UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

JUAN CARLOS MANZUR VILLA

A Abordagem de Nyman-Beurling para a Hipótese de Riemann

Campinas

2018

Juan Carlos Manzur Villa

A Abordagem de Nyman-Beurling para a Hipótese de Riemann

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Sahibzada Waleed Noor

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Juan Carlos Manzur Villa e orientada pelo Prof. Dr. Sahibzada Waleed Noor.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Manzur Villa, Juan Carlos, 1993-
M319a A abordagem de Nyman-Beurling para a hipótese de Riemann / Juan Carlos Manzur Villa. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Sahibzada Waleed Noor.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Riemann, Hipótese de. 2. Hardy, Espaços de. 3. Análise funcional. I. Noor, Sahibzada Waleed, 1984-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The Nyman-Beurling approach to the Riemann hypothesis
Palavras-chave em inglês:
Riemann hypothesis
Hardy spaces
Functional analysis
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Sahibzada Waleed Noor [Orientador]
Dimitar Kolev Dimitrov
Douglas Duarte Novaes
Data de defesa: 23-02-2018
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 23 de fevereiro de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). SAHIBZADA WALEED NOOR

Prof(a). Dr(a). DIMITAR KOLEV DIMITROV

Prof(a). Dr(a). DOUGLAS DUARTE NOVAES

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Aos meus pais, Genis e Juan, e aos meus irmãos, Riguel e Jeffrey...

Agradecimentos

Agradeço principalmente aos meus pais e à minha família, pela força nos momentos de dificuldade e, apesar da distância, pelo apoio incondicional, em especial à minha mãe, por sempre priorizar meus estudos e me proporcionar a educação que hoje tenho.

Ao meu orientador Waleed, pela paciência, seus conselhos e sua constante ajuda para a terminação deste trabalho; também por sua humildade e simplicidade, razão pela qual estou orgulhoso de ter sido orientado por ele.

Ao professor Boris, meu orientador na graduação, por me ensinar sempre e me tornar um melhor estudante.

Aos meus amigos, Fabián e Gustavo, e aos meus colegas do IMECC, que são muitos, pelos momentos de diversão e fraternidade.

Finalmente, agradeço à CAPES por ter-me financiado durante os 24 meses e ao IMECC por ter-me aceitado como aluno regular do mestrado.

Resumo

A hipótese de Riemann é considerada o mais importante problema aberto da matemática pura, o qual afirma que os zeros não triviais da função zeta de Riemann estão localizados sobre a "linha crítica". Esse problema tem sido estudado por aproximadamente um século e meio, mas ainda não se tem nenhuma prova para ela. O objetivo principal desta dissertação é apresentar reformulações em alguns espaços de Hilbert desta conjectura, principalmente o Teorema de Nyman-Beurling e seu respectivo refinamento feito por Baez-Duarte. Também serão apresentadas algumas outras equivalências recentes da hipótese de Riemann.

Palavras-chave: Hipótese de Riemann; espaços de Hardy; conjunto total.

Abstract

The Riemann hypothesis is considered the most important open problem of pure mathematics, which states that the non-trivial zeros of the Riemann zeta function lie on the "critical line". This problem has been studied for about a century and a half, but there is still no proof for it. The main purpose of this thesis is to present some Hilbert space reformulations of this conjecture, mainly the Nyman-Beurling Theorem and its respective refinement by Baez-Duarte. Some other recent equivalences of the Riemann hypothesis will also be presented.

Keywords: Riemann hypothesis; Hardy spaces; total set.

Lista de símbolos

$\mathbb{C}$	Conjunto dos número complexos
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{D}$	Disco aberto unitário
$\sim$	Assintoticamente semelhante
$\mathrm{Re}(s)$	Parte real de um número complexo s
$L^2(X)$	Espaço das funções quadrado-integráveis em X
$\mathbb{C}_\alpha$	Números complexos com parte real maior que α
$H^2(\mathbb{D})$	O espaço de Hardy do disco $\mathbb{D}$. Ver página 19
$H^p(\mathbb{C}_\alpha)$	O espaço de Hardy do semiplano $\mathbb{C}_\alpha$. Ver página 24
$H^\infty(\mathbb{C}_\alpha)$	Espaço das funções analíticas e limitadas em $\mathbb{C}_\alpha$
$\| \,.\, \|_p$	Norma em L^p. Ver página 20
$\| \,.\, \|$	Norma em $H^2(\mathbb{C}_\alpha)$. Ver página 24
$\| \,.\, \|_\infty$	Norma em $H^\infty(\mathbb{C}_\alpha)$. Ver página 24
μ	Função de Möbius. Ver definição 1.5
Γ	Função gamma. Ver definição 1.2
ζ	Função zeta de Riemann. Ver definição 1.3
ξ	Função xi. Ver definição 1.4
$\widehat{\xi}$	Ver página 18
$\mathcal{M}$	Transformada de Mellin
$\mathcal{F}$	Transformada de Fourier
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	Espaço de Schwartz. Ver definição 1.8
$\log$	Função logaritmo com base e

$\lfloor x \rfloor$	Parte inteira de x
$\{x\}$	Parte fracionária de x
χ_λ	Função característica do intervalo $(0, \lambda)$
$P_r(\theta)$	Núcleo de Poisson. Ver definição 1.6
$\mathcal{V}$	Subespaço das funções em $L^2((0,1])$ que são constantes quase-sempre em cada intervalo $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$
$\mathcal{H}$	Ver 3.3

Sumário

Introdução

A hipótese de Riemann é uma conjectura matemática, a qual foi publicada pela primeira vez em 1859 pelo matemático Bernhard Riemann. Essa conjectura é considerada o mais importante problema aberto da matemática pura: tal conjectura afirma que os zeros da função zeta de Riemann no plano complexo que têm parte real entre 0 e 1 estão localizados sobre a “linha crítica” Re(s)=1/2. Este problema é atualmente considerado um dos problemas do milênio. Sua importância reside nas inúmeras aplicações e implicações tanto na física como matemática, em especial, nas teorias de informação e segurança, principalmente como transações bancárias e serviços de internet.

Em 1950, Bertil Nyman introduziu em sua tese de doutorado, [11], uma formulação da hipótese de Riemann equivalente à densidade do espaço gerado por uma família de funções, $\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$, em $L^2((0,1])$. Cinco anos depois, no artigo [7], Arne Beurling faz uma generalização do Teorema de Nyman, onde, além de generalizar o espaço $L^2((0,1])$ para os espaços $L^p((0,1])$, $1 < p < \infty$, adiciona outra equivalência que formula que a hipótese de Riemann é equivalente ao fato que a função constante igual 1 no intervalo $(0,1]$ esteja no fecho do espaço gerado pela família antes mencionada. Essas três equivalências são conhecidas hoje como o critério de Nyman-Beurling para a hipótese de Riemann.

Nesse contexto, no ano 2003, Luis Baez-Duarte no artigo [2], faz um refinamento do critério de Nyman-Beurling: reduz o critério a um problema relacionado com um conjunto enumerável, isto é, afirma e demonstra que a hipótese de Riemann é equivalente a garantir a densidade de um subconjunto enumerável do espaço gerado por $\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

O objetivo desta dissertação é mostrar esses resultados em termos dos espaços de Hardy $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$, além de mostrar algumas outras equivalências recentes da hipótese de Riemann, [3] e [16].

O trabalho será dividido em três capítulos: iniciamos o capítulo 1 apresentando conceitos referentes à função zeta de Riemann e sua respectiva continuação analítica. Introduziremos também o espaço de Hardy no disco; além disso, apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos correspondentes à teoria analítica de números e à teoria da medida.

No capítulo 2, na primeira seção, estudaremos os espaços $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$, dando caracterizações e propriedades importantes destes espaços. Para a segunda seção mostraremos reformulações da hipótese de Riemann relacionadas com os espaços $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$, introduzindo o já mencionado critério de Nyman-Beurling. A referência para este capítulo será o artigo [3].

Finalmente, no capítulo 3, daremos algumas outras reformulações da hipótese de Riemann como, por exemplo, o já mencionado Teorema de Baez-Duarte que refina o critério de Nyman-Beurling; também a aquivalência introduzida no artigo [16] referente aos coeficientes de umas certas projeções ortogonais num espaço de Hilbert, a qual surgiu de uma pergunta feita no artigo [4]. As referências para este capítulo serão [3] e [16].

1 Preliminares

Neste capítulo serão dados todos os conceitos necessários para o desenvolvimento desta dissertação. Começaremos introduzindo as funções gamma, zeta e xi no semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$, logo estenderemos as funções gamma e xi como funções meromorfas no plano complexo e, daí, estender também a função zeta de Riemann como função meromorfa. Num segundo lugar exporemos a hipótese de Riemann e alguns resultados relacionados com a mesma. Introduziremos também o espaço de Hardy no disco e, finalmente, introduziremos algumas outras propriedades sobre os espaço L^p e a transformada de Fourier que serão úteis ao decorrer deste trabalho.

As demostrações dos resultados abordados neste capítulo serão, em sua totalidade, omitidas. Para mais informações sobre esses tópicos, consulte [1], [6], [8], [9], [10], [12], [13], [14] e [15].

1.1 A função zeta de Riemann

Nesta seção introduziremos a função zeta de Riemann e sua respectiva extensão como função meromorfa no plano complexo. Também algumas propriedades que satisfaz esta função.

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [12].

Definição 1.1. *Dada uma sequência $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ de números complexos diferentes de zero, dizemos que $\prod_{k=1}^{\infty} w_k$ converge a P e escrevemos*

$$\prod_{k=1}^{\infty} w_k = P$$

se $\{\prod_{k=1}^{n} w_k\} \longrightarrow P$ quando $n \longrightarrow \infty$ e P é diferente de 0.

Se um número finito de w_k's são zero, dizemos que o produto converge a 0 se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $w_k \neq 0$ para todo $k \geq N$ e

$$\prod_{k=N}^{\infty} w_k$$

converge como se definiu acima.

Definição 1.2. *Para $s > 0$, a função gamma é definida por*

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt. \tag{1.1}$$

Proposição 1.1. *A função gamma se estende a uma função analítica no semiplano $Re(s) > 0$, e ainda vem dada pela fórmula integral* (1.1).

Lema 1.1. *Se $Re(s) > 0$, então*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Em particular $\Gamma(n+1) = n!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

A função gamma pode ser estendida analiticamente a uma função meromorfa no plano complexo, conforme o teorema a seguir.

Teorema 1.1. *A função $\Gamma(s)$ inicialmente definida para $Re(s) > 0$ tem uma continuação analítica a uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujas únicas singularidades são polos simples nos inteiros não positivos $s = 0, -1, \ldots$. O resíduo de Γ em $s = -n$ é $(-1)^n/n!$.*

Teorema 1.2. *A função Γ tem a seguinte propriedade: $1/\Gamma(s)$ é uma função inteira de s com zeros simples em $s = 0, -1, -2, \ldots$ e não se anula em nenhum outro lugar.*

Definição 1.3. *A função zeta de Riemann é inicialmente definida para números reais $s > 1$ pela série convergente*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Como no caso da função gamma, a função zeta de Riemann também pode ser estendida analiticamente a uma função meromorfa no plano complexo. Primeiramente estende-se ζ a um semiplano de $\mathbb{C}$ e em seguida se faz para todo o plano.

