Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC
Departamento de Matemática

O Problema de Cauchy para um sistema de equações do tipo Schrödinger não linear de terceira ordem

Luciana Maria Mendonça Bragança
mendonca@ufv.br

Tese de Doutorado

Orientadora: **Profa. Dra. Márcia Assumpção Guimarães Scialom**

Co-orientador: **Prof. Dr. Felipe Linares**

5 de junho de 2007
Campinas - SP

O Problema de Cauchy para um sistema de equações do tipo Schrödinger não linear de terceira ordem

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Luciana Maria Mendonça Bragança** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de junho de 2007.

Márcia Scialom

Profa. Dra. **Márcia Assumpção G. Scialom**
Orientadora

Jari Felipe Linares

Prof. Dr. **Felipe Linares**
Co-orientador

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Márcia Assumpção G. Scialom IMECC - UNICAMP

Prof. Dr. Jaime Angulo Pava IMECC - UNICAMP

Prof. Dr. Aloísio José Freiria Neves IMECC - UNICAMP

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki DMA - UFV

Prof. Dr. Xavier Carvajal Paredes DMA - UFRJ

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção de Título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues - CRB8a / 2116

	Bragança, Luciana Maria Mendonça
B73p	O Problema de Cauchy para um sistema de equações do tipo Schrödinger não linear de terceira ordem / Luciana Maria Mendonça Bragança – Campinas, [S.P.:s.n.], 2007.
	Orientador: Márcia Assumpção Guimarães Scialom; Felipe Linares
	Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Cauchy, Problemas de. 2. Equações diferenciais não lineares. 3. Schrödinger, Equação de. I. Scialom, Márcia Assumpção Guimarães. II. Linares, Felipe. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: The Cauchy problem associated to a system of coupled third-order nonlinear Schrödinger equation.

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Cauchy problem. 2. Nonlinear differential equations. 3. Schrödinger equation.

Área de concentração: Análise/Equações diferenciais Parciais
Titulação: Doutora em matemática

Banca examinadora: 1. Profa. Dra. Márcia Assumpção Guimarães Scialom(UNICAMP)
2. Prof. Dr. Jaime Angulo Pava (UNICAMP)
3. Prof. Dr. Aloísio José Freiria Neves (UNICAMP)
4. Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (UFV)
5. Prof. Dr. Xavier Carvajal Paredes (UFRJ)

Data da defesa: 05-06-2007

Programa de Pós Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 05 de junho de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Márcia Scialom

Prof. (a). Dr (a). MARCIA ASSUMPÇÃO GUIMARÃES SCIALOM

Prof. (a). Dr (a). JAIME ANGULO PAVA

Prof. (a). Dr (a). ALOÍSIO JOSÉ FREIRIA NEVES

Prof. (a). Dr (a). OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI

Prof. (a) Dr. (a). XAVIER CARVAJAL PAREDES

Aos meus pais, com amor.

Agradecimentos

A Deus, meu companheiro fiel, que conhece a fundo os meus pensamentos e nunca me abandona.

A minha orientadora, Márcia Scialom, pelo seu apoio, orientação e pelas preciosas discussões sobre os temas deste trabalho.

Ao meu co-orientador, Felipe Linares, pela motivação, orientação e sua valiosa experiência científica.

Aos colegas, Xavier Carvajal e Olímpio Hiroshi, pelas importantes discussões sobre temas relacionados a este trabalho, pelo incentivo, paciência e apoio.

Ao meu esposo, Fabio do Carmo Bragança, pelo carinho e companheirismo de sempre.

Às amigas, Sueli Roversi, Paula Takatsuka, Lucy Takahashi, Ivanilde e Ximena Mujica, pelos bons momentos que passamos juntas.

À Universidade Estadual de Campinas, pelo apoio financeiro concedido, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

À Universidade Federal de Viçosa, da qual fui aluna e hoje sou professora com tanto orgulho. Aos colegas, professores e funcionários do DMA, pelo apoio e incentivo.

Aos meus pais, pelas valiosas lições que não podem ser encontradas nos livros, pela compreensão, por todo amor e carinho.

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram pessoalmente ou cientificamente para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de Cauchy associado a um sistema de Equações do tipo Schrödinger não linear de terceira ordem. Obtemos resultados de boa colocação local para o problema, com dado inicial nos espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$ e no caso periódico em $H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})$, $s \geq 1/2$. No caso particular $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = 1$ obtemos resultados de boa colocação global em $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$, $3/5 < s \leq 1$ e $H^1(\mathbb{T})\times H^1(\mathbb{T})$. Mostramos também um resultado de má colocação para o problema com dado inicial em $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$, $-1/2 < s < 1/4$.

Palavras-chave: problema de Cauchy, boa colocação, soluções periódicas, sistema de equações do tipo Schrödinger não linear de terceira ordem, má colocação.

Abstract

In this work we study the Cauchy problem associated to a system of coupled third-order nonlinear Schrödinger equation. We establish local well-posedness results for the problem with data in Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$ and in the periodic case in $H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})$, $s \geq 1/2$. In the particular case $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = 1$ we show global well-posedness results for the problem with data in Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$, $3/5 < s \leq 1$ and $H^1(\mathbb{T})\times H^1(\mathbb{T})$. We also show ill-posedness results for the problem with data in Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$,$-1/2 < s < 1/4$.

Key-words: Cauchy problem, well-posedness, periodic solutions, coupled third-order nonlinear Schrödinger equation, ill-posedness.

Sumário

Lista de símbolos

$H^s(\mathbb{R})$ Espaço de Sobolev de ordem s, com base em $L^2(\mathbb{R})$

$\mathcal{F}(u)(\xi) = \widehat{u}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x)dx$ Transformada de Fourier de u

$\mathcal{F}^{-1}(u)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} u(\xi)d\xi$ Inversa da Transformada de Fourier de u

$D^s(u)$ Potencial de Riesz de ordem s

$\mathcal{F}(D^s u)(\xi) = |\xi|^s \mathcal{F}(u)(\xi)$

$C([-T,T];X)$ Conjunto das funções contínuas de $[-T,T]$ em X

$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$

$\|f\|_{L^p_x L^q_t} := \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^q \, dt\right)^{p/q} dx\right)^{1/p}$

$\|f\|_{L^p_x L^q_T} := \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^q \, dt\right)^{p/q} dx\right)^{1/p}$

$x \lesssim y$ Existe uma constante $c > 0$ tal que $x \leq cy$

$x \gtrsim y$ Existe uma constante $c > 0$ tal que $x \geq cy$

$x \simeq y$ ($x \lesssim y$ e $x \gtrsim y$)

$\mathbb{T}$ Toro unidimensional

$\widetilde{f}(n,\tau) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} e^{-i(xn+t\tau)} f(x,t)dxdt$

$\widehat{g}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-ixn} g(x)dx$

$\|f\|_{l_n^2 L_\tau^2} = \left(\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(n,\tau)|^2 \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$

$\langle \cdot \rangle = \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\|f\|_{(1,s,b)} = \left\| \langle n \rangle^s \langle \tau - n^3 + \frac{q}{2} n^2 + c_0 n \rangle^b \widetilde{f}(n,\tau) \right\|_{l_n^2 L_\tau^2}$

$\|f\|_{(2,s)} = \left\| \langle n \rangle^s \widetilde{f}(n,\tau) \right\|_{l_n^2 L_\tau^1}$

c constante positiva, que pode mudar de valor de uma expressão para outra.

Introdução

A noção de boa colocação para o problema de Cauchy associado a uma equação diferencial parcial surgiu há décadas, com Hadamard [13]. Em 1923, Hadamard apresentou um exemplo de dado inicial para o problema de Cauchy associado à equação de Laplace, no qual a dependência contínua falhava. Mais tarde esta noção foi refinada por vários autores. Em particular, Kato em [18] definiu boa colocação da seguinte maneira:

Considere o problema de Cauchy

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 \in Y \subset X, \tag{1}$$

com X, Y espaços de Banach, $Y \subset X$ com a injeção contínua e f uma função contínua de Y em X. O problema (1) é *localmente bem posto* em Y se, para cada $u_0 \in Y$ existe $T > 0$ e uma única solução (*existência e unicidade)*

$$u \in C([0,T];Y) \tag{2}$$

satisfazendo (1) para $t \in (0,T]$ e a aplicação $u_0 \to u$ é contínua de Y para $C([0,T];Y)$ (*dependência contínua)*. A condição (2) implica na propriedade de *persistência* da solução (isto é, a solução descreve uma curva contínua em Y). Este é um conceito forte de boa colocação e nem sempre é obtido, ou pelo menos não é provado em sua totalidade na literatura. Dizemos que o problema é mal posto se pelo menos uma das condições acima não for satisfeita.

O conceito que utilizamos aqui é o mesmo para mostrar boa colocação local. Se o tempo $T > 0$ pode ser escolhido tal que $T = +\infty$ então dizemos que o problema é *globalmente bem posto*. Para o resultado relacionado a má colocação usaremos um conceito mais fraco. A existência, unicidade e persistência das soluções permanecem e pediremos que a aplicação $u_0 \to u$ seja uniformemente contínua.

Neste trabalho estudamos o seguinte problema de Cauchy associado a um sistema de equações do tipo Schrödinger não linear de terceira ordem

$$\begin{cases} 2i\partial_t u + q\partial_x^2 u + i\gamma\partial_x^3 u + 2i\beta\left(|u|^2 + \sigma_\beta |w|^2\right)\partial_x u + 2\alpha u(|u|^2 + \sigma_\alpha |w|^2) \\ +2i\mu u\partial_x\left(|u|^2 + \sigma_\mu |w|^2\right) = 0 \\ 2i\partial_t w + q\partial_x^2 w + i\gamma\partial_x^3 w + 2i\beta\left(|w|^2 + \sigma_\beta |u|^2\right)\partial_x w + 2\alpha w(|w|^2 + \sigma_\alpha |u|^2) \\ +2i\mu w\partial_x\left(|w|^2 + \sigma_\mu |u|^2\right) = 0, \\ u(x,0) = u_0 \text{ e } w(x,0) = w_0, \end{cases} \tag{3}$$

onde $q, \gamma, \beta, \mu, \alpha, \sigma_\alpha, \sigma_\beta$ e σ_μ são parâmetros reais.

Este sistema é um modelo que descreve a dinâmica de dois pulsos não lineares $u(x,t)$ e $w(x,t)$ no interior de uma fibra óptica. Ele foi proposto por Porsezian, Shanmugha Sundaram e Mahalingam [31] em 1994 e generalizou o modelo apresentado por Hasegawa-Kodama [14] em 1985. Recentemente a propagação de ondas eletromagnéticas tem atraído a atenção de físicos preocupados com o avanço tecnológico de utilização de fibras óticas. Em particular, a propagação de solitons tem tido importantes aplicações em sistemas de comunicação. A razão para isto é devido ao fato desses pulsos, chamados solitons "dark"e "bright", propagarem sem distorções e se estenderem a longas distâncias. O sistema acima foi estudado anteriormente ([2], [28] e [39]), para o caso simplificado $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = 1$, com o objetivo de obter soluções particulares explícitas do tipo soliton "dark"e "bright". Radhakrishnan e Lakshmanan em [33] mostraram que após a mudança de variável

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_1\left(x - \frac{q^2}{6\gamma}t, t\right)\exp i\left(\frac{q}{3\gamma}x - \frac{q^3}{27\gamma^2}t\right) \\ w(x,t) &= w_1\left(x - \frac{q^2}{6\gamma}t, t\right)\exp i\left(\frac{q}{3\gamma}x - \frac{q^3}{27\gamma^2}t\right), \end{aligned}$$

o sistema (3) no caso $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$ e $q\beta = 3\gamma\alpha$ é reduzido ao sistema

$$\begin{cases} 2i\partial_t u_1 + i\gamma\partial_x^3 u_1 + 2i\beta\left(|u_1|^2 + \sigma_\beta |w_1|^2\right)\partial_x u_1 + 2i\mu u_1\partial_x\left(|u_1|^2 + \sigma_\mu |w_1|^2\right) = 0 \\ 2i\partial_t w_1 + i\gamma\partial_x^3 w_1 + 2i\beta\left(|w_1|^2 + \sigma_\beta |u_1|^2\right)\partial_x w_1 + 2i\mu w_1\partial_x\left(|w_1|^2 + \sigma_\mu |u_1|^2\right) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Em seguida eles aplicaram a transformação bilinear de Hirota [17] no sistema (4) e obtiveram soluções explícitas para o sistema (3) no caso particular $\beta = \mu$, $q\beta = 3\gamma\alpha$, $\gamma \neq 0$ e $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = 1$. Porsezian e Kalithasan, em trabalho recente [32], mostraram a existência de soluções explícitas periódicas do tipo cnoidais para o sistema (3). Em todos os trabalhos do nosso conhecimento não houve preocupação de estudar a boa colocação local e global para o problema de Cauchy (3). Nosso trabalho tem o objetivo de preencher esta lacuna. Observemos que se o pulso $w = 0$, o sistema (4) se reduz a bem conhecida modificada KdV complexa e isto sugere que os resultados de boa colocação obtidos para a equação modificada KdV devem ser os esperados para o sistema (3).

O sistema (3) se reduz à seguinte equação no caso $w = 0$

$$i\partial_t u + \frac{q}{2}\partial_x^2 u + i\frac{\gamma}{2}\partial_x^3 u + \alpha u\left|u\right|^2 + i\left(\beta + \mu\right)\left|u\right|^2 \partial_x u + i\mu u^2 \partial_x \overline{u} = 0, \tag{5}$$

a qual descreve a dinâmica de único pulso não linear em uma fibra óptica.

O problema de valor inicial associado à equação (5) foi inicialmente estudado por Laurey [26], em 1997, a qual obteve resultado de boa colocação local em $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq \frac{3}{4}$ e boa colocação global em $H^1(\mathbb{R})$ e $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 2$. Em seguida, Staffilani [35] mostrou que o problema de valor inicial associado à equação (5) é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq \frac{1}{4}$. Takaoka [38], em 2000, mostrou que o problema de valor inicial associado à equação (5) no caso periódico é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{T})$, $s \geq \frac{1}{2}$ e Carvajal [5], em 2002, mostrou que o problema de valor inicial associado a equação

$$i\partial_t u + q(t)\partial_x^2 u + i\gamma(t)\partial_x^3 u + \alpha u\left|u\right|^2 + i\delta\left|u\right|^2 \partial_x u + i\epsilon u^2 \partial_x \overline{u} = 0 \tag{6}$$

com q, $\gamma \in C^1([-T, T]; \mathbb{R})$ é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq \frac{1}{4}$e mal posto (no sentido de que a aplicação dado-solução não é uniformemente contínua) em $H^s(\mathbb{R})$, $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{4}$. Carvajal [8] mostrou também que o problema (6) com parâmetros $q(t)$, $\gamma(t)$ constantes e $\alpha = \frac{(\delta-\varepsilon)q}{3\gamma}$ é globalmente bem posto em $H^s(\mathbb{R})$, $\frac{1}{4} < s < 1$.

Neste trabalho obtivemos os resultados esperados de boa colocação local e global para o problema de Cauchy (3), com base nos resultados obtidos para (5). Na primeira seção do capítulo 1 apresentamos alguns resultados clássicos que serão utilizados ao longo do trabalho. Na segunda seção enunciamos e demonstramos um teorema de boa colocação local para o problema de Cauchy (3), sem restrição nos parâmetros reais, em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$. Na demonstração deste resultado usamos o princípio da contração juntamente com algumas idéias de Kenig, Ponce e Vega [21] para o caso da KdV generalizada. A demonstração é baseada nos efeitos regularizantes satisfeitos pela solução do problema de valor inicial linear associado ao sistema (3)

$$\begin{cases} 2i\partial_t u + q\partial_x^2 u + i\gamma\partial_x^3 u = 0 \\ 2i\partial_t w + q\partial_x^2 w + i\gamma\partial_x^3 w = 0 \\ u(x,0) = u_0 \text{ e } w(x,0) = w_0, \end{cases} \tag{7}$$

onde q, $\gamma \in \mathbb{R}$. Observe que as equações do sistema linear (7) são desacopladas e por isso a solução é dada por

$$\overrightarrow{u}(x,t) = W(t)\overrightarrow{u}_0 = (S_t * u_0(x), S_t * w_0(x)) \ ,$$

onde $\overrightarrow{u}_0 = (u_0, w_0)$, $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é o grupo unitário em $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$ e $S_t(x)$ é dado por

$$S_t(x) = c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi+it(-\frac{q}{2}\xi^2+\frac{\gamma}{2}\xi^3)}d\xi.$$

A solução do sistema linear (7) satisfaz o seguinte efeito de regularização local do tipo Kato

$$\|\partial_x W(t)\overrightarrow{u}_0\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq c(1+T)\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{L^2} \ ,$$

a estimativa da função maximal

$$\|W(t)\overrightarrow{u}_0\|_{L_x^4 L_T^\infty} \ \leq c(1+T)\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^{1/4}}$$

e a estimativa do tipo Strichartz

$$\|W(t)\overrightarrow{u}_0\|_{L_T^p L_x^q} \ \leq c\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{L^2} \ ,$$

onde p e q são tais que $2 \leq q \leq \infty$ e p satisfaz $\frac{2}{p} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3q}$. Essa última desigualdade foi obtida por Carvajal em [5]. No caso particular de $p = q = 8$, temos

$$\|W(t)\overrightarrow{u}_0\|_{L_T^8 L_x^8} \leq c\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{L^2} .$$

Na terceira seção do capítulo 1 apresentamos um resultado de boa colocação local para o problema de valor inicial periódico associado a (3) com dados iniciais em $H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})$, $s \geq \frac{1}{2}$, onde $H^s(\mathbb{T})$ denota o espaço de Sobolev de ordem s sobre o círculo unitário S^1. $H^s(\mathbb{T})$ será o espaço de todas as distribuições periódicas f de período 2π tais que

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{T})} = \left(2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^2)^s\left|\widehat{f}(n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Outras notações aparecem na literatura para designar o mesmo espaço. Para a demonstração deste resultado utilizamos os espaços introduzidos por Bourgain em [4], o princípio de contração e também propriedades da solução do problema linear

$$\begin{cases} \partial_t u - i\frac{q}{2}\partial_x^2 u + \partial_x^3 u + c_0\partial_x u = 0 \\ \partial_t w - i\frac{q}{2}\partial_x^2 w + \partial_x^3 w + c_0\partial_x w = 0 \\ u(x,0) = u_0 \text{ e } w(x,0) = w_0,\ x\in\mathbb{T}, \end{cases} \tag{8}$$

o qual é diferente do sistema (7) por causa dos termos $c_0\partial_x u$ e $c_0\partial_x w$. A necessidade deste novo termo ficará clara mais adiante, onde aparecerá a constante $c_0 = (\beta+\mu)\left[\|u\|^2_{L^2_x} + \|w\|^2_{L^2_x}\right]$. A solução de (8) é dada por

$$\overrightarrow{u}(x,t) = W_1(t)\overrightarrow{u}_0 = (S_1(t)u_0, S_1(t)w_0),$$

onde $\{W_1(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é o grupo unitário em $H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})$ e $S_1(t)$ é definido por

$$S_1(t)u_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}e^{it(n^3-\frac{q}{2}n^2-c_0n)}\widehat{u}_0\left(n\right).$$

No caso periódico não há efeitos regularizantes disponíveis. Neste caso, as principais estimativas lineares utilizadas na prova do teorema de boa colocação local são as seguintes

$$\|\Psi(t)W_1(t)\overrightarrow{u}_0\|_{(1,s,\frac{1}{2})} \le c\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s\times H^s}\,,$$
$$\|\Psi(t)W_1(t)\overrightarrow{u}_0\|_{(2,s)} \le c\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s\times H^s}\,,$$

onde $\Psi(t)W_1(t)\overrightarrow{u}_0$ é dada por

$$\Psi(t)W_1(t)\overrightarrow{u}_0 = (\psi(t)S_1(t)u_0, \psi(t)S_1(t)w_0)$$

e ψ denota a função corte que satisfaz $\psi = 1$ em $[-1,1]$, $\psi\in C_0^\infty$ e $supp\psi \subseteq (-2,2)$. As normas $\|\cdot\|_{(1,s,\frac{1}{2})}$ e $\|\cdot\|_{(2,s)}$ são definidas como

$$\begin{aligned}\|f\|_{(1,s,\frac{1}{2})} &= \left\|\langle n\rangle^s\langle \tau - n^3 + \frac{q}{2}n^2 + c_0 n\rangle^{\frac{1}{2}}\widetilde{f}(n,\tau)\right\|_{l^2_n L^2_\tau},\\ \|f\|_{(2,s)} &= \left\|\langle n\rangle^s\widetilde{f}(n,\tau)\right\|_{l^2_n L^1_\tau},\end{aligned}$$

com

$$\widetilde{f}(n,\tau) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}} e^{-i(xn+t\tau)}f(x,t)dxdt.$$

Na primeira seção do capítulo 2 obtemos as seguintes leis de conservação para o sistema (3) no caso $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = 1$:

$$I_1(u,w) = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w\|^2_{L^2(\Omega)} = I_1(u_0,w_0) \tag{9}$$

e

$$\begin{aligned} I_2(u,v) = {} & i\left(-3\gamma\alpha + \beta q + 2\mu q\right)\int_\Omega (u\overline{u}_x + w\overline{w}_x)dx + \frac{3}{2}\gamma\left(\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_x\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\ & + \frac{1}{2}\left(\beta+2\mu\right)\left(\|u\|^4_{L^4(\Omega)} + \|w\|^4_{L^4(\Omega)}\right) + (\beta+2\mu)\int_\Omega |u|^2\,|w|^2\,dx \qquad (10)\\ & = I_2(u_0,w_0), \end{aligned}$$

para $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}$. É importante notar que as duas quantidades conservadas $I_1(u,w)$ e $I_2(u,w)$ que obtivemos para o sistema (3) generalizam as quantidades obtidas por Laurey em [26], no sentido de que $I_1(u,w)$ e $I_2(u,w)$ contêm as quantidades conservadas no caso de uma única equação. Sem elas não seria possível estender a solução local para qualquer intervalo de tempo $[0,T]$, nos espaços $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$, $3/5 < s \leq 1$ e $H^1(\mathbb{T})\times H^1(\mathbb{T})$. No caso estrito, $3/5 < s < 1$, além das leis de conservação, utilizamos também argumentos de Bourgain [4] e Fonseca, Linares e Ponce [11] para obtermos o resultado de boa colocação global.

No terceiro capítulo obtemos a seguinte família de soluções, a dois parâmetros (N e θ), para o sistema (3) no caso particular $\mu = 0$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$, $q\beta = 3\gamma\alpha$ e $(\beta + \lambda^2\beta\sigma_\beta)\gamma > 0$:

$$\begin{aligned} u_{N,\theta}(x,t) &= e^{iNx}e^{iH(N,\theta)t} f_\theta\left(x - c(N,\theta)t\right) \\ w_{N,\theta}(x,t) &= \lambda e^{iNx}e^{iH(N,\theta)t} f_\theta\left(x - c(N,\theta)t\right), \end{aligned} \tag{11}$$

onde

$$f_\theta(x) = \frac{\theta\,\mathrm{sech}(\theta x)}{\left[(\beta\sigma_\beta + \lambda^2\beta)/3\gamma\right]^{1/2}} \tag{12}$$

e

$$H(N,\theta) = \frac{(\gamma\theta^2 + 2qN - 3N^2\gamma)(q - 3N\gamma) - N(q - 2N\gamma)^2}{2\gamma}. \tag{13}$$

Essas soluções serão fundamentais para mostrar um resultado de má colocação em $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, $s \in (-1/2, 1/4)$, no sentido de que a aplicação dado-solução não é uniformemente contínua. Com isso, obtemos condições sobre os coeficientes μ, σ_α, σ_β, q, β, γ e α para os quais o problema de Cauchy (3) não pode ser resolvido aplicando teorema do ponto fixo à equação integral associada.

Capítulo 1

Teoria Local

1.1 Preliminares

Nesta seção apresentamos definições e resultados que serão utilizados nas seções seguintes.

Definição 1.1.1 *Para $1 \leq p,\ q < \infty$ definimos o espaço de Banach*

$$L_x^p L_T^q = \left\{ f : \mathbb{R} \times [-T,T] \to \mathbb{C};\, \|f\|_{L_x^p L_T^q} < \infty \right\},$$

munido da norma dada por

$$\|f\|_{L_x^p L_T^q} :\ = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^q \, dt \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}.$$

Definição 1.1.2 *Denotamos por $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ o espaço das funções de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ com suporte compacto e $H^s(\mathbb{R})$ o espaço de Sobolev usual (de tipo $L_2(\mathbb{R})$) de ordem s, com norma*

$$\|f\|_{H^s} := \left\| \left(1 - \partial_x^2\right)^{\frac{s}{2}} f \right\|_{L^2}.$$

O potencial de Riesz é definido por $D_x^s = (-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}$.

Em [21] (Teoremas A.12 e A.8 , respectivamente) foram estabelecidas as seguintes estimativas para derivadas fracionárias:

Proposição 1.1.3 *Sejam $\alpha \in (0,1)$, $\alpha_1,\ \alpha_2 \in [0,\alpha]$, com $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Então*

(i) Para $1 < p < \infty$ vale a desigualdade

$$\|D_x^\alpha (fg) - f D_x^\alpha g - g D_x^\alpha f\|_{L_x^p} \leq c \|g\|_{L_x^\infty} \|D_x^\alpha f\|_{L_x^p}.$$

(ii) Para $p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \in (1, \infty)$, *com* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ *e* $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, *vale a desigualdade*

$$\|D_x^\alpha (fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f\|_{L_x^p L_T^q} \leq \|D_x^{\alpha_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\alpha_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}.$$

Além disso, para $\alpha_1 = 0$, *o valor* $q_1 = \infty$ *pode ser assumido.*

Definição 1.1.4 *Seja* $\mathcal{P} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ g \in \mathcal{C}^\infty$ *periódica de período* $2\pi\}$. $\mathcal{P}'$ *(o dual topológico de* $\mathcal{P}$*) é a coleção de todos os funcionais lineares de* $\mathcal{P}$ *em* $\mathbb{C}$. $\mathcal{P}'$ *é chamado o conjunto das distribuições periódicas. Se* $g \in \mathcal{P}'$ *denotamos o valor de* g *em* φ *por* $g(\varphi) = \langle g, \varphi \rangle$. *Considere as funções* $\theta_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ *e* $x \in \mathbb{R}$. *A transformada de Fourier de* $g \in \mathcal{P}'$ *é a função* $\widehat{g} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *definida por* $\widehat{g}(n) = \langle g, \theta_{-n} \rangle$. *Se* g *é uma função periódica de período* 2π, *por exemplo,* $g \in L^2(\mathbb{T})$ *então*

$$\widehat{g}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-ixn} g(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ixn} g(x)dx,$$

onde $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ *representa o toro unidimensional.*

Definição 1.1.5 *Para* $s \in \mathbb{R}$, *os espaços de Sobolev* $H^s(\mathbb{T})$ *representam o conjunto de todas as* $g \in \mathcal{P}'$ *tais que*

$$\|g\|_{H^s(\mathbb{T})} = \left(2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|^2)^s |\widehat{g}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Para $s \geq 0$, $H^s(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ *e via identidade de Parseval segue que para cada* $n \in \mathbb{N}$,

$$\|g\|_{H^n(\mathbb{T})} = \left(\sum_{j=0}^{n} \left\|g^{(j)}\right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $g^{(j)}$ *representa a* j*-ésima derivada de* g *no sentido de* $\mathcal{P}'$.

Definição 1.1.6 *Denotamos por* $\widetilde{f}$ *a transformada de Fourier de* f *em relação às variáveis espaço-tempo*

$$\widetilde{f}(n, \tau) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} e^{-i(xn + t\tau)} f(x, t) dx dt.$$

A transformada inversa é dada por

$$f(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} \widetilde{f}(n, \tau) d\tau.$$

A transformada de Fourier da função fgh, *onde* $f = f(x, t)$, $g = g(x, t)$ *e* $h = h(x, t)$ *são funções periódicas com respeito a variável* x *é obtida via convolução por*

$$\widetilde{fgh}(n, \tau) = \widetilde{f} * \widetilde{g} * \widetilde{h} = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{f}(n_1, \tau_1) \widetilde{g}(n_2, \tau_2) \widetilde{h}(n - n_1 - n_2, \tau - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Definição 1.1.7 *Seja $\mathcal{V}$ o espaço das funções f tais que*

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C},\\
&(ii) \quad f(x,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{T},\\
&(iii) \quad f(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{T}) \quad \textit{para cada} \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Para s,b,$c_0$$\in \mathbb{R}$, definimos o espaço de Bourgain $X_{s,b}$ associado ao operador $\partial_t - i\frac{q}{2}\partial_x^2 + \partial_x^3 + c_0\partial_x$ como sendo o completamento de $\mathcal{V}$ com respeito à norma

$$\|f\|_{X_{s,b}} := \|f\|_{(1,s,b)}\,,$$

onde

$$\|f\|_{(1,s,b)} = \left\| \langle n\rangle^s \langle \tau - n^3 + \frac{q}{2}n^2 + c_0 n\rangle^b \widetilde{f}(n,\tau)\right\|_{l_n^2 L_\tau^2}\,,$$

$$\|f\|_{l_n^2 L_\tau^2} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f(n,\tau)|^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

e $\langle n\rangle = (1+|n|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Definimos o espaço $Z_{s,b}$ como o completamento de $\mathcal{V}$ com respeito à norma

$$\|f\|_{Z_{s,b}} := \|f\|_{(2,s,b)}\,,$$

onde

$$\|f\|_{(2,s,b)} = \left\| \langle n\rangle^s \langle \tau - n^3 + \frac{q}{2}n^2 + c_0 n\rangle^b \widetilde{f}(n,\tau)\right\|_{l_n^2 L_\tau^1}\,.$$

Definimos o espaço $Y_s = X_{s,\frac{1}{2}} \cap Z_{s,0}$ munido da norma

$$\|f\|_{Y_s} = \|f\|_{(1,s,\frac{1}{2})} + \|f\|_{(2,s,0)}$$

Observação 1.1.8 *Para $b > \frac{1}{2}$ temos que $X_{s,b} \subset C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{T}))$.*

Para $b = 0$, temos que $Z_{s,0} \subset C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{T}))$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{H^s} &= c\left\| \langle n\rangle^s \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau}\widetilde{f}(n,\tau)d\tau\right\|_{l_n^2}\\
&\le c\left\| \langle n\rangle^s \int_{\mathbb{R}} \left|\widetilde{f}(n,\tau)\right| d\tau\right\|_{l_n^2}\\
&= c\left\| \langle n\rangle^s \widetilde{f}(n,\tau)\right\|_{l_n^2 L_\tau^1} = \|f\|_{Z_{s,0}}\,.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f\|_{H^s} \le \|f\|_{Z_{s,0}} \le \|f\|_{Y_s}\,.$$

Como conseqüência, temos que $Y_s \subset C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{T}))$.

O espaço $Y_s^T := \left\{ f\mid_{[-T,T]}; f \in Y_s \right\}$ *munido da norma*

$$\|f\|_{Y_s^T} = \inf \left\{ \|g\|_{Y_s} \quad \textit{tal que} \quad g\mid_{[-T,T]} = f \quad \textit{e} \quad g \in Y_s \right\},$$

satisfaz a propriedade $Y_s^T \subset C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}))$.

O seguinte lema será usado na demonstração do teorema de boa colocação local no caso periódico.

Lema 1.1.9 *Se* $\alpha, \beta > 0$ *tais que* $\alpha + \beta > 1$ *e* $d = \min(\alpha, \beta, \alpha + \beta - 1)$ *então*

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\langle \tau \rangle^{\alpha} \langle \tau - \theta \rangle^{\beta}} \leq \frac{c}{\langle \theta \rangle^{d}}, \textit{ para algum } c > 0.$$

Demonstração: Da desigualdade $\left(1 + |\tau|^2\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2}(1 + |\tau|)$, segue que existe $c > 0$ tal que

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\left(1 + |\tau|^2\right)^{\alpha/2} \left(1 + |\tau - \theta|^2\right)^{\beta/2}} \leq c \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{(1 + |\tau|)^{\alpha} (1 + |\tau - \theta|)^{\beta}}.$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = |\theta|\, x$, $d\tau = |\theta|\, dx$, obtemos

$$\begin{aligned} I &\leq c \int_{\mathbb{R}} \frac{|\theta|\, dx}{(1 + |\theta|\, |x|)^{\alpha} (1 + |\theta|\, |x - 1|)^{\beta}} = \int_{\mathbb{R}} f_\theta(x) dx \\ &\leq \int_{|x| \geq 2} f_\theta(x) dx + \int_{|x| \leq 2} f_\theta(x) dx = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Para $|x| \geq 2$ tem-se $(1 + |\theta|\, |x - 1|) \geq \frac{1}{2}(1 + |\theta|\, |x|)$. Portanto,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c \int_{|x| \geq 2} \frac{|\theta|\, dx}{(1 + |\theta|\, |x|)^{\alpha + \beta}} = c \int_{|\tau| \geq 2|\theta|} \frac{d\tau}{(1 + |\tau|)^{\alpha + \beta}} \\ &\leq 2c \int_{\tau \geq 2|\theta|} \frac{d\tau}{(1 + \tau)^{\alpha + \beta}} \leq \frac{c_1}{\langle \theta \rangle^{d}}. \end{aligned}$$

Para $|x| \leq 2$ tem se que

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{-2}^{0} f_\theta(x) dx + \int_{0}^{2} f_\theta(x) dx \\ &= I_{21} + I_{22}. \end{aligned}$$

Observe que a mudança de variável $y = 1- |\theta|\, x$ leva a

$$I_{21} = \int_{-2}^{0} \frac{|\theta|\, dx}{(1-|\theta|\, x)^{\alpha}\,(1+|\theta|\,(1-x))^{\beta}} = -\int_{1+2|\theta|}^{1} \frac{dy}{(y)^{\alpha}\,(y+|\theta|)^{\beta}}$$
$$\leq \frac{1}{(1+|\theta|)^{\beta}} \int_{1}^{1+2|\theta|} \frac{dy}{(y)^{\alpha}},$$

No caso $\alpha > 1$ tem-se

$$I_{21} \leq c\frac{1}{(1+|\theta|)^{\beta}} \leq \frac{c_1}{\langle\theta\rangle^{d}},$$

enquanto que para $\alpha < 1$ tem-se

$$I_{21} \leq c\frac{1}{(1+|\theta|)^{\alpha+\beta-1}} \leq \frac{c_1}{\langle\theta\rangle^{d}}, \text{ para algum } c_1 > 0.$$

De forma análoga obtem-se a limitação para I_{22}. $\blacksquare$

Lema 1.1.10 ***(Gagliardo-Nirenberg)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com $\partial\Omega \in \mathcal{C}^m$ ou $\Omega = \mathbb{R}^n$, vale a seguinte desigualdade*

$$\|\partial_x^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \sum_{|\beta|\leq m} \left\|\partial_x^{\beta} u\right\|_{L^q(\Omega)}^{\theta} \|u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\theta},$$

com $|\alpha| = j$, $c = c\,(j,m,p,q,r)$, $\theta \in \left[\frac{j}{m}, 1\right]$ e

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{m}{n}\right) + (1-\theta)\,\frac{1}{r}.$$

Em particular, se $p \in [2,+\infty)$, $n = 1$ e $\theta = \frac{p-2}{2p}$ então

$$\|u\|_{L_x^p(\Omega)} \leq c\,\|u_x\|_{L_x^2(\Omega)}^{\theta}\,\|u\|_{L_x^2(\Omega)}^{1-\theta}.$$

A prova deste lema encontra-se em [12].

Teorema 1.1.11 ***(Stein)*** *Seja $\{T_z\}$, $z \in \{x+iy : 0 \leq x \leq 1\}$ uma família de operadores lineares admissíveis satisfazendo*

$$\|T_{iy} f\|_{L^{q_0}} \leq M_0(y)\,\|f\|_{L^{p_0}} \quad e \quad \|T_{1+iy} f\|_{L^{q_1}} \leq M_1(y)\,\|f\|_{L^{p_1}}$$

para todas as funções simples $f \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$, onde $1 \leq p_j, q_j \leq \infty$, $M_j(y)$ são independentes de f e satisfazem

$$\sup_{-\infty<y<\infty} e^{b|y|} \log M_j(y) < \infty,$$

para $j = 1, 2$ e para algum $b < \pi$. Então, se $\theta \in [0,1]$ existe uma constante M_θ tal que

$$\|T_\theta f\|_{L^{q_\theta}} \leq M_\theta \|f\|_{L^{p_\theta}},$$

onde

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad e \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

A prova deste teorema encontra-se em [37].

Definição 1.1.12 *A aplicação dado-solução $\overrightarrow{u}(0) \to \overrightarrow{u}(t)$, de $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$ em Y_T é uniformemente contínua se*

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ t.q. \ \ se \ \ \|\overrightarrow{u}_1(0) - \overrightarrow{u}_2(0)\|_{H^s(\mathbb{R})} < \delta \ \ então \ \ \|\overrightarrow{u}_1(t) - \overrightarrow{u}_2(t)\|_{Y_T} < \epsilon,$$

com $\delta = \delta(\epsilon, M)$, onde $\|\overrightarrow{u}_1(0)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq M$ e $\|\overrightarrow{u}_2(0)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq M$.

