida por:

$$f(\lambda) = \phi[(x - \lambda e)^{-1}]$$

é uma função holomorfa sobre todo o conjunto $(\sigma(x))^c$ que tem como subconjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \rho(x)\}$.

E do que acabamos de afirmar sobre a sequência (t_n) juntamente com a continuidade de ϕ , para todo λ tal que $|\lambda| > \rho(x)$ vale:

$$f(\lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \phi(x^n) \lambda^{-n-1} \quad (4.6)$$

Em particular da convergência da série em (4.6), existe $B_\phi = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\phi(\lambda^{-n} x^n)|$, ou seja:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\phi(\lambda^{-n} x^n)| < \infty$$

Pelo teorema de Hahn-Banach a função $J : A \rightarrow A''$ (bidual topológico) dada por $J(x)(h) = h(x)$, $\forall h \in A'$ (dual topológico), é tal que $\|J(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in A$.

Agora, pelo teorema de Banach-Steinhaus, do fato de A' ser um espaço de Banach e da existência de B_ϕ para cada funcional linear contínuo em A , segue que para cada λ tal que $|\lambda| > \rho(x)$ existe um $C(\lambda)$ de forma que:

$$\|x^n \lambda^{-n}\| = \|J(x^n \lambda^{-n})\| < C(\lambda)$$

Multiplicando por $|\lambda|^n$ e tirando as raízes segue:

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| [C(\lambda)]^{\frac{1}{n}}$$

Como isto vale para todo λ onde $|\lambda| > \rho(x)$, dado $\epsilon > 0$ existe um $\lambda(\epsilon) = \rho(x) + \epsilon$ com o qual escrevemos:

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\rho(x) + \epsilon)C(\lambda(\epsilon))^{\frac{1}{n}}$$

Assim,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(x) \quad (*_2)$$

Das desigualdades $(*_1)$ e $(*_2)$, obtemos de imediato o resultado desejado. ■

Observação: Sejam A e B álgebras de Banach. Se $A \subset B$, pode ocorrer $\sigma_A(x) \supsetneq \sigma_B(x)$ (o espectro de x em A conter o espectro de x em B). Agora $\rho_A(x) = \rho_B(x)$ (o raio espectral de x em A é o mesmo em B) ainda que $A \subsetneq B, \forall x \in A$.

4.2 Ideais e Homomorfismos

Nesta seção trabalharemos apenas com álgebras comutativas.

Definição 4.16. Um subconjunto I de uma álgebra complexa comutativa A é dita ser um ideal se satisfaz as seguintes condições:

- a) I é subespaço de A (no sentido de espaço vetorial);
- b) $xy \in I$ sempre que $x \in A$ e $y \in I$.

Se $I \neq A$, I é ideal próprio. Diremos que I é ideal maximal se for próprio e se para todo J ideal tal que $I \subseteq J \subseteq A$, tivermos $I = J$ ou $J = A$.

Observação: Um ideal próprio I não pode ter elementos inversíveis. Pois se $y, y^{-1} \in I \implies yy^{-1} = e \in I \implies I = A$

Definição 4.17. Se B é uma outra álgebra complexa comutativa, uma função $\varphi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo se satisfazer:

- 1) φ é linear;
- 2) φ preserva multiplicação: $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \forall x, y \in A$.

Definimos $\text{Ker}\varphi = \{x \in A; \varphi(x) = 0 \in B\}$. Temos que $\text{Ker}\varphi$ é um ideal, o que se prova de forma imediata.

Teorema 4.18. Se A é uma álgebra complexa comutativa com unidade, todo ideal próprio de A está contido em um ideal maximal. Se além disto, A é álgebra de Banach, todo ideal maximal de A é fechado.

Prova: Façamos a primeira parte utilizando diretamente o Lema de Zorn. Tomemos I , um ideal próprio de A . Seja $\mathbb{P}$ o conjunto parcialmente ordenado por inclusão de todos os ideais próprios de A que contém I . Seja ϑ , uma subcoleção de $\mathbb{P}$ totalmente ordenada pela inclusão.

Seja M a união de todos os elementos de $\mathcal{V}$. É fácil ver que M é um ideal próprio, sendo este fato decorrente de $e \notin M$. Além de tudo, M é uma cota superior para $\mathcal{V}$. Pelo Lema de Zorn, $\mathbb{P}$ admite um elemento maximal, digamos J . Este ideal J satisfaz o desejado.

Agora vejamos a segunda parte. No caso de ser A álgebra de Banach, $\overline{M}$ é ideal se M for um ideal de A . Vejamos isto. Dados $x \in A$ e $y \in \overline{M} \setminus M$ (se $y \in M$ não há nada a fazer) então existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ tal que $y_n \rightarrow y$. Daí:

$$\|xy - xy_n\| = \|x(y - y_n)\| \leq \|x\|\|y - y_n\|$$

onde a última parte da desigualdade tende a zero, concluindo que $xy_n \rightarrow xy$. Como $xy_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $xy \in \overline{M}$ concluindo que $\overline{M}$ é um ideal.

Do fato de A ser de Banach o conjunto G dos elementos inversíveis além de ser não vazio, é um conjunto aberto. Disto, como M não tem elementos inversíveis, $\overline{M} \neq A$. Sendo M maximal, só podemos ter $\overline{M} = M$. ■

4.3 Espaços Quocientes e Álgebras Quocientes

Suponha que J é um subespaço de uma álgebra complexa comutativa A , e associe com cada $x \in A$ o seguinte conjunto:

$$\varphi(x) = x + J = \{x + y; y \in J\}$$

sendo tal conjunto uma classe lateral segundo a relação de equivalência $\sim$ dada por

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in J$$

para todo $x, y \in A$.

Denotaremos o conjunto formado por todas estas classes laterais por A/J . É claro que como J é subespaço vetorial de A , então A/J é um espaço vetorial com as operações:

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) \quad \lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x)$$

para todo $x, y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, sendo que estas operações estão bem definidas, ou seja, dados x_1, x_2, y_1 e $y_2 \in A$ se supormos $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ e $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$, então:

$$\varphi(x_1) + \varphi(y_1) = \varphi(x_2) + \varphi(y_2) \quad \text{e} \quad \lambda\varphi(x_1) = \lambda\varphi(x_2)$$

Também não é difícil mostrar que φ é uma transformação linear sobrejetora de A em A/J .

Admitamos agora que J não seja meramente um subespaço de A mas também um ideal próprio. Definimos em A/J a seguinte multiplicação:

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$$

onde $x, y \in A$.

Esta multiplicação está bem definido pois, se $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ e $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$, então $x_1 - x_2 \in J$ e $y_1 - y_2 \in J$ e, a igualdade:

$$x_1y_1 - x_2y_2 = (x_1 - x_2)y_1 + x_2(y_1 - y_2)$$

mostra que $x_1y_1 - x_2y_2 \in J$, isto é, $\varphi(x_1)\varphi(x_2) = \varphi(y_1)\varphi(y_2)$.

Com esta multiplicação, com a soma e a multiplicação por escalar definidos, A/J constitui uma álgebra. Segue ainda que φ é um homomorfismo, com núcleo $\text{Ker}\varphi = J$. É claro que o núcleo de um homomorfismo é um ideal. Do que acabamos de comentar, todo ideal é núcleo de algum homomorfismo. Segue ainda que se e é o elemento unidade de A , então $\varphi(e)$ é o elemento unidade de A/J . Na proposição que segue consideramos ainda J um ideal de A .

Proposição 4.19. Seja A uma álgebra complexa com elemento unidade e . Então A/J é um corpo se e, somente se, J é um ideal maximal.

Prova:($\Leftarrow$) Seja $I_x = \{ax + y; a \in A, y \in J\}$, com $x \in A$ e $x \notin J$. Temos que I_x é um ideal e $I_x \neq J$, pois $x \in I_x$ (isto do fato de A ter elemento unidade e). Como J é maximal, resulta $I_x = A$. Daí $ax + y = e$ para algum $a \in A$ e algum $y \in J$. Desta forma, $\varphi(a)\varphi(x) = \varphi(e)$, pois $ax - e = y \in J$. Logo todo elemento não nulo de A/J é invertível e A/J é um corpo.

($\Rightarrow$) Suponhamos que J não seja um ideal maximal. Assim, existe $\tilde{I}$ tal que $J \subsetneq \tilde{I} \subsetneq A$, com $\tilde{I}$ ideal. Tome $x \in \tilde{I}$, com $x \notin J$. Segue $I = \{ax + y; a \in A, y \in J\}$ é um ideal com $J \subsetneq I \subseteq \tilde{I}$ e $I \neq A$. Isto equivale a afirmar que $e \notin I$, ou ainda, $\varphi(x)$ não é invertível e, por final, que A/J não é um corpo. ■

Se A é um espaço normado linear, J é um subespaço fechado de A , e $\varphi(x) = x + J$ como definido anteriormente, é bem conhecida da análise funcional a seguinte norma em A/J , chamada de *norma quociente*:

$$\|\varphi(x)\| = \inf \{\|x + y\|; y \in J\} \quad (4.7)$$

A partir desta norma, temos o seguinte teorema, também bastante conhecido em análise funcional:

Teorema 4.20. Com a norma quociente em A temos para um ideal fechado J a validade das seguintes propriedades:

- a) A/J é um espaço normado linear;
- b) Se A é um espaço de Banach, assim é A/J ;
- c) Se A é álgebra de Banach comutativa e J é um ideal próprio fechado, então A/J é uma álgebra de Banach comutativa.

A partir do que já mostramos neste capítulo, daremos algumas propriedades relacionando uma álgebra comutativa complexa de Banach A , com elemento unidade e , ao conjunto de seus homomorfismo complexos. Para isto, começamos com a seguinte definição:

Definição 4.21. Denominaremos Δ para uma álgebra comutativa complexa de Banach A , com elemento unidade e , como sendo o conjunto dos homomorfismos complexos de A em $\mathbb{C}$, excluindo o homomorfismo nulo.

Na sequência, apresentaremos algumas proposições relativas a esta definição considerando sempre portanto, A uma álgebra comutativa complexa de Banach.

Proposição 4.22. Todo ideal maximal M de A é o núcleo de algum $h \in \Delta$.

Prova: Se M é maximal, temos que A/M constitui um corpo pela proposição (4.19). Desde que M é fechado, pelo teorema (4.18), A/M é de Banach pelo teorema (4.20). Ainda pelo teorema (4.13) como A/M é álgebra de Banach cujo todo elemento é invertível segue que A/M é isomorfo ao corpo dos complexos, digamos por um isomorfismo j .

