Sobre Derivações Localmente Nilpotentes dos Anéis k[x,y,z] e k[x,y]

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Maribel del Carmen Díaz Noguera** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 18 de dezembro de 2007.

Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti
Prof. Dr. Antônio José Engler
Prof. Dr. Daniel Levcovitz

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **Mestre em Matemática.**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Díaz Noguera, Maribel del Carmen

D543s Sobre derivações localmente nilpotentes dos Anéis k[x,y,z] e k[x,y] /Maribel del Carmen Díaz Noguera -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Paulo Roberto Brumatti

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Anéis polinomiais. 2. Álgebra comutativa. 3. Álgebra. I. Brumatti, Paulo Roberto. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Over locally nilpotent derivations of the rings K[x,y,z] and K[x,y]

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Polynomial rings. 2. Commutative algebra. 3. Algebra.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Antônio José Engler (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Daniel Levcovitz (UFSCAR)

Data da defesa: 18/12/2007

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 18 de dezembro de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). PAULO ROBERTO BRUMATTI

Prof. (a). Dr (a). ANTONIO JOSÉ ENGLER

Prof. (a). Dr (a). DANIEL LEVCOVITZ

Ao meu esposo Fernando e meus filhos Daniela e José David.

Agradecimentos

Primeiramente, à Deus por ter permitido alcançar este objetivo.

Ao CNPq por todo apoio financeiro durante o mestrado;

Ao meu orientador Dr. Paulo Brumatti pela grande competência com que me orientou;

Ao meu esposo Fernando e aos meus filhos Daniela e José David pelo amor e todos os momentos felizes em minha vida;

A minha família, em especial a minha mãe e meu pai, por todo o carinho;

Aos meus amigos e companheiros desta caminhada. Em particular, Marcelo por toda ajuda concedida, Alonso e Daniela pela sua amizade e, principalmente, Adilson pela amizade, paciência e as lições de português;

Aos professores e a secretaria do IMECC, em especial a Tânia.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é apresentar resultados centrais sobre derivações localmente nilpotentes no anel de polinômios $B = k[x_1, \ldots, x_n]$, para $n \leq 3$ que foram apresentados por Daniel Daigle em [2],[3] e [4].Para este propósito, introduziremos os conceitos básicos e fundamentais da teoria das derivações num anel e apresentaremos resultados em relação a derivações localmente nilpotentes num domínio de característica zero e de fatorização única.

Entre tais resultados está a fórmula Jacobiana que usaremos para descrever o conjunto das derivações equivalentes e localmente nilpotentes de $B = k[x, y, z]$ e o conjunto $LND(B)$, com $B = k[x, y]$. Também, explicítam-se condições equivalentes para a existência de uma derivação ω-homogênea e localmente nilpotente de $B = k[x, y, z]$ com núcleo $k[f, g]$, onde $\{f\}, \{g\} \in B$, $\text{mdc}(\omega) = \text{mdc}(\omega(f), \omega(g)) = 1$.

Abstract

In this dissertation we present centrals results on locally nilpotents derivations in a ring of polynomials $B = k[x_1, \ldots, x_n]$, for $n \leq 3$, which were presented by Daniel Daigle in [2], [3] and [4]. For this, we introduce basic fundamental results of the theory of derivations in a ring and we presente results on locally nilpotents derivations in a domain with characteristic zero and unique factorization.

One of these results is the Jacobian formula that we use to describe the set of the equivalent locally nilpotents derivations of $B = k[x, y, z]$ and the set $LND(B)$ where $B = k[x, y]$. Moreover, we give equivalent conditions to the existence of a ω-homogeneous locally nilpotent derivation in the ring $B = k[x, y, z]$ with kernel $k[f, g]$, $\{f\}$ and $\{g\} \in B$, and $\mathrm{mdc}(\omega) = \mathrm{mdc}(\omega(f), \omega(g)) = 1$.

Sumário

Introdução

As derivações localmente nilpotentes têm sido utilizadas, com sucesso, na solução de diversos problemas. Talvez o mais importante seja o Décimo Quarto Problema de Hilbert, que pode ser enunciado da seguinte maneira:

Seja $B = k[x_1, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios em n variáveis sobre o corpo k, e $k(x_1, \ldots, x_n)$ seu corpo de frações. Suponha que L é um subcorpo de $k(x_1, \ldots, x_n)$ contendo k. Então, a k- subálgebra $L \cap B$ de $k(x_1, \ldots, x_n)$ é finitamente gerada?

Em 1954, O. Zariski, apresenta uma resposta positiva se $tr\mathrm{gr}_k L \leq 2$, veja [18].Um caso particular quando $n > 3$, é perguntarse se o núcleo de uma derivação localmente nilpotente de B é finitamente gerado. Neste caso já foram obtidos vários exemplos de derivações localmente nilpotentes, cujo núcleo não é finitamente gerado, por exemplo, em [8] (Teorema 2), G. Freudenburg apresenta uma dessas derivações quando $n = 6$, logo a conjetura neste caso é falsa . Para o caso $n = 3$ a conjectura também é falsa e foi mostrada por S. Kuroda em [11].

Ao longo do texto estamos interessados em descrever derivações localmente nilpotentes do anel $B = k[x_1, \ldots, x_n]$. Resultados obtidos e expostos neste trabalho mostram que as derivações deste tipo com o mesmo núcleo são essencialmente determinadas por uma única derivação irredutível localmente nilpotente (salvo multiplicação por unidade), veja corolários (1.37), (2.8) e proposição (2.10). Portanto, a abordagem deste enfocará a resolução dos seguintes problemas:

I) Se A é o núcleo de uma dervição localmente nilpotente de B, qual é a derivação irredutível localmente nilpotente de B com núcleo A?

II) E quais subanéis de B são núcleo de derivações localmente nilpotentes de B?

Responder estas perguntas para $n = 1$ é trivial. Já para $n = 2$ não é tão imediato. Contudo, no Teorema de Rentscher veja (2.27) se mostra que se A é o núcleo de uma derivação localmente nilpotente de $B = k[x, y]$ então existem $f, g \in B$ tais que $B = k[f, g]$

e $A = k[g]$. Em posse dessa informação é possível obter uma descrição do conjunto das derivações localmente nilpotentes de B, vide teorema (2.29).

Para responder quando $n = 3$ é utilizado o Teorema de Miyanishi (veja [13]), que afirma que o núcleo de toda derivação localmente nilpotente de $B = k[x, y, z]$, não-nula, é da forma $k[f, g]$, onde f e g são algebricamente independentes sobre k. No artigo ”On some properties of locally nilpotent derivations” D. Daigle exibi uma fórmula Jacobiana para descrever o conjunto das $k[f, g]$-derivações localmente nilpotentes de B. Para outra questão veremos que ela é equivalente a: quais pares de polinômios $f, g \in A$ têm a propriedade que $k[f, g]$ é o núcleo de uma derivação localmente nilpotente de B. Contudo, as respostas obtidas são parciais . Em ”Homogeneus locally nilpotent derivations of k[x,y,z]” D. Daigle restringe a resposta para quando D, ou equivalentemente f e g, é ω-homogênea em relação a uma específica ω-graduação de B. Assim, o nosso principal objetivo é apresentar, em detalhes, tais resultados.

Este texto é estruturado da seguinte maneira:

O primeiro capítulo é dedicado a apresentação dos conceitos básicos da teoria das derivações. Nele definimos o que são derivações localmente nilpotentes e derivações irredutíveis. Obtemos algumas propriedades clássicas sobre derivações em anéis de polinômios, derivações localmente nilpotentes e suas localizações. Terminamos com o resultado central do capítulo: o corolário (1.37) sobre a forma das derivações localmente nilpotente num DFU, o qual nos remeteremos freqüentemente.

No segundo capítulo introduziremos o conceito de derivação Jacobiana no anel de polinômios a fim de obter uma caracterização dos $k[f, g]$-derivações localmente nilpotentes no anel $B = k[x, y, z]$. Por fim, obtemos o conjunto das derivações localmente nilpotentes de $B = k[x, y]$.

Começaremos o terceiro com alguns resultados sobre anéis graduados e apresentamos uma graduação no anel de polinômios para definir derivações homogêneas em tais anéis. Por fim, neste capítulo teremos o resultado principal do capítulo, o teorema (3.19) sobre derivações homogêneas em $B = k[x, y, z]$, mencionado acima.

Notações

- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $\mathbb{Q}$ será o conjunto dos números racionais;
- k denotará um corpo de característica zero e $\overline{k}$ o fecho algébrico de k;
- L/k denotará uma extensão de corpos;
- $k[x_1, \ldots, x_n] = k^{[n]} = k[X]$ será o anel de polinômios nas variáveis $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e com coeficientes em k;
- O grupo de unidades de um anel A denotaremos por A^*;
- $Frac(A)$ representará o corpo de frações de um domínio inteiro A;
- Se $A \leq B$ são domínios então o grau de transcendência de $Frac(B)$ sobre $Frac(A)$ será denotado por $tr\mathrm{gr}_A(B)$;
- Um domínio será um domínio entero;
- Um domínio de fatoração única será abreviado por DFU;
- $D_i f := \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Capítulo 1

Derivações de um anel

Neste capítulo introduziremos os primeiros conceitos e resultados da teoria de derivações de um anel comutativo. O conteúdo foi baseado no livro [15] e nas notas de D.Daigle [2], isto é, os resultados e definições citados podem ser encontrados em tais referências. Entretanto, propusemos apresentar as demonstrações dos resultados mais relevantes para a dissertação.

1.1 Derivações

Definição 1.1. *Uma derivação D de um anel B é uma função $D : B \to B$ que satisfaz:*

$$\begin{array}{rcll} D(x+y) & = & D(x)+D(y) & \quad e \\ D(xy) & = & D(x)y + xD(y) & \end{array}$$

para todos $x, y \in B$. Mais ainda, se A é um subanel de B e $D(A) = \{0\}$ dizemos que D é uma A-derivação de B. Denotamos por $Der(B)$ o conjunto de todas as derivações de B e $Der_A(B)$ o conjunto de todas as A-derivações de B.

Note que se $D_1, \; D_2 \in Der(B) \;\; (Der_A(B))$ e $b \in B$, então $bD_1, D_1 + D_2 \in Der(B)$ $(Der_A(B))$, ou seja, $Der(B)$ $(Der_A(B))$ é um B-módulo.

Evidentemente, também podemos fazer iterações pela composição de derivações e uma das principais regras a respeito de tais iterações é dada abaixo.

Proposição 1.2. *(Regra de Leibniz) Se B é um anel, $D \in Der(B)$, $x, y \in B$ e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$D^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^{n-i}(x)D^i(y)$$

Demonstração: Provaremos por indução. No caso de $n = 1$ é trivial, pois $D \in Der(B)$. Seja, agora, $n > 1$. Suponhamos que a igualdade é verificada para todo $k < n$, logo temos que

$$\begin{aligned}
D^n(xy) &= D\left(D^{n-1}(xy)\right) = D\left(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D^{n-1-i}(x)D^i(y)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D\left(D^{n-1-i}(x)D^i(y)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\left(D^{n-i}(x)D^i(y) + D^{n-1-i}(x)D^{i+1}(y)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D^{n-i}(x)D^i(y) + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D^{n-1-i}(x)D^{i+1}(y)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D^{n-i}(x)D^i(y) + \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}D^{n-i}(x)D^i(y)\\
&= D^n(x)y + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right)D^{n-i}(x)D^i(y) + xD^n(y)\\
&= D^n(x)y + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}D^{n-i}(x)D^i(y) + xD^n(y)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}D^{n-i}(x)D^i(y). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Observação 1.3. *Usando a indução finita obtém-se que: se B é um anel, $D \in Der(B)$ então $D(b^n) = nb^{n-1}D(b)$, para todo $b \in B$ e $n \geq 0$.*

Um exemplo clássico de derivações é uma derivação parcial no anel de polinômios.

Exemplo 1.4. *Se R é um anel e $B = R[x_1, \ldots, x_n] = R[X]$, temos que, para cada $i = 1, \ldots, n$, a derivada parcial $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ é uma R-derivação.*

Mais ainda, o conjunto das derivações parciais forma uma base livre para o B-módulo livre $Der_R(B)$, como veremos na caracterização a seguir.

Teorema 1.5. *Sejam R um anel e $B = R[x_1, \ldots, x_n] = R[X]$. Então*

1. *Se $D \in Der_R(B)$ e $f \in B$ então $D(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}D(x_i)$*

2. *Se $f_1, \ldots, f_n \in R[X]$ então existe uma única R-derivação D de $B = R[X]$, tal que $D(x_1) = f_1, \ldots, D(x_n) = f_n$. Esta derivação é dada por:*
$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

3. *$Der_R(B)$ é um B-módulo livre com base livre $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$.*

Demonstração:

1. Seja $M = \{g \in R[X]; D(g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} D(x_i)\}$. É fácil verificar que M é um R-submódulo de B contendo todo monômio $x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$ e, portanto, $M = R[X]$, consequentemente, $f \in M$;

2. Sabemos que D é uma R-derivação de B e que $D(x_i) = f_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Se D_1 é uma outra R-derivação de B com tais propriedades teremos por 1. que:
$$D_1(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} D_1(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} f_i = D(f),$$
para toda $f \in R[X]$. Logo, D é única. ■

Este próximo resultado será muito útil no transcorrer de toda a dissertação.

Teorema 1.6. *Se B é um anel, $D \in Der(B)$, $f(t) = \sum_i b_i t^i \in B[t] = B^{[1]}$ e $b \in B$, então*
$$D(f(b)) = f^{(D)}(b) + f'(b)D(b),$$
onde $f'(t) \in B[t]$ é a derivada de $f(t)$, $f^{(D)} = \sum_i D(b_i)t^i \in B[t]$. Mais geralmente, se $f \in B[t_1, \ldots, t_n]$ e $b_1, \ldots, b_n \in B$ então
$$D(f(b_1, \ldots, b_n)) = f^{(D)}(b_1, \ldots, b_n) + \sum_{i=1}^{n} f_{t_i}(b_1, \ldots, b_n) D(b_i),$$
com $f_{t_i} = \frac{\partial f}{\partial t_i} \in B[t_1, \ldots t_n]$.

Demonstração: Denotemos $M = \{f \in B[t];\ D(f(b)) = f^{(D)}(b) + f'(b)D(b)\}$. Note que se $a \in B$ e $f(t) = at^i$ é um monômio de $B[t]$ então $f(b) = ab^i$ e
$$\begin{aligned} D(f(b)) &= D(a)b^i + aD(b^i) \\ &= D(a)b^i + aib^{i-1}D(b) \\ &= f^{(D)}(b) + f'(b)D(b), \end{aligned}$$
logo, $f \in M$. Portanto, $M = B[t]$, já que D é aditiva. De forma análoga demonstra-se a forma geral enunciada acima. ■

Observação 1.7. *Note que se B/R é uma extensão de anéis, e D é uma R-derivação de B e $f \in R[t] \subset B[t]$ então $D(f(b)) = f'(b)D(b)$.*

Sendo $D \in Der(B)$ um endomorfismo aditivo de B podemos definir:

Definição 1.8. *Dada uma derivação D de um anel B, definimos o núcleo de D, denotado por $kerD$, como sendo $\{x \in B \backslash\ D(x) = 0\}$.*

O primeiro fato fundamental sobre $KerD$ é que ele é um subanel de B e, além disso, quando B é um domínio de característica zero também temos:

Lema 1.9. *Se B é um domínio de característica zero e $D \in Der(B)$ então $KerD$ é algebricamente fechado em B.*

Demonstração: Sejam $A = KerD$, $b \in B$ algébrico sobre A e $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in A[t]$, com $a_i \in A$, um polinômio não-nulo de grau mínimo tal que $f(b) = 0$. Logo $a_0 + a_1 b + \ldots + a_n b^m = f(b) = 0$ e $D(f(b)) = f^D(b) + f'(b)D(b) = f'(b)D(b) = 0$, pois $f(t) \in A[t]$ e D é uma A-derivação de B. Pela minimilidade de f, $f'(b) \neq 0$ e como B é de característica zero temos $D(b) = 0$, logo, $b \in A$. ■

1.2 Derivações localmente nilpotentes

Nesta seção apresentaremos alguns resultados básicos das derivações localmente nilpotentes que são fundamentais no desenvolvimento da dissertação. Terminaremos a seção caracterizando subálgebras de B que são núcleo de derivações localmente nilpotentes.

Definição 1.10. *Dado um anel B e $D \in Der(B)$, definimos o conjunto*

$$Nil(D) = \{x \in B \backslash\ \exists n \in \mathbb{N}_0;\ D^n(x) = 0\}$$

Observe que $Ker(D) \subseteq Nil(D)$.

Definição 1.11. *Seja B um anel. Uma derivação $D : B \to B$ é dita ser localmente nilpotente se $Nil(D) = B$, isto é, se para todo $b \in B$ existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $D^n(b) = 0$.*

Denotemos por $LND(B)$ o conjunto de todas as derivações localmente nilpotentes de B e $KLND(B) = \{KerD \backslash\ D \in LND(B)$ e $D \neq 0\}$. Mais ainda, se R é subanel de B, $LND_R(B) = LND(B) \cap Der_R(B)$ e $KLND_R(B) = \{KerD \backslash\ D \in LND_R(B)$ e $D \neq 0\}$.

Exemplo 1.12. *Se R é um anel e $B = R[x_1, \ldots, x_n] = R^{[n]}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_i} \in LND_R(B)$.*

Uma das principais características que uma derivação localmente nilpotente tem (provaremos a frente) é dada pela seguinte definição:

Definição 1.13. *Sejam $A \leq B$ domínios. Dizemos que A é fatorialmente fechado em B se satisfaz: Se $x, y \in B$ e $xy \in A \backslash \{0\}$ então $x, y \in A$.*

Algumas propriedades básicas dos subanéis fatorialmente fechados são dadas pela seguinte proposição:

Proposição 1.14. *Sejam A e B dominios. Suponhamos que A é subanel fatorialmente fechado de B. Então*

1. *A é algebricamente fechado em B e $A^* = B^*$;*
2. *Um elemento de A é irredutível em A se, e somente se, é irredutível em B;*
3. *Se B é um DFU então A também é. E por tanto todo elemento primo p de A é primo de B.*

Demonstração:

1. Sejam $0 \neq x \in B$ algébrico sobre A e $f(t)$ um polinômio em $A[t] \backslash \{0\}$ de grau mínimo tal que $f(x) = 0$. Sendo $f(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$, com $a_i \in A$ temos que $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ e $a_0 \neq 0$. Logo,
$$x(a_n x^{n-1} + \ldots + a_1) = -a_0 \in A \backslash \{0\}.$$
Como A é fatorialmente fechado em B, temos que $x \in A$, e, assim, concluimos que A é algebricamente fechado em B. Agora, se $y \in B^*$ então existe $y^{-1} \in B$ tal que
$$yy^{-1} = 1.$$
Como $1 \in A$ segue que $y^{-1} \in A$. Portanto, $A^* = B^*$.

