ANÉIS COERENTES

MAURI CUNHA DO NASCIMENTO

ORIENTADOR

PROF. DR. HU SHENG

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Novembro de 1980

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Classif. <u>T</u>
Autor <u>n 17a</u>
V. _____ Ex. _____
Ex. _____
Tombo BC/ <u>3670</u>

CM-05030467-3

À meus pais e
ã minha esposa

Agradeço:

Ao prof. Dr. Hu Sheng pela proposta do presente trabalho, pela atenção, disponibilidade e segura orientação na elaboração do mesmo.

Aos meus amigos e professores por seus estímulos e ensinamentos.

À CAPES e à FAPESP pelo apoio financeiro durante o curso.

ANÉIS COERENTES

Introdução.....	1
CAPÍTULO I Alguns conceitos e resultados iniciais	
§1. Categoria.....	3
§2. Diagramas e sequências exatas.....	6
§3. Módulos planos e projetivos.....	11
§4. Módulos finitamente apresentados.....	16
§5. Homologia.....	20
§6. Anéis noetherianos.....	26
§7. Módulos torção livre e anéis de valorização.....	30
CAPÍTULO II Anéis coerentes	
§1. Anéis coerentes.....	33
§2. Módulos coerentes.....	42
§3. Anéis planos e anéis regulares.....	46
CAPÍTULO III Anéis uniformemente coerentes	
§1. Anéis uniformemente coerentes.....	54
§2. Alguns exemplos.....	64
Bibliografia.....	71

INTRODUÇÃO

No recente desenvolvimento da teoria de anéis, a teoria de anéis noetherianos é o ramo que mais se estabeleceu. Então qual seria a generalização de anel noetheriano? Como veremos (I.4.2), todo ideal f.g. é f.a., portanto pode-se generalizar anel noetheriano por: " todo ideal f.g. é f.a. " pois em um anel noetheriano, todo ideal f.g. é f.a. (I.6.12), e chamaremos tal anel de coerente. Uma outra motivação que nos leva a estudar anel coerente é o seguinte: é sabido por um resultado de Baer $[K_1]$ que o produto direto de uma família arbitrária de módulos projetivos não é projetivo. Então é natural perguntar para que tipo de anel, a propriedade projetivo é preservada por produto direto. Chase [C] deu a resposta ao problema acima, enfatizando que o produto direto de uma família arbitrária de módulos planos é plano se, e somente se, o anel é coerente.

O objetivo deste trabalho é apresentar anéis coerentes, e foi baseado em artigos de J. P. Soublin $[S_1]$, $[S_2]$ e $[S_3]$ e de S. U. Chase [C].

Por anel, entenderemos anel comutativo, embora a maioria dos resultados possam ser demonstrados sem esta restrição. Os módulos serão considerados unitários. Notações do tipo: (I.5.2) indica que estamos usando o resultado 2 da seção 5, capítulo I.

No capítulo I, definimos alguns conceitos e apresentamos alguns resultados necessários para realizar o trabalho.

Neste capítulo, em alguns resultados, indicaremos onde encontrar a demonstração, por serem estas longas e não interessarem ao trabalho.

No capítulo II, definimos anéis coerentes e apresentamos uma série de equivalências da definição que sugerem que anel coerente pode ser definido de diversas maneiras, de acordo com as propriedades que se pretende utilizar. No que diz respeito a módulos planos, temos que um anel é coerente se, e somente se, o produto direto de A -módulos planos é A -plano. Em relação a ideais, temos a equivalência: " a interseção de cada dois ideais f.g. é f.g. e o anulador de cada elemento do anel é um ideal f.g. ". Na seção 2 estendemos a definição para módulos coerentes e mostramos que se $A[x]$ é coerente, então A é coerente. Outro resultado interessante é que se A é anel noetheriano, então $A[x_1, x_2, \dots]$ é coerente. Mas A coerente não implica $A[x]$ coerente. Na seção 3, temos que se A é anel plano (ou regular), então $A[x]$ é coerente.

No capítulo III, seção 1 definimos anéis uniformemente coerentes, fazendo uma restrição no teorema II.1.9-(g), definindo um limite para o número de geradores de $\ker f$, $f: A^n \rightarrow A$. Veremos casos onde $A[x]$ e $A[[x]]$ são uniformemente coerentes e a relação entre coerente e uniformemente coerente. Na seção 2 veremos, através de exemplos que se A é coerente não implica que $A[x]$ seja coerente; se A e $A[x]$ são uniformemente coerentes, não implica que $A[[x]]$ seja coerente.

CAPÍTULO I

ALGUNS CONCEITOS E RESULTADOS INICIAIS

Apresentaremos neste capítulo algumas definições e alguns resultados necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. Em alguns resultados indicaremos onde encontrar a demonstração.

§1. CATEGORIA

Definição: Uma categoria $\mathcal{A}$ consiste de:

(1) Uma coleção $Ob(\mathcal{A})$ de elementos chamados objetos.

(2) Um conjunto de conjuntos $M(\mathcal{A}) = \{Mor(A,B) : A,B \in Ob(\mathcal{A})\}$.

O elemento $Mor(A,B)$ é chamado morfismo e $Mor(A,B) \cap Mor(C,D) = \emptyset$ se $A \neq C$ ou $B \neq D$.

(3) Para quaisquer $A,B,C \in Ob(\mathcal{A})$, uma aplicação

$*$: $Mor(B,C) \times Mor(A,B) \rightarrow Mor(A,C)$ definida por $(f,g) \rightarrow f * g$ onde $f \in Mor(B,C)$ e $g \in Mor(A,B)$.

(4) Para todo $A \in Ob(\mathcal{A})$ existe $id_A \in Mor(A,A)$ (id_A = morfismo identidade de A) tal que para todo $B \in Ob(\mathcal{A})$, $f \in Mor(B,A)$ temos $id_A * f = f$ e $g \in Mor(A,B)$ temos $g * id_A = g$.

(5) Para todo $A,B,C,D \in Ob(\mathcal{A})$ e $f \in Mor(A,B)$, $g \in Mor(B,C)$ e $h \in Mor(C,D)$ temos: $(h * g) * f = h * (g * f)$.

Definição: Seja $\mathcal{A}$ uma categoria qualquer. $\mathcal{A}'$ diz-se uma categoria dual de $\mathcal{A}$ se $Ob(\mathcal{A}) = Ob(\mathcal{A}')$, e para $A, B \in Ob(\mathcal{A}')$, $M(\mathcal{A}') = \{Mor'(A, B) : Mor'(A, B) = Mor(B, A)\}$ e se $f \in Mor'(A, B)$ e $g \in Mor'(B, C)$, então $g * f = f * g$.

Exemplo: R anel, M : categoria de R - módulos à esquerda;
 $A, B \in Ob(M)$, $Mor(A, B) = \{R\text{-homomorfismo de } A \text{ em } B\}$,
 $Ob(M) = \{R\text{-módulos à esquerda}\}$. A operação entre morfismos é a composição de funções.

Definição: Seja C uma categoria, $\{A_i : i \in I, A_i \in Ob(C)\}$ onde I é um conjunto.

$(P, \{f_i\}_{i \in I})$ é dito um produto de $\{A_i\}_{i \in I}$ se $P \in Ob(C)$ e $f_i \in Mor(P, A_i)$ para todo $i \in I$ tal que dados $\{g_i\}_{i \in I}$ onde $g_i \in Mor(D, A_i)$ e $D \in Ob(C)$ então existe um único morfismo $h: D \rightarrow P$ (isto é, $h \in Mor(D, P)$) tal que $g_i = f_i * h$ para todo $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f_i} & A_i \\ \uparrow h & \nearrow g_i & \\ D & & \end{array}$$

Definição: Um co-produto é um produto na categoria dual, isto é, $(P, \{f_i\}_{i \in I})$ é um produto de $\{A_i\}_{i \in I}$ se $P \in Ob(C)$ e $f_i \in Mor(A_i, P)$ para todo $i \in I$ tal que dados $g_i \in Mor(A_i, D)$, $D \in Ob(C)$ então existe único $h \in Mor(P, D)$, tal que $g_i = h * f_i$ para todo $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{f_i} & P \\ & \searrow g_i & \downarrow h \\ & & D \end{array}$$

Teorema I.1.1: Seja M categoria de R -módulos, $P = \coprod_{i \in I} M_i =$

$\{f: I \rightarrow \cup_{i \in I} M_i : f(i) \in M_i \text{ para todo } i \in I\} \in \text{Ob}(M)$ e $M_i \in \text{Ob}(M)$

para todo $i \in I$.

Defino $p_i: P \rightarrow M_i$ por $p_i(f) = f(i) \in M_i$. Então $(P, \{p_i\}_{i \in I})$ é um produto de $\{M_i\}_{i \in I}$

Demonstração: [R].

Teorema I.1.2: Seja M categoria de R -módulos, $M_i \in \text{Ob}(M)$ para todo

$i \in I$, $P = \bigoplus_{i \in I} M_i = \{f: I \rightarrow \cup_{i \in I} M_i : f(i) \in M_i \text{ para todo } i \in I \text{ e } f(i) = 0 \text{ para quase todo } i\}$, $P \in \text{Ob}(M)$. Defino

$k_i: M_i \rightarrow P$ por $k_i(m) = f$ tal que $f(i) = m$ e $f(j) = 0$ para $j \neq i$.

Então $(P, \{k_i\}_{i \in I})$ é um co-produto de $\{M_i\}_{i \in I}$.

Demonstração: [R].

Definição: Um A -módulo livre M é tal que $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$, $M_i \cong A$. onde I

é um conjunto não vazio qualquer. Descrevemos os elementos de M por $\{a_i\}_{i \in I}$ onde $a_i \in M_i$ para todo $i \in I$.

M é livre finitamente gerado se I é um conjunto finito, e notamos $M \cong \bigoplus_{i=1}^n M_i$ denotado por A^n .

Proposição I.1.3: Todo A -módulo M é isomorfo a um quociente de um A -módulo livre.

Demonstração: [R].

§2. DIAGRAMAS E SEQUÊNCIAS EXATAS

Dados os conjuntos A, B, C, A', B', C' , e as funções f, g, f', g', a, b, c podemos representar esses conjuntos e as funções definidas entre os conjuntos por um diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

Dizemos que o diagrama é comutativo se $b \circ f = f' \circ a$ e $c \circ g = g' \circ b$.

Definição: Seja A um anel, F, G, H A -módulos. Dizemos que a sequência: $F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$, onde f e g são homomorfismo de A -módulos, $f(F) = g^{-1}(0)$, ou seja, a imagem da f é igual ao kernel da g , é exata.

Do mesmo modo, a sequência: $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ é exata se as sequências: $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ e $F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ o forem.

Observações:

- $0 \rightarrow E \xrightarrow{f} F$ é exata se, e somente se, f é injetiva.
- $E \xrightarrow{f} F \rightarrow 0$ é exata se, e somente se, f é sobrejetiva.
- $0 \rightarrow E \xrightarrow{f} F \rightarrow 0$ é exata se, e somente se, f é bijetiva.
- Se F é um submódulo de E , então a sequência:
 $0 \rightarrow F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E/F \rightarrow 0$ é exata onde i e p são respectivamente injeção e sobrejeção canônicas.
- Se $f: E \rightarrow F$ é epimorfismo, então a sequência:
 $0 \rightarrow \ker f \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0$ é exata.

O DIAGRAMA DA SERPENTE (I.2.1) [B] .

Seja o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \\
\downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\
0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C'
\end{array}$$

onde as linhas são exatas.

Então a sequência:

$$\ker a \rightarrow \ker b \rightarrow \ker c \rightarrow \text{coker } a \rightarrow \text{coker } b \rightarrow \text{coker } c \text{ é exata.}$$

Observação: Se $0 \rightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \rightarrow 0$ é exata, então $G \cong F/E$, pois o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & F/E \rightarrow 0 \\
& & \downarrow 1_E & & \downarrow 1_F & & \downarrow g' \\
0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \rightarrow 0
\end{array}$$

g' induzida pela g

é comutativo e as linhas exatas. Então a sequência:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \ker g' \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \text{coker } g' \rightarrow 0 \text{ é exata. Logo, } \ker g' = \text{coker } g' = 0, \text{ ou seja, } g' \text{ é isomorfismo.}$$

Definição: $0 \rightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \rightarrow 0$ exata é dita split se $f(E)$ é um fator direto de F ($F = f(E) \oplus C$, C A-módulo).

Proposição I.2.2: Se $0 \rightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \rightarrow 0$ é exata, então são equivalentes as afirmações:

- a) $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$ é split.
- b) Existe $f_1: F \rightarrow E$ tal que $f_1 \circ f = 1_E$.
- c) Existe $g_1: G \rightarrow F$ tal que $g \circ g_1 = 1_G$.

Demonstração: [R].

Proposição 1.2.3: Seja $0 \rightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \rightarrow 0$ exata, então:

a) $0 \rightarrow \text{hom}(M'', N) \xrightarrow{v^*} \text{hom}(M, N) \xrightarrow{u^*} \text{hom}(M', N) \rightarrow 0$ é exata para todo N A -módulo, onde $v^*(f) = f \circ v$ para todo $f \in \text{hom}(M'', N)$ e $u^*(g) = g \circ u$ para todo $g \in \text{hom}(M, N)$.

b) $0 \rightarrow \text{hom}(N, M') \xrightarrow{u_*} \text{hom}(N, M) \xrightarrow{v_*} \text{hom}(N, M'') \rightarrow 0$ é exata para todo N A -módulo, onde $v_*(f) = v \circ f$ para todo $f \in \text{hom}(N, M)$ e $u_*(g) = u \circ g$ para todo $g \in \text{hom}(N, M')$, ou seja, $\text{hom}(_, N)$ e $\text{hom}(N, _)$ são funtores exatos à esquerda.

Demonstração: [AM].

Proposição 1.2.4: Se $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ é exata tal que M' e M'' são f.g., então M é f.g.. Além disso, se M' é gerado por r elementos, M'' é gerado por n elementos, então M pode ser gerado por $r+n$ elementos.

Demonstração: Sabemos que $M/f(M') \cong M''$ que é f.g.. Sejam

$u_1, \dots, u_n$ geradores de $M/f(M')$ e sejam $v_1, \dots, v_r$ geradores de $f(M')$. Se $m \in M$, então $m + f(M') \in M/f(M')$, $m + f(M') = \sum_{i=1}^n a_i u_i =$

$\sum_{i=1}^n a_i x_i + f(M')$ onde $u_i = x_i + f(M')$, $i=1, \dots, n$. Então,

$m - \sum_{i=1}^n a_i x_i = y \in f(M')$, $y = \sum_{j=1}^r b_j v_j$ com $b_j \in A$, donde

$m = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{j=1}^r b_j v_j$. Logo, M pode ser gerado por $x_1, \dots, x_n,$

$v_1, \dots, v_r$, ou seja, M é f.g..

Proposição 1.2.5: Se $M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ é exata, então

$E \otimes M' \rightarrow E \otimes M \rightarrow E \otimes M'' \rightarrow 0$ é exata.

Demonstração: [B].

Proposição I.2.6: Sejam $\{M_w\}_{w \in W}$, $\{N_w\}_{w \in W}$ e $\{P_w\}_{w \in W}$ famílias de A-módulos. Então $M_w \rightarrow N_w \rightarrow P_w$ é exata para todo w se, e somente se, $\Pi M_w \rightarrow \Pi N_w \rightarrow \Pi P_w$ é exata

Demonstração: Sejam $M_w \xrightarrow{u_w} N_w \xrightarrow{v_w} P_w$ exatas para cada w, e seja $\Pi M_w \xrightarrow{u} \Pi N_w \xrightarrow{v} \Pi P_w$ onde $u(\{m_w\}) = \{u_w(m_w)\}$ e $v(\{n_w\}) = \{v_w(n_w)\}$. $\{n_w\} \in \ker v$ se, e somente se, $\{v_w(n_w)\} = \{0\}$ se, e somente se, $v_w(n_w) = 0$ para todo w se, e somente se, $n_w \in \text{Im } u_w$ para todo w se, e somente se, $\{n_w\} \in \text{Im } u$. Logo, $\ker v = \text{Im } u$.

Se $\Pi M_w \xrightarrow{u} \Pi N_w \xrightarrow{v} \Pi P_w$ é exata, como (u_w, v_w) é restrição de (u, v) então $M_w \rightarrow N_w \rightarrow P_w$ é exata para todo w.