Lema 1.1.13 *Sejam $u,v \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 1$ e $\gamma > \frac{1}{2}$. Então*

$$\|D_x^s(uv) - uD_x^s v\|_{L_x^2} \leq c(\gamma, s)\left[\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^\gamma} + \|u\|_{H^{\gamma+1}}\|v\|_{H^{s-1}}\right].$$

A prova deste lema encontra-se [34].

1.2 Boa colocação local em $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, $s \geq \frac{1}{4}$

Nesta seção consideramos o seguinte problema de Cauchy associado ao sistema de equações tipo Schrödinger não linear de terceira ordem :

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{q}{2} i\partial_x^2 u + \frac{\gamma}{2}\partial_x^3 u + (\beta+\mu)|u|^2\partial_x u + \beta\sigma_\beta |w|^2 \partial_x u \\ -i\alpha u(|u|^2 + \sigma_\alpha |w|^2) + \mu u^2 \partial_x \overline{u} + \mu\sigma_\mu u \partial_x(|w|^2) = 0 \\ \partial_t w - \frac{q}{2} i\partial_x^2 w + \frac{\gamma}{2}\partial_x^3 w + (\beta+\mu)|w|^2\partial_x w + \beta\sigma_\beta |u|^2 \partial_x w \\ -i\alpha w(|w|^2 + \sigma_\alpha |u|^2) + \mu w^2 \partial_x \overline{w} + \mu\sigma_\mu w \partial_x(|u|^2) = 0 \\ u(x,0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}) \text{ e } w(x,0) = w_0 \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $u = u(x,t)$ e $w(x,t)$ são funções complexas e os parâmetros $q, \gamma, \beta, \mu, \alpha, \sigma_\alpha, \sigma_\beta$ e σ_μ são reais.

Para simplificar a notação escrevemos o PVI (1.1) da forma

$$\begin{cases} \partial_t \overrightarrow{u} - \frac{q}{2} i\partial_x^2 \overrightarrow{u} + \frac{\gamma}{2}\partial_x^3 \overrightarrow{u} + G(\overrightarrow{u}) = 0 \\ \overrightarrow{u}(x,0) = \overrightarrow{u}_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde

$$G(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} F(u,w) \\ F(w,u) \end{pmatrix},$$

$$F(u,w) = (\beta+\mu)\,|u|^2\,\partial_x u + \beta\sigma_\beta\,|w|^2\,\partial_x u - i\alpha u(|u|^2 + \sigma_\alpha\,|w|^2) + \mu u^2 \partial_x \overline{u} + \mu\sigma_\mu u \partial_x(|w|^2)$$

e

$$\overrightarrow{u}(x,t) = \begin{pmatrix} u(x,t) \\ w(x,t) \end{pmatrix}.$$

A seguir mostraremos o resultado que estabelece a existência e unicidade de solução para o problema (1.1) e também a dependência contínua da solução em relação ao dado inicial $\overrightarrow{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, $s \geq \frac{1}{4}$. Este é o resultado esperado, pois Staffilani em [35] obteve existência local para o caso de uma única equação em $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq \frac{1}{4}$. Para obter nosso resultado, usamos idéias de Carvajal em [5], principalmente para lidar com o termo $i\alpha u(|u|^2 + \sigma_\alpha\,|w|^2)$.

O principal resultado desta seção é o seguinte:

Teorema 1.2.1 *Seja $\overrightarrow{u}_0 \in H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$. Existem $T = T(\|\overrightarrow{u}_0\|_{1/4}) > 0$ e uma única solução $\overrightarrow{u}(x,t)$ do problema (1.2) satisfazendo*

$$\overrightarrow{u} \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})), \tag{1.3}$$

$$\|\partial_x \overrightarrow{u}\|_{L^\infty_x L^2_T} + \|D^s_x \partial_x \overrightarrow{u}\|_{L^\infty_x L^2_T} < \infty, \tag{1.4}$$

$$\|\overrightarrow{u}\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|D^s_x \overrightarrow{u}\|_{L^\infty_T L^2_x} < \infty, \tag{1.5}$$

$$\|D^s_x \partial_x \overrightarrow{u}\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} < \infty, \tag{1.6}$$

$$\|\overrightarrow{u}\|_{L^5_x L^{10}_T} + \|D^s_x \overrightarrow{u}\|_{L^5_x L^{10}_T} < \infty, \tag{1.7}$$

$$\|\overrightarrow{u}\|_{L^4_x L^\infty_t} < \infty, \tag{1.8}$$

$$\|\overrightarrow{u}\|_{L^8_x L^8_T} + \|D^s_x \overrightarrow{u}\|_{L^8_x L^8_T} < \infty. \tag{1.9}$$

Além disso, para $T' \in [-T,T]$ existe uma vizinhança V de $\overrightarrow{u}_0$ em $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$, tal que a aplicação $\overrightarrow{\widetilde{u}_0} \longrightarrow \overrightarrow{\widetilde{u}}$ de V na classe definida em (1.3)-(1.9) com T' no lugar de T é Lipschitz.

Antes de apresentarmos a demonstração deste resultado vamos introduzir algumas notações e lemas que estabelecem estimativas para a solução do problema linear associado a (1.2).

Definimos a norma da solução $\overrightarrow{u}(x,t)$ nos espaços de Banach $L^p_xL^q_T \times L^p_xL^q_T$ como

$$\|\overrightarrow{u}\|_{L^p_xL^q_T} := \|u\|_{L^p_xL^q_T} + \|w\|_{L^p_xL^q_T} \ .$$

Como mencionado anteriormente, o problema linear é composto por duas equações do tipo Schrödinger-KdV desacoplado. Esse tipo de equação não linear tem sido largamente estudado na literatura [5], [26] e [35], e a dificuldade de se estudar as equações desse tipo são os termos não lineares que envolvem derivadas. A solução do problema linear associado a (1.2)

$$\partial_t \overrightarrow{u} - \frac{q}{2} i\partial_x^2 \overrightarrow{u} + \frac{\gamma}{2}\partial_x^3 \overrightarrow{u} = 0, \qquad \overrightarrow{u}(x,0) = \overrightarrow{u}_0, \qquad x,t \in \mathbb{R} \tag{1.10}$$

é dada por

$$\overrightarrow{u}(x,t) = W(t)\overrightarrow{u}_0 = \begin{pmatrix} S_t * u_0(x) \\ S_t * w_0(x) \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

onde $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é o grupo unitário em $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$ definido, a partir do grupo $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ em $H^s(\mathbb{R})$, como

$$W(t)\overrightarrow{u}_0 = \begin{pmatrix} U(t)u_0 \\ U(t)w_0 \end{pmatrix},$$

$$U(t)u_0(x) = S_t * u_0(x) = c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi+it\phi(\xi)}\mathcal{F}(u_0)d\xi \tag{1.12}$$

e $S_t(x)$ é a integral oscilatória

$$S_t(x) = c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi+it\phi(\xi)}d\xi \quad \text{ com } \quad \phi(\xi) = -\frac{q}{2}\xi^2 + \frac{\gamma}{2}\xi^3 \ .$$

A norma de $W(t)\overrightarrow{u}_0$ nos espaços $L^p_xL^q_T \times L^p_xL^q_T$ é definida por

$$\|W(t)\overrightarrow{u}_0\|_{L^p_xL^q_T} = \|U(t)u_0\|_{L^p_xL^q_T} + \|U(t)w_0\|_{L^p_xL^q_T} \ . \tag{1.13}$$

Abaixo introduziremos uma notação compacta para a classe de normas que estamos utilizando

$$\mu^T_{1,s}(\overrightarrow{u}) = \|\overrightarrow{u}\|_{L^\infty_TL^2_x} + \|D^s_x\overrightarrow{u}\|_{L^\infty_TL^2_x} \ , \tag{1.14}$$

$$\mu^T_{2,s}(\overrightarrow{u}) = \|\partial_x\overrightarrow{u}\|_{L^\infty_xL^2_T} + \|D^s_x\partial_x\overrightarrow{u}\|_{L^\infty_xL^2_T} \ , \tag{1.15}$$

$$\mu^T_{3}(\overrightarrow{u}) = \|\partial_x\overrightarrow{u}\|_{L^{20}_xL^{5/2}_T} \ , \tag{1.16}$$

$$\mu^T_{4,s}(\overrightarrow{u}) = \|\overrightarrow{u}\|_{L^5_xL^{10}_T} + \|D^s_x\overrightarrow{u}\|_{L^5_xL^{10}_T} \ , \tag{1.17}$$

$$\mu^T_{5}(\overrightarrow{u}) = \|\overrightarrow{u}\|_{L^4_xL^\infty_T} \ , \tag{1.18}$$

$$\mu^T_{6,s}(\overrightarrow{u}) = \|\overrightarrow{u}\|_{L^8_xL^8_T} + \|D^s_x\overrightarrow{u}\|_{L^8_xL^8_T} \ . \tag{1.19}$$

Temos os seguintes lemas:

Lema 1.2.2 *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}$ um conjunto aberto e $\phi\in\mathcal{C}^1(\Omega)$ uma função tal que $|\phi'(\xi)|\neq 0$, para cada $\xi\in\Omega$. Para $a(x,y)\in L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ e $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ defina*

$$U(t)f(x)=\int_\Omega e^{i(t\phi(\xi)+x\xi)}a\left(x,\phi(\xi)\right)\widehat{f}\left(\xi\right)d\xi;$$

então

$$\sup_x\int_{\mathbb{R}}\left|U(t)f(x)\right|^2dt\leq c\int_\Omega\frac{\left|\widehat{f}\left(\xi\right)\right|}{\left|\phi'\left(\xi\right)\right|}d\xi.$$

Este lema foi provado por Kenig, Ponce e Vega em [22], Teorema 4.1.

Lema 1.2.3 *(i) Se $\overrightarrow{u}_0\in H^s\left(\mathbb{R}\right)\times H^s(\mathbb{R})$, $s\geq\frac{1}{4}$ então*

$$\mu_{1,s}^T(W(t)\overrightarrow{u}_0)\leq c\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s}\ ,\tag{1.20}$$

$$\mu_{2,s}^T(W(t)\overrightarrow{u}_0)\leq c\left(1+T\right)\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s}\ ,\tag{1.21}$$

$$\mu_{3}^T(W(t)\overrightarrow{u}_0)\leq c\left(1+T\right)\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s}\ ,\tag{1.22}$$

$$\mu_{4,s}^T(W(t)\overrightarrow{u}_0)\leq c\left(1+T\right)\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s}\ ,\tag{1.23}$$

$$\mu_{6,s}^T(W(t)\overrightarrow{u}_0)\leq c\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s}\ .\tag{1.24}$$

(ii) Se $\overrightarrow{u}_0\in H^{1/4}(\mathbb{R})\times H^{1/4}(\mathbb{R})$ então

$$\mu_{5}^T(W(t)\overrightarrow{u}_0)\leq c\left(1+T\right)\left\|D_x^{1/4}\overrightarrow{u}_0\right\|_{L^2}\ .\tag{1.25}$$

Demonstração: A estimativa (1.20) segue diretamente das propriedades do grupo $W(t)$. De (1.13) basta mostrar as estimativas (1.21)-(1.25) para $U(t)\overrightarrow{u}_0$, as quais podem ser encontradas em Staffilani [35], Lema 4.1 e em Carvajal [5]. Apresentamos, com detalhes, a prova de (1.21). Vamos mostrar que

$$\left\|\partial_xU(t)u_0\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\leq c\left(1+T\right)\left\|u_0\right\|_{L^2}.$$

De (1.12) escrevemos

$$\begin{aligned}\partial_xU(t)u_0&=c\int_{-\infty}^{+\infty}i\xi e^{ix\xi+it\phi(\xi)}\widehat{u}_0(\xi)d\xi\\&=ic\int_{-\infty}^{+\infty}\xi\left(1-\theta(\xi)\right)e^{ix\xi+it\phi(\xi)}\widehat{u}_0(\xi)d\xi\\&+ic\int_{-\infty}^{+\infty}\xi\theta(\xi)e^{ix\xi+it\phi(\xi)}\widehat{u}_0(\xi)d\xi\\&=I_1+I_2,\end{aligned}$$

onde $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty$ cujo suporte será escolhido de modo adequado. Para estimar $\|I_1\|_{L_x^\infty L_T^2}$ usamos o Lema 1.2.2 no caso $a\,(x,\phi(\xi)) \equiv 1$, $\widehat{f}\,(\xi) = \xi\widehat{u}_0(\xi)$, $\phi(\xi) = -\frac{q}{2}\xi^2 + \frac{\gamma}{2}\xi^3$ e $\Omega = (\text{supp }\theta)^c$. Para que $|\phi'(\xi)| \neq 0$, $\forall \xi \in \Omega$, escolhemos supp $\theta \subseteq \left[-\frac{4|q|}{3|\gamma|}, \frac{4|q|}{3|\gamma|}\right]$. Assim,

$$\begin{aligned}\|I_1\|_{L_x^\infty L_T^2} &= c\sup_x \left(\int_{-T}^{T} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\,(1-\theta(\xi))\, e^{ix\xi + it\phi(\xi)} \widehat{u}_0(\xi) d\xi \right| dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c\int_\Omega \frac{|\xi|^2\,|\widehat{u}_0(\xi)|^2}{|\phi'(\xi)|} \leq c\frac{4}{3\,|\gamma|}\int_\Omega |\widehat{u}_0(\xi)|^2\,d\xi \leq c_1\,\|u_0\|_{L^2}\,.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\|I_2\|_{L_x^\infty L_T^2} = \|\partial_x U_\theta(t) u_0\|_{L_x^\infty L_T^2}\,,$$

onde

$$U_\theta(t)u_0(x) = c\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\xi) e^{ix\xi + it\phi(\xi)} \widehat{u}_0(\xi) d\xi.$$

Temos que para $t \in \mathbb{R}$,

$$\|I_2\|_{L_x^\infty L_t^2} = \sup_{\|g\|_{L_x^1 L_t^2}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} I_2(x,t)\overline{g(x,t)}dxdt \right|.$$

Utilizando o teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}^2} I_2(x,t)\overline{g(x,t)}dxdt \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \int_{\mathbb{R}} \partial_x U_\theta(-t) g(x,t) dt dx \right| \\ &\leq \|u_0\|_{L_x^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} \partial_x U_\theta(-t) g(x,t) dt \right\|_{L_x^2}.\end{aligned}$$

Nosso objetivo, portanto, é mostrar a seguinte desigualdade

$$\left\| \int_{-T}^{T} \partial_x U_\theta(-t) g(x,t) dt \right\|_{L_x^2} \leq c\,\|g\|_{L_x^1 L_T^2}\,.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\partial_x U_\theta(-t) g(x,t) &= c\int_{-\infty}^{+\infty} i\xi\theta(\xi) e^{ix\xi - it\phi(\xi)} \widehat{g}(\xi,t) d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(i\xi\theta(\xi) e^{-it\phi(\xi)} \widehat{g}^x(\xi,t) \right) \\ &= K_{-t}(\cdot) * g(\cdot,t)\,(x)\,,\end{aligned}$$

onde

$$K_{-t}(x) = c\int_{-\infty}^{+\infty} i\xi\theta(\xi) e^{ix\xi - it\phi(\xi)} d\xi.$$

Seguindo as idéias da prova da Proposição 2.6 em [24], limitamos $K_{-t}(x)$ por

$$|K_{-t}(x)| \leq K^T(x) = \begin{cases} c \quad \text{se} \quad |x| < c_1\,(T+1)\,, \\ \frac{c}{\sqrt{|x|}} \quad \text{se} \quad c_1\,(T+1) \leq |x| \leq c_2\,(T+1)\,, \\ \frac{1}{1+|x|^2} \quad \text{se} \quad |x| > c_2\,(T+1)\,. \end{cases}$$

Da desigualdade de Young segue que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-T}^{T} \partial_x U_\theta(-t) g(x,t) dt \right\|_{L^2_x} &\leq c \left\| K^T \right\|_{L^2_x} \left\| \int_{-T}^{T} g(\cdot,t) dt \right\|_{L^1_x} \\ &\leq c(1+T) \left\| g \right\|_{L^1_x L^2_T}\,, \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. ■

Apresentamos agora a demonstração do principal teorema desta seção.

Demonstração: (Teorema 1.2.1) Faremos com detalhes o caso $s \in [1/4, 1)$.

1. *Existência e Persistência.* Sejam $s \in [1/4,1)$ e $\overrightarrow{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ fixos. Consideremos o espaço métrico

$$Y_T = \left\{ \overrightarrow{v} \in C([-T,T]\,; H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})) / \, |||\overrightarrow{v}|||_s = \max_{j=1,\dots,6} \mu_j^T(\overrightarrow{v}) < \infty \right\}$$

e a bola fechada de centro na origem e raio a em Y_T definida por

$$Y_T^a = \{ \overrightarrow{v} \in C([-T,T]\,; H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})) / \, |||\overrightarrow{v}|||_s \leq a \}\,.$$

Denotaremos por $\overrightarrow{u} = \phi(\overrightarrow{v}) = \phi_{\overrightarrow{u}_0}(\overrightarrow{v})$ a solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \partial_t \overrightarrow{u} - \frac{q}{2} i \partial_x^2 \overrightarrow{u} + \frac{\gamma}{2} \partial_x^3 \overrightarrow{u} + G(\overrightarrow{v}) = 0 \\ \overrightarrow{u}(x,0) = \overrightarrow{u}_0, \end{cases} \tag{1.26}$$

onde $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v \\ k \end{pmatrix}$. Mostraremos que existe $a > 0$ e $T > 0$ (dependendo apenas de $\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s}$) tal que se $\overrightarrow{v} \in Y_T^a$ então $\overrightarrow{u} = \phi(\overrightarrow{v}) \in Y_T^a$ e $\phi : Y_T^a \longrightarrow Y_T^a$ é uma contração. Então o resultado de existência seguirá do teorema do ponto fixo de Banach.

Pelo Princípio de Duhamel, o problema (1.26) é equivalente à equação integral

$$\overrightarrow{u}(t) = \Phi(\overrightarrow{v}) = W(t)\overrightarrow{u}_0 - \int_0^t W(t-\tau) G(\overrightarrow{v}(\tau)) d\tau. \tag{1.27}$$

Seja $\overrightarrow{v} \in Y_T^a$. Precisamos mostrar que Φ está bem definida, logo precisamos estimar $|||\Phi(\overrightarrow{v})|||_s = \max_{j=1,\dots,6} \mu_j^T(\Phi(\overrightarrow{v}))$. Pelo Lema 1.2.3 temos que

$$\mu_j^T(W(t)\overrightarrow{u}_0) \leq c \, \|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s} \;, \quad j = 1, ..., 6.$$

Seja

$$R(t)=\int_0^t W(t-\tau)G(\overrightarrow{v}(\tau))d\tau=\begin{pmatrix}\int_0^t U(t-\tau)F(v(\tau),k(\tau))d\tau\\ \int_0^t U(t-\tau)F(k(\tau),v(\tau))d\tau\end{pmatrix}.$$

Segue da desigualdade de Minkowski para integrais e do Lema 1.2.3 que

$$\begin{aligned}
\mu_j^T(R(t)) &= \mu_j^T\left(\int_0^t W(t-\tau)G(\overrightarrow{v}(\tau))d\tau\right)\\
&= \mu_j^T\left(\int_0^t U(t-\tau)F(v(\tau),k(\tau))d\tau\right)+\mu_j^T\left(\int_0^t U(t-\tau)F(k(\tau),v(\tau))d\tau\right)\\
&\le \int_{-T}^T \mu_j^T\left[U(t-\tau)F(v(\tau),k(\tau))\right]d\tau+\int_{-T}^T \mu_j^T\left[U(t-\tau)F(k(\tau),v(\tau))\right]d\tau\\
&\le c\int_{-T}^T \|F(v(\tau),k(\tau))\|_{H^s}\,d\tau+c\int_{-T}^T \|F(k(\tau),v(\tau))\|_{H^s}\,d\tau\\
&\le c\int_{-T}^T \|F(v(\tau),k(\tau)\|_{L_x^2}\,d\tau+c\int_{-T}^T \|D_x^sF(v(\tau),k(\tau))\|_{L_x^2}\,d\tau \qquad (1.28)\\
&+c\int_{-T}^T \|F(k(\tau),v(\tau))\|_{L_x^2}\,d\tau+c\int_{-T}^T \|D_x^sF(k(\tau),v(\tau))\|_{L_x^2}\,d\tau\\
&\le cT^{1/2}\Big(\|F(v,k)\|_{L_x^2L_T^2}+\|D_x^sF(v,k)\|_{L_x^2L_T^2}+\|F(k,v)\|_{L_x^2L_T^2}\\
&+\|D_x^sF(k,v)\|_{L_x^2L_T^2}\Big).
\end{aligned}$$

Vamos estimar agora cada um dos termos da última desigualdade de (1.28). O primeiro deles é estimado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\|F(v,k)\|_{L_x^2L_T^2} &= \left\|(\beta+\mu)\,|v|^2\,v_x+\beta\sigma_\beta\,|k|^2\,v_x-i\alpha v(|v|^2+\sigma_\alpha\,|k|^2)\right\|_{L_x^2L_T^2}\\
&+\left\|\mu v^2\overline{v}_x+\mu\sigma_\mu v\partial_x(|k|^2)\right\|_{L_x^2L_T^2} \qquad (1.29)\\
&\le c\Big(\left\|vk_x\overline{k}\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\||v|^2\,v_x\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\||k|^2\,v_x\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\||v|^2\,v\right\|_{L_x^2L_T^2}\\
&+\left\||k|^2\,v\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\|v^2\overline{v}_x\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\|vk\overline{k}_x\right\|_{L_x^2L_T^2}\Big).
\end{aligned}$$

Estimamos os termos à direita da desigualdade (1.29) utilizando a desigualdade de Hölder. O primeiro deles é estimado por

$$\begin{aligned}
\left\|vk_x\overline{k}\right\|_{L_x^2L_T^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{-T}^T |v|^2\,|k|^2\,|k_x|^2\,dtdx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}}\|v\|_{L_T^\infty}^2\,\|k\|_{L_T^\infty}^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\sup_x\left(\int_{-T}^T |k_x|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.30)\\
&\le c\,\|v\|_{L_x^4L_T^\infty}\,\|k\|_{L_x^4L_T^\infty}\,\|k_x\|_{L_x^\infty L_T^2}\,.
\end{aligned}$$

De forma análoga a (1.30), obtemos

$$\begin{aligned}\left\||v|^2 v_x\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\||k|^2 v_x\right\|_{L_x^2L_T^2} &\leq \|v\|^2_{L_x^4L_T^\infty}\|v_x\|_{L_x^\infty L_T^2}+\|k\|^2_{L_x^4L_T^\infty}\|v_x\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\leq c[\mu_5^T(\overrightarrow{v})]^2\mu_2^T(\overrightarrow{v})\leq c\,\||\overrightarrow{v}|\|_s^3\end{aligned} \tag{1.31}$$

e

$$\left\|v^2\overline{v}_x\right\|_{L_x^2L_T^2}\leq \|v\|^2_{L_x^4L_T^\infty}\|v_x\|_{L_x^\infty L_T^2}\leq c[\mu_5^T(\overrightarrow{v})]^2\mu_2^T(\overrightarrow{v})\leq c\,\||\overrightarrow{v}|\|_s^3\ .$$

O quarto termo à direita da desigualdade (1.29) é estimado da seguinte forma

$$\begin{aligned}\left\||k|^2 v\right\|_{L_x^2L_T^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{-T}^{T}|v|^2|k|^4\,dtdx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}}\|v\|^2_{L_T^\infty}\int_{-T}^{T}|k|^4\,dtdx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|v\|_{L_x^4L_T^\infty}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{-T}^{T}|k|^4\,dt\right|^2dx\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \|v\|_{L_x^4L_T^\infty}\|k\|^2_{L_x^8L_T^4} \\ &\leq cT^{1/4}\|v\|_{L_x^4L_T^\infty}\|v\|^2_{L_x^8L_T^8}\,.\end{aligned} \tag{1.32}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\left\||k|^2 v\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\||v|^2 v\right\|_{L_x^2L_T^2} &\leq cT^{1/4}\|v\|_{L_x^4L_T^\infty}\|v\|^2_{L_x^8L_T^8} \\ &\quad + cT^{1/4}\|v\|_{L_x^4L_T^\infty}\|k\|^2_{L_x^8L_T^8} \\ &\leq cT^{1/4}\mu_5^T(\overrightarrow{v})[\mu_6^T(\overrightarrow{v})]^2 \\ &\leq cT^{1/4}\||\overrightarrow{v}|\|_s^3\,.\end{aligned} \tag{1.33}$$

As desigualdades (1.29)-(1.33) levam a

$$\|F(v,k)\|_{L_x^2L_T^2}\leq c\,\||\overrightarrow{v}|\|_s^3 \tag{1.34}$$

e também

$$\|F(k,v)\|_{L_x^2L_T^2}\leq c\,\||\overrightarrow{v}|\|_s^3, \tag{1.35}$$

pela simetria da parte não linear do sistema de equações (1.1).

Para o segundo termo da última desigualdade de (1.28), temos que

$$\begin{aligned}\|D^sF(v,k)\|_{L_x^2L_T^2} &\leq c(\left\|D_x^s(|v|^2 v_x)\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\|D_x^s(|k|^2 v_x)\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\|D_x^s(|v|^2 v)\right\|_{L_x^2L_T^2} \\ &\quad+\left\|D_x^s(|k|^2 v)\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\|D_x^s(v^2\overline{v}_x)\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\|D_x^s(vk_x\overline{k})\right\|_{L_x^2L_T^2} \\ &\quad+\left\|D_x^s(vk\overline{k}_x)\right\|_{L_x^2L_T^2}\ .\end{aligned} \tag{1.36}$$

Para estimar o primeiro termo à direita de (1.36) utilizamos a Proposição 1.1.3 (com $\alpha = \alpha_1 = s$ e $\alpha_2 = 0$), como segue

$$\begin{aligned}
\left\| D_x^s(|v|^2 v_x) \right\|_{L_x^2 L_T^2} &\le \left\| D_x^s(|v|^2 v_x) - |v|^2 D_x^s(v_x) - v_x D_x^s(|v|^2) \right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&+ \left\| |v|^2 D_x^s(v_x) \right\|_{L_x^2 L_T^2} + \left\| v_x D_x^s(|v|^2) \right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\le c \left\| D_x^s(|v|^2) \right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}} \|v_x\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + \|v\overline{v}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s(v_x)\|_{L_x^\infty L_T^2} ,
\end{aligned}$$

e para $\alpha_2 = s$ e $\alpha_1 = 0$, obtemos

$$\left\| D_x^s(|v|^2) \right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}} \le c \|D_x^s v\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|v\|_{L_x^4 L_T^\infty} .$$

Segue das duas desigualdades acima que

$$\begin{aligned}
\left\| D_x^s(|v|^2 v_x) \right\|_{L_x^2 L_T^2} &\le c \|D_x^s v\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|v\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|v_x\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + \|v\|_{L_x^4 L_T^\infty}^2 \|D_x^s(v_x)\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\le c[\mu_4^T(\overrightarrow{v})\mu_5^T(\overrightarrow{v})\mu_3^T(\overrightarrow{v}) + (\mu_5^T(\overrightarrow{v}))^2 \mu_2^T(\overrightarrow{v})] \qquad (1.37) \\
&\le c \, |||\overrightarrow{v}|||_s^3 \ .
\end{aligned}$$

De maneira análoga a (1.37),

$$\begin{aligned}
\left\| D_x^s(|k|^2 v_x) \right\|_{L_x^2 L_T^2} &\le c \left\| D_x^s(|k|^2) \right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}} \|v_x\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + \left\| k\overline{k} \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s(v_x)\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\le c \|D_x^s k\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|k\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|v_x\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + \|k\|_{L_x^4 L_T^\infty}^2 \|D_x^s(v_x)\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\le c[\mu_4^T(\overrightarrow{v})\mu_5^T(\overrightarrow{v})\mu_3^T(\overrightarrow{v}) + (\mu_5^T(\overrightarrow{v}))^2 \mu_2^T(\overrightarrow{v})] \\
&\le c \, |||\overrightarrow{v}|||_s^3 \ , \qquad (1.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| D_x^s(v^2 \overline{v}_x) \right\|_{L_x^2 L_T^2} &\le c \|D_x^s v\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|v\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|v_x\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + \|v\|_{L_x^4 L_T^\infty}^2 \|D_x^s(v_x)\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\le c[\mu_4^T(\overrightarrow{v})\mu_5^T(\overrightarrow{v})\mu_3^T(\overrightarrow{v}) + (\mu_5^T(\overrightarrow{v}))^2 \mu_2^T(\overrightarrow{v})] \\
&\le c \, |||\overrightarrow{v}|||_s^3 \ , \qquad (1.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| D_x^s(v k_x \overline{k}) \right\|_{L_x^2 L_T^2} &\le c \left\| D_x^s(v\overline{k}) \right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}} \|k_x\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + \left\| v\overline{k} \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s(k_x)\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\le c \|D_x^s v\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|k\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|k_x\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} \qquad (1.40) \\
&+ \|v\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|k\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|D_x^s(k_x)\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\le c[\mu_4^T(\overrightarrow{v})\mu_5^T(\overrightarrow{v})\mu_3^T(\overrightarrow{v}) + (\mu_5^T(\overrightarrow{v}))^2 \mu_2^T(\overrightarrow{v})] \\
&\le c \, |||\overrightarrow{v}|||_s^3 \ .
\end{aligned}$$

Da mesma forma, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|D_x^s(vk\overline{k}_x)\right\|_{L_x^2L_T^2} &\leq c\left\|D_x^s v\right\|_{L_x^5L_T^{10}}\left\|k\right\|_{L_x^4L_T^\infty}\left\|\overline{k}_x\right\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}}\\ &+\left\|v\right\|_{L_x^4L_T^\infty}\left\|k\right\|_{L_x^4L_T^\infty}\left\|D_x^s(\overline{k}_x)\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &\leq c[\mu_4^T(\overrightarrow{v})\mu_5^T(\overrightarrow{v})\mu_3^T(\overrightarrow{v})+(\mu_5^T(\overrightarrow{v}))^2\mu_2^T(\overrightarrow{v})]\\ &\leq c\,|||\overrightarrow{v}|||_s^3\ ,\end{aligned}\tag{1.41}$$

$$\begin{aligned}\left\|D_x^s(|k|^2 v)\right\|_{L_x^2L_T^2} &\leq \left\|D_x^s(|k|^2 v)-|k|^2 D_x^s v - vD_x^s(|k|^2)\right\|_{L_x^2L_T^2}\\ &+\left\||k|^2 D_x^s v)\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\|vD_x^s(|k|^2)\right\|_{L_x^2L_T^2}\\ &\leq c\left\|D_x^s(|k|^2)\right\|_{L_x^4L_T^2}\left\|v\right\|_{L_x^4L_T^\infty}+\left\||k|^2 D_x^s v\right\|_{L_x^2L_T^2}\\ &\leq c\left\|D_x^s k\right\|_{L_x^8L_T^4}\left\|k\right\|_{L_x^8L_T^4}\left\|v\right\|_{L_x^4L_T^\infty}+\left\|k\right\|_{L_x^4L_T^\infty}\left\|kD_x^s v)\right\|_{L_x^4L_T^2}\\ &\leq cT^{1/4}\left\|D_x^s k\right\|_{L_x^8L_T^8}\left\|k\right\|_{L_x^8L_T^8}\left\|v\right\|_{L_x^4L_T^\infty}\\ &+cT^{1/4}\left\|k\right\|_{L_x^4L_T^\infty}\left\|k\right\|_{L_x^8L_T^8}\left\|D_x^s v\right\|_{L_x^8L_T^8}\\ &\leq cT^{1/4}(\mu_6^T(\overrightarrow{v}))^2\mu_5^T(\overrightarrow{v})\\ &\leq cT^{1/4}\,|||\overrightarrow{v}|||_s^3,\end{aligned}\tag{1.42}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}\left\|D_x^s(|v|^2 v)\right\|_{L_x^2L_T^2} &\leq cT^{1/4}\left\|v\right\|_{L_x^8L_T^8}\left\|D_x^s v\right\|_{L_x^8L_T^8}\left\|v\right\|_{L_x^4L_T^\infty}\\ &\leq cT^{1/4}(\mu_6^T(\overrightarrow{v}))^2\mu_5^T(\overrightarrow{v})\\ &\leq cT^{1/4}\,|||\overrightarrow{v}|||_s^3\ .\end{aligned}\tag{1.43}$$

Segue de (1.36)-(1.43) que

$$\left\|D^s F(v,k)\right\|_{L_x^2L_T^2}\leq c\,|||\overrightarrow{v}|||_s^3+cT^{1/4}\,|||\overrightarrow{v}|||_s^3\ ,\tag{1.44}$$

$$\left\|D^s F(k,v)\right\|_{L_x^2L_T^2}\leq c\,|||\overrightarrow{v}|||_s^3+cT^{1/4}\,|||\overrightarrow{v}|||_s^3\ .\tag{1.45}$$

Portanto, (1.28), (1.34), (1.35), (1.44) e (1.45) implicam que

$$\begin{aligned}\mu_j^T(R(t)) &\leq cT^{1/2}(\left\|F(v,k)\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\|D_x^s F(v,k)\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\|F(k,v)\right\|_{L_x^2L_T^2}\\ &+\left\|D_x^s F(k,v)\right\|_{L_x^2L_T^2})\\ &\leq cT^{1/2}\left(|||\overrightarrow{v}|||_s^3+cT^{1/4}\,|||\overrightarrow{v}|||_s^3\right)\ .\end{aligned}\tag{1.46}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mu_j^T(\Phi(\overrightarrow{v})) &\leq \mu_j^T(W(t)\overrightarrow{u}_0) + \mu_j^T(R(t)) \\
&\leq c\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s} + cT^{1/2}\left(|||\overrightarrow{v}|||_s^3 + cT^{1/4}\,|||\overrightarrow{v}|||_s^3\right) \\
&\leq C\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s} + CT^{1/2}\,|||\overrightarrow{v}|||_s^3 \ .
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Segue de (1.47) e do fato de que $\overrightarrow{v} \in Y_T^a$ que

$$\begin{aligned}
|||\Phi(\overrightarrow{v})|||_s &= \max_{j=1,\ldots,6} \mu_j^T(\Phi(\overrightarrow{v})) \\
&\leq C\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s} + CT^{1/2}\,|||\overrightarrow{v}|||_s^3 \\
&\leq C\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s} + CT^{1/2}a^3 \ .
\end{aligned}$$

Para que $\Phi(\overrightarrow{v}) \leq a$, tomamos $\frac{a}{2} = C\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s}$ e T tal que $CT^{1/2}a^3 \leq \frac{a}{2}$. Em função do dado inicial, escolhemos o valor de T de modo que

$$T \leq \left(\frac{1}{2Ca^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{8C^3\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s}^2}\right)^2. \tag{1.48}$$

Isto mostra que Φ está bem definida. Note que se $\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s} \to 0$ então $T \to +\infty$.

Vamos mostrar que $\Phi : Y_T^a \longrightarrow Y_T^a$ é uma contração, mais especificamente, para cada $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1 \in Y_T^a$ a aplicação Φ satisfaz

$$|||\Phi(\overrightarrow{v}) - \Phi(\overrightarrow{v}_1)|||_s \leq c_T\,|||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1|||_s\,,$$

com $c_T < 1$.