2. Seja $a \in A$, $a \neq 0$, tal que
$$a = q_1 q_2, \qquad q_1, q_2 \in B,$$
pela hipótese $q_1, q_2 \in A$. De $A^* = B^*$, a afirmação segue.

3. Conseqüência imediata de (2). ■

Uma derivação localmente nilpotente de um domínio B induz uma função grau de B em $\mathbb{N}_0 \bigcup\{-\infty\}$.

Definição 1.15. *Sejam B um domínio de característica zero e $D \in LND(B)$. Se $b \in B$ definimos o grau de b determinado por D, denotado por $gr_D(b)$, da seguinte forma:*

$$gr_D(b) = \begin{cases} s & se \quad b \neq 0,\ D^s(b) \neq 0 \ e \ D^{s+1}(b) = 0 \\ -\infty & se \quad b = 0. \end{cases}$$

Uma aplicação direta da regra de Leibniz mostra que, de fato, a função definida acima tem as características de uma função grau.

Proposição 1.16. *Sejam B um domínio de característica zero, $D \in LND(B)$ e $a, b \in B$. Então*

1. $gr_D(ab) = gr_D a + gr_D b$;
2. $gr_D(a + b) \leq max\{gr_D(a), gr_D(b)\}$ *e tem-se a igualdade se* $gr_D(a) \neq gr_D(b)$.

A próxima proposição é o resultado já citado que diz a respeito de uma das principais característica sobre o núcleo de uma derivação localmente nilpotente.

Proposição 1.17. *Sejam B um domínio de característica zero, $D \in LND(B)$ e $A = Ker(D)$. Então A é fatorialmente fechado em B.*

Demonstração: É claro que $A = \{x \in B\backslash\ \deg_D(x) \leq 0\}$, assim se $x, y \in B\backslash\{0\}$ e $xy \in A$, podemos concluir da proposição (1.16) que A é fatorialmente fechado. ■

Sendo A e B como na proposição acima segue da proposição (1.14) que $A^* = B^*$. Logo, se k é um corpo contido em B então D é uma k-derivação. Ainda mais, se B é un DFU A também é.

A seguir estudaremos alguns fatos básicos sobre derivações localmente nilpotentes quando localizamos.

Imediatamente, temos que se S
$subsetB$ é um subconjunto multiplicativamente fechado e $D \in Der(B)$ então a função $S^{-1}D : S^{-1}B \to S^{-1}B$ definida pela fórmula

$$S^{-1}D\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{D(r)s - rD(s)}{s^2},$$

para $r \in B$ e $s \in S$, é uma derivação de $S^{-1}B$ que estende D.

Agora, a pergunta natural é: quando $S^{-1}D$ é localmente nilpotente? A resposta é dada no seguinte resultado.

Teorema 1.18. *Sejam B um domínio de característica zero, $D \in Der(B)$, com $D \neq 0$ e $A = kerD$.*

1. *Seja $S \subset B$ um subconjunto multiplicativamente fechado de $B \backslash \{0\}$. Considere a derivação $S^{-1}D : S^{-1}B \to S^{-1}B$, então:*
   (a) *$S^{-1}D \in LND(S^{-1}B)$ se, e somente se, $D \in LND(B)$ e $S \subset KerD$;*
   (b) *Se $S \subset KerD$ então $KerS^{-1}D = S^{-1}A$ e $(S^{-1}A) \cap B = A$;*
2. *Seja $b \in B \backslash \{0\}$ e considere a derivação $bD : B \to B$. Então $bD \in LND(B)$ se, e somente se, $D \in LND(B)$ e $b \in KerD$.*

Demonstração:

1-a) Suponhamos que $S^{-1}D$ seja localmente nilpotente. Observe que se $b \in B$ então $S^{-1}D(b) = D(b)$, assim D é localmente nilpotente e $B \cap Ker(S^{-1}D) = KerD$. Também pela proposição (1.14) temos que $S \subset (S^{-1}B)^* \subset Ker(S^{-1}D)$. Logo, $S \subset B \cap Ker(S^{-1}D) = KerD$. Reciprocamente, suponhamos que $D \in LND(B)$ e $S \subset KerD$. Seja $\frac{r}{s} \in S^{-1}D$, logo, $(S^{-1}D)\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{D(r)}{s}$. Por indução sobre n temos que $(S^{-1}D)^n\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{D^n(r)}{s}$ e de $D^n(r) = 0$ tem-se $(S^{-1}D)^n\left(\frac{r}{s}\right) = 0$. Ou seja, $S^{-1}D$ é localmente nilpotente;

1-b) Dado $\frac{a}{s} \in S^{-1}B$ temos que $S^{-1}D\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{D(a)}{s}$, logo, $KerS^{-1}D = S^{-1}A$. Por outro lado, é claro que $A \subseteq (S^{-1}A) \cap B$. Agora, dado $b \in B \backslash \{0\} \cap S^{-1}A$, temos que existem $a \in A \backslash \{0\}$ e $s \in S$ tais que $b = \frac{a}{s}$. Sendo B um domínio de característica zero temos que $bs = a$. Como A é fatorialmente fechado $b \in A$. Portanto a igualdade $A = (S^{-1}A) \cap B$ é válida;

2) Suponhamos que bD é localmente nilpotente. Como $bD \neq 0$, existe $s \in B$ tal que $(bD)(s) \neq 0$ e $(bD)^2(s) = 0$. Então $bD(s) \in Ker(bD)$, o qual é fatorialmente fechado. Logo, $b \in Ker(bD) = KerD$ e então $(bD)^n = b^nD^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde segue facilmente que, D é localmente nilpotente. Reciprocamente, se $D \in LND(B)$ e $b \in KerD$, tem-se tambem que $(bD)^n = b^nD^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de onde concluimos que bD é localmente nilpotente. ∎

Observação 1.19. *Se $D \in LND(B)$ e $D \neq 0$, então existe $a \in KerD \backslash \{0\}$. Sendo $S = \{1, a, a^2, \ldots\}$ temos que $S^{-1}D$ é uma derivação localmente nilpotente de $S^{-1}B$, que estende D.*

Exemplo 1.20. *Se $B = k[x] = k^{[1]}$ então $LND(B) = \left\{a\frac{d}{dx}, a \in k\right\}$. De fato, se $D \in Der_k(B)$ e não nula, então pelo teorema (1.5), $D = a\frac{d}{dx}$ para algum $a \in B\backslash\{0\}$. Pelo item (2) do teorema anterior, $D \in LND(B)$ se, e somente se, $a \in KerD = k$ e $\frac{d}{dx} \in LND(B)$, o que prova a afirmação.*

Nosso objetivo, agora, é determinar quando B é $A^{[1]}$ com A sendo o núcleo de uma derivação localmente nilpotente. Para isso precisamos da proposição e da definição que se seguem.

Proposição 1.21. *Sejam $B \leq C$ anéis, $\mathbb{Q} \subseteq B$. Se $D \in LND(B)$ e $\gamma \in C$ então a função*

$$\begin{array}{rccl} \epsilon: & B & \longrightarrow & C \\ & b & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n!}D^n(b)\gamma^n \end{array}$$

é homomorfismo de A-álgebras, onde $A = KerD$.

Demonstração: Sejam $x, y \in B$ e $a \in A$. Logo $D(ax + y) = aD(x) + D(y)$ e por indução temos que $D^n(ax + y) = aD^n(x) + D^n(y)$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, e, portanto, $\epsilon(ax + y) = a\epsilon(x) + \epsilon(y)$. Resta provar que $\epsilon(xy) = \epsilon(x)\epsilon(y)$, isto é,

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{i!}D^i(x)\gamma^i\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{j!}D^j(y)\gamma^j\right) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n!}D^n(xy)\gamma^n\right). \tag{1.21.1}$$

Agora, o coeficiente de γ^n em $\epsilon(x)\epsilon(y)$ é

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!}D^i(x)D^j(y) &= \frac{1}{n!}\sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!}D^i(x)D^j(y) \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^{n-j}(x)D^j(y) = \frac{1}{n!}D^n(xy), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da regra de Leibniz. Logo (1.1) é válida. Concluimos então que ϵ é um homomorfismo de A-algebras. ■

Definição 1.22. *Sejam B um anel, $D \in LND(B)$ e $s \in B$. Dizemos que s é um "slice"de D se $D(s) = 1$ e "pre-slice"se $D(s) \neq 0$ e $D^2(s) = 0$.*

Teorema 1.23. *Seja B um domínio contendo $\mathbb{Q}$. Se $D \in LND(B)$ tem um slice $s \in B$ então $B = A[s] = A^{[1]}$, onde $A = Ker(D)$.*

Demonstração: Suponhamos que $s \in B$ satisfaz $D(s) = 1$. Se considerarmos

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in A[t]\backslash\{0\},$$

onde $n \geq 0$, $a_i \in A$ e $a_n \neq 0$. Do teorema (1.6) temos que $D(f(s)) = f'(s)D(s) = f'(s)$ e por indução $D^j(f(s)) = D^j\left(\sum_{i=0}^{n} a_i s^i\right) = f^{(j)}(s)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, onde $f^{(j)}(t) \in A[t]$ indica a j-ésima derivada de f. Em particular, $D^n(f(s)) = n!a_n \neq 0$ e, portanto, $f(s) \neq 0$. Logo s é transcendente sobre A, isto é, $A[s] = A^{[1]}$. Agora provaremos que $B = A^{[1]}$. Consideramos a função $\epsilon : B \to B$ dada por

$$\epsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j(x)}{j!}(-s)^j,$$

para cada $x \in B$. Sendo $\gamma = -s$ e $c = b$ segue do teorema (1.21) que ϵ é um homomorfismo de A-algebras e que

$$D(\epsilon(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^{j+1}(x)(-s)^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j(x)}{j!} j(-s)^{j-1}(-1) = 0.$$

Logo $\epsilon(B) \subseteq A$. Sendo ϵ um A-homomorfismo segue que $\epsilon(B) = A$. Por indução sobre o $gr_D(x)$, provaremos que $x \in A[s]$, para todo $x \in B$. É claro que se $\mathrm{gr}_D(x) \leq 0$ então $x \in A[s]$. Suponhamos então, que $\mathrm{gr}_D(x) \geq 1$. Como $x = \epsilon(x) + (x - \epsilon(x))$ e $x - \epsilon(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D^j(x)}{j!}(-s)^j \in sB$ temos que

$$x = a + x's, \tag{1.23.1}$$

para algum $a \in A$ e $x' \in B$. Logo, $D(x) = D(x')s + x'$ e por indução sobre m vemos que $D^m(x) = D^m(x')s + mD^{m-1}(x')$, para todo $m \geq 1$. Sendo D nilpotente tem-se que existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $D^{m_1-1}(x') \neq 0$ e $D^{m_1}(x') = 0$. Então

$$\begin{aligned} D^{m_1}(x) &= mD^{m_1-1}(x') \neq 0 \quad \text{e} \\ D^{m_1+1}(x) &= 0, \end{aligned}$$

logo, $\mathrm{gr}_D(x') = \mathrm{gr}_D(x) - 1$. Pela hipótese de indução temos que $x' \in A[s]$ e por (1.2), finalmente, concluímos que $x \in A[s]$. ■

Como veremos, os seguintes corolários refletirão algumas conseqüências para derivações localmente nilpotentes.

Corolário 1.24. *Se B é um domínio de característica zero e $A \in KLND(B)$ então $S^{-1}B = (Frac\ A)^{[1]}$, com $S = A\backslash\{0\}$. Em particular, o grau de transcendência de $Frac\ (B)$ sobre $Frac\ (A)$ é 1.*

Demonstração: Seja $A \in KLND(B)$. Consideremos $D \in LND(B)$ com $D \neq 0$, tal que $KerD = A$. Se fizermos $S = A\backslash\{0\}$ temos que $S^{-1}D \in LND(S^{-1}B)$ e $Ker(S^{-1}D) = Frac\ A$. Como $D \in LND(B)$ temos que existe $\alpha \in B$ tal que $\mathbf{s} = D(\alpha) \neq 0$ e $D^2(\alpha) = 0$. Então $S^{-1}D\left(\frac{\alpha}{s}\right) = 1$ e, consequentemente, o resultado segue do teorema. ■

Corolário 1.25. *Sejam B um domínio contendo $\mathbb{Q}$, $D \in LND(B)$ e $A = Ker(D)$. Se $s \in B$ satisfaz $D(s) \neq 0$ e $D^2(s) = 0$, então $B_\alpha = A_\alpha[s] = A_\alpha^{[1]}$, onde $\alpha = D(s) \in A\backslash\{0\}$.*

Demonstração: Seja $S = \{1, \alpha, \alpha^2, \ldots\}$. Como $S \subseteq KerD$, temos $S^{-1}D \in LND(S^{-1}D)$, $KerS^{-1}D = S^{-1}A$ e $S^{-1}D\left(\frac{s}{\alpha}\right) = 1$. Logo, o resultado segue do teorema anterior. ■

Um outro fato sobre derivações localmente nilpotentes em domínios de característica zero é:

Lema 1.26. *Seja B um domínio de característica zero.*

1. *Se $A, A' \in KLND(B)$ e $A \subseteq A'$, então $A = A'$;*
2. *Sejam $A \in KLND(B)$, D e D' elementos não-nulos de $LND_A(B)$. Então existem $a, a' \in A\backslash\{0\}$ tais que $aD = a'D'$. Em particular, $D \circ D' = D' \circ D$.*

Demonstração:

1. Se $A, A' \in KLND(B)$ então $tr\mathrm{gr}_A(B) = tr\mathrm{gr}_{A'}(B) = 1$. Como $A \subseteq A'$ temos que $tr\mathrm{gr}_A A' = 0$, logo A' é algébrico sobre A. Mas sendo A algebricamente fechado em B segue que $A = A'$.
2. Sejam $A \in KLND(B)$ e $K = FracA$. Pelo corolário (1.24) temos que $S^{-1}B = K[t] = K^{[1]}$, para algum $t \in S^{-1}B$ onde $S = A\backslash\{0\}$. Se D e D' são elementos não-nulos de $LND_A(B)$ então $S^{-1}D$ e $S^{-1}D'$ são elementos de $LND_k(S^{-1}B) = LND_K(K[t])$, que estendem D e D', respectivamente. Pelo exemplo (1.20) tem-se que cada elemento não nulo de $LND_K(K[t])$ tem a forma $\lambda\frac{d}{dt}$, para algum $\lambda \in K^*$, de onde $S^{-1}D' = \lambda_1 S^{-1}D$ para algum $\lambda_1 \in K^*$. Consequentemente, $aD' = aD'$ para elementos $a, a' \in A\backslash\{0\}$. Agora, se $S^{-1}D = \lambda_1\frac{d}{dt}$ e $S^{-1}D' = \lambda_2\frac{d}{dt}$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in K^*$, então $S^{-1}D \circ S^{-1}D' = \lambda_1\lambda_2\frac{d^2}{dt^2} = S^{-1}D' \circ S^{-1}D$. Como

$$S^{-1}D_{|_B} = D \quad \text{e} \quad S^{-1}D'_{|_B} = D',$$

finalmente, temos que $D \circ D' = D' \circ D$. ■

Deste último fato pode-se concluir que se A e B são como no lema anterior e se $D_1, D_2 \in LND_A(B)$ então $D_1 + D_2 \in LND_A(B)$, pois $D_1D_2 = D_2D_1$ e $(D_1 + D_2)^n = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} D_1^{n-i} D_2^i$, assim, concluímos que $LND_A(B)$ é um A-módulo.

Para finalizar a seção mostraremos a caracterização das subalgebras de B que são núcleo de derivações localmente nilpotentes, conforme mencionada no início da seção.

Teorema 1.27. *Seja B um k-domínio finitamente gerado, e A uma subalgebra de B que é distinta de B. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *A é o núcleo de uma derivação localmente nilpotente $D : B \to B$;*
2. *$S^{-1}B = (FracA)^{[1]}$ e $(FracA) \cap B = A$, onde $S = A \backslash \{0\}$.*

Demonstração: Supondo que 1) é válida, temos pelo corolário (1.24) que $S^{-1}B = (FracA)^{[1]}$ e pelo teorema (1.18) item 1-b) que $(FracA) \cap B = A$. Logo, segue (2). Reciprocamente, suponhamos que A satisfaz (2). Fazemos $K = FracA$ e $S^{-1}B = K[t]$. Pela hipótese, $B = A[b_1, \ldots, b_n]$, com $b_1, \ldots b_n \in B$. Se $\delta : K[t] \to K[t]$ é a derivada $\frac{d}{dt}$, temos que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta(b_i) \in K[t] = S^{-1}B$. Note que podemos tomar $s \in S$ tal que $s\delta(b_i) \in B$, daí $s\delta(B) \subset B$. Dado que δ é localmente nilpotente e $s \in A \subset K = Ker\delta$, $s\delta$ é localmente nilpotente e, consequentemente, a sua restrição a B também será. Fazendo $D = s\delta|_B$ segue que $KerD = Ker(s\delta) \cap B = K \cap B = A$. ■

1.3 Derivações irredutíveis

Dado um anel B e A um elemento de $KLND(B)$, estamos interessados em descrever o conjunto $LND_A(B)$. Nesta seção, vamos tratar com o caso em que B satisfaz a condição da cadeia ascendente para ideais principais e, em particular, quando B é um DFU. Para isto precisaremos estudar as derivações irredutíveis.

Definição 1.28. *Seja B um anel. Uma derivação $D \in Der(B)$ é irredutível se B é o único ideal principal de B contendo $D(B)$.*

A proposição a seguir caracteriza as derivações irredutíveis no anel de polinômios $k^{[n]} = k[X]$.

Proposição 1.29. *Sejam k um corpo, $B = k[x_1, \ldots, x_n] = k^{[n]}$ e $D \in Der_k(B)$. Então D é irredutível se, e somente se, $mdc(Dx_1, \ldots, Dx_n) = 1$*

Demonstração: Suponhamos que $D \in Der(B)$ é irredutível e que $\text{mdc}(Dx_1, \ldots, Dx_n) = g$ com $g \in k[X]$. Logo, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $h_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $Dx_i = gh_i$. Tomando $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, pelo teorema (1.5) temos que

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} Dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} Dx_n = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right) g \in gB.$$

Logo, $D(B) \subseteq gB$, e, como D é irredutível, temos que $gB = B$. Portanto, $g \in k^*$ e $\text{mdc}(Dx_1, \ldots, Dx_n) = 1$. Reciprocamente, se $D(B) \subseteq gB$ para algum $g \in B$ segue que, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $Dx_i \in gB$. Logo $g\,|Dx_i$. E supondo que $\text{mdc}(Dx_1, \ldots, Dx_n) = 1$, segue que $g\,|1$, portanto, $g \in k^*$ e $gB = B$, de onde se segue que D é irredutível. ■

Exemplo 1.30. *Seja $B = k[x, y, z] = k^{[3]}$ e defina $D \in Der_k(B)$ por $Dx = 0$, $Dy = x$ e $Dz = y$. Como $mdc(Dx, Dy, Dz) = 1$, temos que D é uma derivação irredutível. É fácil verificar também que $D \in LND_k(B)$.*

Como veremos no próximo resultado: se D é uma derivação irredutível temos uma equivalência no teorema (1.23).