Proposição I.2.7: Seja $\{M_w\}$ família de A-módulos e $C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$ sequência exata de A-módulos. Então

$\Pi(M_w \otimes C') \rightarrow \Pi(M_w \otimes C) \rightarrow \Pi(M_w \otimes C'') \rightarrow 0$ é exata.

Demonstração: Segue do fato que $M_w \otimes C' \rightarrow M_w \otimes C \rightarrow M_w \otimes C'' \rightarrow 0$ é exata para cada w e de (I.2.6).

Corolário I.2.8: $0 \rightarrow (M_w \otimes C') \rightarrow (M_w \otimes C) \rightarrow (M_w \otimes C'') \rightarrow 0$ é exata para todo w se, e somente se,

$0 \rightarrow \Pi(M_w \otimes C') \rightarrow \Pi(M_w \otimes C) \rightarrow \Pi(M_w \otimes C'') \rightarrow 0$ é exata.

Demonstração: (I.2.6).

Proposição I.2.9: $\Pi [M_w]^n \cong [\Pi M_w]^n$ para n finito.

Demonstração: Basta definir $f: \{\Pi M_w\}^n \rightarrow \Pi [M_w]^n$ por $f(\{m_{w1}\}, \dots, \{m_{wn}\}) = \{(m_{w1}, \dots, m_{wn})\}$.

Corolário I.2.10: Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de A-módulos e seja

$\prod_{i \in I} M_i$ um $A^{(I)}$ -módulo f.g.. Então cada M_i é um A-módulo f.g..

Alem disso, se $\prod_{i \in I} M_i$ é gerado por $\{m_i^1\}_{i \in I}, \dots, \{m_i^r\}_{i \in I}$ onde $m_i^k \in M_i$ para todo $i \in I$ e $k=1, \dots, r$, então M_i é gerado por $m_i^1, \dots, m_i^r$ para todo $i \in I$.

Demonstração: Por (I.1.3) temos uma sequência exata:

$$(A^{(I)})^n \rightarrow \prod_{i \in I} M_i \rightarrow 0 \text{ para algum } n > 0. \text{ Logo, } (A^n)^{(I)} \rightarrow \prod_{i \in I} M_i \rightarrow 0$$

é exata (I.2.9). Por (I.2.6), temos $A^n \rightarrow M_i \rightarrow 0$ é exata para todo

$i \in I$, daí M_i é A-módulo f.g.. Para a segunda parte, claramente

$$\sum_{j=1}^r A m_i^j \subseteq M_i; \text{ por outro lado, se } x \in M_i, \text{ seja } \bar{x} = \{x_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$$

onde $x_i = x$ e $x_j = 0$ se $j \neq i$. Logo,

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^r \{a_i^j\} \{m_i^j\} = \left\{ \sum_{j=1}^r a_i^j m_i^j \right\}_{i \in I} \text{ onde } a_i^j \in A, \text{ donde } x = x_i =$$

$$\sum_{j=1}^r a_i^j m_i^j \in \sum_{j=1}^r A m_i^j. \text{ Daí } M_i = \sum_{j=1}^r A m_i^j.$$

Lema I.2.11: Seja M um A-módulo gerado por n elementos. Então M^N ,

o produto direto enumerável de cópias de M, pode ser gerado por n elementos como um A^N -módulo.

Demonstração: Seja $M = \sum_{i=1}^n A m_i$. Afiramos que M^N é gerado por

$\{m_1\}, \dots, \{m_n\}$ pois se $x \in M^N$, $x = \{x_i\}$ e cada $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} m_j$ onde

$a_{ij} \in A$. Logo, $x = \{x_i\}_{i \in N} = \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} m_j \right\} = \{a_{i1}\} \{m_1\} + \{a_{i2}\} \{m_2\} +$
 $+ \dots + \{a_{in}\} \{m_n\}$ onde $\{a_{ij}\} \in A^N$ para todo $j=1, \dots, n$.

§3. MÓDULOS PLANOS E MÓDULOS PROJATIVOS

Proposição I.3.1: Seja E A-módulo. As seguintes propriedades são equivalentes:

- a) Para todo ideal I de A, o homomorfismo canônico $l_E \otimes i: E \otimes I \rightarrow E \otimes A$ é injetivo
- b) Para todos M e M' A-módulos e todo homomorfismo injetivo $v: M' \rightarrow M$, o homomorfismo $l_E \otimes v: E \otimes M' \rightarrow E \otimes M$ é injetivo
- c) Para toda sequência exata de A-módulos e homomorfismos $M' \rightarrow M \rightarrow M''$, a sequência $E \otimes M' \rightarrow E \otimes M \rightarrow E \otimes M''$ é exata

Demonstração: [B].

Observação: Podemos tomar I f.g. em (a) de (I.3.1).

Definição: Um A-módulo E é dito plano se tem as propriedades equivalentes de (I.3.1).

Proposição I.3.2: Seja A anel e E um A-módulo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) E é plano.
- b) Se $a_1 t_1 + \dots + a_r t_r = 0$ onde $a_k \in E$ e $t_k \in A$, então existem $b_1, \dots, b_n \in E$ e $\{u_{ik}\} \subseteq A$ ($i=1, \dots, n; k=1, \dots, r$) tal que
$$a_k = \sum_{i=1}^n b_i u_{ik} \text{ e } \sum_{k=1}^r u_{ik} t_k = 0$$
- c) Se $\sum_{k=1}^r a_k t_{kj} = 0$ onde $a_k \in E$ e $t_{kj} \in A$ ($j=1, \dots, s$) então existe

$b_1, \dots, b_n \in E$ e $u_{ik} \in \Lambda$ ($i=1, \dots, n; k=1, \dots, r$) tal que

$$a_k = \sum_{i=1}^n b_i u_{ik} \text{ e } \sum_{k=1}^r u_{ik} t_{kj} = 0.$$

Demonstração: [C].

Definição: Sejam P, M e N A -módulos e f, g homomorfismos. Dado

o diagrama:

$$\begin{array}{c} P \\ \begin{array}{ccc} f & \downarrow & g \\ M & \rightarrow & N \rightarrow 0 \end{array} \end{array} \text{ exata}$$

Dizemos que P é um A -módulo projetivo, se existe homomorfismo $h: P \rightarrow M$ tal que $f \circ h = g$.

Proposição 1.3.3: Todo A -módulo livre é projetivo.

Demonstração: Seja $F = \bigoplus_{i \in I} A_i$ um A -módulo livre e seja o diagrama:

$$\begin{array}{c} F \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & & g \\ M & \xrightarrow{f} & N \rightarrow 0 \end{array} \end{array} \text{ exata}$$

Como f é sobre, para cada i existe $x_i \in M$ tal que $f(x_i) = g(e_i)$ onde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, 1 na componente i .

Defino $h: F \rightarrow M$ por $h(\{a_i\}_{i \in I}) = \sum_{i \in I} a_i x_i$ onde

$$f(x_i) = g(e_i). \quad f \circ h(\{a_i\}_{i \in I}) = \sum_{i \in I} a_i f(x_i) = \sum_{i \in I} a_i g(e_i) = g(\{a_i\}).$$

Proposição 1.3.4: Seja P um A -módulo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) P é projetivo.

(2) Para todo A-módulo M, tal que $M \xrightarrow{f} P \rightarrow 0$ exata, existe $h: P \rightarrow M$ tal que $f \circ h = 1_P$.

(3) Toda sequência exata $0 \rightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} P \rightarrow 0$ é split.

(4) Existe um A-módulo livre F tal que $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow 0$ é split.

(5) Existe $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq P$ e $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq \text{hom}(P, A)$ tal que para todo x em P, $x = \sum f_i(x)x_i$ onde $f_i(x) = 0$ para quase todo i .

Chamamos $(\{x_i\}, \{f_i\})_{i \in I}$ um sistema coordenado projetivo de P.

(6) P é fator direto de um A-módulo livre ($P \oplus Q = L$, L livre).

Demonstração: [R].

Proposição I.3.5: Se $\{P_i\}$ é uma família de A-módulos, então $\oplus P_i$ é projetivo se, e somente se, P_i é projetivo para todo i .

Demonstração: [R].

Definição: Dizemos que A é anel hereditário, se todo submódulo de um A-módulo projetivo é projetivo.

Teorema I.3.6: As seguintes condições são equivalentes:

- 1) A é anel hereditário.
- 2) Cada submódulo de um módulo projetivo é projetivo e isomorfo a uma soma direta de ideais de A.
- 3) Todo ideal de A é projetivo.

Demonstração: [CE].

Corolário I.3.7: Seja D um anel principal. Então todo submódulo de um módulo livre é livre.

Demonstração: Seja M um D -módulo livre e N um submódulo de M . Como D é principal, todo ideal é livre e portanto, projetivo. Pelo teorema anterior, temos que N é isomorfo a uma soma direta de ideais de D . Como todo ideal de D é isomorfo a D , temos que N é livre.

Corolário I.3.8: Seja D um anel principal. Então todo D -módulo é livre.

Demonstração: (I.1.3) e (I.3.7).

Proposição I.3.9: Seja o diagrama (I) com as linhas e colunas exatas e F_1 e F_2 projetivos

$$(I) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & f & & g & & \\ 0 & \rightarrow & P & \rightarrow & Q & \rightarrow & R \rightarrow 0 \\ & & \uparrow t_1 & & \uparrow t_2 & & \\ & & F_1 & & F_2 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & K_1 & & K_2 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Então no diagrama comutativo (II) as linhas e as colunas são

$$(II) \quad \begin{array}{ccccccc} \text{exatas} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{f} & Q & \xrightarrow{g} & R \rightarrow 0 \\ (II) & & \uparrow t_1 & & \uparrow t & & \uparrow t_2 \\ 0 & \rightarrow & F_1 & \rightarrow & F_1 \oplus F_2 & \rightarrow & F_2 \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & K_1 & \rightarrow & K_1 \oplus K_2 & \rightarrow & K_2 \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Demonstração: Como F_2 é projetivo, existe um homomorfismo $u: F_2 \rightarrow Q$ tal que $g \circ u = t_2$. Definimos $t: F_1 \oplus F_2 \rightarrow Q$ por $t(x_1, x_2) = f(t_1(x_1)) + u(x_2)$ onde $x_i \in F_i$, $i=1,2$. As verificações que t é bem definida, t é epimorfismo e $\ker t \cong K_1 \oplus K_2$ são rotinas.

§4. MÓDULOS FINITAMENTE APRESENTADOS

Definição: A sequência exata $L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow E \rightarrow 0$ é dita apresentação do A-módulo E (apresentação finita) se L_1 e L_0 são A-módulos livres (A-módulos livres f.g.).

Dizemos que E é finitamente apresentado, se E admite uma apresentação finita, e escrevemos E f.a..

Proposição I.4.1: Todo A-módulo admite uma apresentação.

Demonstração: Seja E um A-módulo. Por (I.1.3) $E \cong L_0/F_0$ onde L_0 é um A-módulo livre. Seja $u:L_0 \rightarrow E$ homomorfismo tal que $F_0 = \ker u$. $F_0 \cong L_1/F_1$ onde L_1 é um A-módulo livre. Seja $v:L_1 \rightarrow F_0$ homomorfismo tal que $F_1 = \ker v$. Temos então o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & & F_0 & \xrightarrow{i} & L_0 & \xrightarrow{u} & E \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow & \nearrow & & & \\
 & & v & & w = i \circ v & & \\
 0 & \rightarrow & F_1 & \rightarrow & L_1 & &
 \end{array}$$

Assim, $L_1 \xrightarrow{w} L_0 \xrightarrow{u} E \rightarrow 0$ é uma apresentação de E.

Proposição I.4.2: (i) Se E é f.a. então é f.g..

(ii) Se E é um A-módulo projetivo f.g. então é f.a..

Demonstração: (i) Por definição, temos uma sequência exata:

$L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{u} E \rightarrow 0$ onde L_1 e L_0 são A-módulos livres f.g.. Como u é sobrejetiva, temos que E é f.g..

(ii) Como E é A -módulo projetivo f.g., por (I.3.4) existe L_0 A -módulo livre f.g. tal que a sequência $0 \rightarrow \ker u \rightarrow L_0 \xrightarrow{u} E \rightarrow 0$ é split, ou seja, existe $v: E \rightarrow L_0$ tal que $L_0 \cong (\ker u) \oplus v(E)$. Como L_0 e $v(E)$ são f.g. então $\ker u$ é f.g.. Então por (I.1.3), $\ker u \cong L_1/F_1$ onde L_1 é livre f.g.. Logo, $L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow E \rightarrow 0$ é uma apresentação finita de E .

Em geral, um A -módulo f.g. não é f.a., por exemplo :

Seja $A = F[x_1, x_2, \dots]$ anel dos polinômios com infinitas indeterminadas sobre um corpo F . $I = \langle x_1, x_2, \dots \rangle$ ideal de A e A/I A -módulo cíclico. A/I é A -módulo f.g. mas não é f.a. pois caso contrário, seja a sequência exata: $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$. Pela proposição a seguir, I seria f.g. o que é uma contradição.

Proposição I.4.3: Seja E A -módulo f.a. e $0 \rightarrow F \xrightarrow{j} G \xrightarrow{p} E \rightarrow 0$ exata onde G é f.g.. Então F é f.g..

Demonstração: Seja a sequência $L_1 \xrightarrow{r} L_0 \xrightarrow{s} E \rightarrow 0$ exata com L_1 e L_0 livres f.g. (E é f.a.). Queremos encontrar $u: L_0 \rightarrow G$ e $v: L_1 \rightarrow F$ e obter o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 & \xrightarrow{r} & L_0 & \xrightarrow{s} & E & \rightarrow & 0 \\ & & v \downarrow & & u \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & F & \xrightarrow{j} & G & \xrightarrow{p} & E \rightarrow 0 \end{array}$$

Seja o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & L_0 \\ & & s \downarrow \\ & & G \xrightarrow{p} E \rightarrow 0 \end{array}$$

Sendo L_0 livre, então é projetivo, logo, existe $u: L_0 \rightarrow G$ tal que $p \circ u = s$. Mostremos que $u \circ r(L_1) \subseteq \ker p$: Seja $x \in u \circ r(L_1)$.

Então existe $t \in L_1$ tal que $x = u \circ r(t)$. $p(x) = p \circ u \circ r(t) = s \circ r(t) = 0$. Como $F \cong \text{Im } j = \ker p$, temos:

$$\begin{array}{ccc} & L_1 & \\ & \downarrow u \circ r & \\ F & \xrightarrow{j} \ker p & \rightarrow 0 \text{ exata} \end{array}$$

Sendo L_1 livre, logo, projetivo, existe $v: L_1 \rightarrow F$ tal que $j \circ v = u \circ r$.

Pelo diagrama acima e aplicando o diagrama da serpente (I.2.1), temos $0 = \ker 1_E \rightarrow \text{coker } v \rightarrow \text{coker } 1_E = 0$ é exata. Então $\text{coker } v \cong \text{coker } u = G/u(L_0)$; como G é f.g. temos $\text{coker } v$ f.g.. Como a sequência $0 \rightarrow v(L_1) \rightarrow F \rightarrow \text{coker } v \rightarrow 0$ é exata e $v(L_1)$ e $\text{coker } v$ são f.g., temos por (I.2.4) que F é f.g..

Proposição 1.4.4: E é f.a. se, e somente se, existe uma sequência exata $0 \rightarrow S \rightarrow L_0 \rightarrow E \rightarrow 0$ onde S é A -módulo f.g. e L_0 é livre f.g..

Demonstração : Se E é f.a. então existe $L_1 \xrightarrow{u} L_0 \xrightarrow{v} E \rightarrow 0$ exata, onde L_0 e L_1 são livres f.g.. Seja $S = \ker v$. Então, a sequência $0 \rightarrow S \rightarrow L_0 \rightarrow E \rightarrow 0$ é exata. Como L_0 é f.g., por (I.4.3), S é f.g..

Se S é f.g., por (I.1.3), $S \cong L_1/F_1$ com L_1 livre f.g.. Então temos:

$$\begin{array}{ccccc} & & u & & \\ & & \rightarrow & & \\ & & L_1 & \rightarrow & L_0 & \xrightarrow{v} & 0 \\ & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & p & & i & & \\ & & \nearrow & & \searrow & & \\ 0 & & & & S & & 0 \end{array}$$

onde p é homomorfismo com $\ker p = F_1$ e $u = i \circ p$.