Seja agora $h = j \circ \varphi$ com φ o homomorfismo canônico de A em A/M cujo $\text{Ker} \varphi = M$. Daí temos $h \in \Delta$ com núcleo $\text{Ker} h = M$. ■

Proposição 4.23. $\lambda \in \sigma(x) \iff h(x) = \lambda$ para algum $h \in \Delta$.

Prova: ($\implies$) Se $\lambda \in \sigma(x)$, então $x - \lambda e$ é não invertível. O conjunto dos elementos da forma $(x - \lambda e)y$ formam um ideal de A . Logo pelo teorema (4.18) ele está contido em um ideal maximal M de A que é pela proposição (4.22), o núcleo de algum $h \in \Delta$. Assim, $h(x - \lambda e) = 0$. Como $h(e) = 1$ ($h \neq 0 \in \Delta$) obtemos $h(x) = \lambda$.

($\impliedby$) Agora suponhamos que $\lambda \notin \sigma(x)$ e assim, existe $y \in A$ tal que $(x - \lambda e)y = e$. Desta forma, $h(x - \lambda e)h(y) = 1$ para toda $h \in \Delta$, mostrando que $h(x - \lambda e) \neq 0$ ou $h(x) \neq \lambda$. Isto conclui a demonstração. ■

Proposição 4.24. $x \in A$ é invertível $\iff h(x) \neq 0$ para todo $h \in \Delta$

Prova: Temos $x \in A$ é invertível $\iff 0 \notin \sigma(x)$. E o resultado segue da proposição (4.23). ■

Proposição 4.25. Para toda $h \in \Delta$ e todo $x \in A$ vale que $h(x) \in \sigma(x)$.

Prova: Este resultado é imediato da proposição (4.23). ■

Proposição 4.26. Para todo $x \in A$ e $h \in \Delta$ temos $|h(x)| \leq \rho(x) \leq \|x\|$. Com isto, temos que todo h visto como um funcional linear tem norma igual a 1, pois $\|e\| = 1$ e $h(e) = 1$. Em particular, cada $h \in \Delta$ é contínua.

Prova: Como $h(x) \in \sigma(x)$, pela proposição (4.23) e, $\rho(x) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(x)\}$, então claro que $|h(x)| \leq \rho(x)$. Pelo corolário (7) temos $|\lambda| \leq \|x\|$, para todo $\lambda \in \sigma(x)$, obtendo diretamente pela definição de $\rho(x)$ que $\rho(x) \leq \|x\|$ para todo $x \in A$. ■

4.4 Aplicações

Nesta seção apresentaremos algumas aplicações dos resultados obtidos anteriormente sobre Álgebras de Banach. Antes da primeira aplicação, é necessário que apresentemos um lema como segue:

Lema 4.27. Seja $A(D)$ a álgebra do exemplo (4.4). Então o conjunto dos polinômios constitui um subconjunto denso de $A(D)$.

Prova: Seja $f \in A(D)$. Como $\overline{D}$ é compacto e f é contínua em $\overline{D}$ temos que f é uniformemente contínua. Assim, dado $\epsilon > 0$ para algum $r < 1$ vale:

$$|f(z) - f(rz)| < \epsilon \quad (*)$$

para todo $z \in \overline{D}$.

Como f é analítica em C , a expansão de $f(rz)$ em polinômios de Taylor converge uniformemente para $f(rz)$, lembrando que $r < 1$ e $z \in \overline{D}$. Disto e de (*) temos a convergência uniforme de polinômios em $z \in \overline{D}$ para $f \in A(D)$, concluindo o desejado. ■

Proposição 4.28. Suponha que $f_1, f_2, \dots, f_n$ são membros de $A(D)$ tais que:

$$|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| > 0$$

para todo $z \in \overline{D}$. Então existem $g_1, \dots, g_n \in A(D)$ tais que:

$$\sum_{i=1}^n f_i(z)g_i(z) = 1$$

para todo $z \in \overline{D}$.

Prova: Seja o seguinte ideal de $A(D)$:

$$J = \left\{ \sum_{i=1}^n f_i h_i; h_i \in A(D) \right\}$$

Temos que mostrar que J contém o elemento identidade e da multiplicação, isto é, a função constante cuja imagem só tem 1 como elemento, o que equivale a mostrar que J não está contido propriamente em nenhum ideal maximal de $A(D)$. Pela proposição (4.22), basta provar que não existe homomorfismo h de $A(D)$ em $\mathbb{C}$, tal que $h(f_i) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, provando que $J \not\subseteq M$, para todo M ideal maximal de $A(D)$.

Seja h homomorfismo complexo de $A(D)$. Seja $f_0(z) = z$ para todo $z \in \overline{D}$. Pela definição de f_0 temos que $\sigma(f_0) = \overline{D}$, tomando f_0 como elemento de $A(D)$ com a multiplicação usual de funções. Pela proposição (4.25), $h(f_0) \in \overline{D}$, ou seja, $h(f_0) = \alpha$ para algum $\alpha \in \overline{D}$. Na verdade, aqui provamos que todo homomorfismo complexo definido em $A(D)$ é uma *avaliação*.

Assim, $h(f_0^n) = \alpha^n = f_0^n(\alpha)$ para $n = 1, 2, \dots$. Disto segue que $h(P) = P(\alpha)$ para todo polinômio P . Temos pelo lema (4.27) que o conjunto dos polinômios é denso em $A(D)$. Como h é contínua, (já vimos inclusive que $\|h\| = 1$ na proposição (4.26)) segue que $h(f) = f(\alpha)$ para toda $f \in A(D)$.

A hipótese de que $|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| > 0$, para todo $z \in \overline{D}$ diz que $|f_i(\alpha)| > 0$ para pelo menos um índice i com $1 \leq i \leq n$. Daí $h(f_i) = f_i(\alpha) \neq 0$. Nós provamos então que para cada $h \in \Delta(A(D))$ corresponde ao menos uma f_i de forma que $h(f_i) \neq 0$, com $1 \leq i \leq n$, o que mostra que $e \in J$ ou mais ainda, que $J = A(D)$. ■

Teorema 4.29. Sejam $\alpha \in \overline{D}$ e $M_\alpha = \{f \in A(D); f(\alpha) = 0\}$. Então M é um ideal maximal de $A(D)$ se, e somente se, $M = M_\alpha$ para algum $\alpha \in \overline{D}$.

Prova:($\Rightarrow$) Seja M um ideal maximal de $A(D)$. Então pela proposição (4.22), temos que M é o núcleo de alguma $h \in \Delta(A(D))$, ou seja, $h : A(D) \rightarrow \mathbb{C}$ é um homomorfismo. Disto, como $h(f) = f(\alpha)$ para algum $\alpha \in \overline{D}$, fato que mostramos na prova do teorema anterior para toda $f \in A(D)$, temos que $g(\alpha) = 0$ para toda $g \in M$ ($M \subset M_\alpha$) e se $h(g) = g(\alpha) = 0$, então $g \in M$ ($M_\alpha \subset M$). Logo $M = M_\alpha$.

($\Leftarrow$) Notemos que dada $f \in A(D)$, então $f - f(\alpha) \in M_\alpha$. Agora temos:

$$f = f(\alpha).e + [f - f(\alpha)]$$

onde e representa a função constante de valor 1.

Disto tudo, $A(D)$ é o ideal gerado por e e M . Portanto, M é um subespaço vetorial de codimensão um. Logo, M é um ideal maximal. ■

4.5 Teorema da Maximalidade de Wermer

Dentro desta seção, temos como objetivo a apresentar um teorema que caracteriza subálgebras fechadas do espaço $\mathcal{C}(C)$, onde C é o círculo unitário complexo, como definido no início do capítulo 3. Tal teorema é denominado *Teorema da Maximalidade de Wermer*.

Antes de apresentarmos o Teorema de Wermer, daremos algumas definições e resultados necessários para a prova do mesmo.

Definição 4.30. Dado $n \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{C}(C)$, escreveremos daqui para frente:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt$$

Definição 4.31. Um funcional $\varphi : \mathcal{C}(C) \rightarrow \mathbb{C}$ é dito *positivo* se $\varphi(f) \geq 0$ para toda $f \in \mathcal{C}(C)$ que satisfaz

$$f(z) \geq 0 \quad \forall z \in C$$

Lema 4.32. Seja $\Lambda : \mathcal{C}(C) \rightarrow \mathbb{C}$, um funcional linear tal que

$$\|\Lambda\| \leq 1 \quad \text{e} \quad \Lambda 1 = 1$$

Então Λ é um funcional linear positivo.

Prova: Basta mostrar que $\Lambda f \geq 0$ para toda $f \in \mathcal{C}(C)$ que satisfaz $0 \leq f(z) \leq 1, \forall z \in C$. Seja f como citada. Definamos $g = 2f - 1$. Notemos que $-1 \leq g \leq 1$ e, por isto, $|g + ir|^2 \leq 1 + r^2$, para toda constante real r . Seja também $\Lambda g = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Segue então das hipóteses que:

$$(\beta + r)^2 \leq |\alpha + i(\beta + r)|^2 = |\Lambda(g + ir)|^2 \leq 1 + r^2$$

lembrando que a última desigualdade vem do fato de que $\|\Lambda\| \leq 1$.

Assim, $\beta^2 + 2r\beta \leq 1$ para toda constante real r , resultando que só podemos ter $\beta = 0$. Como $\|g\| \leq 1$ temos então que $|\alpha| \leq 1$. Pela definição de g e de Λ ser linear, temos:

$$\Lambda(f) = \frac{1}{2}\Lambda(1+g) = \frac{1}{2}(1+\alpha) \geq 0$$

concluindo assim o resultado. ■

Lema 4.33. Seja $h \in \Delta(\mathcal{C}(C))$. Se h for um funcional linear positivo e $f \in \mathcal{C}(C)$ for uma função de imagem real, então $h(f)$ é um número real.

Prova: Por definição se $f \in \mathcal{C}(C)$, então f é contínua. Como C é compacto, então f é limitada, digamos $\beta \leq f \leq \alpha$. Caso $\beta \geq 0$, então $h(f) \geq 0$, pois h é positivo. Senão, tomamos $\psi = f + g$, onde g é uma função constante positiva definida em C de maneira que $f + g \geq 0$. Daí temos $h(f + g) \geq 0$ e $h(g) \geq 0$. Logo:

$$h(f + g) \geq 0 \Rightarrow h(f) + h(g) \geq 0 \Rightarrow h(f) \in \mathbb{R} \quad \blacksquare.$$

Lema 4.34. Nas condições do lema anterior temos:

$$h(\bar{f}) = \overline{h(f)}$$

ou seja, o conjugado de h aplicado em f é h aplicada ao conjugado de f para toda $f \in \mathcal{C} = \mathcal{C}(C)$.