Notemos que

$$
\begin{aligned}
\mu_j^T(\Phi(\overrightarrow{v}) - \Phi(\overrightarrow{v}_1)) &= \mu_j^T\left(\int_0^t W(t-\tau)[G(\overrightarrow{v}_1(\tau)) - G(\overrightarrow{v}(\tau))]d\tau\right)\\
&\leq \int_{-T}^{T} \mu_j^T\left(W(t-\tau)\left[G(\overrightarrow{v}_1(\tau)) - G(\overrightarrow{v}(\tau))\right]\right)d\tau\\
&\leq c\int_{-T}^{T} \|G(\overrightarrow{v}_1(\tau)) - G(\overrightarrow{v}(\tau)\|_{H^s}\,d\tau\\
&\leq c\int_{-T}^{T} \|F(v_1(\tau),k_1(\tau)) - F(v(\tau),k(\tau))\|_{H^s}\,d\tau\\
&+ c\int_{-T}^{T} \|F(k_1(\tau),v_1(\tau)) - F(k(\tau),v(\tau))\|_{H^s}\,d\tau\\
&\leq c\int_{-T}^{T} \|F(v_1(\tau),k_1(\tau)) - F(v(\tau),k(\tau))\|_{L^2}\,d\tau \qquad (1.49)\\
&+ c\int_{-T}^{T} \|F(k_1(\tau),v_1(\tau)) - F(k(\tau),v(\tau))\|_{L^2}\,d\tau\\
&+ c\int_{-T}^{T} \|D_x^s\left(F(v_1(\tau),k_1(\tau)) - F(v(\tau),k(\tau))\right)\|_{L^2}\,d\tau\\
&+ c\int_{-T}^{T} \|D_x^s\left(F(k_1(\tau),v_1(\tau)) - F(k(\tau),v(\tau))\right)\|_{L^2}\,d\tau\\
&\leq cT^{1/2}\Big(\|F(v_1(\tau),k_1(\tau)) - F(v(\tau),k(\tau))\|_{L^2_xL^2_T}\\
&+ \|F(k_1(\tau),v_1(\tau)) - F(k(\tau),v(\tau))\|_{L^2_xL^2_T}\Big)\\
&+ cT^{1/2}\Big(\|D_x^s\left[F(v_1(\tau),k_1(\tau)) - F(v(\tau),k(\tau))\right]\|_{L^2_xL^2_T}\\
&+ \|D_x^s\left[F(k_1(\tau),v_1(\tau)) - F(k(\tau),v(\tau))\right]\|_{L^2_xL^2_T}\Big).
\end{aligned}
$$

Vamos estimar cada um dos termos da última desigualdade acima

$$
\begin{aligned}
\|F(v_1(\tau),k_1(\tau)) - F(v(\tau),k(\tau))\|_{L^2_xL^2_T} &\leq c\Big(\left\||v_1|^2 v_{1x} - |v|^2 v_{1x}\right\|_{L^2_xL^2_T}\\
&+ \left\||k_1|^2 v_{1x} - |k|^2 v_x\right\|_{L^2_xL^2_T}\\
&+ \left\||v_1|^2 v_1 - |v|^2 v\right\|_{L^2_xL^2_T} + \left\||k_1|^2 v_1 - |k|^2 v\right\|_{L^2_xL^2_T}\\
&+ \left\|v_1^2\overline{v}_{1x} - v^2\overline{v}_x\right\|_{L^2_xL^2_T} + \left\|v_1k_{1x}\overline{k}_1 - vk_x\overline{k}\right\|_{L^2_xL^2_T}\\
&+ \left\|v_1k_1\overline{k}_{1x} - vk\overline{k}_x\right\|_{L^2_xL^2_T}\Big)\ . \qquad (1.50)
\end{aligned}
$$

Análogo a (1.30) temos que

$$\begin{aligned}
\left\||k_1|^2 v_{1x} - |k|^2 v_x\right\|_{L^2_x L^2_T} &= \left\||k|^2 v_x - |k|^2 v_{1x} + |k|^2 v_{1x} - |k_1|^2 v_{1x}\right\|_{L^2_x L^2_T} \\
&\le \left\||k|^2 (v_x - v_{1x}\right\|_{L^2_x L^2_T} + \left\|(|k|^2 - |k_1|^2) v_{1x}\right\|_{L^2_x L^2_T} \qquad (1.51) \\
&\le \|k\|^2_{L^4_x L^\infty_T} \|v_x - v_{1x}\|_{L^\infty_x L^2_T} + \left\|\overline{k}(k-k_1) v_{1x}\right\|_{L^2_x L^2_T} \\
&+ \left\|k_1(\overline{k} - \overline{k}_1) v_{1x}\right\|_{L^2_x L^2_T} \\
&\le \|k\|^2_{L^4_x L^\infty_T} \|v_x - v_{1x}\|_{L^\infty_x L^2_T} + \|k\|_{L^4_x L^\infty_T} \|v_{1x}\|_{L^\infty_x L^2_T} \|(k-k_1)\|_{L^4_x L^\infty_T} \\
&+ \|k_1\|_{L^4_x L^\infty_T} \|v_{1x}\|_{L^\infty_x L^2_T} \|(k-k_1)\|_{L^4_x L^\infty_T} \\
&\le c\left(|||\overrightarrow{v}|||^2_s\, |||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1|||_s + |||\overrightarrow{v}_1|||^2_s\, |||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1|||_s\right) \ ,
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
\left\||k_1|^2 v_1 - |k|^2 v\right\|_{L^2_x L^2_T} &\le \left\|k_1 v_1 \overline{k}_1 - k_1 v_1 \overline{k}\right\|_{L^2_x L^2_T} + \left\|k_1 v_1 \overline{k} - k\overline{k} v\right\|_{L^2_x L^2_T} \qquad (1.52) \\
&\le \left\|k_1 v_1 \left(\overline{k}_1 - \overline{k}\right)\right\|_{L^2_x L^2_T} + \left\|\overline{k} k\,(v_1 - v)\right\|_{L^2_x L^2_T} + \left\|\overline{k} v_1\,(k_1 - k)\right\|_{L^2_x L^2_T} \\
&\le cT^{1/4}\left(\|k_1\|_{L^4_x L^\infty_T} \|v_1\|_{L^8_x L^8_T} \|(k_1 - k)\|_{L^8_x L^8_T} + \|v_1 - v\|_{L^4_x L^\infty_T} \|k\|^2_{L^8_x L^8_T}\right) \\
&+ cT^{1/4}\left(\|k\|_{L^4_x L^\infty_T} \|v_1\|_{L^8_x L^8_T} \|(k_1 - k)\|_{L^8_x L^8_T}\right) \\
&\le cT^{1/4}\left(|||\overrightarrow{v}_1|||^2_s + |||\overrightarrow{v}|||_s\, |||\overrightarrow{v}_1|||_s + |||\overrightarrow{v}|||^2_s\right) |||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1|||_s \ .
\end{aligned}$$

Os outros termos de (1.50) são estimados de forma análoga a (1.31)-(1.33), obtendo

$$\|F(v_1(\tau), k_1(\tau)) - F(v(\tau), k(\tau))\|_{L^2_x L^2_T} \le c(T^{1/4}+1)\left(|||\overrightarrow{v}|||_s + |||\overrightarrow{v}_1|||_s\right)^2 |||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1|||_s \ . \qquad (1.53)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|D^s_x\,[F(v_1(\tau), k_1(\tau)) - F(v(\tau), k(\tau))]\|_{L^2_x L^2_T} &\le c(\left\|D^s_x\left(|v_1|^2 v_{1x} - |v|^2 v_x\right)\right\|_{L^2_x L^2_T} \\
&+ \left\|D^s_x\left(|k_1|^2 v_{1x} - |k|^2 v_x\right)\right\|_{L^2_x L^2_T} \\
&+ \left\|D^s_x\left(|v_1|^2 v_1 - |v|^2 v\right)\right\|_{L^2_x L^2_T} \qquad (1.54) \\
&+ \left\|D^s_x\left(|k_1|^2 v_1 - |k|^2 v\right)\right\|_{L^2_x L^2_T} \\
&+ \left\|D^s_x\left(v_1^2 \overline{v}_{1x} - v^2 \overline{v}_x\right)\right\|_{L^2_x L^2_T} \\
&+ \left\|D^s_x\left(v_1 k_{1x} \overline{k}_1 - v k_x \overline{k}\right)\right\|_{L^2_x L^2_T} \\
&+ \left\|D^s_x\left(v_1 k_1 \overline{k}_{1x} - v k \overline{k}_x\right)\right\|_{L^2_x L^2_T} \ .
\end{aligned}$$

Em seguida vamos estimar o segundo termo de (1.54).

$$\begin{aligned}\left\|D_x^s\left(|k_1|^2 v_{1x}-|k|^2 v_x\right)\right\|_{L_x^2L_T^2} &\leq \left\|D_x^s\left((|k_1|^2-|k|^2)v_{1x}\right)\right\|_{L_x^2L_T^2}\\ &+\left\|D_x^s\left(|k|^2(v_{1x}-v_x)\right)\right\|_{L_x^2L_T^2}\\ &\leq \left\|D_x^s\left((\overline{k}_1-\overline{k})k_1v_{1x}\right)\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\|D_x^s\left((k_1-k)\overline{k}v_{1x}\right)\right\|_{L_x^2L_T^2}\\ &+\left\|D_x^s\left(|k|^2(v_{1x}-v_x)\right)\right\|_{L_x^2L_T^2} \qquad (1.55)\\ &\leq A+B+C\ ,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}A&=\left\|D_x^s\left((\overline{k}_1-\overline{k})k_1v_{1x}\right)\right\|_{L_x^2L_T^2}\\ &\leq \|k_1\|_{L_x^4L_T^\infty}\|k_1-k\|_{L_x^4L_T^\infty}\|D_x^s(v_{1x})\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &+\|D_x^sk_1\|_{L_x^5L_T^{10}}\|k_1-k\|_{L_x^4L_T^\infty}\|v_{1x}\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}}\\ &\leq |||\overrightarrow{v}_1|||_s^2\,|||\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}_1|||_s\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=\left\|D_x^s\left((k_1-k)\overline{k}v_{1x}\right)\right\|_{L_x^2L_T^2}\\ &\leq \|D_x^s(k_1-k)\|_{L_x^5L_T^{10}}\|k\|_{L_x^4L_T^\infty}\|v_{1x}\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}}\\ &+\|k\|_{L_x^4L_T^\infty}\|k_1-k\|_{L_x^4L_T^\infty}\|D_x^s(v_{1x})\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &\leq c\,|||\overrightarrow{v}|||_s\,|||\overrightarrow{v}_1|||_s\,|||\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}_1|||_s\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}C&=\left\|D_x^s\left(|k|^2(v_{1x}-v_x)\right)\right\|_{L_x^2L_T^2}\\ &\leq \|k\|_{L_x^4L_T^\infty}^2\|D_x^s(v_{1x}-v_x)\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &+\|D_x^sk\|_{L_x^5L_T^{10}}\|k\|_{L_x^4L_T^\infty}\|v_{1x}-v_x\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}}\\ &\leq |||\overrightarrow{v}_1|||_s^2\,|||\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}_1|||_s\ .\end{aligned}$$

Assim,

$$\left\|D_x^s\left(|k_1|^2 v_{1x}-|k|^2 v_x\right)\right\|_{L_x^2L_T^2}\leq \left(|||\overrightarrow{v}|||_s+|||\overrightarrow{v}_1|||_s\right)^2|||\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}_1|||_s\ . \qquad (1.56)$$

O quarto termo à direita de (1.54) é estimado como se segue

$$\begin{aligned}
\left\| D_x^s \left(|k_1|^2 v_1 - |k|^2 v \right) \right\|_{L_x^2 L_T^2} &\leq \left\| D_x^s \left(|k|^2 (v_1 - v) \right) \right\|_{L_x^2 L_T^2} + \left\| D_x^s \left((k_1 - k)\overline{k} v_1 \right) \right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&+ \left\| D_x^s \left((\overline{k}_1 - \overline{k}) k_1 v_1 \right) \right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\leq c T^{1/4} \left\| D_x^s k \right\|_{L_x^8 L_T^8} \|k\|_{L_x^8 L_T^8} \|v_1 - v\|_{L_x^4 L_T^\infty} \\
&+ c T^{1/4} \|k\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|k\|_{L_x^8 L_T^8} \|D_x^s (v_1 - v)\|_{L_x^8 L_T^8} \qquad (1.57) \\
&+ c T^{1/4} \|D_x^s (k_1 - k)\|_{L_x^8 L_T^8} \|k\|_{L_x^8 L_T^8} \|v_1\|_{L_x^4 L_T^\infty} \\
&+ c T^{1/4} \|k\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|k - k_1\|_{L_x^8 L_T^8} \|D_x^s (v_1)\|_{L_x^8 L_T^8} \\
&+ c T^{1/4} \|D_x^s (k_1 - k)\|_{L_x^8 L_T^8} \|k_1\|_{L_x^8 L_T^8} \|v_1\|_{L_x^4 L_T^\infty} \\
&+ c T^{1/4} \|k_1\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|k - k_1\|_{L_x^8 L_T^8} \|D_x^s (v_1)\|_{L_x^8 L_T^8} \\
&\leq c T^{1/4} \left(|||\overrightarrow{v}|||_s + |||\overrightarrow{v}_1|||_s \right)^2 |||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1|||_s \ .
\end{aligned}$$

Os outros termos de (1.54) são estimados de forma análoga a (1.56) ou (1.57). Portanto,

$$\| D_x^s \left(F(v_1(\tau), k_1(\tau)) - F(v(\tau), k(\tau)) \right) \|_{L_x^2 L_T^2} \leq c T^{1/4} \left(|||\overrightarrow{v}|||_s + |||\overrightarrow{v}_1|||_s \right)^2 |||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1|||_s \ . \qquad (1.58)$$

Segue de (1.49), (1.53) , (1.58) e da escolha de T e a que

$$\begin{aligned}
|||\Phi(\overrightarrow{v}) - \Phi(\overrightarrow{v}_1)|||_s &\leq C T^{1/2} \left(|||\overrightarrow{v}|||_s + |||\overrightarrow{v}_1|||_s \right)^2 |||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1|||_s \\
&\leq C T^{1/2} a^2 \, |||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1|||_s \qquad (1.59) \\
&\leq \frac{1}{2} \, |||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1|||_s \ .
\end{aligned}$$

Para verificar que $\Phi(\overrightarrow{v})$ é contínua em $t \in [-T, T]$ consideramos $0 \leq t_0 \leq t \leq T$ e

$$\Phi(\overrightarrow{v}(t)) = \overrightarrow{u}(t) = W(t - t_0)\overrightarrow{u}(t_0) - \int_{t_0}^{t} W(t - t_0 - \tau) G(\overrightarrow{v}(\tau)) d\tau. \qquad (1.60)$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\overrightarrow{v}(t)) - \Phi(\overrightarrow{v}(t_0))\|_s &\leq \|\overrightarrow{u}(t_0) - W(t - t_0)\overrightarrow{u}(t_0)\|_s \\
&+ \left\| \int_{t_0}^{t} W(t - t_0 - \tau) G(\overrightarrow{v}(\tau)) d\tau \right\|_s \qquad (1.61) \\
&\leq \|\overrightarrow{u}(t_0) - W(t - t_0)\overrightarrow{u}(t_0)\|_s \\
&+ C(t - t_0)^{1/2} \, |||\overrightarrow{v}|||_s^3 .
\end{aligned}$$

Aplicando o teorema do ponto fixo no espaço de Banach Y_T^a concluimos que existe uma única $\overrightarrow{v} \in Y_T^a$ que satisfaz a equação integral (1.27).

2. *Unicidade.* Ao aplicarmos o teorema do ponto fixo, a unicidade da solução ficou restrita à bola fechada Y_T^a de centro na origem e raio $a = 2c\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s}$, no intervalo $[-T, T]$. Precisamos obter a unicidade da equação integral (1.27) em todo o espaço Y_T. Como o PVI (1.26) é reversível no tempo, basta mostrarmos o resultado para $t \in [0, T]$.

Suponha $\overrightarrow{u}_1 \in Y_T$, com $\overrightarrow{u}_1(0) = \overrightarrow{u}_0$ outra solução da equação integral (1.27). Mostraremos que $\overrightarrow{u}_1 \in Y_T^a$ (equivalente a $cT^{\frac{1}{2}}\,|||\overrightarrow{u}_1|||_s^3 \leq \frac{a}{2}$), de onde seguirá o resultado. Suponhamos, por absurdo, que $cT^{\frac{1}{2}}\,|||\overrightarrow{u}_1|||_s^3 > \frac{a}{2}$. Para $t \in [0, T]$ definimos a função

$$f(t) = ct^{\frac{1}{2}}\,|||\overrightarrow{u}_1|||_{s,t}^3\ ,$$

onde $|||\overrightarrow{u}_1|||_{s,t} = \max\limits_{j=1,\dots,6} \mu_{j,s}^t(\overrightarrow{u}_1)$ (veja (1.14) a (1.19)). Para $t = T$ denotamos $|||\overrightarrow{u}_1|||_{s,T}$ apenas por $|||\overrightarrow{u}_1|||_s$. Note que a função f é contínua, crescente e $f(0) = 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $T_1 \in (0, T)$ tal que

$$f(T_1) = c\,(T_1)^{\frac{1}{2}}\,|||\overrightarrow{u}_1|||_{s,T_1}^3 = \frac{a}{2}.$$

Assim,

$$|||\overrightarrow{u}_1|||_{s,T_1} \leq \frac{a}{2} + c\,(T_1)^{\frac{1}{2}}\,|||\overrightarrow{u}_1|||_{s,T_1}^3 = a$$

e

$$\frac{a}{2} = c\,(T_1)^{\frac{1}{2}}\,|||\overrightarrow{u}_1|||_{s,T_1}^3 \leq c\,(T_1)^{\frac{1}{2}}\,a^3.$$

Portanto,

$$c\,(T)^{\frac{1}{2}}\,a^2 > c\,(T_1)^{\frac{1}{2}}\,a^2 \geq \frac{1}{2},$$

que é um absurdo, pois de (1.48) temos que $c\,(T)^{\frac{1}{2}}\,a^2 \leq \frac{1}{2}$.

3. *Dependência contínua.* Sejam $\overrightarrow{u}(t) \in Y_{T_1}^{a_1}$ e $\overrightarrow{v}(t) \in Y_{T_2}^{a_2}$ soluções do PVI (1.26) com dado inicial $\overrightarrow{u}_0$, $\overrightarrow{v}_0$, respectivamente, onde

$$a_1 = 2C\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s}\,, \quad T_1 \leq c_1\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s}^{-4}\,, \quad a_2 = 2C\,\|\overrightarrow{v}_0\|_{H^s} \quad \text{e} \quad T_2 \leq c_2\,\|\overrightarrow{v}_0\|_{H^s}^{-4}\,.$$

Suponha que $\overrightarrow{v}_0$ pertença à vizinhança de $\overrightarrow{u}_0$ definida por

$$V_{\overrightarrow{u}_0} = \{\overrightarrow{\varphi} \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R}); \|\overrightarrow{u}_0 - \overrightarrow{\varphi}\|_{H^s} < \delta\}\,.$$

A partir da escolha de δ obteremos um tempo $T > 0$ tal que $\overrightarrow{u}(t)$, $\overrightarrow{v}(t) \in Y_T^{a_1}$ e a aplicação $\overrightarrow{v}_0 \to \overrightarrow{v}(t)$ é Lipschitz de $V_{\overrightarrow{u}_0}$ em $Y_{T'}$, para cada $T' < T$.

Para $\overrightarrow{v}_0 \in V_{\overrightarrow{u}_0}$ tem- se que

$$C\,\|\overrightarrow{v}_0\|_{H^s} \leq C\delta + C\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s} \leq C\delta + \frac{1}{2}a_1.$$

Considerando $C\delta < \frac{1}{4}a_1$, ou seja, $\delta < \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s}$, tem-se $C\left\|\overrightarrow{v}_0\right\|_{H^s} < \frac{3}{4}a_1 < a_1$.

Vamos agora obter um tempo $\widetilde{T}_2 \leq T_2$ tal que $|||\overrightarrow{v}|||_s \leq a_1$. De (1.47) e da escolha de δ segue que

$$\begin{aligned}
|||\overrightarrow{v}|||_s &\leq C\left\|\overrightarrow{v}_0\right\|_{H^s} + C\left(\widetilde{T}_2\right)^{\frac{1}{2}}|||\overrightarrow{v}|||_s^3 \\
&\leq \frac{3}{4}a_1 + C\left(\widetilde{T}_2\right)^{\frac{1}{2}}|||\overrightarrow{v}|||_s^3 \\
&\leq \frac{3}{4}a_1 + C\left(\widetilde{T}_2\right)^{\frac{1}{2}}(a_1)^3 .
\end{aligned}$$

Considerando o tempo $\widetilde{T}_2 > 0$ tal que $C\left(\widetilde{T}_2\right)^{\frac{1}{2}}(a_1)^3 \leq \frac{1}{4}a_1$, segue que $\overrightarrow{v}(t) \in Y^{a_1}_{\widetilde{T}_2}$. Em função de $\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^s}$, escolhemos o tempo $\widetilde{T}_2$ tal que

$$\widetilde{T}_2 \leq \left(\frac{1}{4Ca_1^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{16C^3\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|^2_{H^s}}\right)^2 = \widetilde{C}\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|^{-4}_{H^s} .$$

Para $T = \min\left\{T_1, \widetilde{T}_2\right\}$ tem-se que $\overrightarrow{u} \in Y^{a_1}_T$. Assim, para $t \in [-T, T]$ vale a igualdade

$$\overrightarrow{u}(t) - \overrightarrow{v}(t) = W(t)\left(\overrightarrow{u}_0 - \overrightarrow{v}_0\right) - \int_0^t W(t-\tau)\left[G(\overrightarrow{u}(\tau)) - G(\overrightarrow{v}(\tau))\right]d\tau.$$

Aplicando na equação acima o mesmo argumento utilizado em (1.49)-(1.59) para provar a contração, obtemos

$$\begin{aligned}
|||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|||_s &\leq c\left\|\overrightarrow{u}_0 - \overrightarrow{v}_0\right\|_{H^s} + c\,(T')^{1/2}\left(|||\overrightarrow{u}|||_s + |||\overrightarrow{v}|||_s\right)^2|||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|||_s \\
&\leq C\left\|\overrightarrow{u}_0 - \overrightarrow{v}_0\right\|_{H^s} + C\,(T')^{1/2}(a_1)^2|||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|||_s \\
&\leq C\left\|\overrightarrow{u}_0 - \overrightarrow{v}_0\right\|_{H^s} + \frac{1}{4}|||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|||_s ,
\end{aligned}$$

para cada $T' < T$. Portanto,

$$|||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|||_s \leq \frac{4}{3}\left\|\overrightarrow{u}_0 - \overrightarrow{v}_0\right\|_{H^s} .$$

4. *Para $s' > \frac{1}{4}$ o tempo de existência da solução $\overrightarrow{u}(t)$ não depende de s', no sentido de que o tempo T depende apenas de $\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^{\frac{1}{4}}}$.* Para mostrar este fato consideramos $\overrightarrow{u}_0 \in H^{s'}(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R})$ e Y'_T o espaço métrico

$$Y'_T = \left\{\overrightarrow{v} \in C([-T,T]\,; H^{s'}(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R})) / \left\|\overrightarrow{v}\right\|_{Y'_T} = |||\overrightarrow{v}|||_{\frac{1}{4}} + \eta\,|||\overrightarrow{v}|||_{s'} < \infty\right\},$$

onde $\eta = \dfrac{\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^{\frac{1}{4}}}}{\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^{s'}}}$. Novamente aplicaremos o teorema do ponto fixo para resolver a equação (1.27) em uma bola fechada de Y'_T. Da estimativa (1.47) segue que

$$\begin{aligned}
|||\Phi(\overrightarrow{v})|||_{\frac{1}{4}} &\leq C\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^{\frac{1}{4}}} + CT^{1/2}|||\overrightarrow{v}|||^3_{\frac{1}{4}} \\
&\leq C\left\|\overrightarrow{u}_0\right\|_{H^{\frac{1}{4}}} + CT^{1/2}\left\|\overrightarrow{v}\right\|^3_{Y'_T} .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$|||\Phi(\overrightarrow{v})|||_{s'} \leq C \left\| \overrightarrow{u}_0 \right\|_{H^{s'}} + CT^{1/2} \, |||\overrightarrow{v}|||_{s'} \, |||\overrightarrow{v}|||_{\frac{1}{4}}^2 . \tag{1.63}$$

A desigualdade (1.63) segue do fato de que ao estimarmos cada termo de $D^{s'}\left(F(v,k)\right)$ na norma de $\|\cdot\|_{L^2_x L^2_T}$, como em (1.36)-(1.45), teremos

$$\begin{aligned} \left\| D_x^{s'}(|v|^2 \, v_x) \right\|_{L^2_x L^2_T} &\leq c \left\| D_x^{s'} v \right\|_{L^5_x L^{10}_T} \|v\|_{L^4_x L^\infty_T} \|v_x\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} + \|v\|^2_{L^4_x L^\infty_T} \left\| D_x^{s'}(v_x) \right\|_{L^\infty_x L^2_T} \qquad (1.64) \\ &\leq 2c \, |||\overrightarrow{v}|||_{s'} \, |||\overrightarrow{v}|||_{\frac{1}{4}}^2 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| D_x^{s'}(|k|^2 \, v) \right\|_{L^2_x L^2_T} &\leq cT^{1/4} \left\| D_x^{s'} k \right\|_{L^8_x L^8_T} \|k\|_{L^8_x L^8_T} \|v\|_{L^4_x L^\infty_T} \\ &\quad + cT^{1/4} \|k\|_{L^4_x L^\infty_T} \|k\|_{L^8_x L^8_T} \left\| D_x^{s'} v \right\|_{L^8_x L^8_T} \\ &\leq 2cT^{1/4} \, |||\overrightarrow{v}|||_{s'} \, |||\overrightarrow{v}|||_{\frac{1}{4}}^2 . \end{aligned} \tag{1.65}$$

De (1.63) segue que

$$\begin{aligned} \eta \, |||\Phi(\overrightarrow{v})|||_{s'} &\leq C \left(\left\| \overrightarrow{u}_0 \right\|_{H^{\frac{1}{4}}} + T^{1/2} \eta \, |||\overrightarrow{v}|||_{s'} \, |||\overrightarrow{v}|||_{\frac{1}{4}}^2 \right) \\ &\leq C \left\| \overrightarrow{u}_0 \right\|_{H^{\frac{1}{4}}} + CT^{1/2} \left\| \overrightarrow{v} \right\|^3_{Y'_T} . \end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| \Phi(\overrightarrow{v}) \right\|_{Y'_T} \leq 2C \left(\left\| \overrightarrow{u}_0 \right\|_{H^{\frac{1}{4}}} + T^{1/2} \left\| \overrightarrow{v} \right\|^3_{Y'_T} \right) .$$

Considerando $\overrightarrow{v} \in Y'_T(a)$ (a bola fechada de Y'_T com centro na origem e raio $a = 4C \left\| \overrightarrow{u}_0 \right\|_{H^{\frac{1}{4}}}$) e escolhendo

$$T \leq \left(\frac{1}{16C^3 \left\| \overrightarrow{u}_0 \right\|^2_{H^{\frac{1}{4}}}} \right)^2 \tag{1.66}$$

tem-se que $\left\| \Phi(\overrightarrow{v}) \right\|_{Y'_T} \leq a$. Aplicando um argumento análogo mostra-se que $\Phi : Y'_T(a) \to Y'_T(a)$ é uma contração. O resultado segue aplicando o teorema do ponto fixo. Notemos que o tempo obtido em (1.66) é menor que o tempo de existência da solução no caso $s = \frac{1}{4}$, o que torna possível a definição do espaço Y'_T e a estimativa (1.63). ■

Observação 1.2.4 *Não há dificuldade em provar o caso $s = 1$. No caso $s > 1$,* *estimamos* $\left\|D_x^s(|k|^2\, v)\right\|_{L_x^2 L_T^2}$ *por*

$$
\begin{aligned}
cT^{1/2} \sup_{[-T,T]} \left\|D_x^s(|k|^2\, v)\right\|_{L_x^2} &\le cT^{1/2} \sup_{[-T,T]} \left\||k|^2\, v\right\|_{H^s} \\
&\le cT^{1/2} \sup_{[-T,T]} \|k\|_{H^s}^2 \|v\|_{H^s} . \\
&\le cT^{1/2} \left(\|k\|_{L_T^\infty L_x^2}^2 + \|D_x^s k\|_{L_T^\infty L_x^2}^2\right) \left(\|v\|_{L_T^\infty L_x^2}^2 + \|D_x^s v\|_{L_T^\infty L_x^2}^2\right)^{1/2} \\
&\le cT^{1/2} \left(\mu_1^T(\overrightarrow{v})\right)^3 .
\end{aligned}
$$

Para estimar $\left\|D_x^s(vk_x\overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2}$ *consideramos dois casos:* $s \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ *e* $s \ge \frac{3}{2}$. *Para* $s \ge \frac{3}{2}$, *temos*

$$
\begin{aligned}
\left\|D_x^s(vk_x\overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2} &= \left\|D_x^s(vk_x\overline{k}) - v\overline{k}D_x^s(k_x) + v\overline{k}D_x^s(k_x)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\le \left\|D_x^s(vk_x\overline{k}) - v\overline{k}D_x^s(k_x)\right\|_{L_x^2 L_T^2} + \left\|v\overline{k}D_x^s(k_x)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&= A_1 + A_2\ , \qquad (1.67)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
A_1 &\le cT^{1/2} \sup_{[-T,T]} \left\|D_x^s(vk_x\overline{k}) - v\overline{k}D_x^s(k_x)\right\|_{L_x^2} \\
&\le 2cT^{1/2} \sup_{[-T,T]} \left\|v\overline{k}\right\|_{H^s} \|k_x\|_{H^{s-1}} \qquad (1.68) \\
&\le c_1 T^{1/2} \left(\|v\|_{L_T^\infty L_x^2}^2 + \|D_x^s v\|_{L_T^\infty L_x^2}^2\right)^{1/2} \left(\|k\|_{L_T^\infty L_x^2}^2 + \|D_x^s k\|_{L_T^\infty L_x^2}^2\right) \\
&\le cT^{1/2} \left(\mu_1^T(\overrightarrow{v})\right)^3 \le |||\overrightarrow{v}|||_s^3
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
A_2 &\le c\, \|v\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|k\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|D_x^s k_x\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\le \left(\mu_5^T(\overrightarrow{v})\right)^2 \mu_2^T(\overrightarrow{v}) \le |||\overrightarrow{v}|||_s^3 \ .
\end{aligned}
$$

A desigualdade (1.68) é conseqüência do Lema 1.1.13. Já no caso $s \in (1, \frac{3}{2})$ *utilizamos a seguinte identidade*

$$
\left\|D_x^s(vk_x\overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2} = \left\|D_x^{\alpha+1}(vk_x\overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2} = \left\|D_x^\alpha \partial_x(vk_x\overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2} ,
$$

com $s = \alpha + 1$ *e* $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. *Assim,*

$$
\begin{aligned}
\left\|D_x^s(vk_x\overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2} &\le \left\|D_x^\alpha(v_x k_x\overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2} + \left\|D_x^\alpha(v\partial_x k_x\overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\quad + \left\|D_x^\alpha(vk_x\overline{k}_x)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\le B_1 + B_2 + B_3\ ,
\end{aligned}
$$

onde

$$\begin{aligned}
B_1 = \left\|D_x^\alpha(v_x k_x \overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2} &\leq \left\|D_x^\alpha(v_x k_x \overline{k}) - v_x k_x D_x^\alpha \overline{k} - \overline{k} D_x^\alpha(v_x k_x)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&+ \left\|v_x k_x D_x^\alpha \overline{k}\right\|_{L_x^2 L_T^2} + \left\|\overline{k} D_x^\alpha(v_x k_x\right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\leq c \left\|D_x^\alpha v_x\right\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|k_x\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} \|k\|_{L_x^4 L_T^\infty} + \left\|v_x k_x D_x^\alpha \overline{k}\right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\leq c \left\|D_x^s v\right\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|k_x\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} \|k\|_{L_x^4 L_T^\infty} + \|v_x\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|k_x\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} \|D_x^\alpha k\|_{L_x^4 L_T^\infty} \,,
\end{aligned} \tag{1.69}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = \left\|D_x^\alpha(v \partial_x k_x \overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2} &\leq \left\|D_x^\alpha(v \partial_x k_x \overline{k}) - v\overline{k} D_x^\alpha(\partial_x k_x) - \partial_x k_x D_x^\alpha(v\overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&+ \left\|v\overline{k} D_x^\alpha(\partial_x k_x)\right\|_{L_x^2 L_T^2} + \left\|\partial_x k_x D_x^\alpha(v\overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\leq c \left\|v\overline{k}\right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^\alpha(\partial_x k_x)\|_{L_x^\infty L_T^2} + \left\|\partial_x k_x D_x^\alpha(v\overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\leq c \|v\|_{L_x^4 L_T^\infty} \|k\|_{L_x^4 L_T^\infty} \left\|D_x^{\alpha+1} k_x)\right\|_{L_x^\infty L_T^2} + B_2^1 \,,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
B_2^1 = \left\|\partial_x k_x D_x^\alpha(v\overline{k})\right\|_{L_x^2 L_T^2} &\leq \left(\int_{-T}^T \left\|D_x^\alpha(v\overline{k})\right\|_{L_x^\infty}^2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_x k_x|^2 \, dxdt\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{-T}^T \left\|D_x^\alpha(v\overline{k})\right\|_{H^1}^2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_x k_x|^2 \, dxdt\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sup_{[-T,T]} \left\|v\overline{k}\right\|_{H^s}^2\right)^{1/2} \left(\int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x k_x|^2 \, dxdt\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\|v\|_{L_T^\infty L_x^2}^2 + \|D_x^s v\|_{L_T^\infty L_x^2}^2\right)^{1/2} \left(\|k\|_{L_T^\infty L_x^2}^2 + \|D_x^s k\|_{L_T^\infty L_x^2}^2\right)^{1/2} \|\partial_x k_x\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\leq \left(\mu_1^T(\overrightarrow{v})\right)^2 \left(\int_{-T}^T \|k_x\|_{H^s}^2 \, dt\right)^{1/2} \leq cT^{1/2} \left(\mu_1^T(\overrightarrow{v})\right)^2 \left(\sup_{[-T,T]} \|k_x\|_{H^s}^2\right)^{1/2} \\
&\leq cT^{1/2} \left(\mu_1^T(\overrightarrow{v})\right)^2 \left(\|k_x\|_{L_T^\infty L_x^2}^2 + \|D_x^s k_x\|_{L_T^\infty L_x^2}^2\right)^{1/2} \,.
\end{aligned}$$

Estimamos B_3 de modo análogo a B_1. Portanto, no caso $s \in (1, \frac{3}{2})$ estamos considerando

$$\lambda_1^T(\overrightarrow{v}) = \mu_1^T(\overrightarrow{v}) + \mu_1^T(\partial_x \overrightarrow{v})$$

e

$$\lambda_5^T(\overrightarrow{v}) = \mu_5^T(\overrightarrow{v}) + \mu_5^T(D_x^\alpha \overrightarrow{v}), \quad \text{com } \alpha \in (0, \frac{1}{2}).$$

Observamos que as seguintes estimativas lineares são válidas no caso $s \in (1, \frac{3}{2})$:

$$\lambda_1^T(W(t)\overrightarrow{u}_0) \leq \|\overrightarrow{u}_0\|_s$$

e

$$\lambda_5^T(W(t)\overrightarrow{u}_0) \leq \|\overrightarrow{u}_0\|_s ,$$

pois as derivadas de maior ordem aparecem linearmente.

1.3 Boa colocação local em $H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$, $s \geq \frac{1}{2}$

Nessa seção consideramos o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{q}{2} i\partial_x^2 u + \partial_x^3 u + c_0\partial_x u + (\beta+\mu)\,[|u|^2 - \|u\|_{L^2_x}^2 - \|w\|_{L^2_x}^2]\partial_x u \\ +\beta\sigma_\beta\,|w|^2\,\partial_x u + \mu u^2\partial_x \overline{u} + \mu\sigma_\mu u\partial_x(|w|^2) - i\alpha u(|u|^2 + \sigma_\alpha\,|w|^2) = 0 \\ \partial_t w - \frac{q}{2} i\partial_x^2 w + \partial_x^3 w + c_0\partial_x w + (\beta+\mu)\,[|w|^2 - \|u\|_{L^2_x}^2 - \|w\|_{L^2_x}^2]\partial_x w \\ +\beta\sigma_\beta\,|u|^2\,\partial_x w + \mu w^2\partial_x \overline{w} + \mu\sigma_\mu w\partial_x(|u|^2) - i\alpha w(|w|^2 + \sigma_\alpha\,|u|^2) = 0 \\ u(x,0) = u_0 \in H^s(\mathbb{T}) \text{ e } w(x,0) = w_0 \in H^s(\mathbb{T}), \end{cases} \tag{1.70}$$

onde u e w são funções periódicas com valores complexos, $(x,t) \in \mathbb{T} \times [-T,T]$ e c_0 é uma constante real dada por $c_0 = (\beta+\mu)\,[\|u\|_{L^2_x}^2 + \|w\|_{L^2_x}^2]$ (observação abaixo).

Observação 1.3.1 *O problema (1.70) é um caso particular de (1.1) no caso $\gamma = 2$. Consideramos, sem perda de generalidade, $\gamma = 2$. No caso em que $\gamma \neq 2$ fazemos a mudança de variável chamando $v_1(x,t) = u(\theta x,t)$ e $v_2(x,t) = w(\theta x,t)$, onde $\theta = \sqrt[3]{\frac{\gamma}{2}}$. Assim, $u(x,t) = v_1(\theta^{-1}x,t)$, $w(x,t) = v_2(\theta^{-1}x,t)$, $\frac{\gamma}{2}\partial_x^3 u = \partial_x^3 v_1$ e $\frac{\gamma}{2}\partial_x^3 w = \partial_x^3 v_2$.*

Vale a lei de conservação $\|u(t)\|_{L^2_x}^2 + \|w(t)\|_{L^2_x}^2 = \|u_0\|_{L^2_x}^2 + \|w_0\|_{L^2_x}^2$. Para obtê-la basta multiplicar a primeira equação de (1.70) por $\overline{u}$, a segunda equação de (1.70) por $\overline{w}$, integrar em relação a x sobre o toro unidimensional, tomar a parte imaginária e somar as equações resultantes. Portanto, c_0 independe de t.