Proposição 1.4.5: Sejam $I_i, i=1,2$ ideais f.a. e $I = I_1 + I_2$. Então I é f.a. se, e somente se, $I_1 \cap I_2$ é f.g..

Demonstração: Sejam $0 \rightarrow K_i \xrightarrow{a_i} F_i \xrightarrow{b_i} I_i \rightarrow 0$ seqüências exatas, $i=1,2$ onde os F_i são livres f.g.. Seja $F = F_1 \oplus F_2$. Podemos ter o seguinte diagrama comutativo com as linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K_1 \oplus K_2 & \xrightarrow{f_1} & F & \xrightarrow{g_1} & I_1 \oplus I_2 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow h_1 & & \parallel & & \downarrow h_2 \\ 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{f_2} & F & \xrightarrow{g_2} & I \rightarrow 0 \end{array}$$

onde $h_2(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$, $x_i \in I_i$; $g_2 = h_2 \circ g_1$; $K = \ker g_2$ e $h_1(y_1 + y_2) = y_1 + y_2$, $y_i \in K_i$. Pelo diagrama da serpente (I.2.1), temos que $I_1 \cap I_2 = \ker h_2 \cong \text{coker } h_1 = K/h_1(K_1 \oplus K_2)$. Como h_1 é injetivo, logo $I_1 \cap I_2 \cong K/(K_1 \oplus K_2)$.

Agora, se I é f.a. então K é f.g., logo $I_1 \cap I_2$ é f.g..

Por outro lado, se $I_1 \cap I_2$ é f.g. então $K/(K_1 \oplus K_2)$ é f.g.. Como os I_i são f.a. temos que K_i são f.g., logo, $K_1 \oplus K_2$ é f.g.. Portanto K é f.g. (I.4.3), daí I é f.a..

Teorema I.4.6: Todo Λ -módulo é o limite direto de Λ -módulos f.a..

Demonstração: [NK].

§5. HOMOLOGIA

Definição: Seja $\dots \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ sequência exata onde os X_i são A-módulos projetivos, $i \geq 0$. Então dizemos que a sequência $\tilde{c}$ é uma resolução projetiva do A-módulo M.

Definição: Seja A um anel e M um A-módulo. Dizemos que a dimensão homológica (dimensão projetiva) de M: $hd(M)$ é o menor $n \geq 0$ tal que existe uma resolução projetiva:

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

$$hd(M) = \infty \text{ se não existe tal } n \text{ finito.}$$

Exemplo: $hd(M) = 0$ se, e somente se, M é projetivo.

Definição: A dimensão global do anel A é dada por $gldim(A) = \sup_{M} \{hd(M)\}$ onde M é A-módulo.

Teorema I.5.1: (Hilbert-Syzygies) Para um anel A comutativo, $gldim(A[x]) = gldim(A) + 1$.

Demonstração: $[K_2]$.

Teorema I.5.2: (Auslander) Para um anel A temos:

$$gldim(A) = \sup\{hd(A/I) : I \text{ ideal de } A\}.$$

Demonstração: $[R]$.

Corolário I.5.3: Se A é principal, então $\text{gldim}(A) \leq 1$ e $\text{gldim}(A[x]) \leq 2$.

Demonstração: Seja I ideal de A . Então a sequência $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$ é exata. Como $I \cong A$, I é livre, portanto projetivo. Pelo teorema anterior, $\text{gldim}(A) \leq 1$.

Teorema I.5.4: (Lema de Schanuel) Sejam as sequências exatas:

$$0 \rightarrow K_1 \rightarrow P_1 \rightarrow M_1 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow K_2 \rightarrow P_2 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$$

onde P_1 e P_2 são projetivos e $M_1 \cong M_2$.

$$\text{Então } K_1 \oplus P_2 \cong K_2 \oplus P_1.$$

Demonstração: [K₂].

Corolário I.5.5: Dados $0 \rightarrow P_n \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M_1 \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow T_n \xrightarrow{c_{n-1}} T_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow T_1 \rightarrow T_0 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$ sequências exatas onde $P_0, \dots, P_{n-1}, T_0, \dots, T_{n-1}$ são projetivos e $M_1 \cong M_2$. Então existem P e T A -módulos projetivos tais que $P_n \oplus T \cong T_n \oplus P$. Além disso, P_n é projetivo se, e somente se, T_n é projetivo.

Demonstração: [R].

Corolário I.5.6: A dimensão homológica de um ideal próprio de A é estritamente menor que a dimensão global de A , se $\text{gldim}(A) < \infty$.

Demonstração: Seja I um ideal próprio de A . Suponhamos que $\text{hd}(I) = \text{gldim}(A) = n$. Temos as sequências exatas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & 0 & \\
 & & & & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & P_n & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P_1 & \rightarrow & P_0 & \xrightarrow{t} & I & \rightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow i & & & & & & \\
 & & & & & & A & & & & & & \\
 & & & & & & \downarrow p & & & & & & \\
 & & & & & & A/I & & & & & & \\
 & & & & & & \downarrow & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & & &
 \end{array}$$

onde i e p são respectivamente injeção e projeção canônicas.

Então temos uma sequência exata:

$$0 \rightarrow K_{n-2} \rightarrow P_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \xrightarrow{t} A \rightarrow A/I \rightarrow 0 \text{ onde } K_{n-2} = \ker d_{n-2}$$

e $d_{n-2}: P_{n-2} \rightarrow P_{n-3}$. Como $\text{gldim}(A) = n$, temos

$$0 \rightarrow T_n \rightarrow \dots \rightarrow T_0 \rightarrow A/I \rightarrow 0 \text{ resolução projetiva de } A/I, \text{ então,}$$

por(I.5.5), temos que K_{n-2} é projetivo, daí $n = \text{hd}(I) \leq n-1$, o que é uma contradição.

Corolário I.5.7: Se F é um A -módulo projetivo e $f: F \rightarrow L$ homomorfismo de A -módulos, então $\text{hd}(F)$ é menor que $\text{hd}(f(F))$.

Demonstração: Temos $0 \rightarrow \ker f \rightarrow F \rightarrow f(F) \rightarrow 0$ exata e fazemos como na demonstração de (I.5.6).

Definição: Seja uma resolução projetiva de M :

$$\rightarrow X_n \xrightarrow{d_{n-1}} X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \xrightarrow{d_0} X_0 \xrightarrow{t} M \rightarrow 0, N \text{ um } A\text{-módulo à esquerda}$$

e $\otimes N$ produto tensorial à direita. Temos a sequência exata:

$$\rightarrow X_n \otimes N \xrightarrow{d_{n-1} \otimes 1_N} X_{n-1} \otimes N \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \otimes N \xrightarrow{d_0 \otimes 1_N} X_0 \otimes N \xrightarrow{t \otimes 1_N} M \otimes N \rightarrow 0$$

$$\text{Tor}_0^A(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} (X_0 \otimes N) / \text{Im}(d_0 \otimes 1_N)$$

$$\text{Tor}_n^A(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} \ker(d_{n-1} \otimes 1_N) / \text{Im}(d_n \otimes 1_N)$$

Proposição 1.5.8: $\text{Tor}_n^A(\varinjlim A_k, B) \cong \varinjlim \text{Tor}_n^A(A_k, B)$.

Demonstração: [KN]

Teorema 1.5.9: Se $0 \rightarrow M'' \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow 0$ é uma sequência exata de A-módulos, então $\dots \rightarrow \text{Tor}_2^A(M'', N) \rightarrow \text{Tor}_1^A(M', N) \rightarrow \text{Tor}_1^A(M, N) \rightarrow \text{Tor}_1^A(M'', N) \rightarrow M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N \rightarrow 0$ é exata.

Demonstração: [B].

Proposição 1.5.10: As seguintes afirmações são equivalentes, para o A-módulo N:

- 1) N é plano.
- 2) $\text{Tor}_1^A(A/I, N) = 0$ para todo ideal f.g. I de A.
- 3) $\text{Tor}_n^A(M, N) = 0$ para todo A-módulo M e $n > 0$.
- 4) $\text{Tor}_1^A(N, A/I) = 0$ para todo ideal f.g. I de A.
- 5) $\text{Tor}_n^A(N, M) = 0$ para todo A-módulo M e $n > 0$.

Demonstração: [B].

Corolário 1.5.11: N é plano se, e somente se, $\text{Tor}_1^A(N, M) = 0$ para todo A-módulo f.a. M.

Demonstração: Basta mostrar $\text{Tor}_1^A(N, B) = 0$ para todo A-módulo B. Por (I.4.6), $B = \varinjlim B_k$ onde B_k é f.a., logo, $\text{Tor}_1^A(N, \varinjlim B_k) = 0$ (I.5.8).

Definição: Seja N um A-módulo. Definimos dimensão plano (fraca) de N: $\text{fd}(N) = \inf\{n : \text{Tor}_{n+1}^A(M, N) = 0 \text{ para todo A-módulo } M\}$.

Lema I.5.12: $\text{fd}(N) = 0$ se, e somente se, N é A -módulo plano.

Demonstração: Se N é A -módulo plano, por (I.5.10) $\text{fd}(N) = 0$.

Por outro lado, se $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ é uma sequência exata de A -módulos, como $\text{fd}(N) = 0$, temos:

$\text{Tor}_1^A(M'', N) = 0$; por (I.5.9) temos :

$0 = \text{Tor}_1^A(M'', N) \rightarrow M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N \rightarrow 0$ exata. Daí N é A -plano por (I.3.1).

Proposição I.5.13: $\text{fd}(N) = \inf\{n : \text{Tor}_{n+1}^A(A/I, N) = 0 \text{ para todo ideal f.g. } I \text{ de } A\}$.

Demonstração: [CE].

Definição: A dimensão Tor (fraca) de um anel A :

$\text{Tordim}(A) = \sup_N \{\text{fd}(N) : N \text{ é um } A\text{-módulo}\}$.

Observação: $\text{Tordim}(A) = 0$ se, e somente se, todo A -módulo é plano.

Proposição I.5.14: $\text{Tordim}(A) = \sup\{\text{fd}(A/I) : I \text{ ideal f.g. de } A\}$.

Demonstração: [R].

Corolário I.5.15: $\text{Tordim}(A) = \inf\{n : \text{Tor}_{n+1}^A(A/I, A/J) = 0, I \text{ e } J \text{ ideais f.g. de } A\}$.

Demonstração: $\text{Tordim}(A) \geq \text{fd}(A/J)$ por (I.5.14),

$\text{fd}(A/J) = \inf\{n : \text{Tor}_{n+1}^A(A/I, A/J) = 0 \text{ para todo ideal f.g. } I\}$

por (I.5.13). Logo $\text{Tordim}(A) \geq \inf\{n : \text{Tor}_{n+1}^A(A/I, A/J) = 0 \text{ para todos ideais f.g. } I, J\}$.

Por outro lado, se $\text{Tor}_{n+1}^A(A/I, A/J) = 0$ para todos ideais f.g. I, J , então $\text{Tor}_{n+1}^A(M, A/J) = 0$ para todo A -módulo M e todo ideal f.g. J , por (I.5.10). Logo, $\text{fd}(M) \leq n$ para todo A -módulo M . Daí, $\text{Tordim}(A) \leq n$.

§6. ANÉIS NOETHERIANOS

Proposição I.6.1: Seja P um conjunto parcialmente ordenado pela relação $\leq$ (isto é, $\leq$ é reflexiva, transitiva e se $x \leq y$ e $y \leq x$ ao mesmo tempo, então $x = y$). As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) Toda sequência crescente $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ em P é estacionária.
- ii) Todo subconjunto não vazio de P tem um elemento maximal.

Demonstração: [A-M].

Definição: Um A -módulo M satisfazendo uma das condições anteriores é dito noetheriano, considerando a ordem dada pela inclusão e P o conjunto dos submódulos de M .

Exemplos: 1) Um grupo abeliano finito (como Z -módulo, Z o anel dos inteiros).

2) O anel Z (como Z -módulo).

3) O anel $K[x]$ (K corpo e x indeterminada).

4) O anel de polinômios $K[x_1, x_2, \dots]$ em um número infinito de indeterminadas não é noetheriano: a sequência de ideais:

$\langle x_1 \rangle \subseteq \langle x_1, x_2 \rangle \subseteq \dots$ é estritamente crescente.

Proposição I.6.2: M é um A -módulo noetheriano se, e somente se, todo submódulo de M é f.g..

Demonstração: [A-M].

Proposição I.6.3: Seja $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ sequência exata de A -módulos. Então M é noetheriano se, e somente se, M' e M'' são noetherianos.

Demonstração: [A-M].

Corolário I.6.4: Se M_i ($1 \leq i \leq n$) são A -módulos noetherianos, então $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ também o é.

Demonstração: [A-M].

Definição: Um anel A é dito noetheriano se satisfaz uma das três condições equivalentes:

- 1) Todo conjunto não vazio de ideais de A tem elemento maximal.
- 2) Toda sequência crescente de ideais de A é estacionária.
- 3) Todo ideal de A é f.g..

Exemplos: 1) o anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros.

2) Todo anel principal é noetheriano.

Proposição I.6.5: Seja A um anel noetheriano, I um ideal de A . Então A/I é anel noetheriano.

Demonstração: Como a sequência $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$ é exata, então por (I.6.3), A/I é noetheriano como A -módulo, então, é noetheriano como um A/I - módulo.

Proposição I.6.6: Seja A um anel noetheriano e M um A-módulo f.g..
Então M é noetheriano.

Demonstração: [A-M].

Teorema I.6.7: (Teorema da base de Hilbert) Se A é um anel noetheriano, então o anel dos polinômios A[x] é noetheriano.

Demonstração: [A-M].

Corolário I.6.8: Se A é noetheriano, então A[x₁, ..., x_n] é noetheriano.

Demonstração: Por indução e por (I.6.7).

Lema I.6.9: Seja {M_w}_{w∈W} uma família de A-módulos e seja C um A-módulo f.g. e f: (∏ M_w) ⊗ C → ∏ (M_w ⊗ C) com f({m_w} ⊗ c) = {m_w ⊗ c}.
Então f é epimorfismo.

Demonstração: Como C é f.g. podemos tomar a sequência exata:

0 → K → Aⁿ → C → 0. Então M_w ⊗ K → M_w ⊗ Aⁿ → M_w ⊗ C → 0 é exata para cada w (I.2.5). Temos que ∏ (M_w ⊗ Aⁿ) ≅ ∏ (M_w)ⁿ e (∏ M_w) ⊗ Aⁿ ≅ (∏ M_w)ⁿ. Por (I.2.9) temos então, ∏ (M_w ⊗ Aⁿ) ≅ (∏ M_w) ⊗ Aⁿ. Seja o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \ker f & & \\
 & & 0 & & \downarrow & & \\
 (\prod M_w) \otimes K & \rightarrow & (\prod M_w) \otimes A^n & \rightarrow & (\prod M_w) \otimes C & \rightarrow & 0 \text{ exata} \\
 & & \downarrow & & \downarrow f & & (I.2.8) \\
 0 & \rightarrow & \prod (M_w \otimes K) & \rightarrow & \prod (M_w \otimes A^n) & \rightarrow & \prod (M_w \otimes C) \rightarrow 0 \text{ exata} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & \text{coker } f
 \end{array}$$

Pelo diagrama da serpente, $\text{coker } f = 0$, ou seja, f é epimorfismo.

Lema I.6.10: Se A é anel noetheriano e C um A -módulo f.g. (ou C é um A -módulo f.a., A é anel qualquer), então f definida como em (I.6.9) é isomorfismo.

Demonstração: Como A é noetheriano, A^n é um A -módulo noetheriano (I.6.4), logo K é f.g. (I.6.2) (se C é f.a. então K é f.g. por (I.4.4)) então $g: (\prod M_w) \otimes K \rightarrow \prod (M_w \otimes K)$ é epimorfismo (I.6.9). Daí, pelo diagrama da serpente, $\ker f = 0$. Como f é epimorfismo (I.6.9), f é isomorfismo.

Teorema I.6.11: Seja A anel noetheriano. Então $\prod M_w$ é plano se, e somente se, M_w é plano para todo w .