Prova: Temos as seguintes igualdades:

$$h(f) + h(\bar{f}) = h(f + \bar{f}) = \overline{h(f + \bar{f})} = \overline{h(f)} + \overline{h(\bar{f})} \quad (*_1)$$

e

$$-i\overline{h(f)} + i\overline{h(\bar{f})} = \overline{h(if + i\bar{f})} = h(if + i\bar{f}) = ih(f) - ih(\bar{f}) \quad (*_2)$$

lembrando que a soma do número com seu conjugado resulta na parte real do número complexo, podendo-se escrever as equações acima a partir do que obtemos no lema anterior.

Podemos reescrever as equações $(*_1)$ e $(*_2)$ de maneira resumida da seguinte forma:

$$h(f) + h(\bar{f}) = \overline{h(\bar{f})} + \overline{h(f)} \quad (*_1)$$

$$-\overline{h(f)} + \overline{h(\bar{f})} = h(f) - h(\bar{f}) \quad (*_2)$$

somando as duas equações resulta que:

$$h(\bar{f}) = \overline{h(f)}$$

para toda $f \in \mathcal{C}$. ■

Antes de enunciarmos o próximo teorema, façamos a seguinte observação. Seja a aplicação dada por:

$$f \in A(D) \mapsto f|_C \in \mathcal{C}(C)$$

onde $f|_C$ denota a restrição de f a C .

É claro que esta aplicação é um homomorfismo isométrico de álgebras, considerando sempre a norma do supremo. Identificamos $A(D)$ com sua imagem $\tilde{A}$ segundo esta aplicação. Neste sentido, $A(D) \subset \mathcal{C}(C)$. Na verdade $\tilde{A}$ é o conjunto de todas as funções $f \in \mathcal{C}(C)$ que tem extensão em $\overline{D}$ e são analíticas em D . Agora podemos partir para o teorema que segue. Antes uma definição:

Definição 4.35. Um *polinômio trigonométrico* é uma soma finita da forma

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_N$ e $b_1, \dots, b_N$ são números complexos. Podemos escrevê-los ainda de outra forma:

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$$

Proposição 4.36. Sejam $f \in \mathcal{C}(C)$ e $\epsilon > 0$. Então existe um polinômio trigonométrico P tal que

$$|f(t) - P(t)| < \epsilon$$

Prova: Sugerimos [13], pg. 96.

Teorema 4.37. (Maximalidade de Wermer): Seja S uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}(C)$ que contenha a álgebra do disco $A(D)$. Então $S = \mathcal{C}(C)$ ou $S = A(D)$.

Reenunciaremos o mesmo teorema, de tal forma a apresentar mais idéias para a demonstração do mesmo. O enunciado anterior, torna mais claro e objetivo o resultado do teorema de Wermer.

Teorema 4.41. (Maximalidade de Wermer): Suponha $g \in \mathcal{C}(C)$ e $\hat{g}(n) \neq 0$ para algum $n < 0$. Então para toda $f \in \mathcal{C}(C)$ correspondem polinômios:

$$P_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{m(n)} a_{n,k} e^{ik\theta}$$

onde $m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é uma função e estes polinômios são tais que:

$$|f(e^{i\theta}) - \sum_{n=0}^N P_n(e^{i\theta}) g^n(e^{i\theta})| < \epsilon \quad (4.8)$$

para todo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Em outras palavras, se g é uma função contínua no disco fechado não analítica no interior do mesmo, então polinômios em $z = e^{i\theta}$ e g formam um subconjunto denso do conjunto das funções contínuas no círculo.

Explicando melhor a equivalência entre este enunciado e o anterior, lembremos que $f \in \tilde{A}$ se, e somente se, $f \in \mathcal{C}(C)$ e $\hat{f}(n) = 0 \forall n < 0$. Se S for uma subálgebra fechada de $\mathcal{C}(C)$ que contenha propriamente $\tilde{A}$, então S admite algum elemento com a propriedade da função g acima descrita. Sendo S uma álgebra, resulta que o conjunto dos polinômios apresentados na equação (4.8) está contido em S e, assim, $S = \tilde{A} = A(D)$ sendo esta última igualdade proveniente da identificação.

Prova: Seja B o fêcho em $\mathcal{C} = \mathcal{C}(C)$ do conjunto de todas as funções da forma:

$$\sum_{n=0}^N P_n g^n \quad (4.9)$$

O teorema afirma que $B = \mathcal{C}$. Vamos assumir $B \neq \mathcal{C}$. O conjunto de todas as funções como apresentado em (4.9), é uma álgebra complexa. Seu fêcho B é uma álgebra, sendo esta de Banach, pois B é fechado contido em $\mathcal{C}(C)$ que é uma álgebra de Banach. Claro que B contém a função f_0 tal que $f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ para todo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Da nossa hipótese de $B \neq \mathcal{C}$ obtemos que $\frac{1}{f_0} \notin B$, pois de outra maneira, B conteria f_0^n para todo $n \in \mathbb{Z}$ e, assim, conteria todos os polinômios trigonométricos. Mas estes formam um conjunto denso em $\mathcal{C}$, pela proposição (4.36). Daí teríamos $B = \mathcal{C}$.

Portanto, f_0 não é invertível em B . Disto $0 \in \sigma_B(f_0)$. Pela proposição (4.23), existe $h \in \Delta(B)$ tal que $h(f_0) = 0$. Todo o homomorfismo complexo satisfaz $h(e) = 1$, ou seja, h aplicado a função constante e , cuja imagem só tem 1 como elemento, dá como resultado o número complexo 1. Como $h(f_0) = 0$, nós temos para $n \in \mathbb{N}$:

$$h(f_0^n) = [h(f_0)]^n = 0$$

Pelo que já vimos, como B é álgebra comutativa complexa de Banach, pela proposição (4.26) $\|h\|_B \leq 1$. O Teorema de Hahn-Banach garante que h pode ser estendida a todo o $\mathcal{C}$ para uma função, que também chamaremos de h , com a mesma norma da função restrita a B . Desde que $h(e) = 1$ e $\|h\| \leq 1$, pelo lema (4.32), h é um funcional linear positivo em $\mathcal{C}$, pelo lema (4.33). Ainda pelo lema (4.34), temos $h(\overline{f}) = \overline{h(f)}$ para toda $f \in \mathcal{C}$ cuja imagem está contida em $\mathbb{R}$. Desde que f_0^{-n} é o conjugado de f_0^n então para $n \in \mathbb{Z}$:

$$h(f_0^n) = 0$$

e concluímos que $h(f_0^n) \neq 0$ apenas para $n = 0$ onde temos $h(e) = 1$.

Como o conjunto dos polinômios é denso em $\mathcal{C}$, e $\mathcal{C}$ é um espaço de Hausdorff com a norma do supremo, então é único o funcional h que tem as propriedades acima dadas. Logo temos:

$$h(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\theta \quad (f \in \mathcal{C})$$

Agora pela definição de B , temos que $gf_0^n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$. Como h é multiplicativo em B temos:

$$\hat{g}(-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = h(gf_0^n) = h(g)h(f_0^n) = 0 \quad (4.10)$$

isto utilizando das propriedades de h .

Agora a equação (4.10) contradiz a hipótese. ■

4.6 Caracterização de Ideais Fechados de $\mathcal{C}(X)$

Nesta seção, temos como objetivo principal apresentar um teorema que faz uma associação entre subconjuntos fechados próprios não-vazios, em um dado espaço topológico compacto de Hausdorff X , e ideais próprios fechados em $\mathcal{C}(X)$. Para a demonstração, consideravelmente extensa, deste teorema, utilizaremos de resultados sobre álgebras de Banach das seções anteriores. Porém antes de enunciarmos tal teorema, lembraremos algumas definições e resultados importantes de topologia geral.

Definição 4.42. Um T_1 -espaço é um espaço topológico no qual, dados qualquer par de pontos distintos, cada um destes tem uma vizinhança que não contém o outro.

Mostra-se que um T_1 -espaço é tal que todo o ponto é um conjunto fechado.

Definição 4.43. Um espaço topológico é completamente regular se ele é um T_1 -espaço e se dado $x \in X$ e F qualquer subconjunto fechado de X tal que $x \notin F$, então existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(F) = 0$ e $f(x) = 1$.

Definição 4.44. Um T_1 -espaço é normal se cada par de conjuntos fechados disjuntos podem ser separados por abertos disjuntos. Ou seja, dados F_1 e F_2 fechados com $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, existem abertos A_1 e A_2 tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, além de $A_1 \supset F_1$ e $A_2 \supset F_2$.

Teorema 4.45. Todo espaço compacto de Hausdorff é normal.

Prova: Sugerimos [14]. ■

Teorema 4.46. (Lema de Uryshon): Seja X um espaço normal e, sejam A e B subconjuntos fechados disjuntos de X . Então existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) = 0$ e $f(B) = 1$.

Prova: Sugerimos [14]. ■

Teorema 4.47. (Extensão de Tietze): Seja X um espaço normal, F um subconjunto fechado, e uma função contínua $f : F \rightarrow [a, b]$. Então f tem uma extensão contínua $\tilde{f} : X \rightarrow [a, b]$

Prova: Sugerimos [14]. ■

Enfim, o teorema principal desta seção, mencionado anteriormente:

Teorema 4.48. Seja X um espaço compacto de Hausdorff. Então para cada conjunto não-vazio F fechado em X , corresponde um único ideal próprio fechado $I(F)$ em $\mathcal{C}(X)$, definido por

$$I(F) = \{f : f \in \mathcal{C}(X) \text{ e } f(F) = 0\}$$

e portanto, $F \longrightarrow I(F)$ é uma função bijetora da classe de todos os subconjuntos fechados não-vazios de X sobre o conjunto de todos os ideais fechados próprios em $\mathcal{C}(X)$.

Prova: Podemos notar que $I(F) \neq \emptyset$, pois $f = 0$ está em $I(F)$. Claramente, $I(F)$ é um ideal, pois dada $g \in \mathcal{C}(X)$, temos $(g.f)(F) = g(F)f(F) = 0$, para toda $f \in I(F)$.

Também pode-se mostrar facilmente que $I(F)$ é um subespaço vetorial.

Agora mostremos que $I(F)$ é fechado. Seja então uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para alguma $f \in \mathcal{C}(X)$, ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$:

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon$$

Assim, dado $x \in F$ temos:

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon$$

e como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I(F)$, segue que $\|f(x)\| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e, portanto, $f(x) = 0$; resulta então que $f \in I(F)$ e $I(F)$ é fechado.

Também $I(F)$ é próprio, pois nenhuma função constante e não-nula está em $I(F)$.