Proposição 1.2. *A série que define $\zeta(s)$ converge sempre que $Re(s) > 1$, e a função ζ é holomorfa neste semiplano.*

A partir da função zeta de Riemann podemos definir uma nova função que vai nos permitir estender a função zeta de Riemann.

Definição 1.4. *A função Xi é definida inicialmente para $Re(s) > 1$, é dada por*

$$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

Teorema 1.3. *A função ξ é holomorfa para $Re(s) > 1$ e tem uma continuação em todo $\mathbb{C}$ como uma função meromorfa com únicos polos simples em $s = 0$ e $s = 1$. Mais ainda,*

$$\xi(s) = \xi(1-s), \text{ para todo } s \in \mathbb{C}.$$

Observação 1.1. *A partir da Definição 1.4 temos que, para $Re(s) > 1$,*

$$\zeta(s) = \pi^{s/2}\frac{\xi(s)}{\Gamma(s/2)}.$$

Como $1/\Gamma(s/2)$ *é uma função inteira com zeros simples em* $0, -2, -4\ldots,$ *e* ξ *tem continuação como função meromorfa para todo* $\mathbb{C}$*, segue que* ζ *tem continuação meromorfa para todo* $\mathbb{C}$*, cuja única singularidade é o polo simples em* $s = 1$*, pois o polo simples de* ξ *em* $s = 0$ *é cancelado pelo zero simples de* Γ *em* $s = 0$*. Segue também que* ζ *se anula em todos os inteiros pares negativos,* $-2, -4, -6, \ldots$*; além disso, esses serão os únicos zeros fora da faixa* $0 \leq Re(s) \leq 1$*. Tudo isto vem resumido nos seguintes teoremas.*

Teorema 1.4. *A função zeta de Riemann tem uma continuação meromorfa em todo o plano complexo, cuja única singularidade é um polo simples em* $s = 1$*.*

Teorema 1.5. *Os únicos zeros de* ζ *fora da faixa* $0 \leq Re(s) \leq 1$ *são os inteiros pares negativos,* $-2, -4, -6\ldots.$

Teorema 1.6. *A função zeta de Riemann não tem zeros sobre a linha* $Re(s) = 1$*.*

Os zeros de ζ fora da faixa $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ são chamados de zeros triviais.

1.2 A hipótese de Riemann e algumas outras propriedades

Nesta seção apresentaremos uma conjectura relacionada aos zeros da função zeta de Riemann, conhecida como a hipótese de Riemann. Apresentaremos também algumas propriedades da função zeta de Riemann sob a validade desta conjectura. Além disso, alguns outros resultados sobre análise complexa serão introduzidos.

Começamos denotando o espaço $\mathbb{C}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, como sendo o semiplano

$$\mathbb{C}_\alpha = \{s = \sigma + it : \sigma > \alpha, -\infty < t < \infty\}.$$

O conjunto $\{s = \sigma + it : \sigma = 1/2, -\infty < t < \infty\}$ será chamado de **linha crítica**.

Note que, a partir do fato que

$$\xi(s) = \xi(1 - s), \forall s \in \mathbb{C},$$

segue que os zeros de ζ na faixa $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ são simétricos com respeito à linha crítica. Além disso, como ζ não tem zeros na linha $\mathrm{Re}(s) = 1$, segue que não tem zeros na linha $\mathrm{Re}(s) = 0$.

A hipótese de Riemann dá uma condição mais forte ainda.

Conjectura. (**Hipótese de Riemann**) Os zeros não triviais da função zeta de Riemann estão sobre a linha crítica.

A hipótese de Riemann é equivalente a dizer, pela simetria antes mencionada, que ζ não tem zeros no conjunto $\mathbb{C}_{1/2}$. Por essa razão, nosso interesse residirá sobre o semiplano $\mathbb{C}_{1/2}$.

Vamos dar algumas estimativas que são satisfeitas pela função zeta de Riemann.

Teorema 1.7. *([15], p. 108 e 337) A função zeta de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\zeta(s) = O(|s|^{1/6} \log |s|)$, $s \in \overline{\mathbb{C}_{1/2}}$, $|s| \to \infty$.

ii) Assumindo a hipótese de Riemann, dado $\epsilon > 0$,

$$\zeta(s) = O(|s|^{\epsilon}), \quad \text{quando} \quad |s| \to \infty \quad \text{uniformemente para} \quad s \in \overline{\mathbb{C}_{1/2}}.$$

Introduzimos agora a função de Möbius, bem como algumas de suas propriedades e estimativas que têm a ver com ela.

Definição 1.5. *Dado* $n = 1$ *ou* $n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{a_j} \in \mathbb{N}$, *com* p_j *primo e* $a_j \in \mathbb{N}$, *definimos* $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ *por*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ (-1)^k, & \text{se } a_j = 1 \text{ para todo } j \\ 0, & \text{se } a_j > 1 \text{ para algum } j. \end{cases}$$

Esta função é chamada de função de Möbius.

Teorema 1.8. *([1], p. 66) Para* $x \geq 1$,

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1,$$

onde $\lfloor x \rfloor$ *denota a parte inteira de* x.

No seguinte teorema introduzimos a série de Dirichlet para $1/\zeta(s)$.

Teorema 1.9. *([15], p. 369) A série*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l^s}$$

é convergente, e sua soma é $1/\zeta(s)$, *para cada* s *com* $\sigma > 1$. *Mais ainda, sob a hipótese de Riemann a convergência segue sendo válida para o semiplano* $\mathbb{C}_{1/2}$.

Lema 1.2. *([15], p. 337) Sob as condições da hipótese de Riemann, dado* $\epsilon > 0$, *existe uma constante positiva* $c = c(\epsilon)$ *tal que*

$$|\zeta(s)|^{-1} \leq c|t|^{\epsilon},$$

para $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ *e* $|t| \geq 1$.

O seguinte lema, cuja demostração será omitida, pode ser encontrada em [4].

Lema 1.3. *Seja* $1/2 \leq \alpha < 1$, $\delta > 0$ *e* $\epsilon > 0$. *Se* $\zeta(s)$ *não se anula no semiplano* $\mathbb{C}_\alpha$, *então para* $L \geq 2$ *e* $\alpha + \delta \leq \sigma \leq 1$ *temos que*

$$\sum_{l=1}^{L} \mu(l) l^{-s} = \zeta(s)^{-1} + O_{\alpha,\delta,\epsilon}(L^{-\delta/3}(1+|t|)^{\epsilon}).$$

Observação 1.2. *Note que, sob as condições da hipótese de Riemann, utilizando os dois lemas anteriores, existem costantes* $K_{\delta,\epsilon} > 0$ *e* $C_{\delta,\epsilon} > 0$ *tais que*

$$\begin{aligned}\left|\sum_{l=1}^{L} \mu(l) l^{-s}\right| &\leq |\zeta(s)|^{-1} + K_{\delta,\epsilon}(L^{-\delta/3}(1+|t|)^{\epsilon}) \\ &\leq C_{\delta,\epsilon}(|t|^{\epsilon} + (1+|t|)^{\epsilon}) \\ &\leq C_{\delta,\epsilon}((1+|t|)^{\epsilon} + (1+|t|)^{\epsilon}) \\ &\leq 2C_{\delta,\epsilon}(1+|t|)^{\epsilon},\end{aligned}$$

para $1/2 + \delta \leq \sigma \leq 1$ *e* $|t| \geq 1$. *Também, para* $|t| \leq 1$, *pela compacidade do conjunto* $\{1/2 + \delta \leq \sigma \leq 1, |t| \leq 1\}$, *existe uma constante* K *tal que*

$$\begin{aligned}\left|\sum_{l=1}^{L} \mu(l) l^{-s}\right| &\leq |\zeta(s)|^{-1} + O_{\alpha,\delta,\epsilon}(L^{-\delta/3}(1+|t|)^{\epsilon}) \\ &\leq K + O_{\alpha,\delta,\epsilon}(L^{-\delta/3}(1+|t|)^{\epsilon}) \\ &\leq K_{\delta,\epsilon}(1 + (1+|t|)^{\epsilon}) \\ &\leq 2K_{\delta,\epsilon}(1+|t|)^{\epsilon}.\end{aligned}$$

Então existe uma constante $K_{\delta,\epsilon}$ *tal que, para todo* t,

$$\left|\sum_{l=1}^{L} \mu(l) l^{-s}\right| \leq K_{\delta,\epsilon}(1+|t|)^{\epsilon}.$$

Nessas condições, introduzimos o seguinte lema.

Lema 1.4. *Se a hipótese de Riemann é verdadeira, então para cada* $\epsilon > 0$ *e cada* $\delta > 0$, *temos que* $\sum_{l=1}^{L} \mu(l) l^{-s} = O((|t|+1)^{\epsilon})$ *uniformemente para* $L = 1, 2, 3 \ldots$ *e uniformemente para* $1/2 + \delta \leq \sigma \leq 1$. (*Portanto as constantes dependem somente de* ϵ *e* δ).

Introduzimos agora alguns teoremas que serão ùteis mais para frente.

Teorema 1.10. ***(Fórmula de Stirling).*** *([10], p. 423) Para* $|s| \to \infty$,

$$\Gamma(s) \sim s^{s-1/2} e^{-s} \sqrt{2\pi},$$

isto é, o quociente do fator da esquerda com o fator da direita se aproxima a 1 quando $|s| \to \infty$.

Em seguida, veremos que a Fatoração de Hadarmard dá uma fórmula explícita da função inteira $\widehat{\xi}(s) := \dfrac{1}{2}s(1-s)\xi(s)$ em termos do seus zeros (que são os mesmos zeros de ζ). É claro que $\widehat{\xi}$ é uma função inteira pois os únicos polos simples de ξ em $s=0$ e $s=1$ são cancelados pelos zeros do primeiro fator nesses pontos (Teorema 1.3).

Teorema 1.11. ***(Fatoração de Hadamard).*** *([8], p. 47) A função $\widehat{\xi}$ pode ser expandida como o produto infinito*

$$\widehat{\xi}(s) = \widehat{\xi}(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right), \quad s \in \mathbb{C},$$

onde ρ são os zeros da função $\widehat{\xi}$, e o produto infinito é tomado com o ordem tal que ρ e $1-\rho$ estão agrupados conjuntamente.

Teorema 1.12. *([12], p. 53) Se (f_n) é uma sequência de funções holomorfas definidas num aberto Ω de $\mathbb{C}$ que convergem uniformemente a f em cada subconjunto compacto de Ω, então f é holomorfa em Ω.*

Teorema 1.13. *([12], p. 56) Seja $F(s,t)$ definida para $(s,t) \in \Omega \times [0,1]$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{C}$. Suponhamos que F satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $F(s,t)$ é holomorfa em s para cada $t \in [0,1]$.

ii) F é contínua em $\Omega \times [0,1]$.

Então a função f definida em Ω como

$$f(s) = \int_0^1 F(s,t)dt$$

é holomorfa.

1.3 O espaço de Hardy no disco

Nesta seção apresentaremos o espaço Hardy no disco e alguns resultados básicos referentes a eles.