Demonstração: Seja $0 \rightarrow I \rightarrow A$ exata onde I é ideal f.g. de A . Então M_w é A -plano para todo w se, e somente se, $0 \rightarrow M_w \otimes I \rightarrow M_w \otimes A$ é exata para todo w se, e somente se, $0 \rightarrow \prod (M_w \otimes I) \rightarrow \prod (M_w \otimes A)$ é exata (I.2.6) se, e somente se, $0 \rightarrow (\prod M_w) \otimes I \rightarrow (\prod M_w) \otimes A$ é exata (I.6.10) se, e somente se, M_w é A -plano.

Teorema I.6.12: Num anel noetheriano, cada ideal f.g. é f.a..

Demonstração: Seja A anel noetheriano e I ideal de A gerado por $a_1, \dots, a_n$. Seja F um A -módulo livre com base $x_1, \dots, x_n$ e $f: F \rightarrow I$ homomorfismo tal que $f(x_i) = a_i$, $i=1, \dots, n$. Então, a sequência $0 \rightarrow \ker f \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow 0$ é exata. Por (I.6.4) F é A -módulo noetheriano. Por (I.6.2) $\ker f$ é f.g.. Então, por (I.4.4) I é f.a..

§7. MÓDULOS TORÇÃO LIVRE E ANÉIS DE VALORIZAÇÃO

Definição: Seja A um domínio e M um A -módulo. $x \in M$ é um elemento de torção se $(0:x) \neq 0$. $T(M) = \{x \in M : x \text{ é um elemento de torção}\}$ é dito submódulo de torção de M . Se $T(M) = 0$, M é dito torção livre.

Notação: Se A é um anel local (se tem um único ideal maximal) seu ideal maximal será denotado por $m(A)$.

Definição: Sejam A e B anéis locais. Diz-se que B domina A , se A é um subanel de B e $m(A) = A \cap m(B)$.

Teorema 1.7.1: Seja K um corpo e V um subanel de K . As seguintes condições são equivalentes:

- a) V é um elemento maximal do conjunto dos subanéis locais de K sendo este conjunto ordenado pela relação " B domina A " entre A e B .
- b) Existe um corpo algebricamente fechado L e um homomorfismo h de V em L que é maximal no conjunto dos homomorfismos dos subanéis de K em L , ordenado pela relação " g é uma extensão de f " entre f e g .
- c) Se $x \in K-V$, então $x^{-1} \in V$.
- d) O corpo de frações de V é K e o conjunto dos ideais principais de V é totalmente ordenado pela relação de inclusão.

e) O corpo de frações de V é K e o conjunto dos ideais de V é totalmente ordenado pela relação de inclusão.

Demonstração: [B].

Definição: Na notação do teorema anterior, V é chamado anel de valorização para o corpo K . Um anel é dito de valorização se é domínio e é um anel de valorização para o seu corpo de frações.

Proposição I.7.2: Seja A um anel de valorização. Cada A -módulo f.g. torção-livre é livre. Cada ideal f.g. de A é principal. Cada A -módulo torção-livre é plano.

Demonstração: [B].

Proposição I.7.3: Num anel de valorização, a interseção de dois ideais f.g. (então principais) é principal.

Demonstração: Seja V anel de valorização, I e J ideais f.g. de V . Por (I.7.1-(e)), temos $I \subseteq J$ ou $J \subseteq I$. Logo, $I \cap J = I$ ou $I \cap J = J$ que são principais.

Lema I.7.4: Seja K um submódulo livre de um A -módulo livre f.g. que é gerado por r elementos. Então K é gerado, no máximo, por r elementos.

Demonstração: Seja $K \cong A^n$ submódulo de $L \cong A^r$. Como a sequência $A^r \rightarrow A^n \rightarrow 0$ é exata, A^n é gerado por, no máximo r elementos, ou seja, $n \leq r$

Lema I.7.5: Seja A um domínio, M um A -módulo torção livre e f um homomorfismo de A^r em M , $f \neq 0$. Então $\ker f$ é isomorfo a um submódulo de um A -módulo livre gerado por $r-1$ elementos.

Demonstração: Seja $\{e_i\}_{i=1, \dots, r}$ uma base de A^r . Como $f \neq 0$, então existe algum k tal que $f(e_k) \neq 0$. Seja A^{r-1} submódulo livre de A^r gerado pelos $e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_r$. Seja p a projeção de A^r sobre A^{r-1} tal que $p(e_i) = e_i$ se $i \neq k$, $p(e_k) = 0$. É suficiente mostrar que a restrição $p' = p|_{\ker f}: \ker f \rightarrow A^{r-1}$ é injetiva: se $x \in \ker p'$, então x é da forma $x = ae_k$ onde $a \in A$. Se $x \in \ker f$, então $0 = f(ae_k) = af(e_k)$. Como $f(e_k) \neq 0$ e M é torção livre, então $a = 0$ e $x = ae_k = 0$.

CAPÍTULO II

ANÉIS COERENTES

§1. ANÉIS COERENTES

Aqui, definiremos anéis coerentes, que podem ser vistos como generalização de anéis noetherianos. Daremos também algumas equivalências que sugerem que anel coerente pode ser definido de diversas maneiras de acordo com o que se pretende utilizar.

Definição: Dizemos que o anel A é coerente, se todo ideal f.g. é f.a. .

Proposição II.1.1: Todo anel noetheriano é coerente.

Demonstração: (I.6.12)

Observação: Veremos mais adiante que $K[x_1, x_2, \dots]$ é coerente, mas não é noetheriano, onde K é noetheriano ou corpo.

Teorema II.1.2: Para um anel A , as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) Todo produto direto de A -módulos planos é plano.
- b) O produto direto de cada família de cópias de A é plano como um A -módulo.
- c) Cada submódulo f.g. de um A -módulo livre é f.a.

Demonstração:

(a→b) Claro, pois A é A-plano.

(b→c) Seja G um A-módulo livre e seja L um submódulo f.g. de G.

Vamos assumir, sem perda de generalidade, que G é f.g.,

$G = A^s = \{(y_1, y_2, \dots, y_s) : y_i \in A, i=1, \dots, s\}$. Seja $L = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$

onde $u_k = (y_{k_1}, \dots, y_{k_s})$. Seja F um A-módulo livre com base

$x_1, \dots, x_r$. Defino o epimorfismo $f: F \rightarrow L$ por $f(x_k) = u_k$ e

$K = \ker f$. Então temos a sequência exata: $0 \rightarrow K \xrightarrow{i} F \xrightarrow{f} L \rightarrow 0$,

onde F é livre f.g.. Resta provar que K é f.g..

Para cada $w \in K$ seja $A^{(w)}$ uma cópia de A. Defino

$R = \prod_{w \in K} A^{(w)}$. Para cada $w \in K$, $w = a_1(w)x_1 + \dots + a_r(w)x_r$, onde

$a_i(w) \in A, i=1, \dots, r$. $0 = f(w) = a_1(w)u_1 + \dots + a_r(w)u_r$, ou seja,

$$\sum_{k=1}^r a_k(w)y_{k_j} = 0 \text{ para } 1 \leq j \leq s.$$

Seja $a_k = (0, \dots, 0, a_k(w), 0, \dots, 0) \in R$ onde $a_k(w)$ está

na componente w do produto direto. Analogamente, se temos $w', w'', \dots$

... elementos de K, $w' = \sum_{k=1}^r a_k(w')x_k, w'' = \sum_{k=1}^r a_k(w'')x_k, \dots$

Tomando $\bar{a}_k = (a_k(w'), a_k(w''), \dots, a_k(w), \dots)$, temos

$$\sum_{k=1}^r \bar{a}_k y_{k_j} = 0.$$

Por hipótese, R é um A-módulo plano. Então existem

$b_1, \dots, b_n$ elementos de R e $\{u_{i_k}\} \subseteq A$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq r$) tal que

$$\bar{a}_k = \sum_{i=1}^n b_i u_{i_k} \text{ e } \sum_{k=1}^r u_{i_k} y_{k_j} = 0 \text{ (1.3.2).}$$

Tomando $z_i = \sum_{k=1}^r u_{i_k} x_k \in F$ para $i=1, \dots, n$, então $f(z_i) = \sum_{k=1}^r u_{i_k} u_k = 0$.

Então, $z_1, \dots, z_n \in K$.

Como $b_i \in R$, seja $b_i(w) \in A$, a componente w de b_i . Visto que $\bar{a}_k = \sum_{i=1}^r b_i u_{i_k}$, temos $\bar{a}_k(w) = \sum_{i=1}^n b_i(w) u_{i_k} = a_k(w)$ para $k=1, \dots, r$ e $w \in K$. Como $w = \sum_{k=1}^r a_k(w) x_k = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^n b_i(w) u_{i_k} \right) x_k = \sum_{i=1}^n \left(b_i(w) \sum_{k=1}^r u_{i_k} x_k \right) = \sum_{i=1}^n b_i(w) z_i$ então $z_1, \dots, z_n$ geram K . Logo, K é f.g..

(c → a) Seja $\{R_w\}$ uma família de A -módulos planos e $R = \prod R_w$. Se $\text{Tor}_1(R, C) = 0$ para todo A -módulo f.a. C , então R é plano (I.5.11) Para ver isto, seja C um A -módulo f.a.. Logo, temos uma sequência exata (I.4.4) $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow 0$ com K A -módulo f.g., F A -módulo livre f.g.. Por (I.2.5), (I.2.8) e (I.6.9) temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} R \otimes K & \rightarrow & R \otimes F & \rightarrow & R \otimes C & \rightarrow & 0 \text{ exata} \\ & & \downarrow t_K & & \downarrow t_F & & \downarrow t_C \\ 0 \rightarrow \prod (R_w \otimes K) & \rightarrow & \prod (R_w \otimes F) & \rightarrow & \prod (R_w \otimes C) & \rightarrow & 0 \text{ exata} \end{array}$$

Como $R \otimes F \cong R \otimes A^n \cong (R \otimes A)^n \cong R^n$ e $R_w \otimes F \cong R_w \otimes A^n \cong (R_w)^n$ temos: $t_F: R^n \rightarrow \prod (R_w)^n$ isomorfismo e t_C é isomorfismo (I.6.10).

Como K é um submódulo f.g. de um A -módulo livre F , então K é f.a. e novamente por (I.6.10), temos que t_K é um isomorfismo. Como o diagrama é comutativo, então a sequência $0 \rightarrow R \otimes K \rightarrow R \otimes F \rightarrow R \otimes C \rightarrow 0$ é exata. Daí, $\text{Tor}_1(R, C) = 0$ (I.5.9)

Claramente, a condição (c) do teorema II.1.2 implica que A é coerente. Por outro lado, temos:

Teorema II.1.3: Se um anel A é coerente, então o produto direto de cada família de cópias de A é plano como um A -módulo.

Demonstração: Seja $\{\Lambda^{(w)}\}_{w \in W}$ uma família de cópias de A e $\Lambda^{(w)} \cong A$ para todo $w \in W$ e $R = \prod \Lambda^{(w)}$. Suponhamos que $a_1 y_1 + \dots + a_r y_r = 0$ onde $a_k \in R$ e $y_k \in A$, $1 \leq k \leq r$. Seja I ideal de A gerado por $y_1, \dots, y_r$, F um A -módulo livre com base $x_1, \dots, x_r$ e $f: F \rightarrow I$ o epimorfismo definido por $f(x_k) = y_k$ e $K = \ker f$. Por hipótese, K é f.g.. Sejam $z_1, \dots, z_n$ geradores de K e escrevemos $z_i = \sum_{k=1}^r u_{i_k} x_k$. Tomando $u(w) = a_1(w)x_1 + \dots + a_r(w)x_r$ onde $a_i(w)$ é a componente w de a_i , $i=1, \dots, r$, temos que $f(u(w)) = a_1(w)y_1 + \dots + a_r(w)y_r = 0$. Logo, $u(w) \in K$ para todo $w \in W$. Então existem $b_i(w) \in A$, $i=1, \dots, r$, tal que $u(w) = \sum_{i=1}^n b_i(w) z_i = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^n b_i(w) u_{i_k} \right) x_k = \sum_{k=1}^r a_k(w) x_k$ para todo $w \in W$.

Então $a_k = \sum_{i=1}^n b_i u_{i_k}$, $k=1, \dots, r$, $b_i = (\dots, b_i(w), \dots)$ e $\sum_{k=1}^r u_{i_k} y_k = f(z_i) = 0$ para $1 \leq i \leq n$, visto que $z_i \in K$. Logo, R é plano (I.3.2).

Os seguintes resultados dão mais informações sobre anel coerente a respeito de ideais f.g. em A . Vamos começar com a seguinte definição:

Definição: Seja A um anel, I um ideal de A e M um subconjunto de A . $(I:M) = \{r \in A : rM \subseteq I\}$ é chamado ideal quociente e é um ideal de A .

Do mesmo modo, se $a \in A$, podemos definir:

$$(I:a) = \{r \in A : ra \in I\} = (I:(a))$$

$(0:M)$ é chamado o anulador de M .

Lema II.1.4: Seja A um anel, I um ideal de A e $\{M_t\}$ uma família de subconjuntos de A . Se $M = \cup M_t$, então $(I:M) = \cap (I:M_t)$.

Demonstração: Seja $x \in (I:M)$. Então $xM \subseteq I$. Como $M = \cup M_t$, temos $xM \subseteq I$ para todo t . Logo, $x \in \cap (I:M_t)$.

Por outro lado, se $x \in \cap (I:M_t)$, temos $xM_t \subseteq I$ para todo t . Logo $xM \subseteq I$, ou seja, $x \in (I:M)$.

Lema II.1.5: Seja $I = Aa_1 + \dots + Aa_n$ um ideal do anel A . Tomemos $a \in A$, $J = I + Aa$ e seja F um A -módulo livre com base $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$. Definimos um homomorfismo $f:F \rightarrow J$ por $f(x_i) = a_i$, para $i=1, \dots, n$ e $f(x_{n+1}) = a$. Seja $K = \ker f$ e seja $F' = Ax_1 + \dots + Ax_n \subseteq F$ e $K' = K \cap F'$. Então existe um homomorfismo $g:K \rightarrow (I:a)$ tal que $\ker g = K'$.

Demonstração: Seja $u = b_1x_1 + \dots + b_{n+1}x_{n+1}$ elemento de K . Então $0 = f(u) = b_1a_1 + \dots + b_{n+1}a$ e então $b_{n+1} \in (I:a)$. Definindo $g:K \rightarrow (I:a)$ por $g(u) = b_{n+1}$ temos $g(u) = 0$ se, e somente se, $u \in K \cap F'$ (ou seja, se, e somente se, $b_{n+1} = 0$).

Teorema II.1.6: A é um anel coerente se, e somente se, para todo ideal I f.g. de A , $(I:a)$ é f.g. para cada $a \in A$.

Demonstração: Seja A coerente, $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ideal f.g. de A e $a \in A$. Seja $J = I + Aa$. Consideremos a seguinte sequência exata $0 \rightarrow K \rightarrow F \xrightarrow{f} J \rightarrow 0$ onde F é um A -módulo livre com base $x_1, \dots, x_{n+1}$ e $f(x_i) = a_i$ para $i=1, \dots, n$ e $f(x_{n+1}) = a$ e $K = \ker f$. Por (II.1.5), temos um homomorfismo $g: K \rightarrow (I:a)$. Afirmamos que g é epimorfismo, pois para $r \in (I:a)$, ou seja, $ra \in I$, logo $ra = \sum_{i=1}^n r_i a_i$. Seja $u = -r_1 x_1 - \dots - r_n x_n + r x_{n+1} \in F$. Como $f(u) = 0$, então $u \in K$ e $g(u) = r$. Agora, como A é coerente e J é f.g. então J é f.a. daí, K é f.g.. Portanto $(I:a) \cong K/\ker g$ é f.g.

Por outro lado, seja $I = Aa_1 + \dots + Aa_n$ ideal f.g. em A . Se $n = 1$, temos a sequência $0 \rightarrow (0:a_1) \rightarrow A \rightarrow Aa_1 \rightarrow 0$ exata. Então I é f.a.

Aplicando indução sobre n , supomos a implicação verdadeira para todo $k < n$, $k \geq 1$.