Teorema 1.31. *Sejam B um domínio contendo $\mathbb{Q}$, $D \in LND(B)$ e $A = Ker(D)$. Se D é irredutível são equivalentes:*

i) D tem um "slice";

ii) $B = A^{[1]}$.

Demonstração: O teorema (1.23) mostra que se ocorre $i)$ então $ii)$ é verificado. Agora, suponha que $B = A^{[1]} = A[t]$, logo para todo $g \in B$, $g = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, com $a_i \in KerD$. Assim

$$\begin{aligned} Dg &= a_1 Dt + \ldots + a_n n t^{n-1} Dt \\ &= (a_1 + \ldots + a_n n t^{n-1}) D(t) \in D(t)B. \end{aligned}$$

Daí $D(B) \subseteq D(t)B$. Como D é irredutível temos que $D(t) \in B^* = A^*$. Sendo $\alpha = Dt$, obtemos que $D^2\alpha = 0$ e $D(\alpha^{-1}t) = \alpha^{-1}Dt = 1$, ou seja, D tem um "slice". ■

O próximo lema nos auxiliará na demonstração do corolário (3.20).

Lema 1.32. *Sejam B um DFU de característica zero, $D : B \to B$ uma derivação irredutível e localmente nilpotente, $A = KerD$ e $S \subseteq A\backslash\{0\}$ um conjunto multiplicativamente fechado tal que $S^{-1}B = \left(S^{-1}A\right)^{[1]}$. Então cada $v \in B$ satisfazendo $S^{-1}B = \left(S^{-1}A\right)[v]$ também satisfazerá $Dv \in A\backslash\{0\}$ e para algum $a \in A\backslash\{0\}$, $aDv \in S$.*

Demonstração: Sejam $v \in B$ tal que $S^{-1}B = (S^{-1}A)[v]$ e $\delta : S^{-1}B \to S^{-1}B$ a derivada parcial em relação a v. Observe que pelo teorema (1.5) $S^{-1}D = \alpha\delta$ para algum $\alpha \in B$. Como $(S^{-1}D)(v) = \alpha\delta(v)$ temos que $\alpha = (S^{-1}D)(v) = D(v)$. Sendo $D \neq 0$, pois é uma derivação irredutível, segue que $S^{-1}D \neq 0$ e $\alpha = D(v) \neq 0$. Seja $p \in B$ um fator primo de α, logo, existe $b \in B$ tal que $Db \notin pB$. Mas $D(b) = \alpha\partial b$, onde $\partial b \in S^{-1}B$, daí existe $s \in S$ com $\alpha | sD(b)$ em B. Portanto, $p| sD(b)$, como p não divide $D(b)$ temos que p divide s. Logo, provamos que todo fator primo de $\alpha = Dv$ divide algum elmento de S, consequentemente, Dv divide um elemento de S, ou seja, existe $s \in S$ tal que $s = aDv$ para algum $a \in B$. Sendo A fatorialmente fechado $a, Dv \in A\backslash\{0\}$. ■

Definição 1.33. *Diremos que um anel B satisfaz a condição da cadeia ascendente (CCA) para ideais principais se toda seqüência crescente, $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$, de ideais principais de B é finita, ou equivalentemente, se toda coleção não-vazia de ideais principais tem elemento maximal.*

Exemplo 1.34. *Todo anel B que é DFU satisfaz a condição (CCA) para ideais principais. E evidentemente todo anel Noetheriano também.*

Agora, vamos relacionar a condição de cadeia ascendente com derivações.

Teorema 1.35. *Sejam B um domínio e $D \in Der(B)$, com $D \neq 0$.*

1. *Se B satisfaz CCA para ideais principais então existe uma derivação irredutível $D_0 \in Der(B)$ tal que $D = aD_0$, para algum $a \in B$.*

2. *Se B é um DFU então D_0 no item 1) é única, salvo multiplicação por uma unidade.*

Demonstração: Seja $D \in Der(B)$. Se D é irredutível a afirmação (1) é trivial. Suponhamos então que D não é irredutível. Então o conjunto $A = \{a \in B\backslash B^* \ / \ D(B) \subseteq aB\}$ é não-vazio. Fixemos $x \in B$ tal que $D(x) \neq 0$ e consideremos a seguinte coleção não-vazia de ideais principais de B:

$$\Sigma = \left\{\left(\frac{Dx}{a}\right)B \ / \ a \in A\right\},$$

temos que Σ tem elemento maximal, $I = \left(\frac{Dx}{a}\right)B$, para algum $a \in A$. Como $D(B) \subseteq aB$, podemos definir a derivação $D_0 : B \to B$, por $D_0 = \frac{D}{a}$, obviamente que $D = aD_0$. Agora, provemos que D_0 é irredutível. Seja $b \in B$ tal que $D_0(B) \subseteq bB$. Logo, $D(B) \subseteq abB$, isto é, $ab \in A$ e, consequentemente, $J = \left(\frac{Dx}{ab}\right)B \in \Sigma$. Observe que $bJ = I \subseteq J$ e I é elemento maximal de Σ, assim $I = J$. Logo, $\frac{Dx}{ab} \in \left(\frac{Dx}{a}\right)B$, portanto, $b \in B^*$ e $bB = B$, ou seja, (1) é verificada. Suponhamos, agora, que B é um DFU e que $D = a_1D_1 = a_2D_2$, onde $D_1, D_2 \in Der(B)$ são irredutíveis e $a_1, a_2 \in B\backslash\{0\}$. Como B é um DFU podemos supor que $mdc(a_1, a_2) = 1$. Afirmamos que $a_1, a_2 \in B^*$, pois se $a_1 \notin B^*$ então existe um elemento primo p de B tal que $p\,|a_1$ e, portanto, para todo $x \in B$ temos $p\,|a_2D_2(x)$. Logo $p\,|D_2(x)$ e $D_2(B) \subseteq pB$, o que é uma contradição com o fato de que D_2 é irredutível. Daí $a_1 \in B^*$. De modo análogo, $a_2 \in B^*$. Portanto $D_1 = uD_2$, com $u = b_2a^{-1} \in B^*$. Logo, (2) também é verificado. ■

Por fim, apresentaremos os resultados principais da seção, ié, os que caracterizam o conjunto $LND_A(B)$ no caso em que B satisfaz a condição de CCA para ideais principais e, particularmente, quando B é domínio de fatorização única.

Corolário 1.36. *Sejam B um domínio de característica zero que satisfaz a CCA para ideais principiais, $A \in KLND(B)$ e*

$$S = \{D \in LND_A(B) \backslash \ D \text{ é uma derivação irredutível }\}.$$

Então $S \neq \emptyset$ e $LND_A(B) = \{aD \backslash \ a \in A \text{ e } D \in S\}$

Demonstração: Pelo lema anterior cada elemento não-nulo de $LND_A(B)$ tem a forma aD, onde $a \in B\backslash\{0\}$ e $D \in Der_A(B)$ é uma derivação irredutível. Agora, pelo teorema (1.18) temos que $a \in A$ e $D \in S$. ■

Corolário 1.37. *Sejam B um DFU de característica zero e $A \in KLND(B)$. Então $LND_A(B)$ contém uma única derivação irredutível D, salvo multiplicação por unidade, e $LND_A(B) = \{aD \backslash \ a \in A\}$.*

Demonstração: Pelo corolário anterior temos

$$LND_A(B) = \{aD \backslash \ a \in A \text{ e } D \in S\ \}.$$

Mostraremos que dadas $D_1, D_2 \in S$, existe $u \in B$ tal que $D_1 = uD_2$. De fato, pelo lema (1.26) existem $a, a' \in A\backslash\{0\}$ tais que $aD_1 = a'D_2$ e pela segunda parte do lema anterior concluimos que $D_1 = uD_2$, para algum $u \in B^*$. Logo $LND_A(B) = \{aD \backslash \ a \in A\}$. ■

Ou seja, mostramos que para descrever $LND_A(B)$, sendo B um DFU, é suficiente conhecer um elemento irredutível deste conjunto.

Em particular, se $B = k[x.y, z] = k^{[3]}$ do exemplo (1.4) temos que $D \in Der_k(B)$ definido por $Dx = 0$, $Dy = x$ e $Dz = y$ é irredutível e localmente nilpotente. Podemos concluir que se $A = KerD$ então

$$LND_A(B) = \{aD \backslash \ a \in A\}.$$

As proposições a seguir correspondem ao caso em que B é um DFU contendo $\mathbb{Q}$ e serão usadas na última seção do tercer capítulo.

Proposição 1.38. *Seja B um DFU contendo $\mathbb{Q}$. Se $A \in KLND(B)$ e π é um elemento primo de A, então:*

1. *π é um elemento primo de B e $A \cap \pi B = \pi A$. Consequentemente, $\frac{A}{\pi A} \leq \frac{B}{\pi B}$;*
2. *O fecho algébrico de $\frac{A}{\pi A}$ em $\frac{B}{\pi B}$ é um elemento de $KLND(\frac{B}{\pi B})$;*

Demonstração:

1. Dado que $A \in KLND(B)$, A é fatorialmente fechado em B. Da proposição (1.14) segue que π é um elemento primo de B. Claro que $\pi A \subseteq A \cap \pi B$ e tomando $\pi b \in \pi B \cap A$ temos que $b \in A$ pois A é fatorialmente fechado, logo, $\pi b \in \pi A$ e tem-se $\pi A = A \cap \pi B$. Se considerarmos o homomorfismo $\phi : \frac{A}{\pi A} \to \frac{B}{\pi B}B$ dado por $\phi(a + \pi A) = a + \pi B$ teremos que Ker ϕ é zero, por tanto $\frac{A}{\pi A} \leq \frac{B}{\pi B}$.
2. Pelo corolário (1.37) podemos considerar uma derivação irredutível $D \in LND(B)$ tal que $\ker D = A$. Em particular, $D(B) \nsubseteq \pi B$, portanto D induce uma derivação não nula localmente nilpotente $(D/\pi) : B/\pi B \to B/\pi B$, onde $D/\pi(b + \pi B) = D(b) + \pi B$; Pelo corolário (1.24) grau$tr_{Ker(D/p)} B/\pi B = 1$. Seja d o grau de transcendência de $(B/\pi B)$ em $(A/\pi A)$. Como $A/\pi A \subseteq Ker\,(D/\pi)$ então $d > 0$. Agora, como $grau\mathrm{tr}_A B = 1$, dados $h_1, h_2 \in B$ existe $F \in A[T_1, T_2] \backslash \{0\}$ tal que $F(h_1, h_2) = 0$. Podemos supor que algum coeficiente de F não está em πA, então $F^{(\varphi)} \in A/\pi A[T_1, T_2] \backslash \{0\}$, onde $\varphi : B \to B/\pi B$ é o homomorfismo canônico. Note que $F^{(\varphi)}(\varphi(f), \varphi(g)) = \varphi(F(f, g)) = 0$, de onde dois elementos de $B/\pi B$ são algebricamente dependentes sobre $A/\pi A$ e $d \leq 1$. Logo, $d = 1$ e, assim, $Ker(D/\pi)$ é o fecho algébrico de $A/\pi A$ em $B/\pi B$. ∎

Proposição 1.39. *Sejam B um DFU contendo $\mathbb{Q}$, $D \in LND(B)$ e $A = KerD$. Suponha que algum elemento não-nulo de $A \cap D(B)$ é um produto de primos π de A tal que $A/\pi A$ é algebricamente fechado em $B/\pi B$, então $B = A^{[1]}$.*

Demonstração: Observe que $D = \alpha D_0$ para algum $\alpha \in A \backslash \{0\}$ e alguma derivação irredutível $D_0 \in LND(B)$. Claramente, D_0 satisfaz as hipóteses do teorema, logo, podemos supor que D é irredutível. Seja $E \subset B$ o conjunto dos $s \in B$ tais que $Ds \in A \backslash \{0\}$ e Ds é produto de primos π de A tal que $A/\pi A$ é algebricamente fechado em $B/\pi B$. Por hipótese, temos que $E \neq 0$. Seja $s \in E$, escrevemos $Ds = \pi_1 \ldots \pi_n$, onde para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ π_i é um elemento primo de A. Consideremos a aplicação $\varphi : E \to \mathbb{N}$ dada por $\varphi(s) = n$. Mostremos que existe $s \in E$ tal que $\varphi(s) = 1$. Considere $s \in E$ tal que $l(s) > 0$ e e escrevemos $Ds = \pi_1 \ldots \pi_n$. Seja $\pi = \pi_n$ e considere a derivação $D/\pi : B/\pi B \to B/\pi B$ dada por $D/\pi(b + \pi B) = D(b) + \pi B$. Pela proposição anterior $Ker(D/\pi)$ é o fecho algébrico de $A/\pi A$ em $B/\pi B$. Como $A/\pi A$ é algebricamente fechado em $B/\pi B$ temos que $Ker(D/\pi) = A/\pi A$.

Observe, agora, que $s + \pi B \in Ker(D/\pi) = A/\pi A \subseteq B/\pi B$. Logo, existe $a \in A$ tal que $s - a \in \pi B$. Fazendo $s' = \frac{s-a}{\pi}$, temos que $s' \in E$ e $D(s') = \pi_1 \ldots \pi_{n-1}$. Daí $s' \in E$ e $\varphi(s') < \varphi(s)$. Consequentemente, existe $s' \in E$ tal que $\varphi(s') = 1$. De modo análogo, temos que existe $s'' \in B$ tal que $D(s'') \in B^*$ e, finalmente, pelo teorema (1.23) temos que $B = A^{[1]}$. ∎

Capítulo 2

Os conjuntos $LND_A(k[x, y, z])$ e $LND(k[x, y])$

O principal objetivo neste é exibir uma fórmula Jacobiana para descrever o conjunto das derivações equivalentes e localmente nilpotentes de $B = k[x, y, z]$ e o conjunto $LND(B)$, com $B = k[x, y]$. O conteudo deste capítulo foi baseado em [2], [3], [12] e [17], isto é, os resultados e definições expostos aqui podem ser encontrados em tais referências.

2.1 Preliminares

Nosso objetivo, agora, é mostrar que se B é um DFU e $A \in KLND(B)$ o conjunto $C = \{D \in Der_k B \backslash\ KerD = A\}$ contém uma única derivação irredutível D_0, salvo multiplicação por unidade.

Na parte inicial apresentaremos alguns fatos bem conhecidos concernentes a derivações e extensões de corpos.

Teorema 2.1. *Sejam $F = k(x_1, \ldots, x_n)$ um corpo que é uma extensão finitamente gerada de k, D uma derivação de k com valores em algum corpo L que é extensão de F e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de elementos de L. Para que exista uma derivação D' de F que estende D e tal que $D'(x_i) = u_i$ é necessário e suficiente que todo polinômio $f(X_1, \ldots, X_n)$ em $k[X_1, \ldots, X_n] = k^{[n]}$ tal que $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ satisfaz:*

$$f^D(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_1, \ldots, x_n)u_i = 0. \qquad (2.1.1)$$

Demonstração: Observemos que se D' é uma extensão de D então pode-se provar facilmente (veja teorema (1.6)), que para todo $f \in k[X_1,\ldots,X_n]$

$$\begin{aligned} D'(f(x_1,\ldots,x_n)) &= f^D(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_1,\ldots,x_n)D'(x_i) \\ &= f^D(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_1,\ldots,x_n)u_i. \end{aligned}$$

Como $D'(0) = 0$ a equação (2.1) é satisfeita. Reciprocamente, suponhamos que a equação (2.1) é válida para todo polinômio $f \in k[X_1,\ldots,X_n]$ tal que $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$. Definimos a função D'_0 em $k[x_1,\ldots,x_n]$ que relaciona o elemento $g(x) = g(x_1,\ldots,x_n) \in k[x_1,\ldots,x_n]$ ao

$$D'_0(g(x)) = g^D(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{i=1}^{n} g_{X_i}(x_1,\ldots,x_n)u_i.$$

Vemos que D'_0 é uma função, pois se $g(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n)$ podemos aplicar (2.1) ao polinômio $g - f$ e concluir que $D'_0(g(x_1,\ldots,x_n)) = D'_0(f(x_1,\ldots,x_n))$. Finalmente, como as funções $g \to g^D$ e $g \to u_i g_{X_i}$ são derivações de $k[X_1,\ldots,X_n]$, temos que D' satisfaz as condições da definição (1.1). Logo D' é uma derivação de $k[x_1,\ldots,x_n]$ que estende D. Observe que $D'_0(x_i) = u_i$. Agora, pela fórmula $D'(\frac{g}{h}) = \dfrac{hD'_0(g) - gD'_0(h)}{h^2}$ estendemos D'_0 a uma derivação D' de $k(x_1,\ldots,x_n)$ que estende D. ∎

Os corolários a seguir mostram que se $k \subset F = k(x)$ é uma extensão simples então toda derivação D de k em L pode ser estendida a uma única derivação D' de F.

Nos resultados a seguir convencionaremos que L/F é uma extensão de corpos. Se não especificarmos o contrário, uma derivação de k, F, F', K será uma derivação de k, F, F', K com valores em L.

Corolário 2.2. *Seja $F = k(x)$, com x transcendental sobre k. Dados $u \in L$ e D uma derivação de k, então existe uma única derivação D' de F que estende D e tal que $D'(x) = u$.*

Demonstração: Observe que se D' existe então é unicamente determinada em $k[x] = k^{[1]}$ e, portanto, em $k(x)$. Agora provemos a existência. Como x é transcendente sobre k o único polinômio $f \in k[X]$ tal que $f(x) = 0$ é o polinômio nulo, daí $f^D(x)+uf_X(x) = 0$, isto é, verifica a condição (2.1) do teorema anterior. Logo existe uma derivação D' de F que estende D tal que $D(x) = u$. Observe que neste caso u pode ser escolhido arbitrariamente. ∎

Corolário 2.3. *Se $F = k(x)$ e x é algébrico sobre k então toda derivação D de k em L pode ser extendida a uma derivação D' de F de uma única maneira.*

Demonstração: De fato, todo polinômio $g \in k[X]$ tal que $g(x) = 0$ é um múltiplo do polinômio minimal f de x sobre k. Logo a relação (2.1) se reduz a $f^D(x) + uf_X(x) = 0$, sendo $f_X(x) \neq 0$. Mas a última igualdade é satisfeita por $u \in L$ dado por $\dfrac{f^D(x)}{f_X(x)}$, daí pelo teorema anterior para este u temos que existe uma única derivação D' de F que estende D tal que $D(x) = u$. ∎

Em geral a propriedade anterior é verificada se $k \subset F$ é uma extensão algébrica de corpos.