Reescrevemos (1.70) da forma

$$\begin{cases} \partial_t \overrightarrow{u} - \frac{q}{2} i\partial_x^2 \overrightarrow{u} + \partial_x^3 \overrightarrow{u} + c_0\partial_x \overrightarrow{u} + G_1(\overrightarrow{u}) = 0 \\ \overrightarrow{u}(x,0) = \overrightarrow{u}_0 \in H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) \end{cases}, \tag{1.71}$$

onde

$$G_1(\overrightarrow{u}) = (F_1(u,w), F_1(w,u))\,, \qquad \overrightarrow{u} = (u,w)$$

e

$$F_1(u,w) = (\beta+\mu)\,[|u|^2 - \|u\|_{L^2_x}^2 - \|w\|_{L^2_x}^2]\partial_x u + \beta\sigma_\beta\,|w|^2\,\partial_x u \\ + \mu u^2\partial_x\overline{u} + \mu\sigma_\mu u\partial_x(|w|^2) - i\alpha u(|u|^2 + \sigma_\alpha\,|w|^2). \tag{1.72}$$

Apresentamos agora o principal resultado desta seção.

Teorema 1.3.2 *Suponha que $\frac{q}{3}\notin\mathbb{Z}$. Para $s\geq\frac{1}{2}$ e $\overrightarrow{u}_0=(u_0,w_0)\in H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})$ existe $T(\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^{\frac{1}{2}}})>0$ e uma única solução $\overrightarrow{u}=(u,w)$ do PVI (1.71) para o caso $(\beta+\mu)=\beta\sigma_\beta$ no intervalo de tempo $[-T,T]$ tal que*

$$\overrightarrow{u}\in C([-T,T]:H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T})),\quad \overrightarrow{u}\in Y_s\times Y_s,$$

onde $c_0=(\beta+\mu)\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{L^2_x}^2$ na definição de Y_s.

Para cada $T'\in(0,T)$, existe $\epsilon>0$ tal que a aplicação $\overrightarrow{v}_0\to\overrightarrow{v}$ é Lipschitz contínua do espaço

$$\{\overrightarrow{v}_0\in H^s(\mathbb{T})\times H^s(\mathbb{T}):\|\overrightarrow{v}_0-\overrightarrow{u}_0\|_{H^s}<\epsilon\}$$

para o espaço

$$\left\{\overrightarrow{v}:\|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\|_{L^\infty_{T'}H^s}+\|\Psi_{T'}(\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u})\|_{Y_s}<\infty\right\}.$$

A equação integral associada ao problema (1.71) é dada por

$$\Phi_{\overrightarrow{u}_0}(\overrightarrow{u})=W_1(t)\overrightarrow{u}_0-\int_0^t W_1(t-t')G_1(\overrightarrow{u})(t')dt',$$

onde

$$W_1(t)\overrightarrow{u}_0=(S_1(t)u_0,S_1(t)w_0)$$

e $S_1(t)$ é o grupo unitário em $H^s(\mathbb{T})$ definido por $S_1(t)u_0=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}e^{inx}e^{it(n^3-\frac{q}{2}n^2-c_0n)}\widehat{u}_0$.

Seja $q_\pm(n,\tau)=\tau-n^3\pm\frac{q}{2}n^2+c_0n$. As seguintes igualdades são uma consequência direta das definições.

$$\langle q_-(n,\tau)\rangle^b\left|\widetilde{\overline{u}}(n,\tau)\right|=\langle q_+(-n,-\tau)\rangle^b\left|\widetilde{u}(-n,-\tau)\right|, \tag{1.73}$$

$$\|f\|_{(1,s,b)}=\left\|\langle n\rangle^s\langle q_+(n,\tau)\rangle^b\widetilde{f}(n,\tau)\right\|_{l^2_nL^2_\tau}. \tag{1.74}$$

Denotamos por $\psi\in C_0^\infty$ a função corte tal que $\psi=1$ em $[-1,1]$ e *supp* $\psi\subseteq(-2,2)$. Definimos $\Psi\overrightarrow{u}=(\psi u,\psi w)$ e para $a\in\mathbb{R}$, $a\neq0$, $\psi_a(t)=\psi\left(\frac{t}{a}\right)$. Estas notações serão úteis no lema a seguir.

Lema 1.3.3 *Para $s\in\mathbb{R}$ temos*

$$\|\Psi(t)W_1(t)\overrightarrow{u}_0\|_{Y_s\times Y_s}\leq c\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s\times H^s}, \tag{1.75}$$

$$\left\| \Psi(t) \int_0^t W_1(t-t')G_1(\overrightarrow{u})(t')dt' \right\|_{Y_s \times Y_s} \leq c \left\| F_1(u,w) \right\|_{(1,s,-\frac{1}{2})} + c \left\| F_1(w,u) \right\|_{(1,s,-\frac{1}{2})}$$
$$+ c \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n \rangle^{2s} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{F_1(u,w)}(n,\tau)}{\langle q_+(n,\tau)\rangle} d\tau \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.76}$$
$$+ c \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n \rangle^{2s} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{F_1(w,u)}(n,\tau)}{\langle q_+(n,\tau)\rangle} d\tau \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: Pela definição 1.1.6 basta estimarmos

$$\begin{aligned} \|\psi(t)S(t)u_0\|^2_{(1,s,\frac{1}{2})} &= \left\| \langle n \rangle^s \langle q_+(n,\tau)\rangle^{\frac{1}{2}} \widehat{\psi}(q_+(n,\tau))\widehat{u}_0(n) \right\|^2_{l^2_n L^2_\tau} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n \rangle^{2s} \left|\widehat{u}_0(n)\right|^2 \int_{\mathbb{R}} \langle q_+(n,\tau)\rangle^1 \left| \widehat{\psi}(q_+(n,\tau)) \right|^2 d\tau \\ &\leq c \left\| u_0 \right\|^2_{H^s} \left\| \psi \right\|^2_{H^1} \leq c \left\| u_0 \right\|^2_{H^s} \end{aligned} \tag{1.77}$$

e

$$\begin{aligned} \|\psi(\cdot)S(\cdot)u_0\|^2_{(2,s)} &= \left\| \langle n \rangle^s \widehat{\psi}(q_+(n,\tau))\widehat{u}_0(n) \right\|_{l^2_n L^1_\tau} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n \rangle^{2s} \left|\widehat{u}_0(n)\right|^2 \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\psi}(q_+(n,\tau)) \right| d\tau \right)^2 \\ &\leq c \left\| u_0 \right\|^2_{H^s} \left\| \widehat{\psi} \right\|^2_{L^1_\tau} \leq c \left\| u_0 \right\|^2_{H^s}, \end{aligned} \tag{1.78}$$

o que prova (1.75).

Para provar (1.76) é suficiente mostrar que

$$\left\| \psi(t) \int_0^t S(t-t')F_1(u,w)(t')dt' \right\|_{Y_s} \leq c \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n \rangle^{2s} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{F_1(u,w)}(n,\tau)}{\langle q_+(n,\tau)\rangle} d\tau \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ c \left\| F_1(u,w) \right\|_{(1,s,-\frac{1}{2})} \tag{1.79}$$

Da relação $\int_0^t h(t')\,dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it\lambda}-1}{i\lambda} \widehat{h}(\lambda)\,d\lambda$ e da seguinte definição do grupo unitário

$$S(t-t')F_1(x,t) = c \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} e^{i(t-t')(n^3-\frac{q}{2}n^2-c_0 n)} \widehat{F}_1(n,t'),$$

onde $F_1(x,t) = F_1(u,w)(x,t)$, obtemos a expressão

$$\psi(t) \int_0^t S(t-t')F_1(x,t')dt' = \psi(t) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{it(q_+(n,\lambda))}-1}{i(q_+(n,\lambda))} \right) e^{it\left(n^3-\frac{q}{2}n^2-c_0 n\right)} \widetilde{F}_1(n,\lambda)d\lambda. \tag{1.80}$$

Seja $\varphi\in C_0^\infty$ outra função corte tal que $\varphi=1$ em $[-B,B]$, *supp* $\varphi\subseteq(-2B,2B)$, onde $B<\frac{1}{100}$. Reescrevemos (1.80) da forma

$$
\begin{aligned}
&\psi(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{inx}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{it(q_+(n,\lambda))}-1}{i(q_+(n,\lambda))}\right)e^{it\left(n^3-\frac{q}{2}n^2-c_0n\right)}\varphi(q_+(n,\lambda))\widetilde{F}_1(n,\lambda)d\lambda\\
&+\psi(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{inx}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{it(q_+(n,\lambda))}-1}{i(q_+(n,\lambda))}\right)e^{it\left(n^3-\frac{q}{2}n^2-c_0n\right)}\left(1-\varphi(q_+(n,\lambda))\right)\widetilde{F}_1(n,\lambda)d\tau\\
&=J_1(x,t)+J_2(x,t).
\end{aligned}
$$

Ou ainda,

$$
\begin{aligned}
J_1(x,t)=\psi(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{inx}e^{it\left(n^3-\frac{q}{2}n^2-c_0n\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}&\left[\sum_{k\geq1}\left(\frac{(q_+(n,\lambda))^{k-1}e^{it(q_+(n,\lambda))}}{k!}i^{k-1}t^k\right)\right.\\
&\left.\times\varphi(q_+(n,\lambda))\widetilde{F}_1(n,\lambda)\right]d\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_2(x,t)&=\psi(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{inx}e^{it\left(n^3-\frac{q}{2}n^2-c_0n\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{it(q_+(n,\lambda))}}{i(q_+(n,\lambda))}\right)\left(1-\varphi(q_+(n,\lambda))\right)\widetilde{F}_1(n,\lambda)d\lambda\\
&-\psi(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{inx}e^{it\left(n^3-\frac{q}{2}n^2-c_0n\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-\varphi(q_+(n,\lambda))}{i(q_+(n,\lambda))}\right)\widetilde{F}_1(n,\lambda)d\lambda\\
&=J_2^1(x,t)+J_2^2(x,t).
\end{aligned}
\tag{1.81}
$$

Portanto, $\left\|\psi(t)\int_0^t S(t-t')F_1(u,w)(t')dt'\right\|_{Y_s}\leq\|J_1\|_{Y_s}+\|J_2^1\|_{Y_s}+\|J_2^2\|_{Y_s}$.

Temos que

$$
\begin{aligned}
\|J_1\|_{(1,s,\frac{1}{2})}&=\left\|\langle n\rangle^s\langle q_+(n,\tau)\rangle^{\frac{1}{2}}\widetilde{J}_1(n,\tau)\right\|_{l_n^2L_\tau^2}\\
&=\left\|\langle n\rangle^s\langle q_+(n,\tau)\rangle^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it(q_+(n,\tau))}\psi(t)\sum_{k\geq1}\frac{t^k}{k!}h_k(n)dt\right\|_{l_n^2L_\tau^2}\\
&=\left\|\langle n\rangle^s\langle q_+(n,\tau)\rangle^{\frac{1}{2}}\sum_{k\geq1}\frac{h_k(n)}{k!}\widehat{\psi_k}(q_+(n,\tau))\right\|_{l_n^2L_\tau^2}
\end{aligned}
\tag{1.82}
$$

onde

$$
h_k(n)=\int_{-\infty}^{+\infty}i^{k-1}(q_+(n,\lambda))^{k-1}\varphi(q_+(n,\lambda))\widetilde{F}_1(n,\lambda)d\lambda
$$

e

$$
\widehat{\psi_k}(q_+(n,\tau))=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it(q_+(n,\tau))}\psi(t)t^kdt.
$$

Usando as propriedades de φ estimamos

$$|h_k(n)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(q_+(n,\lambda))| \left|\widetilde{F}_1(n,\lambda)\right| d\lambda \leq c \left\|\langle q_+(n,\lambda)\rangle^{-\frac{1}{2}} \widetilde{F}_1(n,\lambda)\right\|_{L^2_\lambda} = L(n) \tag{1.83}$$

Usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\psi_k}(q_+(n,\tau))\right| &\leq \frac{1}{|q_+(n,\tau)|^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(q_+(n,\tau))} \left(k(k-1)t^{k-2}\psi + 2kt^{k-1}\psi' + t^k\psi''\right) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{|q_+(n,\tau)|^2} \left(k(k-1) \left\|t^{k-2}\psi\right\|_{L_1} + 2k \left\|t^{k-1}\psi'\right\|_{L_1} + \left\|t^k\psi''\right\|_{L_1} \right) \\
&\leq c \frac{k^2+k+1}{|q_+(n,\tau)|^2}. \qquad (1.84)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\left|\widehat{\psi_k}(q_+(n,\tau))\right| \leq \left\|t^k\psi\right\|_{L^1} \leq c. \tag{1.85}$$

Segue de (1.84)-(1.85) que

$$\left|\widehat{\psi_k}(q_+(n,\tau))\right| \leq c \frac{k^2+k+1}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^2}. \tag{1.86}$$

De (1.82)-(1.86) obtemos

$$\begin{aligned}
\|J_1\|_{(1,s,\frac{1}{2})} &\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q_+(n,\tau)\rangle \left(\sum_{k\geq 1} \frac{|h_k(n)|}{k!} \left|\widehat{\psi_k}(q_+(n,\tau))\right| \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s} |L(n)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q_+(n,\tau)\rangle \left(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} \left|\widehat{\psi_k}(q_+(n,\tau))\right| \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s} |L(n)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q_+(n,\tau)\rangle \left(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} \left(\frac{k^2+k+1}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^2} \right) \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s} |L(n)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^3} \left(\sum_{k\geq 1} \frac{k^2+k+1}{k!} \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s} |L(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = c \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s} \left\|\langle q_+(n,\lambda)\rangle^{-\frac{1}{2}} \widetilde{F}_1(n,\lambda)\right\|_{L^2_\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c \|F_1(u,w)\|_{(1,s,-\frac{1}{2})}. \qquad (1.87)
\end{aligned}$$

Vamos estimar agora

$$\begin{aligned}
\left\|J_2^1\right\|_{(1,s,\frac{1}{2})} &= \left\|\langle n\rangle^s\langle q_+(n,\tau)\rangle^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it\tau}\psi(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it\lambda}\frac{(1-\varphi(q_+(n,\lambda)))\,\widetilde{F}_1(n,\lambda)}{q_+(n,\lambda)}d\lambda\right)dt\right\|_{l_n^2L_\tau^2}\\
&= \left\|\langle n\rangle^s\langle q_+(n,\tau)\rangle^{\frac{1}{2}}\left(\widehat{\psi}(\cdot)*\frac{(1-\varphi(q_+(n,\cdot)))\,\widetilde{F}_1(n,\cdot)}{q_+(n,\cdot)}\right)(\tau)\right\|_{l_n^2L_\tau^2}\\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle q_+(n,\tau)\rangle\left|\left(\widehat{\psi}(\cdot)*\frac{(1-\varphi(q_+(n,\cdot)))\,\widetilde{F}_1(n,\cdot)}{q_+(n,\cdot)}\right)(\tau)\right|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\left\|\langle q_+(n,\tau)\rangle\widehat{\psi}(\tau)\right\|_{L_\tau^1}^2\left\|\frac{(1-\varphi(q_+(n,\tau)))\,\widetilde{F}_1(n,\tau)}{q_+(n,\tau)}\right\|_{L_\tau^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\left\|\frac{(1-\varphi(q_+(n,\tau)))\,\widetilde{F}_1(n,\tau)}{q_+(n,\tau)}\right\|_{L_\tau^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\left\|\langle q_+(n,\lambda)\rangle^{-\frac{1}{2}}\widetilde{F}_1(n,\tau)\right\|_{L_\tau^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.88)
\end{aligned}$$

A estimativa (1.88) segue da desigualdade de Young $\|f*g\|_{L_2}\leq\|f\|_{L_1}\|g\|_{L_2}$ e do fato que $\left|\frac{1-\varphi(x)}{x}\right|\leq\frac{c_1(B)}{\langle x\rangle^{\frac{1}{2}}}$.

Para estimarmos $\|J_2^2\|_{(1,s,\frac{1}{2})}$ notemos inicialmente que

$$\begin{aligned}
J_2^2 &= -\psi(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{inx}e^{it\left(n^3-\frac{q}{2}n^2-c_0n\right)}\widehat{r}(n)\\
&= -\psi(t)S(t)r(x),
\end{aligned}$$

onde $\widehat{r}(n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-\varphi(q_+(n,\lambda)}{i(q_+(n,\lambda))}\right)\widetilde{F}_1(n,\lambda)d\lambda$.

De (1.77) e da desigualdade $\left|\frac{1-\varphi(x)}{x}\right|\leq\frac{c(B)}{\langle x\rangle^1}$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\|J_2^2\right\|_{(1,s,\frac{1}{2})} &= \|\psi(t)S(t)r\|_{(1,s,\frac{1}{2})}\leq\|r\|_{H^s}\\
&\leq c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-\varphi(q_+(n,\lambda))}{i(q_+(n,\lambda))}\right)\widetilde{F}_1(n,\lambda)d\lambda\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widetilde{F_1}(n,\lambda)}{\langle q_+(n,\lambda)\rangle}d\lambda\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.89)
\end{aligned}$$

Usando a definição de $h_k(n)$ segue imediatamente que

$$|h_k(n)|\leq\left\|\mathcal{X}_{[-1,1]}(q_+(n,\lambda))\widetilde{F_1}(n,\lambda)\right\|_{L_\lambda^1}\leq c\left\|\frac{\widetilde{F_1}(n,\lambda)}{\langle q_+(n,\lambda)\rangle}\right\|_{L_\lambda^1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|J_1\|_{(2,s,0)} &= \left\| \langle n\rangle^s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(q_+(n,\tau))}\psi(t)\sum_{k\geq 1}\frac{t^k}{k!}h_k(n)dt \right\|_{l_n^2 L_\tau^1} \\
&= \left\| \langle n\rangle^s \sum_{k\geq 1}\frac{h_k(n)}{k!}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(q_+(n,\tau))}\psi(t)t^k dt \right\|_{l_n^2 L_\tau^1} \\
&= \left\| \langle n\rangle^s \sum_{k\geq 1}\frac{h_k(n)}{k!}\widehat{\psi_k}(q_+(n,\tau)) \right\|_{l_n^2 L_\tau^1} \qquad (1.90)\\
&\leq c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k\geq 1}\frac{|h_k(n)|}{k!}\left|\widehat{\psi_k}(q_+(n,\tau))\right| d\tau\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\left\|\frac{\widetilde{F_1}(n,\lambda)}{\langle q_+(n,\lambda)\rangle}\right\|_{L_\lambda^1}^2\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{\psi_k}(q_+(n,\tau))\right| d\tau\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\left\|\frac{\widetilde{F_1}(n,\lambda)}{\langle q_+(n,\lambda)\rangle}\right\|_{L_\lambda^1}^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

De forma análoga a (1.88) e (1.89), podemos mostrar que

$$\left\|J_2^1\right\|_{(2,s,0)} + \left\|J_2^2\right\|_{(2,s,0)} \leq c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\left\|\frac{\widetilde{F_1}(n,\tau)}{\langle q_+(n,\tau)\rangle}\right\|_{L_\tau^1}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

o que encerra a demonstração do lema. ■

Sejam $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ e $\tau, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
&q_+(n,\tau) - q_+(n_1,\tau_1) - q_-(n_2,\tau_2) - q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2) \qquad (1.91)\\
&= -3\left(n_1+n_2\right)\left(n-n_1\right)\left(n-n_2-\frac{q}{3}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\max\left\{q_+(n,\tau), q_+(n_1,\tau_1), q_-(n_2,\tau_2), q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)\right\} \\
&\geq \frac{3}{4}\left|n_1+n_2\right|\left|n-n_1\right|\left|n-n_2-\frac{q}{3}\right|.
\end{aligned}$$

Para n,n_1,$n_2 \in \mathbb{Z}$, definimos $M_1\left(n,n_1,n_2\right)$, $L\left(n,n_1,n_2\right)$ e $M_2\left(n,n_1,n_2\right)$ como

$$M_1\left(n,n_1,n_2\right) = \max\left\{\left|n-n_1\right|, \left|n_1+n_2\right|, \left|n-n_2\right|\right\},$$

$$M_2\left(n,n_1,n_2\right) = \min\left\{\left|n-n_1\right|, \left|n_1+n_2\right|, \left|n-n_2\right|\right\}$$

e

$$L(n,n_1,n_2)=\begin{cases} |n-n_1| \text{ se } (|n-n_1|-|n_1+n_2|)(|n-n_1|-|n-n_2|)\leq 0,\\ |n_1+n_2| \text{ se } (|n_1+n_2|-|n-n_1|)(|n_1+n_2|-|n-n_2|)\leq 0,\\ |n-n_2|, \text{ se } (|n-n_2|-|n-n_1|)(|n-n_2|-|n_1+n_2|)\leq 0.\end{cases}$$

Ao longo desta seção denotaremos $M_1(n,n_1,n_2)$, $M_2(n,n_1,n_2)$ e $L(n,n_1,n_2)$ apenas por M_1, M_2 e L, respectivamente. Notemos que $M_2\leq L\leq M_1$.

As seguintes igualdades serão úteis na prova do próximo lema.

O termo não linear $F_1(u,w)$ definido em (1.72), no caso $(\beta+\mu)=\beta\sigma_\beta$, pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} F_1(u,w) &= (\beta+\mu)\,[|u|^2-\|u\|^2_{L^2_x}+|w|^2-\|w\|^2_{L^2_x}]\partial_x u \\ &+\left(\mu u^2\partial_x\overline{u}+\mu\sigma_\mu uw\partial_x\overline{w}\right)+\mu\sigma_\mu u\overline{w}\partial_x w-i\alpha u(|u|^2+\sigma_\alpha|w|^2)\\ &= F_{11}(u,w)+F_{12}(u,w)+F_{13}(u,w)+F_{14}(u,w). \end{aligned} \tag{1.92}$$

Denotando por $F_{1j}=F_{1j}(u,w)$, para $j=1,...,4$, vamos encontrar uma expressão para cada $\widetilde{F_{1j}}(n,\tau)$.

Notemos inicialmente que

$$\begin{aligned} \widetilde{|u|^2 u_x}(n,\tau) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\left(\widehat{u}*\widehat{\overline{u}}*\widehat{u_x}\right)dt=\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} in_1\widehat{u}(n_1)\left(\widehat{u}*\widehat{\overline{u}}\right)(n-n_1)dt\\ &=\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\sum_{n_1\neq n} in_1\widehat{u}(n_1)\left(\widehat{u}*\widehat{\overline{u}}\right)(n-n_1)dt+\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}in\widehat{u}(n)\,\|\widehat{u}\|^2_{l^2_n}\\ &=\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\sum_{n_1\neq n}\sum_{n_2\in\mathbb{Z}} in_1\widehat{u}(n_1)\widehat{\overline{u}}(n_2)\widehat{u}(n-n_1-n_2)dt+\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}in\widehat{u}(n)\,\|u\|^2_{L^2_x}\\ &=\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\sum_{n_1\neq n}\sum_{n_2\neq -n_1} in_1\widehat{u}(n_1)\widehat{\overline{u}}(n_2)\widehat{u}(n-n_1-n_2)dt\\ &+\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\sum_{n_1\neq n} in_1\widehat{u}(n_1)\widehat{\overline{u}}(-n_1)\widehat{u}(n)dt+\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}in\widehat{u}(n)\,\|u\|^2_{L^2_x}\\ &=\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\sum_{n_1\neq n}\sum_{n_2\neq -n_1} in_1\widehat{u}(n_1)\widehat{\overline{u}}(n_2)\widehat{u}(n-n_1-n_2)dt\\ &+\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} in_1\widehat{u}(n_1)\widehat{\overline{u}}(-n_1)\widehat{u}(n)dt-\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}in\widehat{u}(n)\widehat{\overline{u}}(-n)\widehat{u}(n)dt\\ &+\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}in\widehat{u}(n)\,\|u\|^2_{L^2_x}\,dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{|u|^2 u_x}(n,\tau) = &\sum_{(n_1,n_2)\in H_n^1} in_1 \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_1,\tau_1)\widetilde{\overline{u}}(n_2,\tau_2)\widetilde{u}(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&+ \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} in_1 \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_1,\tau_1)\widetilde{\overline{u}}(-n_1,\tau_2)\widetilde{u}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&- \iint_{\mathbb{R}^2} in\widetilde{u}(n,\tau_1)\widetilde{\overline{u}}(-n,\tau_2)\widetilde{u}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&+ \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} in\widehat{u}(n) \|u\|_{L_x^2}^2 ,
\end{aligned} \tag{1.93}
$$

onde

$$
H_n^1 = \left\{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2 : n-n_1\neq 0, n_1+n_2\neq 0\right\}.
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{|w|^2 u_x}(n,\tau) = &\sum_{(n_1,n_2)\in H_n^1} in_1 \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_1,\tau_1)\widetilde{\overline{w}}(n_2,\tau_2)\widetilde{w}(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&+ \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} in_1 \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_1,\tau_1)\widetilde{\overline{w}}(-n_1,\tau_2)\widetilde{w}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&- \iint_{\mathbb{R}^2} in\widetilde{u}(n,\tau_1)\widetilde{\overline{w}}(-n,\tau_2)\widetilde{w}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} in\widehat{u}(n) \|w\|_{L_x^2}^2 \, dt.
\end{aligned} \tag{1.94}
$$

Observação 1.3.4 *Segue de (1.93)-(1.94) que*

$$
\widetilde{|u|^2 u_x}(n,\tau) = A(n,\tau) + \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} in\widehat{u}(n) \|u\|_{L_x^2}^2 \, dt
$$

e

$$
\widetilde{|w|^2 u_x}(n,\tau) = B(n,\tau) + \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} in\widehat{u}(n) \|w\|_{L_x^2}^2 \, dt.
$$

Observamos que os termos

$$
\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} in\widehat{u}(n) \|u\|_{L_x^2}^2 \, dt = \widetilde{\|u\|_{L_x^2}^2 u_x}(n,\tau)
$$

e

$$
\int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} in\widehat{u}(n) \|w\|_{L_x^2}^2 \, dt = \widetilde{\|w\|_{L_x^2}^2 u_x}(n,\tau)
$$

serão cancelados na expressão $\widetilde{F}_1(n,\tau)$ definida em (1.92). Portanto, o termo $\widetilde{F}_{11}(n,\tau)$ será definido por $A(n,\tau)+B(n,\tau)$.

Explicitamente, temos a seguinte expressão para $\widetilde{F}_{11}(n,\tau)$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_{11}(n,\tau) &= c_1(\beta,\mu) \sum_{(n_1,n_2)\in H_n^1} in_1 \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_1,\tau_1)\widetilde{\overline{u}}(n_2,\tau_2)\widetilde{u}(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&+ c_1(\beta,\mu) \sum_{(n_1,n_2)\in H_n^1} in_1 \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_1,\tau_1)\widetilde{\overline{w}}(n_2,\tau_2)\widetilde{w}(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&+ c_1(\beta,\mu) \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} in_1 \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_1,\tau_1)\widetilde{\overline{u}}(-n_1,\tau_2)\widetilde{u}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&+ c_1(\beta,\mu) \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} in_1 \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_1,\tau_1)\widetilde{\overline{w}}(-n_1,\tau_2)\widetilde{w}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \qquad (1.95) \\
&- c_1(\beta,\mu) \iint_{\mathbb{R}^2} in\widetilde{u}(n,\tau_1)\widetilde{\overline{u}}(-n,\tau_2)\widetilde{u}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&- c_1(\beta,\mu) \iint_{\mathbb{R}^2} in\widetilde{u}(n,\tau_1)\widetilde{\overline{w}}(-n,\tau_2)\widetilde{w}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&= R_1(n,\tau)+R_2(n,\tau)+R_3(n,\tau)+R_4(n,\tau)+R_5(n,\tau)+R_6(n,\tau).
\end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_{12}(n,\tau) &= c_2(\mu) \sum_{(n_1,n_2)\in H_n^1} in_2 \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_1,\tau_1)\widetilde{\overline{u}}(n_2,\tau_2)\widetilde{u}(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&- 2c_2(\mu) \sum_{n_2\in\mathbb{Z}} in_2 \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_2,\tau_2)\widetilde{\overline{u}}(-n_2,\tau_1)\widetilde{u}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&+ c_2(\mu) \iint_{\mathbb{R}^2} in\widetilde{u}(n,\tau_2)\widetilde{\overline{u}}(-n,\tau_1)\widetilde{u}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \qquad (1.96) \\
&+ c_3(\mu,\sigma_\mu) \sum_{(n_1,n_2)\in H_n^1} in_2 \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_1,\tau_1)\widetilde{\overline{w}}(n_2,\tau_2)\widetilde{w}(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&- c_3(\mu,\sigma_\mu) \sum_{n_2\in\mathbb{Z}} in_2 \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{w}(n_2,\tau_2)\widetilde{\overline{w}}(-n_2,\tau_1)\widetilde{u}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&- c_3(\mu,\sigma_\mu) \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} in_1 \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_1,\tau_2)\widetilde{\overline{w}}(-n_1,\tau_1)\widetilde{w}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&+ c_3(\mu,\sigma_\mu) \iint_{\mathbb{R}^2} in\widetilde{u}(n,\tau_2)\widetilde{\overline{w}}(-n,\tau_1)\widetilde{w}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&= R_7(n,\tau)+R_8(n,\tau)+R_9(n,\tau)+R_{10}(n,\tau)+R_{11}(n,\tau)+R_{12}(n,\tau).
\end{aligned}$$

Observação 1.3.5 *$\widetilde{F}_{13}(n,\tau)$ é análogo a $\widetilde{F}_{12}(n,\tau)$.*

Temos a seguinte expressão para $\widetilde{F_{14}}(n,\tau)$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{F_{14}}(n,\tau) = c_4(\alpha) & \sum_{(n_1,n_2)\in H_n^1} \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_1,\tau_1)\widetilde{\overline{u}}(n_2,\tau_2)\widetilde{u}(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
& + c_5(\alpha,\sigma_\alpha) \sum_{(n_1,n_2)\in H_n^1} \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n_1,\tau_1)\widetilde{\overline{w}}(n_2,\tau_2)\widetilde{w}(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
& + c_6(\alpha) \iint_{\mathbb{R}^2} \|\widetilde{u}(\tau_1)\|_{l_n^2}^2 \|\widetilde{u}(\tau_2)\|_{l_n^2}^2 \widetilde{u}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
& + c_7(\alpha,\sigma_\alpha) \iint_{\mathbb{R}^2} \|\widetilde{w}(\tau_1)\|_{l_n^2}^2 \|\widetilde{w}(\tau_2)\|_{l_n^2}^2 \widetilde{u}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
& + c_8(\alpha) \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{u}(n,\tau_1)\widetilde{\overline{u}}(-n,\tau_2)\widetilde{u}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
& c_9(\alpha) \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{w}(n,\tau_1)\widetilde{\overline{w}}(-n,\tau_2)\widetilde{u}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.
\end{aligned}$$

Lema 1.3.6 *Seja $\frac{q}{3}$ um número não inteiro e $0<\theta<\frac{1}{12}$. Para $s\geq\frac{1}{2}$ existe $c>0$ tal que*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widetilde{F_1(u,w)}(n,\tau)}{\langle q_+(n,\tau)\rangle}d\tau\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq cf(u,w), \tag{1.97}$$

$$\|F_1(u,w)\|_{(1,s,-\frac{1}{2})} \leq cf(u,w), \tag{1.98}$$

onde

$$\begin{aligned}
f(u,w) = & \left(\|u\|_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}^2 + \|w\|_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}^2\right)\|u\|_{(1,s,\frac{1}{2})} + \|u\|_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}\|w\|_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}\|u\|_{(1,s,\frac{1}{2})} \\
& + \left(\|u\|_{(2,\frac{1}{2},0)}^2 + \|w\|_{(2,\frac{1}{2},0)}^2\right)\|u\|_{(1,s,0)} + \|u\|_{(2,\frac{1}{2},0)}\|w\|_{(2,\frac{1}{2},0)}\|u\|_{(1,s,0)}\,.
\end{aligned} \tag{1.99}$$

Demonstração: Da desigualdade de Schwarz, o lado esquerdo de (1.97) é limitado por

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\widetilde{F_1(u,w)}(n,\tau)\right|^2}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{2(1-a)}}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{2a}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.100}$$

onde a será determinado mais adiante. Consideramos primeiro $\widetilde{F_1(u,w)}(n,\tau) = R_2(n,\tau)$. Neste caso, (1.100) é limitado por

$$\Bigg(\sum_n \sum_{(n_1,n_2)\in H_n^1} \Bigg(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle n\rangle^{2s} |n_1|^2}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{2(1-a)}} |\widetilde{u}(n_1,\tau_1)|^2 \left|\widetilde{\overline{w}}(n_2,\tau_2)\right|^2$$
$$\times |\widetilde{w}(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)|^2 \, d\tau_1 d\tau_2 d\tau\Bigg) I_a\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \Bigg(\sum_n \sum_{(n_1,n_2)\in H_n^1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle n\rangle^{2s} |n_1|^2}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{2(1-a)}} \frac{g(n_1,\tau_1)h(n_2,\tau_2)p(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle n-n_1-n_2\rangle^{2s}}$$
$$\times \frac{d\tau_1 d\tau_2 d\tau}{\langle q_+(n_1,\tau_1)\rangle^{1-2\theta}\langle q_-(n_2,\tau_2)\rangle^{1-2\theta}\langle q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2\rangle^{1-2\theta}} I_a\Bigg)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.101}$$

onde

$$I_a = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{2a}},$$
$$g(n_1,\tau_1) = \langle n_1\rangle^{2s}\langle q_+(n_1,\tau_1)\rangle^{1-2\theta} |\widetilde{u}(n_1,\tau_1)|^2,$$
$$h(n_2,\tau_2) = \langle n_2\rangle^{2s}\langle q_-(n_2,\tau_2)\rangle^{1-2\theta} \left|\widetilde{\overline{w}}(n_2,\tau_2)\right|^2$$

e

$$p(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2) = \langle n-n_1-n_2\rangle^{2s}\langle q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2\rangle^{1-2\theta}$$
$$\times |\widetilde{w}(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)|^2.$$

Para estimarmos (1.101) dividimos a região de integração em quatro regiões:

$$A_1 = \{(\tau_1,\tau_2,\tau) : |q_+(n,\tau)| \geq \max\{|q_+(n_1,\tau_1)|, |q_-(n_2,\tau_2)|, |q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)|\}\},$$

$$A_2 = \{(\tau_1,\tau_2,\tau) : |q_+(n_1,\tau_1)| \geq \max\{|q_+(n,\tau)|, |q_-(n_2,\tau_2)|, |q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)|\}\},$$

$$A_3 = \{(\tau_1,\tau_2,\tau) : |q_-(n_2,\tau_2)| \geq \max\{|q_+(n_1,\tau_1)|, |q_+(n,\tau)|, |q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)|\}\},$$

$$A_4 = \{(\tau_1,\tau_2,\tau) : |q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)| \geq \max\{|q_+(n_1,\tau_1)|, |q_-(n_2,\tau_2)|, |q_+(n,\tau)|\}\}.$$

Também consideramos o somatório em n_1 e n_2 de (1.101) nos três seguintes casos

$$M_1 \geq L \geq \frac{|n|}{5} > M_2, \tag{1.102}$$

$$M_1 \geq \frac{2|n|}{3} \geq \frac{|n|}{5} > L \geq M_2, \tag{1.103}$$

$$M_1 \geq L \geq M_2 \geq \frac{|n|}{5}. \tag{1.104}$$

No caso (1.102) e na região A_1, limitamos (1.101) por

$$\leq c\,\|p\|_{l^2_n L^2_\tau} \sup_{n,\tau}\left[(I_a)^{\frac{1}{2}} \frac{\langle n\rangle^s}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{(1-a)}} \left(\sum_{(n_1,n_2)\in H_n^1} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n_1|^2\, g(n_1,\tau_1)h(n_2,\tau_2)}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle n-n_1-n_2\rangle^{2s}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\langle q_+(n_1,\tau_1)\rangle^{1-2\theta}\langle q_-(n_2,\tau_2)\rangle^{1-2\theta}\langle q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2\rangle^{1-2\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq c\,\|g\|_{l^2_n L^2_\tau}\,\|h\|_{l^2_n L^2_\tau}\,\|p\|_{l^2_n L^2_\tau} \sup_{n,\tau}\left[\frac{\langle n\rangle^{s-2a+1}}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{(1-a)}} \left(\sum_{(n_1,n_2)\in A_{n,\tau}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|n_1|^2}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle n-n_1-n_2\rangle^{2s}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\langle q_+(n_1,\tau_1)\rangle^{1-2\theta}\langle q_-(n_2,\tau_2)\rangle^{1-2\theta}\langle q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2\rangle^{1-2\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq c\,\|u\|_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}\,\|w\|^2_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)} \sup_{n,\tau}\left[\frac{\langle n\rangle^{s-2a+1}}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{(1-a)}} \left(\sum_{(n_1,n_2)\in A_{n,\tau}} \frac{|n_1|^2}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle n-n_1-n_2\rangle^{2s}}\right.\right. \tag{1.105}$$

$$\left.\left.\times H_\theta(n,n_1,n_2)\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

onde

$$A_{n,\tau} = \left\{(n_1,n_2) : M_1 \geq L \geq \frac{|n|}{5} > M_2, n \neq n_1, n_1 \neq -n_2,\right.$$
$$\left. |q_+(n,\tau)| \geq |n_1+n_2|\,|n-n_1|\left|n-n_2-\frac{q}{3}\right|\right\},$$

$$H_\theta(n,n_1,n_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\langle q_+(n_1,\tau_1)\rangle^{1-2\theta}\langle q_-(n_2,\tau_2)\rangle^{1-2\theta}\langle q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2\rangle^{1-2\theta}}$$

Em (1.105) limitamos I_a por

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle n^2+q_+(n,\tau)\rangle^{2a} d\tau}{\langle n^2+q_+(n,\tau)\rangle^{2a}\langle q_+(n,\tau)\rangle^{2a}} &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c\langle q_+(n,\tau)\rangle^{2a} d\tau}{\langle n^2+q_+(n,\tau)\rangle^{2a}\langle q_+(n,\tau)\rangle^{2a}} \\
&\leq c\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\langle n^2+q_+(n,\tau)\rangle^{2a}} \\
&\leq c\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\langle n^2+q_+(n,\tau)\rangle^{a}\langle n^2+q_+(n,\tau)-n^2\rangle^{a}} \\
&\leq \frac{c}{\langle n\rangle^{4a-2}}, \text{ para } a > \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{1.106}$$

A primeira desigualdade em (1.106) segue do fato de que $|q_+(n,\tau)| \geq cn^2\langle M_2\rangle \geq cn^2$ e a última desigualdade é uma consequência imediata do lema 1.1.9.