Seja F um A -módulo livre com base $x_1, \dots, x_n$ e seja o epimorfismo $f: F \rightarrow I$ com $f(x_i) = a_i$. Seja $K = \ker f$ e seja $I' = Aa_1 + \dots + Aa_{n-1} \subseteq I$, $F' = Ax_1 + \dots + Ax_{n-1} \subseteq F$ e $K' = K \cap F'$. Por (II.1.5), as seguintes sequências são exatas: $0 \rightarrow K' \rightarrow F' \rightarrow I' \rightarrow 0$, $0 \rightarrow K' \rightarrow K \rightarrow (I':a_n) \rightarrow 0$. Por hipótese, $(I':a_n)$ é f.g. e por indução K' é f.g.. Como a segunda sequência é exata, e por (I.2.4), K é f.g.. Como $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow 0$ é exata, temos que I é f.a..

Teorema II.1.7: A é anel coerente se, e somente se, $(0:a)$ é ideal f.g. para cada $a \in A$ e a interseção de cada dois ideais f.g. de A é também f.g..

Demonstração: Seja a sequência exata $0 \rightarrow (0:a) \rightarrow A \rightarrow Aa \rightarrow 0$. Se A é coerente, então Aa é f.a. e $(0:a)$ é f.g.. Sejam I_1 e I_2 ideais f.g. de A e $I = I_1 + I_2$. Tomando A coerente, I , I_1 e I_2 são f.a.. Então, por (I.4.5) $I_1 \cap I_2$ é f.g..

Por outro lado, seja $I = Aa_1 + \dots + Aa_n$ ideal f.g. de A . Se $n = 1$ temos a sequência exata $0 \rightarrow (0:a_1) \rightarrow A \rightarrow Aa_1 \rightarrow 0$. Como $(0:a_1)$ é f.g. temos Aa_1 f.a.. Fazendo indução sobre n , suponhamos que a implicação vale para $k < n$, $k \geq 1$.

Seja $I_1 = Aa_1 + \dots + Aa_{n-1}$ e $I_2 = Aa_n$. Por hipótese de indução, I_1 e I_2 são f.a.. Visto que $I_1 \cap I_2$ é f.g., temos, por (I.4.5) que I é f.a..

Teorema II.1.8: Um anel A é coerente se, e somente se, para todo A -módulo livre F f.g. e para todo homomorfismo $f:F \rightarrow A$, o kernel da f é um A -módulo f.g..

Demonstração: Seja A coerente e $f:F \rightarrow A$ homomorfismo onde F é um A -módulo livre f.g.. Logo, temos que $f(F)$ é um ideal f.g. de A , portanto $f(F)$ é f.a.. Como $0 \rightarrow \ker f \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$ é exata, temos $\ker f$ f.g. (I.4.4). Por outro lado, se I é ideal f.g. de A , seja F A -módulo livre f.g. e $f:F \rightarrow A$ homomorfismo tal que $f(F) = I$. Se $\ker f$ é f.g. então I é f.a. e A é coerente.

Temos o sumário:

Teorema II.1.9: Para um anel A , as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) A é coerente.
- b) Todo produto direto de A -módulos planos é plano.
- c) O produto direto de cada família de cópias de A é plano como um A -módulo.
- d) Cada submódulo f.g. de um A -módulo livre é f.a..
- e) Se I é um ideal f.g. de A , então $(I:a)$ é f.g. para todo $a \in A$.
- f) $(0:a)$ é ideal f.g. de A para todo $a \in A$ e a interseção de cada dois ideais f.g. de A também é f.g..
- g) Para todo A -módulo livre F f.g. e para todo homomorfismo $f:F \rightarrow A$, o kernel da f é um A -módulo f.g..

Demonstração: $(b \leftrightarrow c \leftrightarrow d)$ (II.1.2).

$(d \rightarrow a)$ Claro.

$(a \leftrightarrow e)$ (II.1.6).

$(a \leftrightarrow f)$ (II.1.7).

$(a \leftrightarrow g)$ (II.1.8).

$(a \rightarrow c)$ (II.1.3).

Observação: Na condição f podemos mudar a segunda condição por:
"a interseção de um ideal principal por um f.g. é f.g.".

Proposição II.1.10: Todo anel de valorização é coerente.

Demonstração: Seja A um anel de valorização. Por definição, A é domínio. Seja $\{A^{(w)}\}$ uma família de cópias de A . Então $\prod A^{(w)}$ é torção livre, portanto, um A -módulo plano (I.7.2). Logo, por (II.1.9-(c)), A é coerente.

Proposição II.1.11: Seja A um anel tal que A^N , o produto direto enumerável de cópias de A seja um anel coerente. Então A é anel coerente.

Demonstração: Seja $f: A^n \rightarrow A$ um homomorfismo de A -módulos. Temos então $0 \rightarrow \ker f \rightarrow A^n \rightarrow A \rightarrow$ exata. Por (I.2.6), temos que $0 \rightarrow (\ker f)^N \rightarrow (A^n)^N \rightarrow A^N$ é exata e por (I.2.9) $0 \rightarrow (\ker f)^N \rightarrow (A^N)^n \rightarrow A^N$ é uma sequência exata de A^N -módulos. Como A^N é coerente, temos que $(\ker f)^N$ é A^N -módulo f.g. e por (I.2.10) $\ker f$ é f.g..

§ 2. MÓDULOS COERENTES

Definição: Um A-módulo é dito coerente, se é f.g. e todo submódulo f.g. é f.a..

Proposição II.2.1: Seja A um anel coerente. Então, todo A-módulo livre f.g. é coerente.

Demonstração: (II.1.9-(d)).

Proposição II.2.2: A soma direta de dois módulos coerentes é coerente. O quociente de um módulo coerente por um submódulo f.g. é um módulo coerente.

Demonstração: Sejam M_1 e M_2 módulos coerentes e $M = M_1 \oplus M_2$. Se $N \subseteq M_1 \oplus M_2$, N f.g., tomamos $N_1 = N \cap M_1$ e $N_2 = N \cap M_2$. Logo, temos $N = N_1 \oplus N_2$ onde N_1 e N_2 são f.g. (I.2.4) e N_1 e N_2 são f.a..

Sejam K_1 e K_2 módulos f.g. e F_1 e F_2 livres f.g. tal que as sequências $0 \rightarrow K_1 \rightarrow F_1 \rightarrow N_1 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow K_2 \rightarrow F_2 \rightarrow N_2 \rightarrow 0$ são exatas. Então temos a sequência $0 \rightarrow K_1 \oplus K_2 \rightarrow F_1 \oplus F_2 \rightarrow N_1 \oplus N_2 \rightarrow 0$ exata, onde $K_1 \oplus K_2$ f.g. e $F_1 \oplus F_2 \cong$ módulo livre f.g.. Logo, N é f.a..

Para o caso do quociente, seja M módulo coerente. Se N é um submódulo f.g. de M, logo temos que N é f.a. e M/N é f.g.. Seja K/N submódulo f.g. de M/N . Como a sequência $0 \rightarrow N \rightarrow K \rightarrow K/N \rightarrow 0$ é exata, temos que K é submódulo f.g. de M, logo f.a.. Por (I.3.9) o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & 0 & & 0 & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 \rightarrow N & \rightarrow & K & \rightarrow & K/N & \rightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 \rightarrow F_1 & \rightarrow & F_1 \oplus F_2 & \rightarrow & F_2 & \rightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 \rightarrow K_1 & \rightarrow & K_1 \oplus K_2 & \rightarrow & K_2 & \rightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

com as linhas e as colunas exatas, F_1 e F_2 livres f.g.

Então, como N e K são f.a., temos que K_1 e $K_1 \oplus K_2$ são f.g.. Como $K_2 \cong (K_1 \oplus K_2)/K_1$, logo K_2 é f.g. e então K/N é f.a..

Teorema II.2.3: Seja A uma álgebra (comutativa) sobre um anel K , coerente com K -módulo. Então A é anel coerente.

Demonstração: Seja I um ideal f.g. de A . Seja f um A -epimorfismo de um A -módulo livre L f.g. sobre I . Temos, por definição que A é um K -módulo f.g.. Então L é um K -módulo livre f.g.. Como $I = f(L)$, I é K -módulo f.g.. Então, I é um K -módulo f.a., ou seja, $\ker f$ é um K -módulo f.g.. Como $\ker f$ é um A -módulo, temos que $\ker f$ é f.g. como um A -módulo.

Corolário II.2.4: O quociente de um anel coerente por um ideal f.g. é um anel coerente.

Demonstração: Seja A um anel coerente e I um ideal f.g.. Como A é um A -módulo coerente, temos, por (II.2.2) que A/I é um A -módulo coerente. Então por (II.2.3) A/I é anel coerente.

Corolário II.2.5: Seja A um anel tal que $A[x]$ seja um anel coerente. Então A é coerente.

Demonstração: Como $A = A[x]/Ax$, temos que A é um anel coerente.

Observação: Em geral, se A é um anel coerente, não implica que $A[x]$ seja um anel coerente (III.2.4). Mas a seguir, veremos um teorema interessante (II.2.8).

Seja $R = A[x_1, x_2, \dots]$ anel dos polinômios sobre A .

Seja I um ideal de A . Então, a extensão de I em R é:

$$IR = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_i : a_i \in I \text{ e } f_i \in R, \text{ para todo } i=1, \dots, n \right\} =$$

$\{f \in R : \text{os coeficientes de } f \text{ pertencem a } I\}$. Além disso, se I é f.g. em A , então IR é f.g. em R .

Lema II.2.6: Seja $a \in A$, $R = A[x_1, x_2, \dots]$, $(0:a)_A = \{b \in A : ba = 0\}$ e $(0:a)_R = \{f \in R : fa = 0\}$. Então $(0:a)_R = [(0:a)_A]R$.

Demonstração: Claramente $[(0:a)_A]R \subseteq (0:a)_R$, pois $(0:a)_A \subseteq (0:a)_R$.

Por outro lado, se $f \in (0:a)_R$ e

$$f = \sum_{i=1}^r a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_{i_1}^{t_1} x_{i_2}^{t_2} \dots x_{i_n}^{t_n} \text{ onde } a_{i_1 i_2 \dots i_n} \in A, \text{ temos}$$

$(a_{i_1 i_2 \dots i_n})a = 0$ para todos os coeficientes de f . Então

$$a_{i_1 i_2 \dots i_n} \in (0:a)_A \text{ e } (0:a)_R \subseteq [(0:a)_A]R.$$

Lema II.2.7: Sejam I_1 e I_2 ideais de A e $R = A[x_1, x_2, \dots]$.

Então $(I_1 \cap I_2)R = (I_1R) \cap (I_2R)$.

Demonstração: Trivialmente, $(I_1 \cap I_2)R \subseteq (I_1R) \cap (I_2R)$ pois

$$I_1 \cap I_2 \subseteq (I_1R) \cap (I_2R).$$

Por outro lado, se $f \in (I_1R) \cap (I_2R)$, temos que os coeficientes de f estão em I_1 e I_2 , portanto estão em $I_1 \cap I_2$, logo $f \in (I_1 \cap I_2)R$.

Teorema II.2.8: Para que o anel de polinômios $A[x_1, x_2, \dots]$ seja coerente, é suficiente que todo anel de polinômios com um número finito de indeterminadas seja coerente.

Demonstração: Sejam J_1 e J_2 ideais f.g. de $A[x_1, x_2, \dots]$ e f um elemento de $A[x_1, x_2, \dots]$. Basta mostrar que $J_1 \cap J_2$ e $(0:f)$ são f.g. e aplicar (II.1.9-(f)).

Se J_1 é gerado por $f_1, \dots, f_n$ e J_2 gerado por $g_1, \dots, g_m$, então existe r tal que $f, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m$ são elementos de $A[x_1, \dots, x_r]$. Sejam I_1 e I_2 ideais de $A[x_1, \dots, x_r]$ gerados por $f_1, \dots, f_n$ e $g_1, \dots, g_m$ e $(0:f)'$ o anulador de f em $A[x_1, \dots, x_r]$. Temos então que $I_1 \cap I_2$ e $(0:f)'$ são ideais f.g. de $A[x_1, \dots, x_r]$ que é coerente, por hipótese. Chamando $A_r = A[x_1, \dots, x_r]$ e $A_r[x_{r+1}, x_{r+2}, \dots] = A[x_1, x_2, \dots]$ e aplicando (II.2.6) e (II.2.7) temos que $(0:f)$ e $J_1 \cap J_2$ são f.g.. Logo, $A[x_1, x_2, \dots]$ é coerente.

Aplicação: O anel dos polinômios em uma família de indeterminadas (infinitas) sobre um anel noetheriano (ou corpo) é coerente, mas não é noetheriano. Por exemplo, $R = K[x_1, x_2, \dots]$ onde K é um corpo, R não é noetheriano, mas R é coerente, por (II.2.8) e (II.1.1) e pelo teorema da base de Hilbert.

§ 3. ANÉIS PLANOS E ANÉIS REGULARES

Nesta seção mostraremos que se o anel A é plano, então A e $A[x]$ são coerentes.

Definição: Um anel A é dito regular (Von Neumann), se para cada $a \in A$, existe $x \in A$ tal que $axa = a$.

Exemplo: Corpo = domínio regular e todo produto direto de anéis regulares é anel regular.

Lema II.3.1: Em um anel regular, temos as seguintes propriedades:

- 1) Toda não unidade é divisor de zero.
- 2) Todo ideal principal pode ser gerado por um idempotente (x é idempotente se $x^2 = x$).

Demonstração: 1) Se a não é divisor de zero, seja x tal que $a = axa$. Então $a(1-xa) = 0 = (1-ax)a$, ou seja, $xa = 1 = ax$, daí a é uma unidade.

2) Seja aA um ideal principal e seja $x \in A$ tal que $a = axa$. Então $(ax)^2 = axax = ax$. $axA \subseteq aA = axaA \subseteq axA$. Logo, $aA = axA$.

Teorema II.3.2: (Von Neumann) Num anel regular todo ideal f.g. é principal.

Demonstração: É suficiente mostrar que todo ideal gerado por dois elementos é principal.

Seja o ideal $aA + bA$. $aA = eA$ onde $e^2 = e$. Como $A = eA + (1-e)A$, temos $bA \subseteq ebA + (1-e)bA$. Logo, $aA + bA \subseteq eA + ebA + (1-e)bA \subseteq eA + (1-e)bA \subseteq eA + bA$, ou seja, $aA + bA = eA + bA = eA + (1-e)bA$. Seja $(1-e)bA = fA$ onde $f^2 = f$. Como $f \in (1-e)bA$, $f = (1-e)br$ para algum $r \in A$. $cf = c(1-e)br = 0$. $aA + bA = eA + fA$.

Seja $g = f(1-e)$. Então $gf = f(1-e)f = f^2 - fef = f$. $g^2 = gf(1-e) = g$. $eg = ef(1-e) = 0$. $ge = f(1-e)e = 0$. $g = f(1-e) \in fA$; $f = gf \in gA$. Então $gA = fA$ e $aA + bA = eA + gA$. $er + gr' = (e + g)(er + gr')$; então $eA + gA \subseteq (e + g)A$; como $(e + g)A \subseteq eA + gA$, temos que $aA + bA = (e + g)A$.

Definição: Se I é um ideal do anel A , o radical de I é $r(I) = \{x \in A : x^n \in I \text{ para algum } n > 0\}$.

Observação: $I \subseteq r(I)$ e se $I \subseteq J$ então $r(I) \subseteq r(J)$.

Teorema II.3.3: A é anel regular comutativo se, e somente se, $I = r(I)$ para todo ideal I de A .

Demonstração: Seja A regular, basta mostrar que $r(I) \subseteq I$. Seja $a \in r(I)$, então $a^n \in I$ para algum $n > 0$. Como $a = a^2x = a^4x^3 = \dots = a^n x^{n-1}$, temos que $a \in I$. Logo, $I = r(I)$.

Por outro lado, seja $a \in A$ e consideremos $I = \{a^2y : y \in A\}$. Claramente, I é um ideal de A . Como $a^3 = a^2a \in I = r(I)$,

logo, $a \in I$, ou seja, existe $x \in A$ tal que $a = a^2x$.

Lema II.3.4: Sejam I e J ideais do anel A . Então $r(IJ) = r(I \cap J)$.

Demonstração: Se $x \in r(I \cap J)$ então existe $n > 0$ tal que $x^n \in I$ e $x^n \in J$.

Logo, $x^{2n} = x^n x^n \in IJ$ e $x \in r(IJ)$, $r(I \cap J) \subseteq r(IJ)$. O outro lado é trivial, como $IJ \subseteq I \cap J$, temos $r(IJ) \subseteq r(I \cap J)$.