Teorema 2.4. *Seja $k \subseteq F$ uma extensão algébrica de corpos. Então para toda derivação D de k em L existe uma única derivação D' de F que estende D.*

Demonstração: Se D' existe, é única. De fato, se D'' é uma outra derivação de F que extende D temos que dado $x \in F\backslash k$ existe um polinômio minimal $f \in k[X]$ tal que $f(x) = 0$. Pelo teorema (1.6)

$$D'(f(x)) = f^{D'}(x) + f_X(x)D'(x) = f^{D''}(x) + f_X(x)D''(x) = 0,$$

de onde $D'(x) = D''(x)$, pois $f^{D'}(x) = f^{D''}(x)$ e $f_X(x) \neq 0$. A existência é uma aplicação típica do Lema de Zorn, assim: seja Σ o conjunto definido por:

$$\Sigma = \{(K, D_K);\ \ F/K/k\ \ ,\ \ D_K \text{ é uma derivação de } K \text{ em } L \text{ e } D_K/k = D\}.$$

Considere em Σ a seguinte ordem parcial: $(K, D_K) \leq (K', D_{K'})$ se, e somente se, $K \subseteq K'$ e $D_{K'}/K = D_K$. É claro que Σ é não-vazio, pois $(k, D) \in \Sigma$. Agora, provemos que Σ é um conjunto indutivo. Sejam $\{(K_\alpha, D_\alpha)\}$ (aqui denotamos D_{K_α}por D_α) uma cadeia de Σ, isto é, para cada par de índices α, β têm-se $(K_\alpha, D_\alpha) \leq (K_\beta, D_\beta)$ ou $(K_\beta, D_\beta) \leq (K_\alpha, D_\alpha)$ e tome $K = \cup_\alpha K_\alpha$. Então K é um subcorpo de F que contem k. Definimos D' em K da seguinte forma: dado $x \in K$, $D'(x) = D_\alpha(x)$, onde $x \in K_\alpha$ e D_α é a derivação de K_α que estende D. Notemos que D' está bem definida, pois se $(K_\alpha, D_\alpha) \leq (K_\beta, D_\beta)$ tem-se que $D_\beta/K_\alpha = D_\beta$ e claramente D' é uma derivação de K que estende D. ou seja, $(K, D') \in \Sigma$ e é uma cota superior da cadeia. Logo, pelo Lema de Zorn Σ tem um elemento maximal K', tal que F/K' é algébrica e admite uma derivação D' que estende D. Se $K' \neq F$ existe $y \in F\backslash K'$. Fazendo $F' = K'(y)$ a extensão $K' \subset F'$ é algébrica, pelo corolário (2.3) existe uma derivação D'' de F' que estende D' e portanto estende D. Como $F/F'/k$ temos que $(F', D'') \in \Sigma$, o que contradiz a maximalidade de (K', D'). Logo $K' = F$. ∎

No seguinte resultado $Der_k F$ denotará o L-espaço vetorial das k-derivações de F. O seguinte teorema nos permite calcular a dimensão de tal espaço. Quando $trgr_k F$ é finito.

Teorema 2.5. *Seja F/k uma extensão de corpos com $n = trgr_k F$. Então a dimensão m do L-espaço vetorial $Der_k(F)$ é igual a n.*

Demonstração: Seja $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de transcendência de F sobre k. Se $F' = k(u_1, \ldots, u_n)$ então a extensão F'/k é puramente transcendental. Assim pode-se provar facilmente (veja teorema (2.4)) que o conjunto $\{\frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}\}$ é uma L-base para $Der_k(F', L)$. Agora, observe que a extensão F/F' é algébrica e pelo teorema (2.4) toda k-derivação D' de F' pode ser estendida de uma única maneira para uma k-derivação D'' de F e, portanto, dado um conjunto $\overline{S} = \{\overline{D}; \overline{D} \in Der_k(F, L)\}$ então:

$$\overline{S} \text{ é L.I. se, e somente se, } S = \{D \in Der_k(F', L); \exists \overline{D} \in \overline{S}; \overline{D}/F' = D\} \text{ é L.I.}$$

E, portanto, $m = n$. ■

2.2 Derivações equivalentes

Para atingir o objetivo anunciado no inicio da seção precisamos de mais uma definição é algums resultados.

Definição 2.6. *Dados B um dominio e $D_1, D_2 \in Der(B)$ definimos $D_1 \sim D_2$ se existem $b_1, b_2 \in B\backslash\{0\}$ tais que $b_1 D_1 = b_2 D_2$.*

Note que se C é uma classe de equivalência dada pela relação $\sim$, então todos os seus elementos têm o mesmo núcleo, o qual será denotado por $KerC$. O primeiro resultado em relação a $A = KerC$ é que se $tr\mathrm{gr}_A B$ é 1 então $C = \{D \in Der_k B \backslash\ KerD = A\}$, como veremos no corolário da próxima proposição. Uma tal classe será chamada de classe de equivalência de $Der(B)$.

Proposição 2.7. *Sejam B um k-domínio e A uma subálgebra de B. Se $FracB$ tem grau de transcendência 1 sobre $FracA$ então todas as A-derivações não nulas de B são equivalentes.*

Demonstração: Sejam $K = FracA$, $L = FracB$, $S = B\backslash\{0\}$ e a função $\phi : Der_A B \to Der_K L$ dada por $\phi(D) = S^{-1}D$. Claramente, ϕ é injetiva. Agora, se $D_1, D_2 \in Der_A B\backslash\{0\}$ então as derivações $S^{-1}D_1, S^{-1}D_2 \in Der_K L$ são linearmente dependentes sobre L, pois pelo teorema (2.5) a dimensão do L-espaço vetorial $Der_K L$ é 1, isto é, existem $b_1, b_2 \in L$ tais que $b_1 S^{-1} D = b_2 S^{-1} D_2$ e, consequentemente, $D_1 \sim D_2$. ■

Corolário 2.8. *Se B é um k-domínio e $C \subseteq Der(B)$ é um classe de equivalência contendo uma derivação localmente nilpotente. Então*

$$C = \{D \in DerB \backslash\ KerD = A\},$$

onde $A = KerC$.

Demonstração: Pelo Corolário (1.24) temos que $tr\mathrm{gr}_A B = 1$, logo, o resultado segue da proposição anterior. ■

Observação 2.9. *Note que se B satisfaz a condição de cadeia ascendente para ideais principais e $C \subseteq Der(B)$ é uma classe de equivalência então C contém uma derivação irredutível D_0. De fato, dado $D \in C$, pelo teorema (1.35) temos que existe uma derivação irredutível $D_0 \in Der(B)$ tal que $D = aD_0$ para algum $a \in B$, isto é, $D_0 \in C$.*

A proposição a seguir consiste num resultado fundamemtal, que junto com as definições e resultados que apresentaremos na próxima seção nos fornecem uma caracterização do conjunto $LND_A(B)$, onde $A \in KLND(B)$ e $B = k^{[3]}$

Proposição 2.10. *Se B é um DFU e $C \subseteq Der(B)$ é uma classe de equivalência então:*

a) Existe uma única derivação irredutível $D_0 \in C$, salvo multiplicação por unidade;

b) Se C contém uma derivação localmente nilpotente então D_0 é localmente nilpotente.

Demonstração:

a) A existência foi comentada na observação anterior e a unicidade se deduz facilmente do lema (1.35);

b) Seja $D \in C$ localmente nilpotente, então $D = bD_0$ para algum $b \in B \backslash \{0\}$ e pelo teorema (1.18) tem-se que $b \in KerC$ e $D_0 \in LND(B)$. ■

2.3 Derivações Jacobianas de $k^{[n]}$

A partir de agora, vamos centrar nossa atenção no sentido de determinar a derivação irredutível da classe $C = \{D \in Der_k B \backslash\ KerD = A\}$, onde $A \in KLND(B)$, $B = k[x,y,z]$ ou $B = k[x,y]$. Para isto estudaremos as Derivações Jacobianas no anel de polinômios $B = k[X_1, \ldots, X_n]$.

Definição 2.11. *Sejam $B = k[X_1, \ldots, X_n] = k^{[n]}$ e $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) \in B^m$. Definimos a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$ por:*

$$J(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

Um primeiro resultado na direção do objetivo descrito acima e fundamental no estudo das derivações Jacobianas é um caso particular da Proposição (1.1) de [14]. Aqui vamos apresentar este caso particular.

Lema 2.12. *Sejam $B = k[X_1,\ldots,X_n] = k^{[n]}$ e $\mathbf{f} = (f_1,\ldots,f_n) \in B^n$. Então $\mathbf{f}$ é algebricamente independente sobre k se, e somente se, $det(J(\mathbf{f})) \neq 0$.*

Demonstração: Iniciamos observando que se $G \in k[T_1,\cdots,T_m]$ = anel de polinômios, $\mathbf{h} = (h_1,\ldots,h_m) \in B^m$ e $G(\mathbf{h}) = 0$, então podemos concluir, pela regra da cadeia, que

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T_1}(\mathbf{h}),\cdots,\ \frac{\partial G}{\partial T_m}(\mathbf{h})\right).\,J(\mathbf{h}) = 0 \tag{2.12.1}$$

Assim, se supusermos que $\mathbf{f}$ é algebricamente dependente poderemos encontrar, por argumentos de minimalidade de grau, $G \in k[T_1,\cdots,T_n]$ tal que $G(\mathbf{f}) = 0$ e o vetor $(\frac{\partial G}{\partial T_1}(\mathbf{f}),\cdots,\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{T_m}}(\mathbf{f})) \neq \mathbf{0}$, já que a característica de k é zero e assim de (2.2) podemos concluir que $det(J(\mathbf{f})) = 0$, ie, temos provado que se $det(J(\mathbf{f})) \neq 0$ então $\mathbf{f}$ é algebricamente independente sobre k. Agora, vamos supor que $\mathbf{f}$ é algebricamente independente sobre k. Logo, para cada $i, 1 \leq i \leq n$ tem-se $\mathbf{f(i)} = (f_1,\cdots,f_n,X_i)$ é algebricamente dependente e existe

$$G(i) = a_s(T_1,\cdots,T_n)T_{n+1}^s + \cdots + a_1(T_1,\cdots,T_n)T_{n+1} + a_0(T_1,\cdots,T_n)$$

tal que $s \geq 1$, $a_s(T_1,\cdots,T_n) \neq 0$, $G(i)(\mathbf{f(i)}) = 0$ e s é mínimo com estas propriedades. Logo tem-se que $\frac{\partial G(i)}{\partial T_{n+1}}(\mathbf{f(i)}) \neq 0$. Assim, para cada i temos pela igualdade (2.2) que

$$\left(\frac{\partial G(i)}{\partial T_1}(\mathbf{f(i)}),\cdots,\ \frac{\partial G(i)}{\partial T_n}(\mathbf{f(i)})\right)\ .\ J(\mathbf{f}) = -\frac{\partial G(i)}{\partial T_{n+1}}(\mathbf{f(i)}).e_i,$$

onde $e_i = (0,\cdots,1,\cdots 0)$ é o vetor canônico. Assim, $J(\mathbf{f})$ define um isomorfismo $k(X)$-linear de $k(X)^n$ em $k(X)^n$ e, portanto, $det(J(\mathbf{f})) \neq \mathbf{0}$. ∎

Agora, estamos em condições de definir uma derivação Jacobiana e apresentar alguns resultados fundamentais a respeito.

Definição 2.13. *Sejam $B = k[X_1,\ldots,X_n] = k^{[n]}$ e $\mathbf{f} = (f_1,\ldots,f_{n-1}) \in B^{n-1}$. Definimos a derivação Jacobiana $\Delta_{\mathbf{f}} \in Der_k(B)$ em $g \in B$ por:*

$$\Delta_{\mathbf{f}}(g) = det(J(\mathbf{f},g))$$

onde $J(\mathbf{f},g)$ é a matriz Jacobiana de $(f_1,\ldots,f_{n-1},g) \in B^n$.

A partir da definição anterior e do lema (2.12) obtemos que se $f_1,\ldots,f_{n-1}$ são algebricamente dependentes sobre k então $\Delta_f = 0$. Caso contrário o $ker\Delta_f$ é dado pela seguinte proposição:

Proposição 2.14. *Sejam $B = k[X_1, \dots, X_n] = k^{[n]}$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{n-1}) \in B^{n-1}$. Se $f_1, \dots, f_{n-1}$ são algebricamente independentes sobre k então o $ker\Delta_f$ é o fecho algébrico de $k[f_1, \dots, f_{n-1}]$ em B.*

Demonstração: Em primeiro lugar, é claro que $f_i \in Ker\Delta_f$, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e, como $ker\Delta_{\mathbf{f}}$ é um subanel de B, temos que:

$$k[f_1, \dots, f_{n-1}] \subseteq ker\Delta_f \tag{2.14.1}$$

Agora tome $g \in B$ assim pelo fato de que $f_1, \dots, f_{n-1}$ são algebricamente independentes tem-se que: $f_1, \dots, f_{n-1}, g$ são algebricamente dependentes se, e somente se, g é algébrico sobre $k[f_1, \dots, f_{n-1}]$. Mas pelo lema (2.12) temos que $f_1, \dots, f_{n-1}, g$ são algebricamente dependentes se, e somente se, $det(J(\mathbf{f}, g)) = 0$, ie, se, e somente se, $g \in ker\Delta_{\mathbf{f}}$. ■

Nosso interesse está voltado em descrever explicitamente uma derivação irredutível $D_0 \in LND(B)$ com $KerD_0 = A$ e de forma que $A = k^{[n-1]}$.

Proposição 2.15. *Sejam $B = k[X_1, \dots, X_n]$ e A uma subalgebra algebricamente fechada em B tal que $trgr_k A = n - 1$. Se $f_1, \dots, f_{n-1} \in A$ são algebricamente independentes sobre k então $ker\Delta_f = A$, onde $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$.*

Demonstração: Seja $C = Ker\Delta_f$. Pelo teorema anterior temos que C é o fecho algébrico de $k[f_1, \dots, f_{n-1}]$ em B. Observe também que $A \subset C$, pois se $g \in A$ tem-se que $\{f_1, \dots, f_{n-1}, g\}$ é algebricamente dependente sobre k, logo, $g \in C$. Além disso, C é algébrico sobre A e, sendo A algebricamente fechado, obtemos que $A = C$. ■

Observação 2.16. *Note que se B e A são como na proposição anterior o conjunto $\Gamma = \{D \in Der_k B \backslash \ KerD = A\}$ é não-vazio e, portanto, uma classe de equivalência, pois $trgr_A B = 1$.*

O lema a seguir será fundamental para a prova do resultado a seguir. Sua demonstração (ver em [3]) requer noções que fogem do tema central deste trabalho e portanto vamos omiti-la.

Lema 2.17. *Sejam A uma subalgebra de $B = k[X_1, \dots, X_n] = k^{[n]}$, a qual é finitamente gerada sobre k, e d a dimensão de A. Dados $f_1, \dots, f_m \in B$ tais que $A = k[f_1, \dots, f_n]$, seja $J(\mathbf{f})$ a matriz jacobiana de $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ em relação a $(X_1, \dots, X_n)$. E considere o ideal $\mathcal{M}$ de B gerado por $d \times d$ menores de $J(\mathbf{f})$. Se A é fatorialmente fechado em B, então $alt\mathcal{M} > 1$.*

Abaixo temos o fato não trivial de que a derivação Δ_f é irredutível.

Proposição 2.18. *Sejam $B = k[X_1,\dots,X_n] = k^{[n]}$ e $f = (f_1,\dots,f_{n-1}) \in B^{n-1}$ tais que:*

i) $f_1,\dots,f_{n-1}$ são algebricamente independentes sobre k;

ii) $k[f_1,\dots,f_{n-1}]$ é fatorialmente fechado em B.

Então $\Delta_f \in Der_k B$ é irredutível e $Ker\Delta_f = k[f_1,\dots,f_{n-1}]$.

Demonstração: Seja $A = k[f_1,\dots,f_{n-1}]$. Como $f_1,\dots,f_{n-1}$ são algebricamente independentes o núcleo de Δ_f é o fecho algébrico de A em B. Sendo A fatorialmente fechado, pela proposição (1.17) temos que A é algebricamente fechado em B, logo $ker\Delta_f = A$. Agora, provemos que Δ_f é irredutível. Como $\Delta_f \in Der_k(B)$ e pelo teorema (1.5) temos que se $g \in B$, então $\Delta_f(g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial X_i}\Delta_f(X_i)$. Portanto, $\Delta_f(B) \subseteq \mathcal{M}$, onde $\mathcal{M} = (\Delta_f(X_1),\dots,\Delta_f(X_n))$. Observemos que se I é um ideal principal de B tal que $\Delta_f(B) \subset I$ então $\mathcal{M} \subset I$. Agora, sendo $\mathcal{M}$ o ideal de B gerado por menores $(n-1)\times(n-1)$ da matriz jacobiana $J(f)$ temos que $ht\mathcal{M} > 1$ e portanto o único ideal principal de B que contém $\mathcal{M}$ é B, logo, $I = B$. ■

Corolário 2.19. *Sejam $B = k[X_1,\dots,X_n] = k^{[n]}$ e $D : B \to B$ uma k-derivação localmente nilpotente tal que $KerD = A = k^{[n-1]}$. Se $KerD = k[f_1,\dots,f_{n-1}]$, com $f_i \in B$ e $f = (f_1,\dots,f_{n-1})$, então Δ_f é irredutível e é equivalente a D. E assim, Δ_f é localmente nilpotente.*

Demonstração: Pela proposição (1.17) temos que $KerD = k[f_1,\dots,f_{n-1}] = k^{[n-1]}$ é fatorialmente fechado em B. Logo, pela proposição anterior Δ_f é irredutível e $Ker\Delta_f = k[f_1,\dots,f_{n-1}] = KerD$, isto é, Δ_f e D têm o mesmo núcleo e pelo corolário (2.8) Δ_f e D são equivalentes. Agora, sendo D uma derivação localmente nilpotente, segue da proposição (2.10) que Δ_f é localmente nilpotente. ■

Lembremos que se B é um DFU e $A \subset KLND(B)$ o corolário (1.37) mostra que para descrever o conjunto $LND_A(B)$ é suficiente conhecer um elemento irredutível deste conjunto. Consequentemente, se A e B e f são como no corolário anterior, temos a seguinte caracterização do conjunto $LND_A(B)$:

$$LND_A(B) = \{\alpha\Delta_f \setminus \alpha \in A\}.$$

2.4 Derivações equivalentes localmente nilpotentes no anel $k^{[3]}$

O objetivo nesta seção é apresentar uma fórmula Jacobiana para descrever o conjunto das derivações equivalentes e localmente nilpotentes do anel $B = k[x,y,z]$. Aqui nos parece o lugar natural para citar um importante e conhecido teorema para o caso $B = k^{[3]}$. O caso fundamental em que k é algebricamente fechado foi provado por Miyanishi em [13].