Temos agora pelo fato de X ser compacto Hausdorff que o mesmo é completamente regular, pois o mesmo é normal. Disto tudo, dado $x \notin F$, existe $f \in \mathcal{C}(X)$, tal que $f(x) \neq 0$ e $f(F) = 0$. Segue que se $F_1 \neq F_2$ e F_1, F_2 são subconjuntos fechados não-vazios de X , então $I(F_1) \neq I(F_2)$ e a função em questão é injetora.

Falta mostrar agora a sobrejetividade. Seja então I um ideal próprio fechado em $\mathcal{C}(X)$. Tomemos o seguinte conjunto:

$$F = \{x : f(x) = 0, \forall f \in I\}$$

Temos que F é fechado pois $F = \bigcap_{f \in I} f^{-1}(\{0\})$. Agora mostremos que F é não-vazio.

Suponhamos porém que $F = \emptyset$. Assim, dado $x \in X$, existe $f_x \in I$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Desta maneira, pela continuidade de cada f_x , $f_x(y) \neq 0$ para todo $y \in U_x$ onde U_x é uma vizinhança aberta de x em X . Podemos tomar então uma cobertura de X dada por $\bigcup_{x \in X} U_x$.

Como X é compacto, podemos tomar uma subcobertura finita, digamos $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$, para correspondentes $x_1, \dots, x_n$ e algum $n \in \mathbb{N}$. Definamos a seguinte função:

$$f = \sum_{j=1}^n f_{x_j} \overline{f_{x_j}} = \sum_{j=1}^n |f_{x_j}|^2$$

sendo esta sempre positiva pela sua definição e também $f \in I$ pois I é um ideal; ainda resulta:

$$\mathbf{1} = f \frac{1}{f} \in I$$

e I não seria um ideal próprio, contrariando a hipótese, só nos restando que $F \neq \emptyset$.

É fácil ver pela definição que $I \subset I(F)$. Vamos mostrar agora que $I(F) \subset I$. Devemos mostrar que $f(F) = 0$ implica em $f \in I$.

Tomemos inicialmente $f \neq 0$ com f se anulando em algum conjunto aberto G que contenha F . Temos que G^c é portanto, um conjunto fechado e como $G^c \subset X$, X compacto de Hausdorff, resulta que G^c é subespaço compacto de X com a topologia induzida. Como $F \subset G$, para cada $x \in G^c$ existe $g_x \in I$ tal que $g_x(x) \neq 0$. Daí pela continuidade de g_x existe U_x vizinhança aberta de x tal que $g(U_x) \cap \{0\} = \emptyset$. De forma semelhante ao que já fizemos nesta demonstração resulta que existe uma subcobertura de X :

$$U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$$

com correspondentes $g_{x_1}, \dots, g_{x_n}$, tais que $g_{x_i}(U_{x_i}) \cap \{0\} = \emptyset$, $i = 1, \dots, n$.

Definamos então:

$$g_0 = \sum_{i=1}^n g_i \overline{g_i} = \sum_{i=1}^n |g_i|^2$$

e como I é um ideal, $g_0 \in I$, além de $g_0(x) > 0$ para todo $x \in G^c$.

Pelo teorema da extensão de Tietze, como G^c é fechado e X é normal, $\frac{1}{g_0}$ pode ser estendida para uma função $h \in \mathcal{C}(X)$. Pelo fato de $g_0 \in I$, temos que $g_0 h \in I$. Também $g_0 h(x) = 1$ para todo $x \in G^c$. Segue que $f = f g_0 h$. Disto tudo, $f \in I$.

Agora vejamos o caso geral. Para cada $\epsilon > 0$ sejam os conjuntos:

$$K = \{x : |f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}\}$$

e

$$L = \{x : |f(x)| \geq \epsilon\}$$

tanto K quanto J são subconjuntos fechados disjuntos de X .

Ocorre que $K \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$, pois se $f \in I(F)$, temos $f(x) = 0$ para algum $x \in X$ e $L \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Tomemos $\epsilon > 0$ de forma que estes dois conjuntos sejam não-vazios. Pelo lema de Uryshon, existe uma função $g \in \mathcal{C}(X)$, tal que $g(K) = 0$ e $g(L) = 1$ e $0 \leq g(x) \leq 1$ para todo $x \in X$. Nós agora definimos $h \in \mathcal{C}(X)$ por $h = fg$ e nós notamos que:

$$\|f - h\| = \|f(1 - g)\| \leq \epsilon \quad (*)$$

bastando para ver isto, analisar os casos onde $x \in L$ e $x \notin L$. É evidente que $h = 0$ no conjunto $G = \{x : |f(x)| < \frac{\epsilon}{3}\}$ e desde que este conjunto é aberto, segue do que já foi feito, que $h \in I$.

Mostramos então que dado $\epsilon > 0$ existe $h \in I$ tal que $(*)$ ocorre. Pelo fato de I ser fechado, temos que $f \in I$ e concluimos o desejado. ■

Capítulo 5

Espaços $H^p(D)$

Este capítulo será dedicado ao estudo de certos subespaços de $H(D)$, denominados espaços $H^p(D)$ (devido a G. H. Hardy), $0 < p \leq \infty$. Mostraremos algumas propriedades destes espaços, o que inclui um teorema publicado em 1917, atribuído aos irmãos Frederick e Manuel Riesz. No próximo e último capítulo, apresentaremos importantes exemplos de elementos de $H^\infty(D)$. Antes de definirmos os espaços $H^p(D)$ é necessário que apresentemos alguns conceitos e resultados como seguem na próxima seção.

5.1 Funções Subharmônicas

Definição 5.1. Uma função u definida em um aberto Ω do plano complexo é dita ser subharmônica se tem as seguintes propriedades:

- a) $-\infty \leq u(z) < \infty$ para todo $z \in \Omega$.
- b) u é semicontínua superiormente em Ω , ou seja, o conjunto

$$\{x : u(x) < \alpha\}$$

é aberto em Ω para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

- c) Sempre que $\overline{B}(a; r) \subset \Omega$, então

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta$$

- d) Nenhuma das integrais em c) é $-\infty$.

Pelos itens a) e b) temos que u é limitada sobre todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, resultando que as integrais em c) sempre existem. De fato, seja K_n o conjunto de todos os $z \in K$ para os quais $u(z) \geq n$. Então $K \supset K_1 \supset K_2 \dots$, e desta forma, como cada K_n é fechado, pois u é semicontínua superiormente, cada K_n é compacto. Daí só podemos ter $K_n = \emptyset$ para algum n ou $\bigcap K_n \neq \emptyset$, sendo que neste caso, teríamos $u(z) = \infty$ para algum $z \in K$, contrariando o item a).

O item d) afirma que os integrandos em c) pertencem a $L^1(D)$.

Observação: Toda função harmônica real é subharmônica, fato que vem do seguinte teorema:

Teorema 5.2. (Teorema do Valor Médio Para Funções Harmônicas): Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica e seja $\overline{B}(a, r) = \{a \in \Omega : |a| \leq r\}$. Então temos que:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it}) d\theta$$

Prova: Seja Υ um disco tal que $\overline{B}(a, r) = \{a \in \Omega : |a| \leq r\} \subset \Upsilon \subset \Omega$ e seja f uma função analítica em Υ tal que $u = \operatorname{Re}(f)$, que existe pelo teorema (3.1). Pela fórmula integral de Cauchy apresentada no capítulo 3, nós temos que:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Tomando a parte real em cada um dos lados da igualdade, obtemos o resultado. ■

Teorema 5.3. Suponhamos que u seja uma função subharmônica em Ω , K é subconjunto compacto de Ω , h é uma função real contínua em K que é harmônica no interior V de K e, $u(z) \leq h(z)$ em todos os pontos z da fronteira de K . Então $u(z) \leq h(z)$ para todo $z \in K$.

Prova: Definamos $u_1 = u - h$ e suponhamos que $u_1(z) > 0$ para algum $z \in V$. Desde que u_1 é contínua em K , u_1 admite um máximo m em K ; e desde que $u_1 \leq 0$ na fronteira de K , o conjunto $E = \{z \in K : u_1(z) = m\}$ é um subconjunto compacto não-vazio de V . Seja z_0 um ponto da fronteira de E . Então para algum $r > 0$ nós temos $\overline{B}(z_0; r) \subset V$, mas algum subarco da fronteira de $\overline{B}(z_0; r)$ está no complementar de E . Assim,

$$u_1(z_0) = m > \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_1(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

e isto significa que u_1 não é subharmônica em V .

Mas se u é subharmônica, assim é $u - h$ pelo teorema (5.2). Obtemos assim uma contradição e, isto conclui a demonstração. ■

Teorema 5.4. Suponhamos que u seja uma função subharmônica contínua em D , e

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) d\theta \quad (0 \leq r < 1)$$

Se $r_1 < r_2$, então $m(r_1) \leq m(r_2)$.

Prova: Seja h uma função contínua em $\overline{B}(0; r_2)$ que coincide com u na fronteira de $\overline{B}(0; r_2)$ e que é harmônica em $B(0; r_2)$. Pelo teorema (5.3), $u \leq h$ em $B(0; r_2)$. Assim, como h é harmônica, utilizando do teorema de Cauchy, nós temos:

$$m(r_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(r_1 e^{i\theta}) d\theta = h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(r_2 e^{i\theta}) d\theta = m(r_2)$$

■

5.2 Definindo os Espaços $H^p(D)$

Teorema 5.5. Se $f \in H(D)$ e se

$$M_p(f; r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (0 < p < \infty)$$

$$M_\infty(f; r) = \sup_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |f(re^{i\theta})|$$

então M_p e M_∞ são funções monotônicas crescentes de r em $[0, 1)$.

Prova: O caso M_p é consequência do teorema (5.4) e, o caso M_∞ segue do seguinte teorema conhecido como uma das versões do teorema do módulo máximo:

Teorema 5.6. (Teorema do Módulo Máximo): Seja D o disco aberto em $\mathbb{C}$ e, suponha f contínua em $\overline{D}$ e analítica em D . Então:

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{D}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial D\}$$

onde ∂D indica a fronteira de D .

Prova: Sugerimos [2], pg. 128. ■

Estes resultados sugerem a seguinte definição:

Definição 5.7. Para toda $f \in H(D)$ e para $0 < p \leq \infty$, definimos

$$\|f\|_{H^p} = \lim_{r \rightarrow 1} M_p(f; r)$$

Para $0 < p \leq \infty$, o conjunto $H^p(D)$ consiste das funções $f \in H(D)$ para as quais $\|f\|_{H^p} < \infty$. É fácil verificar que para cada p , no intervalo dado, $H^p(D)$ é subespaço de $H(D)$. É claro que $H^\infty \subset H^p \subset H^s$ se $0 < s < p < \infty$.