Teorema II.3.5: A é anel comutativo regular se, e somente se, a interseção de dois ideais é igual ao produto.

Demonstração: Se A é regular, então usando (II.3.3) e (II.3.4) temos $I \cap J = r(I \cap J) = r(IJ) = IJ$.

Por outro lado, se $a \in A$, seja $I = Aa$. Então, por hipótese, temos $Aa = I \cap I = II = Aa^2$, então existe $x \in A$ tal que $a = a^2x$. Logo, A é regular.

Definição: Dizemos que um anel A é plano, se todo A -módulo é plano.

Observação: A é anel plano se, e somente se, $\text{Tor dim}(A) = 0$ (I.5.12).

Proposição II.3.6: Todo anel plano é coerente.

Demonstração: Segue do fato que o produto direto de uma família de A -módulos é um A -módulo, logo, um A -módulo plano; e de (II.1.9-(b)).

Queremos mostrar que anel regular é igual a anel plano.

Teorema II.3.7: A é anel plano se, e somente se, a interseção de dois ideais é igual ao produto.

Demonstração: Sejam I e J ideais de A anel plano. Então temos as sequências exatas: $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$, $0 \rightarrow J \rightarrow A \rightarrow A/J \rightarrow 0$.

Então, pelo teorema (I.5.9) temos:

$0 = \text{Tor}_1(A, A/J) \rightarrow \text{Tor}_1(A/I, A/J) \rightarrow I \otimes (A/J) \rightarrow A \otimes (A/J) \rightarrow (A/I) \otimes (A/J) \rightarrow 0$
exata, isto é, $0 \rightarrow \text{Tor}_1(A/I, A/J) \rightarrow I/IJ \rightarrow (A/I) \otimes (A/J) \rightarrow 0$ exata.
Logo, $\text{Tor}_1(A/I, A/J) \cong I \cap J / IJ$. Como A/J é plano, $\text{Tor}_1(A/I, A/J) = 0$ (I.5.10) e daí $I \cap J = IJ$.

3070

Por outro lado, se $IJ = I \cap J$ temos $\text{Tor}_1(A/I, A/J) = 0$ para todos ideais I, J de A. Por (I.5.15) $\text{Tordim}(A) =$

$\inf\{n : \text{Tor}_{n+1}(A/I, A/J) = 0 \text{ para todos } I, J \text{ ideais f.g. de } A\}$,
logo, $\text{Tordim}(A) = 0$ e então A é anel plano.

Corolário II.3.8: Um anel A é plano se, e somente se, é regular.

Demonstração: (II.3.5) e (II.3.7).

Proposição II.3.9: Seja A um anel plano. Então, o anulador de todo elemento de A é um ideal principal.

Demonstração: Seja $a \in A$. Como A é coerente (II.3.6), $(0:a)$ é f.g. (II.1.9-(f)), logo é principal (II.3.8) e (II.3.2).

Proposição II.3.10: O produto direto de anéis planos é um anel plano.

Demonstração: Se $\{A_i\}$ é uma família de anéis planos, então é uma família de anéis regulares. Logo, $\prod A_i$ é um anel regular e, portanto, plano (II.3.8).

Lema II.3.11: Seja A anel plano e $I_1, \dots, I_n$ ideais f.g.. Então $I_1, \dots, I_n$ podem ser gerados por idempotentes ortogonais.

Nota: a e b são ortogonais, se $ab = 0$.

Demonstração: (II.3.1), (II.3.2) e (II.3.8), nos dá que $I_i = a_i A$ onde a_i é idempotente para todo i . Fazendo indução sobre n , temos:

Para $n = 2$, Sejam $I_1 = a_1 A$ e $I_2 = a_2 A$. Seja $I'_2 = (1-a_1)I_2$. Logo, $I_1 + I'_2 = a_1 A + (1-a_1)a_2 A = a_1 A + a_2 A = I_1 + I_2$ pois $a_1 a_2 A \subseteq a_1 A$. Escrevendo $I'_2 = f_1 A$ onde $f_1^2 = f_1 \in A$. Visto que $f_1 \in I'_2 = (1-a_1)I_2$, então $a_1 f_1 = 0$ pois $a_1(1-a_1) = 0$. Seja $f' = f_1(1-a_1)$. Então $f'f_1 = f_1(1-a_1)f_1 = f_1(f_1 - a_1 f_1) = f_1 f_1 = f_1$. Logo, $(f')^2 = f'f_1(1-a_1) = f_1(1-a_1) = f'$. Como $f' = f_1(1-a_1) \in I'_2 = f_1 A$ e como $f_1 = f'f_1 \in f' A$ temos que $f' A = f_1 A = I'_2$. Então $I_1 + I_2 = a_1 A + f' A$. Visto que $a_1 f' = a_1 f_1(1-a_1) = 0$ e $f' a_1 = f_1(1-a_1)a_1 = 0$. Então, a_1 e f' são ortogonais.

Para $n-1$, $I_1 = a_1 A, \dots, I_{n-1} = a_{n-1} A$ onde os a_i são idempotentes ortogonais.

Para n , sejam $I_1, \dots, I_{n-1}$ gerados pelos idempotentes ortogonais $a_1, \dots, a_{n-1}$ e $I_n = a_n A$. Seja $I = I_1 + \dots + I_{n-1}$ gerado pelo idempotente a . Como no caso $n = 2$, temos I_n gerado

por f' idempotente e $af' = f'a = 0$. Logo, $f'I = 0$ e como $a_i \in I$ para $i=1, \dots, n-1$, logo, $f'a_i = 0$ para todo i .

Proposição II.3.12: Seja $A[x]$ anel de polinômios sobre um anel plano A , n um inteiro > 0 e I um ideal f.g de $A[x]$ gerado por polinômios de grau menor ou igual a n . Então I pode ser gerado por $n+1$ polinômios E_i ($0 \leq i \leq n$) onde cada E_i é da forma $E_i = e_i P_i$, onde os e_i são idempotentes ortogonais de A e cada P_i é um polinômio unitário de grau i .

Demonstração: Seja I gerado por $f_1, \dots, f_t$, $f_i = a_{i0} + a_{i1}x + \dots + a_{in}x^n$. Se $f \in I$, $f = \sum_{i=1}^t g_i f_i$ onde $g_i \in A[x]$ e $g_i = b_{i0} + \dots + b_{im}x^m$. Então

$$f = \sum_{i=1}^t f_i g_i = \sum_{i=1}^t [f_i \sum_{j=0}^m b_{ij} x^j] = \sum_{j=0}^m [\sum_{i=1}^t f_i b_{ij}] x^j = \sum_{j=0}^m [\sum_{i=1}^t a_{i0} b_{ij}] x^j + \sum_{j=0}^m [\sum_{i=1}^t a_{i1} b_{ij} x] x^j + \dots + \sum_{j=0}^m [\sum_{i=1}^t a_{in} b_{ij} x^n] x^j \dots$$

Por (II.3.1), fazendo $\langle a_{is} \rangle_{i=1}^t = \langle e_s \rangle$ onde os e_s são idempotentes ortogonais, para $s=1, \dots, m$,

$$f = \sum_{j=0}^m (c_{j0} e_0) x^j + \sum_{j=0}^m (c_{j1} e_1 x) x^j + \dots + \sum_{j=0}^m (c_{jn} e_n x^n) x^j. \text{ Então}$$

$f \in e_0 A[x] + e_1 x A[x] + \dots + e_n x^n A[x]$. Logo, $I \subseteq e_0 A[x] + \dots + e_n x^n A[x]$.

$$\text{Por outro lado, como } f_i = \sum_{s=0}^n a_{is} x^s = \sum_{s=0}^n d_{is} e_s x^s \text{ onde}$$

$a_{is} = d_{is} e_s \in A e_s$ para todo $i=1, \dots, n$, temos que

$$e_j f_i = d_{ij} e_j x^j = a_{ij} x^j.$$

Como $A e_j = \langle a_{ij} \rangle_{i=1}^t$, temos $e_j x^j = g_{1j} a_{1j} x^j + \dots + g_{tj} a_{tj} x^j =$

$g_{1j} e_j f_1 + \dots + g_{tj} e_j f_t$ onde $g_{ij} \in A$ para todo $i=1, \dots, t$, $j=1, \dots, n$.

Logo, $e_j x^j \in I$ para todo j , e $e_0 A[x] + \dots + e_n x^n A[x] \subseteq I$, ficando

assim demonstrada a proposição.

Lema II.3.13: Seja A anel plano e a um elemento de A. Então

$$(0:a^2) = (0:a).$$

Demonstração: $(0:a^2) = (0:\langle a^2 \rangle) = (0:\langle a \rangle^2) = (0:\langle a \rangle \langle a \rangle)^* =$
 $(0:\langle a \rangle \cap \langle a \rangle) = (0:\langle a \rangle) = (0:a). (* (II.3.7)).$

Lema II.3.14: Seja A um anel plano. Se $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in A[x]$

então $(0:f(x)) = \bigcap_{i=0}^n (0:a_i)$. Além disso, $(0:f(x))$ é um ideal principal de $A[x]$ que é gerado por um elemento de A.

Demonstração: Se $g(x) \in \bigcap_{i=0}^n (0:a_i)$ então $g(x)f(x) = 0$, logo
 $\bigcap_{i=0}^n (0:a_i) \subseteq (0:f(x)).$

Por outro lado, seja $g(x)f(x) = 0$, com

$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$. Se $g(x) \notin (0:a_i)$ mas $g(x) \in (0:a_k)$ para todo $k < i$, então $a_i b_0 + a_i b_1x + \dots + a_i b_mx^m \neq 0$. Seja $a_i b_j \neq 0$ mas $a_i b_k = 0$ para todo $k < j$. Como $g(x)f(x) = 0$, temos

$$0 = a_0 b_{i+j} + \dots + a_{i-1} b_{j+1} + a_i b_j + a_{i+1} b_{j-1} + \dots + a_{i+j} b_0 =$$

$$a_i b_j + a_{i+1} b_{j-1} + \dots + a_{i+j} b_0. \text{ Logo, } a_i^2 b_j = 0 \text{ e } b_j \in (0:a_i^2) = (0:a_i)$$

(II.3.13) e então $a_i b_j = 0$. Contradição. Logo, $g(x) \in (0:a_i)$ para $i=1, \dots, n$ e $g(x) \in \bigcap_{i=1}^n (0:a_i)$ e portanto, $(0:f(x)) \subseteq \bigcap_{i=1}^n (0:a_i)$ e,

$$\text{com isso, } (0:f(x)) = \bigcap_{i=1}^n (0:a_i).$$

Por (II.3.9) $(0:a_i) = \langle e_i \rangle$ em $A[x]$

e por (II.3.7), $\bigcap_{i=1}^n (0:a_i) = \langle b \rangle$ em $A[x]$. Logo, $(0:f(x)) = \langle b \rangle$.

Pela proposição II.3.6 todo anel plano é coerente, mas em geral, A coerente não implica $A[x]$ coerente. No caso de anel plano temos:

Teorema II.3.15: Seja A um anel plano. Então $A[x]$ é coerente.

Demonstração: Seja I ideal f.g. de $A[x]$ gerado pelos polinômios $e_0 P_0, \dots, e_n P_n$ como em (II.3.12). Seja $L = A[x]^{n+1}$ um $A[x]$ -módulo livre com base canônica $w_0, \dots, w_n$ e seja θ um $A[x]$ -homomorfismo de L em I definido por $\theta(w_i) = e_i P_i$ para $i=0, \dots, n$. Se $g \in \ker \theta$, $g = \sum_{i=0}^n g_i w_i$, então $\sum_{i=0}^n g_i e_i P_i = 0$. Para $j=0, \dots, n$, temos que $0 = e_j (\sum_{i=0}^n g_i e_i P_i) = g_j e_j P_j$, ou seja, $g_j \in (0 : e_j P_j) = \langle b_j \rangle$, $b_j \in A$ (II.3.14). Logo, $g \in \langle b_0 w_0 \rangle + \dots + \langle b_n w_n \rangle$ que é um $A[x]$ -módulo gerado por $n+1$ elementos. Analogamente, se $g \in \langle b_0 w_0 \rangle + \dots + \langle b_n w_n \rangle$ então, $\theta(g) = 0$. Logo, $\ker \theta$ é f.g. e I é f.a. e então, $A[x]$ é coerente.

CAPÍTULO III

ANÉIS UNIFORMEMENTE COERENTES

§1. ANÉIS UNIFORMEMENTE COERENTES

Anel uniformemente coerente será definido como um caso particular de anel coerente. Veremos casos onde o anel de polinômios ou o anel das séries formais são uniformemente coerentes e também a relação entre coerente e uniformemente coerente.

Definição: Dizemos que o anel A é uniformemente coerente se existe uma aplicação $\phi: N^* \rightarrow N$ tal que para todo A -módulo livre F gerado por $n \geq 1$ elementos e todo homomorfismo não nulo $f: F \rightarrow A$, o kernel de f pode ser gerado por $\phi(n)$ elementos.

Nota: $N =$ naturais, $N^* = N - \{0\}$.

Exemplo: Seja $A = K[x_1, x_2, \dots]$ onde K é um corpo. A é coerente (aplicação de II.2.8), mas não é uniformemente coerente, pois tomando homomorfismos $f_i: A \rightarrow A$ com $f_i(x_j) = 0$ se $i < j$ e $f_i(x_j) = x_j$ se $i > j$ e $f_i(a) = a$ para todo $a \in K$. Temos que $\ker f_i = \langle x_1, \dots, x_i \rangle$ e $\phi(1)$ não pode ser definido.

Lema III.1.1: Seja $f:A^n \rightarrow A$ homomorfismo onde A é um anel. Se $f(A^n) \cong A$ então $\ker f$ é gerado por $n-1$ elementos.

Demonstração: Sejam as seqüências exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \ker f & \rightarrow & A^n & \rightarrow & A \rightarrow 0 \\ & & \cong & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & A^{n-1} & \rightarrow & A^n & \rightarrow & A \rightarrow 0 \end{array}$$

Então $\ker f$ é gerado por $n-1$ elementos.

Exemplo: 1) Seja A corpo e $f:A^n \rightarrow A$. Se $f \neq 0$, $f(A^n) = A$, logo, $\ker f \cong A^{n-1}$ e $\phi(n) = n-1$.

2) Se A é anel principal e $f:A^n \rightarrow A$ homomorfismo. Se $f \neq 0$, $f(A^n) \cong A$ e $\phi(n) = n-1$.

3) Se A é domínio Bezout (todo ideal f.g. é principal), como nos casos anteriores, A é uniformemente coerente.

Teorema III.1.2: Um anel A é uniformemente coerente se, e somente se, as seguintes duas condições são simultaneamente satisfeitas:

(i) Existe um inteiro $m > 0$ tal que o anulador de todo elemento de A pode ser gerado por m elementos.

(ii) Existe uma aplicação $\psi:N^* \times N^* \rightarrow N$ tal que a interseção de um ideal gerado por p elementos ($p \geq 1$) e um ideal gerado por q elementos ($q \geq 1$) pode ser gerado por $\psi(p,q)$ elementos.

Demonstração: Seja A uniformemente coerente e $a \in A$, então a seqüência: $0 \rightarrow (0:a) \rightarrow A \xrightarrow{f} aA \rightarrow 0$ é exata. Então $\ker f$ pode ser gerado por $m = \phi(1)$ elementos.

Sejam I_1 ideal de A gerado por p elementos e I_2 ideal de A gerado por q elementos e sejam as seqüências exatas:

$0 \rightarrow K_i \rightarrow F_i \rightarrow I_i \rightarrow 0$, $i=1,2$ onde os F_i são livres, F_1 gerado por p elementos e F_2 gerado por q elementos. Seja K o kernel do epimorfismo de $F = F_1 \oplus F_2$ sobre $I = I_1 + I_2$.

Então temos o seguinte diagrama (1) comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & I_1 \cap I_2 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & K_1 \oplus K_2 & \xrightarrow{f_1} & F & \xrightarrow{g_1} & I_1 \oplus I_2 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow h_1 & \downarrow f_2 & \downarrow \text{id} & \downarrow g_2 & \downarrow h_2 \\
 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{f_2} & F & \xrightarrow{g_2} & I \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & K/h_1(K_1 \oplus K_2) & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array} \quad (1)$$

onde as colunas e as linhas são exatas. Pelo diagrama da serpente temos que $I_1 \cap I_2 \cong K/h_1(K_1 \oplus K_2)$. Supondo A uniformemente coerente, temos que K pode ser gerado por $\phi(p+q)$ elementos, $F = F_1 \oplus F_2$ é gerado por $p+q$ elementos. Definimos então $\psi(p,q) = \phi(p+q)$. Logo, $I_1 \cap I_2$ é gerado por $\psi(p,q)$ elementos.