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [9].

Seja

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Definimos o espaço $H^2(\mathbb{D})$ como o espaço das funções definidas em $\mathbb{D}$ que têm representação em série de potência com coeficientes quadrado-somável. Isto é,

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\; \text{e} \;\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Não é difícil verificar que se f está em $H^2(\mathbb{D})$, então f é analítica em $\mathbb{D}$. De fato, como (a_n) é limitada, existe $K > 0$ tal que $|a_n| \leq K$, para todo n; logo, para $|z_0| < 1$, tem-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n| \leq K \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n < \infty,$$

onde a última somatória converge pois é a série geométrica. Pode-se definir também em $H^2(\mathbb{D})$ um produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n},$$

para

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{e} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

O seguinte teorema fala que toda função em $H^2(\mathbb{D})$ pode ser estendida para quase todos os pontos na fronteira.

Teorema 1.14. *Se $f \in H^2(\mathbb{D})$, então $\lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta}) = \widetilde{f}(e^{i\theta})$, para quase todo θ, onde*

$$\widetilde{f}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Definição 1.6. *Para $0 \leq r < 1$ e $\theta \in [-\pi, \pi)$, o núcleo de Poisson é definido por*

$$P_r(\theta) = Re\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}.$$

Teorema 1.15. ***(Fórmula Integral de Poisson).*** *Se $f \in H^2(\mathbb{D})$ e $re^{it} \in \mathbb{D}$, então*

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta}) P_r(t - \theta)\, d\theta.$$

Observação 1.3. *Para $z \in \mathbb{D}$, definimos*

$$P_z(\theta) = Re\left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\right).$$

Fazendo $z = re^{it}$, temos que

$$P_z(\theta) = Re\left(\frac{e^{i\theta} + re^{it}}{e^{i\theta} - re^{it}}\right) = Re\left(\frac{1 + re^{i(t-\theta)}}{1 - re^{i(t-\theta)}}\right) = P_r(t - \theta).$$

Então, em termos desta notação, pela fórmula integral de Poisson, segue que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta}) P_z(\theta)\, d\theta.$$

1.4 Alguns resultados de análise real

Introduzimos aqui alguns resultados básicos da análise real e dos espaços L^p.

Os seguintes resultados podem ser encontrados em [6], [13] e [14].

Seja X um conjunto, $\mathbf{X}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X e μ uma medida definida em $\mathbf{X}$. Denotamos $(X, \mathbf{X}, \mu)$ um espaço de medida.

Definição 1.7. ***(Espaços L^p).*** *Seja $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. O espaço $L^p := L^p(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ é definido como o espaço das funções mensuráveis tais que*

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty.$$

Teorema 1.16. ***(Lema de Fatou).*** *Seja $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções mensuráveis não negativas a qual converge quase-sempre a uma função mensurável f. Então*

$$\int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Teorema 1.17. ***(Teorema da Convergência Dominada).*** *Seja $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções integráveis a qual converge quase-sempre a uma função mensurável f de valores reais. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$, para todo n, então f é integrável e*

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Teorema 1.18. ***(Desigualdade de Hölder).*** *Seja $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ um espaço de medida e sejam $f \in L^p(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ e $g \in L^q(X, \boldsymbol{X}, \mu)$, onde $p > 1$ e $(1/p) + (1/q) = 1$. Então $fg \in L^1(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema 1.19. ***(Teorema de Fubini).*** *Sejam $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ e $(Y, \boldsymbol{Y}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos e seja π a medida em $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ dada pelo produto de μ e ν. Se a função F de $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ a $\mathbb{R}$ é integrável com respeito a π, então*

$$\int_{\boldsymbol{X}} \left\{ \int_{\boldsymbol{Y}} F \, d\nu \right\} \, d\mu = \int_{\boldsymbol{Z}} F \, d\pi = \int_{\boldsymbol{Y}} \left\{ \int_{\boldsymbol{X}} F \, d\mu \right\} \, d\nu.$$

Introduziremos agora a transformada de Fourier e estudaremos o Teorema de Plancherel que dá uma caracterização para esta transformada.

Definição 1.8. ***(Espaço de Schwartz).*** *O espaço de Schwartz em $\mathbb{R}$ é definido como o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, tais que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{|x|^k |f^{(l)}(x)|\} < \infty, \quad \text{para cada} \quad k, l \geq 0.$$

Denotamos este espaço por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definição 1.9. ***(Transformada de Fourier).*** *A transformada de Fourier é uma transformação linear $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definida por*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx. \tag{1.2}$$

A demonstraçãode que, de fato, $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pode ser encontrada em [14] pág. 137.

Lema 1.5. *([13], p. 209) O espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é denso em $L^2(-\infty, \infty)$. Isto é, dado $f \in L^2(-\infty, \infty)$, existe uma sequência $(f_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que*

$$\|f_n - f\|_2 \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Teorema 1.20. ***(Teorema de Plancherel).*** *([14], p. 143) Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$, isto é,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Introduzimos agora a caracterização mais importante relacionada com a transformada de Fourier.

Teorema 1.21. *([13], p. 208 e 212) A transformada de Fourier $\mathcal{F}$, inicialmente definida para $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, tem uma única extensão para $L^2(-\infty, \infty)$ tal que*

i) Se $f \in L^1(-\infty, \infty) \cap L^2(-\infty, \infty)$, então $\mathcal{F}(f)$ ainda vem dada por (1.2).

ii) Para cada $f \in L^2(-\infty, \infty)$, $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$.

Tendo em conta esses resultado vamos mostrar uma observação que será útil mais à frente.

Observação 1.4. *Dado $f \in L^2((0, 1], dx/x)$, segue que*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 f(x) x^{it-1} dx \right|^2 dt = \int_0^1 |f(x)|^2 \frac{dx}{x}. \tag{1.3}$$

Também, dado $f \in L^2((0, 1], dx)$, segue que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 f(x) x^{it-1/2} dx \right|^2 dt = \int_0^1 |f(x)|^2 dx. \tag{1.4}$$

Para mostrar (1.3), consideremos $f \in L^2((0, 1], dx/x)$ como sendo uma função definida em $(0, \infty)$ tal que $f(x) = 0$ para $x \in (1, \infty)$. Com a mudança de variáveis $x = e^{-u}$ temos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) x^{it-1} dx &= \int_0^{\infty} f(x) x^{it-1} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-u}) e^{-u(it-1)} e^{-u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-u}) e^{-uit} du \end{aligned}$$

Então, utilizando o Teorema de Plancherel, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^1 f(x)x^{it-1}dx\right|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-u})e^{-uit}du\right|^2 dt \\
&= 4\pi^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-2\pi u})e^{-2\pi uit}du\right|^2 dt \\
&= 4\pi^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(e^{-2\pi u})\right|^2 du \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(e^{-u})\right|^2 du \\
&= 2\pi\int_0^1 |f(x)|^2\,\frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

A última igualdade é devida à mudança de variável $x = e^{-u}$. *Concluimos então que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^1 f(x)x^{it-1}dx\right|^2 dt = \int_0^1 |f(x)|^2\frac{dx}{x}.$$

Para mostrar (1.4), *seja* $f \in L^2((0,1],dx)$. *Consideremos a função* $g(x) = x^{1/2}f(x)$, *a qual pertence a* $L^2((0,1],dx/x)$, *pois*

$$\int_0^1 |g(x)|^2\frac{dx}{x} = \int_0^1 x|f(x)|^2\frac{dx}{x} = \int_0^1 |f(x)|^2dx < \infty.$$

Então, por (1.3),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^1 g(x)x^{it-1}dx\right|^2 dt = \int_0^1 |g(x)|^2\frac{dx}{x} = \int_0^1 |f(x)|^2dx.$$

E, note que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^1 g(x)x^{it-1}dx\right|^2 dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^1 x^{1/2}f(x)x^{it-1}dx\right|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^1 f(x)x^{it-1/2}dx\right|^2 dt.
\end{aligned}$$

Segue então que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^1 f(x)x^{it-1/2}dx\right|^2 dt = \int_0^1 |f(x)|^2dx.$$

Definição 1.10. *A transformada*

$$\mathcal{M}(f)(t) := \int_0^1 f(x)x^{it-1}dx$$

com $\mathcal{M} : (L^2(0,1],dx/x) \to L^2(\mathbb{R})$ *é chamada de* ***Transformada de Mellin***. *A qual é, por* (1.3), *uma isometria.*

Veremos outra forma da transformada de Mellin no capítulo 2.

2 A Abordagem de Nyman-Beurling

Iniciaremos este capítulo introduzindo as definições dos espaços $H^p(\mathbb{C}_\alpha)$. Em particular, $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$, que é o espaço de nosso interesse. Também daremos uma caracterização importante relacionada com a norma desse espaço. Na segunda seção veremos a reformulação do Teorema de Nyman-Beurling e Baez-Duarte feita para os espaços de Hardy. Finalmente mostraremos o Teorema original de Nyman-Beurling.

Lembramos que um conjunto A de vetores num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é dito **Total** se o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de A é denso em $\mathcal{H}$.

2.1 O espaço de Hardy no semiplano $\mathbb{C}_{1/2}$

Neste capítulo apresentaremos o espaço de Hardy no semiplano. Trasladaremos algumas propriedades do espaço de Hardy do disco; além disso, algumas outras caracterizações sobre estes espaços serão apresentados.

Neste capítulo vamos continuar trabalhando sobre o semiplano $\mathbb{C}_\alpha$. Seja F é uma função analítica sobre $\mathbb{C}_\alpha$. Dizemos que F está em $H^p(\mathbb{C}_\alpha)$, se a norma L^p

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p dt$$

está limitada para $x > \alpha$. Para nosso propósito, iremos considerar somente o caso $p = 2$.

Definição 2.1. *O espaço de Hardy, denotado por $H^2(\mathbb{C}_\alpha)$, é definido como o espaço das funções analíticas F em $\mathbb{C}_\alpha$ tais que*

$$\sup_{x>\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^2 dt < \infty.$$

A norma do espaço é dada por

$$\|F\|^2 = \sup_{x>\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^2 dt.$$

A partir da definição, é claro que $F \in H^2(\mathbb{C}_\alpha)$, implica que a função $F_x(t) = F(x+it)$ está em $L^2(-\infty, \infty)$, para cada $x > \alpha$.

Introduzimos também as seguintes duas definições.

Definição 2.2. *O espaço $H^\infty(\mathbb{C}_\alpha)$ é definido sendo o espaço das funções analíticas e limitadas no semiplano $\mathbb{C}_\alpha$. A norma do espaço é dada por*

$$\|f\|_\infty = \sup\{f(s) : s \in \mathbb{C}_\alpha\}.$$

Definição 2.3. *Uma função $\phi \in H^\infty(\mathbb{C}_{1/2})$ satisfazendo $|\phi(s)| = 1$ para s na linha crítica é chamada de* ***função interna****.*

O seguinte teorema, cuja demonstração será omitida, pode ser encontrada em ([9], p. 127).

Teorema 2.1. *Seja F uma função em $H^2(\mathbb{C}_0)$ e G a função no disco unitário definida por*

$$G(z) = F\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Então G está em $H^2(\mathbb{D})$.