Temos que para o caso $1 \leq p \leq \infty$, $\|f\|_{H^p}$ satisfaz a desigualdade triangular, obtendo assim que $H^p(D)$ é um espaço normado. Para ver isto, basta aplicar a desigualdade de Minkowski para $M_p(f; r)$:

$$M_p(f + g; r) \leq M_p(f; r) + M_p(g; r) \quad (0 \leq r < 1)$$

E quando $r \rightarrow 1$, nós obtemos:

$$\|f + g\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^p} + \|g\|_{H^p}$$

Na verdade, $H^p(D)$ é um espaço de Banach, se $1 \leq p \leq \infty$. Para provar a completude, suponhamos que $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $H^p(D)$, $|z| \leq r < R < 1$, e aplique a fórmula integral de Cauchy para $f_n - f_m$, integrando ao longo do círculo de raio R . Isto nos dá as seguintes desigualdades:

$$(R - r)|f_n(z) - f_m(z)| \leq M_1(f_n - f_m; R) \leq M_p(f_n - f_m; R) \leq \|f_n - f_m\|_{H^p}$$

e nós concluímos que $\{f_n\}$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de D para uma função $f \in H(D)$. Dado um $\epsilon > 0$, existe um m tal que $\|f_n - f_m\|_{H^p} < \epsilon$ para $n > m$, e então, para todo $r < 1$,

$$M_p(f - f_m; r) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_p(f_n - f_m; r) \leq \epsilon$$

isto dá $\|f - f_m\|_{H^p} \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$.

Para $p < 1$, $H^p(D)$ é ainda um espaço vetorial, mas a desigualdade triangular não é satisfeita por $\|f\|_{H^p}$.

Segue do Teorema de Fatou que a função dada por

$$f \in H^p(D) \longrightarrow \tilde{f} \in L^p[-\pi, \pi]$$

é uma isometria entre $H^p(D)$ e um subespaço fechado de $L^p[-\pi, \pi]$, quando $1 < p \leq \infty$.

Quando $p = 1$ nós obtemos uma identificação entre $H^1(D)$ e o espaço fechado das medidas finitas em C que satisfazem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\mu(\theta) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

A partir do teorema dos irmãos F. e M. Riesz, apresentado na continuidade deste capítulo, torna-se possível identificar $H^1(D)$ com o espaço das funções $\tilde{f} \in L^1[-\pi, \pi]$ tais que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} \tilde{f}(\theta) d\theta = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

5.3 O Teorema de F. e M. Riesz

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados necessários, para a posterior apresentação do teorema dos irmãos F. e M. Riesz. Seja então $A(D)$ a álgebra do disco definida no capítulo 4 que tem norma definida por:

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{|z| \leq 1} |f(z)|$$

Obtenhamos na sequência alguns resultados relacionados com a mesma.

Teorema 5.8. As partes reais das funções em $A(D)$ são uniformemente densas no espaço das funções contínuas de valores reais no círculo unitário. Disto resulta que se μ é uma medida de Borel real finita no círculo tal que seja "ortogonal" a toda $f \in A(D)$, isto é,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f} d\mu = \int_C f d\mu = 0$$

então μ é a medida nula.

Prova: As partes real das funções em $A(D)$ contínuas no círculo, incluem os polinômios trigonométricos da forma:

$$P_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\theta} \quad (5.1)$$

onde $c_{-k} = \overline{c_k}$.

Se f é uma função contínua no círculo, cada média de Cesaro de f é um tal polinômio. Pelo fato ainda de ser contínua, segue que as médias convergem uniformemente para f pelo teorema (2.2). Disto, resulta que o conjunto dos polinômios em (5.1) acima, é denso no conjunto das funções reais contínuas, notando-se que P_n assume valores reais para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se μ é uma medida real finita, que "ortogonal" a toda $f \in A$, então μ é "ortogonal" a toda parte real u de $f = u + iv$:

$$0 = \int f d\mu = \int u d\mu + i \int v d\mu$$

pois daí obtém-se diretamente $\int u d\mu = 0$ e $\int v d\mu = 0$.

De tudo isto, segue que para toda função real contínua g em C vale:

$$\int g d\mu = 0$$

e tomando g a função constante e igual a 1, resulta:

$$\mu(C) = \int_C 1 d\mu = 0$$

provando que a medida μ é a medida nula sobre o círculo. ■

Corolário 9. Se μ é uma medida real finita no círculo tal que

$$\int_C f d\mu = 0$$

para toda $f \in A$ que se anula na origem, então μ é múltiplo constante da medida de Lebesgue.

Prova: Sejam

$$\lambda = \int_C d\mu \quad \text{e} \quad d\mu_1 = d\mu - \frac{1}{2\pi} \lambda d\theta$$

Vejamos que μ_1 é uma medida real que é ortogonal a toda $f \in A$. Podemos escrever:

$$\int_C f d\mu_1 = \int_C [f - f(0)] d\mu_1 + f(0) \int_C d\mu_1$$

Temos que

$$f(0) \int_C d\mu_1 = f(0) \int_C d\mu - \frac{\lambda f(0)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = f(0)\lambda - \lambda f(0) = 0$$

Agora,

$$\int_C [f(t) - f(0)] d\mu(t) = \int_C [f(t) - f(0)] d\mu(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(0)] \lambda d\theta$$

a primeira parcela da direita é nula por hipótese, pois $G(t) = f(t) - f(0)$ se anula na origem. A segunda parcela é nula pelo teorema de Cauchy, apresentado no capítulo 3).

Pelo teorema anterior, $\mu_1 = 0$ resultando que

$$d\mu = \frac{1}{2\pi} \lambda d\theta$$

como desejado. ■

Definição 5.9. Denotaremos por $A_0(D)$ o conjunto das funções $f \in A(D)$ tais que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f} d\theta = 0$$

Teorema 5.10. Seja μ uma medida finita positiva de Borel no círculo e suponha que a função $\mathbf{1}(x) = 1, \forall x \in C$, não esteja no subespaço fechado, S , de $L^2(\mu)$ que é o fecho do conjunto gerado pelas funções em $A_0(D)$. Seja F a projeção ortogonal de $\mathbf{1}$ neste subespaço fechado. Então são validos os seguintes itens:

1. A medida $|\mathbf{1} - F|^2 d\mu$ é um múltiplo constante não-nulo da medida de Lebesgue. Em particular, a medida de Lebesgue é absolutamente contínua com respeito a μ ;
2. A função $(\mathbf{1} - F)^{-1}$ está em $H^2(D)$;
3. Se h é a derivada de μ com respeito a medida normalizada de Lebesgue, então a função

$$(\mathbf{1} - F)h$$

está em $L^2 = L^2(\frac{m}{2\pi})$.

Prova de 1): Seja então S o subespaço fechado de $L^2(d\mu)$ gerado por A_0 , ou seja, $S = \overline{[A_0]}$. Desde que F é a projeção ortogonal da função $\mathbf{1}$, por definição temos que $(\mathbf{1} - F)$ é ortogonal a S . Escrevemos desta maneira o seguinte:

$$\mathbf{1} = F + F^\perp$$

onde $F^\perp \in S^\perp$.

Como $\mathbf{1} - F$ é ortogonal a S , temos que $\mathbf{1} - F$ é ortogonal a $A_0(D)$. Sejam agora $f \in A_0$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência em A_0 . Temos que:

$$\int f(\mathbf{1} - f_n) d\theta = \int f d\theta - \int f f_n d\theta = 0 - 0 = 0$$

obtendo-se tal resultado a partir da fórmula integral de Cauchy, pois

$$\int f f_n d\theta = f_n(0) f(0) = 0$$

e assim $f \cdot (\mathbf{1} - f_n) \in A_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como temos $F \in S$, então existe sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A_0$ tal que $f_n \rightarrow F$ em $L^2(\mu)$, isto é:

$$\int |f_n - F|^2 d\mu \rightarrow 0$$

Agora segue que:

$$\int |f(\mathbf{1} - f_n) - f(\mathbf{1} - F)|^2 d\mu = \int |f(F - f_n)|^2 d\mu \leq K \int |F - f_n|^2 d\mu$$

onde $K = \sup_{x \in \overline{D}} |f(x)|$, lembrando que este supremo existe pois f é contínua em $\overline{D}$.

Disto tudo, segue que $f(\mathbf{1} - F) \in S$, pois é o limite de elementos de A_0 . Logo a função $f(\mathbf{1} - F)$ é ortogonal a $(\mathbf{1} - F)$ para toda $f \in A_0$. Isto equivale a afirmar que:

$$\int f |\mathbf{1} - F|^2 d\mu = 0$$

para toda $f \in A_0$ o que inclui as funções f que se anulam na origem (este fato pelo teorema de Cauchy).

Segue portanto, pelo corolário anterior que $|\mathbf{1} - F|^2 d\mu = R d\theta$, com $R \neq 0$, pois $\mathbf{1} - F \neq 0$, vindo isto do fato de $\mathbf{1} \notin S$. É imediato que $|\mathbf{1} - F|^2 d\mu$ é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue. Com isto, concluímos a prova de 1).

Prova de 2): Pelo teorema da decomposição de Lebesgue, temos que $d\mu = d\mu_a + d\mu_s$, onde $d\mu_a$ e $d\mu_s$ são respectivamente as partes absolutamente contínua e mutuamente singular de μ com respeito a medida de Lebesgue. Ainda por este teorema, tal decomposição é única. Temos no caso $d\mu_s = 0$ pela parte final do item 1). Definamos então

$$d\mu_a = R |\mathbf{1} - F|^{-2} d\theta$$

onde

$$|\mathbf{1} - F|^{-2} d\mu = R d\theta$$

do item anterior; esta medida $d\mu_a$ está bem definida pois $\mathbf{1} - F = 0$ apenas num conjunto de medida nula segundo a medida de Lebesgue.

Agora vejamos que $(\mathbf{1} - F)^{-1} \in H^2(D)$. Seja $f \in A_0(D)$. Então temos que:

$$K \int (\mathbf{1} - F)^{-1} f d\theta = K \int (\mathbf{1} - \overline{F}) f |\mathbf{1} - F|^2 d\theta = \int (\mathbf{1} - \overline{F}) f d\mu = 0$$

sendo que a última igualdade vem do fato de $(\mathbf{1} - F)$ ser ortogonal a todo $f \in A_0(D)$, o que resulta no fato de $\overline{\mathbf{1} - F}$, o conjugado de $(\mathbf{1} - F)$, também ser ortogonal ao mesmo conjunto

$A_0(D)$; isto está garantido, inclusive, para funções da forma $f_n(\theta) = e^{in\theta}$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. Segue portanto, que $(\mathbf{1} - F)^{-1}$ é uma função analítica no disco D .

