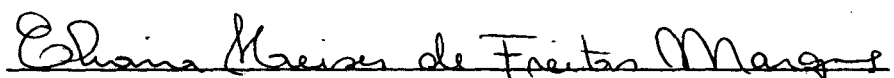


INTERVALOS DE CONFIANÇA ASSINTÓTICOS PARA RAZÃO DE
PROPORÇÕES BINOMIAIS NA PRESENÇA DE ESTRATIFICAÇÃO

Este exemplar corresponde à redação final da
dissertação de Mestrado devidamente corrigida e
defendida pelo Sr. Aloísio Joaquim Freitas
Ribeiro, e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 13 de Julho de 1992



Profa. Dra. Eliana Heiser de Freitas Marques
Orientadora

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência
da Computação, UNICAMP, para obtenção do grau
de Mestre em Estatística.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação - IMECC

**INTERVALOS DE CONFIANÇA ASSINTÓTICOS PARA A RAZÃO DE
PROPORÇÕES BINOMIAIS NA PRESENÇA DE ESTRATIFICAÇÃO**

Aloísio Joaquim Freitas Ribeiro

Profa. Dra. Eliana Heiser de Freitas Marques
Orientadora

Campinas - SP

1992

**Aos meus pais
Zeni e José**

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Eliana Heiser de Freitas Marques, pela orientação e amizade.

Ao Prof. Dr. Dalton Francisco Andrade , à Profa. Dra. Eugênia Charnett, e ao Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta pelas sugestões.

Ao Prof. Dr. Oscar Bustos, pelas sugestões sobre os estudos de simulação.

Ao Prof. Dr. José Francisco Soares e aos demais amigos da UFMG, pelo incentivo.

Ao CNPQ e à FAEP, cujo apoio financeiro possibilitou a realização deste trabalho.

À minha família e aos amigos, pelo carinho e incentivo.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: Introdução	1	
CAPÍTULO 2: O Risco Relativo	5	
2.1	Introdução	5
2.2	O caso de um estrato	5
2.2.1	Intervalos de Confiança	7
2.2.1.1	Métodos que usam variâncias estimadas por expansão em séries de Taylor	7
2.2.1.2	Intervalos baseados no Teorema Fieller	9
2.2.1.3	Intervalos baseados na verossimilhança	10
2.2.1.4	Propriedades dos Métodos	13
2.3	O caso estratificado	14
2.3.1	O estimador de máxima verossimilhança	16
2.3.2	O estimador de mínimos quadrados ponderados	18
2.3.4	O estimador de Mantel Haenzel	20
CAPÍTULO 3: Um pouco de Teoria Assintótica	23	
3.1	Intervalos de confiança assintóticos	23
3.2	Alguns resultados sobre expansões assintóticas para somas de variáveis aleatórias independentes	30
3.2.1	Momentos e cumulantes de uma soma de variáveis aleatórias	30
3.2.2	A Expansão de Edgeworth	33
3.2.3	A Expansão de Cornish-Fisher	36
3.3	Resultados de Bartlett	38
3.3.1	O Caso de um único parâmetro desconhecido	38
3.3.1.1	Os momentos de $U(\theta)$	38

3.3.1.2	Obtendo uma correção aproximada para assimetria de $U(\theta)$	41
3.3.2	O caso de mais de um parâmetro desconhecido	44
3.3.2.1	Momentos Simultâneos	45
3.3.2.2	Derivando a Correção para assimetria	46
3.3.3	O caso do parâmetro de perturbação	50
 CAPÍTULO 4: Resultados de Gart		57
4.1	Introdução	57
4.2	Testes de Hipóteses	57
4.3	Intervalos de Confiança	60
4.4	Correção para Assimetria	63
4.4.1	O caso de um estrato	63
4.4.2	O caso estratificado	65
 CAPÍTULO 5: Avaliações numéricas dos intervalos de confiança para o caso estratificado		67
5.1	Introdução	67
5.2	Metodologia	69
5.2.1	Delineamento dos experimentos de Montecarlo	71
5.3	Resultados	73
5.3.1	Comparação das estimativas dos coeficientes de confiança e das probabilidades das caudas	74
5.3.2	Comparação dos comprimentos médios dos intervalos ...	80
5.3.3	Consistência do estimador de máxima verossimilhança de ϕ nos casos estudados	85
5.4	Conclusões	88
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		91

APÊNDICES

Apêndice 1:	95
1) O Teorema de Fieller	95
2) O Teorema de Geary	96
 Apêndice 2:	
Alguns resultados de Teoria Assintótica	97
 Apêndice 3:	
Tabelas de Resultados	99
 Apêndice 4:	
Programas	110

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Um dos problemas que surge com grande frequência em Estatística é aquele de comparar duas populações binomiais com probabilidades de sucesso desconhecidas $0 \leq p_1 \leq 1$ e $0 \leq p_2 \leq 1$. Uma das medidas utilizadas para realizar tais comparações é o risco relativo, definido por

$$\phi = \frac{p_2}{p_1}.$$

O risco relativo é uma medida de interesse em vários estudos, especialmente em Biometria. Por exemplo:

- em ensaios clínicos, na comparação de dois tratamentos aplicados a dois grupos de pacientes;
- em estudos de coorte, na comparação de incidências cumulativas de determinada doença em dois subcoortes diferenciados por níveis de exposição a determinado fator de risco.

Outra medida muito utilizada na comparação de populações binomiais é a "odds ratio" $\psi = \frac{p_2(1-p_1)}{(1-p_2)p_1}$.

Embora testes de hipóteses sobre estas medidas possam ser apropriados, muitas vezes, o objetivo é fornecer uma estimativa, ou seja, construir um intervalo de confiança para o parâmetro de interesse. A construção de intervalos de confiança para as medidas acima torna-se difícil pela presença do parâmetro de perturbação, p_1 , e pelo fato da distribuição de probabilidades ser discreta. Para a "odds ratio", existe uma estatística ancilar natural e um intervalo de confiança "exato" pode ser construído usando a distribuição condicional. Para o risco relativo, intervalos de confiança "exatos"

não são disponíveis. No entanto, muitos intervalos aproximados, fundamentados em Teoria Assintótica, são propostos na literatura. Gart e Nam(1988) apresentam uma revisão destes métodos e comparam-nos quanto aos coeficientes de confiança e probabilidades nas caudas pelo cálculo das probabilidades de todos os possíveis resultados para vários valores de ϕ e p_1 , o parâmetro de perturbação. Dos métodos comparados por Gart e Nam, os que apresentaram melhores resultados foram aqueles baseados diretamente na razão de verossimilhanças, particularmente o método baseado na estatística de divergência e potência de Cressie e Read(1984) para $\lambda=1/3$, e o método do escore, baseado no teste de Rao. O primeiro apresenta-se superior ao segundo quanto à distribuição das probabilidades nas caudas. O método do escore muitas vezes distribui as probabilidades nas caudas de forma assimétrica. Correção para assimetria pode ser derivada utilizando-se os resultados de Bartlett(1953a,1953b,1955). Tais correções foram derivadas por Gart e Nam(1988). O método corrigido para assimetria apresentou-se tão bom quanto aquele baseado na estatística de Cressie e Read, o que pode ser verificado nos resultados das comparações realizadas por Gart(1988). No entanto, o método que tem sido mais utilizado na construção de intervalos de confiança para a razão de proporções binomiais é o método do logaritmo, baseado no teste de Wald para

$$H_0:\ln(\phi) = \ln(\phi_0) \quad \text{x} \quad H_1:\ln(\phi) \neq \ln(\phi_0),$$

onde ϕ_0 é um valor conhecido. A sua maior utilização decorre da simplicidade de seus cálculos. Porém, resultados de Gart indicam que ele distribui as probabilidades nas caudas de forma totalmente assimétrica.

Muitas vezes, ao se comparar duas proporções binomiais faz-se necessário considerar outras variáveis que possam estar interferindo na relação, por exemplo de exposição ao fator de risco e

ocorrência de doença. O controle de tais variáveis pode ser efetuado na fase de planejamento do estudo, pelo emparelhamento; ou na fase de análise, pela estratificação.

Na análise de estudos onde a estratificação está presente, um dos objetivos é fornecer uma estimativa do risco relativo comum, o que geralmente é realizado sob a suposição de que o mesmo é constante em todos os estratos.

Na presença de estratificação, quando se trabalha com resultados assintóticos, dois casos devem ser considerados:

- 1) número de estratos fixo e tamanhos de amostras dentro dos estratos grandes;
- 2) número de estratos grande e tamanhos de amostras fixos.

Dos vários estimadores para o risco relativo comum, os mais usados são: o estimador de máxima verossimilhança, o estimador de mínimos quadrados ponderados e o estimador de "Mantel-Haenzel".

O estimador de máxima verossimilhança é consistente apenas no caso assintótico 1. Intervalos de confiança a ele associados podem ser construídos como extensão do caso de um único estrato. O método do score, assim como a correção para assimetria, foram generalizados por Gart(1985) e Gart e Nam(1988) para o caso estratificado. O método baseado na estatística de Gressie e Read ainda não foi generalizado. O método do logarítimo aparece com maior frequência em aplicações.

Os objetivos deste trabalho compreendem o estudo dos intervalos de confiança aproximados para a razão de proporções binomiais para o caso estratificado, consistindo de:

- revisão dos principais métodos de construção de intervalos de

confiança para a razão de proporções binomiais para o caso de um único estrato e discussão das vantagens e desvantagens dos estimadores do risco relativo comum citados acima em ambos os casos assintóticos;

- apresentar de forma clara os resultados de Bartlett para correção para assimetria, para os casos de um parâmetro desconhecido, mais de um parâmetro desconhecido e especialmente para o caso onde parâmetros de perturbação são presentes;
- apresentar os resultados de Gart para o risco relativo, consistindo de derivação do método do escore, correção para assimetria e generalização para o caso estratificado;
- avaliar numericamente, através de estudos de Montecarlo, o método do escore, sua correção para assimetria e o método do logarítimo para o caso estratificado.

CAPÍTULO 2

O RISCO RELATIVO

2.1 - Introdução

Neste capítulo é realizada uma revisão dos principais métodos de construção de intervalos de confiança para o risco relativo, para o caso de um único estrato, baseados no estimador de máxima verossimilhança. Para o caso estratificado, são considerados os estimadores de Mínimos Quadrados Ponderados, de Mantel Haenzel e de Máxima Verossimilhança, e alguns intervalos de confiança a eles associados.

2.2 - O Caso de um Estrato

Considere um par de observações binomiais independentes (X_1, X_2) com denominadores (n_1, n_2) e probabilidades de sucesso (p_1, p_2) . Estes dados podem ser arranjados em uma tabela 2x2 da seguinte forma:

		Sucesso		
		Sim	Não	Total
Grupos	1	x_1	$n_1 - x_1$	n_1
	2	x_2	$n_2 - x_2$	n_2
Total		m_1	m_2	n

A razão $\phi = p_2/p_1$ é chamada de risco relativo. Para fazer inferências sobre ϕ , o modelo probabilístico considerado é o produto de binomiais.

Por exemplo, em um estudo de coorte, nos grupos temos os expostos e não expostos e sucesso equivale à ocorrência de doença. Os

tamanhos de amostras, n_1 e n_2 , são determinados no planejamento do estudo, onde n_2 é o tamanho da amostra retirada do subcohort de expostos e n_1 do subcohort de não expostos. Assumindo que os cohortes são independentes e que as amostras foram retiradas de forma aleatória, sejam os eventos:

$X_2 = \{ x_2 \text{ expostos ficaram doentes} \}$

$X_1 = \{ x_1 \text{ não expostos ficaram doentes} \}$.

Assumindo que cada indivíduo exposto possui probabilidade p_2 e cada indivíduo não exposto probabilidade p_1 de se tornar um caso, a probabilidade de que x_2 expostos e x_1 não expostos fiquem doentes é por independência:

$$P(X_1=x_1, X_2=x_2) = \binom{n_1}{x_1} \binom{n_2}{x_2} p_2^{x_2} (1-p_2)^{n_2-x_2} p_1^{x_1} (1-p_1)^{n_1-x_1} \quad (2.1),$$

a verossimilhança para um único estrato. Fazendo $p_2 = (\phi \times p_1)$, pode-se escrever (2.1) como

$$\mathcal{L}(\phi, p_1) = \binom{n_1}{x_1} \binom{n_2}{x_2} \phi^{x_2} p_1^{x_1+x_2} (1-\phi p_1)^{n_2-x_2} (1-p_1)^{n_1-x_1},$$

que depende dos parâmetros ϕ e p_1 , onde p_1 é chamado parâmetro de perturbação.

Os estimadores de máxima verossimilhança de p_1 e p_2 são respectivamente $\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$ e $\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$, e o estimador de máxima verossimilhança de ϕ é

$$\hat{\phi} = \frac{x_2/n_2}{x_1/n_1}.$$

2.2.1 - Intervalos de Confiança

A construção de intervalos de confiança para o risco relativo é dificultada pela presença de parâmetros de perturbação e também pelo fato da distribuição de probabilidades ser discreta. Métodos para construir intervalos exatos não são disponíveis, mas muitos métodos aproximados são propostos na literatura. Thomas e Gart(1977) e Santner e Snell(1980) propuseram métodos baseados nos intervalos condicionais "exatos" construídos para a odds ratio. Muitos métodos baseados em resultados assintóticos para distribuição não condicional também foram propostos. Gart e Nam (1988) apresentam uma revisão e avaliação dos principais destes métodos, os quais classificaram segundo o modo de derivação em três classes:

- Métodos que usam variâncias estimadas por expansão em série de Taylor ;
- Métodos baseados no Teorema de Fieller;
- Métodos baseados na verossimilhança.

2.2.1.1 - Métodos que Usam Variâncias Estimadas por Expansão em Série de Taylor

Nesta classe, encontram-se o método Iz de Noether(1957) e o método dos log-limites de Katz et al(1978). O método Iz de Noether é baseado na normalidade assintótica do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\phi}$, cuja variância estimada por expansão em série de Taylor de primeira ordem é

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\phi}) = (\hat{\phi})^2 u(\hat{p}_2, \hat{p}_1),$$

onde:

$$u(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = \frac{\hat{q}_2}{n_2 \hat{p}_2} + \frac{\hat{q}_1}{n_1 \hat{p}_1} .$$

e $\hat{q}_1 = 1 - \hat{p}_1$ e $\hat{q}_2 = 1 - \hat{p}_2$.

O intervalo de confiança para ϕ resulta em:

$$\hat{\phi} \left(1 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{u(\hat{p}_1, \hat{p}_2)} \right),$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o percentil de ordem $\alpha/2$ da distribuição Normal Padrão. Estes limites não são definidos quando x_1 ou x_2 é zero.

Os log-limites de Katz et al são baseados na normalidade assintótica de $\ln(\hat{\phi})$, cuja esperança assintótica é $\ln(\phi)$ e cuja variância estimada é $u(\hat{p}_2, \hat{p}_1)$. Quando x_1 e ou x_2 são iguais a zero $\ln(\hat{\phi})$ e $u(\hat{p}_2, \hat{p}_1)$ são indefinidos. Walter(1975) sugeriu então um estimador assintoticamente não viciado para $\ln(\phi)$, que é:

$$\ln(\hat{\phi}_{1/2}) = \ln\left(\frac{x_2 + 1/2}{n_2 + 1/2}\right) - \ln\left(\frac{x_1 + 1/2}{n_1 + 1/2}\right).$$

Walter(1976) propôs estimar sua variância por

$$\widehat{\text{Var}}_w(\ln \hat{\phi}_{1/2}) = \frac{n_2 - x_2}{n_2(x_2 + 1)} + \frac{n_1 - x_1}{n_1(x_1 + 1)},$$

que é assintoticamente não viciado para $\text{Var}(\ln(\phi))$. Pettigrey et al (1976) mostraram que

$$\hat{U}_{1/2} = \frac{1}{x_2 + 1/2} - \frac{1}{n_2 + 1/2} + \frac{1}{x_1 + 1/2} - \frac{1}{n_1 + 1/2}$$

também é assintoticamente não viciado e possui na maioria das vezes vício inferior ao estimador proposto por Walter.

Os limites de confiança para ϕ são dados por

$$\hat{\phi}_{1/2} \exp\left(\pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{u}_{1/2}}\right)$$

Estes intervalos sempre existem, mas são degenerados em (1,1) quando $x_1 = n_1$ e $x_2 = n_2$.

2.2.1.2 - Intervalos Baseados no Teorema de Fieller

O Teorema de Fieller proporciona um método para construção de intervalos de confiança para a razão de médias de duas variáveis aleatórias com Distribuição Normal Bivariada (Apêndice 1).

Katz et al (1978), utilizando o Teorema de Fieller, propuseram um intervalo baseado na estatística $T = (\hat{p}_2 - \phi \hat{p}_1)$, que possui assintoticamente distribuição Normal com esperança zero e variância estimada,

$$\hat{\text{Var}}(T) = \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2} + \frac{\phi^2 \hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}$$

Os limites de confiança são dados pelas raízes da equação quadrática em ϕ , $T^2 = z_{\alpha/2}^2 \hat{\text{Var}}(T)$.

Bailey(1987) propôs uma modificação no intervalo de de Katz et al. Ele utilizou a estatística $\beta = (\hat{p}_2^t - \phi^t \hat{p}_1^t)$, que por expansão em série de Taylor de primeira ordem, possui assintoticamente, para t constante, distribuição Normal com média zero e variância

$$\text{Var}(\beta) = t^2 \left[\frac{\hat{p}_2^{2t-1} (1-\hat{p}_2)}{n_2} + \frac{\phi^{2t} \hat{p}_1^{2t-1} (1-\hat{p}_1)}{n_1} \right]$$

Logo, a função pivotal $Z = \beta * \{ \hat{\text{var}}(\beta) \}^{-1/2}$ é assintoticamente

$N(0,1)$. Esta classe geral de variáveis Z , indexadas por t , contém aquela considerada por Katz et al para $t=1$ e aquela dos log-limites para $t \rightarrow 0$. Como Z é assumido Normal, uma escolha conveniente para t é aquela que minimiza a assimetria de Z . O termo de primeira ordem do terceiro momento central de Z é zero quando

$$t = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left[\frac{n_2^2 p_2^2 p_1 (1-p_1) - n_1^2 p_1^2 p_2 (1-p_2)}{n_2^2 p_2^2 (1-p_1)^2 - n_1^2 p_1^2 (1-p_2)^2} \right]$$

É possível estimar t substituindo p_1 e p_2 por seus estimadores. Porém, segundo Bailey, avaliações numéricas mostram que o uso de $t=1/3$ é geralmente bom. Resolvendo a equação quadrática $Z = \pm z_{\alpha/2}$ em ϕ^t para $t=1/3$, têm-se os limites de confiança para $\phi^{1/3}$, que elevados ao cubo produzem os limites de confiança para ϕ .

Noether(1957), utilizando o Teorema de Geary (Apêndice 1) e considerando que assintoticamente \hat{p}_2 e \hat{p}_1 possuem distribuições normais com parâmetros $(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2})$ e $(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1})$, construiu a seguinte função pivotal

$$Z = \frac{\hat{\phi} - \phi}{\sqrt{\frac{\hat{\phi} (1-p_1)}{n_1 p_1} + \frac{\phi (1-p_2)}{n_2 p_2}}}$$

Fazendo $p_2 = \phi p_1$ e substituindo p_1 pelo estimador de máxima verossimilhança \hat{p}_1 , o intervalo é obtido como as raízes da equação $Z^2 = Z_{\alpha/2}^2$. Estes limites, chamados "limites I_1 de Noether", sempre assumem valores reais, mas não existem se x_1 ou x_2 é zero.

2.2.1.3 -Intervalos Baseados na Verossimilhança

Koopman(1984) e Miettinen e Nurminen(1985) propuseram métodos baseados na verossimilhança que usam o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro de perturbação p_1 para dado valor de ϕ .

Na ausência de um teste uniformemente mais poderoso para testar $H_0: \phi = \phi_0$ x $H_1: \phi \neq \phi_0$, Koopman(1984) propôs o teste do Qui-Quadrado, cuja estatística é

$$U_{\phi_0}(x_2, x_1) = \frac{(x_1 - n_1 \tilde{p}_1)^2}{n_1 \tilde{p}_1 (1 - \tilde{p}_1)} + \frac{(x_2 - n_2 \tilde{p}_2)^2}{n_2 \tilde{p}_2 (1 - \tilde{p}_2)},$$

onde \tilde{p}_1 e \tilde{p}_2 , os estimadores de máxima verossimilhança para um dado valor de $\phi = \phi_0$, são:

$$\tilde{p}_1 = \frac{-b - (b^2 - 4ac)^{-1/2}}{2a} \text{ e } \tilde{p}_2 = \phi \tilde{p}_1,$$

onde: $a = (n_1 + n_2)\phi$,

$b = -(\phi(n_1 + x_2) + x_1 + n_2)$,

$c = (x_1 + x_2)$.

Sob H_0 , $U_{\phi_0}(x_1, x_2)$ possui, assintoticamente, distribuição Qui-Quadrado com 1 grau de liberdade. Um intervalo de confiança aproximado para ϕ é dado então por (ϕ_i, ϕ_e) tal que,

$$U_{\phi_i} = U_{\phi_e} = \chi^2_{1, 1-\alpha} \text{ e } \phi_i < \phi_e.$$

Como $U_{\phi_0}(x_1, x_2)$ reduz à estatística do Qui-Quadrado de Pearson quando $\phi = 1$, este intervalo sempre concorda com o teste do Qui-Quadrado para $\phi = 1$. As raízes das equações acima são encontradas por métodos numéricos.

Miettinen e Nurminen (1985) propuseram construir intervalos de confiança para o risco relativo ϕ , baseados na estatística do χ^2 como função de ϕ ,

$$\chi^2_{\phi} = \frac{(\hat{p}_2 - \phi \hat{p}_1)^2}{\tilde{V}(\hat{p}_2 - \phi \hat{p}_1)},$$

onde:

$$\tilde{V}(\tilde{p}_2 - \phi \tilde{p}_1) = \left[\frac{\tilde{p}_2(1 - \tilde{p}_2)}{n_2} + \frac{\phi^2 \tilde{p}_1(1 - \tilde{p}_1)}{n_1} \right] \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 1}.$$

Como no método de Fieller, eles partiram da estatística $(\hat{p}_2 - \phi \hat{p}_1)$, mas estimaram sua variância de forma diferente.

Gart e Nam (1988) mostraram que a menos da correção para variância em N_{ϕ}^2 , $N_{\phi}^2 = U_{\phi_0}(x_1, x_2)$, o que implica que os limites de Koopman e Miettinen são praticamente idênticos.

Gart(1985) derivou os intervalos acima, utilizando a Teoria dos Escores Eficientes, e propôs uma correção para vício e assimetria a partir dos resultados de Bartlett(1953a,1953b,1955).

Bedrick(1987) obteve intervalos de confiança para ϕ a partir da estatística de divergência e potência de Cressie e Read(1984)

$$I^{\lambda}(\phi_0) = \frac{2}{\lambda(\lambda + 1)} \sum_{i=0}^1 n_i \left[\hat{p}_i \left(\frac{\hat{p}_i}{\tilde{p}_i} \right)^{\lambda} + (1 - \hat{p}_i) \left(\frac{1 - \hat{p}_i}{1 - \tilde{p}_i} \right)^{\lambda} - 1 \right], \lambda \in R,$$

onde \tilde{p}_i são os estimadores de máxima verossimilhança de p_i para dado valor de ϕ . Para $\lambda = 0$, I^{λ} equivale à estatística da razão de verossimilhança; $\lambda = 1$ à estatística do Qui-Quadrado de Pearson e $\lambda = 0.5$ à estatística de Freeman-Tukey. Rudas(1986) comparou as estatísticas de Pearson, Razão de Verossimilhanças e Cressie e Read($\lambda=0.67$) para pequenas amostras através de estudos de Monte Carlo, concluindo que o uso da estatística de Pearson é muito mais apropriado que o da estatística da razão de verossimilhanças em pequenas amostras, e que a performance da estatística de Cressie e Read é muito similar àquela da estatística de Pearson.

Cada $I^\lambda(\phi_0)$ possui distribuição limite Qui-quadrado com 1 grau de liberdade sob H_0 , tal que

$$I^\lambda(\phi_1) = I^\lambda(\phi_0) = \chi^2_{1, 1-\alpha}$$

define um intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$. As equações acima são resolvidas por métodos numéricos.

Resultados numéricos levaram Bedrick a concluir que o melhor intervalo baseado na estatística de divergência e potência é aquele cujo λ é tal que $0,67 \leq \lambda \leq 1,25$. Porém Bedrick recomenda o uso de $\lambda = 0,67$.

Observe que para $\lambda = 1$ este intervalo é exatamente igual aquele de Koopman, pois $I^1(\phi_0) = U_{\phi_0}(x, y)$.

2.2.1.4 - Propriedades dos métodos

Segundo Gart(1985), são propriedades desejáveis dos intervalos de confiança para o risco relativo:

- **Consistência com o teste do Qui-Quadrado de Pearson** - Para um teste unilateral de $H_0: \phi=1$, se P , nível de significância do teste, for menor que $\alpha/2$ o intervalo de coeficiente de confiança $1-\alpha$ deve incluir $\phi=1$. Se P for maior que $\alpha/2$ o intervalo deve excluir $\phi=1$;

- **Invariância** - o intervalo de confiança para $1/\phi$ obtido como os recíprocos dos limites do intervalo para ϕ deve ser idêntico àquele obtido invertendo a ordem dos subscritos 0 e 1 no método original;

- **Ausência de casos aberrantes e incalculáveis.**

Estas propriedades, para os métodos aproximados descritos acima, encontram-se sumarizadas a seguir, como em Gart e Nam(1988).

Método	Consistência teste χ^2	Invariância	Casos aberrantes e incalculáveis	Não Iterativo
I ₂ Noether	Não	Não	Falha p/ x_1 ou $x_2=0$; pode produzir limites negativos; qdo. $p_2=p_1$ limites degenerados	Sim
$\ln(\hat{\phi}_{1/2})$	Não	Sim	Qdo. $\hat{p}_2=\hat{p}_1$, degenerado	Sim
Fieller e Bailey	Não	Não	Falha se x_2 ou $x_1=0$; $p_0=p_1$, degenerado; pode produzir limites negativos, infinitos e disjuntos.	Sim
I ₁ Noether	Não	Não	Falha se x_1 ou $x_2=0$ e pode produzir limites negativos	Sim
Score e Bedrick	Sim	Sim	Nenhum	Não

2.3 - O Caso Estratificado

Após a estratificação, os dados do k-ésimo estrato podem ser arranjados na seguinte forma

		Sucesso		
		Sim	Não	Total
Grupos	1	x_{1k}	$n_{1k} - x_{1k}$	n_{1k}
	2	x_{2k}	$n_{2k} - x_{2k}$	n_{2k}
Total		m_{1k}	m_{2k}	n_k

Cada X_{ik} é assumido como sendo binomial com parâmetros p_{ik} e n_{ik} , $i=1,2$ e $k=1,2,\dots,k$, e independente de todas as outras variáveis binomiais. Implícita na suposição de distribuição binomial está a suposição de homogeneidade e independência dentro dos estratos. Dentro de cada estrato as mesmas probabilidades de sucesso são assumidas dentro de cada grupo.

O risco relativo no k-ésimo estrato é

$$\phi_k = \frac{p_{2k}}{p_{1k}}, \text{ onde } 0 < \phi_k < \infty.$$

Assumindo ϕ_k constante para todo k, i.é $\phi_k = \phi$ $k = 1, \dots, k$, deseja-se estimar ϕ , o risco relativo comum.

A verossimilhança para o k-ésimo estrato, fazendo $p_{2k} = \phi p_{1k}$, pode ser escrita como

$$\mathcal{L}(\phi, p_{2k}) = \binom{n_{1k}}{x_{1k}} \binom{n_{2k}}{x_{2k}} \phi^{x_{2k}} p_{1k}^{x_{1k} + x_{2k}} (1 - p_{1k})^{n_{1k} - x_{1k}} (1 - \phi p_{1k})^{n_{2k} - x_{2k}}. \quad (2.2)$$

Logo, pela independência dos k pares de observações, a verossimilhança total é

$$\mathcal{L}(\phi, p_{1k}) = \prod_{k=1}^k \mathcal{L}(\phi, p_{1k}). \quad (2.3)$$

Ao fazer inferências sobre ϕ , dois casos assintóticos devem ser considerados:

- 1) número de estratos fixo;
- 2) número de estratos crescente.

No caso assintótico 1, o número de estratos é fixo e os tamanhos de amostras dentro de cada estrato são grandes. O número de estratos pode ser pequeno, sendo o caso de um estrato um caso especial. No caso assintótico 2, os tamanhos de amostras dentro dos estratos são fixos, mas o número de estratos é grande. O caso assintótico 2 é característico de estudos onde um elemento de cada grupo é emparelhado a um ou mais elementos do outro grupo, segundo uma variável de confundimento ou perturbação, ou onde amostras são esparsamente estratificadas segundo estas variáveis.

Segundo Greenland e Robins (1985) a maioria dos dados de estudos de coorte encontrados na literatura apresentam-se no formato ao qual se aplicam os métodos do caso assintótico 1. Porém, isto ocorre em decorrência da ausência de procedimentos para tratar dados esparsos quando o risco relativo é o parâmetro de interesse; o que tem levado ao agrupamento de pequenos estratos em grandes estratos antes da análise dos dados. Isto é feito geralmente limitando o número de variáveis estratificadoras, o que não é satisfatório, pois, muitas vezes, o número de variáveis de confundimento é superior ao número de variáveis estratificadoras que podem ser consideradas de modo a preservar o formato de grandes estratos.

Entre os principais estimadores do risco relativo comum estão:

- estimador de máxima verossimilhança;
- estimador de mínimos quadrados ponderados;
- estimador de "Mantel-Haenzel";

os quais serão descritos e discutidos abaixo quanto às suas propriedades em ambos casos assintóticos.