Um dos objetivos desta seção será o de caracterizar a norma do espaço $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$. Para isso, vamos ver a seguinte observações.

Consideremos o mapa conforme

$$z = \frac{w-1}{w+1},$$

o qual leva o semiplano Re(w)>0 sobre o disco unitário $|z| < 1$. Na fronteira esse mapa age como

$$e^{i\theta} = \frac{it-1}{it+1}.$$

Daí, é fácil deduzir que

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}. \tag{2.1}$$

Agora vamos levar a Fórmula de Poisson do disco ao semiplano $\mathbb{C}_0$. Com a notação introduzida na Observação (1.3), o núcleo de Poisson para um ponto z no disco é

$$P_z(\theta) = Re\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right).$$

Como

$$\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \frac{\dfrac{it-1}{it+1} + \dfrac{w-1}{w+1}}{\dfrac{it-1}{it+1} - \dfrac{w-1}{w+1}} = \frac{itw-1}{it-w},$$

segue que o núcleo de Poisson para o ponto w no semiplano $\mathbb{C}_0$ vem dado por

$$Re\left(\frac{itw-1}{it-w}\right) = \frac{x(1+t^2)}{x^2+(y-t)^2}, \tag{2.2}$$

onde $w = x + iy$.

Teorema 2.2. *Seja F uma função em $H^2(\mathbb{C}_0)$. Então:*

(i) *F tem limites não tangenciais em quase todo ponto no eixo imaginário.*

(ii) *Os valores de F na fronteira estão em $L^2(-\infty,\infty)$ e*

$$F(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(it)\frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt, \quad x>0,$$

onde

$$F^*(it) = \lim_{x\to 0^+} F(x+it).$$

(iii) *As normas $\|F_x\|_2$ estão limitadas para $x>0$. De fato, $\|F_x\|_2$ é uma função decrescente para $x>0$.*

(iv) *As funções F_x convergem na norma de $L^2(-\infty,\infty)$ a F^* quando $x\to 0$.*

Demonstração. Seja G a função definida no disco unitário como

$$G(z) = F\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Pelo teorema anterior, G está em $H^2(\mathbb{D})$. Então G tem limites não tangenciais em quase todo ponto do círculo unitário; como a aplicação conforme $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ leva o círculo unitário no eixo imaginário, segue que F tem também limites não tangenciais em quase todo ponto do eixo imaginário. Além disso, usando a Observação (1.3), a Fómula Integral de Poisson de G vem dada por

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{i\theta})P_z(\theta)d\theta.$$

Então, com as notações introduzidas nas observações anteriores e de (2.1) e (2.2), segue que

$$\begin{aligned} F(x+iy) = F(w) = F\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = G(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{i\theta})P_z(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(it)\frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt, \quad x>0. \end{aligned}$$

Queremos ver agora que $\|F_x\|_2$ é uma função decrescente para $x>0$ e $F^*(it)$ está em $L^2(-\infty,\infty)$. De fato, notemos o seguinte:

$$\begin{aligned} |F(x+iy)| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F^*(it)\frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt\right| \\ &\le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F^*(it)|\frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt \\ &\le \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F^*(it)|^2\frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F^*(it)|^2\frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

Nas duas últimas linhas estamos aplicando a Desigualdade de Hölder e a identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+(y-t)^2} dt = \pi.$$

Da desigualdade anterior, segue que

$$|F(x+iy)|^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F^*(it)|^2 \frac{x}{x^2+(y-t)^2} dt.$$

Utilizando o Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dy &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F^*(it)|^2 \frac{x}{x^2+(y-t)^2} dt\ dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |F^*(it)|^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+(y-t)^2} dy \right) \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F^*(it)|^2 dt, \quad x > 0.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F^*(it)|^2 dt, \quad x > 0. \tag{2.3}$$

Sejam $x_2 > x_1 > 0$. Definamos

$$h(\epsilon + iy) = F(x_1 + \epsilon + iy), \quad \epsilon > 0.$$

É claro que $h \in H^2(\mathbb{C}_0)$ e

$$h^*(iy) = \lim_{\epsilon \to 0^+} h(\epsilon + iy) = \lim_{\epsilon \to 0^+} F(x_1 + \epsilon + iy) = F(x_1 + iy).$$

Então, para $\epsilon = x_2 - x_1$, utilizando (2.3) temos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |F(x_2+iy)|^2 dy &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1+\epsilon+iy)|^2 dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\epsilon+iy)|^2 dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h^*(iy)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1+iy)|^2 dy.\end{aligned}$$

Concluimos então que $\|F_x\|_2$ define uma função decrescente para $x > 0$. Utilizando esse fato em conjunto com o Lema de Fatou e $F \in H^2(\mathbb{C}_0)$ se pode ver também que F^* está em L^2. De fato,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F^*(iy)|^2 dy \leq \liminf_{x \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dy = \sup_{x>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dy < \infty.$$

Isto mostra os items (i), (ii), (iii). Para o item (iv), note que, por (2.3),

$$\limsup_{x \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F^*(iy)|^2 dy.$$

Já vimos também que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F^*(iy)|^2 dy \leq \liminf_{x\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dy.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |F^*(iy)|^2 dy.$$

□

Observação 2.1. *Note que, dada F em $H^2(\mathbb{C}_0)$,*

$$\|F\|^2 = \sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^2 dt = \sup_{x>0} \frac{1}{2\pi} \|F_x\|_2^2.$$

pelo item (iii) e (iv) do teorema anterior, segue que

$$\|F\|^2 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\pi} \|F_x\|_2^2 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|F^*(it)\right|^2 dt.$$

Tendo em conta este fato e que a aplicação de $H^2(\mathbb{C}_0)$ a $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ dada por $F(w) \mapsto F(w - 1/2)$, define um isomorfismo isométrico, segue que, para $F \in H^2(\mathbb{C}_{1/2})$,

$$\|F\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|F^*\left(1/2 + it\right)\right|^2 dt.$$

Daqui temos que $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ pode ser identificada (por meio da isometria $F \mapsto F^*$) com o subespaço de L^2 sobre a linha crítica com respeito à medida de Lebesgue escalado pelo fator $\dfrac{1}{2\pi}$.

2.2 O Teorema de Nyman-Beurling

Nesta seção apresentaremos o Teorema de Nyman-Beurling que dá uma reformulação da hipótese de Riemann. Aqui estudaremos uma demonstração deste teorema desde o ponto de vista de espaços de Hardy.

Os resultados desta seção estão baseados no artigo [3].

Começamos definindo uma família particular de funções em $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$.

Para cada $0 \leq \lambda \leq 1$, defina $F_\lambda \in H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ por

$$F_\lambda(s) = (\lambda^s - \lambda)\frac{\zeta(s)}{s}, \ s \in \mathbb{C}_{1/2}.$$

Note que, de fato, F_λ é uma função analítica em todo $\mathbb{C}_{1/2}$, pois o polo simples de ζ em $s = 1$ é cancelado pelo zero do primeiro fator neste ponto.

Em particular para $l = 1, 2, 3 \ldots$, definimos $G_l \in H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ por $G_l = F_{\frac{1}{l}}$; isto é,

$$G_l(s) = (l^{-s} - l^{-1})\frac{\zeta(s)}{s}, \quad s \in \mathbb{C}_{1/2}.$$

Também seja

$$E \in H^2(\mathbb{C}_{1/2})$$

definida como

$$E(s) = \frac{1}{s}, \ s \in \mathbb{C}_{1/2}.$$

Observação 2.2. *Vamos mostrar que, de fato, as funções F_λ e E estão em $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$. Mais geralmente, vamos ver que as funções*

$$E_c(s) = \frac{1}{s^c}, \ s \in \mathbb{C}_{1/2},$$

pertencem a $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$, para $c > \dfrac{1}{2}$. De fato, utilizando a Observação 2.1,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left|\frac{1}{2}+it\right|^{2c}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(\frac{1}{4}+t^2)^c} &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{(\frac{1}{4}+t^2)^c} + \int_{-1}^{1} \frac{dt}{(\frac{1}{4}+t^2)^c} + \int_{1}^{\infty} \frac{dt}{(\frac{1}{4}+t^2)^c} \\ &\leq \int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^{2c}} + \int_{-1}^{1} \frac{dt}{(\frac{1}{4}+t^2)^c} + \int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^{2c}}.\end{aligned}$$

Uma vez que $2c - 1 > 0$ e o intervalo $[-1, 1]$ é compacto, concluimos que as integrais anteriores são finitas.

Vejamos agora que $F_\lambda \in H^2(\mathbb{C}_{1/2})$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Como $\zeta(s) = O(|s|^{1/6}\log|s|)$, quando $|s| \to \infty$, $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ (Teorema 1.7), existem constantes $A, K > 0$ tais que

$$|\zeta(1/2+it)| \leq K|1/2+it|^{1/6}\log|1/2+it|, \quad |t| > A.$$

Por outro lado, pela regra de L'Hospital, para cada $\epsilon > 0$,

$$\frac{\log t}{t^\epsilon} \to 0, \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

Então existe uma nova constante $C > 0$ tal que

$$|\zeta(1/2+it)| \leq C|1/2+it|^{1/6+\epsilon}, \quad |t| > A.$$

Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta(1/2+it)|^2}{\left|\frac{1}{2}+it\right|^2} dt \leq C^2 \int_{-\infty}^{-A} \frac{dt}{\left(\frac{1}{4}+t^2\right)^{5/6-\epsilon}} + \int_{-A}^{A} \frac{|\zeta(1/2+it)|^2}{\frac{1}{4}+t^2} dt + C^2 \int_{A}^{\infty} \frac{dt}{\left(\frac{1}{4}+t^2\right)^{5/6-\epsilon}}.$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ tal que $5/6 - \epsilon > 1/2$, segue que as integrais anteriores são finitas, pelo feito ao começo da observação. Assim, como

$$|F_\lambda(1/2+it)| \leq (\lambda^{1/2}+\lambda)\frac{|\zeta(1/2+it)|}{|1/2+it|},$$

segue o resultado.

Vamos mostrar agora dois lemas que vão ser de utilidade no teorema que segue.