Falta provar que $\{\|(\mathbf{1} - F)_r^{-1}\|_2\}_{0 \leq r < 1}$ é limitado quando $r \rightarrow 1$, sendo $(\mathbf{1} - F)_r^{-1}(\theta) = (\mathbf{1} - F)^{-1}(re^{i\theta})$, para $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Temos que:

$$\|(\mathbf{1} - F)_1^{-1}\|_2 = \int |\mathbf{1} - F|^{-2} d\theta = \frac{1}{K} \int d\mu_a = \frac{1}{K} \int d\mu \quad (5.2)$$

sendo que a última integral é finita, pois μ é uma medida finita.

Daí como a função $J : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$J(r) = \|(\mathbf{1} - F)_r^{-1}\|_2$$

é crescente, pelo teorema (5.4) segue o resultado desejado.

Prova de 3): Pelo teorema da decomposição de Lebesgue, sabemos que $d\mu = d\mu_a + d\mu_s$, onde como já mencionado, temos $d\mu_a$ absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue e, μ_s é mutuamente singular com respeito a medida de Lebesgue. Prova-se que existe $h \in L^1(m)$, $d\theta$ a medida de Lebesgue, de maneira que:

$$d\mu_a = \frac{h}{2\pi} d\theta$$

Como $|\mathbf{1} - F|^2 d\mu$ é um múltiplo constante de $d\theta$, então $(\mathbf{1} - F)^2$ se anula μ_s -qs. Daí temos:

$$|\mathbf{1} - F|^2 d\mu = \frac{1}{2\pi} |\mathbf{1} - F|^2 h d\theta$$

Mas, $|\mathbf{1} - F|^2 d\mu = K d\theta$, com $K \neq 0$. Desta maneira, resulta:

$$|\mathbf{1} - F|^2 h = K 2\pi \quad d\theta\text{-qs}$$

ou ainda,

$$|\mathbf{1} - F| h = K 2\pi |\mathbf{1} - F|^{-1} \quad d\theta\text{-qs}$$

Como temos mostrado nas equações em 5.2 temos que $(\mathbf{1} - F)^{-1}$ está em $L^2(\frac{\theta}{2\pi})$, assim também está $(\mathbf{1} - F)h$. ■

Corolário 10. Se μ é uma medida positiva no círculo com parte absolutamente contínua $d\mu_a$, então vale que:

$$\inf_{f \in A_0} \int |\mathbf{1} - f|^2 d\mu = \inf_{f \in A_0} \int |\mathbf{1} - f|^2 d\mu_a$$

Em particular, para qualquer μ singular a função $\mathbf{1}$ está no fecho de $A_0(D)$ em $L^2(d\mu)$.

Prova: Sendo S , o fêcho de A_0 em $L^2(d\mu)$ escrevemos $\mathbf{1} = F + F^\perp$ onde $F \in S$ e $F \in S^\perp$. Assim,

$$\inf_{f \in A_0} \int |\mathbf{1} - f|^2 d\mu = \int |\mathbf{1} - F|^2 d\mu$$

que é o quadrado da distância da função $\mathbf{1}$ até o conjunto A_0 em $L^2(d\mu)$.

Temos que $d\mu_s$, a parte singular de $d\mu$, é tal que $(\mathbf{1} - F)$ se anula μ_s -qs. Portanto, vale que:

$$0 = \int (\mathbf{1} - F) f d\mu = \int (\mathbf{1} - F) f d\mu_a + \int (\mathbf{1} - F) f d\mu_s = \int (\mathbf{1} - F) f d\mu_a$$

para toda $f \in A_0$.

Logo $(\mathbf{1} - F) \in A_0(D)^\perp$ em $L^2(\mu_a)$.

Concluimos então:

$$\inf_{f \in A_0} \int |\mathbf{1} - f|^2 d\mu_a = \int |\mathbf{1} - F|^2 d\mu_a = \int |\mathbf{1} - F|^2 d\mu = \inf_{f \in A_0} \int |\mathbf{1} - f|^2 d\mu$$

Se μ é singular, então $d\mu_a = 0$ e assim

$$\inf_{f \in A_0} \int |\mathbf{1} - f|^2 d\mu = 0$$

o que implica que $\mathbf{1} \in \overline{A_0(D)}^{L^2(d\mu)}$. ■

Corolário 11. Seja μ uma medida complexa finita de Borel no círculo que é ortogonal a $A_0(D)$, isto é,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f} d\mu = \int_C f d\mu = 0$$

para toda $f \in A_0$. Então as partes singular e absolutamente contínua de μ são separadamente ortogonais a $A_0(D)$.

Prova: Pelo Teorema da decomposição de Lebesgue temos que $d\mu = d\mu_a + d\mu_s$, onde μ_a é absolutamente contínua com respeito a a medida m de Lebesgue e μ_s é mutuamente singular respeito a m . Temos ainda que

$$d\mu_a = \frac{h}{2\pi} d\theta$$

com $h \in L^1(m)$.

Seja ρ uma medida dada por:

$$d\rho = \frac{1}{2\pi} (1 + |h|) d\theta + d|\mu_s|$$

onde $|\mu_s|$ é a variação total da medida complexa finita μ_s .

Temos que μ é absolutamente contínua com respeito a ρ e ainda que:

$$\left| \frac{d\mu}{d\rho} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2\pi} h d\theta + d\mu_s}{\frac{1}{2\pi} (1 + |h|) d\theta + d|\mu_s|} \right| \leq \frac{\frac{|h|}{2\pi} d\theta + d|\mu_s|}{\frac{1}{2\pi} (1 + |h|) d\theta + d|\mu_s|} < 1$$

isto é, a derivada $\frac{d\mu}{d\rho}$ é limitada.

Podemos observar ainda que:

$$\frac{d\rho}{d\theta} \geq \frac{1}{2\pi} \quad (5.3)$$

Inicialmente mostraremos que $\mathbf{1} \notin S$, o fêcho em $L^2(\rho)$ de A_0 . Seja $f \in A_0$. Segue pela expressão dada em (5.3) que:

$$\int |\mathbf{1} - f|^2 d\rho \geq \frac{1}{2\pi} \int |\mathbf{1} - f|^2 d\theta \geq 1 \quad (5.4)$$

onde a última das duas desigualdades decorre de $f \in A_0$; vejamos este fato.

Dizer que g é ortogonal a A_0 é o mesmo que afirmar que

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int f \bar{g} d\theta = 0 \text{ para toda } f \in A_0$$

sendo $\bar{g}$ a função conjugada de g .

Mas segue que:

$$\frac{1}{2\pi} \int |\mathbf{1} - f|^2 d\theta = \langle \mathbf{1} - f, \mathbf{1} - f \rangle = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle - \langle \mathbf{1}, f \rangle - \langle f, \mathbf{1} \rangle + \langle f, f \rangle$$

Como $f \in A_0(D)$, $\langle \mathbf{1}, f \rangle = \langle f, \mathbf{1} \rangle = 0$ e é claro que $\langle f, f \rangle \geq 0$. Com tudo isto, justificamos a segunda desigualdade em (5.4).

Segue que se F é a projeção ortogonal de $\mathbf{1}$ no subespaço fechado de $L^2(d\rho)$ gerado por A_0 , então:

$$\inf_{f \in A_0} \int |\mathbf{1} - f|^2 d\rho = \int |\mathbf{1} - F|^2 d\rho \geq 1$$

Disto resulta que $\mathbf{1} \notin S$, onde S é o fêcho do subespaço $L^2(\rho)$ gerado por $A_0(D)$. Pelo último teorema, $(1 - F)^{-1} \in H^2(D)$ e também

$$(1 - F)(\mathbf{1} + |h|) \in L^2 = L^2 \left(\frac{1}{2\pi} d\theta \right)$$

e disto tudo $(1 - F)h \in L^2$.

Podemos agora mostrar que as partes absolutamente contínuas e mutuamente singulares com respeito a medida de Lebesgue m também são ortogonais a $A_0(D)$, desde que μ o seja.

Seja agora $g \in A_0$. Mostremos que

$$\int (\mathbf{1} - F) d\mu = 0$$

Como $F \in S$, existe sequência $f_n \rightarrow F$ em $L^2(d\rho)$ tal que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A_0$. Lembremos que do fato de $g \in A_0$, segue que g é limitada. Temos então:

$$\begin{aligned} \left| \int (\mathbf{1} - F) g d\mu - \int (\mathbf{1} - f_n) g d\mu \right| &= \left| \int (f_n - F) g d\mu \right| \\ &\leq \int |f_n - F| |g| d|\mu| \\ &\leq K \int |f_n - F| |g| d|\rho| \\ &\leq K \left(\int |f_n - F|^2 d|\rho| \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 d|\rho| \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

onde $K \geq \left| \frac{d\mu}{d\rho} \right|$.

Como g é limitada, vale que

$$\int |g|^2 d|\rho| < \infty$$

Disto tudo, resulta

$$\int (\mathbf{1} - F) g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\mathbf{1} - f_n) g d\mu$$

E do fato de ocorrer para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\int (\mathbf{1} - f_n) g d\mu = 0$$

pois $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A_0(D)$ e $g \in A_0(D)$, segue que

$$\int (\mathbf{1} - F) g d\mu = 0$$

Escrevamos agora $\rho = \rho_a + \rho_s$ onde temos ρ_a e ρ_s como sendo respectivamente as partes absolutamente contínua e singular de ρ com respeito a medida de Lebesgue. Temos que estas medidas são positivas, pois

$$d\rho_a = \frac{1}{2\pi} (\mathbf{1} + |h|) d\theta \quad \text{e} \quad d\rho_s = d|\mu_s|$$

Assim, procede

$$\int (\mathbf{1} - F) d\rho_s = 0$$

Podemos dizer ainda que

$$\int (\mathbf{1} - F) d|\mu_s| = 0 \Rightarrow \int (\mathbf{1} - F) d\mu_s = 0$$

e portanto, $(\mathbf{1} - F) = 0$ μ_s -quase sempre.

E como $d\mu = \frac{1}{2\pi} h d\theta + d\mu_s$, obtemos:

$$(\mathbf{1} - F) d\mu = \frac{1}{2\pi} (\mathbf{1} - F) h d\theta$$

De tudo o que foi feito então, procede:

$$\int (\mathbf{1} - F) g h d\theta = 0 \tag{5.5}$$

para toda $g \in A_0$.

Como $(\mathbf{1} - F)^{-1} \in H^2(D)$, então $(\mathbf{1} - F)^{-1} \in L^2\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)$ e, pelo teorema (2.2), temos que existe $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que

$$g_n \rightarrow (\mathbf{1} - F)^{-1}$$

em $L^2\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)$.