2.3.1 - O Estimador de Máxima Verossimilhança

O estimador de máxima verossimilhança do risco relativo comum, ϕ , é determinado maximizando a verossimilhança simultaneamente em relação aos $(k + 1)$ parâmetros

Considere a verossimilhança (2.2) do k -ésimo estrato. O estimador de máxima verossimilhança de p_k é a solução apropriada da equação

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \hat{p}_{1k})}{\partial p_{1k}} = 0$$

ou seja, de

$$a \hat{p}_{1k}^2 + b \hat{p}_{1k} + c = 0,$$

onde:

$$a = (n_{1k} + n_{2k})\phi,$$

$$b = -[(x_{1k} + n_{2k})\phi + x_{2k} + n_{1k}],$$

$$c = x_{1k} + x_{2k}.$$

O estimador de máxima verossimilhança de ϕ é a solução apropriada da equação

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \tilde{p}_{1k})}{\partial \phi} = \frac{\sum (x_{2k} - n_{2k} \phi \tilde{p}_{1k})}{\hat{\phi} (1 - \hat{\phi} \tilde{p}_{1k})} = 0,$$

que é obtida por métodos numéricos.

Sob o caso assintótico 1, $\hat{\phi}$ é consistente e assintoticamente Normal com variância assintótica $\text{Var}(\hat{\phi}) = \frac{\phi^2}{\sum v_k}$,

onde

$$v_k = \frac{n_{1k} n_{2k} p_{1k} p_{2k}}{n_{1k} p_{1k} q_{2k} + n_{2k} p_{2k} q_{1k}},$$

e assintoticamente eficiente.

Greeland e Robins (1985) observaram, através de avaliações numéricas para o caso assintótico 2, particularmente para $n_2 = n_1 = 1$, que $\hat{\phi}$ é viciado para ϕ , sendo que o vício é maior para valores pequenos de p_1 e para valores de ϕ próximos de 1. O mesmo fato verifica-se para $n_2, n_1 \geq 2$.

A inconsistência de $\hat{\phi}$ no caso assintótico 2, ocorre porque a Teoria Assintótica de estimação por máxima verossimilhança exige que

a dimensão do espaço paramétrico permaneça constante, quando o número total de observações torna-se grande. Neste caso, isto não ocorre, pois o número de parâmetros de perturbação aumenta. (Cox e Hinkley, 1974, pág 298).

No caso "odds ratio", um estimador de máxima verossimilhança consistente é obtido trabalhando com a verossimilhança condicional, o que não é possível para o risco relativo, devido a ausência de uma estatística ancilar para ϕ .

Intervalos de confiança para ϕ baseados no estimador de máxima verossimilhança podem ser construídos como extensão do método dos log-limites de Katz et al, da forma:

$$\exp \left[\ln \hat{\phi}_{mv} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{\text{var}}(\ln \hat{\phi}_{mv})} \right], \quad (2.4)$$

onde

$$\widehat{\text{var}}(\ln \hat{\phi}_{mv}) = \frac{1}{\sum \hat{v}_k} \quad \text{e} \quad \hat{v}_k = \frac{n_{1k} n_{2k} \hat{\phi}_{mv} \tilde{p}_1}{\phi (1-\tilde{p}_1)n_{2k} + (1-\phi) \tilde{p}_1 n_{1k}}$$

Estes intervalos são obtidos a partir do teste de Wald para testar as hipóteses

$$H_2: \ln(\phi) = \ln(\phi_2) \quad \text{x} \quad H_1: \ln(\phi) \neq \ln(\phi_2).$$

Intervalos aproximados também podem ser construídos baseados no teste da razão de verossimilhança e no teste dos escores de Rao. Este último foi generalizado por Gart e Nam(1988) para o caso estratificado, como será visto no capítulo 4.

2.3.2 - O Estimador de Mínimos Quadrados Ponderados

O estimador de mínimos quadrados ponderados é definido por

$$\hat{\phi}_w = \exp \left[\frac{\sum w_k \ln \hat{\phi}_k}{\sum w_k} \right],$$

onde os pesos

$$w_k = \left[\frac{1}{x_{2k}} - \frac{1}{n_{2k}} + \frac{1}{x_{1k}} - \frac{1}{n_{1k}} \right]$$

são o inverso da variância estimada de $\ln(\hat{\phi}_k)$.

A maior desvantagem de estimadores desta forma é que, como os pesos para cada estrato são calculados como os recíprocos das variâncias dos efeitos estimados em cada estrato; para estratos com frequências pequenas as estimativas das variâncias e conseqüentemente os pesos, podem ser altamente imprecisos. Além disso, estratos com valores zero tem peso zero. (Rothman, 1986, pág 191). Os pesos zero podem ser evitados somando uma constante a cada frequência observada ou substituindo os zeros por uma pequena constante quando eles ocorrem. Apesar deste procedimento solucionar parcialmente o problema, evitando pesos zero, o problema da imprecisão da variância estimada não é solucionado.

No caso assintótico 1, o estimador de mínimos quadrados ponderados é consistente e assintoticamente Normal com variância

$$\text{Var}(\hat{\phi}_w) = \frac{\phi^2}{\sum v_k},$$

possuindo a mesma distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança e portanto, assintoticamente eficiente. No caso assintótico 2, o estimador de mínimos quadrados ponderados não é nem mesmo consistente.

Greenland e Robins (1985) avaliaram o vício de $\hat{\phi}_w$ e $\hat{\phi}_{w_0}$, onde o último é da forma acima, porém seus pesos, inverso da variância assintótica de $\ln(\hat{\phi}_k)$ em $\phi = 1$, são:

$$v_o = \frac{n_{2k} n_{1k}(x_{2k} + x_{1k})}{n_{2k} + m_{2k} (n_{2k} + n_{1k} - x_{2k} + x_{1k})}$$

$\hat{\phi}_{w_0}$ é chamado estimador de mínimos quadrados "nulo ponderado". Para estes dois estimadores foi somada a cada casela uma constante c diferente de zero. Ambos apresentaram vícios relativamente grandes, até mesmo para n_1 e n_2 moderados; porém, $\hat{\phi}_{w_0}$ quase sempre foi melhor.

Intervalos de confiança para ϕ baseados em $\hat{\phi}_v$ são construídos como em (2.4), onde substituímos $\hat{\phi}_{mv}$ por $\hat{\phi}_v$ e onde $\hat{v}_k = w_k$.

2.3.3 - O Estimador de "Mantel-Haenzel"

Seja $R_k = (n_{1k} n_{2k})/N_k$ e $S_k = (n_{2k} x_{1k})/N_k$, onde $N_k = n_{1k} + n_{2k}$. O estimador de Mantel-Haenzel do risco relativo comum é:

$$\hat{\phi}_{MH} = \frac{\sum R_k}{\sum S_k}$$

Este estimador foi independentemente proposto por Tarone(1981), Nurminen(1981) e Kleibaum et al(1982). Ele pode ser obtido como a primeira iteração na determinação do estimador de máxima verossimilhança assumindo distribuição de Poisson.

Sob o caso assintótico 1, $\hat{\phi}_{MH}$ é consistente e asintoticamente Normal, porém ineficiente (Tarone et. al., 1983). Sob o caso assintótico 2 ele é consistente, ao contrário dos estimadores de máxima verossimhança e mínimos quadrados ponderados que são viciados. Sua variância assintótica pode ser estimada por

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\phi}_{MH}) = \hat{\phi}_{MH} \frac{\sum D_k}{\sum R_k \sum S_k},$$

onde

$$D_k = \left[n_{2k} n_{1k} (x_{2k} x_{1k}) - x_{2k} x_{1k} (n_{2k} n_{1k}) \right] / N_k^2;$$

que é consistente para $\text{Var}(\hat{\phi}_{MH})$ em ambos casos assintóticos (Greeland e Robins, 1985).

Intervalos de confiança para ϕ podem então ser construídos da forma

$$\exp \left[\ln \hat{\phi}_{MH} \pm \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\ln \hat{\phi}_{MH})} \right].$$

Sato (1990) propôs um intervalo onde os limites são calculados como raízes da equação quadrática

$$\frac{(| \sum R_k - \phi \sum S_k | - c)^2}{\phi W} = \chi_\alpha^2,$$

onde

$$W = \sum_k \left[\frac{n_{2k} n_{1k} (x_{2k} + x_{1k}) - x_{2k} x_{1k} (n_{2k} + n_{1k})}{N_k^2} \right]$$

$$e c = (1 + \phi)/4.$$

Estes limites foram derivados baseados na distribuição assintótica do estimador de "Mantel Haenzel", e não na de seu logarítimo como é usual. Experimentos de Monte Carlo mostram que o intervalo de Sato para a "odds ratio" é tão bom quanto aquele de Greeland e Robins(1985), mas para o risco relativo nenhuma avaliação foi realizada.

Como $\hat{\phi}_{MH}$ é apenas um estimador consistente no caso assintótico 2, sua ineficiência para grandes estratos sugere que seu uso seja limitado a este caso e que estimadores mais eficientes devem ser pesquisados(Greeland e Robins, 1985).

Concluindo, métodos de máxima verossimilhança e mínimos quadrados ponderados para estimar o risco relativo comum são ineficientes no caso assintótico 2, onde o único estimador consistente é o de "Mantel-Haenzel".

CAPÍTULO 3

UM POUCO DE TEORIA ASSINTÓTICA

3.1 - Intervalos de Confiança Assintóticos

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas com função densidade $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$. Intervalos de confiança para θ podem ser obtidos diretamente de testes assintoticamente eficientes.

Considere o problema de testar a hipótese

$$H_0: \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q) = \theta_0 \in \Omega,$$

onde θ_0 é um valor fixado, contra a alternativa

$$H_A: \theta \in \Omega_A = \Omega - \{\theta_0\}.$$

As três estatísticas mais usadas para testar H_0 são:

1) A estatística de Wald

$Q_v = (\hat{\theta} - \theta_0)' I(\hat{\theta}) (\hat{\theta} - \theta_0)$, onde $\hat{\theta}$ é o estimador de máxima verossimilhança de θ , onde $I(\hat{\theta})$ é a matriz de Informação de Fisher no ponto $\hat{\theta}$;

2) A estatística de Wilks ou da razão de verossimilhanças

$Q_w = -2 \log \Lambda_n = 2(\log \mathcal{L}(\hat{\theta}) - \log \mathcal{L}(\theta_0))$, onde $\Lambda_n = \frac{\mathcal{L}(\theta_0)}{\sup_{\theta \in \Omega_A} \mathcal{L}(\theta)}$ é a razão de verossimilhanças;

3) A estatística de Rao ou dos escores eficientes

$Q_r = U(x, \theta_0)' I(\theta_0)^{-1} U(x, \theta_0)$, onde $U(x, \theta_0) = \sum \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x, \theta) |_{\theta = \theta_0}$.

Assintoticamente as três estatísticas acima possuem distribuição Qui-Quadrado com q graus de liberdade. A demonstração deste resultado pode ser vista em Leite & Singer(1990,pág 123). Embora estas três estatísticas sejam assintoticamente equivalentes, elas apresentam vantagens e desvantagens quando comparadas entre si. A menos da estatística de Wald elas são invariantes à transformações nos parâmetros. Além disso, na estatística de Rao o estimador de máxima verossimilhança não precisa ser calculado.

Considere o problema de testar a hipótese nula composta

$$H_0: \theta \in \Omega_0 \subset \Omega$$

contra a alternativa

$$H_A: \theta \in \Omega_A,$$

onde Ω_0 é um subconjunto de Ω e θ é expresso como uma função de um vetor de parâmetros de menor dimensão β , isto é, para $\theta \in \Omega_0$

$$\theta_j = g_j(\beta_1, \dots, \beta_{q'}) \quad j=1, \dots, q; q' < q,$$

ou alternativamente seja θ_j sujeito a $k=q-q'$ restrições

$$R_j(\theta) = 0 \quad j=1, \dots, k,$$

onde g_j e R_j são funções contínuas admitindo derivadas parciais contínuas de primeira ordem. Seja $\hat{\theta}$ o estimador de máxima verossimilhança não restrito e θ^* o estimador de máxima verossimilhança restrito de θ . Em termos do estimador de máxima verossimilhança de β , $\hat{\beta}$, $\theta_j^* = g_j(\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{q'})$. As estatísticas de teste mais usadas para testar as hipóteses acima são

1) A estatística de Wald

$Q_v = \sum \sum \lambda^{ij} (\hat{\theta}) R_j(\hat{\theta})$, onde λ^{ij} é a inversa da matriz de covariâncias assintóticas de $R_i(\hat{\theta})$;

2) A estatística da razão de verossimilhanças

$Q_v = -2(l(\hat{\theta}) - l(\theta^*)) = 2(l(\hat{\theta}) - l(\hat{\beta}))$, onde $l(\hat{\beta})$ é calculado com o log da função de verossimilhanças como função de $\hat{\beta}$;

3) A estatística de Rao

$$Q_r = U(\theta^*) I(\theta^*)^{-1} U(\theta^*).$$

Assintoticamente as três estatísticas acima possuem distribuição Qui-Quadrado com $q-q'$ graus de liberdade (Rao, 1968 pág 351).

Considere agora a situação em que $\theta = (\psi, \lambda)$ e $\Omega_0 = \{\theta : \psi = \psi_0\}$ tal que λ é um vetor de parâmetros de perturbação. Seja θ um vetor $1 \times r$ com ψ um subvetor $1 \times p$, $p < r$, e considere a seguinte partição da matriz de informação

$$I = \begin{bmatrix} I_{\psi\psi} & I_{\psi\lambda} \\ I_{\psi\lambda} & I_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}, \text{ cuja inversa é denotada por } I^{-1} = \begin{bmatrix} I^{\psi\psi} & I^{\psi\lambda} \\ I^{\psi\lambda} & I^{\lambda\lambda} \end{bmatrix}, \text{ tal}$$

que $I(\psi, \lambda) = (I^{\psi\psi})^{-1} = I_{\psi\psi} - I_{\psi\lambda} I_{\lambda\lambda}^{-1} I_{\lambda\psi}$ é a inversa da matriz de

covariância aproximada de $\hat{\psi}$. Se $\hat{\lambda}$ é o estimador de máxima verossimilhança de λ para ψ fixo, o vetor gradiente do log da verossimilhança em $(\psi, \hat{\lambda})$ tem matriz de covariância aproximada $(I^{\psi\psi})^{-1}$, melhor que $I_{\psi\psi}$. Por outro lado, a derivada com respeito a ψ em (ψ, λ) tem matriz de covariância exata $I_{\psi\psi}$.

A restrição paramétrica pode ser expressa na forma $\theta=(\psi_0,\lambda)$. Suponha que X possui função densidade de probabilidade $f(y;\psi,\lambda)$ e considere o teste de

$$H_0: \psi = \psi_0 \quad \text{x} \quad H_1: \psi \neq \psi_0,$$

onde ψ_0 é um valor conhecido para ψ .

Sob H_0 , λ é estimado por máxima verossimilhança com $\psi=\psi_0$ fixo e é denotado por $\hat{\lambda}_0$. As estatísticas para testar H_0 são

1) A estatística da razão de verossimilhanças

$$Q_v = 2(L(\hat{\psi}, \hat{\lambda}, X) - L(\psi_0, \hat{\lambda}_0, X));$$

2) A estatística de Wald

$$Q_v = (\hat{\psi} - \psi_0) I(\hat{\psi}; \hat{\lambda}) (\hat{\psi} - \psi_0);$$

3) A estatística de Rao

$$Q_r = U_{\psi}(\psi_0, \hat{\lambda}_0) (I(\psi_0; \hat{\lambda}_0))^{-1} U_{\psi}(\psi_0, \hat{\lambda}_0).$$

As estatísticas acima possuem distribuição Qui-Quadrado com p graus de liberdade.

Para $p=1$, o teste de Rao é assintoticamente localmente mais poderoso. (Cox e Hinkley, 1974, pág 113).

Um dos procedimentos mais usados para construir intervalos de confiança assintóticos para um único parâmetro θ consiste em fornecer o estimador de máxima verossimilhança mais ou menos um múltiplo de seu erro padrão derivado da matriz de informação no ponto $\hat{\theta}$ ou da matriz de derivadas segundas observadas do log da

verossimilhança. A normalidade assintótica do estimador de máxima verossimilhança leva ao seguinte intervalo de coeficiente de confiança $(1-\alpha)$.

$$[\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \{I(\hat{\theta})\}^{-1/2}, \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \{I(\hat{\theta})\}^{-1/2}] \quad (9.1)$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o percentil de ordem $\alpha/2$ da distribuição Normal padrão. Em termos da estatística do teste isto é equivalente a

$$\{ \theta: Q_w = (\hat{\theta} - \theta)^2 I(\hat{\theta}) \leq z_{\alpha/2}^2 \} .$$

Segundo Cox & Hinkley(1974, pág 342) três são as razões para considerar procedimentos diferentes de (9.1):

- 1) O teste de Wald não é invariante à transformação do parâmetro;
- 2) Pode ser necessário utilizar resultados distribucionais mais refinados do que aproximação Normal para o estimador de máxima verossimilhança;
- 3) Por último, (9.1) pode ser muito ineficiente se a situação exige intervalos assimétricos ou intervalos disjuntos.

Embora, no limite, estas situações ocorram com probabilidades muito pequenas e possam até mesmo ser ignoradas, espera-se que outros métodos, especialmente aqueles baseados mais diretamente na razão de verossimilhanças, sejam mais sensíveis que (9.1).

Intervalos baseados na estatística da razão de verossimilhança são tais que

$$\{ \theta: -2 \log \Lambda_n \leq z_{\alpha/2}^2 \}$$

e aqueles baseados na estatística de Rao

$$\left(\theta : \left| \frac{U(\theta)}{I(\theta)^{1/2}} \right| \leq z_{\alpha/2} \right).$$

Às vezes não é suficiente assumir que Q_v e Q_r possuem distribuição Qui-Quadrado para o tamanho de amostra em questão. As distribuições de Q_v e Q_r dependem de uma variável n de tal modo que, quando n tende a infinito, estas distribuições tendam à distribuição Qui-Quadrado. Para n grande, muitas vezes é suficiente assumir distribuição Qui-Quadrado, mas para n pequeno ou moderado, isto não é necessariamente suficiente. No entanto, melhores aproximações podem ser obtidas para as distribuições das estatísticas dos testes e também novas estatísticas cujas distribuições estejam mais próximas da Qui-quadrado. Melhores aproximações são mais facilmente derivadas quando se trabalha com o teste do escore de Rao e uma aproximação Normal limite é considerada em vez de aproximação Qui-Quadrado.

Segundo Kendall e Stuart(1967, pág 114-115,vol.2) os intervalos baseados nos escores eficientes são assintoticamente mais curtos na média, que aqueles baseados diretamente em $\hat{\theta}$.

Segundo Bartlett (1953a), o uso de $U(\theta)$ tem a vantagem de que sua média e variância são conhecidas exatamente como sendo 0 e $I = E \{U(\theta)^2\}$, em contraste com as propriedades assintóticas de $\hat{\theta}$, tal que a única aproximação introduzida quanto a distribuição amostral de $U(\theta)$, é com respeito à sua normalidade. Isto sugere que o uso de $U(\theta)$ na construção de intervalos de confiança, deve ser válido sob condições bastante amplas. Com respeito à normalidade, melhores aproximações podem ser obtidas para distribuição de $U(\theta)$ investigando os momentos de maior ordem de $U(\theta)$. Uma nova estatística $T(\theta)$ consistindo de uma transformação polinomial(Kendall e Stuart ,1977, pg.175 vol.1) de $U(\theta)$ da forma

$$T(\theta) = b_0 + b_1U(\theta) + b_2U(\theta)^2 + \dots,$$

onde os b 's são de ordem $n^{-1/2}$ ou menor e são escolhidos de modo que a distribuição de $T(\theta)$ esteja muito mais próxima da Normalidade que aquela de U . Esta transformação pode ser escolhida de forma a minimizar assimetria, kurtosis ou qualquer cumulante de maior ordem. Intervalos melhorados podem ser obtidos a partir de $T(\theta)$. Se $T(\theta)$ é escolhida de forma a minimizar a assimetria, diz-se que os intervalos são corrigidos para assimetria.

Uma condição adicional para que intervalos possam ser obtidos a partir da quantidade aleatória $T(\theta)$ é que $T(\theta)$ possua uma relação monótona em θ para todas as amostras, produzindo um único e admissível valor θ_0 para cada valor crítico $T(\theta_0)$, de modo que desigualdades em $T(\theta)$ possam ser transformadas em desigualdades em θ . Segundo Bartlett(1953a), espera-se que os termos de correção tenham um efeito relativamente pequeno, não perturbando a relação de $T(\theta)$ com θ na vizinhança dos valores críticos de θ .

Bartlett(1953a, 1953b, 1955) através dos momentos de maior ordem e da expansão de Cornish-Fisher obteve tais transformações $T(\theta)$ de modo a minimizar a assimetria para o caso de um único parâmetro desconhecido e mais de um parâmetro desconhecido, inclusive o caso onde parâmetros de perturbação estão presentes. Serão apresentados aqui, detalhadamente, os resultados de Bartlett, com interesse especial no caso onde parâmetros de perturbação estão presentes, pois este é o caso do risco relativo. Para melhor entendimento dos resultados de Bartlett, alguns resultados sobre expansão assintótica para somas de variáveis aleatórias independentes, serão revisados(Barnoff-Nielsen e Cox, 1979).

3.2 - ALGUNS RESULTADOS SOBRE EXPANSÕES ASSINTÓTICAS PARA VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES

3.2.1 - Momentos e Cumulantes de uma Soma de Variáveis Aleatórias

Sejam Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Assumindo que os momentos de toda ordem existem, em particular que $E(Y) = \mu$ e $\text{var}(Y) = \sigma^2$, considere $S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$. Logo $E(S_n) = n\mu$, $\text{Var}(S_n) = n\sigma^2$, e a variável padronizada

$$S_n^* = \frac{(S_n - n\mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

é tal que $E(S_n^*) = 0$ e $\text{Var}(S_n^*) = 1$.

Sejam $M'_r = E(Y^r)$ e $M_r = E(Y - \mu)^r$, $r=1,2,\dots$, os momentos de Y em torno da origem e da média μ respectivamente. A função geradora de momentos de Y é definida por

$$M(t) = E(e^{tY}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assumindo que $M(t)$ é convergente em um intervalo de valores reais de t contendo $t=0$, pode-se escrever

$$M(Y, t) = E(e^{tY}) = E\left(1 + tY + \frac{t^2}{2!} Y^2 + \frac{t^3}{3!} Y^3 + \dots\right) = 1 + \sum \frac{t^r}{r!} M'_r \quad (3.2)$$

$$M(Y - \mu, t) = E(e^{(Y - \mu)t}) = e^{-t\mu} M(Y, t) = 1 + \sum \frac{t^r}{r!} M_r \quad (3.3)$$

Os momentos são um conjunto de constantes descritivas de uma distribuição, úteis para representar suas propriedades e até mesmo especificá-las. Outro conjunto de constantes que possuem esta mesma função e possuem propriedades mais atrativas são os cumulantes. Seja $K(Y, t) = \log M(Y, t)$ a função geradora de cumulantes de Y . O r -ésimo cumulante, K_r , é definido como o coeficiente de $\frac{t^r}{r!}$ na expansão de Taylor,

$$K(Y,t) = \sum k_r \frac{t^r}{r!} .$$

Tem-se por (2.2) e (2.3) que

$$K(Y,t) = \log(1 + \sum \frac{t^r}{r!} M^{(r)}) = t\mu + \log(1 + \sum \frac{t^r}{r!} M_r) \quad (2.4)$$

e

$$K(Y-\mu,t) = -t\mu + K(Y,t) \quad (3.5)$$

Como pode-se ver em (3.5), para $r > 1$ os cumulantes são invariantes à soma de uma constante à variável aleatória Y . Os cumulantes, K_r , são funções dos momentos somente até a ordem r e portanto podem ser definidos independentemente da convergência dos momentos de ordem maior que r . Desenvolvendo (2.4), obtém-se:

$$\begin{array}{ll} k_1 = \mu & \mu_4 = k_4 - 3k_2^2 \\ k_2 = \mu_2 & \mu_5 = k_5 + 10k_3k_2 \\ k_3 = \mu_3 & \text{etc.} \\ k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 & \\ k_5 = \mu_5 - 10\mu_3\mu_2 & \\ \text{etc.} & \end{array}$$

Às vezes é útil escrever os cumulantes numa forma padronizada. Sejam $\rho_r = k_r/\sigma^r$, $r=3,4,\dots$ os cumulantes padronizados. Particularmente $\rho_3 = k_3/\sigma^3$ e $\rho_4 = k_4/\sigma^4$, são chamados respectivamente de coeficientes de assimetria e Kurtosis, e são usados como medidas de assimetria e achatamento do topo da distribuição. Em distribuições simétricas $\rho_3=0$. Os cumulantes padronizados surgem naturalmente em expansões assintóticas para soma de variáveis aleatórias independentes.

Voltando à soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, tem-se:

$$M(S_n, t) = E(e^{t(Y_1+Y_2+\dots+Y_n)}) = (M(Y, t))^n$$

e

$$K(S_n, t) = \log(M(Y, t))^n = n \log M(Y, t) = nK(Y, t),$$

tal que

$$k_r(S_n) = nk_r(Y), \quad r=1, 2, \dots$$

Como os cumulantes são invariantes à transformações lineares, tem-se que

$$k_r(S_n^*) = k_r\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = k_r\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sigma^r n^{(1/2)r}} k_r(S_n),$$

para $r > 1$. Logo:

$$\rho_r(S_n^*) = \frac{K_r(S_n)}{\sigma^r (S_n^*)} = \frac{k_r(S_n)}{\sigma^r n^{(1/2)r}} = \frac{nk_r(Y)}{n^{(1/2)r} \sigma^r} = \frac{\rho_r(Y)}{n^{(1/2)r-1}} = \rho_r(S_n).$$

Particularmente

$$\rho_3(S_n) = n^{-1/2} \rho_3(Y) \quad \text{e} \quad \rho_4(S_n) = n^{-1} \rho_4(Y).$$

Então

$$\begin{aligned} \rho_3(S_n) &= O(n^{-1/2}) \\ \rho_4(S_n) &= O(n^{-1}) \\ &\vdots \\ \rho_r(S_n) &= O(n^{r/2-1}). \end{aligned}$$

3.2.2 - A Expansão de Edgeworth

Sejam Y_1, \dots, Y_n variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas com $E(Y_i) = \mu$, $\text{Var}(Y_i) = \sigma^2$ e cumulantes k_r . A função geradora de cumulantes de S_n^* é

$$K(S_n^*, t) = \text{Log } M(S_n^*, t) = - \frac{n^{1/2} \mu t}{\sigma} + \log E(e^{(n^{-1/2} S_n)/\sigma}) = - \frac{n^{1/2} \mu t}{\sigma} + nK(Y, \frac{n^{-1/2} t}{\sigma}) \quad (9.6)$$

Considere o seguinte Teorema.

Teorema: A função geradora de momentos determina unicamente a função distribuição, e se ela existe é única. (Rohatgi, 1976, pág 95).

A derivação, do Teorema do Limite Central é feita via avaliação de $M(S_n^*, t)$ no limite, quando $n \rightarrow \infty$. As funções geradoras de momentos e cumulantes da distribuição Normal padrão são respectivamente

$$M(X, t) = \text{Exp}(\frac{1}{2} t^2) \quad \text{e} \quad K(X, t) = \frac{1}{2} t^2.$$

Se no limite $M(S_n^*, t) = \exp(\frac{1}{2} t^2)$, então $S_n^* \xrightarrow{D} N(0,1)$.

De (9.6), tem-se que

$$K(Y, t) = \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 + \frac{1}{6} k_3 t^3 + \frac{1}{24} k_4 t^4 = \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 + \frac{1}{6} \rho_3 \sigma^3 t^3 + \frac{1}{24} \rho_4 \sigma^4 t^4 + \dots,$$

que levado em (3.6) produz

$$\begin{aligned}
 K(S_n^*, t) &= -\frac{\sqrt{n} \mu t}{\sigma} + \frac{\sqrt{n} \mu t}{\sigma} + \frac{nt^2 \sigma^2}{2n\sigma^2} + \frac{nt^3 \sigma^3 \rho_3}{6\sigma^3 n^{3/2}} + \frac{nt^4 \sigma^4 \rho_4}{24\sigma^4 n^2} + \dots \\
 &= \frac{1}{2} t^2 + \frac{\rho_3 t^3}{6\sqrt{n}} + \frac{\rho_4 t^4}{24n} + O(n^{-3/2})
 \end{aligned}$$

Tomando-se a exponencial de $K(S_n^*, t)$, tem-se:

$$M(S_n^*, t) = \exp\left[\frac{1}{2} t^2 + \frac{\rho_3 t^3}{6\sqrt{n}} + \frac{\rho_4 t^4}{24n} + O(n^{-3/2})\right]$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2} t^2\right) \exp\left[\frac{\rho_3 t^3}{6\sqrt{n}} + \frac{\rho_4 t^4}{24n} + O(n^{-3/2})\right] =$$

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \left[1 + \frac{\rho_3 t^3}{6\sqrt{n}} + \frac{\rho_4 t^4}{24n} + \frac{\rho_3^2 t^6}{72n} + O(n^{-3/2})\right] \quad (3.8)$$

que deve ser invertido para obter a função densidade de probabilidade de S_n^* .

Considere o resultado:

$$\int e^{tx} \phi(x) H_r(x) dx = t^r \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \quad (3.9)$$

onde $H_r(x)$ é o polinômio de Hermite de grau r (uma classe especial dos polinômios ortogonais) definido pela identidade

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^r \phi(x) = (-1)^r H_r(x) \phi(x), \text{ onde } \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2} \text{ é a função}$$

densidade de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição $N(0,1)$.