Lema 2.1. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\frac{\left|\Gamma\left(\dfrac{s+\epsilon}{2}\right)\right|}{\left|\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\right|} \leq C|s|^{\epsilon/2},$$

para todo $0 < \epsilon < 1/2$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e $s = \sigma + it \in \overline{\mathbb{C}_{1/2}}$. Pelo Teorema 1.10, tem-se que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|\Gamma(s)|}{|s^{s-1/2}e^{-s}\sqrt{2\pi}|} = 1 \quad e \quad \lim_{|s|\to\infty} \frac{|s^{s-1/2}e^{-s}\sqrt{2\pi}|}{|\Gamma(s)|} = 1.$$

Daqui que as funções anteriores são limitadas, seja então $K > 0$ tal que

$$\frac{|\Gamma(s)|}{|s^{s-1/2}e^{-s}\sqrt{2\pi}|} \leq K \quad e \quad \frac{|s^{s-1/2}e^{-s}\sqrt{2\pi}|}{|\Gamma(s)|} \leq K, \quad s \in \overline{\mathbb{C}_{1/2}}.$$

Dessas desigualdades segue que

$$\frac{\left|\left(\dfrac{s}{2}\right)^{s/2-1/2} e^{-s/2}\sqrt{2\pi}\right| \left|\Gamma\left(\dfrac{s+\epsilon}{2}\right)\right|}{\left|\left(\dfrac{s+\epsilon}{2}\right)^{s/2+\epsilon/2-1/2} e^{-s/2-\epsilon/2}\sqrt{2\pi}\right| \left|\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\right|} \leq K^2.$$

Daqui que

$$\frac{\left|\Gamma\left(\dfrac{s+\epsilon}{2}\right)\right|}{\left|\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\right|} \leq K^2 \frac{\left|\dfrac{s+\epsilon}{2}\right|^{\sigma/2+\epsilon/2-1/2}}{\left|\dfrac{s}{2}\right|^{\sigma/2-1/2}} e^{\epsilon/2}.$$

Agora, note que, para $\epsilon < 1/2$, $|s+\epsilon| \leq |s| + \epsilon \leq 2|s|$ (pois $|s| \geq 1/2$). Logo, para uma nova constante $C > 0$,

$$\frac{\left|\Gamma\left(\dfrac{s+\epsilon}{2}\right)\right|}{\left|\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\right|} \leq C 2^{\sigma/2-1/2}|s|^{\epsilon/2};$$

em particular para s na linha crítica, como $\sigma = 1/2$, vamos ter

$$\frac{\left|\Gamma\left(\dfrac{s+\epsilon}{2}\right)\right|}{\left|\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\right|} \leq C|s|^{\epsilon/2}, \quad 0 < \epsilon < 1/2.$$

□

Lema 2.2. *Para $\rho \in \mathbb{C}_{1/2}$ fixo, o conjunto*

$$\{F \in H^2(\mathbb{C}_{1/2}) : F(\rho) = 0\}$$

é fechado em $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$.

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que o conjunto

$$A = \{F \in H^2(\mathbb{C}_0) : F(\rho) = 0\}$$

é fechado em $H^2(\mathbb{C}_0)$. De fato, seja $(F_n) \subset A$ tal que $F_n \to F$ em $H^2(\mathbb{C}_0)$. Vejamos que $F \in A$.

Pelo Teorema 2.2, fazendo $\rho = x + iy$,

$$F_n(\rho) - F(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(it) - F(it)) \frac{x}{x^2 + (y-t)^2} dt.$$

Dado que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n(\rho) = 0$,

$$|F(\rho)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(it) - F(it)| \frac{x}{x^2 + (y-t)^2} dt.$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + (y-t)^2)^2} dt < \infty,$$

utilizando a Desigualdade de Hölder e a Observação 2.1 temos que

$$\begin{aligned} |F(\rho)| &\leq \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(it) - F(it)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + (y-t)^2)^2} dt \right)^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + (y-t)^2)^2} dt \right)^{1/2} \|F_n - F\|. \end{aligned}$$

Segue então que $F(\rho) = 0$. Assim, A é fechado em $H^2(\mathbb{C}_0)$. Considerando a aplicação $F(w) \mapsto F(w - 1/2)$ de $H^2(\mathbb{C}_0)$ a $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ (como na Observação 2.1), não é difícil verificar que

$$\{F \in H^2(\mathbb{C}_{1/2}) : F(\rho) = 0\}$$

é também fechado em $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$. □

Em termos da notação introduzida, a formulação do Teorema de Nyman-Beurling-Baez-Duarte para o espaço $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ é a seguinte.

Teorema 2.3. *As seguintes afirmações são equivalentes.*

i) A hipótese de Riemann,

ii) E pertence ao fecho do espaço gerado pelo conjunto $\{G_l : l = 1, 2, 3 \ldots\}$, e

iii) E pertence ao fecho do espaço gerado pelo conjunto $\{F_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$. Vamos supor que a hipótese de Riemann é verdadeira. Para L inteiro positivo e $\epsilon > 0$, definimos $H_{L,\epsilon} \in H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ como

$$H_{L,\epsilon} = \sum_{l=1}^{L} \frac{\mu(l)}{l^\epsilon} G_l.$$

É claro que $H_{L,\epsilon}$ está no espaço gerado por $\{G_l : l = 1, 2, 3 \ldots\}$; e, pela definição de G_l,

$$H_{L,\epsilon}(s) = \frac{\zeta(s)}{s} \left(\sum_{l=1}^{L} \frac{\mu(l)}{l^{s+\epsilon}} - \sum_{l=1}^{L} \frac{\mu(l)}{l^{1+\epsilon}} \right), \quad s \in \overline{\mathbb{C}_{1/2}}.$$

Agora, pelo Teorema 1.7 b) e Lema 1.4 para $\delta = \epsilon$, existe uma constante C_ϵ tal que

$$\begin{aligned} |H_{L,\epsilon}(s)| &\leq \frac{|\zeta(s)|}{|s|} \left\{ \left| \sum_{l=1}^{L} \frac{\mu(l)}{l^{s+\epsilon}} \right| + \left| \sum_{l=1}^{L} \frac{\mu(l)}{l^{1+\epsilon}} \right| \right\} \\ &\leq \frac{C_\epsilon}{|s|^{1-\epsilon}} (|t| + 1)^\epsilon. \end{aligned}$$

Pela Observação 2.2, é claro que $\dfrac{1}{s^{1-\epsilon}}$ é quadrado-integrável sobre a linha crítica para ϵ suficientemente pequeno ($\epsilon < 1/2$). Para ver que $\dfrac{(|t|+1)^\epsilon}{s^{1-\epsilon}}$ é também quadrado-integrável sobre a linha crítica, basta notar que $(|t| + 1)^\epsilon \leq |t|^\epsilon + 1$, para ϵ suficientemente pequeno. Logo fazendo um raciocínio análogo à Observação 2.2 segue o resultado. Logo as funções $H_{L,\epsilon}$ estão limitadas por uma função integrável sobre a linha crítica (ϵ fixo).

Agora, pelo Teorema 1.9,

$$H_{L,\epsilon}(s) \to H_\epsilon(s), \quad \text{para } s \text{ na linha crítica, quando } L \to \infty,$$

onde

$$H_\epsilon(s) := \frac{\zeta(s)}{s} \left(\frac{1}{\zeta(s+\epsilon)} - \frac{1}{\zeta(1+\epsilon)} \right).$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada e a Observação 2.1, segue que, para cada $\epsilon > 0$ fixo (suficientemente pequeno),

$$H_{L,\epsilon} \to H_\epsilon \text{ na norma de } H^2(\mathbb{C}_{1/2}) \text{ quando } L \to \infty.$$

Como $H_{L,\epsilon}$ está no espaço gerado por $\{G_l : l = 1, 2, 3 \ldots\}$, segue que H_ϵ está no fecho do espaço gerado por $\{G_l : l = 1, 2, 3 \ldots\}$.

Agora, note o seguinte: como ζ tem polo em $s = 1$, então

$$\frac{1}{\zeta(1+\epsilon)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \epsilon \to 0^+. \tag{2.4}$$

Sendo assim, exceto no caso em que $\zeta(s) = 0$, mas tendo em conta que os zeros de uma função analítica são isolados, logo são enumeráveis sobre a linha crítica, temos que

$$H_\epsilon(s) \longrightarrow \frac{1}{s} = E(s), \text{ quase-sempre quando } \epsilon \to 0^+, \text{ para } s \text{ na linha crítica.}$$

Para ver que E está no fecho do espaço gerado por $\{G_l : l = 1, 2, 3 \dots\}$, vamos mostrar que H_ϵ, $0 < \epsilon < 1/2$, é uniformemente limitada pelo módulo de uma função quadrado-integrável sobre a linha crítica; daí, pelo Teorema da Convergência Dominada, vamos ter

$$H_\epsilon \to E \text{ na norma de } H^2(\mathbb{C}_{1/2}) \text{ quando } \epsilon \to 0^+.$$

Para isso, considerando a função inteira

$$\widehat{\xi}(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s), \tag{2.5}$$

pelo Teorema de Fatoração de Hadamard (Teorema 1.11) vamos ter

$$\widehat{\xi}(s) = \widehat{\xi}(0)\prod_\rho \left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

onde o produto é feito sobre os zeros não triviais ρ da função zeta de Riemann (que são os mesmos da função ξ) tal que ρ e $1-\rho$ estão agrupados conjuntamente. Então

$$|\widehat{\xi}(s)| = |\widehat{\xi}(0)| \prod_\rho \left|1 - \frac{s}{\rho}\right|.$$

Agora, sob a hipótese de Riemann, $\mathrm{Re}(\rho) = 1/2$; então para cada $s \in \overline{\mathbb{C}_{1/2}}$ temos que $|\rho - s| \leq |(\rho - \epsilon) - s|$, o que implica que

$$\left|1 - \frac{s}{\rho}\right| \leq \left|1 - \frac{s+\epsilon}{\rho}\right|, \; s \in \overline{\mathbb{C}_{1/2}}, \; \epsilon > 0.$$

Multiplicando essa desigualdade sobre todos os ρ, obtemos que

$$|\widehat{\xi}(s)| \leq |\widehat{\xi}(s+\epsilon)|, \; s \in \overline{\mathbb{C}_{1/2}}, \; \epsilon > 0.$$

Então, tendo em conta isto e (2.5) temos que

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\epsilon)}\right| \leq \pi^{-\epsilon/2}\left|\frac{(s+\epsilon)(1-\epsilon-s)}{s(1-s)}\right|\left|\frac{\Gamma((s+\epsilon)/2)}{\Gamma(s/2)}\right|.$$

Como

$$\left|\frac{(s+\epsilon)(1-\epsilon-s)}{s(1-s)}\right| \leq \left(1 + \frac{\epsilon}{|s|}\right)\left(\frac{\epsilon}{|1-s|} + 1\right) \longrightarrow 1, \text{ quando } |s| \to \infty,$$

existe $c > 0$ tal que

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\epsilon)}\right| \leq c\left|\frac{\Gamma((s+\epsilon)/2)}{\Gamma(s/2)}\right|.$$

Pelo Lema 2.1, o fator da direita está limitado por uma constante vezes $|s|^{\epsilon/2}$ para s na linha crítica; então existe $k > 0$ tal que

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\epsilon)}\right| \leq k|s|^{\epsilon/2}.$$

Então, tendo em conta isto, o fato que $\dfrac{1}{|\zeta(1+\epsilon)|}$ é limitada (por (2.4)) e o Teorema 1.7 b, segue que existe outra constante $k > 0$ tal que

$$|H_\epsilon(s)| \leq \frac{|\zeta(s)|}{|s|}\left(\left|\frac{1}{\zeta(s+\epsilon)}\right| + \left|\frac{1}{\zeta(1+\epsilon)}\right|\right) \leq k\left(\frac{1}{|s|^{1-\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{1}{|s|^{1-\frac{\epsilon}{2}}}\right),$$

para cada ϵ suficientemente pequeno e s suficientemente grande na linha crítica. Assim, como $1 - \epsilon/2 > 3/4$ (para $\epsilon < 1/2$), então

$$|H_\epsilon(s)| \leq \frac{2k}{|s|^{1-\frac{\epsilon}{2}}} \leq \frac{2k}{|s|^{3/4}} = 2k|s|^{-3/4},$$

para $0 < \epsilon < 1/2$. Como $s \mapsto |s|^{-3/4}$ é quadrado-integrável (Observação 2.2) sobre a linha crítica, a implicação $(i) \Rightarrow (ii)$ fica mostrada.