Como, pelo teorema de Cauchy, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $g_n f \in A_0(D)$, para qualquer $f \in A_0(D)$, então segue que:

$$\int g_n f (\mathbf{1} - F) h d\theta = 0$$

Pela convergência de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, segue que:

$$\int f h d\theta = 0$$

para toda $f \in A_0(D)$.

Segue então que a parte absolutamente contínua de μ é ortogonal a A_0 . Como μ é ortogonal a A_0 , resulta de imediato que μ_s é ortogonal a A_0 . ■

5.3.1 Demonstração do Teorema de F. e M. Riesz

Teorema 5.11. (F. e M. Riesz): Seja μ uma medida finita complexa de Borel no círculo unitário tal que

$$\int e^{in\theta} d\mu(\theta) = 0$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

Então μ é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue.

Prova: A hipótese nos leva a concluir que μ ortogonal a A_0 , ou seja,

$$\int f d\mu = 0$$

para toda $f \in A_0$, pois o conjunto de funções $\{e^{in\theta}\}$ gera o conjunto A_0 .

Escrevamos $\mu = \mu_a + \mu_s$. Pelo corolário anterior, temos que ambas μ_a e μ_s são ortogonais a A_0 . Pelo corolário (10), podemos encontrar uma sequência de funções f_n em A_0 que converge para $\mathbf{1}$ em $L^2(|\mu_s|)$. Sendo μ_s ortogonal a A_0 , obtemos

$$\int \mathbf{1} d\mu_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu_s = 0$$

Falta mostrar agora que

$$\int e^{in\theta} d\mu_s(\theta) = 0$$

para $n = -1, -2, -3, \dots$

Assim, do fato de $\mathbf{1}$ ser ortogonal a A_0 segundo a medida μ_s , resulta que $e^{-i\theta} d\mu_s$ é ortogonal a A_0 .

Dando prosseguimento, temos $e^{-2i\theta}$ também é ortogonal a A_0 e assim por diante.

Logo, resumindo, vale que

$$\int e^{in\theta} d\mu_s = 0$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, concluindo que μ_s é a medida nula, pois todos os seus coeficientes de Fourier são nulos e, que μ é absolutamente contínua. ■

Capítulo 6

A Álgebra $H^\infty(D)$

A álgebra $H^\infty(D)$ é a álgebra de Banach das funções analíticas limitadas no disco unitário. Nos preocuparemos aqui em apresentar apenas alguns elementos importantes da álgebra $H^\infty(D)$, os chamados *produtos de Blaschke*.

6.1 Produtos Infinitos

Nesta seção introduziremos lemas, teoremas e definições relacionados a produtos infinitos para, na seção seguinte, definirmos os denominados *produtos de Blaschke*.

Definição 6.1. Uma sequência $\{f_j\}$ de funções em uma região Ω converge uniformemente para uma função f em subconjuntos compactos de Ω se para todo K compacto, $K \subset \Omega$ e todo $\epsilon > 0$ corresponder um $N = N(K, \epsilon)$ tal que:

$$|f_j(z) - f(z)| < \epsilon$$

para todo $z \in K$ e $j > N$.

Definição 6.2. Suponha que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência de números complexos e definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ o seguinte produto finito:

$$p_n = (1 + u_1) \dots (1 + u_n) \tag{6.1}$$

Se existir $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, escrevemos

$$p = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) \tag{6.2}$$

Cada elemento da sequência (6.1) é denominado produto parcial do produto infinito (6.2) .

Lema 6.3. Sejam $u_1, \dots, u_n$ números complexos, e sejam:

$$p_N = \prod_{n=1}^N (1 + u_n) \quad p_N^* = \prod_{n=1}^N (1 + |u_n|)$$

então:

$$p_N^* \leq \exp(|u_1| + |u_2| + \dots + |u_N|) \quad (*_1)$$

e

$$|p_N - 1| \leq p_N^* - 1 \quad (*_2)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$.

Prova: Para $x \geq 0$, a desigualdade $1 + x \leq e^x$ é consequência imediata da expansão de e^x em séries de potência de x . No lugar de x , coloquemos respectivamente, $|u_1|, \dots, |u_N|$ e multipliquemos as desigualdades resultantes. Isto nos dá $(*_1)$.

Para $N = 1$, $(*_2)$ é trivial. Mostremos agora que o caso geral segue por indução. Suponhamos válida $(*_2)$ para um certo valor $k \in \mathbb{N}$. Mostremos a validade da mesma para $k + 1$. Segue que:

$$p_{k+1} - 1 = p_k(1 + u_{k+1}) - 1 = (p_k - 1)(1 + u_{k+1}) + u_{k+1}$$

Daí, utilizando a hipótese de indução segue:

$$|p_{k+1} - 1| \leq (p_k^* - 1)(1 + |u_{k+1}|) + |u_{k+1}| = p_{k+1}^* - 1$$

e segue o resultado $(*_2)$ para todo $N \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 6.4. Suponha que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência limitada de funções complexas em um conjunto S , tal que $\sum |u_n(s)|$ converge uniformemente em S . Então o produto:

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(s)) \quad (*_1) \quad (s \in S)$$

converge uniformemente em S , e $f(s_0) = 0$ em algum $s_0 \in S$ se, e somente se, $u_n(s_0) = -1$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Ademais, se $\{n_1, n_2, \dots\}$ é qualquer permutação de $\{1, 2, \dots\}$, então nós temos:

$$f(s) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_{n_k}(s)) \quad (*_2) \quad (s \in S)$$

Prova: Dizer que $\sum |u_n(s)|$ converge uniformemente em S é afirmar que dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq k_0$ e $s \in S$ vale:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)| - \sum_{n=1}^k |u_n(s)| \right| < \epsilon$$

Fixemos $k \geq k_0$. Então para todo $s \in S$ temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)| < \epsilon + \sum_{n=1}^k |u_n(s)| < \epsilon + K$$

onde K limita $\sum_{n=1}^k |u_n(s)|$, lembrando que cada u_n é limitada.

Logo $\sum |u_n(s)|$ é limitada em S .

Pelo lema (6.3), $|p_N(s)| \leq C$ para algum $C > 0$, todo $N \in \mathbb{N}$ e $s \in S$.

Escolha agora $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Existe um $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |u_n(s)| < \epsilon \quad (*_3) \quad (s \in S)$$

Sejam $\{n_1, n_2, \dots, N\}$ uma permutação de $\{1, 2, \dots, N\}$, $N \geq N_0$ e M grande o suficiente de maneira que:

$$\{1, 2, \dots, N\} \subset \{n_1, n_2, \dots, n_M\} \quad (*_4)$$

Se $q_M(s)$ denota o M -ésimo produto parcial de $(*_2)$, então:

$$q_M - p_N = p_N \left(\prod (1 + u_{n_k} - 1) \right) \quad (*_5)$$

onde os valores n_k que ocorrem em $(*_5)$ são todos distintos e maiores que N_0 . Portanto de $(*_3)$ e do lema (6.3), temos para $N \geq N_0$:

$$|q_M - p_N| = |p_N| \left| \prod (1 + u_{n_k}) - 1 \right| \leq |p_N| \left(\prod (1 + |u_{n_k}|) - 1 \right) \leq |p_N| (e^\epsilon - 1) \leq 2\epsilon |p_N| \leq 2C\epsilon \quad (*_6)$$

onde a última desigualdade vem do fato de que a função $f(x) = e^x - 1 - 2x$ é decrescente para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ e $f(0) = 0$. Tomamos no caso, $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$.

Se $n_k = k$, para $k \in \mathbb{N}$, então $q_M = p_M$ e $(*_6)$ mostra que $\{p_N\}$ converge uniformemente para uma função limite f . Também $(*_6)$ mostra que para $M > N_0$:

$$|p_M - p_{N_0}| \leq 2|p_{N_0}|\epsilon \Leftrightarrow |p_{N_0}| - 2|p_{N_0}|\epsilon \leq |p_M| \Leftrightarrow |p_{N_0}|(1 - 2\epsilon) \leq |p_M|$$

Assim,

$$|f(s)| \geq (1 - 2\epsilon)|p_{N_0}(s)| \quad (s \in S)$$

que mostra que $f(s) = 0 \Leftrightarrow p_{N_0}(s) = 0 \Leftrightarrow u_{N_0}(s) = -1$.

Finalmente, $\{q_M\}_{M \in \mathbb{N}}$ e $\{p_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ por $(*_6)$, devem ter o mesmo limite. ■

Proposição 6.5. Suponha que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência de números reais com $0 \leq u_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então temos:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) > 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$$

Prova: Primeiro vejamos que o produto infinito sempre existe. Note que tendo o seguinte:

$$p_N = (1 - u_1) \dots (1 - u_N)$$

então $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_N > 0$, pois $\{p_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona limitada. Daí existe $p = \lim p_N$. Analisemos agora a equivalência acima.

($\Rightarrow$) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$, tomando cada $-u_n$ como uma função constante, pela proposição (6.4) temos que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) > 0$.

($\Leftarrow$) Suponhamos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$. Seja $g(x) = 1 - x - e^{-x}$. Notemos que $g(0) = 0$ e g é decrescente para $0 \leq x < 1$. Deste comentário, podemos afirmar para cada u_n que:

$$1 - u_n \leq \exp(-u_n)$$

e fazendo-se um produto finito para $n = 1, \dots, N$, resulta:

$$p \leq p_N = \prod_{n=1}^N (1 - u_n) \leq \exp(-u_1 - u_2 - \dots - u_N)$$

e a última expressão tende a zero se a soma $\sum u_n = \infty$, ou seja, $p = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) = 0$. ■

Lema 6.6. Suponha $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset H(\Omega)$ e que $f_j \rightarrow f$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω . Então $f \in H(\Omega)$

Prova: Desde que a convergência é uniforme em cada disco compacto em Ω , f é contínua. Como qualquer região triangular Δ é compacta, e vale:

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_j(z) dz = 0$$

pelo teorema de Cauchy, onde $\partial\Delta$ é a fronteira do triângulo no plano complexo. Assim, pelo teorema de Morera, $f \in H(\Omega)$. ■

Teorema 6.7. Suponha $f_n \in H(\Omega)$, para $n \in \mathbb{N}$, com Ω um conjunto aberto do plano. Admitamos ainda que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

converge uniformemente em subconjuntos compactos de Ω . Então o produto:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente em subconjuntos compactos de Ω . Assim, $f \in H(\Omega)$.