Tem-se então que:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= x \\ H_2(x) &= x^2 - 1 \\ H_3(x) &= x^3 - 3x \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Usando (3.8), tem-se

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \left\{ 1 + \frac{\rho_3 t^3}{6\sqrt{n}} + \frac{\rho_4 t^4}{24n} + \frac{\rho_5^2 t^5}{72n} + O(n^{-3/2}) \right\} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) +$$

$$\frac{\rho_3 t^3}{6\sqrt{n}} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + \frac{\rho_4 t^4}{24n} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + \frac{\rho_5 t^5}{72n} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + O(n^{-3/2}) = \int e^{tx} \phi(x) \left\{ 1 +$$

$$\frac{\rho_3}{6\sqrt{n}} H_3(x) + \frac{\rho_4}{24n} H_4(x) + \frac{\rho_5^2}{72n} H_5(x) \right\} + O(n^{-3/2}) dx = M(S_n^*, t)$$

Logo:

$$f(S_n^*, t) = \phi(x) \left\{ 1 + \frac{\rho_3}{6\sqrt{n}} H_3(x) + \frac{\rho_4}{24n} H_4(x) + \frac{\rho_5^2}{72n} H_5(x) \right\} + O(n^{-3/2})$$

$$= \phi(x) \left\{ 1 + \frac{\rho_3(S_n)}{6} H_3(x) + \frac{\rho_4(S_n)}{24} H_4(x) + \frac{\rho_5^2(S_n)}{72} H_5(x) \right\} + O(n^{-3/2}), \quad (3.8)$$

que quando integrado produz

$$F(S_n^*, x) = \Phi(x) - \phi(x) \left\{ \frac{\rho_3}{6\sqrt{n}} H_2(x) + \frac{\rho_4}{24n} H_3(x) + \frac{\rho_5^2}{72n} H_4(x) \right\} + O(n^{-3/2}) =$$

$$\Phi(x) - \phi(x) \left\{ \frac{\rho_3(S_n)}{6} H_2(x) + \frac{\rho_4(S_n)}{24} H_3(x) + \frac{\rho_5^2(S_n)}{72} H_5(x) \right\} + O(n^{-3/2}) \quad (2.10)$$

As equações (3.9) e (3.10) representam a expansão de Edgeworth para S_n^* . O número de termos a ser considerado nas equações acima é particular a cada caso. Considerar apenas o termo de ordem $O(n^{-1/2})$ mostra-se muito útil quando a não normalidade tem como causa principal a assimetria.

3.2.3 - A Inversão de Cornish-Fisher

Seja ξ uma variável Normal. Deseja-se determinar ξ em termos de x tal que

$$\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \phi(z) dz = F(S_n^*, x) \quad (3.11)$$

Usando o Teorema de Taylor pode-se escrever $\Phi(\xi)$ como:

$$\Phi(\xi) = \Phi(x + (\xi - x)) = \Phi(x) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\xi - x)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial x^r} \Phi(x) =$$

$$\Phi(x) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x - \xi)^r}{r!} H_{r-1}(x) \Phi(x) \quad (3.12)$$

substituindo (3.12) e (3.10) em (3.11) tem-se:

$$F(S_n^*, x) = \Phi(x) - \phi(x) \left[\frac{\rho_3(S_n)(x^2 - 1)}{6} + \frac{\rho_4(S_n)(x^3 - 3x)}{24} + \dots \right] =$$

$$\Phi(x) - \phi(x) \left[(x - \xi) + \frac{(x - \xi)^2}{2} x + \frac{(x - \xi)^3}{6} (x^2 - 1) + \frac{(x - \xi)^4}{24} (x^3 - 3x) + \dots \right]$$

que após manipulação algébrica produz

$$\begin{aligned} \xi = x - \frac{1}{6}(x^2-1)\rho_3(S_n) - \frac{1}{24}(x^3-3x)\rho_4(S_n) + \\ \frac{1}{36}(4x^2-7x)\rho_5^2(S_n) + O(n^{-3/2}) \end{aligned} \quad (9.13)$$

e a expansão inversa de Cornish-Fisher de x em função de ξ é dada por:

$$\begin{aligned} x = \xi + \frac{1}{6}(\xi^2-1)\rho_3(S_n) + \frac{1}{24}(\xi^3-3\xi)\rho_4(S_n) - \\ \frac{1}{36}(2\xi^2-5\xi)\rho_5^2(S_n) + O(n^{-3/2}) \end{aligned} \quad (9.14)$$

3.3 - RESULTADOS DE BARTLETT

3.3.1 - O Caso de um Parâmetro Desconhecido

Serão apresentados nesta seção os resultados de Bartlett sobre correção para assimetria para o caso de um único parâmetro desconhecido.

3.3.1.1 - Os Momentos de $U(\theta)$

Considere a notação:

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) &= L_1 & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}\right) &= L_2 \\
 \frac{\partial L_1}{\partial \theta} &= {}_1 L_1 & \frac{\partial^2 L_1}{\partial \theta^2} &= {}_2 L_1 \\
 E\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2\right] &= L_1^{(2)} & E\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}\right) &= (L_1, L_2) \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

Pode-se obter infinitas relações entre os momentos de $\partial L / \partial \theta$. Seja $\int p(\theta)$ uma notação formal para a integral de Stieltz sobre todas as amostras possíveis.

Têm-se que:

$$1 = \int p(\theta + r) = \int \exp(\ln p(\theta + r)) \tag{a. 15}$$

Escrevendo $\ln p(\theta + r)$ em série de potências de r , tem-se:

$$(1) = \int \exp\left[\ln p(\theta) + r \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(\theta) + \frac{r^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln p(\theta) + \dots\right] =$$

$$\int p(\theta) \exp \left[r \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{r^2}{2!} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} + \frac{r^3}{3!} \frac{\partial^3 L}{\partial \theta^3} + \dots \right] = \int p(\theta) \exp(B)$$

Agora, escrevendo $\exp(B)$ em série de potências tem-se:

$$\begin{aligned} \exp(B) &= 1 + \left[r \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{r^2}{2!} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} + \frac{r^3}{3!} \frac{\partial^3 L}{\partial \theta^3} + \dots \right] + \frac{1}{2!} \left[r^2 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{r^4}{4} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right)^2 + \right. \\ &\dots + 2 \frac{r^3}{2} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} * \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right) + 2 \frac{r^4}{6} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} * \frac{\partial^3 L}{\partial \theta^3} \right) + \dots \left. \right] + \frac{1}{3!} \left[r^3 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^3 + \dots + \right. \\ &3 \frac{r^4}{2} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} + \dots \left. \right] + \frac{1}{4!} \left[r^4 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^4 + \dots \right] + \dots \\ &= 1 + r \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{r^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \frac{r^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 L}{\partial \theta^3} + 3 \frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^3 \right] + \frac{r^4}{4!} \left[\frac{\partial^4 L}{\partial \theta^4} + \right. \\ &+ 3 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right)^2 + 4 \frac{\partial L}{\partial \theta} * \frac{\partial^3 L}{\partial \theta^3} + 6 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} + \left. \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^4 \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo } 1 &= \int p(\theta) \exp(B) = 1 + r E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) + \frac{r^2}{2!} \left[E \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right) + E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \\ &\frac{r^3}{3!} \left[E \left(\frac{\partial^3 L}{\partial \theta^3} \right) + 3 E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right) + E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^3 \right] + \frac{r^4}{4!} \left[E \left(\frac{\partial^4 L}{\partial \theta^4} \right) + 3 E \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right)^2 + \right. \\ &4 E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial^3 L}{\partial \theta^3} \right) + 6 E \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right) + E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^4 \left. \right] + \dots \\ &= 1 + r L_1 + \frac{r^2}{2!} (L_2 + L_1^{(2)}) + \frac{r^3}{3!} (L_3 + 3(L_1 L_2) + L_1^{(3)}) + \frac{r^4}{4!} (L_4 + \\ &3 L_2^{(2)} + 4(L_1 L_3) + 6(L_1^{(2)} L_2) + L_1^{(4)}) + \dots \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, tem-se:

$$1 = 1$$

$$L_1 = 0 \quad (a)$$

$$L_2 + L_1^{(2)} = 0 \quad (b) \quad (3.16)$$

$$L_3 + 3(L_1 L_2) + L_1^{(3)} = 0 \quad (c)$$

$$L_4 + 3 L_2^{(2)} + 4 (L_1^{(2)} L_3) + L_1^{(4)} = 0 \quad (d)$$

etc.

Diferenciando as relações acima obtém-se um número ilimitado de relações adicionais. Diferenciando (3.16b) (3.16c) tem-se:

$${}_1 L_2 + {}_1 L_1^{(2)} = {}_1 L_2 + \left\{ L_1^{(3)} + 2(L_1 L_2) \right\} \quad (3.17a)$$

$${}_1 L_3 + 3 {}_1 (L_1 L_2) + {}_1 L_1^{(3)} = {}_1 L_3 + 3 \left\{ (L_1^{(2)} L_2) + L_2^{(2)} (L_1 L_3) \right\} +$$

$$\left\{ L_1^{(4)} + 3(L_1^{(2)} L_2) \right\} = 0 \quad (3.17b)$$

Diferenciando (3.16a) tem-se:

$${}_2 L_2 + {}_1 L_1^{(3)} + 2 {}_1 (L_1 L_2) = {}_2 L_2 + \left\{ L_1^{(4)} + 3 (L_1^{(2)} L_2) \right\} + 2 \left\{ (L_1^{(2)} L_2) + L_2^{(2)} + (L_1 L_3) \right\} = 0 \quad (3.18)$$

Fazendo $U = \frac{\partial L}{\partial \theta}$, das relações entre momentos e cumulantes da seção anterior tem-se que:

$$K_1(U) = 0$$

$$K_2(U) = I(\theta)$$

$$k_3(U) = E(U)^3$$

$$k_4(U) = E(U)^4 - 3I^2$$

De (3.16a) e (3.16c) tem-se:

$$\begin{cases} L_3 + 3(L_1 L_2) + L_1^{(3)} = 0 \\ L_2 + 2(L_1 L_2) + L_1^{(2)} = 0 \end{cases} \rightarrow L_1^{(3)} = 3 L_1^{(2)} + 2 L_3$$

$$\text{Logo } K_3(J) = 3 \frac{\partial I}{\partial \theta} + 2 E \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.19)$$

De (3.18) e (3.17b) tem-se:

$$\begin{cases} L_1^{(4)} + {}_2 L_2 + 5(L_1^{(2)} L_2) + 2 L_2^{(2)} + 2(L_1 L_3) = 0 \\ L_1^{(4)} + 6(L_1^{(2)} L_2) + 3 L_2^{(2)} + 3(L_1 L_3) + {}_1 L_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{e logo } L_1^{(4)} = -6 L_2 + 3 L_2^{(2)} + 8(L_1 L_3) + 5 L_4 \quad (3.20)$$

De (3.16d) (3.17b) tem-se:

$$(L_1 L_3) = {}_1 L_3 - L_4 \quad (3.21)$$

e de (3.20) e (3.21):

$$K_4(J) = E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^4 - 3I^2 = -6L_2 + 8 {}_1 L_3 - 3L_4 + 3 L_2^{(2)} - 3(L_2)^2 \quad (3.22)$$

Dependendo da forma da função de verossimilhança $\mathcal{L}(X, \theta)$ (3.19) e (3.22) podem ser muito úteis.

3.3.1.2 - Obtendo uma correção aproximada para assimetria de $U(\theta)$

Usando os momentos de maior ordem de $U(\theta)$ e a expansão de Cornish-Fisher, uma correção aproximada para assimetria de $U(\theta)$ é facilmente obtida.

Sejam Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis aleatórias independentes e

identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade $f(y, \theta)$. Então $U(\theta)$ é tal que

$$U(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln \mathcal{L}(Y, \theta)) = \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^n \ln f(y_i, \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(y_i, \theta) = \sum U_i(y_i, \theta)$$

é uma soma de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas com

$$E[U_1(Y_1, \theta)] = 0$$

e

$$\text{Var}[U_1(Y_1, \theta)] = I_1(\theta).$$

Logo $S_n = U(\theta)$ e $S_n^* = \frac{U(\theta)}{\sqrt{I(\theta)}}$, onde $I(\theta) = nI_1(\theta)$ é tal que $E(S_n^*) = 0$ e

$$\text{Var}(S_n^*) = 1.$$

Na seção 3.1 foi visto que S_n^* possui distribuição $N(0,1)$ para ordem $O(1)$, que tal aproximação pode ser melhorada adicionando termos de maior ordem; e que particularmente se o principal fator de não normalidade é a assimetria, a inclusão do termo de ordem $O(n^{-1/2})$ é bastante satisfatória. Então para esta ordem de aproximação

$$f(S_n^*, x) = \phi(x) \left\{ 1 + \frac{\rho_3(S_n)}{6} H_3(x) \right\} + O(n^{-1})$$

e da expansão de Cornish-Fisher para esta mesma ordem de aproximação

$$z = x - \frac{1}{6} (x^2 - 1) \rho_3(S_n) + O(n^{-1}).$$

Considere então a transformação polinomial de $U(\theta)$ da forma acima

$$T(\theta) = \frac{1}{\sqrt{I}} \left[\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{1}{6\sqrt{I}} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 - I \right) \rho_3 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \right] + O(n^{-1}).$$

Para esta ordem de aproximação a variável aleatória $T(\theta)$ possui:

$$E(T(\theta)) = 0 + O(n^{-1}),$$

$$\text{Var}(T(\theta)) = \frac{1}{I} \left[I - \frac{1}{3\sqrt{I}} \rho_3 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{36I} \rho_3^2 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \text{Var} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 \right] =$$

$$1 - \frac{1}{3} \rho_3^2 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{36I^2} \rho_3^2 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \left[k_4 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) + 2I^2 \right] = 1 + O(n^{-1}),$$

$$E(T(\theta))^3 = \frac{1}{I^{3/2}} \left[k_3 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{2\sqrt{I}} \rho_3 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \text{Var} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \right]^2 + O(n^{-1}) =$$

$$\frac{1}{I^{3/2}} \left[k_3 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{2\sqrt{I}} \rho_3 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \left[k_4 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) + 2I^2 \right] + O(n^{-1}) \right] =$$

$$\rho_3 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) - \rho_3 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{2} \rho_3 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \rho_4 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) + O(n^{-1}) = 0 + O(n^{-1})$$

Portanto a assimetria de $T(\theta)$ é zero para $O(n^{-1/2})$.

Intervalos de confiança para θ corrigidos para assimetria podem ser encontrados como as soluções das equações em θ

$$T(\theta) = \pm z_{\alpha/2}.$$

Estas equações podem ser simplificadas usando (2.14), tal que $T(\theta)$ é equivalente para esta ordem de aproximação a

$$\frac{1}{\sqrt{I}} \left[\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{1}{6\sqrt{I}} (z_{\alpha/2}^2 - 1) \rho_3 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \right].$$

3.3.1 - O Caso de mais de um Parâmetro Desconhecido

Sejam Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade $f(y, \underline{\theta})$, onde $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$. Regiões de confiança aproximadas para $\underline{\theta}$ podem ser construídas através de testes assintoticamente eficientes. Particularmente, a região de confiança derivada do teste dos escores eficientes consiste dos valores de $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ para os quais

$$U(\underline{\theta})' I(\underline{\theta})^{-1} I(\underline{\theta}) \leq \chi^2_{q, \alpha}$$

onde $U(\underline{\theta}) = \left[\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \quad \dots \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_q} \right]$, $I(\underline{\theta})$ é tal que $I_{ij}(\underline{\theta}) = E \left[\frac{\partial L}{\partial \theta_i} \frac{\partial L}{\partial \theta_j} \right]$ e $\chi^2_{2, 1-\alpha}$ é o percentil superior de ordem $(1-\alpha)$ da distribuição Qui-Quadrado com q graus de liberdade.

Para o caso de dois parâmetros desconhecidos, θ_1 e θ_2 , Bartlett(1955), considerando que assintoticamente $\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1}, \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right)$ possui distribuição Normal com esperança 0 e matriz de variâncias e

covariâncias $I(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{bmatrix}$, propôs construir uma região de

confiança a partir da estatística

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 / I_{11} + \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{I_{12}}{I_{11}} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 / \left(I_{22} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right) = Z_1 + Z_2 \quad (3.23)$$

Assintoticamente (3.23) possui distribuição Qui-quadrado com 2 graus de liberdade, como demonstrado a seguir.

Demonstração:

Pelo Teorema 3.2.3 (Mardia et.al.,1979, pág 63), se $\frac{\partial L}{\partial \underline{\theta}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1}, \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) \sim$

$N_2(0, \Sigma)$, onde $\Sigma = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix}$, então $\frac{\partial L}{\partial \theta_1}$ e $\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{I_{12}}{I_{11}} \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$ são

independentes e possuem respectivamente as seguintes distribuições

$$N(0, I_{11}) \quad \text{e} \quad N(0, I_{22.1}),$$

onde $I_{22.1} = I_{22} - I_{11}^{-1} I_{12}^2$. Então pelo Corolário 2 do Teorema 32 de Rohatgi (1976, pág 224)

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 / I_{11} + \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{I_{12}}{I_{11}} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 / \left(I_{22} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right)$$

possui assintoticamente distribuição de Qui-Quadrado com 2 graus de liberdade. ■

Valores de θ_1 e θ_2 para os quais a expressão acima é menor que $\chi_{2, 1-\alpha/2}^2$ definem uma região de confiança aproximada. Aqui, do mesmo modo que na seção anterior, a correção para assimetria pode ser derivada. Esta correção é derivada obtendo variáveis mais próximas da normalidade do que Z_1 e Z_2 , tal que os cumulantes de terceira ordem sejam zero para ordem de aproximação $O(n^{-1/2})$.

Antes de tais correções serem apresentadas, serão considerados alguns resultados sobre as relações entre os momentos conjuntos.

3.3.1.1 - Momentos Conjuntos

O método para obter relações entre os momentos $\frac{\partial L}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}$, etc. é naturalmente estendido ao caso de vários parâmetros desconhecidos. Seja $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_k)$. Como no caso de um parâmetro desconhecido, sob suposição de diferenciação com respeito a θ_i comutando com a integral, pode-se escrever:

$$1 = \int p(\underline{\theta}, \underline{r}) = \int \exp(\ln p(\underline{\theta}, \underline{r})) = \int \exp(\ln p(\underline{\theta}, (r_1, r_2, \dots, r_k))) =$$

$$\int \exp \left[\ln p(\underline{\theta}) + \sum r_i \frac{\partial L}{\partial \theta_i} + \frac{1}{2!} \sum \sum r_i r_j \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \dots \right] = \int p(\underline{\theta}) \exp(B)$$

Procedendo de forma análoga ao caso de um único parâmetro, tem-se:

$$E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_i} \right) = 0 \quad E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_i} \frac{\partial L}{\partial \theta_j} \right) = E \left(- \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)$$

$$E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_i} \frac{\partial L}{\partial \theta_j} \frac{\partial L}{\partial \theta_l} \right) = E \left(- \frac{\partial^3 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_l} \right) - E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_i} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) - E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_j} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_l} \right) -$$

$$E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_l} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_l} \right) \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} E \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_j \partial \theta_l} \right) = - \frac{\partial}{\partial \theta_i} E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_j} \frac{\partial L}{\partial \theta_l} \right) = - E \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \frac{\partial L}{\partial \theta_l} \right) - E \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_l} \frac{\partial L}{\partial \theta_j} \right) -$$

$$E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_i} \frac{\partial L}{\partial \theta_j} \frac{\partial L}{\partial \theta_l} \right) \tag{3.26}$$

De (3.25) e (3.26) tem-se:

$$E \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_i} \frac{\partial L}{\partial \theta_j} \frac{\partial L}{\partial \theta_l} \right) = 2E \left(\frac{\partial^3 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_l} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta_i} I_{jl} + \frac{\partial}{\partial \theta_j} I_{il} + \frac{\partial}{\partial \theta_l} I_{ij} ,$$

$$\text{onde } I_{ij} = E \left(- \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)$$

As fórmulas envolvendo menos de três parâmetros podem ser obtidas fazendo dois θ_i 's idênticos.

3.3.1.2 - Derivando a Correção para Assimetria

Considere as variáveis transformadas incluindo termos de ordem $n^{-1/2}$ na expansão de Cornish-Fisher

$$T_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{I_{11}}} \left[\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt{I_{11}}} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 - I_{11} \right] \rho_2 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) \right] + O(n^{-1}) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{I_{11}}} \left[\frac{\partial L}{\partial \theta_1} + \lambda_1 \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 - I_{11} \right) \right] + O(n^{-1})$$

$$T_2(\theta) = \frac{1}{\left(I_{22} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right)^{1/2}} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{I_{12}}{I_{11}} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) - \frac{1}{6 \left(I_{22} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right)^{1/2}} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right)^2 - \right. \right.$$

$$\left. 2 \frac{I_{12}}{I_{11}} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} + \frac{I_{12}^2}{I_{11}^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 - I_{22} + \frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right] \rho_3 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{I_{12}}{I_{11}} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) \right] + O(n^{-1}) =$$

$$- \frac{1}{\left(I_{22} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right)^{1/2}} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{I_{12}}{I_{11}} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) - \frac{1}{6 \left(I_{22} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right)^{1/2}} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right)^2 - I_{22} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{I_{12}^2}{I_{11}^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 - I_{11} \right] - 2 \frac{I_{12}}{I_{11}} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) - I_{12} \right] \rho_3 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{I_{12}}{I_{11}} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) \right] + O(n^{-1}) =$$

$$O(n^{-1}) = \frac{1}{\left(I_{22} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right)^{1/2}} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{I_{12}}{I_{11}} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) + \lambda_{20} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 - I_{11} \right] + \lambda_{02} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right)^2 \right.$$

$$\left. - I_{22} \right] + \lambda_{11} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) - I_{12} \right] \right] + O(n^{-1})$$

Deve-se achar os cumulantes de T_1 e T_2 e fazê-los iguais a zero para ordem de aproximação $n^{-1/2}$, de forma a substituir as variáveis aleatórias Z_1 e Z_2 em (a.2a) por outras mais próximas da normalidade. Das relações entre momentos e cumulantes (Kendal e Stuart, pág 86) tem-se:

$$K_{30}(T) = \mu_{30}(T),$$

$$K_{21}(T) = \mu_{21}(T),$$

$$K_{12}(T) = \mu_{12}(T),$$

$$K_{03}(T) = \mu_{30}(T).$$

Nas expressões abaixo os cumulantes k_{ij} referem-se à $\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right)$.

$$K_{30}(T) = E(T_1^3) = \frac{1}{I_{11}^{3/2}} \left[k_{30} + 6\lambda_1 I_{11}^2 \right] + O(n^{-1}).$$

$$K_{21}(T) = E(T_1^2, T_2) = \frac{1}{I_{11} \left[I_{22} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right]^{1/2}} E \left\{ \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 + 2\lambda_1 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^3 - \right. \right.$$

$$\left. 2\lambda_1 I_{11} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} + O(n^{-1}) \right] \left[\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{I_{12}}{I_{11}} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} + \lambda_{20} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 - \lambda_{20} I_{11} + \lambda_{11} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \right.$$

$$\left. \lambda_{11} I_{12} + \lambda_{02} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right)^2 - \lambda_{02} I_{22} \right] \} + O(n^{-1}) = E \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{I_{12}}{I_{11}} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^3 + \right.$$

$$\left. \lambda_{20} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^4 - \lambda_{20} I_{11} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 + \lambda_{11} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^3 \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \lambda_{11} I_{12} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 + \lambda_{02} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right)^2 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 - \right.$$

$$\left. \lambda_{02} I_{22} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 + 2\lambda_1 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - 2\lambda_1 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^4 \frac{I_{12}}{I_{11}} - 2\lambda_1 I_{11} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} + 2\lambda_1 I_{12} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right)^2 + \right.$$

$$\left. O(n^{-1}) \right\} + O(n^{-1}) = \left\{ K_{21} - \frac{I_{12}}{I_{11}} K_{30} + \lambda_{20} (K_{40} + 3I_{11}^2 - I_{11}^2) \right.$$

$$+ \lambda_{11} (K_{31} + 3I_{12}I_{11} - I_{12}I_{11}) + \lambda_{02} (K_{22} + I_{11}I_{22} + 2I_{12}^2 - I_{22}I_{11})$$

$$\left. + 2\lambda_1 (K_{31} + 3I_{12}I_{11} - \frac{I_{12}}{I_{11}} K_{40} - 3I_{11}I_{12} - I_{12}I_{11} - I_{12}I_{11}) + O(n^{-1}) \right\} +$$

$$O(n^{-1}) = \frac{1}{I_{11}^{1/2} \left(I_{22} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right)^{1/2}} \left[\left(K_{21} - \frac{I_{12}}{I_{11}} K_{30} \right) + 2\lambda_{20} I_{11}^2 - \right. \\ \left. 2\lambda_{11} I_{11} I_{12} + 2\lambda_{02} I_{12}^2 \right] + O(n^{-1}).$$

De forma análoga:

$$K_{12}(T) = \frac{1}{I_{11}^{1/2} \left(I_{22} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right)^{1/2}} \left[\left(K_{12} - 2 \frac{I_{12}}{I_{11}} K_{21} + \frac{I_{12}^2}{I_{11}^2} K_{30} \right) + 2\lambda_{11} (I_{11} I_{22} - \right. \\ \left. I_{12}^2) + 4\lambda_{02} I_{12} \left(I_{22} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right) \right] + O(n^{-1})$$

$$K_{02}(T) = \frac{1}{I_{11}^{1/2} \left(I_{22} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right)^{1/2}} \left[\left(K_{02} - 3 \frac{I_{12}}{I_{11}} K_{12} + 3 \frac{I_{12}^2}{I_{11}^2} K_{21} - \frac{I_{12}^3}{I_{11}^3} K_{30} \right) - \right. \\ \left. 6\lambda_{02} \left[I_{22} - \left(\frac{I_{12}^2}{I_{11}} \right)^2 \right] \right] + O(n^{-1})$$

As últimas três equações devem ser resolvidas sucessivamente de baixo para cima. Para o caso em que $I_{12}=0$ tem-se:

$$K_{21} + 2\lambda_{20} I_{11}^2 = 0,$$

$$K_{12} + 2\lambda_{11} I_{11} I_{22} = 0,$$

$$K_{02} + 6\lambda_{02} I_{22}^2 = 0.$$

3.3.3 - O caso do parâmetro de perturbação

Considere o caso de dois parâmetros θ_1 e θ_2 , onde θ_2 é o parâmetro de perturbação. A quantidade envolvendo $\frac{\partial L}{\partial \theta_1}$ e $\frac{\partial L}{\partial \theta_2}$ que proporciona uma alternativa ao estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}_1$ é

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{I_{12}}{I_{22}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \quad (3.27)$$

que possui esperança zero e variância $I_{11.2} = I_{11} - I_{12}^2/I_{22}$.

Assintoticamente (3.27) possui distribuição $N(0, I_{11.2})$, que pode ser vista como a distribuição condicional de $\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{I_{12}}{I_{22}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$ dado $\frac{\partial L}{\partial \theta_2}$ (Rao, 1968, pág. 442).

Em grandes amostras, quando $\frac{\partial L}{\partial \theta_2}$ e (3.27) são variáveis aleatórias Normais não correlacionadas e $\frac{\partial L}{\partial \theta_2}$ é uma estatística suficiente para θ_2 , a variável padronizada

$$T = \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{I_{12}}{I_{22}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) / \sqrt{I_{11.2}} \quad (3.28)$$

é completamente insensível à substituição de θ_2 por seu estimador de máxima verossimilhança. Em amostras menores esta substituição pode afetar a distribuição de T. A princípio este efeito pode ser sucessivamente eliminado.

Substituindo θ_2 por $\hat{\theta}_2$ em T, tem-se

$$T(\theta_1, \hat{\theta}_2) = \frac{\partial L}{\partial \theta_1}(\theta_1, \hat{\theta}_2) / \left[I_{11.2}(\theta_1, \hat{\theta}_2) \right]^{1/2}, \quad (3.29)$$

que pode ser usado para construir intervalos de confiança para θ_2 .