Do fato que $\{G_l : l = 1, 2, 3 \ldots\} \subseteq \{F_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ a implicação $(ii) \Rightarrow (iii)$ é trivial.

Para provar que $(iii) \Rightarrow (i)$ suponhamos que a hipótese de Riemann é falsa. Então existe um zero da função zeta $\rho \in \mathbb{C}_{1/2}$. Como $\zeta(\rho) = 0$, então $F_\lambda(\rho) = 0$, para todo $0 \leq \lambda \leq 1$, logo o espaço gerado por $\{F_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ está contido no subespaço fechado de $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$, $\{F \in H^2(\mathbb{C}_{1/2}) : F(\rho) = 0\}$ (Lema 2.2). Assim,

$$E \in \overline{\operatorname{span}\{F_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}} \subseteq \{F \in H^2(\mathbb{C}_{1/2}) : F(\rho) = 0\},$$

de onde se segue o absurdo

$$\frac{1}{\rho} = E(\rho) = 0.$$

□

Observação 2.3. *Como $\mu(l) = 0$ a menos que l seja livre de quadrados, as funções $H_{L,\epsilon}$ do teorema anterior estão no espaço gerado por $\{G_l : l$ livre de quadrados$\}$. Então na prova se mostra que a hipótese de Riemann implica que E pertence ao fecho do espaço gerado por $\{G_l : l$ livre de quadrados$\}$ e vice-versa.*

Agora, para $0 \leq \lambda \leq 1$, seja $f_\lambda \in L^2((0,1])$ definida por

$$f_\lambda(x) = \left\{\frac{\lambda}{x}\right\} - \lambda\left\{\frac{1}{x}\right\}, \ x \in (0,1],$$

onde $\{x\}$ é a parte fracionária de um número real x. Seja também $\mathbf{1} \in L^2((0,1])$ a função constante igual 1, i.e,

$$\mathbf{1}(x) = 1, \quad \forall x \in (0,1].$$

O objetivo seguinte será apresentar o Teorema original de Nyman-Beurling; mas, para isso, precisamos da seguinte observação.

Observação 2.4. *Definimos a transformada de Mellin* $\mathcal{M} : L^2((0,1]) \to H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ *como*

$$\mathcal{M}(f)(s) = \int_0^1 x^{s-1} f(x)dx, \quad s \in \Omega, \;\; f \in L^2((0,1]). \tag{2.6}$$

Vejamos que, de fato, para cada $f \in L^2((0,1])$, $\mathcal{M}(f)$ *é uma função em* $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$. *Primeiro vejamos que* f *é analítica: como* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *é denso em* $L^2(-\infty,\infty)$ *(Lema 1.5), é possível encontrar uma sequência de funções contínuas em* $(0,1]$ *tal que* $f_n \to f$ *em* $L^2(0,1]$. *Então, pelo Teorema 1.13, as funçoes*

$$g_n(s) = \int_0^1 x^{s-1} f_n(x)dx$$

são holomorfas em $\mathbb{C}_{1/2}$. *Vejamos que* (g_n) *converge a* $\mathcal{M}(f)$ *uniformente sobre cada subconjunto compacto de* Ω. *De fato, seja* $\sigma \geq 1/2 + \delta$, *com* $\delta > 0$ *e* $s = \sigma + it$. *Então*

$$\begin{aligned} |g_n(s) - \mathcal{M}(f)(s)| &\leq \left| \int_0^1 x^{s-1}(f_n(x) - f(x))dx \right| \\ &\leq \left(\int_0^1 x^{2(\sigma-1)}dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2\sigma - 1} \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{1}{2\delta} \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Daqui que (g_n) *converge uniformemente no semiplano* $\sigma \geq 1/2 + \delta$. *Pelo Teorema 1.12* $\mathcal{M}(f)(s)$ *é analítica em* $\mathbb{C}_{1/2}$. *Agora, utilizando a Observação 1.4, note que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{M}(f)(\sigma + it)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 x^{\sigma+it-1} f(x)dx \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 x^{\sigma-1/2} x^{it-1/2} f(x)dx \right|^2 dt \\ &= \int_0^1 |x^{\sigma-1/2} f(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{\sigma > 1/2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{M}(f)(\sigma + it)|^2 dt \leq \|f\|_2^2 < \infty.$$

Portanto, $\mathcal{M}(f) \in H^2(\mathbb{C}_{1/2})$. *E, pela Observação 1.4 e 2.1,*

$$\|\mathcal{M}(f)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{M}(f)(1/2 + it)|^2 dt = \|f\|_2^2.$$

Assim, $\mathcal{M}$ *define uma isometria entre* $L^2((0,1])$ *e* $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$.

Em termos das notações introduzidas, o Teorema original de Nyman-Beurling é o seguinte.

Teorema 2.4. *As seguintes afirmações são equivalentes.*

i) A hipótese de Riemann,

ii) $\mathbf{1}$ *pertence ao fecho do espaço em* $L^2((0,1])$ *gerado pelo conjunto* $\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$,

iii) o conjunto $\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ *é total em* $L^2((0,1])$.

Demonstração. Consideremos a transformada de Mellin $\mathcal{M} : L^2((0,1]) \to H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ definida como (2.6), a qual define uma isometria entre esses dois espaços.

Vamos ver agora a relação entre as funções f_λ e F_λ por meio da transformada de Mellin. Mais precisamente vamos mostrar que

$$\mathcal{M}(f_\lambda) = -F_\lambda, \quad \text{para cada } \ 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{2.7}$$

Para provar isto, começamos fazendo $s = \sigma + it$, com $\sigma > 1$. Então, lembrando que $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\{\frac{\lambda}{x}\right\} x^{s-1} dx &= \lambda \int_0^1 x^{s-2} dx - \int_0^1 \left\lfloor \frac{\lambda}{x} \right\rfloor x^{s-1} dx \\ &= \frac{\lambda}{s-1} - \int_0^1 \left\lfloor \frac{\lambda}{x} \right\rfloor x^{s-1} dx.\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{\lambda}{x} \right\rfloor x^{s-1} dx = \int_0^\lambda \left\lfloor \frac{\lambda}{x} \right\rfloor x^{s-1} dx + \int_\lambda^1 \left\lfloor \frac{\lambda}{x} \right\rfloor x^{s-1} dx = \int_0^\lambda \left\lfloor \frac{\lambda}{x} \right\rfloor x^{s-1} dx,$$

pois $\left\lfloor \dfrac{\lambda}{x} \right\rfloor = 0$ para $\lambda < x \leq 1$. Então, como $\left\lfloor \dfrac{\lambda}{x} \right\rfloor = n$ para $\dfrac{\lambda}{n+1} < x \leq \dfrac{\lambda}{n}$, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\lfloor \frac{\lambda}{x} \right\rfloor x^{s-1} dx = \int_0^\lambda \left\lfloor \frac{\lambda}{x} \right\rfloor x^{s-1} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\lambda/n+1}^{\lambda/n} \left\lfloor \frac{\lambda}{x} \right\rfloor x^{s-1} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{\lambda/n+1}^{\lambda/n} x^{s-1} dx \\ &= \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \frac{\lambda^s}{n^s} - \frac{\lambda^s}{(n+1)^s} \right\} \\ &= \frac{\lambda^s}{s} \lim_{k\to\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} n n^{-s} - \sum_{n=1}^{k-1} n(n+1)^{-s} \right\} \\ &= \frac{\lambda^s}{s} \lim_{k\to\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} n n^{-s} - \sum_{n=2}^{k} (n-1) n^{-s} \right\} \\ &= \frac{\lambda^s}{s} \lim_{k\to\infty} \left\{ 1 - (k-1)k^{-s} + \sum_{n=2}^{k-1} n^{-s} \right\} \\ &= \frac{\lambda^s}{s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \frac{\lambda^s}{s} \zeta(s).\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 \left\{\frac{\lambda}{x}\right\} x^{s-1}dx = \frac{\lambda}{s-1} - \frac{\lambda^s}{s}\zeta(s).$$

Em particular para $\lambda = 1$ obtemos

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} x^{s-1}dx = \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}.$$

Dessas últimas duas desigualdades segue que

$$\int_0^1 f_\lambda(x)x^{s-1}dx = -(\lambda^s - \lambda)\frac{\zeta(s)}{s} = -F_\lambda(s),$$

para s no semiplano $\{\sigma > 1\}$. Como ambos lados da equação são funções analíticas com respeito s, a igualdade continua valendo para todo o domínio $\mathbb{C}_{1/2}$.

Tendo em conta esse fato, vamos provar as implicações do teorema.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Vamos supor que a hipótese de Riemann é verdadeira. Pelo Teorema 2.3, $E = \mathcal{M}(\mathbf{1})$ pertence ao fecho do espaço gerado pelo conjunto $\{F_\lambda = -\mathcal{M}(f_\lambda) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Então, do fato que

$$\left\| E - \sum_k a_k F_{\lambda_k} \right\| = \left\| \mathcal{M}(\mathbf{1}) - \mathcal{M}(-\sum_k a_k f_{\lambda_k}) \right\| = \left\| \mathbf{1} - \sum_k (-a_k f_{\lambda_k}) \right\|_2, \tag{2.8}$$

segue que $\mathbf{1}$ está no fecho do espaço gerado por $\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Suponhamos que $\mathbf{1}$ pertence ao fecho do espaço gerado por $\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Chamando de $\mathcal{N}$ ao fecho do espaço gerado por $\{F_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$, tem-se que $E \in \mathcal{N}$, pela mesma razão de (2.8). Para $\mu \in (0, 1]$, seja $\Theta_\mu \in H^\infty(\mathbb{C}_{1/2})$ definida por

$$\Theta_\mu(s) = \mu^{s-\frac{1}{2}}, \quad s \in \mathbb{C}_{1/2}.$$

Note que $|\Theta_\mu(s)| = |\mu^{s-\frac{1}{2}}| = \mu^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 1$, para s na linha crítica, logo Θ_μ é uma função interna. Então os operadores $M_\mu : H^2(\mathbb{C}_{1/2}) \to H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ definidos como

$$M_\mu(G) = \Theta_\mu G, \quad G \in H^2(\mathbb{C}_{1/2}),$$

com o produto pontual, são isometrias.