Prova: Este teorema é consequência imediata do lema (6.6) e da proposição (6.4). ■

6.2 Produtos de Blaschke

Nesta seção apresentaremos dois resultados cujas demonstrações serão possibilitadas pelos resultados da seção precedente. Como consequência poderemos definir logo em seguida os produtos de Blaschke. Começemos com uma proposição:

Proposição 6.8. Para toda $f \in H^\infty(D)$ corresponde uma função $f^* \in L^\infty(C)$, C o círculo unitário, definida quase-sempre por:

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$$

Vale a igualdade $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$.

Prova: O resultado segue do corolário (3). ■

Lema 6.9. Seja f uma função analítica limitada no disco unitário e suponha $f(0) \neq 0$. Se $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência de zeros de f no disco aberto, cada um deles contado com multiplicidade, então o produto $\prod |\alpha_n|$ é convergente para um número não-nulo, ou seja:

$$\sum (1 - |\alpha_n|) < \infty$$

Prova: A equivalência entre a convergência do produto para um número não-nulo e da soma vem do que foi mostrado na proposição (6.5).

Suponha agora $\|f\|_\infty \leq 1$, por conveniência. Lembremos que uma função analítica f deve ter uma quantidade enumerável de zeros no disco aberto, pois caso contrário o conjunto dos zeros de f , denotado por Z_f teria um ponto de acumulação, o que não pode ocorrer. Portanto, só restam dois casos. Aquele onde f tem um número finito de zeros e, assim, não há o que ser feito. E o outro caso é onde f tem uma quantidade enumerável infinita de zeros no disco aberto. Provaremos então neste caso que o produto infinito:

$$\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$$

converge para um número estritamente positivo.

Definamos então o seguinte produto finito:

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}z}$$

para todo z no disco unitário fechado no plano complexo, sendo que $\overline{\alpha_k}z \neq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pois todo $\overline{\alpha_n}$ pertence ao disco unitário aberto.

Segue que cada B_n é uma função analítica racional no disco unitário fechado (ou seja, analítica numa vizinhança aberta do disco unitário fechado) e $|B_n(e^{i\theta})| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $0 \leq \theta < 2\pi$ desde que cada parcela do produto dada por:

$$t_k(z) = \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}z} = \overline{t_k(z)}$$

tem norma 1 para todo $k \in \mathbb{N}$ e $z = e^{i\theta}$.

Vejamos este fato:

$$|t_k(z)|^2 = t_k \overline{t_k} = \left(\frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}z} \right) \left(\frac{\overline{z} - \overline{\alpha_k}}{1 - \alpha_k \overline{z}} \right) = \frac{|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{z}\alpha_k) + |\alpha_k|^2}{1 - 2\operatorname{Re}(\overline{z}\alpha_k) + |\alpha_k|^2|z|^2}$$

tomando $z = e^{i\theta}$, temos $|z| = 1$ seguindo o resultado com $|t_k|^2 = 1$ e, portanto, $|B_n(e^{i\theta})| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ como desejado.

Vale notar que temos ainda que $|t_k| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $z \in D$. Para ver isto aplique o teorema (5.6) (módulo máximo) a função Φ definida em $\overline{D}$ dada por:

$$\Phi(z) = \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}z}$$

Lembremos que podemos escrever $f(z) = (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n)g(z)$, onde g é analítica na mesma região que f , mas $g(\alpha_i) \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Disto segue que:

$$\frac{f}{B_n} = \frac{g}{\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \overline{\alpha_k}z}}$$

e, portanto, $\frac{f}{B_n}$ é uma função analítica no disco unitário.

Sendo f analítica e limitada em D , existe pela proposição (6.8) $f^* \in L^\infty(C)$ definida quase-sempre por

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it})$$

com $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$.

Vale portanto:

$$\left| \frac{f^*(e^{i\theta})}{B_n(e^{i\theta})} \right| = |f^*(e^{i\theta})| \leq 1 \quad (**)$$

para todo $0 \leq \theta < 2\pi$, sendo que a desigualdade, apresentada em (**), vem da hipótese $\|f\|_\infty \leq 1$.

Agora como $\left(\frac{f}{B_n}\right)^* = \frac{f^*}{B_n}$ e também pela proposição (6.8)

$$\left\| \left(\frac{f}{B_n}\right)^* \right\|_\infty = \left\| \frac{f^*}{B_n} \right\|_\infty$$

segue que $|f(z)| \leq |B_n(z)|$ para todo z do disco unitário fechado.

Em particular, $0 < |f(0)| \leq |B_n(0)| = \prod_{k=1}^n |\alpha_k|$.

Desde que cada $|\alpha_k| < 1$ a sequência dos produtos parciais é monotona decrescente. Sendo esta limitada por um número não-nulo, resulta que o limite da mesma existe e é um número real positivo. ■

Teorema 6.10. Seja (α_n) uma sequência de números complexos não-nulos no disco unitário aberto. Uma condição necessária e suficiente para que o produto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\alpha_n}}{|\alpha_n|} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n}z} \quad (6.3)$$

convirja em subconjuntos compactos do disco unitário fechado, é que o produto $\prod |\alpha_n|$ convirja, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty$$

Quando esta condição é satisfeita, o produto em (6.3) define uma função analítica limitada no disco unitário D .

Prova:($\Rightarrow$) Seja o produto

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{\overline{\alpha_k}}{|\alpha_k|} \frac{\alpha_k - z}{1 - \overline{\alpha_k}z}$$

Temos por hipótese que $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em subconjuntos compactos do disco para uma função B . Na demonstração do lema (6.9), temos mostrado para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$|B_n(e^{i\theta})| = 1 \text{ e } |B_n(z)| < 1 \text{ para } |z| < 1. \quad (*_1)$$

Pelo lema (6.6) e pela condição $(*)_1$ segue que $B_n \rightarrow B$, onde B é analítica no disco unitário D e limitada pela constante 1 cujos zeros são os elementos da sequência $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Agora pelo lema (6.9) segue que:

$$\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$$

converge para um número real não nulo e, pela proposição (6.5) segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty$$

($\Leftarrow$) Agora suponhamos que o produto convirja para um número real positivo ou, equivalentemente, pela proposição (6.5):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty$$

Nós estabeleceremos convergência uniforme do produto em cada disco fechado $|z| \leq r < 1$. Seja então para cada $n \in \mathbb{N}$ a seguinte função:

$$f_n(z) = \left(\frac{\overline{\alpha_n}}{|\alpha_n|} \right) \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z}$$

Então:

$$1 - f_n(z) = \frac{1}{|\alpha_n|} \left[1 - \frac{|\alpha_n|^2 - \overline{\alpha_n} z}{1 - \overline{\alpha_n} z} \right] + 1 - \frac{1}{|\alpha_n|} = \frac{1 - |\alpha_n|}{|\alpha_n|} \left[\frac{1 + |\alpha_n|}{1 - \overline{\alpha_n} z} - 1 \right]$$

Se considerarmos $|z| \leq r$ resulta:

$$|1 - f_n(z)| \leq \frac{1 - |\alpha_n|}{|\alpha_n|} \left[\frac{2}{1 - r} + 1 \right]$$

Como $\{|\alpha_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitado e

$$\sum (1 - |\alpha_n|) < \infty$$

nós vemos que $\{|1 - f_n(z)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente somável, ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

converge uniformemente para $|z| \leq r$.

Pelo teorema (6.7), o produto

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente e a função limite é analítica. ■

Enfim, definimos os produtos de Blaschke:

Definição 6.11. Um produto de Blaschke é uma função B da forma:

$$B(z) = z^p \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\overline{\alpha_n}}{|\alpha_n|} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n}z} \right]^{p_n}$$

onde são impostas as condições:

1. $p, p_1, p_2, \dots$ são números inteiros não-negativos;
2. os elementos do conjunto $\{\alpha_n; n \in \mathbb{N}\}$ são todos distintos e não-nulos com $\alpha_n \in D$;
3. o produto $\prod_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^{p_n}$ é convergente.

Pelo teorema anterior, temos que B está bem definida sendo analítica e limitada no disco unitário D , resultando que $B \in H^\infty(D)$.

Na sequência apresentamos um teorema que relaciona determinadas funções analíticas não-nulas no disco unitário com os produtos de Blaschke. Antes resultado sobre funções subharmônicas:

Proposição 6.12. Se $f \in H(D)$, então $|f|^p$ é subharmônica, $0 < p < \infty$.

Prova: Sugerimos [13], pg. 362.

Teorema 6.13. (F. Riesz): Seja $0 < p < \infty$. Sejam $f \in H^p(D)$, $f \neq 0$, $\{z_n\}$ a sequência de zeros de f , e seja B o produto de Blaschke com zeros $\{z_n\}$. Então $g = \frac{f}{B}$ está em $H^p(D)$ e

$$\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$$

Prova: Pelo lema (6.9) e pelo teorema (6.10) temos que B está bem definido quando $f \in H^p(D)$, ou seja, converge para todo $z \in D$. Seja B_n o produto de Blaschke com zeros $z_1, \dots, z_n$, e seja $g_n = \frac{f}{B_n}$. Fixemos $r < 1$. Então pelo teorema (5.4), sendo $|g_n|^p$ subharmônica, o que vem da proposição anterior, vale que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \lim_{R \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(Re^{i\theta})|^p}{|B_n(Re^{i\theta})|^p} d\theta$$

Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|1 - R| < \delta$ então $|B_n(Re^{i\theta})| > 1 - \epsilon$ e, assim:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \lim_{R \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(Re^{i\theta})|^p d\theta = \|f\|_{H^p}^p$$

Desde que $|g_n|$ é crescente para $|g|$ e $|g| \geq |f|$, isto nos dá que $\|g\|_{H^p}^p = \|f\|_{H^p}^p$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] R.G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Second Edition, John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [2] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [3] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators I*, Interscience, New York, 1984.
- [4] P. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York, 1970.
- [5] T. Gamelin, *Uniform Algebras*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1969, reprinted by Chelsea, New York, 1984.
- [6] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.
- [7] R.R. Goldberg, *Methods of Real Analysis*, Blaisdell Publishing Company, 1964.
- [8] P. Halmos, *Naive Set Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey, 1960.
- [9] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962, reprinted by Dover, Mineola, NY, 1988.
- [10] P. Koosis, *Introduction to H^p Spaces*, Cambridge University Press, 1980.
- [11] P. Kuo, *Álgebras de Banach de Funções Contínuas*, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, 2003.
- [12] E. L. Lima, *Curso de Análise*, volume 2. Projeto Euclides, IMPA, 1989.
- [13] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [14] G.F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- [15] D.M.S. Vieira, *Operadores de Composição entre Álgebras Clássicas de Funções Analíticas*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, 2000.