A substituição de θ_2 pelo estimador de máxima verossimilhança de θ_2 dado θ_1 afeta a distribuição da estatística T apenas para ordem de aproximação $O(n^{-1/2})$, onde n indica o tamanho da amostra. O estimador de máxima verossimilhança de θ_2 dado θ_1 pode ser escrito como

$$\hat{\theta}_2 = \theta_2 + \frac{1}{I_{22}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} + O_p(n^{-1}), \quad (3.30)$$

Demonstração de 3.30

Pelo Teorema A.2.4, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_2 - \theta_2) \xrightarrow{D} N(0, nI_{22}^{-1})$. Logo pelo Teorema A.2.3 $\sqrt{n}(\hat{\theta}_2 - \theta_2) = O_p(1)$ e por conseguinte $(\hat{\theta}_2 - \theta_2) =$

$O_p(n^{-1/2})$. Expandindo-se $\frac{\partial L}{\partial \theta_2}(\hat{\theta}_2)$ em série de Taylor (Teorema A.2.1) em

torno do verdadeiro valor do parâmetro θ_2 , tem-se:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \Big|_{\hat{\theta}_2} = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} + O_p(n^{-1})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -(\hat{\theta}_2 - \theta_2) \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} + O_p(n^{-1}) \quad (3.31)$$

Dividindo ambos os lados de (3.31) por $\sqrt{n} I_{22}^{(1)}$, onde

$$I_{22}^{(1)} = E \left[\frac{\partial^2 \log f(x_1, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right], \text{ tem-se}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} I_{22}^{(1)}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = - \sqrt{n} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \left[\frac{n^{-1}}{I_{22}^{(1)}} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{n} I_{22}^{(1)}} O_p(n^{-1})$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{n} I_{22}^{(4)}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = - \sqrt{n} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \left[\frac{n^{-1}}{I_{22}^{(4)}} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} \right] + O_p(n^{-1/2}) + O_p(n^{-1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} I_{22}^{(4)}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \sqrt{n} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \left[- \frac{n^{-1}}{I_{22}^{(4)}} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} \right] + O_p(n^{-3/2}) \quad (3.32)$$

Sob as condições de regularidade do Teorema A.2.4

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} = \sum \frac{\partial^2 \log f(x_i, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2}, \quad \text{onde } \frac{\partial^2 \log f(x_i, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \text{ são variáveis}$$

aleatórias independentes e identicamente distribuídas com

$$E \left[\frac{\partial^2 \log f(x_i, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \right] = - I_{22}^{(4)}$$

Logo pela Lei Forte dos Grandes Números (Leite e Singer, 1990, pág 73)

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} \xrightarrow{q.c.} - I_{22}^{(4)} \rightarrow \frac{1}{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} \xrightarrow{p} - I_{22}^{(4)}$$

$$\xrightarrow{A2.4} \frac{1}{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} = - I_{22}^{(4)} + O_p(1) \quad (3.33)$$

Levando (3.33) em (3.32), tem-se:

$$\frac{1}{\sqrt{n} I_{22}^{(4)}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \sqrt{n} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \left[1 + o_p(1) \right] + O_p(n^{-3/2}) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} I_{22}^{(1)}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = - \sqrt{n} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) + O_p(n^{-1/2})$$

$$\rightarrow (\hat{\theta}_2 - \theta_2) = \frac{1}{I_{22}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} + n^{-1/2} O_p(n^{-1}) = \frac{1}{I_{22}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} + O_p(n^{-1}).$$

$$\text{Logo } (\hat{\theta}_2 - \theta_2) = \frac{1}{I_{22}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} + O_p(n^{-1}). \blacksquare$$

Expandindo $T(\hat{\theta}_2, \theta_1)$ em série de Taylor em torno de θ_2 , tem-se:

$$T_0 = T(\hat{\theta}_2, \theta_1) = T + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + O_p(n^{-1}) \quad (3.34)$$

Levando (3.30) em (3.34), tem-se

$$T + \frac{1}{I_{22}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + O_p(n^{-1}), \quad (3.35)$$

que segundo Bartlett(1955) possui vício de ordem $O(n^{-1/2})$. Como T_0 é viciado para ordem $O(n^{-1/2})$, uma alternativa é considerar um termo a mais na expansão de T_0 em torno de θ_2

$$T_0 = T + (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{1}{2} (\hat{\theta}_2 - \theta_2)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \theta_2^2} + O_p(n^{-3/2}) \quad (3.36)$$

Levando (3.30) em (3.36) tem-se:

$$\begin{aligned} T_0 &= T + \left[\frac{\partial L}{\partial \theta_2} / I_{22} + O_p(n^{-1}) \right] \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right)^2 / I_{22}^2 + 2 \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} / \right. \right. \\ & \left. \left. I_{22} \right) O_p(n^{-1}) + O_p(n^{-2}) \right] \frac{\partial^2 T}{\partial \theta_2^2} + O_p(n^{-3/2}) = \\ & T + \frac{1}{I_{22}} \left[\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \frac{\partial T}{\partial \theta_2} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{I_{22}^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta_2^2} \right) \right] + O_p(n^{-3/2}) \quad (3.37) \end{aligned}$$

que é equivalente, segundo Bartlett(1955), a

$$\begin{aligned}
 T &+ \frac{1}{I_{22}} \left[\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \frac{\partial T}{\partial \theta_2} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{I_{22}^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right)^2 E \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta_2^2} \right) \right] + Op(n^{-1}) \quad (3.38), \\
 &= T + \frac{1}{I_{22}} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \left[a \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} + b \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} + \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \frac{\partial a}{\partial \theta_2} + \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \frac{\partial b}{\partial \theta_2} \right] + \frac{1}{2I_{22}^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right)^2 \left[\right. \\
 &a E \left(\frac{\partial^3 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2^2} \right) + b E \left(\frac{\partial^3 L}{\partial \theta_2^3} \right) - 2I_{12} \frac{\partial a}{\partial \theta_2} - 2I_{22} \frac{\partial b}{\partial \theta_2} \left. \right] + Op(n^{-1}),
 \end{aligned}$$

onde $a = \frac{1}{\sqrt{I_{12}}}$ e $b = \frac{I_{12}}{I_{22}\sqrt{I_{12}}}$.

e fazendo uso de relações tais como

$$E \left[\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] = -E \left[\frac{\partial^3 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2^2} \right] - \frac{\partial I_{12}}{\partial \theta_2}, \text{ tem-se:}$$

$$E(T_0) = - \frac{a}{2I_{22}} \left[E \left(\frac{\partial^3 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2^2} \right) + 2 \frac{\partial I_{12}}{\partial \theta_2} \right] - \frac{b}{2I_{22}} \left[E \left(\frac{\partial^3 L}{\partial \theta_2^3} \right) + 2 \frac{\partial I_{22}}{\partial \theta_2} \right] +$$

$O(n^{-1})$

(3.39)

Seja $T_0^* = T_0 - E(T_0)$. Logo $E(T_0^*) = O(n^{-1})$, o que implica que T_0^* é não viciado para ordem de aproximação $O(n^{-1/2})$. Então pode-se mostrar que a variável T_0^* possui segundo e terceiro momentos iguais àqueles de T para $O(n^{-1/2})$. Uma nova variável corrigida pela assimetria é dada por

$$T_0^* - \frac{1}{6} (T_0^2 - 1) \rho_3(T) + O(n^{-1})$$

ou pela expressão equivalente para esta ordem de aproximação

$$T_0^* - \frac{1}{6} (z^2 - 1) \rho_3(T) + O(n^{-1})$$

As generalizações de (3.38) e (3.39) para o caso de vários parâmetros de perturbação são

$$T_0 = T + \sum I^{jk} \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \left\{ A \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_k} + B_j \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_j \partial \theta_k} + \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \frac{\partial A}{\partial \theta_k} + \frac{\partial L}{\partial \theta_j} \frac{\partial B_j}{\partial \theta_k} \right\} + \frac{1}{2} I^{ik} \frac{\partial L}{\partial \theta_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_g} I^{gh} \left[A E \left\{ \frac{\partial^3 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_k \partial \theta_h} \right\} + B_j E \left\{ \frac{\partial^3 L}{\partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_h} \right\} - 2 I_{ik} \frac{\partial A}{\partial \theta_k} - 2 I_{jk} \frac{\partial B_j}{\partial \theta_h} \right] \quad (3.40)$$

onde $T = A \frac{\partial L}{\partial \theta_1} + B_j \frac{\partial L}{\partial \theta_j}$

e $E(T_0) = - \frac{1}{2} A \left[\sum E \left\{ \frac{\partial^3 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_k \partial \theta_h} \right\} I^{kh} + 2 \sum I^{ik} \frac{\partial I_{ik}}{\partial \theta_i} \right] - \frac{1}{2} \sum$

$$B_j \left[E \left\{ \frac{\partial^3 L}{\partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_h} \right\} I^{kh} + 2 I^{ik} \frac{\partial I_{jk}}{\partial \theta_i} \right] \quad (3.41)$$

onde I^{ij} é a inversa de I_{ij} e onde \sum indica soma em todos os índices.

CAPÍTULO 4
RESULTADOS DE GART

4.1 - Introdução

Gart(1985) e Gart e Nam(1988), utilizando a Teoria dos Escores Eficientes, derivaram os intervalos de confiança de Koopman(1984) e Miettinen e Nurminen(1985) para o risco relativo e corrigiram-nos para assimetria utilizando-se dos resultados de Bartlett apresentados no capítulo anterior. Neste capítulo é apresentada uma breve revisão dos resultados de Gart.

4.2 - Testes de Hipóteses

Do capítulo 2 têm-se que a verossimilhança para o k-ésimo estrato é

$$\mathcal{L}_k(\phi, p_{1k}) = \binom{n_{1k}}{x_{1k}} \binom{n_{2k}}{x_{2k}} \phi^{x_{2k}} p_{1k}^{x_{2k}+x_{1k}} (1-p_{1k})^{n_{1k}-x_{1k}} (1-\phi p_{1k})^{n_{2k}-x_{2k}}$$

e que a verossimilhança total é

$$\mathcal{L}(\phi, p_{1k}) = \prod_{k=1}^k \mathcal{L}_k(\phi, p_{1k})$$

onde p_{1k} , $k=1, \dots, k$, são os parâmetros de perturbação.

Para testar as hipóteses

$$H_0: \phi = \phi_0 \times H_1: \phi \neq \phi_0,$$

onde ϕ_0 é um valor conhecido, uma das três estatísticas assintóticas clássicas mencionadas no capítulo 3, seção 3.1, podem ser construídas. Porém, como observado, o teste do escore de Rao apresenta vantagens no

que diz respeito à derivação da correção para assimetria. Além disso, como observado no capítulo 2, seção 2.2.1.3, resultados de simulação de Montecarlo de Rudas(1984) indicam que o teste do Qui-Quadrado de Pearson, exatamente o teste do escore de Rao para o caso de um único estrato, apresenta melhor performance para tamanhos de amostras pequenos.

A estatística de Rao para testar a hipótese acima é

$$Q_r = U_{\phi}(\phi_0, p_{1\tilde{k}}) I(\phi_0; p_{1\tilde{k}})^{-1} U_{\phi}(\phi_0, p_{1\tilde{k}}).$$

As derivadas parciais de primeira ordem para os $(k+1)$ parâmetros são

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = U_{\phi}(\phi, p_{1k}) = \sum \frac{(x_{2k} - n_{2k}\phi p_{1k})}{\phi(1-\phi p_{1k})},$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_{1k}} = U_{p_{1k}}(\phi, p_{1k}) = \frac{(x_{2k} - n_{2k}\phi p_{1k})}{p_{1k}(1-\phi p_{1k})} + \frac{(x_{1k} - n_{1k}p_{1k})}{p_{1k}(1-p_{1k})}.$$

A matriz de informação de Fisher

$$I = \begin{bmatrix} I_{\phi\phi} & I_{\phi p_1} \\ I_{p_1\phi} & I_{p_1 p_1} \end{bmatrix}$$

é tal que:

$$I_{\phi\phi} = \sum \frac{n_{2k} p_{1k}}{\phi(1-\phi p_{1k})},$$

$$I_{\phi p_1} = I_{p_1\phi} = \left[I_{\phi p_{11}}, \dots, I_{\phi p_{1k}} \right], \text{ onde } I_{\phi p_{1k}} = \frac{n_{2k}}{1-\phi p_{1k}},$$

$$I_{p_1 p_1} = \begin{bmatrix} I_{p_{11} p_{11}} & 0 \\ \sim & \sim \\ 0 & I_{p_{1k} p_{1k}} \\ \sim & \sim \end{bmatrix}, \text{ onde } I_{p_{1k} p_{1k}} = \frac{n_{2k}\phi}{p_{1k}(1-\phi p_{1k})} + \frac{n_{1k}}{p_{1k}(1-p_{1k})}.$$

A variância assintótica estimada de $U_{\phi}(\phi_0, \tilde{p}_{1k})$ é

$$I(\phi_0; \tilde{p}_{1k}) = I_{\phi\phi}(\phi, \tilde{p}_{1k}) - I_{\phi p_1}(\phi, \tilde{p}_{1k}) I_{p_1 p_1}(\phi_0, \tilde{p}_{1k})^{-1} I_{p_1 \phi}(\phi_0, \tilde{p}_{1k}) =$$

$$I_{\phi\phi}(\phi_0, \tilde{p}_{1k}) - \sum \left\{ \frac{(I_{\phi p_{1k}}(\phi_0, \tilde{p}_{1k}))^2}{I_{p_{1k} p_{1k}}(\phi_0, \tilde{p}_{1k})} \right\} = \sum \frac{v_k(\phi_0, \tilde{p}_{1k})}{\phi^2}$$

$$\text{onde } v_k(\phi_0, \tilde{p}_{1k}) = \frac{n_{1k} n_{2k} \phi \tilde{p}_{1k}}{n_{2k} \phi (1 - \tilde{p}_{1k}) + n_{1k} (1 - \phi \tilde{p}_{1k})}$$

Logo, a estatística $Qr(\phi_0, \tilde{p}_{1k}) = \frac{\phi^2 (U_{\phi}(\phi_0, \tilde{p}_{1k}))^2}{\sum v_k(\phi_0, \tilde{p}_{1k})}$, que possui

assintoticamente distribuição Qui-Quadrado com 1 grau de liberdade, e onde os \tilde{p}_{1k} 's são os estimadores de máxima verossimilhança para dado valor de ϕ . Estes estimadores são encontrados como soluções apropriadas das equações

$$U_{p_{1k}}(\phi, \tilde{p}_{1k}) = 0, \quad k=1, \dots, k,$$

ou seja, de k equações quadráticas da forma

$$a_k \tilde{p}_{1k}^2 + b_k \tilde{p}_{1k} + c_k = 0,$$

$$\text{onde } a_k = (n_{2k} + n_{1k})\phi,$$

$$b_k = -((n_{1k} + n_{2k})\phi + x_{2k} + n_{1k}),$$

$$c_k = x_{2k} + x_{1k},$$

$$\text{e cuja solução apropriada é } \tilde{p}_{1k} = \frac{-b_k - (b_k^2 - 4a_k c_k)^{1/2}}{2a_k}.$$

Como a correção para assimetria é derivada para uma variável Normal, considere a estatística assintoticamente Normal,

equivalente a $Qr(\phi_0, \tilde{p}_{1k})$,

$$Z(\phi_0, \tilde{p}_{1k}) = \frac{\phi U_{\phi}(\phi, \tilde{p}_{1k})}{\left[\sum v_k(\phi, \tilde{p}_{1k}) \right]^{1/2}}$$

Em um grande número de aplicações as hipóteses de interesse são

$$H_0: \phi = 1 \quad \text{vs} \quad H_1: \phi \neq 1.$$

Para $\phi=1$, $\tilde{p}_{1k} = \tilde{p}_{2k} = \frac{x_{2k} + x_{1k}}{n_{2k} + n_{1k}} = \tilde{p}_k$ e a estatística do teste apropriada é

$$z(1) = \sum \left\{ \frac{(x_{2k} - n_{2k}\tilde{p}_k)}{(1-\tilde{p}_k)} \right\} / \sum \left\{ \frac{n_{2k} n_{1k} \tilde{p}_k}{(n_{2k} + n_{1k})(1-\tilde{p}_k)} \right\}^{1/2}.$$

Para $k=1$, $Z(1)^2$ é exatamente a estatística do Qui-Quadrado de Pearson para uma tabela de contingência 2×2 .

Em estudos de coorte, testar $\phi=1$ equivale a testar existência de associação entre exposição e doença. Muitas vezes, mais interessante do que realizar um teste de hipóteses é construir um intervalo de confiança. Por exemplo, em estudos de coortes, mais interessante que testar a existência de associação é quantificar tal associação. Intervalos de confiança se fazem então muito preciosos.

4.3 - Intervalos de Confiança

O estimador de máxima verossimilhança de ϕ , $\hat{\phi}$, é obtido como solução de

$$U_{\phi}(\phi, \tilde{p}_{1k}) = \sum \frac{(x_{2k} - n_{2k}\tilde{p}_{2k})}{\phi \tilde{q}_{2k}} = 0 \quad (4.1)$$

Observe que U_{ϕ} não é definida para $\tilde{p}_{2k} = \phi$ e $\tilde{p}_{1k} = 1$. Neste caso, o estimador de máxima verossimilhança pode ser obtido maximizando a

verossimilhança $\mathcal{L}(\phi, p_{1k})$, onde a reparametrização usada é $p_{1k} = \phi/p_{2k}$, ou invertendo a ordem dos subscritos 0 e 1 em (4.1).

Para $k > 1$, a obtenção da solução $\hat{\phi}$ requer um método iterativo.

Um intervalo aproximado de coeficiente de confiança $1-\alpha$ para ϕ é construído determinando ϕ_i e ϕ_s , os limites inferior e superior respectivamente, como soluções das equações

$$Z(\phi_i) = z_{\alpha/2} \quad \text{e} \quad Z(\phi_s) = z_{1-\alpha/2},$$

onde $z_{\alpha/2}$ e $z_{1-\alpha/2}$ são os percentis de ordem $\alpha/2$ e $1-\alpha/2$ da distribuição Normal Padrão. A obtenção de tais soluções requer um método iterativo. Para achar tais soluções, Gart sugeriu o método da secante (Ruggiero & Lopes, 1988, pág.65-68).

Na determinação destes limites de confiança, alguns casos especiais devem ser considerados:

- 1) todos os x_{2k} 's são iguais a zero e pelo menos um x_{1k} é diferente de zero. Neste caso, o estimador de máxima verossimilhança de ϕ é igual a zero e apenas o limite superior pode ser calculado;
- 2) todos os x_{1k} 's são iguais a zero e pelo menos um x_{2k} é diferente de zero. Neste caso o estimador de máxima verossimilhança é indeterminado, e apenas um limite inferior pode ser calculado;
- 3) todos os x_{2k} 's e todos os x_{1k} 's são iguais a zero. Neste caso não é possível determinar um intervalo de confiança;
- 4) $x_{2k} = n_{2k}$ e $x_{1k} = n_{1k}$, $k=1, \dots, k$. Neste caso $\hat{\phi} = 1$. Conseqüentemente, o limite inferior é menor que 1 e o limite superior é maior que 1. Se $\phi \leq 1$, $\tilde{p}_{2k} = \phi$ e $\tilde{p}_{1k} = 1$, e se $\phi \geq 1$, $\tilde{p}_{2k} = 1$ e $\tilde{p}_{1k} = 1/\phi$. Para $\hat{p}_{2k} = 1$, $U_{\phi}(\phi, \tilde{p}_{1k})$ é indefinida. Então o limite superior deve

ser calculado a partir de $Z(\phi, p_{zk}) = \frac{U_{\phi}(\phi, p_{zk})}{\left[\sum_k v(\phi, p_{zk}) \right]^{1/2}}$,

onde $U_{\phi}(\phi, p_{ik}) = \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\phi, p_{ik})}{\partial \phi} = \frac{\partial L(\phi, p_{ik})}{\partial \phi}$.

Logo os limites inferior e superior são dados respectivamente por

$$\hat{\phi}_i = \frac{n_2}{n_2 + \frac{z^2}{\alpha/2}} \quad e \quad \hat{\phi}_s = \frac{n_1 + \frac{z^2}{\alpha/2}}{n_1},$$

onde $n_1 = \sum_{k=1}^K n_{1k}$ e $n_2 = \sum_{k=1}^K n_{2k}$.

5) Pelo menos um x_{zk} igual a n_{zk} e pelo menos um x_{zk} igual a n_{zk} . Neste caso, não é possível determinar os limites de confiança, pois tem-se um $p_{zk}=1$ e um $p_{ik}=1$, de modo que ambas as estatísticas $Z(\phi, p_{ik})$ e $Z(\phi, p_{zk})$ são indefinidas. Porém, como os intervalos de confiança são construídos sob a suposição de que o risco relativo é constante através dos estratos, o fato do cálculo dos limites de confiança não ser possível neste caso, não chega a ser uma desvantagem.

É interessante observar que intervalos obtidos da forma acima são invariantes e consistentes com o Teste de $\phi=1$, $Z(1)$. E também que para $k=1$, os intervalos acima são exatamente aqueles de Koopman.

Os intervalos e testes apresentados acima foram derivados sob a suposição de homogeneidade de ϕ em todos os estratos. Para verificar a suposição de homogeneidade, um teste de homogeneidade pode ser construído utilizando a generalização proposta por Tarone(1988) para o Teste de homogeneidade de Matner . quando parâmetros de perturbação são presentes. Tal teste utiliza a Teoria

dos escores eficientes. A estatística do teste para testar

$H_0: \phi_k = \phi, k=1, \dots, k$ x $H_1 =$ Pelo menos um $\phi \neq \phi$

é $X^2 = \sum Z_k^2(\hat{\phi})$, onde $Z_k = \frac{\hat{\phi} U_{\phi k}(\hat{\phi}, \tilde{p}_{1k})}{[v_k(\hat{\phi}, \tilde{p}_{1k})]^{1/2}}$, que assintoticamente

possui distribuição Qui-Quadrado com $k-1$ graus de liberdade.

4.4 - A Correção para Assimetria

4.4.1 - O Caso de um Estrato

Considere a estatística assintoticamente Normal

$$Z(\phi) = \frac{x_{21} - n_{21}\phi\tilde{p}_{11}}{(1-\phi\tilde{p}_{11})[v(\phi, \tilde{p}_{11})]^{1/2}}$$

Deseja-se obter uma nova estatística corrigida para assimetria. De s.s.8, tem-se que:

$$E(z(\phi, \tilde{p}_{11})) = \frac{-a}{2 I_{p_{11}p_{11}}} \left[E \left\{ \frac{\partial^3 L_1}{\partial \phi \partial p_{11}^2} \right\} + 2 \frac{\partial I_{\phi p_{11}}}{\partial p_{11}} \right] -$$

$$\frac{b_1}{2 I_{p_{11}p_{11}}} \left[E \left\{ \frac{\partial^3 L_1}{\partial p_{11}^3} \right\} + 2 \frac{\partial I_{p_{11}p_{11}}}{\partial p_{11}} \right] + O(n_{11}^{-1}, n_{21}^{-1}),$$

onde $a = 1 / [I(\phi; p_{11})]^{1/2}$ e $b_1 = - I_{\phi p_{11}} / [I_{p_{11}p_{11}} (I(\phi, p_{11}))^{1/2}]$.

$$\text{Como } E \left\{ \frac{\partial^3 L_1}{\partial \phi \partial p_{11}^2} \right\} = \frac{-2n_{11}\phi}{(1-\phi p_{11})^2} = -2 \frac{\partial I_{\phi p_{11}}}{\partial p_{11}} \text{ e}$$

$$E \left\{ \frac{\partial^3 L_1}{\partial p_{11}^3} \right\} = \frac{2n_{11}(1-2p_{11})}{(p_{11}q_{11})^2} + \frac{2n_{21}\phi(1-2\phi p_{11})}{p_{11}(1-\phi p_{11})^2} = -2 \frac{\partial I_{p_{11}p_{11}}}{\partial p_{11}},$$

então $E(z(\phi, \tilde{p}_{11})) = O(n_{11}^{-1}, n_{21}^{-1})$, o que implica que para ordem $O(n_{11}^{-1/2}, n_{21}^{-1/2})$ o vício é zero. Como $Z(\phi, \tilde{p}_{11})$ é não viciado, para esta ordem de aproximação os seus segundo e terceiro momentos são iguais àqueles de

$$Z(\phi, p_{11}) = \left[U_{\phi}(\phi, p_{11}) - \frac{I_{\phi p_{11}}(\phi, p_{11}) U_{p_{11} p_{11}}(\phi, p_{11})}{I_{p_{11} p_{11}}(\phi, p_{11})} \right] / I(\phi; p_{11})^{1/2},$$

$$= v_1(\phi, p_{11})^{1/2} \left[\frac{(x_{21} - n_{21} p_{21})}{n_{21} p_{21}} - \frac{(x_{11} - n_{11} p_{11})}{n_{11} p_{11}} \right]$$

tal que

$$\text{Var}(z(\phi, \tilde{p}_{11})) = \text{Var}(z(\phi, p_{11})) = 1$$

$$\text{e } E(z(\phi, \tilde{p}_{11}))^3 = E((z(\phi, \tilde{p}_{11})))^3 = (v_1(\phi, p_{11}))^{3/2} \left[\frac{E(x_{21} - n_{21} p_{21})^3}{(n_{21} p_{21})^3} - \right.$$

$$\left. \frac{E(x_{11} - n_{11} p_{11})^3}{(n_{11} p_{11})^3} \right] = (v_1(\phi, p_{11}))^{3/2} \left[\frac{q_{21}(q_{21} - p_{21})}{(n_{21} p_{21})^2} - \frac{q_{11}(q_{11} - p_{11})}{(n_{11} p_{11})^2} \right] =$$

$$\rho_3(Z(\phi, p_{11})).$$

O intervalo corrigido para assimetria é baseado na estatística corrigida

$$Z_{\phi}(\phi, \tilde{p}_{11}) = Z(\phi, \tilde{p}_{11}) - \frac{\tilde{\rho}_3(Z(\phi, p_{11}))(z_{\alpha/2}^2 - 1)}{6},$$

onde $\tilde{\rho}_3(Z(\phi, p_{11}))$ é $\rho_3(Z(\phi, p_{11}))$ com p_{11} e p_{21} substituídos pelos estimadores \tilde{p}_{11} e \tilde{p}_{21} .

Os limites corrigidos para assimetria são obtidos como soluções das equações

$$Z_{\alpha}(\phi) = z_{\alpha/2} \quad \text{e} \quad Z_{\alpha}(\phi_0) = z_{1-\alpha/2}$$

4.3.2 - O Caso Estratificado

No caso estratificado os limites não corrigidos são baseados na estatística assintoticamente Normal

$$Z_{\alpha}(\phi) = \frac{\phi U_{\phi}(\phi, \tilde{p}_{1k})}{(\sum v_k(\phi, \tilde{p}_{1k}))^{1/2}} = \frac{\sum(x_{2k} - n_{2k} \tilde{p}_{2k}) / q_{2k}}{(\sum v_k(\phi, p_{1k}))^{1/2}}$$

Como os k estratos são independentes, temos que (3.99) reduz a

$$E(T_{\alpha}) \cong -\frac{1}{2} A \left[\sum \left\{ E \left[\frac{\partial^3 L}{\partial \phi \partial p_{1k}^2} \right] I^{p_{1k} p_{1k}} \right\} + 2 \sum I^{p_{1k} p_{1k}} \frac{\partial I^{p_{1k} p_{1k}}}{\partial p_{1k}} \right] -$$

$$- \sum B_k \left[E \left[\frac{\partial^3 L}{\partial p_{1k}^3} \right] I^{p_{1k} p_{1k}} + 2 I^{p_{1k} p_{1k}} \frac{\partial I^{p_{1k} p_{1k}}}{\partial p_{1k}} \right]$$

Dos resultados da seção 4.3.1, tem-se que $Z(\phi, \tilde{p}_{1k})$ possui vício zero para ordem de aproximação $O(n_{ij}^{-1/2})$, $i=0,1$ e $j=0, \dots, k$. Como para o caso de um único estrato, a assimetria de $Z(\phi, \tilde{p}_{1k})$ é a mesma de $Z(\phi, p_{1k})$ para esta ordem de aproximação.

Logo $E(z_{\alpha}(\phi, p_{1k}))^3 =$

$$E \left[U_{\phi}(\phi, p_{1k}) - \sum \left[\frac{I_{p_{1k}}(\phi, p_{1k}) U_{p_{1k}}(\phi, p_{1k})}{I_{p_{1k} p_{1k}}(\phi, p_{1k})} \right] \right]^3 / (I(\phi, p_{1k}))^{3/2}$$

$$= \frac{\sum \left[\frac{q_{2k}(q_{2k} - p_{2k})}{(n_{2k} p_{2k})^2} - \frac{q_{1k}(q_{1k} - p_{1k})}{(n_{1k} p_{1k})^2} \right] [v_k(\phi, p_{1k})]^3}{\left[\sum v_k(\phi, p_{1k}) \right]^{3/2}}$$

Os limites corrigidos para assimetria são obtidos como as raízes apropriadas das equações

$$Z.s(\phi) = Z(\phi) - \frac{\tilde{\rho}_g(Z(\phi))(\xi_{\alpha/2} - 1)}{\delta} = \pm \xi_{\alpha/2}$$

onde $\tilde{\rho}_g$ é ρ_g com p_{1k} e p_{2k} substituídos por \tilde{p}_{1k} e \tilde{p}_{2k} .

Aqui, os casos particulares também devem ser considerados. Nos casos 1,2,3 e 5 deve-se proceder de forma equivalente ao caso não corrigido para assimetria. No caso 4, os limites de confiança corrigidos devem ser obtidos como soluções das equações

$$Z.s(\phi_i, \tilde{p}_{1k}) = z_{\alpha/2} \quad \text{e} \quad Z.s(\phi_s, \tilde{p}_{2k}) = z_{1-\alpha/2}$$

Como observado anteriormente, Gart avaliou o método do escore quanto aos coeficientes de confiança e distribuição das probabilidades nas caudas para o caso de um único estrato. No capítulo seguinte serão apresentadas avaliações numéricas para o caso estratificado e comparações com o método baseado na distribuição Normal assintótica para o logaritmo do estimador de máxima verossimilhança, ou seja com os intervalos construídos a partir do teste de Wald para

$$H_0: \ln(\phi) = \ln(\phi_0) \quad \text{x} \quad H_1: \ln(\phi) \neq \ln(\phi_0),$$

onde ϕ_0 é um valor conhecido de ϕ .

CAPÍTULO 5

AVALIAÇÕES NUMÉRICAS DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA O CASO ESTRATIFICADO

5.1 Introdução

Gart e Nam (1988) compararam ,para o caso de um único estrato, os Métodos de Noether, de Fieller, do logarítimo e o método do escore através da avaliação exata dos coeficientes de confiança e das probabilidades das caudas dos intervalos de confiança para os $(n_0+1) \times (n_1+1)$ possíveis resultados. Estas probabilidades foram calculadas para uma variedade de valores de n_1, n_2, p_1, p_2 , e $\alpha=0.05$ e 0.10 . Destes métodos, o método do logarítimo e do escore foram os que apresentaram melhores resultados, produzindo coeficientes de confiança mais próximos do valor nominal. Porém, o método do escore apresentou-se razoavelmente melhor. Quanto à distribuição das probabilidades nas caudas, o método do logarítimo distribui as probabilidades nas caudas de forma muito assimétrica, com maior concentração na cauda superior quando ϕ é maior que 1. Portanto, o intervalo é deslocado para a esquerda, até mesmo quando o coeficiente de confiança é muito próximo do valor nominal. Quando ϕ é menor que 1, o intervalo é deslocado para a direita. Este resultado segue da propriedade de invariância. O método do escore distribui as probabilidades nas caudas de forma mais simétrica, mas para valores de ϕ muito afastados de 1, pode distribuir tais probabilidades de forma totalmente assimétrica.

Comparação do método do escore corrigido para assimetria com os métodos de Bedrick(1987) e Bailey(1987) indicam que os dois primeiros produzem resultados similares quanto aos coeficientes de confiança e distribuição das probabilidades nas caudas, e são superiores ao intervalo de Bailey. O método do escore corrigido produz

probabilidades nas caudas mais próximas do valor nominal, mas os coeficientes de confiança podem ser maiores do que no método não corrigido, principalmente se o valor mínimo esperado, mínimo de $(n_1p_1, n_1q_1, n_2p_2, n_2q_2)$, é menor que 1. Como observado por Gart e Nam (1988), o método do logarítimo pode ser similarmente corrigido para assimetria, mas primeiro deve-se corrigir os limites para dependência da variância em ϕ . Gart e Thomas(1982) exploraram esta correção para o caso da transformação logito para a "odds ratio". Porém, eles concluíram que o método do logito corrigido é inferior àqueles baseados diretamente nas variáveis binomiais.

Para o caso estratificado, Gart e Nam(1988) não realizaram nenhuma comparação dos intervalos de confiança. Neste capítulo são apresentados resultados de avaliações numéricas de alguns métodos para o caso estratificado , a saber:

- I - O método do logarítimo;
- II - O método do escore;
- III - O método do escore corrigido para assimetria.