Supondo que A satisfaça (i) e (ii), seja $f:A^n \rightarrow A$ homomorfismo. Então $f(A^n)$ pode ser gerado por n elementos. Seja $K = \ker f$. Para $n = 1$, como $f(A) = f(1)A$, logo $K = (0:f(1))$, por (i) definimos $\phi(1) = m$. Para $n > 1$ definiremos por indução,

$$\phi(n) = \sum_{p=1}^{n-1} \psi(p,1) + nm.$$

Para $n = 2$, temos $f:A^2 \rightarrow A$. Sejam e_1 e e_2 geradores de A^2 e $I_i = f(e_i)A$, $i=1,2$. Logo, temos as seqüências exatas: $0 \rightarrow K_i \rightarrow A \rightarrow I_i \rightarrow 0$ onde $K_i = (0:f(e_i))$, $i=1,2$. Por (i), $K_1 \oplus K_2$ é gerado por $2m$ elementos. Pelo diagrama (1) temos

$I_1 \cap I_2 \cong K/h_1(K_1 \oplus K_2)$. Como I_1 e I_2 são principais, por (ii) $I_1 \cap I_2$ pode ser gerado por $\psi(1,1)$ elementos. Daí, K pode ser gerado por $\psi(1,1) + 2m$ elementos (I.2.4).

Procedendo por indução sobre n , assumimos que $\phi(r)$ é definida como acima, para $2 < r < n$.

Sejam $f: A^n \rightarrow A$ e $e_i, i=1, \dots, n$ geradores de A^n .
 Seja $I_1 = \sum_{i=1}^{n-1} f(e_i)A$ e $I_2 = f(e_n)A$, logo temos as seqüências exatas
 $0 \rightarrow K_1 \rightarrow A^{n-1} \xrightarrow{f_1} I_1 \rightarrow 0$ onde $f_1(\sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} f(e_i) a_i, a_i \in A,$
 para todo i e $0 \rightarrow K_2 \rightarrow A \xrightarrow{f_2} I_2 \rightarrow 0$ onde $f_2(a) = f(e_n)a$ para todo
 $a \in A$. Por indução, K_1 é gerado por $\phi(n-1)$ elementos e por (i) K_2
 é gerado por m elementos, então $K_1 \oplus K_2$ é gerado por $\phi(n-1) + m$
 elementos. Por (ii) $I_1 \cap I_2$ é gerado por $\psi(n-1,1)$ elementos e
 novamente por $I_1 \cap I_2 \cong K/h_1(K_1 \oplus K_2)$, K é gerado por $\phi(n-1) + m +$
 $\psi(n-1,1) = \phi(n)$ elementos e $\phi(n) = \sum_{p=1}^{n-2} \psi(p,1) + (n-1)m + m +$
 $\psi(n-1,1) = \sum_{p=1}^{n-1} \psi(p,1) + nm.$

Corolário III.1.3: Todo anel de valorização é uniformemente coerente.

Demonstração: Se I_1 e I_2 são ideais f.g. de A , A anel de valorização, então $I_1 \cap I_2$ é principal (I.7.3). Como A é domínio, $(0:a) = 0$ para todo $a \in A$. Pelo teorema anterior, A é uniformemente coerente.

Lema III.1.4: Seja $A = D[[x]]$, D anel principal ou de valorização. Seja I um ideal de A (I f.g. se D é de valorização), tal que se $ax \in I$ temos $a \in I$ para todo $a \in A$. Então I é principal.

Demonstração: Seja $a(x) \in I$, $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$. Seja $I(0) = \{a(0) : a(x) \in I\}$ ideal de D . Então $I(0) = \langle d(0) \rangle$ com $d \in I$, $d = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots$, $d_0 = d(0)$ (pois D é principal ou $I(0)$ é f.g. e portanto principal quando D é de valorização).

$$a(0) = a_0 \in \langle d(0) \rangle, a(0) = a'_0 d_0, a'_0 \in \Lambda.$$

$$a(x) - a'_0 d = x((a_1 - a'_0 d_1) + (a_2 - a'_0 d_2)x + \dots) \in I, \text{ logo,}$$

$$b_1 = a_1 - a'_0 d_1 + (a_2 - a'_0 d_2)x + \dots \in I, a_1 - a'_0 d_1 = a'_1 d_0, a'_1 \in \Lambda.$$

$$\text{Então } a_1 = a'_0 d_1 + a'_1 d_0.$$

$$b_1 - a'_1 d_0 = x((a_2 - a'_0 d_2 - a'_1 d_1) + \dots) \in I.$$

$$b_2 = a_2 - a'_0 d_2 - a'_1 d_1 + (a_3 - a'_0 d_3 - a'_1 d_2)x + \dots \in I.$$

$$a_2 - a'_0 d_2 - a'_1 d_1 = a'_2 d_0, a'_2 \in \Lambda. \text{ Então } a_2 = a'_2 d_0 + a'_1 d_1 + a'_0 d_2.$$

$$\text{Então } a(x) = (a'_0 + a'_1 x + a'_2 x^2 + \dots) d. \text{ Logo, } I \text{ é gerado por } d.$$

Uma generalização do lema (III.1.4) é:

Teorema III.1.5: Seja D um anel principal ou de valorização, e seja $A = D[[x]]$ o anel das séries formais sobre D , na indeterminada x . Seja K um submódulo f.g. de um A -módulo livre L , tal que para todo $t \in L$, a relação $xt \in K$ implique $t \in K$. Então K é um A -módulo livre.

Demonstração: Seja G um sistema de geradores de K , $E = \{e_i\} (i \in I)$ base canônica de L . A cada $t = \sum a_i e_i$ de L ($a_i \in A$), associamos $t(0) = \sum a_i(0) e_i$. Quando t descreve K , $t(0)$ descreve um submódulo $K(0) = \{t(0) : t \in K\}$ do D -módulo livre de base $E(0)$, $L(0) = \{t(0) : t \in L\}$. No caso onde D é principal, $K(0)$ é livre (I.3.7). No caso onde D é de valorização, podemos tomar G finito e $G(0)$ gerando $K(0)$ que é f.g.. Como $K(0)$ é torção livre, então é livre

(I.7.2). Assim, em ambos os casos, $K(0)$ é D-livre. Seja $\{k_j(0)\}$ uma base para $K(0)$ ($k_j \in K$, $j \in J$, J finito). Queremos mostrar que K é gerado por $\{k_j\}_{j \in J}$.

Seja $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \in A = D[[x]]$.

Notamos $a^i(x) = a_i + a_{i+1}x + a_{i+2}x^2 + \dots$ para $i=0,1,2,\dots$ e $a^0(x) = a(x)$. Logo, $a(x) = a(0) + a^1(0)x + a^2(0)x^2 + \dots$

Se $k \in K \subseteq L$ então $k = \sum_{j \in J} a_j(x)e_j = \sum_{j \in J} \{a_j(0) + x(a_j^1(x))\}e_j = \sum_{j \in J} a_j(0)e_j + x(\sum_{j \in J} a_j^1(x)e_j) = k(0) + x(\sum_{j \in J} a_j^1(x)e_j)$.

Como $k(0) \in K(0) = \langle k_j(0) \rangle_{j \in J}$ então $k(0) = \sum_{j \in J} c_j k_j(0) =$

$\sum_{j \in J} c_j k_j - x \sum_{j \in J} c_j k_j^1$ onde $c_j \in D$ e $k_j^1 = \sum_{i \in I} k_{ij}^1(x)e_i$ se

$k_j = \sum_{i \in I} k_{ij}(x)e_i$. Daí $k = \sum_{j \in J} c_j k_j + xk'$ onde $k' = \sum_{j \in J} a_j^1(x)e_j -$

$\sum_{j \in J} c_j k_j^1$. Claramente $xk' \in K$ então $k' \in k$. Repetindo este processo,

teremos $k \in \langle k_j \rangle_{j \in J}$.

Teorema III.1.6: Seja D um anel principal ou de valorização. Seja $A = D[[x]]$ o anel das séries formais sobre D em uma indeterminada. Então, todo A -módulo projetivo é livre.

Demonstração: Seja P um A -módulo projetivo f.g.. Temos que

$L = P \oplus Q$ onde L é um A -módulo livre (I.3.4-(6)). Então se $t \in L$,

$t = t_1 + t_2$ onde $t_1 \in P$ e $t_2 \in Q$. Se $xt \in P$, então $xt_1 + xt_2 =$

$xt \in P$ e $xt_2 \in P \cap Q = \{0\}$. $t_2 \in L$ então $t_2 = \sum_{i=1}^n a_i(x)e_i$ onde

$a_i(x) \in A$ e $e_1, \dots, e_n$ formam a base de L . Então,

$0 = xt_2 = \sum_{i=1}^n xa_i(x)e_i$, portanto, $xa_i(x) = 0$ para todo i e então

$a_i(x) = 0$ para todo i , logo $t_2 = 0$, ou seja, $t = t_1 \in P$. Temos então que P é livre, pelo teorema anterior.

Observação: Este resultado se aproxima ao seguinte resultado devido a Seshadri [SC] que é um caso especial da conjectura de Serre (todo A -módulo projetivo f.g. é livre se $A = K[x_1, \dots, x_n]$ onde K é um corpo).

Teorema III.1.7: Seja $A = D[x]$ o anel dos polinômios em uma indeterminada sobre um anel principal. Então, todo A -módulo projetivo é livre. ([LT]).

Teorema III.1.8: Seja A um anel de dimensão global menor ou igual a 2 e tal que todo A -módulo projetivo é livre. Então A é coerente, e mesmo, uniformemente coerente.

Demonstração: Seja F um A -módulo livre gerado por n elementos e f um homomorfismo de F em A . Temos então a sequência exata:

(*) $0 \rightarrow \ker f \rightarrow F \rightarrow f(F) \rightarrow 0$. Se $f(F) = A$ então temos

$0 \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow 0$ exata. Então, pelo lema de Schanuel (I.5.4)

$F \cong A \oplus \ker f$ e $\ker f$ é gerado por $n-1$ elementos. Se $f(F) \neq A$ $f(F)$ é

um ideal próprio de A e $\text{hd}(f(F)) < \text{gldim}(A) = 2$ (I.5.6) então,

$\text{hd}(f(F)) \leq 1$. Se $\text{hd}(f(F)) = 1$, então $\ker f$ é projetivo (I.5.5). Se

$\text{hd}(f(F)) = 0$, (*) é split, daí, $\ker f$ é projetivo (I.3.4), por

hipótese é livre. Como $\ker f$ está contido em um módulo livre

gerado por n elementos, então por (I.7.4) $\ker f$ pode ser gerado no

máximo por n elementos (e $\phi(n) = n$).

Teorema III.1.9: Seja A o anel dos polinômios ou das séries formais em uma indeterminada x sobre um anel principal D . Então A é uniformemente coerente.

Demonstração: Se $A = D[x]$, $\text{gldim} A \leq 2$ (I.5.3) e por (III.1.8) e (III.1.7) A é uniformemente coerente. Se $A = D[[x]]$, seja F um A -módulo livre gerado por n elementos e seja f um homomorfismo de F em A . Seja $K = \ker f$ e $xt \in K$ onde $t \in F$. Então, temos $xf(t) = f(xt) = 0$. Como $xf(t) \in D[[x]]$, temos $f(t) = 0$ e $t \in K$. Por (III.1.5), K é um A -módulo livre e por (I.7.5), K é gerado por $n-1$ elementos. Tomamos então $\phi(n) = n-1$.

Corolário III.1.10: O anel $K[x,y]$ ou o anel $K[[x,y]]$ onde K é um corpo é uniformemente coerente.

Demonstração: Sendo K um corpo, temos que $K[x]$ e $K[[x]]$ são anéis principais (IH). Como $K[x,y] = K[x][y]$ e $K[[x,y]] = K[[x]][[y]]$ temos, pelo teorema anterior, o resultado.

Proposição III.1.11: Seja A um anel uniformemente coerente. Então $A^{\mathbb{N}}$, o produto direto enumerável de cópias de A , é uniformemente coerente.

Demonstração: Seja L um $A^{\mathbb{N}}$ -módulo livre f.g., isto é, $L \cong (A^{\mathbb{N}})^n$ e um homomorfismo $f: L \rightarrow A^{\mathbb{N}}$. Devemos mostrar que $K = \ker f$ pode ser gerado por $\phi(n)$ elementos. Como A é uniformemente coerente, temos a sequência exata $0 \rightarrow \ker f \rightarrow A^{\mathbb{N}} \rightarrow A$ onde $\ker f$ é gerado por $\phi(n)$ elementos. Por (I.2.6) e (I.2.9) temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & (\ker f)^N & \rightarrow & (A^n)^N & \rightarrow & A^N \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & (A^N)^n & \rightarrow & A^N \end{array}$$

Logo, $K \cong (\ker f)^N$ e K pode ser gerado por $\phi(n)$ elementos (I.2.11).

Teorema III.1.12: O anel A é uniformemente coerente se, e somente se, o anel A^N , produto direto enumerável de cópias de A , é coerente.

Demonstração: Se A é uniformemente coerente, então por (III.1.11) A^N é uniformemente coerente, portanto coerente.

Por outro lado, seja A^N coerente. Então, por (II.1.11) A é coerente. Suponhamos que A não seja uniformemente coerente. Então, para algum A -módulo livre A^n , não podemos encontrar $r \in \mathbb{N}$ tal que para todo homomorfismo $f: A^n \rightarrow A$, $\ker f$ possa ser gerado por r elementos. Então podemos encontrar $\{f_i\}_{i \geq 1}$ família de homomorfismos $f_i: A^n \rightarrow A$ tal que $\ker f_i$ é gerado por r_i elementos (pois A é coerente) tal que $r_i < r_{i+1}$ para todo $i \geq 1$. Seja $F: (A^n)^N \rightarrow A^N$, $F(\{x_i\}) = \{f_i(x_i)\}$, $\{x_i\} \in \ker F$ se, e somente se, $\{f_i(x_i)\} = 0$ se, e somente se, $f_i(x_i) = 0$ para todo $i \geq 1$ se, e somente se, $x_i \in \ker f_i$ para todo $i \geq 1$. Logo, $\ker f_i = \ker F$ que é f.g., digamos, por r elementos pois A^N é coerente e $(A^n)^N \cong (A^N)^n$ (I.2.9). Pelo corolário I.2.10 $\ker f_i$ pode ser gerado por r elementos para todo $i \geq 1$. Logo, a sequência $(r_i)_{i \geq 1}$ é estacionária. Contradição. Logo, A é uniformemente coerente.

Num domínio Bezout A , temos que todo ideal f.g. é principal. Mudando a condição domínio para $(0:a)$ principal para todo $a \in A$, temos ainda o resultado:

Lema III.1.13: Seja A anel tal que todo ideal f.g. é principal e para todo a em A , $(0:a)$ é principal. Então A é uniformemente coerente.

Demonstração: Seja $f: A^n \rightarrow A$ homomorfismo de A -módulos. Como $f(A^n)$ é um ideal f.g. de A , então $f(A^n) = aA$ é principal, onde $a \in A$.

Seja $K = \ker f$. Então temos as seqüências exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & A^n & \rightarrow & aA \rightarrow 0 \\ & & & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & (0:a) & \rightarrow & A & \rightarrow & aA \rightarrow 0 \end{array}$$

Pelo lema de Schanuel (I.5.4) $A \oplus K \cong A^n \oplus (0:a)$. Como $(0:a)$ é principal, temos que K é gerado por n elementos. Então defino $\phi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposição III.1.14: Se A é anel plano, então A e $A[x]$ são uniformemente coerentes.

Demonstração: A é uniformemente coerente por (II.3.2), (II.3.8) e (III.1.13). Para $A[x]$, observamos na demonstração do teorema II.3.15 que podemos definir $\phi(n) = n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

§.2. ALGUNS EXEMPLOS

Veremos um exemplo onde R é uniformemente coerente, mas $R[x]$ não é coerente, e um exemplo onde R e $R[x]$ são uniformemente coerentes, mas $R[[x]]$ não é coerente.