Teorema 2.20 (Miyanishi)**.** *Seja $B = k^{[3]}$. Se $A \in KLND(B)$ então $A = k^{[2]}$*

Encerramos a seção com os dois próximos resultados.

Corolário 2.21. *Sejam $B = k[x,y,z]$, $D : B \to B$ uma derivação localmente nilpotente e $f = (f_1, f_2) \in B^2$ tais que $KerD = A = k[f_1, f_2]$. Então, $\Delta_f : B \to B$ é irredutível, localmente nilpotente e satisfaz: $Ker\Delta_f = k[f_1, f_2]$. Consequentemente,*

$$LND_A(B) = \{\alpha\Delta_f \setminus \alpha \in k[f_1, f_2]\}.$$

Demonstração: Dado que $KerD = k[f_1, f_2] = k^{[2]}$, temos pelo corolário (2.19) que Δ_f é irredutível e localmente nilpotente, com $Ker\Delta_f = k[f_1, f_2]$. Logo, pelo corolário (1.37) segue que $LND_A = \{\alpha\Delta_f \setminus \alpha \in k[f_1, f_2]\}$. ∎

Proposição 2.22. *Sejam $f, g \in k[x,y,z] = k^{[3]}$, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$k[f,g]$ é o núcleo de alguma derivação localmente nilpotente de $k[x,y,z]$;*
2. *para toda extensão de corpos K/k , $K[f,g]$ é o núcleo de alguma derivação localmente nilpotente de $K[x,y,z]$;*
3. *para alguma extensão de corpos K/k, $K[f,g]$ é o núcleo de alguma derivação localmente nilpotente de $K[x,y,z]$.*

Demonstração: Seja D uma derivação localmente nilpotente de $k[x,y,z]$, com $kerD = k[f,g]$, e K um corpo de extensão de k, então a derivação

$$1 \otimes_k D : K \otimes_k k[x,y,z] \to K \otimes_k k[x,y,z]$$

é claramente localmente nilpotente e ainda mais $ker_{1\otimes_k D} = K \otimes_k k[f,g]$. Observe que $K \otimes_k k[x,y,z] \approx K[x,y,z]$ e $K \otimes_k k[f,g] \approx K[f,g]$. Logo 1) $\Rightarrow$ 2). Claramente 2) $\Rightarrow$ 3). Suponhamos que 3 ocurre, então pelo corolário (2.21) $\overline{\Delta}_{(f,g)} : K[x,y,z] \to K[x,y,z]$ é localmente nilpotente com núcleo $K[f,g]$. Claro que $\overline{\Delta}_{(f,g)}(k[x,y,z]) \subseteq k[x,y,z]$. Fazendo $\Delta_{(f,g)} = \overline{\Delta}_{(f,g)}\ |_{k[x,y]}$ temos que $\Delta_{(f,g)}$ é localmente nilpotente com $ker_{\Delta_{(f,g)}} = K[f,g] \cap k[x,y,z] = k[f,g]$. Em conseqüência, 3 $\Rightarrow$ 1. ∎

Observe que se $f, g \in k[x,y,z]$ tais que $k[f,g]$ é o núcleo de alguma derivação localmente nilpotente de $k[x,y,z]$, então $\overline{k}[f,g]$ é o núcleo de alguma derivação localmente nilpotente de $\overline{k}[x,y,z]$.Logo, f, g são elementos irredutíveis em $\overline{k}[f,g]$ e como $\overline{k}[f,g]$ é fatorialmente fechado em $\overline{k}[x,y,z]$ então f e g são irredutíveis em $\overline{k}[x,y,z]$.

2.5 Descrição das derivações localmente nilpotentes em $k^{[2]}$

Agora, direcionamos a nossa atenção ao estudo das derivações localmente nilpotentes no anel $B = R[x,y]$, onde R é um DFU. Iniciaremos enunciando um resultado provado em [16] e que vamos utilizar em seguida.

Proposição 2.23. *Sejam R e A DFU sastisfazendo $R \leq A \leq R^{[n]}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Se $trgr_R(A) = 1$ então $A = R^{[1]}$.*

No caso particular em que A é um núcleo de uma derivação localmente nilpotente de B temos então que $A = R^{[1]}$, como vemos a seguir.

Corolário 2.24. *Sejam R um DFU de característica zero e $B = R[x,y] = R^{[2]}$. Se $A \in KLND_R(B)$ então $A = R^{[1]}$.*

Demonstração: Pela proposição (1.17) temos que A é fatorialmente fechado e como B é um DFU , segue da proposição (1.14) que A é um DFU Pelo corolário (1.24) $tr\mathrm{gr}_A(B) = 1$, logo, $tr\mathrm{gr}_R(A) = 1$ e o resultado seguirá da proposição anterior. ■

A seguir apresentamos um teorema encontrado em [16], (omitiremos a demonstração pois nela se usa técnicas que fogem das apresentadas neste texto), e usado na prova do conhecido Teorema de Rentscher's. Primeiro vamos dar uma definição.

Definição 2.25. *Dizemos que uma B k-álgebra é geometricamente fatorial sobre k, se $E \otimes_k B$ é um DFU para toda extensão algébrica $k \subset E$.*

Teorema 2.26. *Sejam L um corpo, A uma $L-$ álgebra finitamente gerada e $\alpha \in A$. Se ocorre*

(i) *$S^{-1}(A) = L(\alpha)^{[1]}$, onde $S = L[\alpha]\backslash\{0\}$;*

(ii) *$L(\alpha) \cap A = L[\alpha]$;*

(iii) *A é geometricamente fatorial sobre L*

então $A = L[\alpha]^{[1]}$.

A prova deste Teorema e tomada do artigo [5] .

Teorema 2.27 (Teorema de Rentscher)**.** *Se D é uma derivação não-nula localmente nilpotente de $k[x,y] = k^{[2]}$ então existem $p,q \in B$ tais que $k[x,y] = k[p,q]$ e $KerD = k[p]$. Além disso, $D = \alpha\Delta_p$ para algum $\alpha \in k[p]$.*

Demonstração: Seja $A = KerD$. Pelo corolário (2.24) $A = k^{[1]} = k[p]$ para algum $p \in B$. Fazendo $S = A\backslash\{0\}$, temos pelo teorema (1.27) que

$$S^{-1}B = S^{-1}k[x,y] = k(p)^{[1]} \quad \text{e} \quad k(p) \cap k[x,y] = k[p].$$

Além disso, $k[x,y]$ é geometricamente fatorial sobre k. Logo, pelo teorema (2.26) obtemos que $k[x,y] = k[p]^{[1]}$, ou seja, $k[x,y] = k[p,q]$ para algum $q \in B$. Agora, pelo corolario (2.19) Δ_p é irredutível e localmente nilpotente com $Ker\Delta_p = k[p] = KerD$. Logo do corolario (1.37) temos que $D = \alpha\Delta_p$ para algum $\alpha \in k[p]$. ■

Uma aplicação direta da proposição (2.18) nos fornece uma propriedade verificada por uma variável no anel de polinômios $B = k[x,y]$.

Proposição 2.28. *Seja $B = k[x,y] = k^{[2]}$. Se $p \in B$ é uma variável de B sobre k, isto é, existe $v \in B$ tal que $B = k[p,v]$, então $mdc(p_x, p_y) = 1$, onde p_x e p_y são as derivadas parciais de p em relação a x e y.*

Demonstração: Como $\{p\}$ é algebricamente independente sobre k e $k[p]$ é fatorialmente fechado em B segue pela proposição (2.18) que Δ_p é irredutível com $Ker\Delta_p = k[p] = KerD$. Pela proposição (1.29) tem-se que $mdc(\Delta_p(x), \Delta_p(y)) = 1$. Além disso, $\Delta_p(x) = -p_y$ e $\Delta_p(y) = p_x$. ■

O teorema a seguir descreve explicitamente o conjunto $LND_R(B)$ no caso em que $B = R[x,y] = R^{[2]}$, onde R é um domínio de fatorização única contendo $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.29. *Sejam R um DFU contendo $\mathbb{Q}$, $B = R[x,y] = R^{[2]}$ e $K = Frac(R)$. Considere o conjunto*

$$\mathcal{P} = \{p \in B \backslash\ mdc_B(p_x, p_y) = 1 \text{ e } p \text{ é uma variável de } K[x,y]\},$$

então

1. *Para $p \in B$ são equivalentes*
   - *(a) $p \in \mathcal{P}$;*
   - *(b) $\Delta_p : B \to B$ é irredutível e localmente nilpotente;*
   - *(c) $Ker\Delta_p = R[p]$*
2. *$LND_R(B) = \{\alpha\Delta_p \backslash p \in \mathcal{P}$ e $\alpha \in R[p]\}$.*

Demonstração:

1. Seja $p \in \mathcal{P}$, então existe $v \in B$ tal que $K[x,y] = K[p,v]$. Considere a derivação

$$\delta = S^{-1}\Delta_p : K[x,y] \to K[x,y],\ S = R \setminus \{0\}.$$

Para todo $H \in K[x,y]$ temos

$$\delta(H) = \begin{vmatrix} p_x & p_y \\ H_x & H_y \end{vmatrix} = \overline{\Delta}_p(H).$$

Observe, agora, que $K[p,v] = K[p]^{[1]}$ e considerando a derivação $\partial : K[p,v] \to K[p,v]$ dada pela derivada parcial em relação a v, temos que ∂ é localmente nilpotente e $KerD = K[p] = k^{[1]}$. Logo pelo corolario (2.19) $\overline{\Delta}_p$ é localmente nilpotente e, portanto, Δ_p também é, uma vez que $\overline{\Delta}_p\big|_{R[x,y]} = \Delta_p$. Por fim, como $mdc_B(p_x, p_y) = 1$ tem-se que $mdc_B(\Delta_p(x), \Delta_p(y)) = 1$, pois $\Delta_p(x) = -p_y$ e $\Delta_p(y) = p_x$ e portanto, temos que Δ_p é irredutível. Provamos assim que b) resulta de a).

Suponhamos, agora, que $\Delta_p : B \to B$ é irredutível e localmente nilpotente. Pelo corolário (2.24) $Ker\Delta_p = R[w]$ para algum $w \in B$, logo, $p \in R[w]$. Escrevendo $p = f(w)$, com $f \in R[t] = R^{[1]}$ temos que $\Delta_p(x) = -p_y = -f'(w)w_y$ e $\Delta_p(y) = p_x = f'(w)w_x$. E pela irredutiblidade de Δ_p segue que $f'(w) \in B^* = R^*$. Consequentemente, $f(t) = ut + r$, com $u \in R^*$ e $r \in R$. Daí $p = uw + r$, de onde obtemos a igualdade $R[w] = R[p] = Ker\Delta_p$. Logo provamos que *b*) implica *c*).

Por fim, se $Ker\Delta_p = R[p]$ temos que $KerS^{-1}\Delta_p = S^{-1}R[p] = K[p]$. Logo, pelo *Teorema de Rentschler* p é uma variável de $K[x,y]$ logo, p_x e p_y são primos relativos em $K[x,y]$. De onde temos que se $r = mdc_B(p_x, p_y)$ então $r \in R\backslash\{0\}$. Portanto r divide todos coeficientes de p, exceto talvez seu termo constante, assim se $c \in R$ é o termo constante de $p \in R[x,y]$. Daí r divide $p - c$, ou seja, $p - c = rh \in R[p]\backslash\{0\}$ para algum $h \in B$. Como $Ker\Delta_p = R[p]$ é fatorialmente fechado em B segue que $h \in R[p]$ e, consequentemente, $r \in R^*$ e $mdc_B(p_x, p_y) = 1$, obtendo assim a implicação restante *c*) $\Rightarrow$ *a*).

2. Seja $D \in LND_R(B)$, com $D \neq 0$, então $KerD = R[p] = R^{[1]}$ e $KerS^{-1}D = K[p]$. Logo, p é uma variável de $K[x,y]$ e $mdc_B(p_x, p_y) = 1$, isto é, $p \in \mathcal{P}$ o que, junto com a parte provada acima, nos dá Δ_p é irredutível e localmente nilpotente com $Ker\Delta_p = R[p]$. Portanto, $D = \alpha\Delta_p$ para algum $\alpha \in R[p]$ e $LND_R(B) = \{\alpha\Delta_p \backslash p \in \mathcal{P}$ e $\alpha \in R[p]\}$. ■

Exemplo 2.30. *Se D é a derivação localmente nilpotente dada no exemplo (1.4) ié se $B = k[x,y,z] = k^{[3]}$, $D_x = 0$, $D_y = x$ e $D_z = y$. Fazendo $R = k[x]$, $B = R[y,z] = R^{[2]}$ e $D \in LND_R(B)$. Observe que se $p = y^2 - 2xz$ tem-se $p_y = 2y$, $p_x = -2x$ e $mdc_B(p_y, p_z) = 1$. Agora, se $v = y$ segue que $k(x)[y,z] = k(x)[p,v]$. Logo, $p \in \mathcal{P}$ e $Ker\Delta_p = R[p] = k[x][p] = k[x,p]$, onde $\Delta_p : B \to B$. Note que $D = \frac{1}{2}\Delta_p$. Daí $KerD = k[x,p]$ e $LND_{k[x,p]}B = \{\alpha\Delta_p \backslash\ \alpha \in k[x,p]\}$.*

Encerraremos o capítulo com a descripção das derivações localmente nilpotentes de $B = k[x,y]$.

Corolário 2.31. *Sejam $B = k[x,y] = k^{[2]}$ e o conjunto*

$$\mathcal{P} = \{p \in B \backslash \ p \text{ é uma variável de } k[x,y]\}.$$

Então $LND(B) = \{\alpha\Delta_p \backslash p \in \mathcal{P} \text{ e } \alpha \in k[p]\}$.

Demonstração: Pela proposição (2.28) temos que $mdc_B(p_x, p_y) = 1$. Logo a afirmação segue do teorema anterior. ■

Capítulo 3

Derivações Homogêneas em $K[x, y, z]$

Dados o anel graduado $B = k^{[3]}$ e $A \subseteq B$ um subanel homogêneo de B, queremos estabelecer condições em A para as quais seja equivalente a existência de uma derivação homogênea localmente nilpotente $D : B \to B$ com $kerD = A$. O corolario (2.21) mostra que se D existe é essencialmente determinada por A. Alem disso, pelo teorema de Miyanishi sabemos que se $A \in KLND(B)$ então A é uma subálgebra $k[f, g]$ de B onde f e g são algebricamente independentes sobre k, logo, basta procurar condições para f e g. O conteúdo deste capítulo foi baseado em [15] e no artigo [4] de Daniel Daigle.

3.1 Anéis Graduados

Nesta seção serão fixadas algumas notações e estabelecidas as primeiras definições básicas necessárias para o desenvolvimento do capítulo.

Definição 3.1. *Uma graduação de uma anel B é uma família $\{B_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de subgrupos B_k do grupo $(B, +)$ tal que*

i) $B = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} B_k$;

ii) $B_i B_j \subseteq B_{i+j}$, para cada $i, j \in \mathbb{Z}$.

B é chamado um anel $\mathbb{Z}-$ graduado se ele é munido de uma graduação $\{B_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Abaixo seguem outras definições que também faremos uso.

Definição 3.2. *Seja B um anel graduado munido da graduação $\{B_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$.*

1. *Se $B_k = 0$ para $k < 0$, B é chamado $\mathbb{N}_0$-graduado;*

2. *Os elementos $b \in B_i \backslash \{0\}$ são chamados de homogêneo de grau i e escrevemos $\omega(b) = i$ ou $grau(b) = i$;*

3. *Se $b = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k$, com $b_k \in B_k$, b_k é chamado a componente homogênea de grau k de b;*

4. *Quando S é um subconjunto multiplicativamente fechado de B e $S \subseteq \cup_i (B_i \backslash \{0\})$ a graduação em B definirá uma graduação em $S^{-1}B$ na seguinte maneira: se $b \in B_i \backslash \{0\}$ e $s \in S$ então b/s é dito homogêneo de grau $\omega(b) - \omega(s)$. Em particular, se $h \in B \backslash \{0\}$ é homogêneo e $S = \{1, h^1, h^2, ...\}$ denotaremos $S^{-1}B$ por B_h e $(B_h)_0$ por $B_{(h)}$*

5. *Um subanel A de B é chamado de homogêneo se $A = \oplus_i (A \cap B_i)$ e escrevemos $A = \oplus_i A_i$, onde $A_i = A \cap B_i$ e, portanto, A é um anel graduado;*

6. *Para um anel graduado $B = \oplus_i B_i$, $d(B) = mdc\{i \backslash B_i \neq 0\}$. Note que $d(S^{-1}B) = d(B)$ para todo S definido no item 4.*

No próximo lema vamos citar duas propriedades elementares e importantes de um anel graduado. A primeira delas é que o conjunto $S = \cup_i B_i \backslash \{0\}$ é saturado no anel graduado $B = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} B_k$

Lema 3.3. *Seja $B = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} B_k$ então:*

1. *Se $f, g \in B$ são não nulos. Então fg é homogêneo, se, e somente se, f e g são homogêneos.*

2. *Se $I \subseteq B$ é um ideal homogêneo (i.e, gerado por elementos homogêneos) e $b = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \in B$ então $b \in I$ se, e somente se, $b_k \in I$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Vamos dar a seguir, dois lemas concernentes a anéis $\mathbb{Z}$-graduados, os quais serão usados nos principais resultados deste capítulo.