O método do logarítimo consiste em construir intervalos de confiança baseados na estatística de Wald para testar

$$H_0 = \ln(\phi) = \ln(\phi_0) \quad \text{x} \quad H_1: \ln(\phi) \neq \ln(\phi_0),$$

onde ϕ_0 é um valor conhecido de ϕ , dada por:

$$W = \frac{(\ln(\hat{\phi}) - \ln(\phi))^2}{\frac{1}{\hat{\phi}^2} \left[I(\hat{\phi}; p_1) \right]^{-1}}.$$

5.2 - Metodologia

Como a avaliação exata dos coeficientes de confiança e das probabilidades das caudas no caso estratificado demandaria muito tempo computacional, em consequência do grande número de resultados possíveis, decidiu-se por avaliar os intervalos de confiança através de experimentos de Montecarlo, cada experimento consistindo de 1000 amostras.

Para cada tabela de contingência 2x2, duas seqüências de variáveis aleatórias binomiais independentes foram geradas, de modo que para cada experimento, consistindo de k estratos, 2xk seqüências foram geradas. Para cada seqüência sementes diferentes foram adotadas de forma a garantir a independência das seqüências. As variáveis binomiais foram geradas através da subrotina RANBIN do SAS. O método de geração utilizado nesta subrotina é o método da inversão numérica(Dagpunar 1988, pág 124-126). Os programas foram desenvolvidos utilizando o módulo IML do SAS(System Analysis Statistics)(SAS Institute Inc.,1988), e foram executados em um IBM 3090. O programa utilizado nas simulações é apresentado no apêndice 4.

Os seguintes critérios foram usados para comparar os intervalos:

- comparação dos coeficientes de confiança estimados;
- comparação das estimativas das probabilidades das caudas;
- comparação dos comprimentos médios dos intervalos.

Para cada uma das estimativas, intervalos de coeficiente de confiança de 95% foram construídos. Seja M = número de amostras do experimento de Montecarlo e

$$\hat{c} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M Y(m),$$

o coeficiente de confiança estimado, onde

$$Y(m) = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi \in [Li(m), Ls(m)] \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e $Li(m)$ e $Ls(m)$ são respectivamente os limites inferior e superior de confiança para a estimativa de ϕ na m -ésima amostra.

Um intervalo de confiança para \hat{c} é dado por

$$\hat{c} \pm z_{\alpha/2} (\text{var}(\hat{c}))^{1/2},$$

onde:

$$\text{var}(\hat{c}) = \frac{1}{M(M-1)} \sum_{m=1}^M (Y(m) - \hat{c})^2.$$

Da mesma forma, intervalos de confiança foram construídos para \hat{c}_i e \hat{c}_s , as probabilidades estimadas das caudas inferior e superior, onde as variáveis indicadoras $Y(m)$ são definidas respectivamente como

$$Y(m) = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi < Li(m) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \text{ e } Y(m) = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi > Ls(m) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Intervalos de confiança também foram construídos para os comprimentos médios dos intervalos. Seja $d(m) = Ls(m) - Li(m)$, o comprimento do intervalo para a m -ésima amostra e

$$\bar{d} = \frac{1}{M} \sum d(m),$$

o comprimento médio do intervalo. Um intervalo de confiança para \bar{d} foi construído da forma

$$\bar{d} \pm z_{\alpha/2} (\text{var}(\bar{d}))^{1/2},$$

onde:

$$\text{var}(\bar{d}) = \frac{1}{M(M-1)} \sum (d(m) - \bar{d})^2.$$

Como observado anteriormente, o estimador de máxima verossimilhança de ϕ é consistente apenas no caso assintótico 1, onde o número de estratos é fixo e os tamanhos de amostras dentro de cada estrato são grandes. O interesse, aqui, está centrado em tamanhos de amostras moderados. Então, considerou-se apropriado avaliar a consistência do estimador de máxima verossimilhança. Para tal, intervalos de confiança foram construídos para o valor esperado de $\hat{\phi}$.

As estimativas de máxima verossimilhança do risco relativo e seus intervalos de confiança pelos métodos II e III foram obtidos através do método da secante. A estimativa de "Mantel Haenzel" foi usada como valor inicial na determinação da estimativa de máxima verossimilhança e os intervalos calculados pelo método do logarítmo como valores iniciais na determinação dos limites pelo método do escore, que por sua vez foram utilizados como valores iniciais na determinação dos limites pelo método do escore corrigido para assimetria.

5.2.1 - Delineamentos dos Experimentos de Montecarlo

Abaixo é apresentada uma breve descrição do delineamento dos experimentos de Montecarlo.

5.2.2.1 - Número de Amostras

Foram consideradas 1000 amostras em cada experimento de Montecarlo.

5.2.2.2 - Número de Estratos

Os números de estratos considerados foram 2, por ser o caso mais simples de estratificação e 5, para se ter uma idéia de como os intervalos se comportam quando o número de estratos cresce.

5.2.2.3 - Os Parâmetros da Distribuição Binomial

Na geração de uma tabela 2×2 , os tamanhos de amostras dos grupos comparados, n_1 e n_0 , e os parâmetros ϕ e p_1 são fixados a priori. Os tamanhos de amostras considerados foram 20, 30 e 50. Para o caso de 2 estratos foram considerados as seguintes situações:

- Estratos de igual tamanho com tamanhos de amostras iguais:
 $n_{11}=n_{12}=n_{21}=n_{22}=20$,
 $n_{11}=n_{11}=n_{21}=n_{22}=30$,
 $n_{11}=n_{12}=n_{21}=n_{22}=50$;
- Estratos de igual tamanho com tamanhos de amostras diferentes:
 $n_{11}=n_{11}=20$ e $n_{21}=n_{22}=30$,
 $n_{11}=n_{11}=20$ e $n_{21}=n_{22}=50$,
 $n_{11}=n_{11}=30$ e $n_{21}=n_{22}=50$;
- Estratos de tamanhos diferentes com tamanhos de amostras iguais:
 $n_{11}=n_{21}=20$ e $n_{12}=n_{22}=30$,
 $n_{11}=n_{21}=20$ e $n_{12}=n_{22}=50$,
 $n_{11}=n_{21}=30$ e $n_{12}=n_{22}=50$;

Para o caso de 5 estratos foram considerados apenas os casos de estratos de igual tamanho com tamanhos de amostras iguais.

Os valores de ϕ considerados foram 0.5, 1, 2, e 4. Estes valores foram considerados porque abrangem grande parte dos casos que podem ocorrer na prática. Os valores de p_2 dependem dos valores de ϕ .

Eles são definidos de modo que $0 < p_1 < 1$ e $0 < p_2 < 1/\phi$. Os valores de p_1 considerados encontram-se relacionados abaixo, segundo o número de estratos e os valores de ϕ . Para $\phi = 1$, nos casos onde os tamanhos de amostras dentro dos estratos são iguais, o método III não foi considerado, pois nestes casos o coeficiente de assimetria $\rho_3(Z(\phi))=0$.

Tabela 1: Valores de p_1 considerados no caso de 2 estratos, segundo valores de ϕ .

$\phi = 0.5$		$\phi = 1$		$\phi = 2$		$\phi = 4$	
p_{11}	p_{12}	p_{11}	p_{12}	p_{11}	p_{12}	p_{11}	p_{12}
0.25	0.50	0.25	0.50	0.125	0.250	0.10	0.15
0.25	0.75	0.25	0.75	0.125	0.375	0.10	0.20
0.50	0.75	0.50	0.75	0.250	0.375	0.15	0.20

Tabela 2: Valores de p_1 considerados no caso de 5 estratos, segundo valores de ϕ

ϕ	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}
0.5	0.20	0.35	0.50	0.65	0.80
1	0.20	0.35	0.50	0.65	0.80
2	0.10	0.175	0.25	0.375	0.40

5.2.2.4 - Nível de Significância

O nível de significância adotado na construção dos intervalos de confiança foi de $\alpha = 0.05$.

5.3 - Resultados

São apresentados a seguir os resultados das simulações realizadas para comparar os métodos de construção de intervalos de confiança para a razão de duas proporções binomiais.

5.3.1 - Comparação das Estimativas dos Coeficientes de Confiança e das Probabilidades das Caudas

Nas tabelas A31,...,A310 , do apêndice 3, são apresentadas as estimativas dos coeficientes de confiança e das probabilidades das caudas e seus respectivos intervalos de confiança para os casos estudados.

Para melhor entendimento das discrepâncias entre os métodos, alguns critérios de comparação foram considerados. Seja o primeiro critério:

1) Proporção de vezes em que os intervalos de confiança para as estimativas dos coeficientes de confiança e das probabilidades das caudas incluíram respectivamente o coeficiente de confiança nominal $(1-\alpha)$ e o valor nominal das probabilidades das caudas $\alpha/2$.

Para avaliação quanto a este critério, no caso de dois estratos, os resultados das tabela A31,..., A39 foram sintetizados na seguinte tabela.

Tabela 3: Proporção de intervalos de confiança de 95% para as estimativas dos coeficientes de confiança(\hat{c}) e das probabilidades das caudas(\hat{c}_i e \hat{c}_s), construídos pelos métodos do logaritmo(I), do escore(II) e do escore corrigido para assimetria(III), que contiveram os valores nominais para os diversos delineamentos no caso de dois estratos.

ϕ	Metodo	\hat{c}_i	\hat{c}	\hat{c}_s
0.5	I	77.78	88.89	14.81
	II	96.90	92.59	88.89
	III	100.00	100.00	96.90
1.0	I	88.89	92.59	85.19
	II	96.90	100.00	100.00
	III	100.00	100.00	100.00(*)
2.0	I	51.85	92.59	77.78
	II	100.00	100.00	92.59
	III	96.90	100.00	96.90
4.0	I	22.22	85.19	66.67
	II	81.48	96.90	88.89
	III	96.90	96.90	92.59

(*) Foram considerados apenas os casos em que os tamanhos de amostras dentro dos estratos são diferentes, pois para tamanhos de amostras iguais a correção para assimetria não se justifica.

No caso de dois estratos, como pode ser observado na tabela acima, o método do logaritmo apresenta-se inferior aos demais. Para $\phi < 1$ ($\phi=1/2$), a proporção de vezes em que os intervalos para a estimativa da probabilidade da cauda superior incluem o valor nominal é muito pequena e muito inferior à proporção de vezes em que os intervalos para as estimativas da cauda inferior incluem o mesmo valor. Para $\phi > 1$ este comportamento se inverte. A proporção de intervalos de confiança que incluem o valor nominal é menor para a cauda inferior, fato este esperado devido ao método do logaritmo satisfazer a propriedade de invariância. Isto ocorre porque o método do logaritmo distribui as probabilidades nas caudas de forma totalmente assimétrica, com maior concentração na cauda superior para valores de ϕ menores que 1, e maior concentração na cauda inferior para valores de ϕ maiores que 1, indicando que para $\phi < 1$ os

intervalos são deslocados para a direita e que para $\phi > 1$, os intervalos são deslocados para a esquerda. (Veja tabelas A31,...,A39). Considere o seguinte exemplo:

Estrato I

		Sucesso		
		Sim	Não	Total
Grupos	1	3	47	50
	2	7	13	20
Total		10	60	70

Estrato II

		Sucesso		
		Sim	Não	Total
Grupos	1	08	42	50
	2	10	10	20
Total		18	52	70

Para o exemplo acima, $\hat{\phi} = 3.78$, e os intervalos de confiança construídos respectivamente pelos métodos I, II e III são:

I - [1.97, 7.25]

II - [1.96, 7.28]

III - [1.98, 7.57]

Observe que o intervalo produzido pelo método do logaritmo é deslocado para a direita em relação ao intervalo produzido pelo método do escore, que por sua vez também é deslocado para a direita em relação ao método do escore corrigido para assimetria.

Quanto ao critério 1, há indícios de superioridade do método corrigido para assimetria no caso de dois estratos. No caso de cinco estratos todos os intervalos de confiança contiveram os valores nominais, não sugerindo superioridade de nenhum dos métodos quanto a este aspecto.

Porém, apenas o critério 1 não é suficiente para definir um método como superior. Espera-se também que o método superior distribua as probabilidades nas caudas de forma simétrica e cujos valores são os mais próximos de $\alpha/2$. Então, foram definidos outros dois critérios:

- 2) distâncias entre as probabilidades estimadas $|\hat{c}_s - \hat{c}_i|$
 3) distâncias entre as probabilidades estimadas e $\alpha/2$
 $|\hat{c}_i - \alpha/2| + |\hat{c}_s - \alpha/2|$.

A distância entre as estimativas das probabilidades das caudas é útil na discriminação do método que distribui estas probabilidades de forma mais simétrica, sendo que quanto menor a distância $|\hat{c}_i - \hat{c}_s|$, melhor é o método neste aspecto. A soma das distâncias $|\hat{c}_i - \alpha/2| + |\hat{c}_s - \alpha/2|$ é útil na discriminação do método que produz estimativas mais próximas do valor nominal.

Calculadas estas distâncias, os três métodos foram ordenados na ordem crescente das mesmas, recebendo menor posto o método com menor distância. No caso de empate em um dos critérios, o método que recebeu menor posto foi aquele com menor posto no outro critério. No caso de empate nos dois critérios o método que recebeu menor posto foi aquele computacionalmente mais simples. Abaixo são apresentadas as classificações dos métodos quanto a estes critérios para os valores de ϕ estudados.

Tabela 4: Classificação dos métodos do logaritmo(I), do escore(II) e do escore corrigido para assimetria(III) quanto às distâncias das estimativas das probabilidades das caudas ao valor nominal e à distância entre as mesmas ,para $\phi = 0.5$, no caso de dois estratos.

Menor distância ao valor nominal

Menor distância entre as estimativas das probabilidades das caudas		I	II	III	Total
	I	0	0	0	0
	II	0	10	1	11
	III	0	1	15	16
	Total	0	11	16	27

O método corrigido para assimetria mostrou-se superior em

15 casos, considerando como superior o método que possui as menores distâncias. Porém em 2 dos 10 casos em que o método do escore foi superior, ele foi equivalente ao método corrigido para assimetria. Logo, em 17 casos, o método corrigido para assimetria apresentou-se melhor ou igual aos outros dois.

Para $\phi=1$, quando $n_{0k}=n_{2k}$, a correção para assimetria não se justifica pois $\rho_3(z(\phi))=0$. Como na maioria dos casos estudados $n_{1k}=n_{2k}$, na tabela abaixo considerou-se apenas os métodos I e II.

Tabela 5: Classificação dos métodos do logaritmo(I) e do escore (II), quanto às distâncias das estimativas das probabilidades das caudas ao valor nominal e à distância entre as mesmas, para $\phi=1$, no caso de dois estratos.

Menor distância ao valor nominal

Menor distância entre as estimativas das probabilidades das caudas		I	I	Total
	I	11	1	12
	II	2	13	15
	Total	13	14	27

Nos casos estudados, para $\phi=1$, o método do escore apresentou melhores resultados um número maior de vezes. Pode-se observar nas tabelas A31,...,A39, que para tamanhos de amostras diferentes dentro dos estratos, o método do escore foi sempre melhor, apresentando-se bastante superior.

Tabela 6: Classificação dos métodos do logaritmo(I), do escore (II) e do escore corrigido para assimetria (III), quanto às distâncias entre as estimativas das probabilidades das caudas ao valor nominal e à distância entre as mesmas, para $\phi = 2$, no caso de dois estratos.

Menor distância ao valor nominal

Menor distância entre as estimativas das probabilidades das caudas		I	II	III	Total
	I	1	1	0	2
	II	1	9	0	10
	III	0	1	14	15
	Total	2	11	14	27

Tabela 7: Classificação dos métodos do logaritmo(I), do escore(II) e do escore corrigido para assimetria(III), quanto às distâncias das estimativas das probabilidades das caudas ao valor nominal e à distância entre as mesmas, para $\phi = 4$, no caso de dois estratos.

Menor distância ao valor nominal

Menor distância entre as estimativas das probabilidades das caudas		I	II	III	Total
	I	1	0	0	1
	II	1	7	2	10
	III	0	0	16	16
	Total	2	7	18	27

Nos casos de $\phi=2$ e $\phi=4$, o método corrigido apresentou melhores resultados na maioria das vezes, produzindo intervalos mais simétricos e com probabilidades estimadas mais próximas de $\alpha/2$. Resumindo, no caso de dois estratos, com respeito à distribuição das probabilidades nas caudas, o método do escore, no caso de $\phi=1$, e o método do escore corrigido para assimetria, para valores de $\phi \neq 1$, apresentaram-se superiores ao método do logaritmo na maioria dos casos estudados. Para valores de $\phi \neq 1$, a menos dos casos em que o método do logaritmo

Para valores de $\phi \neq 1$, a menos dos casos em que o método do logaritmo foi superior aos demais, ele foi sempre inferior ao método do escore e ao método do escore corrigido.

Para 5 estratos, nos casos estudados, a correção para assimetria não melhorou os intervalos, produzindo, até mesmo, resultados piores. Os métodos do logaritmo e do escore produziram resultados muito próximos, não indicando superioridade de nenhum deles (Tabela A310).

5.3.2 - Comparação dos Comprimentos Médios dos Intervalos

Um aspecto importante, que deve ser observado ao comparar os métodos, são os comprimentos médios dos intervalos por eles produzidos. Idealmente, o melhor método deve ter o menor comprimento médio esperado. O interesse aqui é, especialmente, observar o que acontece com os comprimentos médios quando a correção para assimetria é efetuada. Abaixo são apresentados os comprimentos médios esperados e a variância dos comprimentos dos intervalos produzidos pelos três métodos.

Tabela 8 - Comprimentos médios esperados dos intervalos de confiança, construídos pelos métodos do logaritmo(I), do escore(II) e do escore corrigido para assimetria(III) , para a razão de proporções binomiais e variâncias dos comprimentos para os diversos delineamentos para $\phi=0.5$, no caso de dois estratos.

tamanhos amostrais	p11	p12	Metodo I		Metodo II		Metodo III	
			\bar{D}	Var(D)	\bar{D}	Var(D)	\bar{D}	Var(D)
n11=n21=20 n12=n22=20	0.25	0.50	0.8409	0.0802	0.8087	0.0828	0.8287	0.0855
	0.25	0.75	0.5985	0.0156	0.5791	0.0189	0.5889	0.0196
	0.50	0.75	0.5308	0.0102	0.5184	0.0121	0.5260	0.0125
n11=n21=30 n12=n22=30	0.25	0.50	0.6683	0.0857	0.6464	0.0868	0.6582	0.0804
	0.25	0.75	0.4819	0.0064	0.4702	0.0073	0.4768	0.0076
	0.50	0.75	0.4265	0.0037	0.4188	0.0042	0.4244	0.0045
n11=n21=50 n12=n22=50	0.25	0.50	0.4923	0.0093	0.4884	0.0096	0.4925	0.0102
	0.25	0.75	0.3666	0.0020	0.3602	0.0022	0.3684	0.0024
	0.50	0.75	0.3261	0.0013	0.3226	0.0014	0.3251	0.0016
n11=n21=20 n12=n22=30	0.25	0.50	0.7019	0.0420	0.6808	0.0435	0.6940	0.0488
	0.25	0.75	0.5006	0.0077	0.4870	0.0088	0.4940	0.0091
	0.50	0.75	0.4513	0.0050	0.4417	0.0057	0.4476	0.0060
n11=n21=20 n12=n22=50	0.25	0.50	0.5450	0.0126	0.5338	0.0130	0.5425	0.0136
	0.25	0.75	0.3878	0.0023	0.3804	0.0025	0.3847	0.0028
	0.50	0.75	0.3674	0.0020	0.3617	0.0022	0.3651	0.0023
n11=n21=30 n12=n22=50	0.25	0.50	0.5304	0.0124	0.5206	0.0127	0.5290	0.0133
	0.25	0.75	0.3817	0.0022	0.3746	0.0025	0.3787	0.0027
	0.50	0.75	0.3509	0.0016	0.3459	0.0018	0.3487	0.0019
n11=n12=20 n21=n22=30	0.25	0.50	0.7872	0.0466	0.7430	0.0483	0.7582	0.0537
	0.25	0.75	0.5706	0.0080	0.5880	0.0094	0.5481	0.0099
	0.50	0.75	0.5067	0.0052	0.4844	0.0059	0.4918	0.0062
n11=n12=20 n21=n22=50	0.25	0.50	0.7285	0.0187	0.6751	0.0197	0.6830	0.0212
	0.25	0.75	0.5514	0.0041	0.5112	0.0047	0.5221	0.0050
	0.50	0.75	0.4895	0.0024	0.4801	0.0027	0.4680	0.0029
n11=n12=30 n21=n22=50	0.25	0.50	0.6185	0.0154	0.5929	0.0158	0.5998	0.0016
	0.25	0.75	0.4568	0.0027	0.4362	0.0030	0.4482	0.0031
	0.50	0.75	0.4058	0.0021	0.3923	0.0022	0.3965	0.0023

Para $\phi=0.5$, o método do escore é o que produz intervalos com menor comprimento médio. Com a correção para assimetria estes comprimentos médios crescem, mas, ainda assim, apresentam-se inferiores àqueles observados para o método do logaritmo. Porém, o método do logaritmo é o que apresenta menores variâncias para os comprimentos médios, apesar de nos três métodos estas variâncias serem muito próximas. Observa-se ainda que, os comprimentos médios diminuem

quando os tamanhos de amostras crescem, são menores quando os tamanhos de amostras dentro dos estratos são iguais e decrescem quando o valor mínimo esperado cresce. Para $\phi=1$, o comportamento é similar, como pode ser observado na tabela abaixo.

Tabela 9: Comprimentos médios esperados dos intervalos de confiança, construídos pelos métodos do logaritmo(I), do escore(II) e do escore corrigido para assimetria(III), para a razão de proporções binomiais e variâncias dos comprimentos para os diversos delineamentos para $\phi = 1$, no caso de dois estratos

tamanhos amostrais	p_{11} p_{12}		Metodo I		Metodo II		Metodo III	
			\bar{D}	Var(D)	\bar{D}	Var(D)	\bar{D}	Var(D)
$n_{11}=n_{21}=20$ $n_{12}=n_{22}=20$	0.125	0.250	1.2502	0.2904	1.2712	0.2972	- x -	
	0.125	0.375	0.7170	0.0889	0.7827	0.0416	- x -	
	0.250	0.375	0.6406	0.0268	0.6928	0.0288	- x -	
$n_{11}=n_{21}=30$ $n_{12}=n_{22}=30$	0.125	0.250	0.9852	0.0717	0.9464	0.0741	- x -	
	0.125	0.375	0.5706	0.0151	0.6991	0.0168	- x -	
	0.250	0.375	0.5176	0.0099	0.5479	0.0105	- x -	
$n_{11}=n_{21}=50$ $n_{12}=n_{22}=50$	0.125	0.250	0.7109	0.0208	0.7168	0.0216	- x -	
	0.125	0.375	0.4869	0.0049	0.4560	0.0051	- x -	
	0.250	0.375	0.3979	0.0030	0.4129	0.0032	- x -	
$n_{11}=n_{21}=20$ $n_{12}=n_{22}=30$	0.125	0.250	1.0077	0.0072	1.0220	0.1016	- x -	
	0.125	0.375	0.5797	0.0185	0.6192	0.0197	- x -	
	0.250	0.375	0.5996	0.0118	0.5758	0.0126	- x -	
$n_{11}=n_{21}=20$ $n_{12}=n_{22}=50$	0.125	0.250	0.7898	0.0826	0.7911	0.0840	- x -	
	0.125	0.375	0.4546	0.0060	0.4762	0.0065	- x -	
	0.250	0.375	0.4290	0.0045	0.4487	0.0047	- x -	
$n_{11}=n_{21}=30$ $n_{12}=n_{22}=50$	0.125	0.250	0.7555	0.0294	0.7621	0.0805	- x -	
	0.125	0.375	0.4448	0.0056	0.4649	0.0059	- x -	
	0.250	0.375	0.4197	0.0044	0.4375	0.0046	- x -	
$n_{11}=n_{12}=20$ $n_{21}=n_{22}=30$	0.125	0.250	1.0592	0.0829	1.0496	0.0871	1.0757	0.0969
	0.125	0.375	0.6864	0.0168	0.6780	0.0176	0.6746	0.0182
	0.250	0.375	0.5719	0.0098	0.6025	0.0107	0.6088	0.0109
$n_{11}=n_{12}=20$ $n_{21}=n_{22}=50$	0.125	0.250	0.9474	0.0820	0.9245	0.0843	0.9408	0.0865
	0.125	0.375	0.5719	0.0060	0.5843	0.0064	0.5898	0.0065
	0.250	0.375	0.5192	0.0042	0.5210	0.0042	0.5244	0.0044
$n_{11}=n_{12}=30$ $n_{21}=n_{22}=50$	0.125	0.250	0.8940	0.0288	0.8194	0.0803	0.8928	0.0819
	0.125	0.375	0.5006	0.0049	0.5190	0.0051	0.5195	0.0051
	0.250	0.375	0.4568	0.0035	0.4698	0.0037	0.4714	0.0038

Tabela 10: Comprimentos médios esperados dos Intervalos de confiança, construídos pelos métodos do logaritmo(I), do escore(II) e do escore corrigidoa para assimetria(III), para a razão de proporções binomiais variâncias dos comprimentos para os diversos delineamentos para $\phi = 2$, no caso de dois estratos.

tamanhos amostrais	p11 p12	Metodo I		Metodo II		Metodo III	
		\bar{D}	Var(D)	\bar{D}	Var(D)	\bar{D}	Var(D)
n11=n21=20 n12=n22=20	0.125 0.250	4.6640	49.0452	4.5292	26.6415	5.8119	249.4922
	0.125 0.375	2.8112	2.3696	2.8958	2.3160	3.1294	3.2629
	0.250 0.375	2.4267	1.5106	2.4876	1.5076	2.6352	1.9715
n11=n21=30 n12=n22=30	0.125 0.250	2.9875	3.1362	2.9842	2.9422	3.2069	4.2606
	0.125 0.375	2.1821	0.8785	2.2262	0.8750	2.3297	1.0670
	0.250 0.375	1.8301	0.4334	1.8628	0.4314	1.9239	0.4978
n11=n21=50 n12=n22=50	0.125 0.250	2.1359	0.6944	2.1391	0.6834	2.2198	0.7978
	0.125 0.375	1.5655	0.2479	1.5877	0.2492	1.6240	0.2782
	0.250 0.375	1.3507	0.1212	1.3689	0.1226	1.3905	0.1315
n11=n21=20 n12=n22=30	0.125 0.250	3.3690	5.6343	3.3550	5.1270	3.6792	8.7054
	0.125 0.375	2.2533	1.6525	2.3036	1.6030	2.4233	2.2272
	0.250 0.375	2.0254	0.7074	2.0708	0.7091	2.1535	0.8434
n11=n21=20 n12=n22=50	0.125 0.250	4.1643	10.8256	4.0391	9.3564	4.5632	18.3315
	0.125 0.375	1.6416	0.2790	1.6740	0.2819	1.7166	0.3170
	0.250 0.375	1.5620	0.2471	1.5890	0.2469	1.6254	0.2748
n11=n21=30 n12=n22=50	0.125 0.250	2.3079	0.9684	2.3110	0.9481	2.4169	1.1317
	0.125 0.375	1.6138	0.2915	1.6439	0.2920	1.6850	0.3322
	0.250 0.375	1.4715	0.1799	1.4960	0.1791	1.5237	0.1958
n11=n12=20 n21=n22=30	0.125 0.250	3.1353	3.8964	3.1091	3.6223	3.3366	5.4338
	0.125 0.375	2.2023	0.8793	2.2484	0.8755	2.3435	1.0652
	0.250 0.375	1.9079	0.4679	1.9442	0.4647	2.0066	0.5348
n11=n12=20 n21=n22=50	0.125 0.250	2.5467	0.9611	2.5132	0.9454	2.6034	1.1007
	0.125 0.375	1.7608	0.2866	1.7866	0.2890	1.8276	0.3211
	0.250 0.375	1.5296	0.1497	1.5520	0.1499	1.5770	0.1631
n11=n12=30 n21=n22=50	0.125 0.250	2.3325	0.8537	2.3233	0.8412	2.4098	0.9784
	0.125 0.375	1.6476	0.2436	1.6744	0.2456	1.7095	0.2730
	0.250 0.375	1.4253	0.1365	1.4449	0.1374	1.4666	0.1493

Para $\phi=2$, os comprimentos médios dos intervalos obtidos pelo método do logaritmo e do escore são muito próximos. Com a correção para assimetria ocorre um aumento nos comprimentos médios dos intervalos, sendo que este aumento diminui com o aumento dos tamanhos das amostras e com o aumento do valor mínimo esperado.