Agora, para $0 \leq \lambda \leq 1$ e $0 < \mu \leq 1$, note que

$$M_\mu(F_\lambda) = \mu^{-1/2}(F_{\lambda\mu} - \lambda F_\mu),$$

pois

$$\Theta_\mu(s)F_\lambda(s) = \mu^{-1/2}\left(\lambda^s\mu^s - \lambda\mu^s\right)\frac{\zeta(s)}{s} = \mu^{-1/2}(F_{\lambda\mu}(s) - \lambda F_\mu(s)),$$

o que mostra que

$$M_\mu(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}, \quad \text{para cada } \mu \in (0, 1].$$

Como $E \in \mathcal{N}$, segue que $M_\mu(E) \in \mathcal{N}$, para cada $\mu \in (0,1]$. Considerando χ_λ a função característica do intervalo $(0,\lambda)$, note que

$$\mathcal{M}(\chi_\lambda) = \lambda^{1/2} M_\lambda(E),$$

pois

$$\mathcal{M}(\chi_\lambda)(s) = \int_0^\lambda x^{s-1} dx = \frac{\lambda^s}{s} = \lambda^{1/2} M_\lambda(E)(s).$$

Logo o conjunto $\{\mathcal{M}(\chi_\lambda) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ está contido em $\mathcal{N}$, isto é, no fecho do espaço gerado por $\{F_\lambda = -\mathcal{M}(f_\lambda) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Por ser $\mathcal{M}$ uma isometria, segue que $\{\chi_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ está contido no fecho do espaço gerado por $\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ em $L^2((0,1])$. Como $\{\chi_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ é um conjunto total em $L^2((0,1])$, segue que $\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ é também total em $L^2((0,1])$. Portanto $(ii) \Rightarrow (iii)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Supondo que $\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ é total em $L^2((0,1])$, é claro então que $\mathbf{1}$ está no fecho do espaço gerado por $\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$, logo, aplicando $\mathcal{M}$, tem-se que E pertence ao fecho do espaço gerado por $\{F_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$; pelo Teorema 2.3, segue que a hipótese de Riemann é verdadeira. Portanto $(iii) \Rightarrow (i)$. $\square$

3 Resultados Adicionais

No capítulo anterior estudamos o Teorema de Nyman-Beurling, o qual é uma reformulação da hipótese de Riemann. Neste capítulo veremos o Teorema de Baez-Duarte, o qual é um refinamento desse critério. Também veremos alguns resultados recentes relacionados à hipótese de Riemann.

Os resultados deste capítulo estão baseados nos artigos [3] e [16].

3.1 O Teorema de Baez-Duarte

Nesta seção veremos o Teorema de Baez-Duarte e um teorema equivalente ao mesmo.

Seja $\mathcal{V}$ o subespaço fechado de $L^2((0,1])$ constituido das funções que são constantes quase-sempre em cada intervalo $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $n = 1, 2, \ldots$. A propriedade de $\mathcal{V}$ ser fechado vem do fato que convergência em L^2 implica convergência pontual quase-sempre (numa subsequência). Daí segue que se $f_n \to f$ em $L^2((0,1])$, com f_n constante em cada intervalo $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, então f é também constante nesses intervalos. Sendo $L^2((0,1])$ espaço de Hilbert e $\mathcal{V}$ subespaço fechado dele, segue que $\mathcal{V}$ é também espaço de Hilbert em si mesmo.

Para $l = 1, 2, 3, \ldots$, seja $g_l \in L^2((0,1])$ definida por

$$g_l(x) = \left\{\frac{1}{lx}\right\} - \frac{1}{l}\left\{\frac{1}{x}\right\}, \quad x \in (0,1].$$

É claro que $g_l = f_{1/l}$, para $l = 1, 2, 3 \ldots$.

Note que pela definição de parte fracionária tem-se que

$$g_l(x) = \frac{1}{l}\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1}{lx}\right\rfloor, \quad x \in (0,1].$$

Note também que para $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, temos que $\frac{1}{lx} \in \left[\frac{n}{l}, \frac{n+1}{l}\right)$. Logo, como não existe inteiro no interior de $\left[\frac{n}{l}, \frac{n+1}{l}\right)$, segue que $\left\lfloor\frac{1}{lx}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor$. Também, como $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = n$, para $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, obtemos

$$g_l(x) = \frac{n}{l} - \left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor = \left\{\frac{n}{l}\right\} = g_l\left(\frac{1}{n}\right), \quad x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]. \tag{3.1}$$

Portanto,

$$g_l \in \mathcal{V}, \quad l = 1, 2, 3, \ldots.$$

O Teorema de Baez-Duarte vem enunciado da seguinte maneira.

Teorema 3.1. *As seguintes afirmações são equivalentes.*

i) A hipótese de Riemann,

ii) **1** *pertence ao fecho do espaço gerado por* $\{g_l : l = 1, 2, 3, \dots\}$*, e*

iii) $\{g_l : l = 1, 2, 3, \dots\}$ *é um conjunto total em* $\mathcal{V}$*.*

Demonstração. Fazendo $\lambda = \dfrac{1}{l}$ na igualdade (2.7), obtemos

$$\mathcal{M}(g_l) = \mathcal{M}(f_{1/l}) = -F_{1/l} = -G_l, \quad l = 1, 2, 3, \dots.$$

Sob a hipótese de Riemann, o Teorema 2.3 implica que $E = \mathcal{M}(\mathbf{1})$ pertence ao fecho do espaço gerado por $\{G_l = -\mathcal{M}(g_l) : l = 1, 2, 3 \dots\}$. Sendo $\mathcal{M}$ uma isometria, segue que **1** pertence ao fecho do espaço gerado por $\{g_l : l = 1, 2, 3 \dots\}$. Portanto $(i) \Rightarrow (ii)$.

Agora, para m inteiro positivo, definimos $T_m : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ por

$$(T_m f)(x) = \begin{cases} m^{1/2} f(mx), & \text{se } x \in \left(0, \dfrac{1}{m}\right] \\ 0, & \text{se } x \in \left(\dfrac{1}{m}, 1\right]. \end{cases}$$

Vejamos que T_m é uma isometria. De fato, utilizando mudança de variáveis,

$$\|T_m f\|_2^2 = \int_0^{\frac{1}{m}} m|f(mx)|^2 dx = \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2.$$

Temos também que, para l, m inteiros positivos,

$$T_m(g_l) = m^{1/2}\left(g_{lm} - \frac{g_m}{l}\right). \tag{3.2}$$

Para ver isto primeiro consideramos o caso em que $x \in \left(\dfrac{1}{m}, 1\right]$: note que, neste caso,

$$g_{lm}(x) - \frac{g_m(x)}{l} = \left\{\frac{1}{lmx}\right\} - \frac{1}{l}\left\{\frac{1}{mx}\right\}.$$

Uma vez que $0 < \dfrac{1}{xm} \leq 1$, então

$$m^{1/2}\left(g_{lm}(x) - \frac{g_m(x)}{l}\right) = m^{1/2}\left(\frac{1}{lmx} - \frac{1}{lmx}\right) = 0 = T_m(g_l)(x).$$

Consideremos agora o caso que $x \in \left(0, \dfrac{1}{m}\right]$: seja $x \in \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$, com $n \geq m$ (pois se $n < m$, então $x > \dfrac{1}{m}$). Note que, por (3.1),

$$g_{lm}(x) - \frac{g_m(x)}{l} = \left\{\frac{n}{lm}\right\} - \frac{1}{l}\left\{\frac{n}{m}\right\} = g_l\left(\frac{m}{n}\right);$$

logo, como não existe inteiro contido no interior do intervalo $\left[\frac{n}{m}, \frac{n+1}{m}\right)$, é possível encontrar inteiro k tal que

$$\left(\frac{m}{n+1}, \frac{m}{n}\right] \subseteq \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right].$$

Uma vez que g_l é constante nesse intervalo e $\frac{m}{n+1} < xm \leq \frac{m}{n}$, segue que

$$g_{lm}(x) - \frac{g_m(x)}{l} = g_l\left(\frac{m}{n}\right) = g_l(mx).$$

Portanto

$$T_m(g_l)(x) = m^{1/2}\left(g_{lm}(x) - \frac{g_m(x)}{l}\right).$$

Sendo assim, denotando por $\mathcal{K}$ o fecho do espaço gerado pelos vetores g_l, segue que $\mathcal{K}$ é invariante por cada um desses T_m. Além disso, denotando $\Phi_n := \chi_{\frac{1}{n}}$ a função característica do intervalo $\left(0, \frac{1}{n}\right]$, pode-se provar pela definição que

$$T_m(\Phi_n) = m^{1/2}\Phi_{mn}.$$

Então, se $\mathbf{1} = \Phi_1 \in \mathcal{K}$, tem-se que $\Phi_m \in \mathcal{K}$, para todo $m \in \mathbb{N}$. De fato, como $\mathbf{1} \in \mathcal{K}$, então

$$T_m(\Phi_1) = m^{1/2}\Phi_m, \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N}.$$

Logo $\Phi_m \in \mathcal{K}$, para cada m; como $\{\Phi_m : m \in \mathbb{N}\}$ é conjunto total em $\mathcal{V}$, se conclui que $\mathcal{K} = \mathcal{V}$. Portanto $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Finalmente, se $\{g_l : l = 1, 2, 3, \dots\}$ é total em $\mathcal{V}$, em particular $\mathbf{1}$ pertence ao fecho do espaço gerado por $\{g_l : l = 1, 2, 3, \dots\}$; aplicando $\mathcal{M}$ vamos ter que $E = \mathcal{M}(\mathbf{1})$ está no fecho do espaço gerado por $\{G_l = -\mathcal{M}(g_l) : l = 1, 2, 3, \dots\}$. Pelo Teorema 2.3, a hipótese de Riemann é verdadeira. Portanto $(iii) \Rightarrow (i)$. □

Por último, daremos por último nesta seção uma reformulação direta do Teorema de Baez-Duarte em um novo espaço, definido a seguir.

Seja $\mathcal{H}$ o espaço de todas as sequências $a = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ de números complexos tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n(n+1)} < \infty. \tag{3.3}$$

Para $a, b \in \mathcal{H}$, definimos o produto interno como

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\overline{b_n}}{n(n+1)}.$$

Não é difícil verificar que toda sequência limitada de números complexos está neste espaço de Hilbert.

Para $l = 1, 2, 3, \ldots$, seja $\gamma_l \in \mathcal{H}$ definida como

$$\gamma_l = \left\{ \left\{ \frac{n}{l} \right\} : n = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

Denotemos também $\gamma \in \mathcal{H}$ a sequência constante

$$\gamma = \{1, 1, 1, \ldots\}.$$

Em termos desta notação, a recente reformulação do Teorema de Baez-Duarte vem dada da seguinte maneira.

Teorema 3.2. *As seguintes afirmações são equivalentes.*

i) A hipótese de Riemann,

ii) γ *pertence ao fecho do espaço gerado pelo conjunto* $\{\gamma_l : l = 1, 2, 3 \ldots\}$, *e*

iii) o conjunto $\{\gamma_l : l = 1, 2, 3 \ldots\}$ *é total em* $\mathcal{H}$.

Demonstração. Seja $U : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ o operador definido por

$$U(f) = \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) : n = 1, 2, 3, \ldots \right\}, \quad f \in \mathcal{V}.$$

Vejamos que U é uma bijeção. U é injetiva: se $f, g \in \mathcal{V}$ e $f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right)$, segue então, pela definição de $\mathcal{V}$, que f e g são constantes no intervalo $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, para cada $n \in \mathbb{N}$; portanto $f = g$.