Lema 3.4. *Seja $B = \oplus_n B_n$ um anel $\mathbb{Z}$-graduado que é DFU e que satisfaz: se para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ tal que $B_n \neq 0$ temos que $B_{-n} \cap B^* \neq \phi$. Então B_0 é um DFU.*

Demonstração: Observe em primeiro lugar que se $p \in B$ é primo homogêneo tal que $p \in B_n$ então $B_n \neq 0$. Logo, existe $u \in B_{-n} \cap B^*$. E fazendo $p_0 = up$ temos que p_0 é associado a p em B e, portanto, p_0 é primo em B. Mostremos, agora, que p_0 é primo em B_0. Suponhamos que $p_0 \mid ab$ em B_0, $a, b \in B_0$, então $p_0 \mid a$ ou $p_0 \mid b$ em B. Se $p_0 \mid a$ em

B temos que $a = p_0 h$ para algum $h \in B$ e é claro que $h \in B_0$, de igual forma se $p_0 \mid b$ em B então $p_0 \mid b$ em B_0, de onde p_0 é primo em B_0. Supondo que $a \in B_0$ não é primo e nem unidade então pelo lema anterior, $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ onde para cada i p_i é primo homogêneo de B. Pelo mostrado anteriormente, obtemos uma fatoração de a em B_0. ■

Lema 3.5. *Sejam $B = \oplus_n B_n$ um anel $\mathbb{Z}$-graduado e R um subanel homogêneo de B satisfazendo: se para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ tal que $B_n \neq 0$ temos que $R_{-n} \cap R^* \neq \phi$. Então as seguintes condições são equivalentes.*

1. *Existe um elemento homogêneo v de B tal que $B = R[v] = R^{[1]}$;*
2. *$B_0 = R_0^{[1]}$.*

Demonstração: Suponhamos que (1) é certo com $v \in B_n \backslash \{0\}$. Sendo $B_n \neq 0$, podemos fixar $u \in R_{-n} \cap R^*$ e por $v_0 = uv \in B_0$. Então $R[v_0] = B = R^{[1]}$. Logo, v_0 é transcendente sobre R e, em particular, transcendente sobre R_0. Claro que $B_0 = R_0[v_0] = R_0^{[1]}$ provamos $1 \Rightarrow 2$. Reciprocamente, suponhamos que $B_0 = R_0^{[1]}$. Seja $v \in B_0$ tal que $B_0 = R_0[v]$. Se $r \neq 0$ é um elemento homogêneo de B_n, então $B_n \neq 0$. Fixando $u \in R_{-n} \cap R^*$, seja $r_0 = ur \in B_0$ então $r_0 \in R_0[v]$, em conseqüência, $r = u^{-1} r_0 \in R[v]$, isto prova que $B = R[v]$. Provaremos, agora, que v é transcendente sobre R. Suponhamos o contrário, seja $f \in R[T] \backslash \{0\}$ tal que $f(v) = 0$ e $f(T) = \sum_i f_i(T)$ com $f_i(T) \in R_i[T]$. Escolhemos $m \in \mathbb{Z}$ tal que $f_m(T) \neq 0$ e $\theta \in R_{-m} \cap R^*$, então $\theta f_m(T) \in R_0[T] \backslash \{0\}$. Além disso, $\theta f_m(v) = 0$, o que contradiz o fato de que v é transcendente sobre R_0, consequentemente, $B = R[v] = R^{[1]}$. ■

3.2 Polinômios Homogêneos

Apresentando duas notações básicas para introduzir o conceito de ω-graduacão do anel de polinômios $B = k[X_1, \ldots, X_n]$, onde $\omega \in \mathbb{Z}^n$. Sejam $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{Z}^n$ e $s \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, então ω^α denotará a soma $\omega_1 \alpha_1 + \ldots + \omega_n \alpha_n$ e X^α representará o monômio $X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$. Com as notações acima temos a seguinte definição:

Definição 3.6. *Um polinômio $f \in k[X_1, \ldots, X_n] = k^{[n]}$ é chamado ω-homogêneo de grau s se f é da forma*

$$f = \sum_{\omega^\alpha = s} a_\alpha X^\alpha = \sum_{\omega^\alpha = s} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n},$$

onde $a_\alpha \in k$. Definimos que o polinômio nulo é ω-homogêneo de todo grau.

Denotamos por $B_s^{(\omega)}$ o conjunto de todos os polinômios ω-homogêneos de grau s. Note que $B_s^{(\omega)}$ é um subgrupo de $(B, +)$, $B = k[X] = \oplus_{s \in \mathbb{Z}} B_s^{(\omega)}$ e, além disso, $B_s^{(\omega)} B_t^{(\omega)} \subseteq B_{s+t}^{(\omega)}$

para todo $s, t \in \mathbb{Z}$, isto é, $k[X]$ é um anel graduado e tal graduação é chamada de uma ω-graduação. Neste caso temos $w(X_i) = \alpha_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Quando no contexto for claro a ω-graduação, denotaremos $B_s^{(\omega)}$ simplesmente por B_s. Usaremos o símbolo (B, ω) para denotar o anel $B = k[X]$ munido com a ω-graduação. Se $\omega = (1, \ldots, 1)$ temos a graduação canônica em B.

O próximo resultado garante que se $B = k^{[n]}$ é $\mathbb{N}_0$-graduado então existem $g_1 \ldots g_n$ polinômios homogêneos em B tais que $B = k[g_1 \ldots g_n]$.

Lema 3.7. *Sejam $B = k^{[n]}$, $n \geq 1$ e $B = \oplus_{i \in \mathbb{N}_0} B_i$ uma $\mathbb{N}_0$-graduação de B com $B_0 = k$. Se $f_1, \ldots, f_m$ são elementos ω-homogêneos de B tais que $k[f_1, \ldots, f_m] = B$, então existe um subconjunto $\{g_1, \ldots, g_n\}$ de $\{f_1, \ldots, f_m\}$ tal que $B = k[g_1, \ldots, g_n]$.*

Demonstração: Considere $\{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq \{f_1, \ldots, f_m\}$ minimal satisfazendo $B = k[g_1, \ldots, g_s]$. Em particular, $\beta_i = \text{grau}(g_i) > 0$ para todo i. Sejam $(R, \overline{\omega})$ o anel graduado, onde $R = k[T_1, \ldots, T_s] = k^{[s]}$, $R_0 = k$ e $\overline{\omega} = (\beta_1, \cdots, \beta_s)$, e o k-homomorfismo sobrejetivo $\varphi : R \to B$ dado por $\varphi(T_i) = g_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$. Note que φ é um homomorfismo homogêneo de grau zero, ié, leva elemento homogêneo de R em homogêneo de B. Assim, o ideal primo $I = Ker(\varphi)$ é homogêneo, pois se$h = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} h_k \in I$ então $0 = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \varphi(h_k)$ e, portanto, $h_k \in I$ para todo k.Vamos mostrar que $I = (0)$. Observe que $I \subset (T_1, \ldots, T_n)$, portanto, a variedade algébrica

$$V(I) = \{(a_1, \cdots, a_s) \in k^s;\ \ h(a_1, \cdots, a_s) = 0\ \ \forall h \in I\}$$

contém a origem e $\frac{R}{I}$, por ser anel de polinômios, é anel regular. Logo a origem é um ponto regular da variedade. Portanto se $I = (h_1, \cdots, h_m)$ com h_j homogêneo, não nulo, para todo j, a condição Jacobiana (ver pág. 404 em [7]) sobre a matriz Jacobiana, $J(\mathbf{h})$, de $\mathbf{h} = (h_1, \cdots, h_m)$ garante que o posto de $J(\mathbf{h})$ módulo $(T_1, \ldots, T_n)$ é não-nulo e, assim, existe j tal que h_j contém um termo do tipo λT_i, com $0 \neq \lambda \in k$. Agora, como h_j é homogêneo e $h_j(g_1, \cdots, g_s) = 0$, temos que $g_j \in k[g_1, \cdots, g_{j-1}, g_{j+1}, \cdots g_s]$, o que contradiz a minimalidade de $\{g_1, \ldots, g_s\}$. Logo, $I = 0$ e φ é um isomorfismo, isto é, $k^{[s]} \simeq k^{[n]}$ e, portanto, $n = s$. ■

3.3 Derivações Homogêneas

O próximo passo será introduzir o conceito de derivação homogênea.

Definição 3.8. *Seja $B = \oplus_i B_i$ um anel $\mathbb{Z}$-graduado. Se $D : B \to B$ é uma derivação, diremos que D é homogênea de grau s se existir um inteiro s tal que $D(B_i) \subseteq B_{i+s}$ para todo i.*

Note que se $D : B \to B$ é uma derivação homogênea e $A = KerD$ então $A = \oplus_i (A \cap B_i)$, ou seja, A é um subanel homogêneo de B.

Como $d(B) = mdc\{i \backslash B_i \neq 0\}$ divide $d(A)$ podemos definirq

$$d(D) = \begin{cases} d(A)/d(B) & \text{se } d(B) \neq 0 \\ 1 & \text{se } d(B) = 0 \end{cases}.$$

Observe que $d(D) = 1$ se, e somente se, $d(A) = d(B)$.

No caso do anel $B = k[X_1, \dots, X_n]$ ser ω-graduado, com $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, uma k-derivação homogênea de grau s, $D : B \to B$ será chamada derivação ω-homogênea de grau s. A derivação nula é ω-homogênea de grau qualquer . Observe que se D_1, D_2 são derivações ω-homogêneas de grau s e $b \in B_0$, então $bD_1 + D_2$ é ω-homogênea de grau s.

A seguir estabeleceremos um critério que se destaca pela facilidade de uso.

Proposição 3.9. *Sejam $B = k[X_1, \dots, X_n] = k^{[n]}$ o anel de polinômios ω-graduado, onde $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{Z}^n$, e $D : B \to B$ uma k-derivação de B, então são equivalentes*

1. *D é uma derivação ω-homogênea de grau s;*
2. *$D(X_i) \in B_{\omega_i + s}$ para todo $i = 1, \dots, n$.*

Demonstração: Claramente 2) segue de 1), pois $X_i \in B_{\omega_i}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Mostremos, agora, a recíproca. Se $f \in B_t$ então

$$f = \sum_{\omega^\alpha = t} a_\alpha X^\alpha,$$

onde $a_\alpha \in k$. Logo,

$$D(f) = \sum_{\omega^\alpha = t} a_\alpha D(X^\alpha).$$

Portanto, é suficiente mostrar que $D(X^\alpha) \in B_{t+s}$, para todo α. Mas, temos que $D(X^\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_1^{\alpha_1} \dots X_i^{\alpha_i - 1} \dots X_n^{\alpha_n} D(X_i)$ e como $D(X_j) \in B_{\omega_j + s}$ para todo j , tem-se que $D(X^\alpha) \in B_l$, onde $l = \alpha_1\omega_1 + \dots + \alpha_{i-1}\omega_{i-1} + \alpha_{i+1}\omega_{i+1} + (\alpha_i - 1)\omega_i + \omega_i + s = t + s$, pois $t = \sum_{j=1} \alpha_j \omega_j$. ■

Como aplicação deste último resultado apresentamos o exemplo:

Exemplo 3.10. *Se $B = k[x, y, z] = k^{[3]}$ é ω-graduado, com $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{Z}^3$, e $f, g \in B$ algebricamente independientes e $\omega-$homogêneos, então a derivação Jacobiana $\Delta_{(f,g)} : B \to B$ é ω-homogênea de grau $s = \omega(f) + \omega(g) - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$. De fato, note* *que $\Delta_{(f,g)}(x) \in B_{\omega(f)+\omega(g)-(\omega_2+\omega_3)}$, $\Delta_{(f,g)}(y) \in B_{\omega(f)+\omega(g)-(\omega_1+\omega_3)}$ e $\Delta_{(f,g)}(z) \in B_{\omega(f)+\omega(g)-(\omega_1+\omega_2)}$ e pelo resultado anterior $\Delta_{(fg)}$ é ω-homogênea de grau s, pois para cada i , $1 \leq i \leq 3$,*

$$\omega(f) + \omega(g) - \sum_{j \neq i} \omega_j = (\omega(f) + \omega(g) - \sum_{j} \omega_j) + \omega_i = s + \omega_i.$$

3.4 Derivações Homogêneas Localmente Nilpotentes Em Anéis Graduados

Observe que se B é um anel graduado e $D : B \to B$ é uma derivação homogênea localmente nilpotente então $d(D) = \frac{d(A)}{d(B)} = 1$ ou $d(D) \neq 1$. O primeiro resultado desta seção mostra fatos relacionados ao caso $d(D) \neq 1$. Em particular o item 6 é uma redução ao caso $d(D) = 1$.

Proposição 3.11. *Sejam $B = \oplus_i B_i$ um DFU $\mathbb{N}_0$-graduado contendo $\mathbb{Q}$, $D : B \to B$ uma derivação homogênea localmente nilpotente tal que $d(D) \neq 1$. Se $A = KerD$, $d = d(A)$,*

$$\mathcal{H} = \{H \in B \backslash \{0\};\ H \text{ é homogêneo, primo e grau}(H) \not\equiv 0 \pmod{d}\}.$$

e R é o subanel homogêneo de B definido por $R = \oplus_n R_n$, onde $R_n = B_n$ quando $n \equiv 0 \pmod{d}$ e $R_n = 0$ se $n \not\equiv 0 \pmod{d}$, então tem-se que:

1. *$\mathcal{H} \neq \emptyset$;*
2. *Para todo $H \in \mathcal{H}$ e cada elemento homogêneo $v \in B$ tal que $Dv \neq 0$ e $D^2 v = 0$, temos que $v = aH$ para algum $a \in A \backslash \{0\}$. Em particular, se $H \in \mathcal{H}$ então $DH \neq 0$ e $D^2 H = 0$;*
3. *Todo par de elementos de $\mathcal{H}$ são associados em B;*
4. *$B = R[H]$, se $H \in \mathcal{H}$;*
5. *Para algum inteiro $n > 0$, $B_0 \cong B_n$ como B_0-módulos;*
6. *Seja $\delta = d(D) = d/d(B)$. Se $\delta \neq 0$ e $H \in \mathcal{H}$ tem-se que a restrição Δ de $H^{1-\delta} D$ a R é uma derivação homogênea localmente nilpotente satisfazendo $Ker(\Delta) = A$. E, conseqüentemente, $d(\Delta) = 1$;*
7. *R é um DFU.*

Demonstração: Como $d(D) \neq 1$ temos que $d(B) \neq 0$, $d \neq d(B)$ e $D \neq 0$. Sendo B um DFU e $d \neq d(B) = mdc\{i, B_i \neq 0\}$, existe $v \in B$ homogêneo tal que grau$(v) \not\cong 0(mod\ d)$. Como B é um DFU, $v = p_1 \ldots p_n$, onde $p_i \in B$ é primo homogêneo para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, grau$(p_j) \not\cong 0(mod\ d)$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$. Logo, $\mathcal{H} \neq \emptyset$, obtendo assim (1).

Doravante, considere $H \in \mathcal{H}$ e $n =$ grau(H).Como D é homogênea, localmente nilpotente e $D \neq 0$ existe $v \in B$ homogêneo tal que $Dv \neq 0$ e $D^2 v = 0$. Fazendo $\alpha = Dv$, temos que $\alpha \in A$, é homogêneo e $B_\alpha = A_\alpha[v] = A_\alpha^{[1]}$. Dado que $H \in B$, existe $m \geq 0$ tal que $\alpha^m H \in A[v]$ e podemos escrever $\alpha^m H = \sum_{i \in I} a_i v^i$, onde $I \subset \mathbb{N}_0$, $I \neq \emptyset$ e $a_i \in A \backslash \{0\}$ homogêneos. Sendo grau$(a_i v^i) =$ grau$(\alpha^m H)$, grau$(a_i) \cong$ grau$(\alpha^m) \cong 0$ (mod d) e grau H $\not\cong 0$ (mod d) temos que $i$grau$(v) \not\cong 0$ (mod d), logo, $i > 0$. Daí, obtemos que

$$\alpha^m H = bv \quad \text{para algum} \quad b \in B \backslash \{0\}. \tag{3.11.1}$$

Portanto, $H \mid bv$ em B e $H \nmid b$, pois se $H \mid b$ teríamos $v \mid \alpha^m$ e, como A é factorialmente fechado em B, seguiria que $v \in A$. Dado que H é primo, $v = aH$ para algum $a \in B$, logo, substituindo em (3.1) temos que $\alpha^m = ab$. Sendo A factorialmente fechado em B tem-se que $a \in A$. Logo,

$$v = aH \quad \text{para algum} \quad a \in A \backslash \{0\}. \tag{3.11.2}$$

O que prova a afirmação (2).

Agora, se $H' \in \mathcal{H}$ temos do mesmo modo que $v = a'H'$ para algum $a' \in A \backslash \{0\}$, por isso $aH = a'H'$, isto é, $H \mid a'H'$. Mas $H \nmid a'$, pois caso contrário $H \in A$,pois A é fatorialmente fechado, o qual é uma contradição, logo $H \mid H'$. Da forma análoga obtemos que $H' \mid H$, isto é, H e H' são associados e, assim, obtemos (3).

Para provar (4), suponha que $\beta \in B$ é um elemento homogêneo, então $\beta = \beta_0 H^s$ para algum $s \in \mathbb{N}_0$, $\beta_0 \in B$ e $H \nmid \beta_0$. Sendo $\beta_0 = p_1 \ldots p_n$, com $p_i \in B$ primos, temos que grau$(p_j) \cong 0(mod\ d)$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, pois caso contrário algum $p_j \in \mathcal{H}$, de onde p_j e H seriam associados. Logo, $\beta_0 \in R$, consequentemente, $\beta = \beta_0 H^s$, onde $\beta_0 \in R$, $s \in \mathbb{N}_0$ e $H \nmid \beta_0$. Em particular, $\beta \in R[H]$. Isto prova que $B = R[H]$.

Observe que se tomarmos $H \in \mathcal{H}$ e considerarmos o submódulo $B_0 H$ do B_0-módulo B_n, temos que $B_0 H = B_n$, onde $n =$ grau(H). De fato, se $\beta \in B_n$ então grau$(\beta) \not\cong 0$ (mod d), portanto, $\beta = \beta_0 H^s$ para algum $\beta_0 \in R$, $s > 0$, grau$(\beta) =$ grau$(\beta_0) + s$grau$(H) =$ grau(H). Como grau$(\beta_0) \geq 0$ temos que $s = 1$ e grau$(\beta_0) = 0$, consequentemente, $\beta \in B_0 H$, de onde $B_0 H = B_n$. Também notemos que $B_0 H \cong B_0$ como B_0-módulos com o isomorfismo
$\phi : B_0 \to B_0 H$ dado por $\phi(\alpha) = \alpha H$. Logo, temos $B_n = B_0 H \cong B_0$. Obtendo, assim, (5).