Tabela 11: Comprimentos médios esperados dos Intervalos de confiança, construídos pelos métodos do logarítmo(I), do escore(II) e do escore corrigido par assimetria(III), para a razão de proporções binomiais e variâncias dos comprimentos para os diversos delineamentos para $\phi = 4$, no caso de dois estratos.

tamanhos amostrais	p01 p02	Metodo I		Metodo II		Metodo III	
		\bar{D}	Var(D)	\bar{D}	Var(D)	\bar{D}	Var(D)
n11=n21=20 n12=n22=20	0.10 0.15	- X -		- X -		- X -	
	0.10 0.20	11.3083	337.3010	10.7019	224.3157	16.1244	1801.1811
	0.15 0.20	9.3060	199.8421	9.0907	142.3767	12.1844	1014.1919
n11=n21=30 n12=n22=30	0.10 0.15	9.1909	15.6095	8.7556	11.8401	11.2841	68.0957
	0.10 0.20	7.1445	80.7668	7.0889	59.9857	8.3389	384.7242
	0.15 0.20	5.7791	17.7394	5.7545	15.9190	6.9147	28.4802
n11=n21=50 n12=n22=50	0.10 0.15	5.3924	9.9606	5.3528	9.3040	5.7478	19.1857
	0.10 0.20	4.5481	5.6504	4.5518	5.4684	4.8155	7.0198
	0.15 0.20	4.0994	2.6956	4.1044	2.6469	4.3015	3.1236
n11=n21=20 n12=n22=30	0.10 0.15	10.5541	290.1281	10.0193	194.1117	14.2149	1597.9021
	0.10 0.20	8.0698	92.6000	7.9197	71.0400	9.6165	371.3017
	0.15 0.20	7.1891	150.4897	7.0404	102.2225	8.7526	854.9810
n11=n21=20 n12=n22=50	0.10 0.15	7.0776	92.2271	6.9266	65.5085	8.1996	424.2540
	0.10 0.20	5.2787	9.1554	5.2716	8.7214	5.6799	11.8214
	0.15 0.20	4.9382	9.3568	4.9414	8.8252	5.2904	12.6828
n11=n21=30 n12=n22=50	0.10 0.15	6.4965	20.9929	6.3660	19.2948	7.0197	30.3287
	0.10 0.20	5.0618	8.1672	5.0599	7.7862	5.4144	10.5060
	0.15 0.20	4.5833	4.6646	4.5924	4.5278	4.8583	5.6357
n11=n12=20 n21=n22=30	0.10 0.15	9.3667	116.5893	9.0907	116.6592	11.5584	896.4081
	0.10 0.20	7.0646	38.9200	6.9926	34.2300	7.9897	66.3300
	0.15 0.20	5.8556	18.2927	5.8369	16.9785	6.3971	29.6897
n11=n12=20 n21=n22=50	0.10 0.15	6.0514	15.5195	5.9780	14.2674	6.4269	21.6509
	0.10 0.20	4.8468	5.4728	4.8430	5.3623	5.1051	6.6886
	0.15 0.20	4.3099	3.5570	4.3148	3.4579	4.5105	4.1548
n11=n12=30 n21=n22=50	0.10 0.15	5.8869	15.0026	5.8300	13.9251	6.2869	20.4949
	0.10 0.20	4.7075	4.9729	4.7081	4.7987	4.9704	5.9671
	0.15 0.20	4.1786	3.2385	4.1866	3.2257	4.3778	3.8751

* Para este caso, algumas vezes todos os x_{ik} 's foram zero, de modo que os limites para o método I são (0,∞) e para os métodos II e III apenas um limite inferior pode ser calculado.

Para $\phi=4$, em 18 dos 25 casos, o método do escore apresentou comprimentos médios menores e também variâncias menores. Com a correção para assimetria, as variâncias sofreram um acréscimo muito grande em alguns casos, como pode ser visto na tabela acima.

Tabela 12: Comprimentos médios esperados dos intervalos de confiança, construídos pelos métodos do logaritmo(I), do escore(II) e do escore corrigido para assimetria(III), para a razão de proporções binomiais para os diversos delineamentos, no caso de cinco estratos.

ϕ	tamanho de amostras $n_1k=n_2k$	Metodo I		Metodo II		Metodo III	
		\bar{D}	Var(D)	\bar{D}	Var(D)	\bar{D}	Var(D)
0.5	20	0.3723	0.0021	0.3691	0.0026	0.3727	0.0028
	30	0.3040	0.0010	0.3025	0.0011	0.3042	0.0012
	50	0.2821	0.0003	0.2826	0.0004	0.2827	0.0004
1.0	20	0.4437	0.0061	0.4819	0.0062	- x -	
	30	0.3638	0.0026	0.3850	0.0028	- x -	
	50	0.2823	0.0009	0.2926	0.0009	- x -	
2.0	20	1.5706	0.2477	1.6002	0.2492	1.6397	0.2815
	30	1.2552	0.0944	1.2736	0.0955	1.2908	0.1055
	50	0.9452	0.0278	0.9588	0.0279	0.9694	0.0287

Para o caso de cinco estratos, em todos os casos, os três métodos apresentam comprimentos médios e variâncias dos comprimentos muito próximos, não indicando superioridade de nenhum dos métodos. Observe que os comprimentos médios decrescem com aumento do tamanho das amostras dentro dos estratos.

5.3.3 - A Consistência do Estimador de Máxima Verossimilhança de ϕ

Como observado no início deste capítulo, avaliou-se a consistência do estimador de máxima verossimilhança nos casos estudados. Abaixo são apresentados os valores médios esperados de $\hat{\phi}$ e seus respectivos intervalos de confiança.

Tabela 13: Valores esperados dos estimadores de máxima verossimilhança de ϕ , para $\phi=0.5$ e $\phi=1$, para os diversos delineamentos considerados no caso de dois estratos.

Tamanho amostral	p11	p12	$\phi = 0.5$			$\phi = 1$		
			$\bar{\phi}_i$	$\bar{\phi}$	$\bar{\phi}_s$	$\bar{\phi}_i$	$\bar{\phi}$	$\bar{\phi}_s$
n11=n21=20 n12=n22=20	0.250	0.500	0.4980	0.5104	0.5228	1.0472	1.0685	1.098
	0.250	0.750	0.4999	0.5092	0.5185	1.0036	1.0149	1.0262
	0.500	0.750	0.4980	0.5063	0.5146	1.0041	1.0417	1.0254
n11=n21=30 n12=n22=30	0.250	0.500	0.5027	0.5134	0.5241	1.0065	1.0216	1.0366
	0.250	0.750	0.4944	0.5018	0.5093	1.0001	1.0092	1.0183
	0.500	0.750	0.4999	0.5064	0.5129	1.0048	1.0134	1.0219
n11=n21=50 n12=n22=50	0.250	0.500	0.5004	0.5081	0.5158	1.0094	1.0202	1.0326
	0.250	0.750	0.4981	0.5039	0.5097	1.0019	1.0088	1.0157
	0.500	0.750	0.4954	0.5004	0.5054	1.0005	1.0070	1.0134
n11=n21=20 n12=n22=30	0.250	0.500	0.4986	0.5095	0.5144	1.0255	1.0419	1.0582
	0.250	0.750	0.4986	0.5063	0.5139	0.9971	1.0066	1.0162
	0.500	0.750	0.4915	0.4988	0.5060	1.0041	1.0129	1.0217
n11=n21=20 n12=n22=50	0.250	0.500	0.4979	0.5061	0.5119	1.0130	1.0255	1.0380
	0.250	0.750	0.5000	0.5060	0.5119	1.0021	1.0094	1.0167
	0.500	0.750	0.5025	0.5082	0.5140	0.9975	1.0041	1.0109
n11=n21=30 n12=n22=50	0.250	0.500	0.5033	0.5116	0.5300	1.0056	1.0178	1.0301
	0.250	0.750	0.4974	0.5021	0.5088	0.9957	1.0027	1.0096
	0.500	0.750	0.4981	0.5036	0.5091	0.9954	1.0021	1.0089
n11=n12=20 n21=n22=30	0.250	0.500	0.5004	0.5126	0.5249	1.0068	1.0282	1.0400
	0.250	0.500	0.4941	0.5081	0.5121	1.0016	1.0112	1.0218
	0.500	0.750	0.4991	0.5040	0.5148	1.0019	1.0112	1.0205
n11=n12=20 n21=n22=50	0.250	0.500	0.4881	0.4989	0.5097	1.0074	1.0222	1.0371
	0.250	0.750	0.4927	0.5013	0.5084	0.9951	1.0044	1.0138
	0.500	0.750	0.4988	0.5011	0.5084	1.0281	1.0186	1.0401
n11=n12=30 n21=n22=50	0.250	0.500	0.5100	0.5195	0.5291	1.0046	1.0181	1.0317
	0.250	0.750	0.4975	0.5043	0.5112	1.0021	1.0101	1.0190
	0.500	0.750	0.4984	0.4997	0.5060	0.9983	1.0005	1.0078

Tabela 14: Valores esperados dos estimadores de máxima verossimilhança de ϕ , para $\phi=2$ e $\phi=4$ para os diversos delineamentos considerados, para o caso de dois estratos.

tamanhos amostrais	p11	p12	$\phi = 2$			p11	p12	$\phi = 4$		
			$\bar{\phi}_i$	$\bar{\phi}$	$\bar{\phi}_E$			$\bar{\phi}_i$	$\bar{\phi}$	$\bar{\phi}_E$
n12=n22=20	0.125	0.250	2.2350	2.3171	2.3999	0.10	0.15			
n12=n22=20	0.125	0.375	2.1151	2.1578	2.2005	0.10	0.20	4.6842	4.8687	5.0534
	0.250	0.375	2.0955	2.1351	2.1747	0.15	0.20	4.5684	4.7340	4.8996
n11=n21=30	0.125	0.250	2.1082	2.1571	2.2060	0.10	0.15	4.5466	4.7062	4.8659
n12=n22=30	0.125	0.375	2.1010	2.1356	2.1702	0.10	0.20	4.4156	4.5410	4.6675
	0.250	0.375	2.0414	2.0707	2.1649	0.15	0.20	4.2240	4.3202	4.4165
n11=n21=50	0.125	0.250	2.0611	2.0958	2.1305	0.10	0.15	4.2013	4.2904	4.3794
n12=n22=50	0.125	0.375	2.0456	2.0712	2.0967	0.10	0.20	4.1557	4.2333	4.3109
	0.250	0.375	2.0140	2.0353	2.0566	0.15	0.20	4.1714	4.2352	4.2989
n11=n21=20	0.125	0.250	2.1780	2.2334	2.2888	0.10	0.15			
n12=n22=30	0.125	0.375	2.0853	2.1243	2.1634	0.10	0.20	4.5205	4.6589	4.7973
	0.250	0.375	2.0811	2.1142	2.1473	0.15	0.20	4.3765	4.5190	4.6616
n11=n21=20	0.125	0.250	2.1873	2.2529	2.3186	0.10	0.15	4.3564	4.4884	4.6205
n12=n22=50	0.125	0.375	2.0302	2.0558	2.0814	0.10	0.20	4.2350	4.3238	4.4119
	0.250	0.375	2.0413	2.0663	2.0910	0.15	0.20	4.1978	4.2781	4.3644
n11=n21=30	0.125	0.250	2.0067	2.1041	2.1416	0.10	0.15	4.3740	4.4835	4.5927
n12=n22=50	0.125	0.375	2.0317	2.0578	2.0840	0.10	0.20	4.2420	4.3262	4.4105
	0.250	0.375	2.0264	2.0496	2.0728	0.15	0.20	4.1841	4.2582	4.3324
n11=n12=20	0.125	0.250	2.0692	2.1218	2.1743	0.10	0.15	4.5707	4.7281	4.8856
n21=n22=30	0.125	0.375	2.0489	2.0845	2.1201	0.10	0.20	4.3620	4.4862	4.6104
	0.250	0.375	2.0421	2.0730	2.1040	0.15	0.20	4.2088	4.3005	4.3923
n11=n12=20	0.125	0.250	2.0882	2.1251	2.1670	0.10	0.15	4.2698	4.3729	4.4766
n21=n22=50	0.125	0.375	2.0333	2.0622	2.0911	0.10	0.20	4.2015	4.2810	4.3605
	0.250	0.375	2.0059	2.0302	2.0545	0.15	0.20	4.1650	4.2370	4.3089
n11=n12=30	0.125	0.250	2.0786	2.1173	2.1568	0.10	0.15	4.3111	4.4145	4.5180
n21=n22=50	0.125	0.375	2.0316	2.0588	2.0850	0.10	0.20	4.1940	4.2707	4.3473
	0.250	0.375	2.0085	2.0266	2.0498	0.15	0.20	4.1535	4.2282	4.2921

Tabela 15: Valores esperados do estimadore de máxima verossimilhança de ϕ , para os diversos delineamentos considerados no caso de cinco estratos.

ϕ	tamanhos de amostras $n_{1k}=n_{2k}$	$\bar{\phi}_i$	$\bar{\phi}$	$\bar{\phi}_s$
0.5	20	0.4956	0.5013	0.5069
	30	0.5020	0.5069	0.5118
	50	0.4964	0.5002	0.5040
1.0	20	0.9939	1.0014	1.0089
	30	0.9932	0.9993	1.0054
	50	0.9978	1.0023	1.0068
2.0	20	2.0359	2.0613	2.0871
	30	2.0173	2.0382	2.0590
	50	1.9961	2.0109	2.0257

Para $\phi=0.5$, no caso de dois estratos, o estimador de máxima verossimilhança mostrou-se consistente na maioria das vezes, sendo que em 21 dos 27 casos estudados o intervalo de confiança para o valor esperado de $\hat{\phi}$ incluiu o verdadeiro valor do parâmetro. Para $\phi=1,2$ e 4, não se pode falar o mesmo. Em alguns poucos casos, os intervalos de confiança para o valor esperado de $\hat{\phi}$ incluiu o verdadeiro valor do parâmetro para $\phi=1$. Para $\phi=2$ e 4, nenhum dos intervalos incluiu o verdadeiro valor do parâmetro. Verifica-se uma tendência em superestimar o verdadeiro valor do parâmetro. Para $\phi=1$, o vício foi sempre inferior a 6.25%. Para $\phi=2$, o vício variou de 1.33% a 15.86% e para $\phi=4$ de 5.71% a 21.72%. Este vício tende a diminuir à medida que os tamanhos de amostras crescem, e é maior nos casos em que os tamanhos de amostras dentro dos estratos são iguais e menor nos casos em que os estratos são de mesmo tamanho. No caso de cinco estratos, devido ao pequeno número de casos considerados nas simulações, pouco pode-se dizer, a não ser que quando o intervalo de confiança para $\hat{\phi}$ não conteve o verdadeiro valor do parâmetro, o vício foi muito pequeno e sempre positivo.

5.4 - Conclusões

Os resultados obtidos dos estudos de simulação são resumidos abaixo.

Para o caso de dois estratos, com exceção para $\phi=1$, onde o método do escore e do logarítmo produziram resultados muito próximos, o método do escore produziu resultados melhores no que diz respeito à distribuição das probabilidades nas caudas. Nos casos onde a correção para assimetria foi apropriada ($\phi \neq 1$), ela melhorou significativamente os intervalos neste aspecto. Para o caso de cinco estratos, os resultados das simulações não indicam superioridade entre os métodos do escore e do logarítmo, e a correção para assimetria poucas vezes produziu intervalos melhores quanto à distribuição das probabilidades nas caudas. Porém, como foram poucos os casos estudados para cinco estratos, não se pode afirmar que não existe um método superior e que a correção para assimetria não é eficaz.

Com relação aos comprimentos médios dos intervalos, para $\phi=0.5$, o método do escore produziu intervalos mais curtos na média que o método do logarítmo. Com a correção para assimetria, os comprimentos médios sofrem um pequeno acréscimo, mas ainda assim permanecem inferiores àqueles produzidos pelo método do logarítmo. Para $\phi=1$, os comprimentos médios dos métodos do logarítmo e do escore são muito próximos e a correção para assimetria produz pequenos acréscimos. Para $\phi=2$, comportamento similar é observado. Para $\phi=4$, o método do escore apresentou menores comprimentos médios na maioria dos casos. A correção para assimetria produziu acréscimos nos comprimentos médios. Nos casos onde estes acréscimos foram maiores verificou-se também a ocorrência de acréscimos relativamente grandes nas variâncias, sendo que nestes casos o valor mínimo esperado foi sempre menor ou igual a 3.

Com relação à consistência do estimador de máxima verossimilhança de ϕ , para $\phi=0.5$, os intervalos de confiança de 95% para a estimativa do risco relativo sempre incluíram o verdadeiro valor do parâmetro. Para $\phi=1,2$ e 4 as simulações fornecem indícios de tendência do estimador em superestimar o verdadeiro valor do parâmetro; porém este vício é razoavelmente pequeno e tende a diminuir quando os tamanhos de amostras dentro dos estratos crescem. Esta tendência é justificada pelo fato do estimador de máxima verossimilhança ser consistente apenas no caso assintótico 1, onde os tamanhos de amostras dentro dos estratos são grandes, e aqui foram considerados apenas tamanhos de amostras moderados.

Os resultados obtidos para o caso de dois estratos concordam com os resultados de Gart e Nam(1988) para o caso de um estrato, indicando a superioridade do método do escore sobre o método do logarítimo e a eficácia da correção para assimetria. Para o caso de mais de dois estratos, faz-se necessário a realização de mais simulações.

Para trabalhos futuros, fica a sugestão de novas simulações para o caso de mais de dois estratos e extensão dos métodos de Bailey (1987) e Bedrick(1987) para o caso estratificado.

Para cálculo dos intervalos pelos métodos do logarítimo, do escore e do escore corrigido para assimetria, o programa apresentado no apêndice 4 pode ser utilizado com algumas alterações, como descrito no mesmo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAILEY, B.J.R. Confidence limits to the risk ratio. *Biometrics*. 43:201-205, 1987.
- BARNOFF-NIELSEN, O.E e COX, D.R. *Asymptotic Techniques for Use in Statistics*. London: Chapman and Hall, 1979.
- BARRY, J. *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1986.
- BARTLETT, M.S. Approximate confidence intervals. *Biometrika*. 39:12-19, 1953a.
- BARTLETT, M.S. Approximate confidence intervals II. More than one unknown parameter. *Biometrika*. 40:306-317, 1953b.
- BARTLETT, M.S. Approximate confidence intervals III. A bias correction. *Biometrika*. 42:201-203, 1955.
- BEDRICK, E.J. A family of confidence intervals for the ratio of two binomial proportions. *Biometrics*. 43:993-998, 1987.
- COX, D.R. e HINKLEY, D.V. *Theoretical Statistics*. London: Chapman and Hall, 1974.
- CRESSIE, E.J. e READ, T.R. Multinomial goodness-of-fit tests. *Journal of the Royal Statistical Society. Série B*. 46:40-464, 1984.
- DAGPUNAR, J. *Principles of Variate Generation*. London, Oxford: Clarendon Press, 1988.
- GART, J.J. e THOMAS, D. E.. The performance of three approximate confidence intervals limits methods for the odds ratio. *American Journal of Epidemiology*. 115:453-470, 1982

GART,J.J. Approximate tests and interval estimation of the common relative-risks in the combination of 2x2 tables. *Biometrics*. 72:673-677, 1985.

GART, J.J. e NAM,J. Approximate interval estimation of ratio of binomial parameters:A review and corrections for skewness. *Biometrics*. 44:323-338, 1988.

GREELAND,S. e ROBINS, J.M. Estimation of a common effect parameters from sparse follow-up data. *Biometrics*. 41:55-68,1985.

KATZ,D.; BAPTISTA,J.;AZEN,S.P. e PIKE,M.C. Obtaining confidence intervals for the risk ratio in cohort studies. *Biometrics*. 34:469-474, 1978.

KENDALL ,S.M. e STUART, A. *The Advanced Theory of Statistics - Volume 1*. London: Charles Griffin & Company Limited ,1977.

KENDALL ,S.M. e STUART, A. *The Advanced Theory of Statistics- Volume 2*. New York: Macmillan Publishing Co,Inc, 1967.

KLEIUBAUM,D.G.; KUPPER,L.L. e MORGENSTERN,H. *Epidemiological Research. Principles and Quantitative Methods*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982.

KOOPMAN,P.A.R. Confidence limits for the ratio of binomial proportions. *Biometrics*. 40:513-517, 1984.

LEITE, J.G. e SINGER,J.M. *Métodos Assintóticos em Estatística: Fundamentos e Aplicações*. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística-ABE. 9^o SINAPE, 1990.

MARDIA,K.V.; KENT,J.T. e BIBBY,J.M. *Multivariate Analysis*. London: Academic Press Inc. LTD, 1979.

- MIETTINEM,O. e NURMINEM,M. Comparative analysis of two rates. *Statistics in Medicine*. 4:213-226, 1985.
- NOETHER, G.E. Two confidence intervals for the ratio of two probabilities and some measures of effectiveness. *Journal of the American Statistical Association*. 52:36-45, 1957.
- NURMINEM, M. Asymptotic efficiency of general noniterative estimators of common relative risk. *Biometrika* 68, 2:525-530,1981.
- PETTIGREY, H.M. ,GART,J.J. e THOMAS,D.G. The bias and higher cumulants of the logarithm of a binomial variate. *Biometrika*.73, 425-435,1986.
- RAO, C.R. *Linear Statistical Inference and Its Applications*. New York: John Wiley & Sons Inc., 1968.
- READ, C. B. Fieller's Theorem. *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 3. New York: John Wiley & Sons Inc, 1983.
- ROHATGI,V.K. *An Introduction to Probability:Theory and Mathematical Statistics*. New York: John Wiley & Sons, 1976.
- ROTHMAN,K.J.. *Modern Epidemiology*. Boston/Toronto:Little ,Brown and Company,1896.
- RUDAS,T. A Monte Carlo comparison of the small sample behavior of the Pearson, the Likelihood Ratio and the Cressie-Read statistics. *J. Statistication Computation. Simulation*. 24:107-120,1986.
- RUGGIERO,M.A.G. e LOPES,V.L.R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. São Paulo: McGraw-Hill, 1988.
- SANTNER,T.J. and SNELL,M.K. Small-sample confidence intervals for p_1-p_2 and p_1/p_2 in 2×2 contingency tables. *Journal the American Statistical Association*. 73:386-394, 1980.

SAS/IML: Users' Guide, Release 6.03 Edition. Cary, Nc: Sas Institute Inc., 1988.

SATO, T. Confidence limits for the common Odds Ratio based on the asymptotic distribution of the Mantel-Haenzel estimator. *Biometrics*. 46:71-80, 1990.

TARONE, R.E. Homogeneity score tests with nuisance parameters. *Communications in Statistics-Theory and Methods*. 17:5,1549-1554, 1981.

TARONE, R. E. , GART, J.J. e HAUCK, W.W. On the asymptotic inefficiency of certain niterative estimators of a common relative risk or odds ratio. *Biometrics*, 70, 519-522, 1983.

TARONE, R.E. On summary estimators of relative risk. *Journal of Chronic Diseases*. 34:463-468, 1990.

THOMAS, D.G. e GART, J.J. A table of exact confidence limits for differences and ratios of two proportions and their odds ratio *Journal of the American Statistical Association*. 72:73-76, 1977.

WALTER, S.D. The distribution of Levin's measure of attributable risk. *Biometrika* 62, 371-375, 1975.

WALTER, S.D. The estimation and interpretation of attributable risk in health research. *Biometrics* 32, 829-849, 1976.

APÊNDICE 1
Teoremas

1) - Teorema de Fieller

Sejam \bar{x} e \bar{y} as estimativas observadas das médias μ_x e μ_y de uma distribuição Normal Bivariada e seja $\gamma = \mu_x / \mu_y$. Se S_{xx} , S_{yy} e S_{xy} são as estimativas das variâncias e covariâncias de \bar{x} e \bar{y} respectivamente, então a quantidade pivotal

$$T = \frac{\bar{x} - \gamma \bar{y}}{\left[S_{xx} - 2 S_{xy} \gamma + \gamma^2 S_{yy} \right]}$$

resulta em uma distribuição t de Student com número de graus de liberdade apropriado. Se o percentil de ordem $1 - \alpha$ da distribuição t de student é denotado por t , então os limites de $100(1-\alpha)\%$ de confiança para γ são dados por:

$$\frac{\bar{x} \bar{y} - t^2 S_{xy} \pm [f(\bar{x}, \bar{y}, S_{xx}, S_{xy}, S_{yy})]^{1/2}}{[\bar{y}^2 - t^2 S_{yy}]}, \quad (1)$$

onde $f(\bar{x}, \bar{y}, S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}) = (\bar{x} \bar{y} - t S_{xy})^2 - (\bar{x}^2 - t^2 S_{xx})(\bar{y}^2 - t^2 S_{yy})$

Se \bar{x}/\bar{y} é uma estimativa de γ , uma expressão mais natural para (1) é

$$\left\{ \frac{\bar{x}}{\bar{y}} - \epsilon \frac{S_{xy}}{S_{yy}} \pm \frac{t}{\epsilon} \left[S_{xx} - 2 \frac{\bar{x}}{\bar{y}} S_{xy} + \frac{\bar{x}^2}{\bar{y}^2} S_{yy} - \bar{y} \left(S_{xx} - \frac{S_{xy}}{S_{yy}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\},$$

onde $\epsilon = t^2 \frac{S_{yy}}{\bar{y}^2}$

Veja Read, 1983, pág 86-89.

2) Teorema de Geary

Se x e y são variáveis aleatórias independentes com distribuições Normais com parâmetros (μ_x, σ_x^2) e (μ_y, σ_y^2) , então

$$\frac{(\mu_x - \mu_y) v}{[\sigma_x^2 + v^2 \sigma_y^2]^{1/2}}, \text{ onde } v = \frac{x}{y}, \text{ é distribuído } N(0,1).$$

Veja Kendal e Stuart, 1967, pág 288.

APÊNDICE 2
Alguns Resultados de Teoria Assintótica

Teorema A.2.1

Sejam $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias, $(a_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de números reais positivos com $a_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, e f uma função real de variável real derivável até a ordem k em um intervalo que contém um ponto a . Se $X_n - a = o_p(a_n)$, então

$$f(X_n) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (X_n - a)^j + o_p(a_n)^k = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (X_n - a)^j + o_p(a_n)^{k+1}.$$

Demonstração: Leite e Singer, 1990, pág 44.

Teorema A.2.2

Se uma sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n \geq 1}$ converge em probabilidade para uma variável aleatória X , então $X_n - X = o_p(1)$.

Teorema A.2.3

Se uma sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n \geq 1}$ converge em distribuição para uma variável aleatória X , então $X_n = o_p(1)$.

Demonstração: Leite e Singer, 1990, pág 58.

Teorema A.2.4

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade $f(x, \theta), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes condições

i) $\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta)$ e $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f(x, \theta)$ existem em quase toda parte e são tais que

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) \right| \leq H_1(x) \text{ e } \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f(x, \theta) \right| \leq H_2(x), \text{ onde } \int_{\mathbb{R}} H_j(x) dx < \infty, j=1,2$$

ii) $\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x, \theta)$ e $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x, \theta)$ existem em quase toda parte e são

tais que:

$$a) 0 < I_1(\theta) = E \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x_1, \theta) \right\}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} f(x_1, \theta) \right\}^2 \left\{ f(x_1, \theta) \right\}^{-1} dx < \infty, \text{ ou}$$

seja X_1 tem informação de Fisher finita;

$$b) E \left\{ \sup \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x_1, \theta+h) - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x_1, \theta) \right| \right\} = \psi_\delta \rightarrow 0, \text{ quando } \delta \rightarrow 0$$

Então o estimador de máxima verossimilhança de θ , $\hat{\theta}$, é tal que

$$\sqrt{n} (\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N(0, I_1^{-1}(\theta))$$

APÊNDICE 4
Tabelas de Resultados

Tabela A31: Estimativas dos coeficientes de confiança (\hat{c}) e das probabilidades das caudas (\hat{c}_i e \hat{c}_e), e seus respectivos intervalos de confiança para os métodos do logaritmo(I), método do escore(II) e método do escore corrigido para assimetria(III) para os diversos delineamentos considerados, para tamanhos de amostras $n_{01}=n_{02}=n_{11}=n_{12}=20$.

ϕ	p_0	Est.	Método I	Método II	Método III	
0.5	0.25	\hat{c}_i	1.53 2.50 3.46	1.37 2.30 3.23	1.13 2.00 2.87	
		\hat{c}	95.82 96.90 97.97	94.55 95.80 97.04	94.33 95.60 96.87	
		\hat{c}_e	0.12 0.60 1.08	1.05 1.90 2.75	1.14 2.40 3.35	
	0.50	\hat{c}_i	2.36 3.50 4.64	1.78 2.80 3.82	1.78 2.80 3.82	
		\hat{c}	94.55 95.80 97.04	93.98 95.30 96.61	93.87 95.20 96.52	
		\hat{c}_e	0.18 0.70 1.22	1.05 1.90 2.75	1.13 2.00 2.87	
	0.75	\hat{c}_i	2.87 4.10 5.33	2.36 3.50 4.64	2.19 3.80 4.41	
		\hat{c}	93.20 94.60 96.00	92.64 94.10 95.56	92.64 94.10 95.56	
		\hat{c}_e	0.60 1.30 2.00	1.45 2.40 3.35	1.61 2.60 3.59	
	1.0	0.25	\hat{c}_i	2.44 3.60 4.75	2.70 3.90 5.10	2.70 3.90 5.10
			\hat{c}	92.30 93.80 95.29	91.75 93.30 94.85	91.75 93.30 95.91
			\hat{c}_e	1.61 2.60 3.59	1.78 2.80 3.82	1.78 2.80 3.82
0.50		\hat{c}_i	0.97 1.80 2.62	1.53 2.50 3.47	1.53 2.50 3.47	
		\hat{c}	95.01 96.20 97.38	93.76 95.10 96.44	93.76 95.10 96.44	
		\hat{c}_e	1.13 2.00 2.87	1.45 2.40 3.35	1.45 2.40 3.35	
0.75		\hat{c}_i	1.69 2.70 3.70	1.94 3.00 3.82	1.94 3.00 4.06	
		\hat{c}	93.08 94.50 95.91	92.75 94.20 95.65	92.75 94.20 95.65	
		\hat{c}_e	1.78 2.80 3.82	1.78 2.80 3.82	1.78 2.80 3.82	
2.0		0.125	\hat{c}_i	0.38 1.00 1.62	1.29 2.20 3.11	1.78 2.80 3.82
			\hat{c}	94.21 95.50 96.78	92.86 94.30 95.74	92.75 94.20 95.65
			\hat{c}_e	2.36 3.50 4.64	2.36 3.50 4.64	1.94 3.00 4.06
	0.250	\hat{c}_i	0.12 0.60 1.08	1.05 1.90 2.74	1.13 2.00 2.87	
		\hat{c}	94.21 95.50 96.78	93.65 95.00 96.35	94.21 95.50 96.78	
		\hat{c}_e	2.70 3.90 5.10	2.02 3.10 4.17	1.53 2.50 3.47	
	0.375	\hat{c}_i	0.59 1.30 2.00	1.45 2.40 3.35	1.61 2.60 3.58	
		\hat{c}	93.31 94.70 96.09	92.97 94.40 95.82	92.86 94.30 95.73	
		\hat{c}_e	2.78 4.00 5.21	2.11 3.20 4.30	2.02 3.10 4.17	
	4.0	0.10	\hat{c}_i	0.00 0.00 0.00	0.45 1.10 1.75	1.45 2.40 3.35
			\hat{c}	96.89 97.80 98.74	96.06 97.10 98.15	95.01 96.20 97.39
			\hat{c}_e	1.29 2.40 3.11	0.98 1.80 2.62	0.67 1.40 2.13
0.15		\hat{c}_i	0.00 0.10 0.30	0.90 1.70 2.50	1.21 3.20 2.99	
		\hat{c}	94.78 96.00 97.21	93.76 95.10 96.44	94.33 95.60 96.87	
		\hat{c}_e	2.70 3.90 5.10	2.11 3.20 4.30	1.37 2.30 3.23	
0.20		\hat{c}_i	0.12 0.60 1.07	1.37 2.30 3.23	2.28 3.40 4.52	
		\hat{c}	93.76 95.10 96.44	92.53 94.00 95.47	92.75 94.20 95.65	
		\hat{c}_e	3.04 4.30 5.56	2.53 3.70 4.87	1.45 2.40 3.35	

Tabela A32: Estimativas dos coeficientes de confiança (\hat{c}) e das probabilidades das caudas (\hat{c}_i e \hat{c}_e), e seus respectivos intervalos de confiança para os métodos do logaritmo(I), método do escore(II) e método do escore corrigido para assimetria(III) para os diversos delineamentos considerados, para tamanhos de amostras $n_{01}=n_{02}=n_{11}=n_{12}=30$.