Utilizando a identidade (1.91) e o lema 1.1.9, limitamos $H_\theta(n,n_1,n_2)$ por

$$\begin{aligned}
&c\int_{\mathbb{R}^2}\frac{d\tau_1}{\langle q_+(n_1,\tau_1)\rangle^{1-2\theta}\langle q_+(n_1,\tau_1)-\left[q_+(n,\tau)-3\left(n_1+n_2\right)\left(n-n_1\right)\left(n-n_2-\frac{q}{3}\right)\right]\rangle^{1-4\theta}}\\
&\leq\frac{c}{\langle q_+(n,\tau)-3\left(n_1+n_2\right)\left(n-n_1\right)\left(n-n_2-\frac{q}{3}\right)\rangle^{1-6\theta}} \qquad (1.107)\\
&\leq\frac{c}{\langle q_+(n,\tau)-3\left(n_1+n_2\right)\left(n-n_1\right)\left(n-n_2-\frac{q}{3}\right)\rangle^{1-\varepsilon}},
\end{aligned}$$

para $\theta\in\left(0,\frac{1}{12}\right)$, $\varepsilon\in\left(6\theta,\frac{1}{2}\right)$.

Assim, (1.105) é limitado por

$$\begin{aligned}
&c\sup_{n,\tau}\left[\frac{\langle n\rangle^{s-2a+1}}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{(1-a)}}\left(\sum_{(n_1,n_2)\in A_{n,\tau}}\frac{|n_1|^2}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle n-n_1-n_2\rangle^{2s}}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\times\frac{1}{\langle q_+(n,\tau)-3\left(n_1+n_2\right)\left(n-n_1\right)\left(n-n_2-\frac{q}{3}\right)\rangle^{1-\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\|u\|_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}\|w\|^2_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}\\
&=c\sup_{n,\tau}\left(I_1\right)^{\frac{1}{2}}\|u\|_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}\|w\|^2_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}\leq c\|u\|_{(1,s,\frac{1}{2})}\|w\|^2_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}, \qquad (1.108)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1=\frac{\langle n\rangle^{2s-4a+2}}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{2(1-a)}}&\left(\sum_{(n_1,n_2)\in A_{n,\tau}}\frac{|n_1|^2}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n_2\rangle^{2s}\langle n-n_1-n_2\rangle^{2s}}\right.\\
&\left.\times\frac{1}{\langle q_+(n,\tau)-3\left(n_1+n_2\right)\left(n-n_1\right)\left(n-n_2-\frac{q}{3}\right)\rangle^{1-\varepsilon}}\right).
\end{aligned}$$

A prova de $I_1\leq c$ encontra-se em [38], Lema 4.3.

Os casos (1.103) e (1.104) são análogos.

Vamos considerar agora a região de integração A_2. Para $a>\frac{1}{2}$ e $\widetilde{F_1(u,w)}(n,\tau)=R_2(n,\tau)$, podemos limitar (1.100) por

$$c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\frac{|R_2(n,\tau)|^2}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{2(1-a)}}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}=c\left\|\frac{\langle n\rangle^sR_2(n,\tau)}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{(1-a)}}\right\|_{l^2_nL^2_\tau}. \qquad (1.109)$$

Por dualidade, (1.109) é igual a

$$c\sup_{\|h(n,\tau)\|_{l^2_nL^2_\tau}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\langle n\rangle^sR_2(n,\tau)\overline{h(n,\tau)}}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{(1-a)}}d\tau\right|=c\sup_{\|h(n,\tau)\|_{l^2_nL^2_\tau}}\left|A\left(h\right)\right|. \qquad (1.110)$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
|A\,(h)| &= c\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\langle n\rangle^{s}R_2(n,\tau)\overline{h(n,\tau)}}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{(1-a)}}d\tau\right| \\
&= c\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{s}\int_{\mathbb{R}}\sum_{(n_1,n_2)\in H_n^1}\frac{n_1\overline{h(n,\tau)}}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{(1-a)}}\iint_{\mathbb{R}^2}\Big(\widetilde{u}(n_1,\tau_1)\widetilde{\overline{w}}(n_2,\tau_2)\right. \\
&\quad \times\widetilde{w}(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\Big)\,d\tau| \\
&\le c\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{s}\left(\int_{\mathbb{R}}\sum_{(n_1,n_2)\in H_n^1}\frac{|n_1|\left|\overline{h(n,\tau)}\right|}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{(1-a)}}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{g\,(n_1,\tau_1)\,p(n_2,\tau_2)}{\langle n_1\rangle^{s}\langle n_2\rangle^{s}\langle n-n_1-n_2\rangle^{s}}\right. \\
&\quad \left.\times\frac{r(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 d\tau}{\langle q_+(n_1,\tau_1)\rangle^{\frac{1}{2}}\langle q_-(n_2,\tau_2)\rangle^{\frac{1}{2}-\theta}\langle q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2\rangle^{\frac{1}{2}-\theta}}\right) \\
&\le c\sup_{n_1,\tau_1}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{s}\int_{\mathbb{R}}\sum_{n_2}\frac{|n_1|\left|\overline{h(n,\tau)}\right|}{\langle n_1\rangle^{s}\langle q_+(n_1,\tau_1)\rangle^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}}\frac{p(n_2,\tau_2)}{\langle n_2\rangle^{s}\langle n-n_1-n_2\rangle^{s}}\right. \\
&\quad \left.\times\frac{d\tau_2 d\tau}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{(1-a)}\langle q_-(n_2,\tau_2)\rangle^{\frac{1}{2}-\theta}\langle q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2\rangle^{\frac{1}{2}-\theta}}\right) \qquad (1.111) \\
&\quad \times\|g\|_{l^2_{n_1}L^2_{\tau_1}}\,\|r\|_{l^2_{n1}L^2_{\tau_1}}\,,
\end{aligned}
$$

onde

$$
g\,(n_1,\tau_1)=\langle n_1\rangle^{2s}\langle q_+(n_1,\tau_1)\rangle^{\frac{1}{2}}\left|\widetilde{u}(n_1,\tau_1)\right|,
$$

$$
p(n_2,\tau_2)=\langle n_2\rangle^{s}\langle q_-(n_2,\tau_2)\rangle^{\frac{1}{2}-\theta}\left|\widetilde{\overline{w}}(n_2,\tau_2)\right|
$$

e

$$
\begin{aligned}
r(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2) &= \langle n-n_1-n_2\rangle^{s}\langle q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2\rangle^{\frac{1}{2}-\theta} \\
&\quad \times\left|\widetilde{w}(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)\right|.
\end{aligned}
$$

Ainda podemos limitar (1.111) por

$$
\begin{aligned}
& c\sup_{n_1,\tau_1}\left(\frac{|n_1|}{\langle n_1\rangle^{s}\langle q_+(n_1,\tau_1)\rangle^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{(n,n_2)\in D_{n_1,\tau_1}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\langle n\rangle^{2s}}{\langle n_2\rangle^{2s}\langle n-n_1-n_2\rangle^{2s}}\right.\right. \\
& \left.\left.\times\frac{d\tau_2 d\tau}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{2(1-a)}\langle q_-(n_2,\tau_2)\rangle^{1-2\theta}\langle q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2\rangle^{1-2\theta}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
& \times\|g\|_{l^2_{n_1}L^2_{\tau_1}}\,\|r\|_{l^2_{n1}L^2_{\tau_1}}\,\|p\|_{l^2_{n_2}L^2_{\tau_2}}\,\left\|\overline{h}\right\|_{l^2_{n}L^2_{\tau}}, \qquad (1.112)
\end{aligned}
$$

onde

$$\begin{aligned} D_{n_1,\tau_1} = \{ & (n,n_2) : n \neq n_1, n_1 \neq -n_2, \\ & |q_+(n_1,\tau_1)| \geq |n_1+n_2|\,|n-n_1| \left| n - n_2 - \frac{q}{3} \right| \}. \end{aligned}$$

Segue de (1.109)-(1.112) que (1.100) é limitado por

$$\begin{aligned} & c \sup_{n_1,\tau_1} \left(\frac{|n_1|}{\langle n_1\rangle^s \langle q_+(n_1,\tau_1)\rangle^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{(n,n_2)\in D_{n_1,\tau_1}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle n\rangle^{2s}}{\langle n_2\rangle^{2s}\langle n-n_1-n_2\rangle^{2s}} \right.\right. \\ & \left.\left. \times \frac{d\tau_2 d\tau}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{2(1-a)} \langle q_-(n_2,\tau_2)\rangle^{1-2\theta} \langle q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)\rangle^{1-2\theta}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ & \times c \left\| u \right\|_{(1,s,\frac{1}{2})} \left\| w \right\|^2_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)} \\ & = c \sup_{n_1,\tau_1} (I_2)^{\frac{1}{2}} \left\| u \right\|_{(1,s,\frac{1}{2})} \left\| w \right\|^2_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)} \leq c \left\| u \right\|_{(1,s,\frac{1}{2})} \left\| w \right\|^2_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{|n_1|^2}{\langle n_1\rangle^{2s} \langle q_+(n_1,\tau_1)\rangle^{1}} \left(\sum_{(n,n_2)\in D_{n_1,\tau_1}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle n\rangle^{2s}}{\langle n_2\rangle^{2s}\langle n-n_1-n_2\rangle^{2s}} \right. \\ & \left. \times \frac{d\tau_2 d\tau}{\langle q_+(n,\tau)\rangle^{2(1-a)} \langle q_-(n_2,\tau_2)\rangle^{1-2\theta} \langle q_+(n-n_1-n_2,\tau-\tau_1-\tau_2)\rangle^{1-2\theta}} \right). \end{aligned}$$

A prova de $I_2 \leq c$ encontra-se em [38], Lema 4.3.

O caso $\widetilde{F_1(u,w)}(n,\tau) = R_1(n,\tau)$ é idêntico a $R_2(n,\tau)$, para $w = u$.

Consideramos agora $\widetilde{F_1(u,w)}(n,\tau) = R_4(n,\tau)$. Neste caso, (1.100) é limitado por

$$\begin{aligned} & c \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \iint_{\mathbb{R}^2} |n_1|\, |\widetilde{u}(n_1,\tau_1)| \left| \widetilde{\overline{w}}(-n_1,\tau_2) \right| |\widetilde{w}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)|\, d\tau_1 d\tau_2 \right)^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \leq c \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s} \left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} |n_1|\, |\widetilde{u}(n_1,\tau_1)| \left| \widetilde{\overline{w}}(-n_1,\tau_2) \right| \right.\right.\right.\right. \qquad (1.113) \\ & \left.\left.\left.\left. \times |\widetilde{w}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)|\, d\tau_1 d\tau_2 \right)^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Este resultado é uma conseqüência da desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^k} \left| \sum f(n,\tau) \right|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum \left(\int_{\mathbb{R}^k} |f(n,\tau)|^p\, d\tau \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } p \geq 1, \qquad (1.114)$$

encontrada em [9], página 265. Usando a desigualdade de Minkowski para integrais, (1.113) é limitado por

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\left|\widetilde{w}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\iint_{\mathbb{R}^2}|n_1|\left|\widetilde{u}(n_1,\tau_1)\right|\left|\widetilde{\widetilde{w}}(-n_1,\tau_2)\right| d\tau_1 d\tau_2\right)\\
&\leq c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\left|\widetilde{w}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\left[\int_{\mathbb{R}}\langle n_1\rangle^{\frac{1}{2}}\left|\widetilde{u}(n_1,\tau_1)\right| d\tau_1\right]\right.\\
&\left.\times\left[\int_{\mathbb{R}}\langle n_1\rangle^{\frac{1}{2}}\left|\widetilde{\widetilde{w}}(-n_1,\tau_2)\right| d\tau_2\right]\right)\\
&\leq c\left\|\langle n\rangle^{s}\widetilde{w}(n,\tau)\right\|_{l_n^2L_\tau^2}\left\|\langle n_1\rangle^{\frac{1}{2}}\widetilde{u}(n_1,\tau)\right\|_{l_{n_1}^2L_\tau^1}\left\|\langle n_1\rangle^{\frac{1}{2}}\widetilde{w}(n_1,\tau)\right\|_{l_{n_1}^2L_\tau^1}\\
&= c\left\|w\right\|_{(1,s,0)}\left\|u\right\|_{(2,\frac{1}{2})}\left\|w\right\|_{(2,\frac{1}{2})}.
\end{aligned}
$$

O caso $\widetilde{F_1(u,w)}(n,\tau)=R_3(n,\tau)$ é idêntico a $R_4(n,\tau)$, para $w=u$.

Para $\widetilde{F_1(u,w)}(n,\tau)=R_6(n,\tau)$ podemos limitar (1.100) por

$$
\begin{aligned}
&c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\left(\iint_{\mathbb{R}^2}|n|\left|\widetilde{u}(n,\tau_1)\right|\left|\widetilde{\widetilde{w}}(-n,\tau_2)\right|\left|\widetilde{w}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)\right| d\tau_1 d\tau_2\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\left[\iint_{\mathbb{R}^2}|n|\left|\widetilde{u}(n,\tau_1)\right|\left|\widetilde{\widetilde{w}}(-n,\tau_2)\right|\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widetilde{w}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} d\tau_1 d\tau_2\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\iint_{\mathbb{R}^2}|n|\left|\widetilde{u}(n,\tau_1)\right|\left|\widetilde{\widetilde{w}}(-n,\tau_2)\right| d\tau_1 d\tau_2\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\times\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\left|\widetilde{w}(n,\tau-\tau_1-\tau_2)\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq c\left\|\langle n\rangle^{s}\widetilde{w}(n,\tau)\right\|_{l_n^2L_\tau^2}\left\|\langle n\rangle^{\frac{1}{2}}\widetilde{u}(n,\tau_1)\right\|_{l_n^2L_{\tau_1}^1}\left\|\langle n\rangle^{\frac{1}{2}}\widetilde{w}(n,\tau_2)\right\|_{l_n^2L_{\tau_2}^1}\\
&= c\left\|w\right\|_{(1,s,0)}\left\|u\right\|_{(2,\frac{1}{2},0)}\left\|w\right\|_{(2,\frac{1}{2},0)}.
\end{aligned}
$$

Os casos $\widetilde{F_1(u,w)}(n,\tau)=R_i(n,\tau)$, $i=7,...,12$ seguem de forma análoga aos anteriores. Observamos também que as estimativas para $\widetilde{F_1(u,w)}(n,\tau)=\widetilde{F_{14}}(n,\tau)$ seguirão como consequência imediata dos casos anteriores.

A prova de (1.98) segue da mesma forma de (1.97), tomando $a=\frac{1}{2}$ e desconsiderando I_a, pois

$$\|F_1(u,w)\|_{(1,s,-\frac{1}{2})}=\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\widetilde{F_1(u,w)}(n,\tau)\right|^2}{\langle q_+(n,\tau)\rangle}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

Lema 1.3.7 *Para $s\in\mathbb{R}$, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, $T\in(0,1)$ e $0<\theta'<\theta<\frac{1}{2}$, valem as seguintes desigualdades*

$$\|\psi_T(t)f\|_{(1,s,\frac{1}{2})}\leq c(\varepsilon)T^{-\varepsilon}\|f\|_{(1,s,\frac{1}{2})},$$
$$\|\psi_T(t)f\|_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}\leq cT^{\theta-\theta'}\|f\|_{(1,s,\frac{1}{2})},$$
$$\|\psi_T(t)f\|_{(2,s,0)}\leq c\|f\|_{(2,s,0)}.$$

A demonstração deste lema encontra-se em [38], Lema 4.6.

Apresentamos agora a demonstração do teorema principal desta seção.

Demonstração: (**Teorema 1.3.2**) Seja $s\geq\frac{1}{2}$.

1. *Existência.* Para $T\in(0,1)$, definimos

$$\mathfrak{B}(r)=\left\{\overrightarrow{v}\in Y_s\times Y_s:\quad\|\overrightarrow{v}\|_{Y_s\times Y_s}\leq r\right\},$$

$$\Phi(\overrightarrow{u})=\Psi(t)W_1(t)\overrightarrow{u}_0-\Psi(t)\int_0^t W_1(t-t')G_1(\Psi_T(t')\overrightarrow{u}(t'))dt' \tag{1.115}$$
$$=\begin{pmatrix}\psi(t)S(t)u_0-\psi(t)\int_0^t S(t-t')F_1(\psi_Tu,\psi_Tw)(t')dt'\\ \psi(t)S(t)w_0-\psi(t)\int_0^t S(t-t')F_1(\psi_Tw,\psi_Tu)(t')dt'\end{pmatrix}$$

Mostraremos que existe $r>0$ e $T>0$ (dependendo apenas de $\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s\times H^s}$) tal que se $\overrightarrow{u}\in\mathfrak{B}(r)$ então $\Phi(\overrightarrow{u})\in\mathfrak{B}(r)$ e $\Phi:\mathfrak{B}(r)\longrightarrow\mathfrak{B}(r)$ é uma contração. Dos lemas 1.3.3, 1.3.5 e 1.3.6 segue que

$$\begin{aligned}\|\Phi(\overrightarrow{u})\|_{Y_s\times Y_s}&\leq c\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s\times H^s}+f(\psi_Tu,\psi_Tw)\\
&\leq c\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s\times H^s}+c\left(\|\psi_Tu\|^2_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}+\|\psi_Tw\|^2_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}\right)\|\psi_Tu\|_{(1,s,\frac{1}{2})}\\
&+c\|\psi_Tu\|_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}\|\psi_Tw\|_{(1,s,\frac{1}{2}-\theta)}\|\psi_Tu\|_{(1,s,\frac{1}{2})}\\
&+c\left(\|\psi_Tu\|^2_{(2,\frac{1}{2},0)}+\|\psi_Tw\|^2_{(2,\frac{1}{2},0)}\right)\|\psi_Tu\|_{(1,s,0)}\\
&+c\|\psi_Tu\|_{(2,\frac{1}{2},0)}\|\psi_Tw\|_{(2,\frac{1}{2},0)}\|\psi_Tu\|_{(1,s,0)}\\
&\leq c\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s\times H^s}+cT^{\theta-\theta\prime+\varepsilon}\|\overrightarrow{u}\|^3_{Y_s\times Y_s}\leq c\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s\times H^s}+cT^{\theta-\theta\prime+\varepsilon}r^3,\end{aligned}$$

para $\overrightarrow{u} \in \mathfrak{B}(r)$ e $0 < \theta\prime - \varepsilon < \theta < \frac{1}{12}$. Analogamente, para $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathfrak{B}(r)$ temos que

$$\|\Phi(\overrightarrow{u}) - \Phi(\overrightarrow{v})\|_{Y_s \times Y_s} \leq cT^{\theta - \theta\prime + \varepsilon} r^2 \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|_{Y_s \times Y_s}. \tag{1.116}$$

Para que $\|\Phi(\overrightarrow{u})\|_{Y_s \times Y_s} \leq r$ e Φ seja uma contração, escolhemos $\frac{r}{2} = c\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s}$ e T suficientemente pequeno, tal que $cT^{\theta - \theta\prime + \varepsilon} r^3 \leq \frac{r}{2}$.

Portanto, para $\overrightarrow{u}_0 \in H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$ obtemos uma única solução $\overrightarrow{u} \in \mathfrak{B}(r) \subset Y_s \times Y_s$ da equação

$$\overrightarrow{u} = W_1(t)\overrightarrow{u}_0 - \int_0^t W_1(t - t')G_1(\Psi_T(t')\overrightarrow{u}(t'))dt' \tag{1.117}$$

para $t \in [-T, T]$, pelo princípio de contração.

2. *Unicidade*. Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1 \in Y_s \times Y_s$, com $\overrightarrow{u}_1(0) = \overrightarrow{u}_0$ duas soluções de (1.117) para $t \in [0, T]$. Suponhamos que

$$T' := \sup\{t \in [0, T]; \overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{u}_1(t)\} < T.$$

Fixemos $\widetilde{\overrightarrow{u}}$ e $\widetilde{\overrightarrow{u}}_1$ extensões de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{u}_1$, respectivamente, tais que

$$\overrightarrow{v}(t) = \widetilde{\overrightarrow{u}}(t + T') \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v}_1(t) = \widetilde{\overrightarrow{u}}_1(t + T').$$

Para $-T' \leq t \leq T - T'$, temos

$$\overrightarrow{v}(t) - \overrightarrow{v}_1(t) = \int_0^t W_1(t - t')\left[G_1(\Psi_T(t')\overrightarrow{v}_1(t')) - G_1(\Psi_T(t')\overrightarrow{v}(t'))\right] dt'.$$

Repetindo o mesmo argumento de (1.116) com $|t| \leq \delta$ e δ suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Psi_\delta(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1)\|_{Y_s \times Y_s} &\leq c\delta^{\theta - \theta\prime + \varepsilon} r^2 \|\Psi_\delta(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})\|_{Y_s \times Y_s} \\ &\leq \frac{1}{2}\|\Psi_\delta(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})\|_{Y_s \times Y_s}. \end{aligned} \tag{1.118}$$

Segue de (1.118) que $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v}_1(t)$, para $|t| \leq \delta$, o que contradiz com a definição de T'.

3. *Dependência contínua*. Sejam $\overrightarrow{u}_0, \overrightarrow{v}_0 \in H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$, com $\frac{r}{2} = \|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s}$ e $\|\overrightarrow{v}_0 - \overrightarrow{u}_0\|_{H^s} < \epsilon$. Escolhendo $\epsilon < \frac{1}{2}\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s}$, obtemos $\|\overrightarrow{u}\|_{Y_s \times Y_s}$, $\|\overrightarrow{v}\|_{Y_s \times Y_s} \leq r$. Além disso,

$$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|_{Y_s \times Y_s} \leq c\|\overrightarrow{v}_0 - \overrightarrow{u}_0\|_{H^s} + cT'^{(\theta - \theta\prime + \varepsilon)} r^2 \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|_{Y_s \times Y_s},$$

para $T' \in (0,T)$ e T suficientemente pequeno obtido na prova de existência. Portanto,

$$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|_{Y_s \times Y_s} \leq 2c \, \|\overrightarrow{v}_0 - \overrightarrow{u}_0\|_{H^s}.$$

Como $Y_s \subset C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{T}))$, segue que

$$\sup_{t \in [-T',T']} \|\Psi_{T'}(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1)\|_{H^s} \leq \|\Psi_{T'}(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1)\|_{Y_s \times Y_s} \leq 2c \, \|\overrightarrow{v}_0 - \overrightarrow{u}_0\|_{H^s}.$$

■

Capítulo 2

Teoria Global

2.1 Boa colocação global para $s = 1$

Nesta seção mostraremos que o problema de Cauchy (1.1) no caso $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = 1$

$$\begin{cases} 2i\partial_t u + q\partial_x^2 u + i\gamma\partial_x^3 u + 2i\beta(|u|^2 + |w|^2)\partial_x u + 2i\mu u\partial_x(|u|^2 + |w|^2) \\ +2\alpha u(|u|^2 + |w|^2) = 0 \\ 2i\partial_t w + q\partial_x^2 w + i\gamma\partial_x^3 w + 2i\beta(|u|^2 + |w|^2)\partial_x w + 2i\mu w\partial_x(|u|^2 + |w|^2) \\ +2\alpha w(|w|^2 + |u|^2) = 0. \\ u(x,0) = u_0 \in H^1(\Omega) \text{ e } w(x,0) = w_0 \in H^1(\Omega) \ . \end{cases} \tag{2.1}$$

é globalmente bem posto no espaço $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, com $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}$.

As expressões definidas abaixo e o lema seguinte são o primeiro passo para a obtenção das leis de conservação no lema 2.1.2.

Defina

$$H_0(u,w) = 2\mu \operatorname{Im}\left(\int_\Omega ((u\overline{u}_x)^2 + (w\overline{w}_x)^2)dx\right) + 4\mu \operatorname{Im}\left(\int_\Omega (u\overline{u}_x w\overline{w}_x)dx\right),$$

$$\begin{aligned} H_1(u,w) = (\beta + 2\mu)&\int_\Omega \left[|u_x|^2 \partial_x(|u|^2) + |w_x|^2 \partial_x\left(|w|^2\right)\right] dx \\ &+ (\beta + 2\mu)\int_\Omega \left[|u_x|^2 \partial_x(|w|^2)\right] dx \\ &+ (\beta + 2\mu)\int \left[|w_x|^2 \partial_x\left(|u|^2\right)\right] dx + 4\alpha \operatorname{Im}\left(\int_\Omega (u\overline{u}_x w\overline{w}_x)dx\right) \\ &+ 2\alpha \operatorname{Im}\left(\int_\Omega ((u\overline{u}_x)^2 + (w\overline{w}_x)^2)dx\right), \end{aligned}$$

$$H_2(u,v) = \left(-\frac{1}{2}\beta + 2\mu\right)\int_\Omega \left(\partial_x\left(|u|^2\right)|w|^4 + \partial_x\left(|w|^2\right)|u|^4\right)dx$$
$$+ q\,\mathrm{Im}\int_\Omega ((u\overline{u}_x)^2 + (w\overline{w}_x)^2)dx$$
$$+ \frac{3}{2}\gamma\int_\Omega \left[|u_x|^2\,\partial_x(|u|^2) + |w_x|^2\,\partial_x\left(|w|^2\right)\right]dx\ ,$$

$$H_3(u,w) = \left(\frac{1}{2}\beta - 2\mu\right)\int_\Omega \left(\partial_x\left(|u|^2\right)|w|^4 + \partial_x\left(|w|^2\right)|u|^4\right)dx + 2q\,\mathrm{Im}\left(\int_\Omega (u\overline{u}_x w\overline{w}_x)dx\right)$$
$$+ \frac{3}{2}\gamma\int_\Omega \left[|u_x|^2\,\partial_x(|w|^2) + |w_x|^2\,\partial_x\left(|u|^2\right)\right]dx.$$

Temos o seguinte lema.

Lema 2.1.1 *Seja $\overrightarrow{u}_0 = (u_0, w_0) \in H^{s\prime}(\Omega)\times H^{s\prime}(\Omega)$, $s\prime$ suficientemente grande e $\overrightarrow{u} \in C([-T,T]; H^{s\prime}(\Omega)\times H^{s\prime}(\Omega))$ solução de (2.1) . Então*

$$i\partial_t\left(\int_\Omega (u\overline{u}_x + w\overline{w}_x)dx\right) = H_0(u,w), \tag{2.2}$$

$$\partial_t\left(\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_x\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = -H_1(u,w), \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{2}\partial_t\left(\|u_x\|^4_{L^4(\Omega)} + \|w_x\|^4_{L^4(\Omega)}\right) = -H_2(u,w), \tag{2.4}$$

$$\partial_t\int_\Omega |u|^2\,|w|^2\,dx = -H_3(u,w). \tag{2.5}$$

Demonstração: Multiplicando a primeira equação de (2.1) por $\overline{u}_x$, a segunda equação de (2.1) por $\overline{w}_x$, integrando em relação à variável x e tomando a parte real, obtemos

$$\mathrm{Re}\left(2i\int_\Omega u_t\overline{u}_x dx\right) = i\int_\Omega (u_t\overline{u}_x - \overline{u}_t u_x)dx = i\partial_t\left(\int_\Omega u\overline{u}_x dx\right),$$

$$\mathrm{Re}\left(2i\mu\int_\Omega u\partial_x(|u|^2)\overline{u}_x dx\right) = -\mathrm{Im}\left(2\mu\int_\Omega u\partial_x(|u|^2)\overline{u}_x dx\right)$$
$$= -2\mu\,\mathrm{Im}\left(\int_\Omega u\overline{u}_x(\overline{u}u_x + u\overline{u}_x\right)$$
$$= -2\mu\,\mathrm{Im}\left(\int_\Omega (u\overline{u}_x)^2\,dx\right),$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(2i\mu\int_\Omega u\partial_x(|w|^2)\overline{u}_x dx\right) + \operatorname{Re}\left(2i\mu\int_\Omega w\partial_x(|u|^2)\overline{w}_x dx\right)\\
&= -4\mu \operatorname{Im}\left(\int_\Omega (u\overline{u}_x w\overline{w}_x) dx\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(2\alpha\int_\Omega u(|u|^2+|w|^2)\overline{u}_x\right) + \operatorname{Re}\left(2\alpha\int_\Omega w(|u|^2+|w|^2)\overline{w}_x\right)\\
&= 2\alpha \operatorname{Re}\left(\int_\Omega u\,|w|^2\,\overline{u}_x\right) + 2\alpha \operatorname{Re}\left(\int_\Omega w\,|u|^2\,\overline{w}_x\right)\\
&= -\alpha\int_\Omega \partial_x(|w|^2)\,|u|^2\,dx \ + \alpha\int_\Omega \partial_x(|w|^2)\,|u|^2\,dx = 0\ .
\end{aligned}$$

A igualdade (2.2) é obtida somando as equações resultantes.

Para obter (2.3) multiplicamos a primeira equação de (2.1) por $\overline{u}_{xx}$, a segunda equação de (2.1) por $\overline{w}_{xx}$, integramos em relação à variável x , tomamos a parte imaginária e somamos as equações resultantes. De fato,

$$\operatorname{Im}\left(2i\int_\Omega (u_t\overline{u}_{xx})dx\right) = 2\operatorname{Re}\left(\int_\Omega (u_t\overline{u}_{xx})dx\right) = -\partial_t\left(\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

$$\operatorname{Im}\left(2i\beta\int_\Omega \left[(|u|^2+|w|^2)u_x\overline{u}_{xx}\right]dx\right) = -\beta\int_\Omega \left[|u_x|^2\,\partial_x(|u|^2) + |u_x|^2\,\partial_x\left(|w|^2\right)\right]dx\ ,$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(2i\mu\int_\Omega \left[u\partial_x(|u|^2)\overline{u}_{xx}\right]dx\right) &= -2\mu\operatorname{Re}\left(\int_\Omega \left[u_x\partial_x(|u|^2)\overline{u}_x + u\partial_x^2(|u|^2)\overline{u}_x\right]dx\right)\\
&= -2\mu\left(|u_x|^2\,\partial_x(|u|^2)\right)\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\left(2i\mu\int_\Omega \left[u\partial_x(|w|^2)\overline{u}_{xx}\right]dx\right) + \operatorname{Im}\left(2i\mu\int_\Omega \left[w\partial_x(|u|^2)\overline{w}_{xx}\right]dx\right)\\
&= -2\mu\int_\Omega \left[|u_x|^2\,\partial_x(|w|^2) + |w_x|^2\,\partial_x\left(|u|^2\right)\right]dx\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(2\alpha\int_\Omega \left[u\,|u|^2\,\overline{u}_{xx}\right]dx\right) &= -2\alpha\operatorname{Im}\left(\int_\Omega |u_x|^2\,|u|^2 + \partial_x(|u|^2)u\overline{u}_x\right)\\
&= -2\alpha\int_\Omega (u\overline{u}_x)^2\,dx\ .
\end{aligned}$$

A igualdade (2.4) é obtida multiplicando a primeira equação de (2.1) por $|u|^2\,\overline{u}$, a segunda equação de (2.1) por $|w|^2\,\overline{w}$, integrando em relação à variável x, tomando a parte imaginária e somando as duas equações resultantes.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(2i\int_\Omega (u_t\,|u|^2\,\overline{u})dx\right) &= 2\operatorname{Re}\left(\int_\Omega (u_t\,|u|^2\,\overline{u})dx\right)\\
&= \left(\int_\Omega |u|^2\,(u_t\overline{u}+\overline{u_t}u)dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\partial_t\int_\Omega |u|^4\,dx\ ,
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}\left(q\int_\Omega (u_{xx}\,|u|^2\,\overline{u})dx\right) = -q\operatorname{Im}\int_\Omega (u\overline{u}_x)^2\,dx\ ,$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(i\gamma\int_\Omega (u_{xxx}\,|u|^2\,\overline{u})dx\right) &= -\gamma\operatorname{Re}\left(\int_\Omega (u_{xx}\partial_x(|u|^2)\overline{u}+u_{xx}\,|u|^2\,\overline{u}_x)dx\right)\\
&= \gamma\int_\Omega |u_x|^2\,\partial_x(|u|^2)dx+\frac{\gamma}{2}\int_\Omega |u_x|^2\,\partial_x(|u|^2)dx\\
&= \frac{3\gamma}{2}\int_\Omega |u_x|^2\,\partial_x(|u|^2)dx\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(2i\beta\int_\Omega \left[(|u|^2+|w|^2)u_x\,|u|^2\,\overline{u}\right]dx\right) &= \operatorname{Im}\left(2i\beta\int_\Omega |w|^2\,u_x\,|u|^2\,\overline{u}\right)\\
&= -\frac{\beta}{2}\int_\Omega \partial_x(|w|^2)\,|u|^4\,dx\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(2i\mu\int_\Omega\int u\partial_x(|u|^2+|w|^2)\,|u|^2\,\overline{u}dx\right) &= \operatorname{Im}\left(2i\mu\int_\Omega u\partial_x(|w|^2)\,|u|^2\,\overline{u}dx\right)\\
&= 2\mu\operatorname{Re}\left(\int_\Omega\int |u|^4\,\partial_x(|w|^2)dx\right)\\
&= 2\mu\int_\Omega |u|^4\,\partial_x(|w|^2)dx\ .
\end{aligned}$$

De forma similar, obtemos (2.5) multiplicando a primeira equação de (2.1) por $|w|^2\,\overline{u}$, a segunda equação de (2.1) por $|u|^2\,\overline{w}$, integrando em relação a x, tomando a parte imaginária e somando as equações resultantes. De fato,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(2i\int_\Omega (u_t\,|w|^2\,\overline{u})dx\right) &= 2\operatorname{Re}\left(\int_\Omega (u_t\,|w|^2\,\overline{u})dx\right)\\
&= \int_\Omega |w|^2\,(u_t\overline{u}+\overline{u_t}u)dx\\
&= \int_\Omega |w|^2\,\partial_t(|u|^2)dx\ ,
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}\left(2i\beta\int_\Omega \left[|u|^2 u_x |w|^2 \overline{u}\right] dx\right) = 2\beta \operatorname{Re}\left(\int_\Omega \left[|u|^2 |w|^2 \overline{u} u_x\right] dx\right)$$
$$= -\frac{\beta}{2}\int_\Omega |u|^4 \partial_x(|v|^2) dx \ ,$$

$$\operatorname{Im}\left(2i\beta\int_\Omega \left[|w|^2 u_x |w|^2 \overline{u}\right] dx\right) = 2\beta \operatorname{Re}\int_\Omega \left[|w|^4 u_x \overline{u}\right] dx$$
$$= \beta\int_\Omega |w|^4 \partial_x(|u|^2) dx \ ,$$

$$\operatorname{Im}\left(2i\mu\int_\Omega u\partial_x(|u|^2 + |w|^2)\,|w|^2\,\overline{u} dx\right) = 2\mu \operatorname{Re}\left(\int_\Omega \partial_x(|u|^2 + |w|^2)\,|w|^2\,|u|^2\, dx\right)$$
$$= -\mu\int_\Omega |u|^4 \partial_x(|w|^2) dx - \mu\int_\Omega |w|^4 \partial_x(|w|^2) dx \ ,$$

$$\operatorname{Im}\left(q\int_\Omega u_{xx}\,|w|^2\,\overline{u} dx\right) + \operatorname{Im}\left(q\int_\Omega w_{xx}\,|u|^2\,\overline{w} dx\right) = -q\operatorname{Im}\left(\int_\Omega \partial_x(|w|^2) u_x \overline{u} dx\right)$$
$$- q\operatorname{Im}\left(\int_\Omega \partial_x(|u|^2) w_x \overline{w} dx\right)$$
$$= 2q\operatorname{Im}\left(\int_\Omega (u\overline{u}_x w\overline{w}_x) dx\right),$$

$$\operatorname{Im}\left(i\gamma\int_\Omega u_{xxx}\,|w|^2\,\overline{u} dx\right) = -\gamma \operatorname{Re}\left(\int_\Omega u_{xx}[\partial_x(|w|^2)\overline{u} + |w|^2\,\overline{u}_x] dx\right)$$
$$= \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \partial_x^2(|w|^2)\partial_x(|u|^2) dx + \frac{3\gamma}{2}\int_\Omega \partial_x(|w|^2)\,|u_x|^2\, dx \ .$$

■

Lema 2.1.2 *Seja* $\overrightarrow{u}_0 \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ *e* $\overrightarrow{u} \in C([-T,T]; H^1(\Omega)\times H^1(\Omega))$ *solução de (2.1) . Então temos as seguintes leis de conservação*

$$I_1(u,w) = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w\|^2_{L^2(\Omega)} = I_1(u_0,w_0), \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} I_2(u,v) &= i\left(-3\gamma\alpha + \beta q + 2\mu q\right)\int_\Omega (u\overline{u}_x + w\overline{w}_x) dx + \frac{3}{2}\gamma\left(\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_x\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &+ \frac{1}{2}(\beta + 2\mu)\left(\|u\|^4_{L^4(\Omega)} + \|w\|^4_{L^4(\Omega)}\right) + (\beta + 2\mu)\int |u|^2\,|w|^2\, dx \\ &= I_2(u_0,w_0) \ . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Demonstração: Obtemos (2.6) multiplicando a primeira equação de (2.1) por $\overline{u}$, a segunda equação de (2.1) por $\overline{w}$, integrando em relação a x, tomando a parte imaginária e somando as equações resultantes. De fato,

$$\operatorname{Im}\left(2i\int_{\Omega}(u_t\overline{u})dx\right) = 2\operatorname{Re}\left(\int_{\Omega}(u_t\overline{u})dx\right) = \partial_t\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(2i\beta\int_{\Omega}\left[(|u|^2+|w|^2)u_x\overline{u}\right]dx\right) &= 2\beta\operatorname{Re}\left(\int_{\Omega}\left[(|u|^2+|w|^2)u_x\overline{u}\right]dx\right)\\ &= \beta\left(\int_{\Omega}(|u|^2+|w|^2)(u_x\overline{u}+\overline{u}_x u)dx\right)\\ &= \beta\left(\int_{\Omega}(|u|^2+|w|^2)\partial_x\left(|u|^2\right)dx\right)\\ &= \beta\left(\int_{\Omega}(|w|^2)\partial_x\left(|u|^2\right)dx\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(2i\mu\int_{\Omega}\overline{u}u\partial_x(|u|^2+|w|^2)\right) &= 2\mu\operatorname{Re}\left(\int_{\Omega}|u|^2\,\partial_x(|u|^2+|w|^2)\right)\\ &= 2\mu\left(\int_{\Omega}|u|^2\,\partial_x(|w|^2)\right).\end{aligned}$$

Da seguinte combinação linear das equações (2.2)-(2.5) obtemos (2.7)

$$\left(\frac{-3\gamma\alpha+(\beta+2\mu)q}{2\mu}\right)(2.2)+\frac{3\gamma}{2}(2.3)+(\beta+2\mu)\,(2.4)+(\beta+2\mu)\,(2.5).$$

A princípio, estas leis de conservação e outras identidades formais da equação diferencial seriam válidas somente para soluções clássicas. No entanto, por causa da propriedade de dependência contínua, as soluções no sentido fraco podem ser aproximadas por soluções clássicas na topologia de $C([-T,T];H^{s'}(\Omega)\times H^{s'}(\Omega))$, com s' suficientemente grande. Com isso, as leis de conservação (2.6) e (2.7) são válidas para as soluções encontradas para a equação integral. ■

Combinando o resultado de boa colocação local (Teorema 1.2.1) com as leis de conservação para o sistema (2.1) segue o seguinte resultado de boa colocação global.