Para demonstrarmos (6) suponhamos que $\delta = d(D) \neq 0$, isto é, $d \neq 0$. Em primeiro lugar, provemos que:

$$\text{Se para algum } i \in \mathbb{Z} \;\; i\text{grau}(H) \cong 0 \pmod{d} \text{ então } \delta \mid i. \tag{3.11.3}$$

Dado que $B = R[H]$ temos que $mdc(d, \text{grau}(H)) = d(B)$, pois $d \mid d(R)$ e assim

$$1 = mdc\left(\frac{d}{d(B)}, \frac{\text{grau}(H)}{d(B)}\right) = mdc\left(\delta, \frac{\text{grau}(H)}{d(B)}\right).$$

Mas $i\text{grau}(H) = dh_1$ para algum $h_1 \in \mathbb{Z}$ e $i\text{grau}(H) = \delta h_1 d(B)$, portanto,

$$\delta \left| \frac{i\text{grau}(H)}{d(B)} \right. .$$

Como $mdc\left(\delta, \frac{\text{grau}(H)}{d(B)}\right) = 1$ segue que $\delta \mid i$. Nosso passo a seguir será mostrar que $D(R) \subseteq RH^{\delta-1}$. Sendo $\alpha = DH \neq 0$ e $D^2H = 0$, temos que $B_\alpha = A_\alpha[H] = A_\alpha^{[1]}$. Seja $v \in R$ homogêneo, então existe um inteiro $m \geq 0$ tal que $\alpha^m v \in A[H]$. Logo, $\alpha^m v = \sum_{i \in I} a_i H^i$, onde $a_i \in A \backslash \{0\}$ homogêneo e tal que $\text{grau}(\alpha^m v) = \text{grau}(a_i H^i)$. Como $0 \cong \text{grau}(\alpha^m v) \cong \text{grau}(v) \cong \text{grau}(a_i) \pmod{d}$ temos $i\text{grau}(H) \cong 0 \pmod{d}$. E por (3.3) $\delta | i$ para cada $i \in I$. Em conseqüência, $\alpha^m v = f(H^\delta)$, onde $f \in A[T] = A^{[1]}$ e $\alpha^m D(v) = f'(H^\delta).\delta H^{\delta-1}\alpha$. Mas $H^\delta \in R$, pois $\text{grau}(H^\delta) = \delta\text{grau}(H) = 0(mod\ d)$, logo, $\alpha^m Dv \in RH^{\delta-1}$. Note que $H \nmid \alpha$, pois caso contrário $\alpha = Hh_1$ para algum $h_1 \in B$ de onde teríamos que $H, h_1 \in A$, já que A é fatorialmente fechado, temos que $H^{\delta-1} \mid Dv$, ou seja, $Dv = H^{\delta-1}\rho$ para algum $\rho \in B$ e tem-se $\alpha^m \rho \in R$. Portanto, $\text{grau}(\rho) \cong 0 \pmod{d}$, isto é, $\rho \in R$ e $Dv \in RH^{\delta-1}$, o que prova que

$$D(R) \subseteq RH^{\delta-1}. \tag{3.11.4}$$

Portanto, a restrição Δ da derivação $H^{1-\delta}D$, a R está bem definida. Mais claro que $Ker(\Delta) = A$ e que Δ é homogênea. Observe que da equação $\alpha^m v = f(H^\delta)$ e de $\Delta(H^\delta) = \delta\alpha \in A_\alpha$ podemos concluir que $R_\alpha = A_\alpha[H^\delta] = A_\alpha^{[1]}$ e que a localização $S^{-1}\Delta : R_\alpha \to R_\alpha$, onde $S = \{1, \alpha, \alpha^2, \ldots\}$ é simplesmente a derivada parcial em relação a H^δ multiplicada por $\alpha\delta \in A_\alpha$. Em consequência, $S^{-1}\Delta$ é localmente nilpotente e, portanto, também é sua restrição Δ.

Finalmente, mostremos (7). Dado que B é um DFU e $A \in KLND(B)$ temos que A é um DFU. Como $R_\alpha = A_\alpha^{[1]}$ é claro que R_α é um DFU. Pelo teorema 177 (pág. 131) de [9], para mostrar que R é um DFU basta provar que α é produto de primos em R. Como $\alpha \in A$ é homogêneo então $\alpha = p_1 \ldots p_n$, onde cada p_i é primo homogêneo de A. Mostremos, geralmente, que todo primo homogêneo p de A é um primo de R. Sejam $r_1, r_2 \in R$ homogêneos tais que $p \mid r_1 r_2$ em R. Sendo p primo de A, então p é primo de B. Logo, podemos supor que existe $b \in B$ tal que $r_1 = pb$. Então b é homogêneo e $0 \cong grau(r_1) \cong grau(pb) \cong grau(b) \pmod{d}$, de onde $b \in R$, Logo, p é um primo de R. Consequentemente, R é um DFU. ∎

Os seguintes corolários são concernentes ao caso especial onde $B = k^{[n]}$.

Observe que se $B = k[x] = k^{[1]}$ e $D \neq 0$ é uma derivação localmente nilpotente de B, a qual é homogênea com respeito à graduação canônica, temos que $D = a\frac{d}{dx}$ onde $a \in k$, logo $\ker D = k$. Portanto $d(D) = d(\ker D) = 0$.

No caso $B = k^{[n]}$ com $n > 1$ temos:

Corolário 3.12. *Sejam* $B = k[x_1, \cdots, x_n] = k^{[n]}$, *com* $n > 1$ *e* $D \neq 0$ *uma derivação localmente nilpotente de* B *. Se* D *é homogênea com respeito à graduação canônica então* $d(D) = d(\ker D) = 1$.

Demonstração: Observe que $B = \oplus_i B_i$ com $i \in \{0, 1, \ldots\}$, onde B_i é o conjunto dos polinômios homogêneos de grau i, em particular, $B_0 = k$. Além disso, para todo $n > 0$ temos que $B_0 \ncong B_n$ como B_0-módulos, logo, pela proposição anterior, segue que $d(D) = 1$ e, portanto, $d(\ker D) = d(D) = 1$. ■

No próximo corolário, R e $\mathcal{H}$ são como na proposição anterior.

Corolário 3.13. *Sejam o anel* $B = k[x_1, \ldots, x_n] = k^{[n]}$, $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{N}^n$ *com* $mdc(\{w_1, \cdots, w_n\}) = 1$ *e*

$$D : B \to B$$

derivação ω*-homogênea e localmente nilpotente. Suponhamos que* $d(D) \neq 1$. *Então* $d(D) \nmid \omega(x_j)$ *para exatamente um valor de* j. *Este* j *é tal que*

1. $Dx_j \neq 0, D^2x_j = 0$;

2. *Supondo que* $d(D) \neq 0$ *temos que:*

$$R = k[x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j^d, x_{j+1}, \ldots, x_n].$$

Demonstração:

1. Note que $d(B) = 1$, portanto segue que $d(D) = d(\ker D) := d$. Sendo $d \neq 1$ e $mdc(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_n)) = 1$ temos que $d \nmid \omega(x_j)$ para pelo menos um valor j, logo, $x_j \in \mathcal{H}$, $D(x_j) \neq 0$ e $D^2(x_j) = 0$. Observe que se existe $i \neq j$ tal que $d \nmid \omega(x_i)$ então $x_i \in \mathcal{H}$ e x_i, x_j seriam associados, o que é uma contradição. Logo, temos que $\omega(x_i) \cong 0(\bmod d)$ para todo $i \neq j$;

2. Escrevendo $R' = k[x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j^d, x_{j+1}, \ldots, x_n]$ é claro que $R' \subseteq R$. Para a outra inclusão, tomemos $r \in R\backslash\{0\}$ um elemento homogêneo e $a_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ um monômio que ocorre em r. Note que $B = R[x_j]$, $d(B) = 1$ e

$$0 \cong w(r) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, w(x_i) \cong \alpha_j\, w(x_j) \,(\mathrm{mod}\, d),$$

Mas $\mathrm{mdc}\,(d, w(x_j)) = 1 = d(B)$, pois $d \mid w(x_i)$ se $i \neq j$ e assim $\alpha_j \cong 0 \pmod{d}$, de onde segue que $a_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \in R'$, o que prova que $r \in R'$, consequentemente, $R = R'$. ■

No lema a seguir, A , B,$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ serão descritos como segue.

1. B é um dominio $\mathbb{N}_0-$graduado contendo $\mathbb{Q}$;
2. A é um subanel homogêneo de B tal que $d(A) = d(B)$;
3. $A \neq B$ e B é uma $A-$algebra finitamente gerada.

Considere o conjunto $S = \cup_i(A_i\backslash\{0\})$ e as localizações $S^{-1}A = \mathcal{A}$ e $S^{-1}B = \mathcal{B}$. Note que $\mathcal{A}$ é um subanel homogêneo de $\mathcal{B}$, que $\mathcal{A}_0$ é um corpo e que $\mathcal{A}_n\backslash\{0\} \subseteq \mathcal{A}^*$ $n \in \mathbb{Z}$. A seguir, mostraremos que se $d = d(A) = d(B)$ então para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{B}_n \neq 0 \Leftrightarrow n \in d\mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathcal{A}_{-n} \neq 0 \;\text{ e }\; \mathcal{A}_{-n}\backslash\{0\} \subseteq \mathcal{A}^*. \tag{3.13.1}$$

De fato, se $\mathcal{B}_n \neq 0$, existe $\frac{b}{s} \in \mathcal{B}_n$ com

$$\mathrm{grau}\left(\frac{b}{s}\right) = \mathrm{grau}\, b - \mathrm{grau}\, s = n,$$

além disso, $\mathrm{grau}\, b \cong \mathrm{grau}\, s \cong 0 \,(\mathrm{mod}\, d)$, logo, $n \in d\mathbb{Z}$.

Mostremos agora que, em particular, $\mathcal{A}_d \neq 0$. Como $d = d(A)$, existem $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{Z}$ tais que $A_{k_i} \neq 0, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$ e $d = \alpha_1 k_1 + \cdots + \alpha_m k_m$. Tomando para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $a_i \in A_{k_i}$ tal que $a_i \neq 0$, temos que

$$a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m} \in \mathcal{A}_{\alpha_1 k_1 + \cdots + \alpha_m k_m} = \mathcal{A}_d$$

logo $\mathcal{A}_d \neq 0$. Note que se $a \in \mathcal{A}_d \neq 0$ então $a^m \in \mathcal{A}_{md}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Portanto se $n \in d\mathbb{Z}$, $\mathcal{A}_{-n} \neq 0$ e $\mathcal{B}_n \neq 0$. O que prova (3.5).

Lema 3.14. *Sejam A, B, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como descritos anteriormente. Então são equivalentes:*

1. *Existe uma derivação D, não nula localmente nilpotente de B, tal que $A \subseteq \ker(D) \subseteq \mathrm{Frac}\, A$;*

2. $\mathcal{B}_0 = \mathcal{A}_0^{[1]}$.

Demonstração:

1) $\Rightarrow$ 2) Afirmamos neste caso que $\ker(D) \subseteq \mathcal{A}$. De fato, como $\ker(D)$ é um subanel homogêneo de B, basta provarmos que a afirmação é válida para todo elemento homogêneo $b \in \ker(D)\backslash\{0\}$. Seja $b \in B_n\backslash\{0\}$ tal que $D(b) = 0$. Por hipótese, $b \in \operatorname{Frac} A$, logo, $ab = a'$, para $a, a' \in A$. Escrevendo a e a' como soma de elementos homogêneos de A existem a_0 e a'_0 homogêneos em A tais que $a_0 b = a'_0$, o que prova a afirmação. Então por hipótese temos que

$$S^{-1}A \subseteq S^{-1}\ker D \subseteq \mathcal{A},$$

onde $S = \cup_i (A_i\backslash\{0\})$ e, portanto,

$$S^{-1}\ker D = \mathcal{A}. \tag{3.14.1}$$

Por outro lado, podemos tomar um elemento homogêneo $v \in B$ tal que $Dv \neq 0$ e $D^2 v = 0$ e fazendo $\alpha = Dv$, temos que

$$B_\alpha = (\ker D)_\alpha[v] = (\ker D)_\alpha^{[1]}.$$

Junto com (3.6) e com o fato que $\alpha \in S$ temos que

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}[v].$$

Provaremos, agora, que v é transcendente sobre $\mathcal{A}$. Suponhamos o contrário, seja $f \in \mathcal{A}[T]\backslash\{0\}$ tal que $f(v) = 0$ e $f(T) = \sum b_i T^i$ com $b_i = \frac{a_i}{a'_i} \in \mathcal{A}$ com $\mathcal{A} = S^{-1}\ker(D)$. Fazendo $a = \prod a'_i$, temos que $af \in (\ker D)[T]\backslash\{0\}$ e $af(v) = 0$ o que é uma contradição, portanto,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}[v] = \mathcal{A}^{[1]}.$$

Alem disso, de (3.5) temos que $\forall n \in \mathbb{Z}$, se $\mathcal{B}_n \neq 0$ então $\mathcal{A}_{-n} \cap \mathcal{A}^* \neq \emptyset$. Logo pelo lema (3.5) segue que $\mathcal{B}_0 = \mathcal{A}_0^{[1]}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Agora, suponhamos que $\mathcal{B}_0 = \mathcal{A}_0^{[1]}$ então o lema (3.5) implica que $\mathcal{B} = \mathcal{A}[v] = \mathcal{A}^{[1]}$ para algum $v \in \mathcal{B}$. Considerando a derivação localmente nilpotente $\partial : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, onde ∂ denota a derivada com respeito a v, e dado que B é finitamente gerado como A-álgebra temos que existe $s \in S$ tal que $s\partial(B) \subseteq B$. Seja $D : B \to B$ a restrição $s\partial| B$, então D é localmente nilpotente com $kerD = B \cap ker\partial = B \cap \mathcal{A}$, ou seja $A \subseteq kerD \subseteq$ FracA e (1) é verificado. ■

3.5 Derivações Homogêneas Localmente Nilpotentes em $B = k^{[3]}$.

Neste ponto chegamos à questão de obter condições sobre f e g, com f e g sendo polinômios ω-homogêneos em $B = k[x, y, z]$, para que exista uma derivação ω-homogênea localmente nilpotente de B que tenha núcleo $k[f, g]$. Nesta seção, utilizaremos o símbolo (B, ω) para denotar o anel $B = k[x, y, z] = k^{[3]}$ munido com uma ω-graduação. Sabemos que se $D \in LND(B)$ então $kerD = k[f, g]$. No caso em que D é ω-homogênea é possível escrever $ker(D) = k[f', g']$ com f', g' $w-$ homogêneos?. De fato, a proposição a seguir garante que este é o caso. Antes precisamos dos seguintes lemas:

Lema 3.15. *Sejam f, g indeterminadas sobre k, $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tais que $mdc(p, q) = 1$. Considere $B = k[f, g]$ como anel $\mathbb{N}$-graduado, onde a graduação é dada por $w(f) = p$, $w(g) = q$. Se k é algebricamente fechado e $h \in k[f, g]$ é homogêneo irredutível então:*

$$h \sim f \text{ ou } h \sim g \text{ ou } h \sim f^q + \lambda g^p \text{ para algum } \lambda \in k^*.$$

A relação $x \sim y$ denota que x e y são associados em B.

Demonstração: Em primeiro lugar, provemos que todo elemento $h \in B_n$ tem a forma $f^s g^t H(f^q, g^p)$ para alguns $s, t \in \mathbb{N}_0$ e algum polinômio $H \in k[T_1, T_2] = k^{[2]}$ homogêneo em relação à graduação canônica. De fato, suponhamos que $h = \sum_{i \in I} a_i f^{\alpha_i} g^{\beta_i}$, $I \subseteq \mathbb{N}_0$ e para cada $i \in I$, $\alpha_i p + \beta_i q = n$. Sejam $x^s y^{\beta_j}$, $x^{\alpha_r} g^t$ monômios que ocorrem em h tais que $s \leq \alpha_i$, $t \leq \beta_i$ para todo $i \in I$. Então temos que $q\beta_j + sp = n = q\beta_i + p\alpha_i$, logo, $q(\frac{\beta_j - \beta_i}{p}) = \alpha_i - s$. Do mesmo modo se mostra que $p(\frac{\alpha_r - \alpha_i}{q}) = \beta_i - t$ e assim obtemos que

$$h = f^s g^t \sum_{i \in I} a_i \, (f^q)^{\frac{\beta_j - \beta_i}{p}} \, (g^p)^{\frac{\alpha_r - \alpha_i}{q}}$$

e fazendo

$$H = \sum_{i \in I} a_i \, (T_1)^{\frac{\beta_j - \beta_i}{p}} \, (T_2)^{\frac{\alpha_r - \alpha_i}{q}} \in k[T_1, T_2]$$

temos que para todo $i \in I$

$$\frac{\beta_j - \beta_i}{p} + \frac{\alpha_r - \alpha_i}{q} = \frac{n - sp - tq}{pq} = b \in \mathbb{N}.$$

O fato de $b \in \mathbb{N}$ se justifica da seguinte maneira: $c = n-sp-tq = q\beta_j+sp-sp-tq = q\beta_j-tq$ ou seja q divide c, do mesmo modo p divide c e como $mdc(p, q) = 1$ tem-se que pq divide c e $b = \frac{c}{pq} \in \mathbb{N}$. Logo H é homogêneo em relação à graduação canônica em $k[T_1, T_2]$ e, portanto, $H(T_1, T_2) = \prod(\lambda_i T_1 - \mu_i T_2)$ com $\lambda_i, \mu_i \in k$. Logo $h = f^s g^t \prod(\lambda_i f^q - \mu_i g^P)$. Supondo que h é irredutível em $k[f, g]$ tal que $h \nsim g$ e $h \nsim f$ tem-se que $h = \lambda_n f^q - \mu_n g^P$ para alguns $\lambda_n, \mu_n \in k$, supondo λ_n não nulo temos que, $h \sim f^q + \mu_n \lambda_n^{-1} g^p$. O que prova o lema. ■

Lema 3.16. *Sejam u e v indeterminadas sobre um campo k, $B = k[u, v]$ o anel ω-graduado com $\omega = (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $mdc(m, n) = 1$ e f, g elementos de B satisfazendo:*

1. *f e g são ω-homogêneos e $mdc(\omega(f), \omega(g)) = 1$;*
2. *f e g são irredutíveis em $\overline{k}[u, v]$;*
3. *f e g são não-associados em B.*

então $k[f, g] = k[u, v]$.