ϕ	pt	Est.	Método I	Método II	Método III	
0.5	0.25	\hat{c}_i	1.86 2.90 3.94	1.78 2.80 3.82	1.61 2.60 3.56	
		\hat{c}	94.33 95.60 96.87	92.97 94.40 95.83	92.75 94.20 95.65	
		\hat{c}_e	0.75 1.50 2.25	1.78 2.80 3.82	2.11 3.20 4.29	
	0.50	\hat{c}_i	2.02 3.10 4.17	1.69 2.70 3.70	1.69 2.70 3.70	
		\hat{c}	94.56 95.80 97.04	94.56 95.80 97.04	94.10 95.40 96.70	
		\hat{c}_e	0.45 1.10 1.75	0.74 1.50 2.25	1.05 1.90 2.75	
	0.75	\hat{c}_i	2.11 3.20 4.29	1.69 2.70 3.70	1.45 2.40 3.35	
		\hat{c}	94.10 95.40 96.70	93.65 95.00 96.35	93.76 95.10 96.44	
		\hat{c}_e	0.67 1.40 2.13	1.37 2.30 3.23	1.53 2.50 3.47	
	1.0	0.25	\hat{c}_i	1.69 2.70 3.70	1.86 2.90 3.94	1.86 2.90 3.94
			\hat{c}	93.54 94.90 96.26	93.20 94.60 96.00	93.20 94.60 96.00
			\hat{c}_e	1.45 2.40 3.35	1.53 2.50 3.47	1.53 2.50 3.47
0.50		\hat{c}_i	0.82 1.60 2.38	1.21 2.10 2.99	1.05 1.90 2.75	
		\hat{c}	94.21 95.50 96.78	93.09 94.50 95.91	93.31 94.70 96.09	
		\hat{c}_e	1.86 2.90 3.94	2.28 3.40 4.52	2.28 3.40 4.52	
0.75		\hat{c}_i	1.53 2.50 3.47	1.86 2.90 3.94	1.69 2.70 3.70	
		\hat{c}	93.76 95.10 96.44	92.86 94.30 95.73	93.09 94.50 95.91	
		\hat{c}_e	1.45 2.40 3.35	1.78 2.80 3.82	1.78 2.80 3.82	
2.0		0.125	\hat{c}_i	1.13 2.00 2.87	1.45 2.40 3.35	1.69 2.70 3.70
			\hat{c}	94.33 95.60 96.87	93.87 95.20 96.53	93.76 95.10 96.44
			\hat{c}_e	1.45 2.40 3.35	1.45 2.40 3.35	1.29 2.20 3.11
	0.25	\hat{c}_i	0.60 1.30 2.00	1.61 2.60 3.59	1.86 2.90 3.94	
		\hat{c}	94.33 95.60 96.87	93.31 94.70 96.09	93.20 94.60 96.00	
		\hat{c}_e	2.02 3.10 4.17	1.69 2.70 3.70	1.53 2.50 3.47	
	0.375	\hat{c}_i	0.67 1.40 2.13	1.29 2.20 3.11	1.37 2.30 3.22	
		\hat{c}	93.31 94.70 96.09	93.31 94.70 96.09	93.31 94.70 96.09	
		\hat{c}_e	2.69 3.90 5.10	2.02 3.10 4.17	1.94 3.00 4.06	
	4.0	0.10	\hat{c}_i	0.18 0.70 1.22	1.37 2.30 3.23	1.78 2.80 3.82
			\hat{c}	95.82 96.90 97.97	94.21 95.50 96.78	93.87 95.20 96.52
			\hat{c}_e	1.45 2.40 3.35	1.29 2.20 3.11	1.13 2.00 2.87
0.15		\hat{c}_i	0.25 0.80 1.35	0.82 1.60 2.38	1.53 2.50 3.47	
		\hat{c}	95.01 96.20 97.38	94.78 96.00 97.21	94.33 95.60 96.87	
		\hat{c}_e	1.94 3.00 4.06	1.45 2.40 3.35	1.05 1.90 2.75	
0.20		\hat{c}_i	0.52 1.20 1.87	0.82 1.60 2.38	1.29 2.20 3.11	
		\hat{c}	94.56 95.80 97.04	94.67 95.90 97.13	94.44 95.70 96.96	
		\hat{c}_e	1.94 3.00 4.06	1.53 2.50 3.47	1.21 2.10 2.99	

Tabela A33: Estimativas dos coeficientes de confiança (\hat{c}) e das probabilidades das caudas (\hat{c}_i e \hat{c}_o), e seus respectivos intervalos de confiança para os métodos do logaritmo(I), método do escore(II) e método do escore corrigido para assimetria(III) para os diversos delineamentos considerados, para tamanhos de amostras $n_{01}=n_{02}=n_{11}=n_{12}=50$.

ϕ	p_0	Est.	Método I	Método II	Método III	
0.5	0.25	\hat{c}_i	1.86 2.90 3.94	1.78 2.80 3.82	1.61 2.60 3.59	
		\hat{c}	94.10 95.40 96.70	93.42 94.80 96.18	93.31 94.70 96.09	
		\hat{c}_o	0.90 1.70 2.50	1.45 2.40 3.35	1.69 2.70 3.70	
	0.50	\hat{c}_i	2.44 3.60 4.75	1.70 2.70 3.70	1.69 2.70 3.70	
		\hat{c}	93.42 94.80 96.18	93.31 94.70 96.09	93.31 94.70 96.09	
		\hat{c}_o	0.82 1.60 2.38	1.61 2.60 3.59	1.61 2.60 3.59	
	0.75	\hat{c}_i	1.37 2.30 3.23	1.21 2.10 2.99	1.05 1.90 2.75	
		\hat{c}	95.13 96.30 97.47	94.67 95.90 97.13	94.90 96.10 97.30	
		\hat{c}_o	0.67 1.40 2.13	1.13 2.00 2.87	1.13 2.00 2.87	
	1.0	0.25	\hat{c}_i	1.45 2.40 3.35	1.61 2.60 3.59	1.53 2.50 3.47
			\hat{c}	93.99 95.30 96.61	93.65 95.00 96.35	93.76 95.10 96.44
			\hat{c}_o	1.37 2.30 3.23	1.45 2.40 3.34	1.45 2.40 3.35
0.50		\hat{c}_i	1.29 2.20 3.11	1.61 2.60 3.59	1.53 2.50 3.47	
		\hat{c}	94.56 95.80 97.04	93.65 95.00 96.35	93.76 95.10 96.44	
		\hat{c}_o	1.13 2.00 2.87	1.45 2.40 3.35	1.45 2.40 3.35	
0.75		\hat{c}_i	1.78 2.80 3.82	1.94 3.00 4.06	1.86 2.90 3.94	
		\hat{c}	93.65 95.00 96.35	93.42 94.80 96.18	93.54 94.90 96.26	
		\hat{c}_o	1.29 2.20 3.11	1.29 2.20 3.11	1.29 2.20 3.11	
2.0		0.125	\hat{c}_i	0.82 1.60 2.37	1.29 2.20 3.11	1.37 2.30 3.23
			\hat{c}	94.56 95.80 97.04	94.10 95.40 96.70	94.21 95.50 96.78
			\hat{c}_o	1.61 2.60 3.59	1.45 2.40 3.35	1.29 2.20 3.11
	0.250	\hat{c}_i	0.90 1.70 2.50	1.37 2.30 3.23	1.69 2.70 3.70	
		\hat{c}	93.54 94.90 96.26	93.31 94.70 96.09	93.09 94.50 95.91	
		\hat{c}_o	2.28 3.40 4.52	1.94 3.00 4.06	1.78 2.80 3.82	
	0.375	\hat{c}_i	0.90 1.70 2.50	1.29 2.20 3.11	1.29 2.20 3.11	
		\hat{c}	93.65 95.00 96.35	93.65 95.00 96.35	93.76 95.10 96.46	
		\hat{c}_o	2.19 3.30 4.41	1.78 2.80 3.82	1.69 2.70 3.70	
	4.0	0.10	\hat{c}_i	0.67 1.40 2.13	0.89 1.70 2.50	1.45 2.40 3.35
			\hat{c}	93.20 94.60 96.00	93.42 94.80 96.10	93.42 94.80 96.18
			\hat{c}_o	2.78 4.00 5.21	2.36 3.50 4.64	1.78 2.80 3.82
0.15		\hat{c}_i	0.67 1.40 2.13	1.29 2.20 3.11	1.69 2.70 3.70	
		\hat{c}	94.50 95.80 97.04	93.99 95.30 96.61	93.99 95.30 96.61	
		\hat{c}_o	1.78 2.80 3.82	1.53 2.50 3.47	1.13 2.00 2.87	
0.20		\hat{c}_i	0.45 1.10 1.75	0.67 1.40 2.13	0.97 1.80 2.62	
		\hat{c}	94.90 96.10 97.30	94.67 95.90 97.13	94.44 95.70 96.98	
		\hat{c}_o	1.75 2.80 3.82	1.69 2.70 3.70	1.53 2.50 3.47	

Tabela A34: Estimativas dos coeficientes de confiança (\hat{c}) e das probabilidades das caudas (\hat{c}_i e \hat{c}_s), e seus respectivos intervalos de confiança para os métodos do logaritmo(I), método do escore(II) e método do escore corrigido para assimetria(III) para os diversos delineamentos considerados, para tamanhos de amostras $n_{01}=n_{11}=20$ e $n_{02}=n_{12}=30$.

ϕ	p_0	Est	Método I	Método II	Método III
0.5	0.25	ci	2.02 3.10 4.17	1.94 3.00 4.06	1.61 2.60 3.59
		c	93.65 95.00 96.35	92.86 94.30 95.74	92.75 94.20 95.65
		cs	1.05 1.90 2.75	1.69 2.70 3.70	2.11 3.20 4.29
	0.50	ci	2.11 3.20 4.29	1.61 2.60 3.59	1.45 2.40 3.35
		c	94.89 96.10 97.30	94.42 95.70 96.96	94.56 95.80 97.04
		cs	0.18 0.70 1.21	0.90 1.70 2.50	0.90 1.80 2.62
	0.75	ci	1.86 2.90 3.94	1.29 2.20 3.11	1.05 1.90 2.75
		c	94.10 95.40 96.70	93.31 94.70 96.09	93.42 94.80 96.18
		cs	0.90 1.70 2.50	2.02 3.10 4.17	2.19 3.30 4.41
1.0	0.25	ci	1.69 2.70 3.70	1.94 3.00 4.06	1.94 3.00 4.06
		c	92.75 94.20 95.65	91.97 93.50 95.03	91.97 93.50 95.03
		cs	2.02 3.10 4.17	2.36 3.50 4.64	2.36 3.50 4.64
	0.50	ci	1.53 2.50 3.47	1.94 3.00 4.06	1.94 3.00 4.06
		c	93.42 94.80 96.18	92.42 93.90 95.38	92.42 93.90 95.38
		cs	1.69 2.70 3.70	2.02 3.10 4.17	2.02 3.10 4.17
	0.75	ci	1.94 3.00 4.06	1.94 3.00 4.06	1.94 3.00 4.06
		c	92.97 94.40 95.83	93.20 94.60 96.00	92.30 94.60 96.00
		cs	1.61 2.60 3.59	1.45 2.40 3.35	1.45 2.40 3.35
2.0	0.125	ci	0.98 1.80 2.62	1.61 2.60 3.59	2.02 3.10 4.17
		c	94.33 95.60 96.87	93.65 95.00 96.35	93.65 95.00 96.35
		cs	1.61 2.60 3.59	1.45 2.40 3.35	1.05 1.90 2.75
	0.25	ci	0.75 1.50 2.25	1.37 2.30 3.23	1.45 2.40 3.35
		c	95.24 96.40 97.55	94.90 96.10 97.30	94.90 96.10 97.30
		cs	1.21 2.10 2.99	0.82 1.60 2.38	0.75 1.50 2.25
	0.375	ci	0.98 1.80 2.62	1.53 2.50 3.23	1.61 2.60 3.59
		c	93.09 94.50 95.91	93.31 94.70 96.09	93.42 94.80 96.18
		cs	2.53 3.70 4.87	1.78 2.80 3.82	1.61 2.60 3.59
4.0	0.10	ci	0.00 0.20 0.47	0.98 1.80 2.62	1.53 2.50 3.47
		c	95.13 96.30 97.47	93.76 95.10 96.44	93.76 95.10 96.44
		cs	2.36 3.50 4.64	2.03 3.10 4.17	1.45 2.40 3.35
	0.15	ci	0.18 0.70 1.22	1.37 2.30 3.23	2.44 3.60 4.76
		c	94.21 95.50 96.78	93.20 94.60 96.00	92.19 93.70 95.21
		cs	2.61 3.80 4.99	2.02 3.10 4.17	1.69 2.70 3.71
	0.20	ci	0.18 0.70 1.22	0.90 1.70 2.50	1.86 2.90 3.94
		c	94.44 95.70 96.96	93.54 94.90 96.26	92.53 94.00 95.47
		cs	2.44 3.60 4.76	2.28 3.40 4.52	2.03 3.10 4.17

Tabela A35: Estimativas dos coeficientes de confiança (\hat{c}) e das probabilidades das caudas (\hat{c}_i e \hat{c}_s), e seus respectivos intervalos de confiança para os métodos do logaritmo(I), método do escore(II) e método do escore corrigido para assimetria(III) para os diversos delineamentos considerados, para tamanhos de amostras $n_{01}=n_{11}=20$ e $n_{02}=n_{12}=50$.

ϕ	p_0	Est.	Método I	Método II	Método III
0.5	0.25	\hat{c}_i	1.53 2.50 3.47	1.29 2.20 3.11	1.05 1.90 2.75
		\hat{c}	94.56 95.80 97.04	93.76 95.10 96.44	93.87 95.20 96.53
		\hat{c}_s	0.90 1.70 2.50	1.69 2.70 3.71	1.86 2.90 3.94
	0.50	\hat{c}_i	2.19 3.30 4.41	1.61 2.60 3.59	1.45 2.40 3.35
		\hat{c}	93.99 95.30 96.61	93.99 95.30 96.61	94.10 95.40 96.70
		\hat{c}_s	0.67 1.40 2.13	1.21 2.10 2.99	1.29 2.20 3.11
	0.75	\hat{c}_i	2.53 3.70 4.87	1.78 2.80 3.82	1.69 2.70 3.70
		\hat{c}	93.76 95.10 96.74	94.10 95.40 96.70	94.10 95.40 96.70
		\hat{c}_s	0.52 1.20 1.87	0.98 1.80 2.62	1.05 1.90 2.75
1.0	0.25	\hat{c}_i	2.02 3.10 4.17	2.44 3.60 4.76	2.53 3.70 4.87
		\hat{c}	93.31 94.70 96.09	92.53 94.00 95.47	92.42 93.90 95.38
		\hat{c}_s	1.29 2.40 3.11	1.45 2.40 3.35	1.45 2.40 3.35
	0.50	\hat{c}_i	2.11 3.20 4.29	2.19 3.30 4.41	2.19 3.30 4.41
		\hat{c}	93.31 94.70 96.09	92.86 94.30 95.74	92.86 94.30 95.74
		\hat{c}_s	1.21 2.10 2.99	1.45 2.40 3.35	1.45 2.40 3.35
	0.75	\hat{c}_i	1.37 2.30 3.23	2.19 3.30 4.41	1.45 2.40 3.35
		\hat{c}	94.21 95.50 96.79	92.86 94.30 95.74	94.21 95.50 96.79
		\hat{c}_s	1.29 2.20 3.11	1.45 2.40 3.35	1.21 2.10 2.99
2.0	0.125	\hat{c}_i	0.52 1.20 1.87	1.29 2.20 3.11	1.37 2.30 3.23
		\hat{c}	95.01 96.20 97.38	93.76 95.10 96.44	94.10 95.40 96.70
		\hat{c}_s	1.61 2.60 3.59	1.69 2.70 3.70	1.37 2.30 3.23
	0.25	\hat{c}_i	0.60 1.30 2.00	1.67 2.70 3.71	1.78 2.80 3.82
		\hat{c}	94.56 95.80 97.04	93.76 95.10 96.44	93.76 95.10 96.44
		\hat{c}_s	1.86 2.90 3.94	1.29 2.20 3.11	1.61 2.60 3.59
	0.375	\hat{c}_i	1.13 2.00 3.87	1.69 2.70 3.71	1.86 2.90 3.94
		\hat{c}	93.31 94.70 96.09	93.31 94.70 96.09	92.20 94.60 96.00
		\hat{c}_s	2.19 3.30 4.41	1.61 2.60 3.59	1.53 2.50 3.47
4.0	0.10	\hat{c}_i	0.38 1.00 1.62	1.13 2.20 2.87	1.29 2.20 3.11
		\hat{c}	92.97 94.40 95.83	92.42 93.90 95.38	92.86 94.30 95.82
		\hat{c}_s	3.30 4.60 5.90	2.87 4.10 5.34	2.36 3.50 4.64
	0.15	\hat{c}_i	0.75 1.50 2.25	1.29 2.20 3.11	1.94 3.00 4.06
		\hat{c}	93.09 94.50 95.91	92.97 94.40 95.82	93.53 94.90 96.26
		\hat{c}_s	2.78 4.00 5.21	2.28 3.40 4.52	1.21 2.10 2.99
	0.20	\hat{c}_i	0.67 1.40 2.13	1.05 1.90 2.75	1.53 2.50 3.47
		\hat{c}	93.87 95.20 96.53	93.76 95.10 96.44	93.42 94.80 96.18
		\hat{c}_s	2.20 3.40 4.52	1.94 3.00 4.06	1.69 2.70 3.70

Tabela A36: Estimativas dos coeficientes de confiança (\hat{c}) e das probabilidades das caudas (\hat{c}_i e \hat{c}_e), e seus respectivos intervalos de confiança para os métodos do logaritmo(I), método do escore(II) e método do escore corrigido para assimetria(III) para os diversos delineamentos considerados, para tamanhos de amostras $n_{01}=n_{11}=30$ e $n_{02}=n_{12}=50$.

ϕ	p_0	Est.	Método I	Método II	Método III	
0.5	0.25	\hat{c}_i	2.02 3.10 4.17	1.78 2.80 3.82	1.69 2.70 3.70	
		\hat{c}	94.10 95.40 96.70	93.31 94.70 96.09	93.31 94.70 96.09	
		\hat{c}_e	0.75 1.50 2.25	1.53 2.50 3.47	1.61 2.60 3.59	
	0.50	\hat{c}_i	2.03 3.10 4.17	1.37 2.30 3.23	1.37 2.30 3.23	
		\hat{c}	95.13 96.30 94.47	95.13 96.30 97.47	94.90 96.10 97.30	
		\hat{c}_e	0.12 0.60 1.08	0.67 1.40 2.13	0.82 1.60 2.38	
	0.75	\hat{c}_i	2.28 3.40 4.52	1.86 2.90 3.94	1.78 2.80 3.82	
		\hat{c}	93.54 94.90 96.26	93.09 94.50 95.91	92.97 94.40 95.83	
		\hat{c}_e	0.90 1.70 2.50	1.61 2.60 3.59	1.78 2.80 3.82	
	1.0	0.25	\hat{c}_i	1.53 2.50 3.47	1.53 2.50 3.47	1.53 2.50 3.47
			\hat{c}	93.87 95.20 96.53	93.87 95.20 96.53	93.87 95.20 96.53
			\hat{c}_e	1.37 2.30 3.23	1.37 2.30 3.23	1.37 2.30 3.23
0.50		\hat{c}_i	1.53 2.50 3.47	1.69 2.70 3.70	1.69 2.70 3.70	
		\hat{c}	93.65 95.00 96.35	93.09 94.50 95.91	93.09 94.50 95.91	
		\hat{c}_e	1.53 2.50 3.47	1.78 2.80 3.82	1.78 2.80 3.82	
0.75		\hat{c}_i	1.13 2.00 2.87	1.45 2.40 3.35	1.45 2.40 3.35	
		\hat{c}	93.87 95.20 96.53	93.31 94.70 96.09	93.31 94.70 96.09	
		\hat{c}_e	1.78 2.80 3.82	1.86 2.90 3.94	1.86 2.90 3.94	
2.0		0.125	\hat{c}_i	0.60 1.30 2.00	1.29 2.20 3.11	1.94 3.00 4.06
			\hat{c}	94.33 95.60 96.87	93.65 95.00 96.35	92.86 94.30 95.74
			\hat{c}_e	2.05 3.10 4.17	1.78 2.80 3.82	1.69 2.70 3.71
	0.25	\hat{c}_i	0.90 1.70 2.50	1.61 2.60 3.59	1.61 2.60 3.58	
		\hat{c}	93.76 95.10 96.44	93.31 94.70 96.01	93.42 94.80 96.18	
		\hat{c}_e	2.11 3.20 4.29	1.69 2.70 3.70	1.61 2.60 3.59	
	0.375	\hat{c}_i	0.75 1.50 2.25	1.45 2.40 3.35	1.53 2.50 3.47	
		\hat{c}	93.09 94.50 95.91	92.86 94.30 95.74	96.31 94.70 96.09	
		\hat{c}_e	2.78 4.00 5.21	2.19 3.30 4.41	1.78 2.80 3.82	
	4.0	0.10	\hat{c}_i	0.90 1.70 2.50	1.69 2.70 3.70	2.02 3.10 4.17
			\hat{c}	93.87 95.20 96.53	93.42 94.80 96.18	93.64 95.00 96.35
			\hat{c}_e	2.02 3.10 4.17	1.53 2.50 3.47	1.05 1.90 2.75
0.15		\hat{c}_i	0.98 1.80 2.62	2.11 3.20 4.29	2.44 3.60 4.75	
		\hat{c}	94.78 96.00 97.21	93.87 95.20 96.53	93.76 95.10 96.44	
		\hat{c}_e	1.29 2.20 3.11	0.82 1.60 2.38	0.60 1.30 2.00	
0.20		\hat{c}_i	0.67 1.40 2.13	1.05 1.90 2.75	1.53 2.50 3.47	
		\hat{c}	93.76 95.10 96.44	93.31 94.70 96.09	93.09 94.50 95.91	
		\hat{c}_e	2.36 3.50 4.64	2.28 3.40 4.52	1.94 3.00 4.06	

Tabela A37: Estimativas dos coeficientes de confiança (\hat{c}) e das probabilidades das caudas (\hat{c}_i e \hat{c}_s), e seus respectivos intervalos de confiança para os métodos do logaritmo(I), método do escore(II) e método do escore corrigido para assimetria(III) para os diversos delineamentos considerados, para tamanhos de amostras $n_{01}=n_{02}=20$ e $n_{11}=n_{12}=30$.

ϕ	p_0	Est.	Metodo I			Metodo II			Metodo III		
0.5	0.25	\hat{c}_i	2.07	4.10	5.33	2.70	3.90	5.10	2.02	3.10	4.17
	0.50	\hat{c}	93.31	94.70	96.09	92.30	93.00	95.29	92.97	94.40	95.82
		\hat{c}_s	0.52	1.20	1.87	1.37	2.30	3.23	1.53	2.50	3.47
	0.75	\hat{c}_i	3.82	5.20	6.58	2.11	3.20	4.29	1.78	2.80	3.82
		\hat{c}	92.19	93.70	95.21	92.53	94.00	95.47	92.53	94.00	95.47
	0.50	\hat{c}_s	0.45	1.10	1.75	1.78	2.80	3.82	2.11	3.20	4.29
		\hat{c}_i	2.96	4.20	5.44	2.19	3.30	4.41	2.02	3.10	4.17
		\hat{c}	92.97	94.40	95.82	92.86	94.30	95.74	93.09	94.50	95.91
	0.75	\hat{c}_s	0.67	1.40	2.13	1.45	2.40	3.35	1.45	2.40	3.35
1.0		\hat{c}_i	1.86	2.90	3.94	1.69	2.70	3.70	1.69	2.70	3.70
		\hat{c}	93.87	95.20	96.56	92.86	94.30	95.74	92.75	94.30	95.65
	\hat{c}_s	1.05	1.90	2.75	1.94	3.00	4.06	2.02	3.10	4.17	
0.25	\hat{c}_i	1.45	2.40	3.35	1.21	2.10	2.99	1.29	2.20	3.11	
	\hat{c}	92.86	94.30	95.74	94.44	95.70	96.96	94.33	95.00	96.87	
	\hat{c}_s	1.94	3.00	4.06	1.29	2.20	3.11	1.29	2.20	3.11	
0.50	\hat{c}_i	2.36	3.50	4.64	1.94	3.00	4.06	1.94	3.00	4.06	
	\hat{c}	93.31	94.70	96.09	92.86	94.30	95.74	93.09	94.50	95.91	
	\hat{c}_s	0.98	1.80	2.62	1.69	2.70	3.70	1.53	2.50	3.47	
2.0	0.125	\hat{c}_i	0.67	1.40	2.13	0.97	1.80	2.62	1.13	2.00	2.87
	0.250	\hat{c}	94.21	95.50	96.78	93.42	94.80	96.18	93.48	94.80	96.18
		\hat{c}_s	2.02	3.10	4.17	2.28	3.40	4.52	2.11	3.20	4.29
	0.375	\hat{c}_i	0.60	1.30	2.00	1.21	2.10	2.99	1.94	3.00	4.06
		\hat{c}	93.31	94.70	96.09	92.75	94.20	95.65	92.53	94.00	95.47
	0.500	\hat{c}_s	2.70	4.00	5.21	2.53	3.70	4.87	1.94	3.00	4.06
		\hat{c}_i	1.13	2.00	2.87	1.94	3.00	4.06	2.11	3.20	4.29
	0.750	\hat{c}	93.31	94.70	96.09	92.53	94.00	95.47	92.53	94.00	95.47
		\hat{c}_s	2.19	3.30	4.41	1.94	3.00	4.06	1.78	2.80	3.82
4.0	0.10	\hat{c}_i	0.18	0.70	1.22	1.13	2.00	2.87	1.61	2.60	3.50
	0.15	\hat{c}	94.10	95.40	96.70	92.75	94.20	95.65	92.75	94.20	95.65
		\hat{c}_s	2.70	3.90	5.10	2.61	3.80	4.99	2.11	3.20	4.29
	0.20	\hat{c}_i	0.52	1.20	1.87	1.94	3.00	4.06	2.19	3.30	4.41
		\hat{c}	93.65	95.00	96.35	92.42	93.90	95.38	92.53	94.00	95.47
	0.25	\hat{c}_s	2.61	3.80	4.99	2.02	3.10	4.17	1.69	2.70	3.70
		\hat{c}_i	0.25	0.80	1.35	0.75	1.50	2.25	0.98	1.80	2.62
	0.30	\hat{c}	93.65	95.00	96.35	93.76	95.10	96.44	94.33	95.60	96.87
		\hat{c}_s	2.96	4.20	5.44	2.28	3.40	4.52	1.61	2.60	3.59

Tabela A38: Estimativas dos coeficientes de confiança (\hat{c}) e das probabilidades das caudas (\hat{c}_i e \hat{c}_e), e seus respectivos intervalos de confiança para os métodos do logaritmo(I), método do escore(II) e método do escore corrigido para assimetria(III) para os diversos delineamentos considerados, para tamanhos de amostras $n_{01}=n_{02}=20$ e $n_{11}=n_{12}=50$.