Lema III.2.1: $(Q[[t]])^N \cong Q^N[[t]]$, onde Q é um anel.

Demonstração: Basta tomar $f: (Q[[t]])^N \rightarrow Q^N[[t]]$ onde

$$f(\{f_i(t)\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \{a_{in}\} t^n \text{ onde } f_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{in} t^n.$$

Lema III.2.2: Seja K anel sem elementos nilpotentes. Então $K[[x]]$ não tem elementos nilpotentes.

Demonstração: Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in K[[x]]$ e seja $k = \{\min n: a_n \neq 0\}$.

Então $f(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n$. Se $(f(x))^r = 0$ para algum $r > 0$, então

$$0 = (f(x))^r = a_n^r x^{nr} + (\text{termos de maior grau}), \text{ ou seja, } a_n^r = 0,$$

o que é uma contradição.

Observação: Procedendo por indução, temos o mesmo resultado para $K[[x_1, \dots, x_n]]$.

Lema III.2.3: Seja $R = \prod_{w \in \mathbb{N}} S_w$ o anel produto direto de uma família onumerável de cópias do anel $S_w = Q[[t, u]]$ das séries formais em duas indeterminadas com coeficientes racionais. Então:

a) R não tem elementos nilpotentes.

b) R é isomorfo ao anel $P[[t,u]]$ das séries formais em duas indeterminadas sobre o anel plano $P = Q^N$

Demonstração:

a) Se $r \in R$ tal que $r^t = 0$ para algum inteiro positivo t ,

$r = (r_1, r_2, \dots)$ com $r_i \in S = Q[[t,u]]$ $i=1,2,\dots$

Então $0 = r^t = (r_1^t, r_2^t, \dots)$ e $r_1^t = r_2^t = \dots = 0$. Por (III.2.2), temos que $r_1 = r_2 = \dots = 0$ e portanto, $r = 0$.

Logo, R não tem elementos nilpotentes.

b) $R = (Q[[t,u]])^N \cong (Q[[t]][[u]])^N \cong (Q[[t]])^N[[u]] \cong Q^N[[t]][[u]] \cong Q^N[[t,u]] = P[[t,u]]$.

Proposição III.2.4: Seja $R = \prod_{w \in \mathbb{N}} S_w$ o anel produto direto de uma família enumerável de cópias de $S_w = Q[[t,u]]$ das séries formais em duas indeterminadas com coeficientes racionais. Então R é uniformemente coerente mas $R[x]$ não é coerente.

Demonstração: Como Q é corpo, por (III.1.10), $Q[[t,u]]$ é uniformemente coerente e por (III.1.11), $R = (Q[[t,u]])^N$ é uniformemente coerente.

Vamos mostrar agora que $R[x]$ não é coerente:

Sejam a, b, c e d os elementos de R cujas w -ésimas coordenadas são, respectivamente $t, -u, tu^w, t^w - 2u^w$; e seja I a interseção dos seguintes ideais: $(a+bx)R[x]$ e $cR[x] + dR[x]$.

Se $R[x]$ for coerente, I será f.g. (II.1.7). O ideal I_∞ de R, dos termos constantes dos polinômios de I será então f.g.. Mas

$I_\infty = \bigcup_{n \geq 0} I_n$ onde I_n é o ideal de R dos termos constantes dos

polinômios de I de grau menor ou igual a n . A sequência crescente de ideais de R , $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_n \dots$ será estacionária. Mas isto é impossível, pois o lema III.2.5, a seguir, mostra que para todo $w \geq 3$, o elemento de R cuja w -ésima coordenada é tu^w , com as outras coordenadas nulas, está em I_w mas não em I_{w-1} .

Lema III.2.5: Seja $S = Q[[t,u]]$ ou $Q[t,u]$, e sejam $I_1 = (t-ux)S[x]$, $I_2 = tu^wS[x] + (t^w-2u^w)S[x]$ ideais de $S[x]$. Então:

a) Existe $f(x) \in I_1 \cap I_2$ tal que $f(0) = tu^w$ com $w \geq 3$ e grau de $f(x)$ igual a w .

b) Para todo $f(x) \in I_1 \cap I_2$ tal que $f(0) = tu^w$ com $w \geq 3$ então grau de $f(x)$ é maior ou igual a w .

Demonstração: a) Existência: Partindo da identidade:

$$(t-ux)(t^{w-1} + t^{w-2}ux + t^{w-3}u^2x^2 + \dots + u^{w-1}x^{w-1}) = t^w - u^wx^w,$$

multiplicando cada membro por t e substituindo t^w por

$$(t^w - 2u^w) + 2u^w, \text{ temos: } (t - ux)(2u^w + t^{w-1}ux + \dots + tu^{w-1}x^{w-1}) +$$

$$(t - ux)(t^w - 2u) = t(t^w - 2u) + 2tu^w - tu^wx^w, \text{ e obtemos:}$$

$$(t-ux)(u^w + \frac{t^{w-1}u}{2}x + \dots + \frac{tu^{w-1}}{2}x^{w-1}) =$$

$$(t^w - 2u^w)\frac{ux}{2} + tu^w(1 - \frac{x^w}{2}) = f(x) \in I_1 \cap I_2 \text{ e } f(0) = tu^w \text{ e grau de } f(x) \text{ é igual a } w.$$

b) Sejam $P_i = P_i(t,u,x) \in S[x]$ para $i=0,1,2,3$ tal que $P_0 = (t - ux)P_1 = tu^wP_2 + (t^w - 2u^w)P_3 \in I_1 \cap I_2$ com $P_0(t,u,0) = tu^w$ e grau $P_0 \leq w-1$.

Como $P_0(t,u,0) = tu^w = tP_1(t,u,0)$, logo, $P_1(t,u,0) = u^w$ e grau $P_0 =$ grau $(t - ux)P_1 = 1 +$ grau P_1 , daí grau $P_1 \leq w - 2$.

Escrevemos $P_1(t,u,x) = u^w + s_1(t,u)x + \dots + s_{w-2}(t,u)x^{w-2}$ onde $s_i(t,u) \in S$ para todo $i=1, \dots, w-2$.

Façamos $t = \sqrt[w]{2}u$, temos:

$$P_0(\sqrt[w]{2}u, u, x) = (t - ux)P_1(t, u, x) =$$

$$(\sqrt[w]{2}u - ux)(u^w + s_1(\sqrt[w]{2}u, u)x + \dots + s_{w-2}(\sqrt[w]{2}u, u)x^{w-2}) =$$

$$tu^w P_2(t, u, x) + (t^w - 2u^w)P_3(t, u, x) = \sqrt[w]{2}u^{w+1} P_2(\sqrt[w]{2}u, u, x).$$

Logo, u^w divide $s_i(\sqrt[w]{2}u, u)$ para $i=1, \dots, w-2$.

Sejam $u^w s'_i(u) = s_i(\sqrt[w]{2}u, u)$ para $i=1, \dots, w-2$, onde $s'_i(u) \in R[[u]]$, $R =$ reais. Obtemos então:

$$(\sqrt[w]{2} - x)(1 + s'_1(u)x + \dots + s'_{w-2}(u)x^{w-2}) = \sqrt[w]{2} P_2(\sqrt[w]{2}u, u, x),$$

daí

$$P_2(\sqrt[w]{2}u, u, x) = 1 + (s'_1(u) - \frac{1}{\sqrt[w]{2}})x + (s'_2(u) - \frac{1}{\sqrt[w]{2}}s'_1(u))x^2 + \dots +$$

$$(s'_{w-2}(u) - \frac{1}{\sqrt[w]{2}}s'_{w-3}(u))x^{w-2} - \frac{1}{\sqrt[w]{2}}s'_{w-2}(u)x^{w-1}.$$

Como $P_2(0,0,x) \in Q[x]$,

donde $s'_{w-2}(0) = \sqrt[w]{2}q_{w-2}$ para algum $q_{w-2} \in Q$.

$$s'_{w-3}(0) = q_{w-2}\sqrt[w]{2^2} + q_{w-3}\sqrt[w]{2}$$
 para algum $q_{w-3} \in Q$.

.....

$$s'_1(0) = q_{w-2}\sqrt[w]{2^{w-2}} + q_{w-3}\sqrt[w]{2^{w-3}} + \dots + q_1\sqrt[w]{2}$$

onde $q_i \in Q$ e

$$s'_1(0) - \frac{1}{\sqrt[w]{2}} = -q_0 \in Q.$$
 Daí

$$1 = q_{w-2}\sqrt[w]{2^{w-1}} + q_{w-3}\sqrt[w]{2^{w-2}} + \dots + q_0\sqrt[w]{2}$$
 que é falso.

(notamos que o falso só é possível quando $w \geq 3$)

Definição: Seja N o conjunto dos números naturais, A um anel e A^N o anel produto direto de N cópias de A . Dizemos que R é o anel das seqüências estacionárias de A , se R é um subanel de A^N tal que para cada $x \in R$, $x = (x_1, x_2, \dots)$ onde $x_i \in A$ e existe um inteiro n , que depende de x , tal que $x_n = x_{n+i}$ para todo $i=1,2,\dots$.

Lema III.2.6: Seja A anel plano (regular) e R o anel das seqüências estacionárias de A . Então R é regular.

Demonstração: Seja $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_n) \in R$. Como cada $x_i \in A$, então existe $a_i \in A$ tal que $x_i a_i x_i = x_i$ para cada i . Logo,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_n) (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_n) (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_n) = (x_1 a_1 x_1, x_2 a_2 x_2, \dots, x_n a_n x_n, \dots, x_n a_n x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_n).$$

Lema III.2.7: Seja A anel plano e R o anel das seqüências estacionárias de A . Sejam $e_n = (e_{n1}, e_{n2}, \dots)$, $t_n = (t_{n1}, t_{n2}, \dots)$, $n \geq 1$, em R com $e_{ni} = 1$ para $i=1,3,5,2n-1$ e $e_{ni} = 0$ caso contrário; $t_{ni} = 1$ se $i=2,4,6,\dots,2n$ e $t_{ni} = 0$ caso contrário. Então:

1) Par $n \geq m$ $e_n e_m = e_m$, $t_m t_n = t_m$.

2) $t_i t_j = 0$ para todo i e para todo j .

3) Seja $y = \sum_{n \geq 1} e_n x^n \in D = R[[x]]$. Se $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \in (0:y)_D$ então para cada k , existe n_k tal que $a_k = b_k t_{n_k}$ para algum $b_k \in R$.

Demonstração: 1) Claro.

2) Claro.

3) Por indução sobre k.

Se $k = 0$, como $fy = 0$ temos $a_0 e_1 = 0$. Seja $a_0 = (a_{01}, a_{02}, \dots)$, então $a_{01} = 0$. Temos também que $a_0 e_2 + a_1 e_1 = 0$ e então $a_0 e_2 e_1 + a_0 e_1 e_1 = 0$. Com isso, temos que $a_0 e_2 = 0$, ou seja, $a_0 = 0$. Por este processo, podemos mostrar que $a_0 e_i = 0$ para todo i , isto é, $a_{0(2i-1)} = 0$ para todo $i=1,2,\dots$. Como $a_0 \in R$, existe um inteiro N tal que $a_{0n} = 0$ para todo $n \geq N$. Logo, existe t_{n_0} tal que $t_{n_0} a'_0 = a_0$ para algum $a'_0 \in R$.

Sejam $t_{n_i} a'_i = a_i$ para todo $i=0,1,2,\dots,k-1$. Como $0 = a_k e_0 + a_{k-1} e_1 + \dots + a_0 e_k = a_k e_0 + a'_{k-1} t_{n_{k-1}} e_1 + \dots + a'_0 t_{n_0} e_k = a_k e_0$. $0 = a_{k+1} e_0 + a_k e_1 + \dots + a_0 e_{k+1} = a_{k+1} e_0 + a_k e_1$. Então $0 = a_{k+1} e_0 e_0 + a_k e_1 e_0 = a_{k+1} e_0 + a_k e_0 = a_{k+1} e_0$. Então $a_k e_1 = 0$. Repetindo este processo, temos $a_k e_n = 0$ para todo n , ou seja, se $a_k = (a_{k0}, a_{k1}, \dots)$ temos que $a_{k(2n-1)} = 0$ para todo $n=1,2,\dots$ e como $a_k \in R$ existe M natural tal que $a_{kn} = 0$ para todo $n \geq M$. Logo, existe t_{n_k} tal que $t_{n_k} a'_k = a_k$ para algum $a'_k \in R$.

Observação: $g = t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + \dots \in (0:y)$ mas $g \notin \bigcup_{i \geq 1} t_i D$, pois se $g \in \bigcup_{i \geq 1} t_i D$, $g \in t_i D$ para algum i , isto é, para todo n , $t_n = b_n t_i$ para algum $b_n \in R$. Se $n > i$, $t_i = t_n t_i = b_n t_i t_i = t_n$. Contradição. Logo, $\bigcup_{i \geq 1} t_i D \not\subset (0:y)$.

Proposição III.2.8: Seja A anel plano e R o anel das seqüências estacionárias em A . Então R e $R[x]$ são uniformemente coerentes, mas $R[[x]]$ não é coerente.

Demonstração: Por (III.2.6) e (III.1.4) R é plano e temos então que R e $R[x]$ são uniformemente coerentes.

Seja $y \in R[[x]] = D$, como no lema anterior. Se

$(0:y) = \langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ onde $f_i = a_i + \dots \in D$ e pelo lema anterior

$a_i = (0, a_{i2}, 0, a_{i4}, 0, \dots, 0, a_{in_i}, 0, \dots, 0)$. Seja $N = \max\{n_i : 1 \leq i \leq k\}$.

Logo, $a_{iN+1} = 0$ para todo i . Como $t_{N+1} \in (0:y)$, $t_{N+1} = \sum_{i=1}^k g_i f_i$

onde $g_i = b_i + \dots \in D$. Então $t_{N+1} = \sum_{i=1}^k b_i a_i$ e como a coordenada

$2(N+1)$ de t_{N+1} é 1 e a coordenada $2(N+1)$ de $\sum_{i=1}^k a_i b_i$ é 0, temos

1=0, o que é uma contradição. Logo, $(0:y)$ não é f.g. e $R[x]$ não é coerente (II.1.7).

BIBLIOGRAFIA

- [A-M] ATIYAH - MACDONALD : Introduction to Comutative Algebra, London, Addison Wesley (1969).
- [B] BOURBAKI, N. - Elements of Mathematics, Comutative Algebra, Herman, Paris (1972).
- [C] CHASE, S. U. - Trans. Amer. Math. Soc., 97 (1960),457-473.
- [CE] CARTAN, H. - EILEMBÉRG, S. - Homological Algebra, Priceton university Press (1956).
- [H] HERSTEIN; I. N. - Topics in Algebra, Blaisdell, N.Y. (1964):
- [K₁] KAPLANSKY, I. - Infinite abelians Groups, Am Arbor, Mich. University of Michigan Press (1954).
- [K₂] KAPLANSKY, I: - Fields and Rings, Chicago, University of Chicago Press (1969).
- {KN} KAKUTA, N. K. - Módulos Planos - Tese de Mestrado da Unicamp (1978).
- [L] LAFON, J. P. - Algèbre Homologique, Curitiba, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Paraná (1967).
- [LJ] LAMBEK, J. - Lectures on Ring and Modules, Toronto, Blaisdell (1966).
- [LT] LAM, T.Y. - Serre's Conjecture, Lectures Notes in Math., A. Dold and B. Eckmann N.Y. (1978).
- [R] ROTMAN, J. J. -Notes on Homological Algebra, N.Y., Van Nos-trand Teinhöld Co. (1968).

[S₁] SOUBLIN, J. P. - Anneux Cohérents, Comptes Rendus, (267-A)
183 - 186 (1968).

[S₂] SOUBLIN, J. P. - Anneux Uniformément Cohérents, Comptes
Rendus (267-A) 205 - 208 (1968).

[S₃] SOUBLIN, J. P. - Un Anneau Cohérent dont l'anneau des
polynômes n'est pas Cohérent, Comptes Rendus (267-A) 241 - 243
(1968).

[SC] SESHADRI, C. S. - Triviality of Vector Over the Affini Space
 K^2 , Proc. Nat'l Acad. Sci. U.S.A. 44, 456 - 458 (1958).

Outada	73C
Proc	
Ex	
Nome	deca
Data	26/11/80