Teorema 2.1.3 *Seja $\overrightarrow{u}_0 = (u_0,w_0) \in H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$. Então existe uma única solução $\overrightarrow{u}=(u,w)$ do problema (2.1) tal que*

$$(u,w)\in C(\mathbb{R};H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})).$$

Demonstração: Seja $\overrightarrow{u}_0 = (u_0, w_0) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$. Defina $T^\star = T^\star\left(\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^1}\right)$ por

$$T^\star = \sup\left\{T > 0 : \exists! \text{ solução de (2.1) em } Y_T\right\},$$

onde

$$Y_T = \left\{\overrightarrow{v} \in C([0,T]\,; H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R}))/\ |||\overrightarrow{v}|||_1 = \max_{j=1,\dots,6}\mu_j^T(\overrightarrow{v}) < \infty\right\}.$$

Seja $\overrightarrow{u}(t) = (u(t), w(t))$ a solução local da equação integral associada a (2.1) no intervalo maximal $[0, T^\star]$. Vamos supor $T^\star < \infty$ e obter uma contradição. Da lei de conservação (2.7) temos que

$$\begin{aligned}
\|u_x\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2 &= -\frac{2}{3\gamma}I_2(u,w) + 2i\frac{(-3\gamma\alpha + \beta q + 2\mu q)}{3\gamma}\int_{\mathbb{R}}(u\overline{u}_x + w\overline{w}_x)dx \\
&\quad + \frac{(\beta + 2\mu)}{3\gamma}\left(\|u\|_{L^4}^4 + \|w\|_{L^4}^4\right) + \frac{2\,(\beta+2\mu)}{3\gamma}\int_{\mathbb{R}}|u|^2\,|w|^2\,dx \\
&\leq c\left(|I_2(u,w)| + \left|\int_{\mathbb{R}}(u\overline{u}_x + w\overline{w}_x)dx\right| + \|u\|_{L^4}^4 + \|w\|_{L^4}^4 + \int_{\mathbb{R}}|u|^2\,|w|^2\,dx\right) \\
&\leq c\left(|I_2(u_0,w_0)| + \|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2} + \|w\|_{L^2}\|w_x\|_{L^2} + \|u\|_{L^4}^4 + \|w\|_{L^4}^4\right) \\
&\quad + c\left(\|u\|_{L^4}^2\,\|w\|_{L^4}^2\right) \\
&\leq c\,|I_2(u_0,w_0)| + \frac{1}{2}c^2\,\|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\,\|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}c^2\,\|w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\,\|w_x\|_{L^2}^2 \\
&\quad + c(\|u\|_{L^4}^4 + \|w\|_{L^4}^4) + \frac{c}{2}(\|u\|_{L^4}^4 + \|w\|_{L^4}^4)\ ,
\end{aligned}$$

onde $c = c(\alpha, \beta, \gamma, q, \mu)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|u_x\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2 &\leq 2c\,|I_2(u_0,w_0)| + c^2\,\|u\|_{L^2}^2 + c^2\,\|w\|_{L^2}^2 + 3c\left(\|u\|_{L^4}^4 + \|w\|_{L^4}^4\right) \\
&\leq 2c\,|I_2(u_0,w_0)| + c^2\left(\|u\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^2}^2\right) \\
&\quad + 3cc_1\left(\|u\|_{L^2}^3\,\|u_x\|_{L^2} + \|w\|_{L^2}^3\,\|w_x\|_{L^2}\right) \\
&\leq 2c\,|I_2(u_0,w_0)| + c^2 I_1(u,w) + 3c\left(\|u\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^2}^2\right)^{3/2}\|u_x\|_{L^2} \\
&\quad + 3c\left(\|u\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^2}^2\right)^{3/2}\|w_x\|_{L^2} \\
&\leq 2c\,|I_2(u_0,w_0)| + c^2 I_1(u_0,w_0) + 3c\,(I_1(u_0,w_0))^{3/2}\,\|u_x\|_{L^2} \\
&\quad + 3c\,(I_1(u_0,w_0))^{3/2}\,\|w_x\|_{L^2} \\
&\leq C\left(|I_2(u_0,w_0)| + I_1(u_0,w_0) + (I_1(u_0,w_0))^3\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\,\|w_x\|_{L^2}^2\ .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_x\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2 \leq C\left(|I_2(u_0,w_0)| + I_1(u_0,w_0) + (I_1(u_0,w_0))^3\right)\ . \tag{2.8}$$

Por outro lado, temos que

$$I_1(u_0,w_0) \leq \|u_0\|_{H^1}^2 + \|w_0\|_{H^1}^2$$

e

$$\begin{aligned}
|I_2(u_0,w_0)| &\leq c\left[\|u_0\|_{L^2}\|\partial_x u_0\|_{L^2} + \|w_0\|_{L^2}\|\partial_x w_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{L^4}^4\right] \\
&+ c\|w_0\|_{L^4}^4 + \|u\|_{L^4}^2\|w\|_{L^4}^2 \\
&\leq \frac{c}{2}\left[\|u_0\|_{L^2}^2 + \|w_0\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u_0\|_{L^2}^2 + \|\partial_x w_0\|_{L^2}^2\right] \\
&+ c_1\|u_0\|_{L^2}^3\|\partial_x u_0\|_{L^2} + c_1\|w_0\|_{L^2}^3\|\partial_x w_0\|_{L^2} \\
&\leq C\left[\|u_0\|_{H^1}^2 + \|w_0\|_{H^1}^2 + \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|w_0\|_{L^2}^2\right)^{3/2}\|\partial_x u_0\|_{L^2}\right] \\
&+ C\left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|w_0\|_{L^2}^2\right)^{3/2}\|\partial_x w_0\|_{L^2} \\
&\leq C_1\left[\|u_0\|_{H^1}^2 + \|w_0\|_{H^1}^2 + \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \|w_0\|_{L^2}^2\right)^3 + \|\partial_x u_0\|_{L^2}^2 + \|\partial_x w_0\|_{L^2}^2\right] \\
&\leq C_2\left[\|u_0\|_{H^1}^2 + \|w_0\|_{H^1}^2 + \left(\|u_0\|_{H^1}^2 + \|w_0\|_{H^1}^2\right)^3\right] \ .
\end{aligned}$$

Logo, segue de (2.8) que

$$\|u_x\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2 \leq c\left[\|u_0\|_{H^1}^2 + \|w_0\|_{H^1}^2 + \left(\|u_0\|_{H^1}^2 + \|w_0\|_{H^1}^2\right)^3\right] \ . \tag{2.9}$$

Portanto,

$$\|\partial_x \overrightarrow{u}(t)\|_{L^2}^2 \leq c\left[\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^1}^2 + \|\overrightarrow{u}_0\|_{H^1}^6\right] = M \ ,$$

que implica

$$\|\overrightarrow{u}(t)\|_{H^1}^2 \leq M, \quad \forall t \in [0,T^\star).$$

Considere o problema (2.1) com dado inicial $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{u}(T^\star - \varepsilon) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$. Então existe um tempo $T_1 > T^\star - \varepsilon$ e uma solução $\overrightarrow{v}(t) \in C([0,T_1]\ ; H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R}))$ do problema (2.1), com

$$T_1\left(\|\overrightarrow{v}(0)\|_{H^1}\right) \geq \frac{c}{M^2}. \tag{2.10}$$

Defina

$$\widetilde{\overrightarrow{u}}(t) = \begin{cases} \overrightarrow{u}(t) & \text{quando } 0 \leq t \leq T^\star - \varepsilon, \\ \overrightarrow{v}(t - (T^\star - \varepsilon)) & \text{quando } T^\star - \varepsilon \leq t \leq T^\star - \varepsilon + T_1. \end{cases}$$

Logo, obtemos $\widetilde{\overrightarrow{u}}$ uma solução de (2.1) no intervalo de tempo $[0, T_1^\varepsilon]$, com $T_1^\varepsilon = (T^\star - \varepsilon + T_1)$. Repetindo este processo um número finito de vezes obtemos um tempo de existência $T_n^\varepsilon > T^\star$, que é uma contradição. O fato de que o tempo T_n^ε não se acumula quando $n \to \infty$ segue da dependência do tempo em relação ao dado inicial e de (2.10). ■

Combinando o resultado de boa colocação local no caso periódico (Teorema 1.3.2) com as leis de conservação (2.6) e (2.7) obtemos o seguinte resultado de boa colocação global.

Teorema 2.1.4 *Seja $\overrightarrow{u}_0 = (u_0, w_0) \in H^1(\mathbb{T}) \times H^1(\mathbb{T})$. Então existe uma única solução $\overrightarrow{u} = (u, w)$ do problema (2.1) tal que*

$$(u, w) \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{T}) \times H^1(\mathbb{T})).$$

Demonstração: A prova é análoga à do teorema 2.1.3, pois a estimativa à priori (2.9) também é válida no caso periódico (ver definição 1.1.5 e lema 1.1.9). ■

Observação 2.1.5 *Não foi possível obter resultados de boa colocação global para o problema (2.1) nos espaços $H^s(\Omega) \times H^s(\Omega)$, $s > 1$, pois não conhecemos estimativas a priori disponíveis neste caso.*

2.2 Boa colocação global para $s \in (3/5, 1)$

Nesta seção usaremos o resultado de boa colocação global obtido no teorema 2.1.3, nos espaços $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$, para mostrar o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1 *Seja $s \in (3/5, 1)$. Então para $\overrightarrow{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ a única solução local do problema de Cauchy (1.1) no caso $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\mu = 1$ obtida no teorema 1.2.1 se estende para cada intervalo de tempo $[0, T]$. Além disso,*

$$\overrightarrow{u}(t) = W(t)\overrightarrow{u}_0 + \overrightarrow{g}(t)$$

com

$$\sup_{[0,T]} \|\overrightarrow{g}(t)\|_{H^1} \le cT^{2(1-s)/5s-3} \qquad e \qquad \sup_{[0,T]} \|\overrightarrow{u}(t)\|_{H^s} \le cT^{2s(1-s)/5s-3}.$$

Para provarmos este teorema algumas considerações iniciais e resultados preliminares serão necessários. Consideremos o problema

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{q}{2} i \partial_x^2 u + \frac{\gamma}{2} \partial_x^3 u + F(u, w) = 0 \\ \partial_t w - \frac{q}{2} i \partial_x^2 w + \frac{\gamma}{2} \partial_x^3 w + F(w, u) = 0 \\ u(x, 0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}) \text{ e } w(x, 0) = w_0 \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{2.11}$$

onde

$$F(u,w) = (\beta+\mu)\,|u|^2\,\partial_x u + \beta\,|w|^2\,\partial_x u - i\alpha u(|u|^2+|w|^2) + \mu u^2\partial_x\overline{u} + \mu u\partial_x(|w|^2).$$

Segue do teorema 1.2.1 que existe uma única solução $\overrightarrow{u}$ do problema de Cauchy (2.11) com dado inicial $(u_0,w_0)\in H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$, $s\geq \frac{1}{4}$. Para $N>0$ fixo, decompomos u_0 e w_0 como

$$u_0(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{\{|\xi|<N}\mathcal{F}\left(u_0\right)\right](x) + \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{\{|\xi|\geq N}\mathcal{F}\left(u_0\right)\right](x) = u_{0_1}+u_{0_2} \tag{2.12}$$

$$w_0(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{\{|\xi|<N}\mathcal{F}\left(w_0\right)\right](x) + \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{\{|\xi|\geq N}\mathcal{F}\left(w_0\right)\right](x) = w_{0_1}+w_{0_2} \tag{2.13}$$

Esta decomposição é conhecida como decomposição de baixa/alta frequência de Bourgain [3]. Assim,

$$\overrightarrow{u}_0 = \overrightarrow{u}_{0_1}+\overrightarrow{u}_{0_2} \quad \text{com} \quad \overrightarrow{u}_{0_1} = (u_{0_1},w_{0_1}) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{u}_{0_2} = (u_{0_2},w_{0_2}) \tag{2.14}$$

Em consequência, temos

$$\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L^2} \leq \|\overrightarrow{u}_0\|_{L^2} \ , \quad \|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^1} \leq cN^{(1-s)}\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s} \tag{2.15}$$

e

$$\|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^\rho} \leq cN^{(\rho-s)}\,\|\overrightarrow{u}_0\|_{H^s}\,,\ \ 1/4\leq\rho\leq s<1.$$

A frequência baixa de u_0 dada por $u_{0_1} = \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{\{|\xi|<N}\mathcal{F}\left(u_0\right)\right]$ tem norma grande, enquanto que a alta frequência $u_{0_2} = \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{\{|\xi|\geq N}\mathcal{F}\left(u_0\right)\right]$ tem norma pequena (para N grande).

Seja

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1+\overrightarrow{u}_2, \quad \text{com} \quad \overrightarrow{u}_2 = (u_2,w_2)\,,$$

então $\overrightarrow{u}_2$ satisfaz

$$\begin{cases} \partial_t u_2 - \frac{q}{2}i\partial_x^2 u_2 + \frac{\gamma}{2}\partial_x^3 u_2 - F(u_1,w_1) + F(u_1+u_2,w_1+w_2) = 0 \\ \partial_t w_2 - \frac{q}{2}i\partial_x^2 w_2 + \frac{\gamma}{2}\partial_x^3 w_2 - F(w_1,u_1) + F(w_1+w_2,u_1+u_2) = 0 \\ u_2(x,0) = u_{0_2}\in H^\rho(\mathbb{R}) \text{ e } w_2(x,0) = w_{0_2}\in H^\rho(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{2.16}$$

O seguinte resultado segue do Teorema 1.2.1 e das desigualdades em (2.15).

Teorema 2.2.2 *Seja* $1/4\leq s\leq 1$ *e* $\overrightarrow{u}_{0_1}\in H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$ *satisfazendo*

$$\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L^2}\leq c \quad e \quad \|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^1}\leq cN^{(1-s)}.$$

Então a solução $\overrightarrow{u}_1(t) = (u_1(t), w_1(t))$ do problema (2.11), com dado inicial $\overrightarrow{u}_1(0) = \overrightarrow{u}_{0_1}$, obtida no Teorema 1.2.1 existe no intervalo de tempo $[0, \Delta T]$, onde $\Delta T \sim N^{-(1-s)}$ (a notação $\sim$ significa que existem constantes positivas c_1, c_2 tais que $c_1 N^{-(1-s)} \leq \Delta T \leq c_2 N^{-(1-s)}$). Além disso, a solução $\overrightarrow{u}_1$ satisfaz

$$\sup_{[0,\Delta T]} \|\overrightarrow{u}_1(t)\|_{H^1} \leq cN^{(1-s)} \tag{2.17}$$

e

$$|||\overrightarrow{u}_1(t)|||_\rho \leq cN^{(1-s)\rho}, \quad para \quad 1/4 \leq \rho \leq 1, \tag{2.18}$$

onde

$$\begin{aligned} |||\overrightarrow{u}_1(t)|||_\rho = &\|\overrightarrow{u}_1\|_{L^\infty_{\Delta T} H^\rho} + \|D^\rho_x \partial_x \overrightarrow{u}_1\|_{L^\infty_x L^2_{\Delta T}} + \|\partial_x \overrightarrow{u}_1\|_{L^\infty_x L^2_{\Delta T}} + \|\overrightarrow{u}_1\|_{L^5_x L^{10}_{\Delta T}} \\ &+ \|D^\rho_x \overrightarrow{u}_1\|_{L^5_x L^{10}_{\Delta T}} + \left\|D^{\rho-1/4}_x \partial_x \overrightarrow{u}_1\right\|_{L^{20}_x L^{5/2}_{\Delta T}} + \|\overrightarrow{u}_1\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \\ &+ \|\overrightarrow{u}_1\|_{L^8_x L^8_{\Delta T}} + \|D^s_x \overrightarrow{u}_1\|_{L^8_x L^8_{\Delta T}}. \end{aligned}$$

Demonstração: Segue do Teorema 1.2.1 que existe $T \sim \|\overrightarrow{u}_{0_1}\|^{-4}_{H^{1/4}}$ e uma única solução $\overrightarrow{u}_1$ de (2.11), com dado inicial $\overrightarrow{u}_1(0) = \overrightarrow{u}_{0_1}$, no intervalo $[0, T]$. Interpolando, obtemos

$$\|u_{0_1}\|_{H^{1/4}} \leq \|u_{0_1}\|^{3/4}_{L^2} \|u_{0_1}\|^{1/4}_{H^1} \leq c\,\|u_{0_1}\|^{1/4}_{H^1} \qquad \text{e} \qquad \|w_{0_1}\|_{H^{1/4}} \leq c\,\|w_{0_1}\|^{1/4}_{H^1}.$$

Assim,

$$T \backsim \|\overrightarrow{u}_{0_1}\|^{-4}_{H^{1/4}} \geq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|^{-1}_{H^1} \geq cN^{-(1-s)}.$$

Logo, podemos considerar o tempo de existência $\Delta T \backsim N^{-(1-s)}$. Observamos que esta notação ΔT foi escolhida para diferenciar do tempo de existência T, obtido no Teorema 1.2.1. Para N suficientemente grande, o tempo ΔT é pequeno, o que justifica a notação.

Para provar (2.17) usaremos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (Lema 1.1.10) e as duas leis de conservação

$$I_1(u_1, w_1) = \|u_1\|^2_{L^2} + \|w_1\|^2_{L^2} = I_1(u_{0_1}, w_{0_1}),$$

$$\begin{aligned} I_2(u_1, w_1) = &\, i(-3\gamma\alpha + (\beta + 2\mu)q) \int_{-\infty}^{+\infty} (u_1 \overline{u}_{1x} + w_1 \overline{w}_{1x}) dx - \frac{3}{2}\gamma(\|u_{1x}\|^2_{L^2} + \|w_{1x}\|^2_{L^2}) \\ &+ \frac{1}{2}(\beta + 2\mu)(\|u_1\|^4_{L^4} + \|w_1\|^4_{L^4}) + (\beta + 2\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} |u_1|^2 |w_1|^2 dx \\ &= I_2(u_{0_1}, w_{0_1}). \end{aligned}$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\|u_{1x}\|_{L^2}^2+\|w_{1x}\|_{L^2}^2 &\le c\,|I_2(u_1,w_1)|+c\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(u_1\overline{u}_{1x}+w_1\overline{w}_{1x})dx\right|+c(\|u_1\|_{L^4}^4+\|w_1\|_{L^4}^4)\\
&\le c\,|I_2(u_{0_1},w_{0_1})|+c(\|u_1\|_{L^2}\|u_{1x}\|_{L^2}+\|w_1\|_{L^2}\|w_{1x}\|_{L^2})\\
&+c(\|u_1\|_{L^2}^3\|u_{1x}\|_{L^2})+c(\|w_1\|_{L^2}^3\|w_{1x}\|_{L^2})\\
&\le c\,|I_2(u_{0_1},w_{0_1})|+c(\|u_1\|_{L^2}^2+\|w_1\|_{L^2}^2)+\frac{1}{2}(\|u_{1x}\|_{L^2}^2+\|w_{1x}\|_{L^2}^2)\\
&+c(\|u_1\|_{L^2}^2+\|w_1\|_{L^2}^2)^{3/2}(\|u_{1x}\|_{L^2}+\|w_{1x}\|_{L^2}).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|u_{1x}\|_{L^2}^2+\|w_{1x}\|_{L^2}^2 &\le c\,|I_2(u_{0_1},w_{0_1})|+c\,|I_1(u_{0_1},w_{0_1})|^{3/2}(\|u_{1x}\|_{L^2}+\|w_{1x}\|_{L^2})\\
&+c\,|I_1(u_{0_1},w_{0_1})|\\
&\le c\,|I_2(u_{0_1},w_{0_1})|+c\,|I_1(u_{0_1},w_{0_1})|+c\,|I_1(u_{0_1},w_{0_1})|^3\\
&+\frac{1}{2}(\|u_{1x}\|_{L^2}^2+\|w_{1x}\|_{L^2}^2).
\end{aligned}
$$

Temos

$$
\|u_{1x}\|_{L^2}^2+\|w_{1x}\|_{L^2}^2\le c\,|I_2(u_{0_1},w_{0_1})|+c\,|I_1(u_{0_1},w_{0_1})|+c\,|I_1(u_{0_1},w_{0_1})|^3.
$$

Da desigualdade $\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^1}\le cN^{(1-s)}$ segue que

$$
|I_1(u_{0_1},w_{0_1})|=\|u_{0_1}\|_{L^2}^2+\|w_{0_1}\|_{L^2}^2\le C\le cN^{2(1-s)}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|I_2(u_{0_1},w_{0_1})| &\le c(\|u_{0_1}\|_{L^2}^2+\|w_{0_1}\|_{L^2}^2+\|\partial_x u_{0_1}\|_{L^2}^2+\|\partial_x w_{0_1}\|_{L^2}^2)\\
&+c(\|u_{0_1}\|_{L^2}^2+\|w_{0_1}\|_{L^2}^2)^{3/2}(\|\partial_x u_{0_1}\|_{L^2}+\|\partial_x w_{0_1}\|_{L^2})\\
&\le c(\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^1}^2+\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L^2}^6)\\
&\le cN^{2(1-s)}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\|u_{1x}\|_{L^2}^2+\|w_{1x}\|_{L^2}^2\le cN^{2(1-s)}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}_1\|_{H^1}^2 &= \|u_1\|_{H^1}^2+\|w_1\|_{H^1}^2=\|u_1\|_{L^2}^2+\|w_1\|_{L^2}^2+\|u_{1x}\|_{L^2}^2+\|w_{1x}\|_{L^2}^2\\
&=|I_1(u_{0_1},w_{0_1})|+\|u_{1x}\|_{L^2}^2+\|w_{1x}\|_{L^2}^2\\
&\le cN^{2(1-s)},
\end{aligned}
$$

o que encerra a prova de (2.17).

Para a prova de (2.18) usamos novamente o resultado do Teorema 1.2.1, que garante a seguinte estimativa para a solução $\overrightarrow{u}_1$ de (2.11), com dado inicial $\overrightarrow{u}_1(0) = \overrightarrow{u}_{0_1}$

$$|||\overrightarrow{u}_1(t)|||_\rho \leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_\rho \qquad \text{com} \quad 1/4 \leq \rho < 1.$$

Interpolando, obtemos

$$\|u_{0_1}\|_\rho \leq c\,\|u_{0_1}\|_{L^2}^{1-\rho}\,\|u_{0_1}\|_{H^1}^{\rho} \leq c\,\|u_{0_1}\|_{H^1}^{\rho} \leq cN^{\rho(1-s)} \qquad \text{e} \qquad \|w_{0_1}\|_\rho \leq cN^{\rho(1-s)}.$$

Logo,

$$|||\overrightarrow{u}_1(t)|||_\rho \leq \|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_\rho \leq cN^{\rho(1-s)} \qquad \text{com} \;\; 1/4 \leq \rho \leq 1.$$

■

Teorema 2.2.3 *Seja $\overrightarrow{u}_{0_2} \in H^\rho(\mathbb{R})\times H^\rho(\mathbb{R})$, com $\|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^\rho} \leq cN^{\rho-s}$, $1/4 \leq \rho \leq s < 1$ e seja $\overrightarrow{u}_1$ a única solução de (2.11) obtida no teorema 2.2.2. Então existe uma única solução $\overrightarrow{u}_2$ do problema (2.16) no mesmo intervalo de existência de $\overrightarrow{u}_1$ tal que*

$$\overrightarrow{u}_2 \in C([0,\Delta T]; H^\rho(\mathbb{R})\times H^\rho(\mathbb{R})) \qquad \textit{com} \quad \Delta T \backsim N^{-(1-s)}.$$

Demonstração: Faremos com detalhe o caso $\rho = 1/4$. A demonstração segue a mesma idéia da prova do Teorema 1.2.1. Reescrevemos (2.16) como

$$\partial_t \overrightarrow{u}_2 - \frac{q}{2} i\partial_x^2 \overrightarrow{u}_2 + \frac{\gamma}{2}\partial_x^3 \overrightarrow{u}_2 + G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1) = 0, \quad \overrightarrow{u}_2(x,0) = \overrightarrow{u}_{0_2}, \tag{2.19}$$

onde

$$G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1) = \begin{pmatrix} F(u_1+u_2, w_1+w_2) - F(u_1,w_1) \\ F(w_1+w_2, u_1+u_2) - F(w_1,u_1) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

e $F(u_1+u_2, w_1+w_2) - F(u_1,w_1)$ é definida por

$$\begin{aligned}
&(\beta+\mu)\left[|u_1|^2 u_{2x} + 2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_{2x})v_x + 2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_{2x})u_{2x} + |u_2|_x^2\, u_{2x} + |u_2|^2\, u_{1x}\right] \\
&+ \beta\,|w_1|^2 u_{2x} + \beta\left[2\operatorname{Re}(w_1\overline{w}_2)u_{1x} + 2\operatorname{Re}(w_1\overline{w}_2)u_{2x} + |w_2|^2\, u_{2x} + |w_2|^2\, u_{1x}\right] \\
&- i\alpha\left[|u_2|^2 u_1 + 2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2)u_1 + 2\operatorname{Re}(w_1\overline{w}_2)u_1 + 2\operatorname{Re}(w_1\overline{w}_2)u_2 + |w_2|^2\, u_1\right] \\
&- i\alpha\left[|u_1|^2 u_2 + 2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2)u_2 + |u_2|^2\, u_2 + |w_1|^2\, u_2 + |w_2|^2\, u_2\right] + 2\mu\operatorname{Re}(w_{1x}\overline{w}_1)u_2 \\
&+ \mu\left[u_1^2\overline{u}_{2x} + 2u_2u_1\overline{u}_{1x} + 2u_2\overline{u}_{2x}u_1 + u_2^2\overline{u}_{1x} + u_2^2\overline{u}_{2x}\right] \\
&+ 2\mu(u_1+u_2)\left[\operatorname{Re}(w_{2x}\overline{w}_1) + \operatorname{Re}(w_{1x}\overline{w}_2)\operatorname{Re}(w_{2x}\overline{w}_2)\right].
\end{aligned}$$

Seja

$$Y_{\Delta T}^a = \left\{\overrightarrow{u}_2 \in C([-\Delta T, \Delta T]; H^{1/4}(\mathbb{R})\times H^{1/4}(\mathbb{R})) /\; |||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} \leq a\right\},$$

onde a norma $|||\cdot|||_{1/4}$ tem a seguinte definição

$$\begin{aligned}|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} &= \|\overrightarrow{u}_2\|_{L^\infty_{\Delta T}H^{1/4}} + \left\|D_x^{1/4}\partial_x \overrightarrow{u}_2\right\|_{L^\infty_x L^2_{\Delta T}} + \|\partial_x \overrightarrow{u}_2\|_{L^\infty_x L^2_{\Delta T}} + \|\overrightarrow{u}_2\|_{L^5_x L^{10}_{\Delta T}} \\ &+ \left\|D_x^{1/4}\overrightarrow{u}_2\right\|_{L^5_x L^{10}_{\Delta T}} + \|\partial_x \overrightarrow{u}_2\|_{L^{20}_x L^{5/2}_{\Delta T}} + \|\overrightarrow{u}_2\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \\ &+ \|\overrightarrow{u}_2\|_{L^8_x L^8_{\Delta T}} + \left\|D_x^{1/4}\overrightarrow{u}_2\right\|_{L^8_x L^8_{\Delta T}} .\end{aligned}$$

Como na prova do Teorema 1.2.1, precisamos mostrar que para $\overrightarrow{u}_2 \in Y^a_{\Delta T}$, a aplicação

$$\Phi(\overrightarrow{u}_2) = W(t)\overrightarrow{u}_{0_2} - \int_0^t W(t-\tau)G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)(\tau)d\tau$$

satisfaz $\Phi : Y^a_{\Delta T} \longrightarrow Y^a_{\Delta T}$ e é uma contração.

A desigualdade

$$|||\Phi(\overrightarrow{u}_2)|||_{1/4} \leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^{1/4}} + c(\Delta T)^{1/2}\left(\|G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} + \left\|D_x^{1/4}G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)\right\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}}\right)$$

segue de maneira análoga a (1.49). Pela simetria da função G

$$\begin{aligned}\|G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)\|^2_{L^2_x L^2_{\Delta T}} &= \|F(u_1+u_2, w_1+w_2) - F(u_1, w_1)\|^2_{L^2_x L^2_{\Delta T}} \\ &+ \|F(w_1+w_2, u_1+u_2) - F(w_1, u_1)\|^2_{L^2_x L^2_{\Delta T}} \quad ,\end{aligned}$$

basta estimar

$$\|F(u_1+u_2, w_1+w_2) - F(u_1, w_1)\|^2_{L^2_x L^2_{\Delta T}}$$

e

$$\left\|D_x^{1/4}\left(F(u_1+u_2, w_1+w_2) - F(u_1, w_1)\right)\right\|^2_{L^2_x L^2_{\Delta T}} \quad .$$

Começamos pelos termos

$$\left\||u_1|^2 u_{2x}\right\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} \leq \|u_1\|^2_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \|u_{2x}\|_{L^\infty_x L^2_{\Delta T}} , \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Re}(u_1\overline{u}_2)u_{1x}\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} &\leq \|u_1\overline{u}_2 u_{1x}\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} \\ &\leq \|u_1\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \|u_2\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \|u_{1x}\|_{L^\infty_x L^2_{\Delta T}} ,\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Re}(u_1\overline{u}_2)u_1\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} &\leq \left\|u_1^2\overline{u}_2\right\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} \\ &\leq (\Delta T)^{1/4}\|u_1\|^2_{L^8_x L^8_{\Delta T}} \|u_2\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} ,\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Re}(w_1\overline{w}_2)u_1\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} &\leq \|w_1\overline{w}_2 u_1\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} \\ &\leq (\Delta T)^{1/4}\|w_1\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \|w_2\|_{L^8_x L^8_{\Delta T}} \|u_1\|_{L^8_x L^8_{\Delta T}} .\end{aligned} \tag{2.25}$$

Os outros termos de $\|F(u_1+u_2,w_1+w_2)-F(u_1,w_1)\|^2_{L^2_xL^2_{\Delta T}}$ definidos em (2.21) são estimados de forma análoga a (2.22)-(2.25).