ϕ	p_0	Est.	Método I			Método II			Método III		
0.5	0.25	\hat{c}_i	2.02	3.10	4.17	1.69	2.70	3.70	1.45	2.40	3.35
		\hat{c}	94.67	95.90	97.15	93.65	95.00	96.35	93.20	94.60	96.00
		\hat{c}_e	0.38	1.00	1.62	1.37	2.30	3.23	1.94	3.00	4.06
	0.50	\hat{c}_i	2.36	3.50	4.64	1.29	2.20	3.11	1.05	1.90	2.75
		\hat{c}	93.99	95.30	96.61	94.10	95.40	96.70	93.76	95.10	96.44
		\hat{c}_e	0.52	1.20	1.87	1.45	2.40	3.35	1.94	3.00	4.06
	0.75	\hat{c}_i	2.28	3.40	4.52	1.13	2.00	2.87	0.97	1.80	2.62
		\hat{c}	94.78	96.00	97.21	95.01	96.20	97.38	94.90	96.10	97.30
		\hat{c}_e	0.12	0.60	1.00	0.97	1.80	2.62	1.21	2.10	2.99
1.0	0.25	\hat{c}_i	2.28	3.40	4.52	1.78	2.80	3.82	1.78	2.80	3.82
		\hat{c}	93.31	94.70	96.09	92.86	94.20	95.74	92.86	94.20	95.74
		\hat{c}_e	1.05	1.90	2.75	1.86	2.90	3.94	1.86	2.80	3.94
	0.50	\hat{c}_i	0.30	4.60	5.90	1.21	2.10	2.99	1.53	2.50	3.47
		\hat{c}	93.20	94.60	96.00	94.10	95.40	96.70	94.10	95.40	96.70
		\hat{c}_e	0.25	0.80	1.35	1.53	2.50	3.47	1.21	2.10	2.99
	0.75	\hat{c}_i	3.47	4.80	6.13	1.37	2.30	3.23	1.61	2.60	3.59
		\hat{c}	92.19	93.70	95.21	93.99	95.30	96.61	93.76	95.10	96.44
		\hat{c}_e	0.75	1.50	2.25	1.43	2.40	3.35	1.37	2.30	3.23
2.0	0.125	\hat{c}_i	2.36	3.50	4.64	2.36	3.50	4.64	2.53	3.70	4.87
		\hat{c}	92.97	94.40	95.82	92.19	93.70	95.21	92.19	93.70	95.21
		\hat{c}_e	1.21	2.10	2.99	1.78	2.80	3.82	1.61	2.60	3.59
	0.25	\hat{c}_i	2.11	3.20	4.29	2.11	3.20	4.29	2.19	3.30	4.41
		\hat{c}	93.09	94.50	95.91	92.97	94.40	95.83	93.09	94.50	95.91
		\hat{c}_e	1.37	2.30	3.23	1.45	2.40	3.35	1.29	2.20	3.11
	0.375	\hat{c}_i	1.45	2.40	3.35	1.69	2.70	3.70	1.53	2.50	3.45
		\hat{c}	94.33	95.60	96.87	93.65	95.00	96.35	94.33	95.60	96.87
		\hat{c}_e	1.13	2.00	2.87	1.37	2.30	3.23	1.05	1.90	2.75
4.0	0.10	\hat{c}_i	0.98	1.80	2.62	1.05	1.90	2.75	1.45	2.40	3.35
		\hat{c}	93.76	95.10	96.44	93.54	94.90	96.26	93.42	94.80	96.18
		\hat{c}_e	2.01	3.10	4.17	2.11	3.20	4.29	1.78	2.80	3.82
	0.15	\hat{c}_i	0.82	1.60	2.37	1.13	2.00	2.89	1.53	2.50	3.47
		\hat{c}	94.56	95.80	97.04	94.21	95.50	96.78	94.21	95.50	96.78
		\hat{c}_e	1.61	2.60	3.59	1.53	2.50	3.47	1.13	2.00	2.87
	0.20	\hat{c}_i	1.29	2.20	3.11	1.69	2.70	3.70	2.19	3.30	4.41
		\hat{c}	93.65	95.00	96.35	93.09	94.50	95.91	93.09	94.50	95.91
		\hat{c}_e	1.78	2.80	3.82	1.78	2.80	3.83	1.29	2.20	3.11

Tabela A39: Estimativas dos coeficientes de confiança (\hat{c}) e das probabilidades das caudas (\hat{c}_i e \hat{c}_s), e seus respectivos intervalos de confiança para os métodos do logaritmo(I), método do escore(II) e método do escore corrigido para assimetria(III) para os diversos delineamentos considerados, para tamanhos de amostras $n_{01}=n_{02}=30$ e $n_{11}=n_{12}=50$.

ϕ	p_0	Est.	Método I			Método II			Método III			
0.5	0.25	\hat{c}_i	2.87	4.10	5.33	2.36	3.50	4.64	1.69	2.70	3.70	
		\hat{c}	93.42	94.80	96.18	93.54	94.90	96.26	94.10	95.40	96.70	
		\hat{c}_s	0.45	1.10	1.75	0.82	1.60	2.38	1.05	1.90	2.75	
	0.50	\hat{c}_i	2.44	3.60	4.75	1.94	3.00	4.06	1.94	3.00	4.06	
		\hat{c}	93.87	95.20	96.53	93.20	94.60	96.00	93.09	94.50	95.91	
		\hat{c}_s	0.52	1.20	1.87	1.45	2.40	3.35	1.53	2.50	3.47	
	0.75	\hat{c}_i	2.02	3.10	4.17	1.61	2.60	3.59	1.61	2.60	3.59	
		\hat{c}	93.76	95.10	96.44	93.31	94.70	96.09	93.09	94.50	95.91	
		\hat{c}_s	0.98	1.80	2.62	1.69	2.70	3.70	1.86	2.90	3.94	
	1.0	0.25	\hat{c}_i	2.19	3.30	4.40	2.11	3.20	4.29	1.94	3.00	4.06
			\hat{c}	92.97	94.40	95.82	92.08	93.60	95.12	92.19	93.70	95.21
			\hat{c}_s	1.37	2.30	3.23	2.11	3.20	4.29	2.19	3.30	4.41
0.50		\hat{c}_i	2.28	3.40	4.52	1.37	2.30	3.23	1.45	2.40	3.35	
		\hat{c}	93.87	95.20	96.52	94.42	95.70	96.96	94.56	95.80	97.04	
		\hat{c}_s	0.67	1.40	2.13	1.13	2.00	2.87	0.97	1.80	2.62	
0.75		\hat{c}_i	2.11	3.20	4.29	1.53	2.50	3.47	1.61	2.60	3.59	
		\hat{c}	93.54	94.90	96.26	93.99	95.30	96.61	93.87	95.20	96.53	
		\hat{c}_s	1.05	1.90	2.75	1.29	2.20	3.11	1.29	2.20	3.11	
2.0		0.125	\hat{c}_i	1.53	2.50	3.47	1.78	2.80	3.82	1.86	2.90	3.94
			\hat{c}	93.99	95.30	96.61	93.54	94.90	96.26	93.65	95.00	96.35
			\hat{c}_s	1.29	2.20	3.11	1.37	2.30	3.23	1.21	2.10	2.99
	0.25	\hat{c}_i	1.61	2.60	3.59	1.94	3.00	4.06	2.19	3.30	4.41	
		\hat{c}	92.75	94.20	95.65	92.42	93.90	95.38	92.08	93.60	95.12	
		\hat{c}_s	2.11	3.20	4.29	2.02	3.10	4.17	2.02	3.10	4.17	
	0.375	\hat{c}_i	1.45	2.40	3.35	1.69	2.70	3.70	1.69	2.70	3.70	
		\hat{c}	93.09	94.50	95.91	92.75	94.20	95.65	93.20	94.60	96.00	
		\hat{c}_s	2.02	3.10	4.17	2.02	3.10	4.17	1.69	2.70	3.70	
	4.0	0.10	\hat{c}_i	1.37	2.30	3.23	1.94	3.00	4.06	2.78	4.00	5.21
			\hat{c}	93.53	94.90	96.26	92.64	94.10	95.56	92.08	93.60	95.12
			\hat{c}_s	1.78	2.80	3.82	1.86	2.90	3.94	1.45	2.40	3.35
0.15		\hat{c}_i	0.75	1.50	2.25	1.37	2.30	3.23	1.86	2.90	3.94	
		\hat{c}	94.67	95.90	97.13	94.44	95.70	96.96	94.10	95.40	96.70	
		\hat{c}_s	1.61	2.60	3.59	1.13	2.00	2.87	0.90	1.70	2.50	
0.20		\hat{c}_i	1.21	2.10	2.99	1.37	2.30	3.23	1.69	2.70	3.70	
		\hat{c}	93.20	94.60	96.00	93.09	94.50	95.91	92.97	94.40	95.83	
		\hat{c}_s	2.19	3.30	4.41	2.11	3.20	4.29	1.86	2.90	3.94	

Tabela A310: Estimativas dos coeficientes de confiança(\hat{c}) e das probabilidades das caudas(\hat{c}_i e \hat{c}_s) e seus respectivos intervalos de confiança para os métodos do logaritmo(I), método do escore(II) e método do escore corrigido para assimetria(III) para os diversos delineamentos considerados no caso de 5 estratos.

$n_{ok} = n_{ik}$	ϕ	Est	Método I			Método II			Método III		
20	0.5	\hat{c}_i	1.53	2.50	3.47	1.13	2.00	2.87	0.98	1.80	2.62
		\hat{c}	94.56	95.80	97.04	94.78	96.00	97.21	94.67	95.90	97.
		\hat{c}_s	0.90	1.70	2.50	1.13	2.00	2.87	1.37	2.30	3.23
	1.0	\hat{c}_i	1.53	2.50	3.46	1.13	2.00	2.87	1.13	2.00	2.87
		\hat{c}	92.41	93.90	95.38	93.42	94.80	96.16	93.42	94.80	96.18
		\hat{c}_s	2.44	3.60	4.75	2.11	3.20	4.29	1.13	3.20	4.29
	2.0	\hat{c}_i	1.45	2.40	3.35	1.78	2.80	3.82	1.78	2.80	3.82
		\hat{c}	93.42	94.80	96.18	93.53	94.90	96.26	93.76	95.10	96.44
		\hat{c}_s	1.78	2.80	3.82	1.37	2.30	3.23	1.21	2.10	2.99
30	0.5	\hat{c}_i	2.36	3.50	4.64	2.19	3.30	4.41	2.19	3.30	4.41
		\hat{c}	93.20	94.60	96.00	92.97	94.40	95.83	92.97	94.40	95.83
		\hat{c}_s	1.05	1.90	2.75	1.37	2.30	3.23	1.37	2.30	3.23
	1.0	\hat{c}_i	2.02	3.10	4.17	1.94	3.00	4.06	2.02	3.10	4.17
		\hat{c}	92.55	94.00	95.47	92.97	94.40	95.83	92.86	94.30	95.74
		\hat{c}_s	1.86	2.90	3.94	1.61	2.60	3.59	1.61	2.60	3.59
	2.0	\hat{c}_i	1.78	2.80	3.82	2.19	3.30	4.41	2.21	3.40	4.52
		\hat{c}	93.42	94.80	96.18	93.20	94.60	96.00	93.31	94.70	96.09
		\hat{c}_s	1.45	2.40	3.35	1.21	2.10	2.99	1.05	1.90	2.75
50	0.5	\hat{c}_i	1.69	2.70	3.70	1.45	2.40	3.35	1.29	2.20	3.11
		\hat{c}	93.20	94.60	96.00	93.42	94.80	96.18	93.42	94.80	96.18
		\hat{c}_s	1.69	2.70	3.70	1.78	2.80	3.82	1.94	3.00	4.06
	1.0	\hat{c}_i	1.78	2.80	3.82	1.69	2.70	3.70	1.78	2.80	3.82
		\hat{c}	93.31	94.70	96.09	93.42	94.80	96.18	93.31	94.70	96.09
		\hat{c}_s	1.53	2.50	3.47	1.53	2.50	3.47	1.53	2.50	3.47
	2.0	\hat{c}_i	0.75	1.50	2.25	0.82	1.60	2.38	0.90	1.70	2.50
		\hat{c}	93.87	95.20	96.53	94.44	95.70	96.96	94.44	95.70	96.96
		\hat{c}_s	2.19	3.30	4.41	1.69	2.70	3.70	1.61	2.60	3.59

APÊNDICE 4
Programas

Este apêndice contém o programa utilizado nas simulações e também o programa para cálculo dos intervalos de confiança para um dado conjunto de dados. Para as simulações despreze as partes marcadas com dois traços. Para cálculo dos limites de confiança para determinado conjunto de dados despreze as partes marcadas com um traço.

```

DATA ARQ1;
      /* NUMERO DE SIMULACOES*/;
NS=1000;
      /*GERACAO DAS AMOSTRAS*/;
RETAIN SEED1 79133;
RETAIN SEED2 16570;
RETAIN SEED3 91548;
RETAIN SEED4 32577;
      /* BINOMIAL COM PARAMETROS N11=20 E P11=0.40*/;
      /* BINOMIAL COM PARAMETROS N01=20 E P01=0.10*/;
      /* BINOMIAL COM PARAMETROS N12=30 E P12=0.60*/;
      /* BINOMIAL COM PARAMETROS N02=30 E P02=0.15*/;
DO M=1 TO NS;
  CALL RANBIN(SEED1,20, 0.40,X1);
  CALL RANBIN(SEED2,20, 0.10,X2);
  CALL RANBIN(SEED3,30, 0.60,X3);
  CALL RANBIN(SEED4,30,0.15,X4);
  OUTPUT;
  KEEP X1 X2 X3 X4;
end;

```

PROC IML ;

```

PRINT 'SEMENTE1 79133';
PRINT 'SEMENTE2 16570';
PRINT 'SEMENTE3 91548';
PRINT 'SEMENTE4 32577';
NS=1000;
P1={0.4,0.60};
N1={20,30};
P0={0.10,0.15};
N0={20,30};
RR=4.0; PRINT RR N1 P1 N0 P0;

```



```

USE ARQ1;
READ ALL INTO MA;
NV=0.025;

```

```

/* Entrada de dados*/
/* Entre com a matriz de dados
   x=(x11 n11 x21 n21,x12 n12 x22 n22, ..... , x1k n1k x2k n2k);
   Se o nivel de significancia desejado é  $\alpha$ , entre com  $nv=\alpha/2$ . */
x=(
);
nv=
;

```

```
NV1=PROBIT(NV);
```

```
/* SUBROTINA AUXILIAR PARA MÉTODO DA SECANTE*/;
```

```
START EST(X,R6,H,IND1,P0,Q0,P1,Q1,F);
```

```
R7=REPEAT(1,1,NCOL(R6));
```

```
R5=REPEAT(1,NROW(X),1);
```

```
B=-((X(I,3I)+X(I,2I))*R6+(X(I,4I)+X(I,1I))*R7);
```

```
A=(X(I,2I)+X(I,4I))*R6;
```

```
C=X(I,1I)+X(I,3I);
```

```
P0=(-B-(((B**2)-4*A*C)**0.5))**(-1)**(2*A)**(-1);
```

```
P1=R6#P0;
```

```
Q1=1-P1;
```

```
Q0=1-P0;
```

```
Z1=((X(I,1I)*R7)-(X(I,2I)*P1))**Q1**(-1);
```

```
Z2=(X(I,2I)*X(I,4I)*P1)**((X(I,2I)*Q0#R6)+X(I,4I)*Q1)**(-1);
```

```
IF IND1=1 THEN DO;
```

```
SS1=Z1(I+,1I); SS2=Z2(I+,1I);
```

```
Z3=SS1**SS2**(-0.5);
```

```
F=Z3-H; FREE Z1 Z2 Z3 A B C R7 R5 ;
```

```
END;
```

```
ELSE DO;
```

```

Z3=(((Q1*(Q1-P1))*(XC(I,2)*P1)**(-2))-((Q0*(Q0-P0))*(XC(I,4)*P0)**(-2)))#(Z2**3);
SS1=Z1(I+,1);    SS2=Z2(I+,1);    SS3=Z3(I+,1);
Z4=SS1*(SS2**(-0.5))-((HC(I,1)**2)-1)*(SS3*(SS2**(-3/2)))#(1/6);
F=Z4-H; FREE Z1 Z2 Z3 Z4 A B C R7 R5 ;
END;
FINISH;
/* SUBROTINA PARA MÉTODO DA SECANTE*/;
START      RAIZ(G,R4,H,X,IND1,P1,Q1,Q0,SOL);
R5=REPEAT(1,NROW(X),1);
E=0.0005;
IF ((ABS(G(I,1)))>E) THEN DO;
  SOL=R4(I,1);
  P1=P1(I,1);
  Q1=Q1(I,1);
  Q0=Q0(I,1);
END;
ELSE DO;
  IF ((ABS(G(I,2)))>E) THEN DO;
    SOL=R4(I,2);
    P1=P1(I,2);
    Q1=Q1(I,2);
    Q0=Q0(I,2);
  END;
  ELSE DO;
    R8=R4(I,2) - ((R4(I,2)-R4(I,1))/(G(I,2)-G(I,1)))*G(I,2);
    IF R8<=0 THEN R8=0.001;
    RUN      EST(X,R8,HC(I,1),IND1,P0,Q0,P1,Q1,F);
    G1=F; MAXITER=150;
    /* CRITERIO DE PARADA*/;
    DO NIT=1 TO MAXITER  WHILE(ABS(G1)>E);
      R8=R4(I,2) - ((R4(I,2)-R4(I,1))/(G(I,2)-G(I,1)))*G(I,2);

```

```

IF (R8<=0) THEN R8=0.001;
RUN      EST(X,R8,H(J1,1),IND1,P0,Q0,P1,Q1,F);
G1=F;
R4(J1,1)=R4(J1,2);
R4(J1,2)=R8;
G(J1,1)=G(J1,2);
G(J1,2)=G1;NIT=NIT+1;
END;
IF (NIT>MAXITER) THEN DO;
  PRINT 'NUMERO MAXIMO DE ITERACOES ATINGIDO';
PRINT X;
END;
SOL=R8; FREE R4 G G1 E R5;
END;
END;
FINISH;

/* SUBROTINA PARA CALCULO DA ESTIMATIVA DO RISCO
RELATIVO E CONSTRUCAO DE INTERVALOS DE CONFIANCA
PELOS METODOS I E II*/;
START  INTER3(X,NV1,IND,SOL1,SOL,SOL2,LI,LS);
/*VALOR INICIAL PARA EMV */
R1=(X(J1,1)*X(J1,4))##((X(J1,2)+X(J1,4))##(-1));
R2=(X(J1,3)*X(J1,2))##((X(J1,2)+X(J1,4))##(-1));
R=(SUM(R1))/(SUM(R2));
/*CALCULO DO EMV*/
R3=1.1*R;
R4=R/JR3; FREE R R1 R2 R3;
R5=REPEAT(1,NROW(X),1);
R6=R5*R4;H=(0 0);
RUN      EST(X,R6,H,1,P0,Q0,P1,Q1,F);
G=F;
RUN      RAIZ(G,R4,H,X,1,P1,Q1,Q0,SOL);

```

```

/* CALCULO DO INTERVALO DE CONFIANCA PELO METODO DO LOG */;
A=X(|,4|)>#X(|,2|)>#P1;
B=X(|,2|)>#Q0#(SOL#R5)+X(|,4|)>#Q1;
C=A#(B##(-1));
V=SUM(C);
VAR=1/V; FREE A B C V;
LI=EXP(LOG(SOL)+NV1*(SQRT(VAR)));
LS=EXP(LOG(SOL)-NV1*(SQRT(VAR)));
L1=1.1*LI;
L2=1.1*LS ;
/*LIMITE INFERIOR PELO METODO DO ESCORE*/;
R4=LI || L1;
R6=R5*R4;
H=(-NV1) || (-NV1);
RUN EST(X,R6,H,1,P0,Q0,P1,Q1,F);
G=F;
RUN RAIZ(G,R4,H,X,1,P1,Q1,Q0,SOL1);
/*LIMITE SUPERIOR PELO METODO DO ESCORE*/;
R4=LS || L2;
R6=R5*R4;
H=NV1 || NV1;
RUN EST(X,R6,H,1,P0,Q0,P1,Q1,F);
G=F;
RUN RAIZ(G,R4,H,X,1,P1,Q1,Q0,SOL2);
U=SOL1;U1=LI;
/*LIMITES DE CONFIANCA PARA O CASO DE XIK=N1K, k=1,..,K*/;
IF IND=0 THEN DO;
SOL=1/SOL;
SOL1=1/SOL2;
LI=1/LS;
LS=1/U1;
SOL2=1/U;FREE U1 U;

```

```

END;
FINISH;
      /* SUBROTINA PARA DETERMINACAO DOS LIMITES DE CONFIANCA
      CORRIGIDOS PARA ASSIMETRIA */;
START   INTER3C(X,NV1,IND,SOL1,SOL2,SOL1C,SOL2C);
R5=REPEAT(1,NROW(X),1);
      /*LIMITE INFERIOR CORRIGIDO PARA ASSIMETRIA*/;
SOL3=1.1*SOL1;
SOL4=1.1*SOL2;
R4=SOL1 | |SOL3;
R6=R5*R4;
H=(-NV1) | |(-NV1);
RUN     EST(X,R6,H,0,P0,Q0,P1,Q1,F);
G=F;
RUN     RAIZ(G,R4,H,X,0,P1,Q1,Q0,SOL1C);
      /*LIMITE SUPERIOR CORRIGIDO PARA ASSIMETIRA*/;
R4=SOL2 | |SOL4;
R6=R5*R4;
H=NV1 | |NV1;
RUN     EST(X,R6,H,0,P0,Q0,P1,Q1,F);
G=F;
RUN     RAIZ(G,R4,H,X,0,P1,Q1,Q0,SOL2C);
U=SOL1C;
      /* LIMITES CORRIGIDOS PARA ASSIMETRIA PARA O CASO DE
      X1k=N1k,k=1..k*/;
IF IND=0 THEN DO;
  SOL1C=1/SOL2C;
  SOL2C=1/U;FREE  U1;
END;
FINISH;
      /*SUBROTINA PARA CALCULODOS LIMITES PARA METODO DO
      ESCORE QUANDO X1K=N1K (k=1...K) OU X0k=N0k (k:1...K)*/;

```

```

START      INTER5(X,S1,S3,NV1,SOL1,SOL,SOL2,LI,LS);
R5=REPEAT(1,NROW(X),1);
      /* VALORES INICIAIS PARA LIMITES PELO METODO DO ESCORE*/;
Y=X+0.5;
R1=(Y(|,1|)>#Y(|,4|))#((Y(|,2|)>#Y(|,3|))##(-1));
W=(Y(|,1|)##(-1))-Y(|,2|)##(-1)+Y(|,3|)##(-1)-Y(|,4|)##(-1);
LR=LOG(R1);
R2=LR#W;
W1=SUM(W);
R=SUM(R2)/W1; FREE Y R1 W LR R2;
VAR=1/W1;PRINT R VAR;
LL=EXP(R+NV1*(SQRT(VAR)));PRINT LL;
LU=EXP(R-NV1*(SQRT(VAR)));PRINT LU;
IF(S1=0) THEN DO;
  SOL=0;
  SOL1=0;
  L2=1.1*LU;
      /*LIMITE INFERIOR PELO METODO DO ESCORE*/;
R4=LU | | L2;
R6=R5*R4;
H=NV1 | | NV1;
RUN EST(X,R6,H,1,P0,Q0,P1,Q1,F);
G=F;
RUN RAIZ(G,R4,H,X,1,P1,Q1,Q0,SOL2);
END;
IF(S3=0) THEN DO;
  SOL=1000;
  SOL2=1000;
  L1=1.1*LL;
      /*LIMITE SUPERIOR PELO METODO DO ESCORE*/;
R4=LL | | L1;
R6=R5*R4;

```

```

H=(-NV1) | | (-NV1);
RUN      EST(X,R6,H,1,P0,Q0,P1,Q1,F);
G=F;
RUN      RAIZ(G,R4,H,X,1,P1,Q1,Q0,SOL1);
END;
: : 0;LS=1000;
FINISH;

```

```

RESF=REPEAT(0,NS,7);
CI 1=0 ; CS1=0 ;
CI 2=0 ; CS2=0 ;
CI 3=0 ; CS3=0 ;
DO L=1 TO NS;
  X=(MAC | L, 1 | > | 20 | MAC | L, 2 | > | 20 ) // (MAC | L, 3 | > | 30 | MAC | L, 4 | > | 30 );

```

```
do I=1 to 1;
```

```

S1=X( | +, 1 | > );
S2=X( | +, 2 | > );
S3=X( | +, 3 | > );
S4=X( | +, 4 | > );
      /*CASO PARTICULAR 3 */;
IF((S1=0)&(S3=0)) THEN DO;
  PRINT 'CASO PARTICULAR 3';
  SOL1=0;
  SOL=-1;
  SOL2=1000;
  LI=0;
  LS=1000;
  SOL1C=0;
  SOL2C=1000;
END;
      /* CASO PARTICULAR 4 */;
ELSE IF ((S2=S1)&(S3=S4)) THEN DO;

```

```

PRINT 'CASO PARTICULAR 4';
SOL1=S2/(S2+(NV1#2));
SOL=1;
SOL2=(S4+(NV1#2))/S4;
LI=1;
LS=1;
END;

/*CASO PARTICULAR 5*/;
ELSE IF (MIN(X<|,2>-X<|,1>))=0 & (MIN(X<|,4>-X<|,3>))=0 THEN DO;
PRINT 'CASO PARTICULAR 5 - FUNCAO INDEFINIDA'; PRINT X;
SOL1=0; SOL=-1; SOL2=1000; LI=0; LS=1000;
SOL1C=0; SOL2C=1000;
END;

/*CASO DE X1K=N1K(k=1,...k)*/;
ELSE IF ((MIN(X<|,2>-X<|,1>))=0) THEN DO;
X=X<|,3>||X<|,4>||X<|,1>||X<|,2>;
IND=0;PRINT IND;
RUN INTER3(X,NV1,IND,SOL1,SOL,SOL2,LI,LS);
RUN INTER3C(X,NV1,IND,SOL1,SOL2,SOL1C,SOL2C);
END;

/*CASOS PARTICULARES 1 E 2 */;
ELSE IF ((S1=0)|(S3=0)) THEN DO;
RUN INTER5(X,S1,S3,NV1,SOL1,SOL,SOL2,LI,LS);
/*LIMITE SUPERIOR CORRIGIDO PARA ASSIMETRIA*/;
IF(S1=0) THEN DO;
SOL1C=0;
SOL4=1.1*SOL2;
R4=SOL2||SOL4;
R6=R5*R4;
H=NV1||NV1;
RUN EST(X,R6,H,0,P0,Q0,P1,Q1,F);
G=F;

```



```

RUN      RAIZ(G,R4,H,X,0,P1,Q1,Q0,SOL2C);
END;
      /*LIMITE INFERIOR CORRIGIDO PARA ASSIMETRIA*/;
IF(S3=0) THEN DO;
  SOL2C=1000;
  SOL3=1.1*SOL1;
  R4=SOL1 || SOL3;
  R6=R5*R4;
  H=(-NV1) || (-NV1);
  RUN      EST(X,R6,H,0,P0,Q0,P1,Q1,F);
  G=F;
  RUN      RAIZ(G,R4,H,X,0,P1,Q1,Q0,SOL1C);
END;
END;
ELSE DO;
  IND=1;
  RUN      INTER3(X,NV1,IND,SOL1,SOL,SOL2,LI,LS);
  RUN      INTER3C(X,NV1,IND,SOL1,SOL2,SOL1C,SOL2C);
END;
end;

```

```

/* sol1= limite inferior pelo metodo do escore
  sol2= limite superior pelo metodo do escore
  sol1c= limite inferior corrigido para assimetria
  sol2c= limite superior corrigido para assimetria
  sol= estimativa de maxima verossimilhanca
  li= limite inferior pelo metodo do logaritimo
  ls= limite superior pelo metodo do logaritimo*/;

```

```
RESF(|L,|)=SOL1|SOL|SOL2|LI|LS|SOL1C|SOL2C;
print resf;
```

```
RESF(|L,|)=SOL1|SOL|SOL2|LI|LS|SOL1C|SOL2C;
IF (LS<RR) THEN CS1=CS1+1;
IF (SOL2<RR) THEN CS2=CS2+1;
IF (SOL2C<RR) THEN CS3=CS3+1;
IF (LI>RR) THEN CI1=CI1+1;
IF (SOL1>RR) THEN CI2=CI2+1;
IF (SOL1C>RR) THEN CI3=CI3+1;
END;

/* CALCULO DOS INTERVALOS DE CONFIANCA PARA ESTIMATIVAS DOS
COEFICIENTES DE CONFIANCA E DAS PROBABILIDADES DAS CAUDAS
CC1 = COEFICIENTE DE CONFIANCA ESTIMADO PELO METODO I
CC2 = COEFICIENTE DE CONFIANCA ESTIMADO PELO METODO II
CC3 = COEFICIENTE DE CONFIANCA ESTIMADO PELO METODO III*/;
CC1=NS-CI1-CS1;
CC2=NS-CI2-CS2;
CC3=NS-CI3-CS3;
CC=(CI1|CC1|CS1)//(CI2|CC2|CS2)//(CI3|CC3|CS3);
VC=((CG#((1-CC#(NS**(-1)))##2)))+(NS-CC)#((0-CC#(NS**(-1)))##2))#
(1/(NS*(NS-1)));
PRINT VC;

/* LC1 E LC2 - LIMITES INFERIORES E SUPERIORES DE CONFIANCA
PARA COEF. DE CONFIANCA E PROBABILIDADES DAS CAUDAS */;
LC1=(CC/NS)+NV1#(VC##0.5);
LC2=(CC/NS)-NV1#(VC##0.5); PRINT LC1 LC2;

/*CALCULO DOS COMPRIMENTOS MEDIOS ESPERADOS DOS INTERVALOS DE
CONFIANCA E DE SUAS VARIANCIAS
MEDA1 - COMPRIMENTO MEDIO DOS INTERVALOS OBTIDOS PELO METODO I
MEDA2 - COMPRIMENTO MEDIO DOS INTERVALOS OBTIDOS PELO METODO II
MEDA3 - COMPRIMENTO MEDIO DOS INTERVALOS OBTIDOS PELO METODO III
VARA1 - VARIANCIA DE MEDA1
VARA2 - VARIANCIA DE MEDA2
VARA3 - VARIANCIA DE MEDA3 */;
A1=RESF(|,5|)-RESF(|,4|);
```

```

A2=RESF( | , 3 | )-RESF( | , 1 | );
A3=RESF( | , 7 | )-RESF( | , 6 | );
MEDA1=A1( | : | );
MEDA2=A2( | : | );
MEDA3=A3( | : | );
SQ1=A1( | ## | );
SQ2=A2( | ## | );
SQ3=A3( | ## | );
VARA1=(SQ1-NS*(MEDA1**2))/(NS-1)*NS;
VARA2=(SQ2-NS*(MEDA2**2))/(NS-1)*NS;
VARA3=(SQ3-NS*(MEDA3**2))/(NS-1)*NS;
/* CALCULO DO VALOR ESPERADO DDO ESTIMADOR DO RRE E DE Sua
VARIANCIA
SOLMED - RISCO RELATIVO ESPERADO
VSOL - VARIANCIA DO RISCO RELATIVO ESTIMADO*/;
SOL =RESF( | , 2 | );
SOLMED=SOL( | : | );
SQ4=SOL( | ## | );
VSOL=(SQ4-NS*(SOLMED**2))/(NS-1);
SOL1=RESF( | , 1 | );
SOL2=RESF( | , 3 | );
LI=RESF( | , 4 | );
LS=RESF( | , 5 | );
SOL1C=RESF( | , 6 | );
SOL2C=RESF( | , 7 | );
PRINT MEDA1 MEDA2 MEDA3 SOLMED ;
PRINT VARA1 VARA2 VARA3 VSOL ;
CREATE ARQSOL FROM RESF;
APPEND FROM RESF;
CLOSE ARQSOL;
PRINT CC;
QUIT;
LIBNAME INSAS 'K';
DATA INSAS.S20301D;
SET
ARQSOL;

```

run;