U é sobrejetiva: seja $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{H}$; basta definir $f \in \mathcal{V}$ como

$$f(x) = a_n, \quad x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right].$$

É claro que $U(f) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Vejamos agora que U é uma isometria; de fato, dado $f \in \mathcal{V}$, definamos $a_n := f\left(\frac{1}{n}\right)$. Então, note que

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left| f\left(\frac{1}{n}\right)\right|^2 dx \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n(n+1)} = \|U(f)\|^2. \end{aligned}$$

Então, tendo em conta que $U(\mathbf{1}) = \gamma$, $U(g_l) = \gamma_l$ (pela igualdade 3.1) e U é um operador unitário, segue que este teorema é uma reformulação direta do Teorema 3.1. □

Esta reformulação direta do Teorema de Baez-Duarte apareceu pela primeira vez no artigo [5]. Foi Bagchi quem adicionou o item *iii*) do Teorema 3.1 e 3.2.

3.2 Sobre uma pergunta de Balazard e Saias relacionado à hipótese de Riemann

Nesta seção apresentamos outro teorema que fornece condições equivalentes à hipótese de Riemann. Neste caso estas condições estão relacionadas com os coeficientes de certas projeções ortogonais sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ definido em (3.3).

Para $k \geq 2$, definamos $r_k \in \mathcal{H}$ como a sequência cuja j-ésima coordenada $r_k(j)$ é o resíduo quando j é dividido por k. Note o seguinte: pelo algoritmo da divisão $j = qk + r_k(j)$, uma vez que q é inteiro e $0 \leq r_k(j) < k$, temos que $\left\{\frac{j}{k}\right\} = \frac{r_k(j)}{k}$. Sendo assim $r_k(j) = k\left\{\frac{j}{k}\right\}$ e

$$r_k = \left\{k\left\{\frac{j}{k}\right\} : j = 1, 2, 3\ldots\right\} = k\gamma_k.$$

Logo, é claro que

$$\operatorname{span}\{r_k : k = 2, 3, \ldots\} = \operatorname{span}\{\gamma_k : k = 2, 3, \ldots\}.$$

Portanto as afirmações do Teorema 3.2 são equivalentes para o conjunto $\{r_k : k = 2, 3, \ldots\}$.

Seja K_n o espaço gerado pelo conjunto $\{r_k : 2 \leq k \leq n\}$, o qual é fechado pois é de dimensão finita. Note que é possível tomar a decomposição $\mathcal{H} = K_n \oplus {K_n}^{\perp}$. Sejam então $g_n \in K_n$ e $h_n \in K_n^{\perp}$ tais que $\gamma = g_n + h_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, onde

$$g_n = \sum_{k=2}^{n} c_{n,k} r_k \tag{3.4}$$

é a projeção ortogonal de γ sobre K_n. Seja também K o fecho do espaço gerado por $\{r_k : k = 2, 3, \ldots\}$, então existe $g \in K$ e $h \in K^{\perp}$ tais que $\gamma = g + h$. Na seguinte proposição vamos provar que, em $\mathcal{H}$, $g_n \to g$, quando $n \to \infty$.

Observação 3.1. *Pode-se construir, pelo processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, uma base ortonormal de K, digamos $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$K_n = \operatorname{span}\{e_k : 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Seja P_n a projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre K_n e P a projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre K. Então

$$g_n = P_n(\gamma) = \sum_{k=1}^{n-1} \langle \gamma, e_k \rangle e_k \quad \text{e} \quad g = P(\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \gamma, e_k \rangle e_k.$$

Logo

$$\|g - g_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \langle \gamma, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |\langle \gamma, e_k \rangle|^2 \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Notemos também o seguinte fato: a hipótese de Riemann é equivalente a mostrar que $g = \gamma$. De fato, se $g = \gamma$, como $g_n \to g$ em $\mathcal{H}$ e

$$g_n \in \overline{\operatorname{span}\{r_k : k = 2, 3, \dots\}} = \overline{\operatorname{span}\{\gamma_k : k = 2, 3, \dots\}},$$

segue que $\gamma \in \overline{\operatorname{span}\{\gamma_k : k = 2, 3, \dots\}}$. Logo, pelo Teorema 3.2 a hipótese de Riemann é verdadeira. Também, supondo que a hipótese de Riemann é verdadeira, segue do Teorema 3.2 que

$$K = \overline{\operatorname{span}\{\gamma_k : k = 2, 3, \dots\}} = \mathcal{H},$$

logo $K^{\perp} = \emptyset$ e, portanto, $\gamma = g$. Tendo em conta esses fatos, vamos provar o próximo teorema.

No artigo ([4], Pergunta 4) Balazard e Saias se perguntaram se

$$\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = -\frac{\mu(k)}{k}, \quad \text{para todo} \quad k \geq 2. \tag{3.5}$$

No artigo [16] se deu uma equivalência para (3.5). Essa equivalência vem dada no seguinte teorema.

Teorema 3.3. *A hipótese de Riemann é equivalente a*

$$\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = -\frac{\mu(k)}{k}, \quad \text{para todo} \quad k \geq 2.$$

Demonstração. Para este teorema, vamos mostrar, utilizando a observação anterior, que (3.5) é equivalente a $g = \gamma$.

Como $g_n \to g$ em $\mathcal{H}$ e $r_k(1) = 1$, para todo $k \geq 2$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} c_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} c_{n,k} r_k(1) = \lim_{n\to\infty} g_n(1) = g(1). \tag{3.6}$$

Vamos supor que a igualdade (3.5) é satisfeita. Para $j \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} g_n(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} c_{n,k} r_k(j) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{j} c_{n,k} k \left\{\frac{j}{k}\right\} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=j+1}^{n} c_{n,k} k \left\{\frac{j}{k}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{j} c_{n,k} k \left\{\frac{j}{k}\right\} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=j+1}^{n} c_{n,k} j \\
&= -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{j} c_{n,k} k \left\lfloor\frac{j}{k}\right\rfloor + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{j} c_{n,k} j + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=j+1}^{n} c_{n,k} j \\
&= -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{j} c_{n,k} k \left\lfloor\frac{j}{k}\right\rfloor + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} c_{n,k} j \\
&= \sum_{k=2}^{j} \mu(k) \left\lfloor\frac{j}{k}\right\rfloor + j \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} c_{n,k} \\
&= 1 + (g(1) - 1) j,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade sai de (3.6) e da identidade (Teorema 1.8)

$$\sum_{k=1}^{j} \mu(k) \left\lfloor \frac{j}{k} \right\rfloor = 1, \quad (j \geq 1). \tag{3.7}$$

Agora, como $g_n \to g$ em $\mathcal{H}$, implica que

$$\lim_{n\to\infty} g_n(j) = g(j), \quad \text{para todo} \;\; j \geq 1,$$

segue que $g(j) = 1 + (g(1) - 1)j$. Se $(g(1) - 1) \neq 0$, então temos que a sequência g_n diverge em $\mathcal{H}$, o qual é absurdo. Logo, necessariamente, $g(1) = 1$. Portanto

$$g(j) = \lim_{n\to\infty} g_n(j) = 1, \quad \text{para todo} \quad j \geq 1,$$

isto é, $g = \gamma$.

Reciprocamente, suponhamos que $g = \gamma$. Então

$$1 = \lim_{n\to\infty} g_n(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} c_{n,k} r_k(j), \quad \text{para todo} \;\; j \geq 1. \tag{3.8}$$

Tendo em conta que $r_k(2) = 2$, para $k \geq 3$, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_{n,2} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left\{ c_{n,k} r_k(1) - \frac{1}{2} c_{n,k} r_k(2) \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} c_{n,k} r_k(1) - \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} c_{n,k} r_k(2) \\
&= 1 - 1/2 = 1 = -\frac{\mu(2)}{2}.
\end{aligned}$$

Vamos fazer indução sobre k. Suponhamos que $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n,k} = -\mu(k)/k$, para $2 \leq k \leq j-1$. De (3.8) temos que

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{j-1} c_{n,k} r_k(j) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=j+1}^{n} c_{n,k} j \tag{3.9}$$

e

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} c_{n,k} r_k(1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} c_{n,k}. \tag{3.10}$$

Multiplicando (3.10) por j e subtraindo (3.9), temos que

$$\begin{aligned}
j - 1 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{j-1} c_{n,k}(j - r_k(j)) + j \lim_{n\to\infty} c_{n,j} \\
&= - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{j-1} c_{n,k}(j - r_k(j)) + j \lim_{n\to\infty} c_{n,j} \\
&= - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{j-1} \mu(k) \left(\frac{j}{k} - \frac{r_k(j)}{k} \right) + j \lim_{n\to\infty} c_{n,j} \\
&= - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{j-1} \mu(k) \left(\frac{j}{k} - \left\{ \frac{j}{k} \right\} \right) + j \lim_{n\to\infty} c_{n,j} \\
&= - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{j-1} \mu(k) \left\lfloor \frac{j}{k} \right\rfloor + j \lim_{n\to\infty} c_{n,j}.
\end{aligned}$$

Daqui e da identidade (3.7), segue que

$$j - 1 = -(1 - j - \mu(j)) + j \lim_{n \to \infty} c_{n,j},$$

logo,

$$\lim_{n \to \infty} c_{n,j} = -\frac{\mu(j)}{j},$$

o que conclui a demonstração.

$\square$

Referências

[1] T. M. Apostol. Introduction to analytic number theory. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] L. Baez-Duarte. A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis. Atti Acad. Naz. Lincei 14 (2003) 5-11.

[3] B. Bagchi. On Nyman, Beurling and Baez-Duarte's Hilbert space reformulation of the Riemann hypothesis. Proc. Ind. Acad. Sci (Math. Sci.), 116(2), 137-146, 2006.

[4] M. Balazard and E. Saias. Notes sur la fonction ζ de Riemann, 1. Adv. Math. 139(2): 310-321, 1998.

[5] M. Balazard and E. Saias. Notes sur la fonction ζ de Riemann, 4. Adv. Math. 188, 69-86, 2004.

[6] R. G. Bartle. The elements of integration and Lebesgue measure. John Wiley & Sons, 2014.

[7] A. Beurling. A closure problem related to the Riemann zeta-function. Proc. Nat. Acad. Sci., 41(5): 312-314, 1955.

[8] H. M. Edwards. Riemann's zeta function, volume 58. Academic press, 1974.

[9] K. Hoffman. Banach spaces of analytic functions. Courier Corporation, 2007.

[10] S. Lang. Complex Analysis, volume 103. Springer Science & Business Media, 2013.

[11] B. Nyman. On some groups and semigroups of translations. Thesis, Uppsala, 1950.

[12] E. M. Stein and R. Shakarchi. Complex Analysis. Princeton Lectures in Analysis, II, 2003.

[13] E. M. Stein and R. Shakarchi. Real Analysis: measure theory, integration and Hilbert spaces. Princeton University Press, 2009.

[14] E. M. Stein and R. Shakarchi. Fourier Analysis: an introduction, volume 1. Princeton University Press, 2011.

[15] E. C. Titchmarsh. The theory of the Riemann zeta-function. Oxford University Press, 1986.

[16] A. Weingartner. On a question of Balazard and Saias related to the Riemann hypothesis. Adv. Math. 208(2): 905-908, 2007.