Portanto, $\|F(u_1+u_2,w_1+w_2)-F(u_1,w_1)\|^2_{L^2_xL^2_{\Delta T}}$ é estimado por

$$\begin{aligned}
&c\left(|||\overrightarrow{u}_1|||^2_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}+|||\overrightarrow{u}_2|||^3_{1/4}\right)\\
&+c\,|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||^2_{1/4}+c(\Delta T)^{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_1|||^2_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}\\
&+c(\Delta T)^{1/4}\left(|||\overrightarrow{u}_2|||^3_{1/4}+|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||^2_{1/4}\right).
\end{aligned}\tag{2.26}$$

Usando a regra de Leibniz para derivadas fracionárias (Proposição 1.1.3) limitamos $\left\|D_x^{1/4}(2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2)u_{1x})\right\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}}$ do seguinte modo,

$$\begin{aligned}
&\left\|D_x^{1/4}(2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2)u_{1x})-2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2)D_x^{1/4}u_{1x}-u_{1x}D_x^{1/4}(2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2))\right\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}}\\
&+\left\|2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2)D_x^{1/4}u_{1x}\right\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}}+\left\|u_{1x}D_x^{1/4}(2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2))\right\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}}\\
&\le c\left\|D_x^{1/4}(2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2))\right\|_{L_x^{20/9}L^{10}_{\Delta T}}\|u_{1x}\|_{L^{20}_xL^{5/2}_{\Delta T}}\\
&+\|2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2)\|_{L^2_xL^\infty_{\Delta T}}\left\|D_x^{1/4}u_{1x}\right\|_{L^\infty_xL^2_{\Delta T}},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\left\|D_x^{1/4}(2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2))\right\|_{L_x^{20/9}L^{10}_{\Delta T}}&=\left\|D_x^{1/4}(u_1\overline{u}_2+\overline{u}_1u_2)\right\|_{L_x^{20/9}L^{10}_{\Delta T}}\\
&\le\left\|D_x^{1/4}(u_1\overline{u}_2)\right\|_{L_x^{20/9}L^{10}_{\Delta T}}+\left\|D_x^{1/4}(\overline{u}_1u_2)\right\|_{L_x^{20/9}L^{10}_{\Delta T}}\\
&\le c\left\|D_x^{1/4}u_1\right\|_{L^5_xL^{10}_{\Delta T}}\|u_2\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}+c\,\|u_1\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\left\|D_x^{1/4}u_2\right\|_{L^5_xL^{10}_{\Delta T}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2)\|_{L^2_xL^\infty_{\Delta T}}=\|u_1\overline{u}_2+\overline{u}_1u_2\|_{L^2_xL^\infty_{\Delta T}}&\le\|u_1\overline{u}_2\|_{L^2_xL^\infty_{\Delta T}}+\|\overline{u}_1u_2\|_{L^2_xL^\infty_{\Delta T}}\\
&\le c\,\|u_1\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\|u_2\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\|D_x^{1/4}(2\operatorname{Re}((u_1\overline{u}_2)u_{1x})\right\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}}&\le c\left\|D_x^{1/4}u_1\right\|_{L^5_xL^{10}_{\Delta T}}\|u_2\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\|u_{1x}\|_{L^{20}_xL^{5/2}_{\Delta T}}\\
&+\|u_1\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\left\|D_x^{1/4}u_2\right\|_{L^5_xL^{10}_{\Delta T}}\|u_{1x}\|_{L^{20}_xL^{5/2}_{\Delta T}}\\
&+c\,\|u_1\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\|u_2\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\left\|D_x^{1/4}u_{1x}\right\|_{L^\infty_xL^2_{\Delta T}}.
\end{aligned}$$

Os outros termos de $\left\|D_x^{1/4}\left(F(u_1+u_2,w_1+w_2)-F(u_1,w_1)\right)\right\|^2_{L^2_xL^2_{\Delta T}}$ são estimados de forma análoga. Consequentemente, a norma $\left\|D_x^{1/4}\left(F(u_1+u_2,w_1+w_2)-F(u_1,w_1)\right)\right\|^2_{L^2_xL^2_{\Delta T}}$

é estimada por

$$c\left(|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}^2\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} + |||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}^3 \right) + c\,|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}^2 + c(\Delta T)^{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}^3$$
$$+ c(\Delta T)^{1/4}\left(|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}^2\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} + |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}^2 \right).$$

Juntando as estimativas anteriores, obtemos

$$\begin{aligned}
|||\Phi(\overrightarrow{u}_2)|||_{1/4} &\leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^{1/4}} + c(\Delta T)^{1/2}\left(|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}^2\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} + |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}^2 \right) \\
&\quad + c(\Delta T)^{1/2}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}^3 + c(\Delta T)^{3/4}\left(|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}^2\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} \right) \\
&\quad + c(\Delta T)^{3/4}\left(|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}^3 + |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}^2 \right) \qquad (2.27) \\
&\leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^{1/4}} + C(\Delta T)^{1/2}\left(|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}^2\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} + |||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}^3 \right) \\
&\quad + C(\Delta T)^{1/2}\,|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}^2\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}\,.
\end{aligned}$$

Escolhendo

$$a = 2c\max\{\|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^{1/4}}, \|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^{1/4}}\} \quad \text{e} \quad C(\Delta T)^{1/2}a^2 \leq \frac{1}{6}, \qquad (2.28)$$

obtemos $\Phi : Y^a_{\Delta T} \longrightarrow Y^a_{\Delta T}$. Além disso, como

$$\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^{1/4}} \leq cN^{(1-s)/4} \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^{1/4}} \leq cN^{1/4-s} \leq cN^{(1-s)/4}\,,$$

o tempo $\Delta T \leq \frac{1}{ca^4}$ é dado em função de N por

$$\Delta T \sim a^{-4} \sim N^{-(1-s)}. \qquad (2.29)$$

Um argumento análogo mostra que $\Phi : Y^a_{\Delta T} \longrightarrow Y^a_{\Delta T}$ é uma contração. ■

Corolário 2.2.4 *Sejam $\overrightarrow{u}_1$ e $\overrightarrow{u}_2$ soluções do PVI (2.11) e (2.16) com dados iniciais $\overrightarrow{u}_{0_1}$ e $\overrightarrow{u}_{0_2}$ respectivamente. Sejam $1/4 < \rho \leq s < 1$, suponhamos que $\|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^\rho} \sim N^{\rho-s}$ e que $\overrightarrow{u}_{0_1}$ satisfaça as condições do Teorema 2.2.2. Então $|||\overrightarrow{u}_2|||_\rho \leq cN^{\rho-s}$, onde*

$$|||\overrightarrow{u}_2|||_\rho = \|\overrightarrow{u}_2\|_{L^\infty_{\Delta T}H^\rho} + \|D^\rho_x\partial_x\overrightarrow{u}_2\|_{L^\infty_x L^2_{\Delta T}} + \|D^\rho_x\overrightarrow{u}_2\|_{L^5_x L^{10}_{\Delta T}} + \|D^\rho_x\overrightarrow{u}_2\|_{L^8_x L^8_{\Delta T}}\,.$$

Demonstração: Como na demonstração do teorema anterior, utilizando a equação integral, desigualdade de Minkowski e propriedades do grupo, obtemos

$$|||\overrightarrow{u}_2|||_\rho \leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^\rho} + c(\Delta T)^{1/2}\left(\|G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} + \|D^\rho_x G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} \right). \qquad (2.30)$$

Como consequência imediata de (2.26) temos

$$\begin{aligned}\|G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} &\leq c(1+(\Delta T)^{1/4}) \left(|||\overrightarrow{u}_1|||^2_{1/4} \, |||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} + |||\overrightarrow{u}_2|||^3_{1/4} \right) \\ &+ c(1+(\Delta T)^{1/4}) \, |||\overrightarrow{u}_1|||^2_{1/4} \, |||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} \,. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Os termos de $\|D^\rho_x G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}}$ são estimados da seguinte forma.

$$\begin{aligned}\|D^\rho_x(2\,\mathrm{Re}(u_1 \overline{u}_2) u_{1x})\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} &\leq c \left[\|D^\rho_x u_1\|_{L^5_x L^{10}_{\Delta T}} \, \|u_2\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \right] \|u_{1x}\|_{L^{20}_x L^{5/2}_{\Delta T}} \\ &+ c \left[+ \|u_1\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \, \|D^\rho_x u_2\|_{L^5_x L^{10}_{\Delta T}} \right] \|u_{1x}\|_{L^{20}_x L^{5/2}_{\Delta T}} \\ &+ \|u_1\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \, \|u_2\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \, \|D^\rho_x u_{1x}\|_{L^\infty_x L^2_{\Delta T}} \\ &\leq c \, |||\overrightarrow{u}_1|||_\rho \, |||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} \, |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4} \\ &+ |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4} \, ||||\overrightarrow{u}_2|||_\rho \, |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4} \,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\| D^\rho_x(|u_1|^2 \, u_{2x}) \right\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} &\leq c \, \|u_{2x}\|_{L^{20}_x L^{5/2}_{\Delta T}} \, \|D^\rho_x u_1\|_{L^5_x L^{10}_{\Delta T}} \, \|u_1\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \\ &+ \|D^\rho_x u_{2x}\|_{L^\infty_x L^2_{\Delta T}} \, \|u_1\|^2_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \\ &\leq c \, |||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} \, |||\overrightarrow{u}_1|||_\rho \, |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4} \\ &+ ||||\overrightarrow{u}_2|||_\rho \, |||\overrightarrow{u}_1|||^2_{1/4} \,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\| D^\rho_x(|u_1|^2 \, u_2) \right\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} &\leq c(\Delta T)^{1/4} \, \|u_2\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \, \|D^\rho_x u_1\|_{L^8_x L^8_{\Delta T}} \, \|u_1\|_{L^8_x L^8_{\Delta T}} \\ &+ (\Delta T)^{1/4} \, \|u_1\|_{L^8_x L^8_{\Delta T}} \, \|u_1\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \, \|D^\rho_x u_2\|_{L^8_x L^8_{\Delta T}} \\ &\leq c(\Delta T)^{1/4} \, |||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} \, |||\overrightarrow{u}_1|||_\rho \, |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4} \\ &+ (\Delta T)^{1/4} \, |||\overrightarrow{u}_1|||^2_{1/4} \, ||||\overrightarrow{u}_2|||_\rho \,. \end{aligned}$$

Os outros termos seguem de forma análoga. Portanto,

$$\begin{aligned}\|D^\rho_x G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} &\leq c(1+(\Delta T)^{1/4}) \Big[|||\overrightarrow{u}_1|||^2_{1/4} \, ||||\overrightarrow{u}_2|||_\rho \\ &+ |||\overrightarrow{u}_1|||_\rho \, |||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} \, |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4} + |||\overrightarrow{u}_2|||^2_{1/4} \, ||||\overrightarrow{u}_2|||_\rho \\ &+ |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4} \, |||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} \, ||||\overrightarrow{u}_2|||_\rho + |||\overrightarrow{u}_2|||^2_{1/4} \, |||\overrightarrow{u}_1|||_\rho \Big] . \end{aligned} \tag{2.32}$$

Como

$$|||\overrightarrow{u}_1(t)|||_\rho \leq \|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{1/4} \leq cN^{(1-s)/4}, \qquad |||\overrightarrow{u}_1(t)|||_{1/4} \leq cN^{(1-s)/4}$$

e também,

$$|||\overrightarrow{u}_2(t)|||_{1/4} \leq c \, \|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{1/4} \leq \|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_\rho \leq cN^{\rho - s} \; \leq cN^{(1-s)/4}, \qquad \Delta T \sim N^{-(1-s)},$$

segue de (2.28) e (2.32) que

$$
\begin{aligned}
(\Delta T)^{1/2}\left\|D_x^\rho G(\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_1)\right\|_{L_x^2L_{\Delta T}^2} &\leq C(\Delta T)^{1/2}\left(|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}^2+|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}\right)|||\overrightarrow{u}_2|||_\rho\\
&+C(\Delta T)^{1/2}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}^2\,|||\overrightarrow{u}_2|||_\rho\\
&+cN^{-(1-s)/2}\left(|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}+|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}^2\right)|||\overrightarrow{u}_1|||_\rho\\
&\leq \frac{1}{6}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_\rho+cN^{-(1-s)/2}\left[N^{(1-s)/4}N^{\rho-s}N^{(1-s)/4}\right]\\
&\leq \frac{1}{6}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_\rho+cN^{\rho-s}. \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

De (2.28) e (2.31), obtemos

$$
\begin{aligned}
(\Delta T)^{1/2}\left\|G(\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_1)\right\|_{L_x^2L_{\Delta T}^2} &\leq C(\Delta T)^{1/2}\left(|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}^2+|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}\right)|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}\\
&+C(\Delta T)^{1/2}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}^3\\
&\leq \frac{1}{6}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} \qquad (2.34)\\
&\leq \frac{1}{6}cN^{\rho-s}\ .
\end{aligned}
$$

Portanto, de (2.30), (2.33) e (2.34) temos

$$
\left\||||\overrightarrow{u}_2|||\right\|_\rho \leq c\left\|\overrightarrow{u}_{0_2}\right\|_\rho+\frac{1}{6}\left\||||\overrightarrow{u}_2|||\right\|_\rho+cN^{\rho-s}
$$

Logo,

$$
\left\||||\overrightarrow{u}_2|||\right\|_\rho \leq cN^{\rho-s}\ .
$$

■

Proposição 2.2.5 *Sejam $\overrightarrow{u}_1$ e $\overrightarrow{u}_2$ soluções do PVI (2.11) e (2.16) com dados iniciais $\overrightarrow{u}_{0_1}\in H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$ e $\overrightarrow{u}_{0_2}\in H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$, $1/4<s<1$ tais que $\|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{L^2}\lesssim N^{-s}$ e $\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^1}\lesssim N^{(1-s)}$. Defina*

$$
|||\overrightarrow{u}_2|||_0=\|\overrightarrow{u}_2\|_{L_x^2L_{\Delta T}^2}+\|\overrightarrow{u}_{2x}\|_{L_x^\infty L_{\Delta T}^2}+\|\overrightarrow{u}_2\|_{L_x^8L_{\Delta T}^8}+\|\overrightarrow{u}_2\|_{L_x^5L_{\Delta T}^{10}}\ .
$$

Então

$$
|||\overrightarrow{u}_2|||_0\lesssim N^{-s}.
$$

Demonstração: Seja

$$
\overrightarrow{u}_2(t)=W(t)\overrightarrow{u}_{0_2}-\int_0^t W(t-\tau)G(\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_1)(\tau)d\tau
$$

Usando Minkowiski e as propriedades do grupo, temos

$$|||\overrightarrow{u}_2|||_0 \leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{L^2} + c(\Delta T)^{1/2}\,\|G(\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_1)\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}}\,.$$

Estimamos os termos de $\|G(\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_1)\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}}$ como segue

$$\begin{aligned}\left\||u_1|^2\,u_{2x}\right\| &\leq \|u_1\|^2_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,\|u_{2x}\|_{L^\infty_xL^2_{\Delta T}} \leq \|u_1\|^2_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\\ &\leq |||\overrightarrow{u}_1|||^2_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|2\,\mathrm{Re}(u_1\overline{u}_2)u_{1x}\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}} &\leq \|u_1\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,\|u_{1x}\|_{L^{20}_xL^{5/2}_{\Delta T}}\,\|u_2\|_{L^5_xL^{10}_{\Delta T}}\\ &\leq \|u_1\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,\|u_{1x}\|_{L^{20}_xL^{5/2}_{\Delta T}}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\\ &\leq |||\overrightarrow{u}_1|||^2_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|2\,\mathrm{Re}(u_1\overline{u}_2)u_{2x}\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}} &\leq \|u_1\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,\|u_2\|_{L^5_xL^{10}_{\Delta T}}\,\|u_{2x}\|_{L^{20}_xL^{5/2}_{\Delta T}}\\ &\leq \|u_1\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,\|u_{2x}\|_{L^{20}_xL^{5/2}_{\Delta T}}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\\ &\leq |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\||u_2|^2\,u_{1x}\right\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}} &\leq \|u_2\|_{L^5_xL^{10}_{\Delta T}}\,\|u_2\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,\|u_{1x}\|_{L^{20}_xL^{5/2}_{\Delta T}}\\ &\leq \|u_2\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,\|u_{1x}\|_{L^{20}_xL^{5/2}_{\Delta T}}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\\ &\leq |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\,,\end{aligned}$$

$$\left\||w_1|^2\,u_{2x}\right\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}} \leq \|w_1\|^2_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0 \leq |||\overrightarrow{u}_1|||^2_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\,,$$

$$\begin{aligned}\|2\,\mathrm{Re}(w_1\overline{w}_2)u_{2x}\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}} &\leq \|w_1\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,\|u_{2x}\|_{L^{20}_xL^{5/2}_{\Delta T}}\,\|w_2\|_{L^5_xL^{10}_{\Delta T}}\\ &\leq \|w_1\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,\|u_{2x}\|_{L^{20}_xL^{5/2}_{\Delta T}}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\\ &\leq |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\||w_2|^2\,u_{2x}\right\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}} &\leq \|w_2\|^2_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,\|u_{2x}\|_{L^\infty_xL^2_{\Delta T}} \leq \|w_2\|^2_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\\ &\leq |||\overrightarrow{u}_2|||^2_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|2\,\mathrm{Re}(u_1\overline{u}_2)u_2\|_{L^2_xL^2_{\Delta T}} &\leq c(\Delta T)^{1/4}\,\|u_2\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,\|u_1\|_{L^8_xL^8_{\Delta T}}\,\|u_2\|_{L^8_xL^8_{\Delta T}}\\ &\leq c(\Delta T)^{1/4}\,\|u_2\|_{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}\,\|u_1\|_{L^8_xL^8_{\Delta T}}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\\ &\leq c(\Delta T)^{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\,,\end{aligned}$$

$$\left\| |u_2|^2 \, u_2 \right\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} \leq c(\Delta T)^{1/4} \left\| u_2 \right\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \left\| u_2 \right\|_{L^8_x L^8_{\Delta T}} |||\overrightarrow{u}_2|||_0$$
$$\leq c(\Delta T)^{1/4} \, |||\overrightarrow{u}_2|||^2_{1/4} \, |||\overrightarrow{u}_2|||_0 \, .$$

Logo,

$$|||\overrightarrow{u}_2|||_0 \leq c \, \|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{L^2} + c(\Delta T)^{1/2} \, \|G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}}$$
$$\leq c \, \|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{L^2} + C(\Delta T)^{1/2} \left(|||\overrightarrow{u}_1|||^2_{1/4} + |||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} \right)^2 |||\overrightarrow{u}_2|||_0$$
$$\leq c \, \|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{L^2} + \frac{1}{6} \, |||\overrightarrow{u}_2|||_0 \, .$$

Portanto,

$$|||\overrightarrow{u}_2|||_0 \leq c \, \|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{L^2} \lesssim N^{-s}.$$

■

Teorema 2.2.6 *(i) Se* $\overrightarrow{u}_{0_1} \in H^{1/2}(\mathbb{R}) \times H^{1/2}(\mathbb{R})$ *e* $\Delta T < 1$ *então*

$$\|W(t)\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L^{8/3}_x L^\infty_{\Delta T}} \leq c \, \|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^s} \quad , \quad s > 1/2 \tag{2.35}$$

(ii) Se $D_x \overrightarrow{u}_{0_1} \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ *então*

$$\|\partial_x W(t)\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L^{40/17}_x L^{5/2}_{\Delta T}} \leq c(\Delta T)^{3/8} \, \|D_x \overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L^2} \tag{2.36}$$

(iii) Se $\overrightarrow{u}_{0_1} \in H^{1/2}(\mathbb{R}) \times H^{1/2}(\mathbb{R})$ *então*

$$\|\partial_x W(t)\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L^4_x L^2_{\Delta T}} \leq c(\Delta T)^{1/4} \left\| D^{1/2}_x \overrightarrow{u}_{0_1} \right\|_{L^2} \tag{2.37}$$

(iv) Se $g \in L^1_x L^2_{\Delta T} \times L^1_x L^2_{\Delta T}$*, então*

$$\sup_{t \in [-\Delta T, \Delta T]} \left\| \partial_x \int_0^t W\,(t-\tau)\, g(\cdot, \tau) d\tau \right\|_{L^2} \leq c \, \|g\|_{L^1_x L^2_{\Delta T}}$$

Demonstração: Para provar (i) utilizamos as duas estimativas lineares

$$\left\| D^{-1/4}_x W(t)\overrightarrow{u}_{0_1} \right\|_{L^2_x L^\infty_{\Delta T}} \leq c \left\| D^{-1/4}_x \overrightarrow{u}_{0_1} \right\|_{H^s} \; , \quad s > 1/2$$

e

$$\left\| D^{1/4}_x W(t)\overrightarrow{u}_{0_1} \right\|_{L^4_x L^\infty_{\Delta T}} \leq c \, \|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^s} \; , \, s \geq 1/2.$$

Esta primeira estimativa foi provada por Laurey em [26] e a segunda estimativa segue do Lema 1.2.3.

Consideremos a família de operadores

$$T_z(\overrightarrow{u}_{0_1}) = D_x^{-(1/4)z+1/4(1-z)}W(t)\overrightarrow{u}_{0_1} = D_x^{-(1/2)z+1/4}W(t)\overrightarrow{u}_{0_1},$$

com $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$. Para $z = i\gamma$ temos que

$$\begin{aligned}\|T_{i\gamma}\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L_x^4 L_{\Delta T}^\infty} &= \left\|D_x^{-(1/2)i\gamma+1/4}W(t)\overrightarrow{u}_{0_1}\right\|_{L_x^4 L_{\Delta T}^\infty} \\ &\leq c\left\|D_x^{-(1/2)i\gamma}\overrightarrow{u}_{0_1}\right\|_{H^s} \leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^s}\ , \quad s > 1/2\ .\end{aligned}$$

Para $z = 1 + i\gamma$ temos que

$$\begin{aligned}\|T_{1+i\gamma}\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L_x^2 L_{\Delta T}^\infty} &= \left\|D_x^{-1/4-i\gamma/2}W(t)\overrightarrow{u}_{0_1}\right\|_{L_x^2 L_{\Delta T}^\infty} \\ &\leq c\left\|D_x^{-i\gamma/2}\overrightarrow{u}_{0_1}\right\|_{H^s} \leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^s}\ , \quad s > 1/2\ .\end{aligned}$$

Pelo teorema de Interpolação de Stein (Teorema 1.1.11), para $0 \leq \theta \leq 1$, a seguinte desigualdade se verifica

$$\|T_\theta\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L_x^{p_\theta} L_{\Delta T}^\infty} \leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^s} \quad \text{com } \frac{1}{p_\theta} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{4} = \frac{\theta+1}{4}\ .$$

Em particular, para $\theta = 1/2$ temos que

$$\left\|T_{1/2}\overrightarrow{u}_{0_1}\right\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} = \|W(t)\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^s}\ .$$

A interpolação das seguintes desigualdades

$$\|\partial_x W(t)\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L_x^5 L_{\Delta T}^{10}} \leq c\,\|\partial_x\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L_x^2}$$

e

$$\|\partial_x W(t)\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L_x^2 L_{\Delta T}^2} \leq c(\Delta T)^{1/2}\,\|D_x\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L^2}$$

nos leva a (2.36).

Analogamente, a interpolação das estimativas

$$\|\partial_x W(t)\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L_x^\infty L_{\Delta T}^2} \leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L^2}$$

e

$$\|W(t)\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L_x^2 L_{\Delta T}^2} \leq c(\Delta T)^{1/2}\,\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L^2}$$

mostra (2.37).

A demonstração de (iv) segue de modo análoga à prova do Teorema 3.5 em [21]. ∎

Lema 2.2.7 *Se $\overrightarrow{u}_1$ é a solução do problema (2.11) com dado inicial $\overrightarrow{u}_{0_1}$ então*

$$\|\partial_x \overrightarrow{u}_1\|_{L_x^{40/17} L_{\Delta T}^{5/2}} \leq c(\Delta T)^{3/8} \, |||\overrightarrow{u}_1|||_1 \tag{2.38}$$

$$\|\partial_x \overrightarrow{u}_1\|_{L_x^2 L_{\Delta T}^2} \leq c(\Delta T)^{1/2} \, |||\overrightarrow{u}_1|||_1 \tag{2.39}$$

Se $\Delta T < 1$ então

$$\|\overrightarrow{u}_1\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \leq |||\overrightarrow{u}_1|||_s \ \ , \ s > 1/2 \tag{2.40}$$

$$\|\overrightarrow{u}_1\|_{L_x^2 L_{\Delta T}^\infty} \leq |||\overrightarrow{u}_1|||_s \ \ , \ s > 3/4 \tag{2.41}$$

Demonstração: Para provar (2.40) usamos a equação integral para $\overrightarrow{u}_1$ e estimamos como na demonstração do Teorema 1.2.1, considerando

$$a = 2c \, \|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^s} \qquad \text{e} \qquad C\,(\Delta T)^{1/2} \, |||\overrightarrow{u}_1|||_s^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}_1\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} &\leq \|W(t)\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} + \int_0^t \|W(t-\tau)F(\overrightarrow{u}_1(\tau))\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \, d\tau \\
&\leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^s} + \int_0^{\Delta T} \|F(\overrightarrow{u}_1(\tau))\|_{H^s} \, d\tau \\
&\leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^s} + \int_0^{\Delta T} \|F(\overrightarrow{u}_1(\tau))\|_{L_x^2} \, d\tau \\
&+ \int_0^{\Delta T} \|D_x^s F(\overrightarrow{u}_1(\tau))\|_{L_x^2} \, d\tau \\
&\leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^s} + c\,(\Delta T)^{1/2} \, \|F(\overrightarrow{u}_1(\tau))\|_{L_x^2 L_{\Delta T}^2} \\
&+ c\,(\Delta T)^{1/2} \, \|D_x^s F(\overrightarrow{u}_1(\tau))\|_{L_x^2 L_{\Delta T}^2} \\
&\leq c\,\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^s} + C\,(\Delta T)^{1/2} \, |||\overrightarrow{u}_1|||_s^2 \, |||\overrightarrow{u}_1|||_s \\
&\leq c\,\|\overrightarrow{u}_1\|_{L_{\Delta T}^\infty H^s} + \frac{1}{2} \, |||\overrightarrow{u}_1|||_s \\
&\leq c\,|||\overrightarrow{u}_1|||_s \,.
\end{aligned}$$

As outras estimativas são provadas de forma análoga. ∎

Lema 2.2.8 *Se $\overrightarrow{u}_2$ é a solução do PVI (2.16) então*

$$\|\partial_x \overrightarrow{u}_2\|_{L_x^4 L_{\Delta T}^2} \leq c\,(\Delta T)^{1/4} \, |||\overrightarrow{u}_2|||_s \quad s \geq \frac{1}{2}. \tag{2.42}$$

Se $\Delta T < 1$ então

$$\|\overrightarrow{u}_2\|_{L_x^2 L_{\Delta T}^\infty} \leq c\,|||\overrightarrow{u}_2|||_s \quad s > \frac{3}{4} \tag{2.43}$$

e

$$\|\overrightarrow{u}_2\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \leq c\,|||\overrightarrow{u}_2|||_s \quad s > \frac{1}{2}. \tag{2.44}$$

Demonstração: Para provar (2.42) usamos a equação integral para $\overrightarrow{u}_2$, a estimativa (2.37) e escolhemos

$$a = 2c \left\| \overrightarrow{u}_{0_2} \right\|_{H^s} \qquad \text{e} \qquad C\,(\Delta T)^{1/2} \left\|\left| \overrightarrow{u}_2 \right|\right\|_s^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned}
\|\partial_x \overrightarrow{u}_2\|_{L^4_x L^2_{\Delta T}} &\leq \|\partial_x W(t) \overrightarrow{u}_{0_2}\|_{L^4_x L^2_{\Delta T}} + \int_0^t \|\partial_x W(t-\tau) G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)(\tau)\|_{L^4_x L^2_{\Delta T}}\, d\tau \\
&\leq c(\Delta T)^{1/4} \left\| \overrightarrow{u}_{0_2} \right\|_{H^s} + c(\Delta T)^{1/4} \int_0^{\Delta T} \|G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)(\tau)\|_{H^s}\, d\tau \\
&\leq c(\Delta T)^{1/4} \Big[\|\overrightarrow{u}_2\|_{L^\infty_{\Delta T} H^s} + C\,(\Delta T)^{1/2} \|G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} \\
&+ C\,(\Delta T)^{1/2} \|D^s_x G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} \Big] \\
&\leq c(\Delta T)^{1/4} \left[\left\|\left| \overrightarrow{u}_2 \right|\right\|_s + C\,(\Delta T)^{1/2} \left\|\left| \overrightarrow{u}_2 \right|\right\|_s^2 \left\|\left| \overrightarrow{u}_2 \right|\right\|_s \right] \\
&\leq c(\Delta T)^{1/4} \left[\left\|\left| \overrightarrow{u}_2 \right|\right\|_s + \frac{1}{2} \left\|\left| \overrightarrow{u}_2 \right|\right\|_s \right] \\
&\leq c(\Delta T)^{1/4} \left\|\left| \overrightarrow{u}_2 \right|\right\|_s \;, \qquad s \geq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

As estimativas (2.43) e (2.44) são obtidas de forma análoga. ■

Proposição 2.2.9 *Defina*

$$z(t) = \int_0^t W(t-\tau) G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)(\tau) d\tau,$$

onde $G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)$ está definida em (2.20), $\overrightarrow{u}_1$ e $\overrightarrow{u}_2$ são as soluções do problema (2.11) e (2.16) com dados iniciais $\overrightarrow{u}_{0_1}$ e $\overrightarrow{u}_{0_2}$, respectivamente, satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.2.3 e do Corolário 2.2.4 . Se $\frac{3}{5} < s < 1$ então

$$\|z\|_{L^\infty_{\Delta T} H^1} \leq c N^{\frac{3-5s}{2}} \tag{2.45}$$

$$\|z\|_{L^\infty_{\Delta T} L^2} \leq c N^{-s} \tag{2.46}$$

Demonstração: A desigualdade (2.45) segue da seguinte estimativa

$$\|\partial_x z\|_{L^2_x} = \left\| \partial_x \int_0^t W(t-\tau) G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)(\tau) d\tau \right\|_{L^2_x} \leq c N^{\frac{3-5s}{2}},$$

que está mostrada abaixo. De fato, da definição de $G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)$ em (2.20) basta estimar ($U(t)$ como em (1.12)),

$$\left\| \partial_x \int_0^t U(t-\tau) \left[F(u_1 + u_2, w_1 + w_2) - F(u_1, w_1) \right] (\tau) d\tau \right\|_{L^2_x}, \tag{2.47}$$

Denotemos por $I_{\beta+\mu}$ os termos de (2.47) com coeficientes $(\beta+\mu)$, ou seja,

$$I_{\beta+\mu}=\left\|\partial_x\int_0^t U(t-\tau)\left[|u_1|^2u_{2x}+2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2)u_{1x}+...+|u_2|^2u_{1x}(\tau)\right]d\tau\right\|_{L^2_x}$$

Da mesma forma, denotemos

$$I_{\beta}=\left\|\partial_x\int_0^t U(t-\tau)\left[|w_1|^2u_{2x}+2\operatorname{Re}(w_1\overline{w}_2)u_{1x}+...+|w_2|^2u_{1x}(\tau)\right]d\tau\right\|_{L^2_x}$$
$$I_{\alpha}=\left\|\partial_x\int_0^t U(t-\tau)\left[|u_2|^2u_1+2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2)u_1+...+|w_2|^2u_2\right](\tau)d\tau\right\|_{L^2_x}$$
$$I_{\mu}^1=\left\|\partial_x\int_0^t U(t-\tau)\left[u_1^2\overline{u}_{2x}+2u_2u_1\overline{u}_{1x}+...+u_2^2\overline{u}_{1x}+u_2^2\overline{u}_{2x}\right](\tau)d\tau\right\|_{L^2_x}$$
$$I_{\mu}^2=\left\|\partial_x\int_0^t U(t-\tau)\left\{\left[\operatorname{Re}(w_{2x}\overline{w}_1)+...+\operatorname{Re}(w_{2x}\overline{w}_2)\right](u_1+u_2)+\operatorname{Re}(w_{1x}\overline{w}_1)u_2\right\}(\tau)d\tau\right\|_{L^2_x}$$

Portanto, (2.47) é limitado por

$$|\beta+\mu|\,I_{\beta+\mu}+|\beta|\,I_\beta+|\alpha|\,I_\alpha+|\mu|\left(I_\mu^1+I_\mu^2\right).$$

Os termos de $I_{\beta+\mu}$ são estimados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x\int_0^t U(t-\tau)\left[|u_1|^2u_{2x}\right](\tau)d\tau\right\|_{L^2_x}&\le c\left\||u_1|^2u_{2x}\right\|_{L^1_xL^2_{\Delta T}}\le c\|u_1\|^2_{L^2_xL^\infty_{\Delta T}}\|u_{2x}\|_{L^\infty_xL^2_{\Delta T}}\\&\le c\,|||\overrightarrow{u}_1|||^2_{\frac34+}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\le cN^{\frac{3-5s}{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x\int_0^t U(t-\tau)\left[2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2)u_{1x}\right](\tau)d\tau\right\|_{L^2_x}&\le c\|u_1\overline{u}_2u_{1x}\|_{L^1_xL^2_{\Delta T}}\\&\le c\|u_1\|_{L^{8/3}_xL^\infty_{\Delta T}}\|u_2\|_{L^5_xL^{10}_{\Delta T}}\|u_{1x}\|_{L^{40/17}_xL^{5/2}_{\Delta T}}(\Delta T)^{3/8}\\&\le c(\Delta T)^{3/8}\,|||\overrightarrow{u}_1|||_{\frac12+}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0\,|||\overrightarrow{u}_1|||_1\\&\le cN^{\frac{9-17s}{8}}\le cN^{\frac{3-5s}{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x\int_0^t U(t-\tau)\left[2\operatorname{Re}(u_1\overline{u}_2)u_{2x}\right](\tau)d\tau\right\|_{L^2_x}&\le c\|u_1\overline{u}_2u_{2x}\|_{L^1_xL^2_{\Delta T}}\\&\le c\|u_1\|_{L^{8/3}_xL^\infty_{\Delta T}}\|u_2\|_{L^{8/3}_xL^\infty_{\Delta T}}\|u_{2x}\|_{L^4_xL^2_{\Delta T}}\\&\le c\,|||\overrightarrow{u}_1|||_{\frac12+}\,||||\overrightarrow{u}_2|||_{\frac12+}(\Delta T)^{1/4}\,||||\overrightarrow{u}_2|||_{\frac12+}\\&\le cN^{\frac{5-9s}{4}}\le cN^{\frac{3-5s}{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x \int_0^t U(t-\tau)[|u_2|^2 u_{1x}](\tau) d\tau \right\|_{L_x^2} &\leq c \left\| |u_2|^2 u_{1x} \right\|_{L_x^1 L_{\Delta T}^2} \\
&\leq c \|u_2\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \|u_2\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \|u_{1x}\|_{L_x^4 L_{\Delta T}^2} \\
&\leq c \||\overrightarrow{u}_2|\|^2_{\frac{1}{2}+} (\Delta T)^{1/4} \||\overrightarrow{u}_1|\|_{\frac{1}{2}+} \\
&\leq c N^{\frac{5-9s}{4}} \leq c N^{\frac{3-5s}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x \int_0^t U(t-\tau) \left[|u_2|^2 u_{2x}\right] (\tau) d\tau \right\|_{L_x^2} &\leq c \left\| |u_2|^2 u_{2x} \right\|_{L_x^1 L_{\Delta T}^2} \\
& c \|u_2\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \|u_2\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \|u_{2x}\|_{L_x^4 L_{\Delta T}^2} \\
&\leq c \||\overrightarrow{u}_2|\|^3_{\frac{1}{2}+} (\Delta T)^{1/4} \leq c N^{\frac{5-11s}{4}} \leq c N^{\frac{3-5s}{2}}.
\end{aligned}$$

As estimativas para I_μ^1, I_β e I_μ^2 são análogas às de $I_{\beta+\mu}$, enquanto que os termos de I_α são estimados como segue:

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x \int_0^t U(t-\tau) \left[|u_2|^2 u_1\right] (\tau) d\tau \right\|_{L_x^2} &\leq c \left\| |u_2|^2 u_1 \right\|_{L_x^1 L_{\Delta T}^2} \\
&\leq c \|u_2\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \|u_2\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \|u_1\|_{L_x^4 L_{\Delta T}^2} \\
&\leq c \|u_2\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \|u_2\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} (\Delta T)^{1/2} \|u_1\|_{L_x^4 L_{\Delta T}^\infty} \\
&\leq c \||\overrightarrow{u}_2|\|^2_{\frac{1}{2}+} (\Delta T)^{1/2} \||\overrightarrow{u}_1|\|_{\frac{1}{4}} \\
&\leq c N^{\frac{3-7s}{4}} \leq c N^{\frac{3-5s}{2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x \int_0^t U(t-\tau) \left[2\operatorname{Re}(u_1 \overline{u}_2) u_1\right] (\tau) d\tau \right\|_{L_x^2} &\leq c \|u_1 \overline{u}_2 u_1\|_{L_x^1 L_{\Delta T}^2} \\
&\leq c \|u_1\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \|u_1\|_{L_x^2 L_{\Delta T}^\infty} \|u_2\|_{L_x^8 L_{\Delta T}^2} \\
&\leq c(\Delta T)^{3/8} \|u_1\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \|u_1\|_{L_x^2 L_{\Delta T}^\infty} \|u_2\|_{L_x^8 L_{\Delta T}^8} \\
&\leq c(\Delta T)^{3/8} \||\overrightarrow{u}_1|\|_{\frac{1}{2}+} \||\overrightarrow{u}_1|\|_{\frac{3}{4}+} \||\overrightarrow{u}_2|\|_0 \\
&\leq c N^{\frac{7-15s}{8}} \leq c N^{\frac{3-5s}{2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x \int_0^t U(t-\tau) \left[|w_2|^2 u_2\right] (\tau) d\tau \right\|_{L_x^2} &\leq c \left\| |w_2|^2 u_2 \right\|_{L_x^1 L_{\Delta T}^2} \\
&\leq c \|w_2\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \|w_2\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \|u_2\|_{L_x^4 L_{\Delta T}^2} \\
&\leq c(\Delta T)^{1/2} \|w_2\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \|w_2\|_{L_x^{8/3} L_{\Delta T}^\infty} \|u_2\|_{L_x^4 L_{\Delta T}^\infty} \\
&\leq c(\Delta T)^{1/2} \||\overrightarrow{u}_2|\|^2_{\frac{1}{2}+} \||\overrightarrow{u}_2|\|_{\frac{1}{4}} \\
&\leq c N^{\frac{3-10s}{4}} \leq c N^{\frac{3-5s}{2}}
\end{aligned}$$

Os outros termos de I_α são estimados de forma análoga.

Para provar (2.46) estimamos $\|z\|_{L^2_x}$ como na demonstração da proposição 2.2.5.

$$\begin{aligned}
\|z\|_{L^2_x} &= \left\| \int_0^t W(t-\tau)G(\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_1)(\tau)d\tau \right\|_{L^2_x} \leq c\,(\Delta T)^{1/2}\,\|G(\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_1)\|_{L^2_x L^2_{\Delta T}} \\
&\leq C(\Delta T)^{1/2}\{|||\overrightarrow{u}_1|||^2_{1/4} + |||\overrightarrow{u}_1|||_{1/4}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_{1/4} + |||\overrightarrow{u}_2|||^2_{1/4}\}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0 \\
&\leq \frac{1}{6}\,|||\overrightarrow{u}_2|||_0 \leq cN^{-s} \leq cN^{\frac{3-5s}{2}},
\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. ■

Agora passaremos à prova do Teorema 2.2.1.

Demonstração: (Teorema 2.2.1) Utilizaremos um método iterativo para a demonstração deste teorema. Consideremos o PVI (2.11) com dado inicial $\overrightarrow{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, $\frac{3}{5} < s < 1$. Inicialmente (primeira iteração ($k = 1$)) decompomos $\overrightarrow{u}_0 = \overrightarrow{u}_{0_1} + \overrightarrow{u}_{0_2}$ como em (2.12)-(2.14), para N fixo. Consideremos o PVI (2.11) com dado inicial $\overrightarrow{u}_{0_1}$. Como $\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{L^2} \leq c$ e $\|\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^1} \leq cN^{1-s}$ (desigualdade (2.15)), segue do Teorema 2.2.2 que existe uma única solução $\overrightarrow{u}_1$ deste problema no intervalo $[0,\Delta T]$ com $\Delta T \sim N^{-(1-s)}$ e $\|\overrightarrow{u}_1(\Delta T)\|_{H^1} \leq \|\overrightarrow{u}_1\|_{L^\infty_{\Delta T} H^1} \leq cN^{1-s}$. Por outro lado, para o PVI (2.16) com dado inicial $\overrightarrow{u}_{0_2}$, $\|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^\rho} \leq cN^{\rho-s}$ e $\frac{1}{4} \leq \rho < s$, o Teorema 2.2.3 garante a existência de uma única solução $\overrightarrow{u}_2$ definida no mesmo intervalo de existência da solução $\overrightarrow{u}_1$. Notemos que

$$\overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{u}_1(t)+\overrightarrow{u}_2(t) \quad \text{onde} \quad \overrightarrow{u}_2(t) = W(t)\overrightarrow{u}_{0_2} - \int_0^t W(t-\tau)G(\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_1)(\tau)d\tau\ , \quad t \in [0,\Delta T].$$

Sejam

$$\overrightarrow{u}^{(1)}(t) =: \overrightarrow{u}(t)\ , \quad \overrightarrow{u}^{(1)}_1(t) =: \overrightarrow{u}_1(t) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{u}^{(1)}_2(t) =: \overrightarrow{u}_2(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}^{(1)}(\Delta T) &= \overrightarrow{u}^{(1)}_1(\Delta T) + W(\Delta T)\overrightarrow{u}_{0_2} - \int_0^{\Delta T} W(\Delta T-\tau)G(\overrightarrow{u}^{(1)}_2,\overrightarrow{u}^{(1)}_1)(\tau)d\tau \\
&= \overrightarrow{u}^{(1)}_1(\Delta T) + z^{(1)}(\Delta T) + W(\Delta T)\overrightarrow{u}_{0_2} \\
&= \overrightarrow{u}_{1_1} + \overrightarrow{u}_{2_1}
\end{aligned}$$

onde

$$z^{(1)}(\Delta T) = -\int_0^{\Delta T} W(\Delta T-\tau)G(\overrightarrow{u}^{(1)}_2,\overrightarrow{u}^{(1)}_1)(\tau)d\tau,$$

$$\overrightarrow{u}_{1_1} = \overrightarrow{u}^{(1)}_1(\Delta T) + z^{(1)}(\Delta T) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{u}_{2_1} = W(\Delta T)\overrightarrow{u}_{0_2}.$$

Segue do Teorema 2.2.2 e da Proposição 2.2.9 que

$$\|\overrightarrow{u}_{1_1}\|_{H^1} \leq \left\|\overrightarrow{u}_1^{(1)}(\Delta T)\right\|_{H^1} + \left\|z^{(1)}(\Delta T)\right\|_{H^1} \leq cN^{1-s} + cN^{\frac{3-5s}{2}}$$

e

$$\|\overrightarrow{u}_{2_1}\|_{H^\rho} = \|W(\Delta T)\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^\rho} = \|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^\rho} \leq cN^{\rho-s}.$$

Para estendermos a solução $\overrightarrow{u}$ ao intervalo $[\Delta T, 2\Delta T]$ vamos à segunda iteração ($k = 2$). Consideramos o PVI (2.11) com novo dado inicial $\overrightarrow{u}(\Delta T)$, decomposto da forma $\overrightarrow{u}(\Delta T) = \overrightarrow{u}^{(1)}(\Delta T) = \overrightarrow{u}_{1_1} + \overrightarrow{u}_{2_1}$. Novamente, consideramos o PVI (2.11) e PVI (2.16) com dados iniciais $\overrightarrow{u}_{1_1}$ e $\overrightarrow{u}_{2_1}$, respectivamente. Pelos Teoremas 2.2.2 e 2.2.3 garantimos a existência de únicas soluções $\overrightarrow{u}_1^{(2)}$ e $\overrightarrow{u}_2^{(2)}$ de (2.11) e (2.16) e consequentemente, $\overrightarrow{u}(t+\Delta T) =: \overrightarrow{u}^{(2)}(t) = \overrightarrow{u}_1^{(2)}(t) + \overrightarrow{u}_2^{(2)}(t)$ é solução de (2.11) para $t \in [0, \Delta T]$, onde $\left\|\overrightarrow{u}_1^{(2)}\right\|_{L^\infty_{\Delta T}H^1} \leq c\,\|\overrightarrow{u}_{1_1}\|_{H^1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}(2\Delta T) =: \overrightarrow{u}^{(2)}(\Delta T) &= \overrightarrow{u}_1^{(2)}(\Delta T) + \overrightarrow{u}_2^{(2)}(\Delta T) \\
&= \overrightarrow{u}_1^{(2)}(\Delta T) + W(\Delta T)\overrightarrow{u}_{2_1} - \int_0^{\Delta T} W(\Delta T - \tau)G(\overrightarrow{u}_2^{(2)}, \overrightarrow{u}_1^{(2)})(\tau)d\tau \\
&= \overrightarrow{u}_1^{(2)}(\Delta T) + z^{(2)}(\Delta T) + W(\Delta T)\overrightarrow{u}_{2_1} \\
&= \overrightarrow{u}_{1_2} + \overrightarrow{u}_{2_2}
\end{aligned}$$

onde

$$z^{(2)}(\Delta T) = -\int_0^{\Delta T} W(\Delta T - \tau)G(\overrightarrow{u}_2^{(2)}, \overrightarrow{u}_1^{(2)})(\tau)d\tau,$$

$$\overrightarrow{u}_{1_2} = \overrightarrow{u}_1^{(2)}(\Delta T) + z^{(2)}(\Delta T) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{u}_{2_2} = W(\Delta T)\overrightarrow{u}_{2_1}.$$

Segue do Teorema 2.2.2 e da Proposição 2.2.9 que

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}_{1_2}\|_{H^1} &\leq \left\|\overrightarrow{u}_1^{(2)}(\Delta T)\right\|_{H^1} + \left\|z^{(2)}(\Delta T)\right\|_{H^1} \leq \left\|\overrightarrow{u}_1^{(2)}\right\|_{L^\infty_{\Delta T}H^1} + \left\|z^{(2)}(\Delta T)\right\|_{H^1} \\
&\leq c\,\|\overrightarrow{u}_{1_1}\|_{H^1} + \left\|z^{(2)}(\Delta T)\right\|_{H^1} \\
&\leq cN^{1-s} + cN^{\frac{3-5s}{2}} + cN^{\frac{3-5s}{2}} \\
&= cN^{1-s} + 2cN^{\frac{3-5s}{2}}
\end{aligned}$$

e

$$\|\overrightarrow{u}_{2_2}\|_{H^\rho} = \|W(\Delta T)\overrightarrow{u}_{2_1}\|_{H^\rho} = \|\overrightarrow{u}_{2_1}\|_{H^\rho} = \|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^\rho} \leq cN^{\rho-s}.$$

Na k-ésima iteração, teremos

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{u}(k\Delta T) =: \overrightarrow{u}^{(k)}(\Delta T) &= \overrightarrow{u}_1^{(k)}(\Delta T) + \overrightarrow{u}_2^{(k)}(\Delta T) \\
&= \overrightarrow{u}_1^{(k)}(\Delta T) + W(\Delta T)\overrightarrow{u}_{2_{k-1}} - \int_0^{\Delta T} W(\Delta T - \tau) G(\overrightarrow{u}_2^{(k)}, \overrightarrow{u}_1^{(k)})(\tau) d\tau \\
&= \overrightarrow{u}_1^{(k)}(\Delta T) + z^{(k)}(\Delta T) + W(\Delta T)\overrightarrow{u}_{2_{k-1}} \\
&= \overrightarrow{u}_{1_k} + \overrightarrow{u}_{2_k}
\end{aligned}
$$

onde

$$
z^{(k)}(\Delta T) = -\int_0^{\Delta T} W(\Delta T - \tau) G(\overrightarrow{u}_2^{(k)}, \overrightarrow{u}_1^{(k)})(\tau) d\tau
$$

$$
\overrightarrow{u}_{1_k} = \overrightarrow{u}_1^{(k)}(\Delta T) + z^{(k)}(\Delta T) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{u}_{2_k} = W(\Delta T)\overrightarrow{u}_{2_{k-1}}.
$$

Segue do Teorema 2.2.2 e da Proposição 2.2.9 que

$$
\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}_{1_k}\|_{H^1} &\leq \left\|\overrightarrow{u}_1^{(k)}(\Delta T)\right\|_{H^1} + \left\|z^{(k)}(\Delta T)\right\|_{H^1} \leq \left\|\overrightarrow{u}_1^{(k)}\right\|_{L^\infty_{\Delta T} H^1} + \left\|z^{(k)}(\Delta T)\right\|_{H^1} \\
&\leq c\left\|\overrightarrow{u}_{1_{k-1}}\right\|_{H^1} + \left\|z^{(k)}(\Delta T)\right\|_{H^1} \\
&\leq cN^{1-s} + (k-1)cN^{\frac{3-5s}{2}} + cN^{\frac{3-5s}{2}} = cN^{1-s} + kcN^{\frac{3-5s}{2}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\|\overrightarrow{u}_{2_k}\|_{H^\rho} = \left\|W(\Delta T)\overrightarrow{u}_{2_{k-1}}\right\|_{H^\rho} = \left\|\overrightarrow{u}_{2_{k-1}}\right\|_{H^\rho} = \|\overrightarrow{u}_{0_2}\|_{H^\rho} \leq cN^{\rho - s}.
$$

Para alcançarmos o tempo $T = k\Delta T$ (o número de iterações será $k = \frac{T}{\Delta T}$) precisamos garantir o mesmo tempo de existência das soluções em cada iteração $\Delta T \sim N^{-(1-s)}$. Para isto, precisamos que a norma $H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$ de $\overrightarrow{u}_{1_k}$ tenha crescimento uniforme como N^{1-s}, isto é,

$$
\|\overrightarrow{u}_{1_k}\|_{H^1} \leq c(N^{1-s} + kN^{\frac{3-5s}{2}}) \leq cN^{1-s},
$$

ou equivalentemente,

$$
kN^{\frac{3-5s}{2}} = \frac{T}{\Delta T} N^{\frac{3-5s}{2}} \sim TN^{1-s}N^{\frac{3-5s}{2}} \leq cN^{1-s}.
$$

Logo, escolhemos

$$
N(T) \sim T^{\frac{2}{5s-3}} \quad \text{para} \quad \frac{3}{5} < s < 1.
$$

Com esta escolha de N a condição $\|\overrightarrow{u}_{1_k}\|_{L^2} \leq c$ fica também satisfeita, pois

$$
kN^{-s} = \frac{T}{\Delta T} N^{-s} \sim TN^{1-s}N^{-s} < cN^{\frac{5s-3}{2}} N^{1-s} N^{-s} \leq c.
$$

Voltando à decomposição do dado inicial $\overrightarrow{u}_0 = \overrightarrow{u}_{0_1} + \overrightarrow{u}_{0_2}$, obtemos

$$
\overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{u}_1(t) + \overrightarrow{u}_2(t) \ , \ \ t \in [0, T]
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{u}_2(t) &= W(t)\overrightarrow{u}_{0_2} - \int_0^t W(t-\tau)G(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1)(\tau)d\tau \\
&= W(t)\overrightarrow{u}_0 - W(t)\overrightarrow{u}_{0_1} + z(t).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{u}(t) &= \overrightarrow{u}_1(t) + W(t)\overrightarrow{u}_0 - W(t)\overrightarrow{u}_{0_1} + z(t) \\
&= W(t)\overrightarrow{u}_0 + g(t),
\end{aligned}
$$

onde $g(t) = \overrightarrow{u}_1(t) - W(t)\overrightarrow{u}_{0_1} + z(t)$. Da escolha de N, segue que

$$
\begin{aligned}
\|g(t)\|_{H^1} &\leq \|\overrightarrow{u}_1(t)\|_{H^1} + \|W(t)\overrightarrow{u}_{0_1}\|_{H^1} + \|z(t)\|_{H^1} \\
&\leq cN^{1-s} \sim T^{\frac{2(1-s)}{5s-3}}.
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\sup_{[0,T]} \|\overrightarrow{g}(t)\|_{H^1} \leq cT^{2(1-s)/5s-3},
$$

o que completa a demonstração do teorema. ■

Capítulo 3

Resultado de má colocação

Nosso objetivo inicial é construir uma família de soluções a dois parâmetros $(N,\ \theta)$ para o problema de Cauchy associado ao sistema de equações do tipo Schrödinger não linear de terceira ordem

$$\begin{cases} 2i\partial_t u + q\partial_x^2 u + i\gamma\partial_x^3 u + 2i\beta(|u|^2 + \sigma_\beta |w|^2)\partial_x u + 2i\mu u\partial_x(|u|^2 + \sigma_\mu |w|^2) \\ +2\alpha u(|u|^2 + \sigma_\alpha |w|^2) = 0 \\ 2i\partial_t w + q\partial_x^2 w + i\gamma\partial_x^3 w + 2i\beta(|w|^2 + \sigma_\beta |u|^2)\partial_x w + 2i\mu w\partial_x(|w|^2 + \sigma_\mu |u|^2) \\ +2\alpha w(|w|^2 + \sigma_\alpha |u|^2) = 0 \\ u(x,0) = e^{iNx}\theta f(\theta x) \ \text{ e } w(x,0) = e^{iNx}\theta g(\theta x) \ . \end{cases} \tag{3.1}$$

Estas soluções serão utilizadas para estabelecer um resultado de má colocação que será apresentado neste capítulo.

Procuramos soluções do sistema (3.1) da seguinte forma

$$\begin{aligned} u_{N,\theta}(x,t) &= e^{iNx}e^{iHt}\theta f\left(\theta(x-ct)\right), \\ w_{N,\theta}(x,t) &= e^{iNx}e^{iJt}\theta g\left(\theta(x-ct)\right), \end{aligned} \tag{3.2}$$

com J e H a serem determinados.

Se $\eta = (x-ct)\theta$ então $u_{N,\theta}$ e $w_{N,\theta}$ satisfazem às equações

$$\begin{aligned} &(q\theta^3 - 3N\gamma\theta^3)\frac{d^2 f}{d\eta^2} + (2\alpha\sigma_\alpha\theta^3 - 2\beta\sigma_\beta N\theta^3)fg^2 \\ &+ (2\alpha\theta^3 - 2\beta N\theta^3)f^3 + (N^3\gamma\theta - 2\theta H - qN^2\theta)f \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}&\gamma\theta^4\frac{d^3f}{d\eta^3}+(2\beta\theta^4+4\mu\theta^4)f^2\frac{df}{d\eta}+2\beta\sigma_\beta\theta^4g^2\frac{df}{d\eta}\\&+4\mu\sigma_\mu\theta^4fg\frac{dg}{d\eta}+(2qN\theta^2-2\theta^2c-3N^2\gamma\theta^2)\frac{df}{d\eta}\\&=0\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}&(q\theta^3-3N\gamma\theta^3)\frac{d^2g}{d\eta^2}+(2\alpha\sigma_\alpha\theta^3-2\beta\sigma_\beta N\theta^3)gf^2\\&+(2\alpha\theta^3-2\beta N\theta^3)g^3+(N^3\gamma\theta-2\theta J-qN^2\theta)g\\&=0\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}&\gamma\theta^4\frac{d^3g}{d\eta^3}+(2\beta\theta^4+4\mu\theta^4)g^2\frac{dg}{d\eta}+2\beta\sigma_\beta\theta^4f^2\frac{dg}{d\eta}\\&+4\mu\sigma_\mu\theta^4fg\frac{df}{d\eta}+(2qN\theta^2-2\theta^2c-3N^2\gamma\theta^2)\frac{dg}{d\eta}\\&=0\end{aligned}\tag{3.6}$$

Seja $\lambda\in\mathbb{R}$, com $\lambda\neq 0$. Supondo $g=\lambda f$ nas equações (3.3)-(3.6) e integrando as equações (3.4) e (3.6) em relação à η obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}&\frac{d^2f}{d\eta^2}+\frac{(N^3\gamma\theta-2\theta H-qN^2\theta)}{q\theta^3-3N\gamma\theta^3}f\\&+\frac{[2\alpha\theta^3-2\beta N\theta^3+\lambda^2(-2\beta\sigma_\beta N\theta^3+2\alpha\sigma_\alpha\theta^3)]}{q\theta^3-3N\gamma\theta^3}f^3\\&=0,\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d^2f}{d\eta^2}+\frac{(2qN\theta^2-2\theta^2c-3N^2\gamma\theta^2)}{\gamma\theta^4}f\\&+\frac{[2\beta\theta^4+4\mu\theta^4+\lambda^2(2\beta\sigma_\beta\theta^4+4\mu\sigma_\mu\theta^4)]}{3\gamma\theta^4}f^3\\&=0,\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d^2f}{d\eta^2}+\frac{(N^3\gamma\theta-2\theta J-qN^2\theta)}{q\theta^3-3N\gamma\theta^3}f\\&+\frac{[2\alpha\sigma_\alpha\theta^3-2\beta\sigma_\beta N\theta^3+\lambda^2(-2\beta N\theta^3+2\alpha\theta^3)]}{q\theta^3-3N\gamma\theta^3}f^3\\&=0,\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2f}{d\eta^2}+\frac{(2qN\theta^2-2\theta^2c-3N^2\gamma\theta^2)}{\gamma\theta^4}f\\
&\frac{[2\beta\sigma_\beta\theta^4+4\mu\sigma_\mu\theta^4+\lambda^2(2\beta\theta^4+4\mu\theta^4)]}{3\gamma\theta^4}f^3 \qquad (3.10)\\
&=0.
\end{aligned}$$

As equações (3.7)-(3.9) formam um sistema consistente se as quatro igualdades abaixo se verificam.

$$(\lambda^2-1)[\beta\sigma_\beta+2\mu\sigma_\mu-(\beta+2\mu)]=0, \qquad (3.11)$$

$$H=J=\frac{c(q-3N\gamma)-N(q-2N\gamma)^2}{\gamma}, \qquad (3.12)$$

$$\frac{[-2\beta\sigma_\beta N+2\alpha\sigma_\alpha+\lambda^2(-2\beta N+2\alpha)]}{q-3N\gamma}=\frac{[2\beta\sigma_\beta+4\mu\sigma_\mu+\lambda^2(2\beta+4\mu)]}{3\gamma}, \qquad (3.13)$$

$$\frac{[-2\beta N+2\alpha+\lambda^2(-2\beta\sigma_\beta N+2\alpha\sigma_\alpha)]}{q-3N\gamma}=\frac{[2\beta+4\mu+\lambda^2(2\beta\sigma_\beta+4\mu\sigma_\mu)]}{3\gamma}. \qquad (3.14)$$

A condição (3.11) foi obtida igualando as equações (3.8) e (3.10). A condição (3.12) foi obtida igualando as equações (3.7) com (3.8) e (3.9) com (3.10).

Para que as igualdades (3.13) e (3.14) sejam satisfeitas independentes do parâmetro N vamos tomar $\mu=0$, $\sigma_\alpha=\sigma_\beta$ e $\alpha=\frac{q\beta}{3\gamma}$. Neste caso, reescrevemos (3.13) e (3.14) como

$$\frac{[-\beta\sigma_\beta N+\frac{q\beta}{3\gamma}\sigma_\beta+\lambda^2(-\beta N+\frac{q\beta}{3\gamma})]}{q-3N\gamma}=\frac{[\beta\sigma_\beta+\lambda^2\beta]}{3\gamma}, \qquad (3.15)$$

$$\frac{[-\beta N+\frac{q\beta}{3\gamma}+\lambda^2(-\beta\sigma_\beta N+\frac{q\beta}{3\gamma}\sigma_\beta)]}{q-3N\gamma}=\frac{[\beta+\lambda^2\beta\sigma_\beta]}{3\gamma}. \qquad (3.16)$$

Chamando

$$c=c(N,\theta)=\frac{\gamma\theta^2+2qN-3N^2\gamma}{2}, \qquad (3.17)$$

obtemos de (3.7)-(3.10) a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2f}{d\eta^2}-f+\frac{[2(\beta\sigma_\beta+\lambda^2\beta)]}{3\gamma}f^3=0 \qquad (3.18)$$

cuja solução é dada por

$$f(\eta)=\frac{\mathrm{sech}(\eta)}{[(\beta\sigma_\beta+\lambda^2\beta)/3\gamma]^{1/2}} \quad \text{se} \quad \frac{(\beta\sigma_\beta+\lambda^2\beta)}{\gamma}>0. \qquad (3.19)$$

Assim, obtemos uma família de soluções a dois parâmetros para o PVI (3.1) no caso $\mu=0$, $\sigma_\alpha=\sigma_\beta$, $\alpha=\frac{q\beta}{3\gamma}$ e $\frac{(\beta\sigma_\beta+\lambda^2\beta)}{\gamma}>0$, dada por

$$\begin{aligned}
u_{N,\theta}(x,t)&=e^{iNx}e^{iH(N,\theta)t}f_\theta\left(x-c(N,\theta)t\right) \qquad (3.20)\\
w_{N,\theta}(x,t)&=\lambda e^{iNx}e^{iH(N,\theta)t}f_\theta\left(x-c(N,\theta)t\right),
\end{aligned}$$

com dados iniciais

$$u(x,0) = e^{iNx} f_\theta(x) \qquad w(x,0) = \lambda e^{iNx} f_\theta(x),$$

onde

$$H(N,\theta) = \frac{(\gamma\theta^2 + 2qN - 3N^2\gamma)(q - 3N\gamma) - 2N(q - 2N\gamma)^2}{2\gamma} \tag{3.21}$$

e $f_\theta(x) = \theta f(\theta x)$.

As funções $u_{N,\theta}(x,t)$ e $w_{N,\theta}(x,t)$ pertencem aos espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \pi \frac{\operatorname{sech}(\xi\pi/2)}{[(\beta\sigma_\beta + \lambda^2\beta)/3\gamma]^{1/2}}. \tag{3.22}$$

Como $\widehat{f}(.)$ se concentra na $B_1(0) = \{\xi \in \mathbb{R} \colon |\xi| < 1\}$ e $\widehat{f_\theta}(\xi) = \widehat{f}(\frac{\xi}{\theta})$, segue que $\widehat{f_\theta}(.)$ se concentra na $B_\theta(0)$.

Utilizaremos a família de soluções a dois parâmetros obtidas em (3.20) para a prova do seguinte resultado

Teorema 3.0.10 *Se $s \in (-1/2, 1/4)$ então a aplicação dado-solução $\overrightarrow{u}(0) \to \overrightarrow{u}(t)$, onde $\overrightarrow{u} = (u,w)$ é a solução do PVI (3.1) no caso $\mu = 0$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$, $\alpha = \frac{q\beta}{3\gamma}$ e $\frac{(\beta\sigma_\beta + \lambda^2\beta)}{\gamma} > 0$, não é uniformemente contínua de $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ em Y_T, onde*

$$Y_T = \left\{ \overrightarrow{u} \in C([-T,T]\,; H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})) /\ |||\overrightarrow{u}|||_s = \max_{j=1,\dots,6} \mu_j^T(\overrightarrow{u}) < \infty \right\}.$$

Demonstração: Consideremos $\overrightarrow{u}_{N_1,\theta} = (u_{N_1,\theta}, w_{N_1,\theta})$ e $\overrightarrow{u}_{N_2,\theta} = (u_{N_2,\theta}, w_{N_2,\theta})$ duas soluções do PVI (3.1) dadas em (3.20). Vamos mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ temos

$$\|\overrightarrow{u}_{N_1,\theta}(0) - \overrightarrow{u}_{N_2,\theta}(0)\|_{H^s(\mathbb{R})} < \delta,$$

com $\|\overrightarrow{u}_{N_1,\theta}(0)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C$ e $\|\overrightarrow{u}_{N_2,\theta}(0)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C$ e

$$\|\overrightarrow{u}_{N_1,\theta}(T) - \overrightarrow{u}_{N_2,\theta}(T)\|_{H^s(\mathbb{R})} \geq \varepsilon,$$

para algum $T < \infty$, N_1, N_2 e θ que serão determinados adiante. Consequentemente,

$$\mu_1^T(\overrightarrow{u}_{N_1,\theta} - \overrightarrow{u}_{N_2,\theta}) \geq c \sup_{t\in[-T,T]} \|\overrightarrow{u}_{N_1,\theta}(t) - \overrightarrow{u}_{N_2,\theta}(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \geq \varepsilon. \tag{3.23}$$

Sejam N_1, $N_2 \simeq N$, $N > 0$ suficientemente grande e $\theta < \frac{N}{2}$. Fixado $s \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|u_{N_j,\theta}(0)\right\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\mathcal{F}\left(e^{iN_j x} f_\theta\right)(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\widehat{f}_\theta\left(\xi - N_j\right)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\widehat{f}\left(\frac{\xi - N_j}{\theta}\right)\right|^2 d\xi \\
&\leq c \int_{\xi \in B_\theta(N)} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\widehat{f}\left(\frac{\xi - N_j}{\theta}\right)\right|^2 d\xi \\
&\leq cN^{2s} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}\left(\frac{\xi - N_j}{\theta}\right)\right|^2 d\xi = cN^{2s}\theta \left\|f\right\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

para $j = 1, 2$. A última desigualdade de (3.24) segue do fato que se $\xi \in B_\theta(N)$ então $|\xi| \simeq N$.

Analogamente,

$$\left\|w_{N_j,\theta}(0)\right\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 \leq cN^{2s}\theta\lambda^2 \left\|f\right\|_{L^2}^2. \tag{3.25}$$

Para que $\left\|\overrightarrow{u}_{N_j,\theta}(0)\right\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 \leq C$, tomemos

$$\theta = N^{-2s} < \frac{N}{2}. \tag{3.26}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\left\|u_{N_1,\theta}(0) - u_{N_2,\theta}(0)\right\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\mathcal{F}\left(e^{iN_1 x} f_\theta - e^{iN_2 x} f_\theta\right)(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\widehat{f}_\theta(\xi - N_1) - \widehat{f}_\theta\left(\xi - N_2\right)\right|^2 d\xi \\
&= I,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\widehat{f}(\frac{\xi - N_1}{\theta}) - \widehat{f}\left(\frac{\xi - N_2}{\theta}\right)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\int_0^1 \widehat{f}\,'\left(\frac{\xi - N_2 + \rho(N_2 - N_1)}{\theta}\right)\left(\frac{N_2 - N_1}{\theta}\right) d\rho\right|^2 d\xi \\
&= \frac{(N_2 - N_1)^2}{\theta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\int_0^1 \widehat{f}\,'\left(\frac{\xi - [(1-\rho)N_2 + \rho N_1]}{\theta}\right) d\rho\right|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Portanto, limitamos $\|u_{N_1,\theta}(0)-u_{N_2,\theta}(0)\|^2_{H^s(\mathbb{R})}$ por

$$
\begin{aligned}
&\frac{(N_2-N_1)^2}{\theta^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|\xi|^2\right)^s\int_0^1\left|\,\widehat{f}\,'\left(\frac{\xi-[(1-\rho)N_2+\rho N_1]}{\theta}\right)\right|^2 d\rho d\xi \qquad (3.27)\\
&\le c\frac{(N_2-N_1)^2}{\theta^2}\int_0^1\int_{B_\theta((1-\rho)N_2+\rho N_1)}\left(1+|\xi|^2\right)^s\left|\,\widehat{f}\,'\left(\frac{\xi-[(1-\rho)N_2+\rho N_1]}{\theta}\right)\right|^2 d\xi d\rho\\
&\le c_1\frac{(N_2-N_1)^2}{\theta^2}N^{2s}\theta\int_0^1\int_{B_\theta((1-\rho)N_2+\rho N_1)}\left|\,\widehat{f}\,'\left(y-\frac{[(1-\rho)N_2+\rho N_1]}{\theta}\right)\right|^2 dy d\rho\\
&\le c_1(N^{2s}(N_2-N_1))^2\|f'\|^2_{L^2}=C(N^{2s}(N_2-N_1))^2.
\end{aligned}
$$

Na desigualdade (3.27) foi utilizado o fato de que se $\xi\in B_\theta((1-\rho)N_2+\rho N_1)$ então $|\xi|\simeq N$.

Analogamente,

$$\|w_{N_1,\theta}(0)-w_{N_2,\theta}(0)\|^2_{H^s(\mathbb{R})}\le c\lambda^2(N^{2s}(N_2-N_1))^2\|f'\|^2_{L^2}=C(N^{2s}(N_2-N_1))^2. \qquad (3.28)$$

Agora consideremos as soluções $\overrightarrow{u}_{N_1,\theta}(t)$ e $\overrightarrow{u}_{N_2,\theta}(t)$ em $t=T$. Então

$$
\begin{aligned}
\left\|u_{N_j,\theta}(T)\right\|^2_{H^s(\mathbb{R})}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|\xi|^2\right)^s\left|\mathcal{F}\left(e^{iN_jx}e^{iH(N_j,\theta)T}f_\theta\left(x-c(N_j,\theta)T\right)\right)(\xi)\right|^2 d\xi\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|\xi|^2\right)^s\left|\mathcal{F}\left(e^{iN_jx}f_\theta\left(x-c(N_j,\theta)T\right)\right)(\xi)\right|^2 d\xi \qquad (3.29)\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|\xi|^2\right)^s\left|\mathcal{F}\left(e^{iN_j(x-c(N_j,\theta)T)}f_\theta\left(x-c(N_j,\theta)T\right)\right)(\xi)\right|^2 d\xi\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|\xi|^2\right)^s\left|\widehat{f}(\frac{\xi-N_j}{\theta})\right|^2 d\xi\\
&\simeq cN^{2s}\theta\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{f}(y-\frac{N_j}{\theta})\right|^2 dy=c\|f\|^2_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Para T fixo e $N\ge\frac{|q|}{|\gamma c|}$, segue que

$$
\begin{aligned}
|c(N_1,\theta)T-c(N_2,\theta)T|&=\frac{T}{2}\left|3\gamma(-N_1^2+N_2^2)+2q(N_1-N_2)\right| \qquad (3.30)\\
&=\frac{T}{2}|N_2-N_1|\,|3\gamma(N_1+N_2)+2q|\ge T|N_2-N_1|\,(|3\gamma cN|-|q|)\\
&\ge cT|N_2-N_1|N.
\end{aligned}
$$

Suponhamos que

$$|c(N_1,\theta)T - c(N_2,\theta)T| >> \theta^{-1}. \tag{3.31}$$

A desigualdade (3.31) é satisfeita com as escolhas adequadas para N_1 , N_2 e $T < \infty$:

$$N_1 = N, \qquad N_2 = N - \frac{\delta}{N^{2s}}, \qquad \delta = N^{2s}\,|N_1 - N_2| \tag{3.32}$$

$$cT\frac{\delta}{N^{2s}}N > N^{2s} \tag{3.33}$$

Para que T seja limitado, consideramos

$$cT > N^{4s-1} \qquad \text{e} \qquad s < \frac{1}{4}.$$

■

A desigualdade (3.31) garante que no tempo $t = T$ não haverá iteração entre as ondas e consequentemente,

$$\begin{aligned}
\|u_{N_1,\theta}(T) - u_{N_2,\theta}(T)\|^2_{H^s(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\mathcal{F}\left(u_{N_1,\theta}(T) - u_{N_2,\theta}(T)\right)(\xi)|^2\, d\xi \\
&\geq \int_{B_{3\theta}(N)} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\mathcal{F}\left(u_{N_1,\theta}(T) - u_{N_2,\theta}(T)\right)(\xi)|^2\, d\xi \\
&\geq cN^{2s}\int_{B_{3\theta}(N)} |\mathcal{F}\left(u_{N_1,\theta}(T) - u_{N_2,\theta}(T)\right)(\xi)|^2\, d\xi \\
&\geq \frac{1}{2}cN^{2s}\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}\left(u_{N_1,\theta}(T) - u_{N_2,\theta}(T)\right)(\xi)|^2\, d\xi \qquad (3.31) \\
&= c_1 N^{2s}\,\|u_{N_1,\theta}(T) - u_{N_2,\theta}(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\|u_{N_1,\theta}(T) - u_{N_2,\theta}(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|u_{N_1,\theta}(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|u_{N_2,\theta}(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\quad - 2\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(u_{N_1,\theta}\overline{u_{N_2,\theta}})(x,T)dx\right) \qquad (3.32) \\
&\geq \|u_{N_1,\theta}(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|u_{N_2,\theta}(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = cN^{-2s}.
\end{aligned}$$

Segue de (3.31) e (3.32) que

$$\|u_{N_1,\theta}(T) - u_{N_2,\theta}(T)\|^2_{H^s(\mathbb{R})} \geq cN^{2s}N^{-2s} = c.$$

Bibliografia

[1] J. Angulo, *Stability of cnoidal waves to Hirota-Satsuma systems*, Matemática Contemporânea **27** (2004),189-223.

[2] S. G. Bindu, A. Mahalingam, K. Porsezian, *Dark soliton solutions of the coupled Hirota equation in nonlinear fiber*, Physics Letters A **286** (2001) 321-331.

[3] J. Bourgain, *Refinements of Strichartz's inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity,* IMRN International Mathematics Research Notices **5** (1998), 253-283.

[4] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, part I: Schrödinger equation, part II: The KdV equation,* GAFA **3** (1993), 107-156, 209-262.

[5] X. Carvajal, *Propriedades das soluções de uma equação de Schrödinger não linear de alta ordem*, PhD Thesis, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, Rio de Janeiro, (2002).

[6] X. Carvajal, F. Linares, *A higher order nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients*, Differential and Integral Equations **16** (2003), 1111-1130.

[7] X. Carvajal, *Local well-posedness for a higher order nonlinear Schrödinger equation*, Eletronics Journal of Differential Equations **13** (2004), 1-10.

[8] X. Carvajal, *Sharp global well-posedness for a higher order Schrödinger equation,* Journal of Fourier Analysis and Applications **12**, number **1**, (2006), 53-70.

[9] E. DiBenedetto, *Real analysis,* Birkhäuser advanced Texts, Boston, (2002).

[10] L. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, vol 19, American Mathematical Society, (1998).

[11] G. Fonseca, F. Linares, G. Ponce, *Global well-posedness for the modified Korteweg-de Vries equation*, Comm. Partial Differential Equations **24** (1999) 683-705.

[12] A. Friedman, *Partial differential equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, (1976).

[13] J. Hadamard, *Lecture on Cauchy's problem in linear partial differential equations,* New Haven, London, (1923).

[14] A. Hasegawa, Y. Kodama, *Nonlinear pulse propagation in a monomode dieletric guide,* IEEE Journal of Quantum Electronics **23**, number **5** (1987) 510-524.

[15] S. Herr, *On the Cauchy problem for the derivative nonlinear Schrödinger equation with periodic boundary condition*, IMRN International Mathematics Research Notices (2006), 1-33.

[16] R. Iorio, V. Iorio, Fourier Analysis and Partial Differential Equations, vol. 70, Cambridge Stud. Adv. Math., (2001).

[17] R. Hirota, *Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation*, J. Math. Phys. **14** (1973), 805-809.

[18] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Suppl. Stud., Stud. Appl. Math. **8** (1983), 93-128.

[19] T. Kato, G. Ponce, *Commutador estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 891-907.

[20] Pertubation theory for linear operators, Springer, New York, (1984).

[21] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equations via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993) 527-620.

[22] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Math. J. **40** (1991) 33-69.

[23] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *On the ill-posedness of some canonical dispersive equations*, Duke Math. J. **106** (2001) 617-633.

[24] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation*, J. American Mathematical Society **4**, number **2**, (1991), 323-347.

[25] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 573-603.

[26] C. Laurey, *The Cauchy problem for a third order nonlinear Schrödinger equation,* Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **29**, number **2**, (1997) 121-158.

[27] F. Linares, G. Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Publicações Matemáticas, IMPA, (2003).

[28] A. Mahalingam, K. Porsezian, *Propagation of dark solitons in a system of coupled higher-order nonlinear Schrödinger equations*, J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) 3099-3109.

[29] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, vol 44, Springer, New York, (1983).

[30] D. Pilod, *The Cauchy problem for the dispersive Kuramoto-Velarde equation*, PhD Thesis, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, Rio de Janeiro, (2006).

[31] K. Porsezian, P. Schanmugha Sundaram, A. Mahalingam, *Coupled higher-order nonlinear Schrödinger equations in nonlinear optics: Painlevé analysis and integrability*, Phys. Rev. E **50** (1994) 1543-1547.

[32] K. Porsezian, B. Kalithasan, *Cnoidal and solitary wave solutions of the coupled higher order nonlinear Schrödinger equation in nonlinear optics*, Chaos, Solitons and Fractals **31** (2007), 188-196.

[33] R. Radhakrishinan, M. Lakshmanan, *Exact soliton solutions to coupled nonlinear Schrödinger equations with higher-order effects*, Phys. Rev. E **54** (1996) 2949-2955.

[34] J. C. Saut, R. Temam, *Remarks on the Korteweg-de Vries equation*, Israel J. Math. **24** (1976), 78-87.

[35] G. Staffilani, *On the generalized Korteweg-de Vries-type equations*, Differential and integral Equations **10** (1997) 777-796.

[36] G. Staffilani, *On solutions for periodic generalized KdV equations*, IMRN International Mathematics Research Notices (1997), 899-917.

[37] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton (1971).

[38] H. Takaoka, *Well-Posedness for the higher order nonlinear Schrödinger equation*, Adv. Math. Sci. Appl. **10** (2000), 149-171.

[39] J. Tian, H. Tian, Z. Li, G. Zhou, *Combined solitary-wave solution for coupled higher-order nonlinear Schrödinger equations*, J. Opt. Soc. Am. B **21**(2004), 1908-1912.