Demonstração: Observe que sendo k corpo todo k- módulo (espaço vetorial)V é livre e, portanto, é plano. Mais ainda se W é outro k-espaço tem-se que $V \otimes_k W = (0)$ se, e somente se, $V = (0)$ ou $W = (0)$. Agora, se mostrarmos que $\overline{k}[f, g] = \overline{k}[u, v]$, onde $\overline{k}$ é o fecho algébrico de k, então teremos que $k[f, g] = k[u, v]$, pois

$$\text{se } W = \frac{k[u, v]}{k[f, g]} \text{ então } \overline{k} \otimes_k W \simeq \frac{\overline{k} \otimes_k k[u, v]}{\overline{k} \otimes_k k[f, g]} \simeq \frac{\overline{k}[u, v]}{\overline{k}[f, g]} = (0)$$

e, como, evidentemente $\overline{k}$ é não nulo tem-se que $W = (0)$, isto é, $k[f, g] = k[u, v]$. Assim podemos supor que k é algebricamente fechado. Pelo lema anterior temos que

$$f \sim u \text{ ou } \quad f \sim v \quad \text{ou} \quad f \sim u^n + \lambda_1 v^m, \quad \lambda_1 \in k^*$$

$$g \sim u \text{ ou } \quad g \sim v \quad \text{ou} \quad g \sim u^n + \lambda_2 v^m, \quad \lambda_2 \in k^*,$$

lembre que $\omega(u) = m$ e $\omega(v) = n$. Para verificar que $k[f, g] = k[u, v]$ consideremos

1. Se $f \sim u$ e $g \sim v$ obviamente $k[f, g] = k[u, v]$;
2. Se $f \sim u$ e $g \sim u^n + \lambda_2 v^m$ então temos que $m = mdc(m, mn) = mdc(w(f), w(g)) = 1$. Logo, $k[f, g] = k[u, u^n + \lambda_2 v] = k[u, v]$;
3. Se $f \sim v$ e $g \sim u^n + \lambda_2 v^m$, segue-se analogamente acima;

4. Se $f \sim u^n + \lambda_1 v^m$ e $g \sim u^n + \lambda_2 v^m$, então $nm = mdc(nm, nm) = mdc(\omega(f), \omega(g)) = 1$ e $m = n = 1$. Portanto, $f = u + \lambda_1 v$, $g = u + \lambda_2 v$ e pela hipótese $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Logo, $k[f, g] = k[u, v]$. ■

Os dois próximos resultados seguem na direção de descrever o núcleo de uma derivação homogênea e nilpotente do anel $B = k^{[3]}$.

Proposição 3.17. *Considere o anel graduado (B, w), onde $B = k[x, y, z] = k^{[3]}$ e $\omega \in \mathbb{N}^3$ satisfazendo $mdc(\omega) = 1$. Seja $D \neq 0$ uma derivação ω-homogênea localmente nilpotente de B. Então $KerD = k[f, g] = k^{[2]}$ para alguns polinômios ω-homogêneos $f, g \in B$. Além disso,*

1. *f, g são irredutíveis em $\overline{k}[x, y, z]$*
2. *$d(D) = mdc(\omega(f), \omega(g))$*
3. *f, g são não associados em $k[x, y, z]$*
4. *Se $\omega = (1, 1, 1)$ então $d(D) = 1$.*

Demonstração: Como $D \in LND(B)$ e é ω-homogênea temos que $A = KerD = k^{[2]}$ é um subanel $\omega-$homogêneo de B e pelo lema (3.7) existem f, g polinômios ω-homogêneos em A tais que $A = k[f, g]$. Da proposição (2.22) temos 1). Agora, observe que $d(B) = 1$, portanto, $d(D) = d(A) = mdc(\omega(f), \omega(g))$, de onde obtemos 2), 3) segue do fato $k[f, g] = k^{[2]}$ por fim, 4) segue do corolário (3.12). ■

Proposição 3.18. *Seja (B, ω) um anel graduado com $\omega \in \mathbb{N}^3$ e $mdc(\omega) = 1$. Suponha que $f, g \in B$ são ω-homogêneos satisfazendo*

i) *$mdc(\omega(f), \omega(g)) = 1$;*

ii) *f e g são irredutíveis em $\overline{k}[x, y, z]$;*

iii) *f e g são não-associados em $k[x, y, z]$.*

Então

1. *Se $D \neq 0$ é uma derivação localmente nilpotente de B tal que $Df = Dg = 0$ então $KerD = k[f, g]$;*
2. *São equivalentes*
   (a) *Existe uma derivação ω-homogênea localmente nilpotente de B tal que $kerD$ é $k[f, g]$;*

(b) A derivação Jacobiana $\Delta_{(f,g)}$ de B é localmente nilpotente;

(c) Existe uma derivação localmente nilpotente D de B tal que $k[f, g] \subseteq KerD$.

Demonstração:

1. Se $D \neq 0$ é uma derivação localmente nilpotente de B , pelo teorema (2.20), que $A = KerD = k[u, v] = k^{[2]}$ para algum par $u, v \in B$. Mais ainda, pelo corolário (2.21), $\Delta_{(u,v)}$ é localmente nilpotente, $Ker_{\Delta_{(u,v)}} = k[u, v]$ e $D = \alpha\Delta_{(u,v)}$ para algum $\alpha \in A$. Observe que $f, g \in k[u, v]$ e, facilmente, provamos pela regra da cadeia e propiedade da função determinante que $\Delta_{(f,g)} = a\Delta_{(u,v)}$, para algum $a \in k[u, v]$. Note também que se f, g satisfazem $i), ii)$ e $iii)$ acima então f e g são algebricamente independentes sobre k. De fato, suponhamos o contrário, ou seja, consideremos um polinômio $0 \neq h \in k[T_1, T_2] = k^{[2]}$ tal que $h(f, g) = 0$. Logo toda componente ω-homogênea $h_n(f, g)$ de $h(f, g)$ é zero. Alem disso na prova do lema (3.15) se mosta que $h_n = f^i g^j H(f^q, g^p)$ para alguns $i, j \in \mathbb{N}_0$ e algum polinômio $H \in k[T_1, T_2] = k^{[2]}$ homogêneo em relação a graduação canônica e, portanto, $h_n = f^i g^j \prod(\lambda_i f^q - \mu_i g^p)$ com $\lambda_i, \mu_i \in \overline{k}$. O fato de que $h_n = 0$ e a condição ii) implicam que $f^q = \lambda g^p$ para algum $\lambda \in \overline{k}$ e que $p = q$. Como $mdc(q, p) = 1$ então $q = p = 1$ e portanto $p = \lambda q$. Igualando polinômios temos que $\lambda \in k$, o que contradiz iii). Logo, $\Delta_{(f,g)} \neq 0$ e $a \neq 0$. Além disso, $\Delta_{(f,g)}$ é homogênea, de onde $\Delta_{(u,v)}$ é ω-homogênea. Pela proposição (3.17) existem $u', v' \in B$ polinômios ω-homogêneos tais que $A = k[u', v']$. Dado que $f, g \in k[u', v']$ temos que $d(A) = mdc(\omega(u'), \omega(v')) = 1$. Como f e g são irredutíveis em $\overline{k}[x, y, z]$ então também o são em $\overline{k}[u', v']$, Ainda mais, f e g são não-associados em $k[x, y, z]$ Portanto são não associados em $k[u', v']$. Logo pelo lema (3.16) $k[u', v'] = k[f, g] = kerD$.

2. $a) \Rightarrow b)$ É imediato a partir de (2.21);

   $b) \Rightarrow c)$ Segue de 1);

   $c) \Rightarrow a)$ Suponhamos que D é uma derivação localmente nilpotente de B tal que $k[f, g] \subset KerD$. Por 1) temos que $KerD = k[f, g]$. Pelo corolário (2.21) $D = \alpha\Delta_{(f,g)}$ para algum $\alpha \in k[f, g]\backslash\{0\}$ e $\Delta_{(f,g)}$ é localmente nilpotente. Como f e g são homogêneus então, $\Delta_{(f,g)}$ é ω-homogênea. ■

O próximo resultado é a solução ao problema proposto no início do capítulo para o caso em que $d(D) = 1$.

Teorema 3.19. *Seja (B, ω) o anel graduado, com $B = k[x, y, z] = k^{[3]}$ e $\omega \in \mathbb{N}^3$ tal que $mdc(\omega) = 1$. Suponha que f e g são ω-homogêneos tais que $mdc(\omega(f), \omega(g)) = 1$, então são equivalentes:*

1. *f e g são irredutíveis em* $\overline{k}[x, y, z]$ *e* $B_{(fg)} = k[\zeta, \zeta^{-1}]^{[1]}$ *para algum* $\zeta \in B_{(fg)} \backslash k$*;*

2. *Existe uma derivação* $D \neq 0$ *ω-homogênea localmente nilpotente de* B *tal que* $KerD = k[f, g]$.

Demonstração: Sejam $A = k[f, g]$, $p = \omega(f)$ e $q = \omega(g)$. Observe que sendo B um DFU então o anel $\mathbb{Z}$-graduado B_{fg} também o será. Como $mdc(p, q) = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ existem $i, j \in \mathbb{Z}$ tais que $pi + qj = -n$. Portanto,

$$f^i g^j \in \left(B_{fg}\right)_{-n} \cap (B_{fg})^*.$$

Logo pelo lema (3.4) $B_{(fg)}$ é um DFU. Por outro lado, também temos que $\mathbb{Q} \subset B$ e A é um subanel homogêneo de B. Obviamente B é finitamente gerado como A-álgebra e $d(B) = d(A) = 1$. Logo, podemos considerar os anéis graduados $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ já definidos. Agora, seja $\epsilon = f^q/g^p$. Na proposição (3.4) se mostra que todo elemento $h \in A_n \backslash \{0\}$ tem a forma $f^i g^s H(f^q, g^p)$, para $i, s \in \mathbb{N}_0$ e $H \in k[T_1, T_2]$ homogêneo em relação a graduação canônica. Além disso, podemos escrever $h = f^i g^j H(\epsilon, 1)$ para algum $j \in \mathbb{N}_0$, de onde concluímos que todo $h \in A_n$ é da forma $h = f^i g^j \theta$ para alguns $i, j \in \mathbb{N}_0$ e $\theta \in k[\epsilon]$, ainda mais, $ip + jq = n$ $(*)$.

Verifiquemos a seguir que:

i) $A_{(fg)} = k[\epsilon, \epsilon^{-1}]$;

ii) $\mathcal{A}_0 = T^{-1}A_{(fg)}$ e $\mathcal{B}_0 = T^{-1}B_{(fg)}$, onde $T = A_{(fg)} \backslash \{0\}$.

Com efeito, é evidente que $k[\epsilon, \epsilon^{-1}] \subseteq A_{(fg)}$. Reciprocamente, tomando $h \in A_{(fg)}$ temos que $h = \frac{f^i g^j \theta}{(fg)^\alpha}$ para alguns $i, j, \alpha \in \mathbb{N}_0$ e $\theta \in k[\epsilon]$ tais que $ip + jq = \alpha p + \alpha q$. Logo $h = \left(\frac{f^q}{g^p}\right)^m \theta$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Portanto, $h \in k[\epsilon, \epsilon^{-1}]$, o que prova *i*).

Para a afirmação *ii*) note que se $\frac{a_0}{a_1} \in \mathcal{A}_0$ então grau(a_0) = grau$(a_1) = n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. E de $(*)$ teríamos que $\frac{a_0}{a_1} = \frac{f^i g^j \theta_0}{f^s g^t \theta_1}$, com $i, j, s, t \in \mathbb{N}_0$ e $\theta_1, \theta_2 \in k[\epsilon]$ tais que $ip + jq = sp + tq$, de onde se deduz que $\frac{a_0}{a_1} = \frac{(f^p/g^q)^m \theta}{\theta_1} \in T^{-1}A_{(fg)}$, para algum $m \in \mathbb{Z}$ e que $\mathcal{A}_0 \subset T^{-1}A_{(fg)}$. Reciprocamente, é fácil verificar que $T^{-1}A_{(fg)} \subset \mathcal{A}_0$. A igualdade $\mathcal{B}_0 = T^{-1}B_{(fg)}$ também é imediata a partir de $(*)$.

Finalmente, provemos a equivalência 1) $\Leftrightarrow$ 2).

1) $\Rightarrow$ 2) No primeiro afirmamos que f e g são não-associados em B, pois caso contrário teríamos que $\omega(f) = \omega(g) = 1$ e $\epsilon \in k^*$. Além disso, se $h \in \{f, g\}$ então $B_{fg} = B_{h^2} = B_h$ e como $\omega(h) > 0$ tem-se que $B^*_{(fg)} = B^*_{(h)} = k^*$, mas isto é uma contradição, pois ζ é

uma unidade de $B_{(fg)}\backslash k$. Assim, se (1) é verificada então f e g satisfazem as condições da proposição (3.18).

A seguir, mostremos que:

$$B^*_{fg} = \{\lambda f^i g^j,\ \text{com } i,j \in \mathbb{Z} \text{ e } \lambda \in k^*\}.$$

De fato , se $\frac{b}{(fg)^\alpha} \in B^*_{fg}$ existe $\frac{c}{(fg)^\beta} \in B_{fg}$ tal que $\frac{b}{(fg)^\alpha}\frac{c}{(fg)^\beta} = 1$. Portanto $bc = (fg)^t$ para algum $t \in \mathbb{Z}$. Escrevendo $b = b_1 \ldots b_n$, $c = c_1 \ldots c_n$ como produto de irredutíveis em B, temos que para cada $b_i \in \{b_1 \ldots b_n\}$, b_i é associado com f ou b_i é associado com g, pois f e g são irredutíveis em B. Portanto $b = \lambda f^m g^n$ para alguns $m,n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in k^*$, de onde segue que $\frac{b}{(fg)^\alpha} = \lambda f^i g^j$ para alguns $i,j \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \in k^*$. Agora, $\{\lambda f^i g^j,\ \text{com } i,j \in \mathbb{Z} \text{ e } \lambda \in k^*\} \subseteq B^*_{fg}$, pois $\frac{1}{f^i} = \frac{g^i}{(fg)^i}$ e $\frac{1}{g^j} = \frac{f^j}{(fg)^j}$ Portanto, a afirmação se segue.

Dado que, se $h \in B^*_{(fg)}$ temos que $h = \lambda f^i g^j$, para $\lambda \in k^*$, $i,j \in \mathbb{Z}$ tais que $0 = \text{grau}(h) = pi + qj$, de onde $pi = -qj$. Como $mdc(p,q) = 1$ temos que $i = qt$ e $j = -pt$ para algum $t \in \mathbb{Z}$. Portanto, $h = \lambda\epsilon^t$ e

$$B^*_{(fg)} = \{\lambda\epsilon^t;\ \text{com}\lambda \in k^* \text{ e } t \in \mathbb{Z}\}.$$

Como ζ é unidade de $B_{(fg)}$ temos que $\zeta = \lambda\epsilon^n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Também temos que $\epsilon \in B^*_{(fg)} = k[\zeta,\zeta^{-1}]^*$. Portanto $\epsilon = u\zeta^m$ para alguns $u \in k^*$ e $m \in \mathbb{Z}$. De onde, podemos concluir que $mn = 1$ e, consequentemente,

$$k[\zeta,\zeta^{-1}] = k[\epsilon,\epsilon^{-1}] = A_{(fg)} \quad \text{e} \quad B_{(fg)} = A^{[1]}_{(fg)}.$$

Agora, por *ii*) temos que $\mathcal{B}_0 = T^{-1}B_{(fg)} = T^{-1}(A_{(fg)})^{[1]} = \mathcal{A}^{[1]}_0$. Pelo lema (3.14) existe uma derivação localmente nilpotente $D \neq 0$ de B tal que $k[f,g] = A \subseteq KerD \subseteq Frac(A)$. Finalmente pela proposição (3.18), existe uma derivação ω-homogênea localmente nilpotente D de B tal que $KerD = k[f,g]$.

2) $\Rightarrow$ 1) Vamos supor que k é algebricamente fechado, o caso geral é provado no corolário (3.20). Suponhamos que $D : B \to B$ é uma derivação ω-homogênea localmente nilpotente de B com núcleo $A = k[f,g]$. Considerando o conjunto $S = \{1, fg, (fg)^2, \ldots\}$ temos que $S^{-1}D = D_{fg} : B_{fg} \to B_{fg}$ é uma derivação localmente nilpotente de B_{fg} com núcleo A_{fg}. Dado que $mdc(p,q) = 1$ temos que existem $i,j \in \mathbb{Z}$ tais que $pi + qj = -\text{grau}(D)$. Definimos $\mathfrak{D} : B_{fg} \to B_{fg}$ por $\mathfrak{D} = f^i g^i D_{fg}$. Observe que $\mathfrak{D}$ é homogênea de grau zero, localmente nilpotente e tem núcleo A_{fg}. Note também que $\mathfrak{D}(B_{(fg)}) \subseteq B_{(fg)}$. Logo, a restrição $\mathfrak{D}_o :\equiv \mathfrak{D}|_{B_{(fg)}}\ B_{(fg)} \to B_{(fg)}$ é localmente nilpotente com $Ker\mathfrak{D}_0 = B_{(fg)} \cap A_{fg} = A_{(fg)}$. Logo $A_{(fg)}$ é fatorialmente fechado em $B_{(fg)}$. Agora por hipótese k é algebricamente fechado, então os irredutíveis de $A_{(fg)} = k[\epsilon,\epsilon^{-1}]$ são da forma $\pi = \epsilon - a$, onde $a \in k^*$. Afirmamos que

1. π é um elemento primo de $B_{(fg)}$;
2. $A_{(fg)} \cap \pi B_{(fg)} = \pi A_{(fg)}$;
3. $\frac{A_{(fg)}}{\pi A_{(fg)}}$ é algebricamente fechado em $\frac{B_{(fg)}}{\pi B_{(fg)}}$.

De fato, pela proposição (1.38) temos 1) e 2) Agora, dado que $\frac{A_{(fg)}}{\pi A_{(fg)}} = k$, temos que $\frac{A_{(fg)}}{\pi A_{(fg)}}$ é algebricamente fechado em $\frac{B_{(fg)}}{\pi B_{(fg)}}$. Finalmente, sendo $\mathfrak{D}_0$ uma derivação localmente nilpotente de $B_{(fg)}$ podemos escolher $v \in B_{(fg)} \backslash \{0\}$ tal que $\mathfrak{D}_0(v) \in A_{(fg)} \backslash \{0\}$. Portanto, fixando $a \in k^*$ e fazendo $\pi = \epsilon - a$ temos que se $s = \mathfrak{D}_0(\pi v) = \pi \mathfrak{D}_0(v)$ então $s \in A_{(fg)} \cap \pi B_{(fg)} = \pi A_{(fg)}$. Como $A_{(fg)} \in KLND(B_{(fg)})$ e $B_{(fg)}$ é DFU, temos que $A_{(fg)}$ é DFU, portanto s é um produto de primos p de $A_{(fg)}$ tais que $\frac{A_{(fg)}}{pA_{(fg)}}$ é algebricamente fechado em $\frac{B_{(fg)}}{pB_{(fg)}}$, logo, da proposição (1.39) segue que $B_{(fg)} = A_{(fg)}^{[1]} = k[\epsilon, \epsilon^{-1}]^{[1]}$, pois $s \in A_{(fg)} \cap \mathfrak{D}(B_{(fg)})$. ∎

Corolário 3.20. *Seja (B, ω) o anel graduado, com $B = k[x, y, z] = k^{[3]}$ e $\omega \in \mathbb{N}^3$ tal que $mdc(\omega) = 1$. Suponha que existe uma derivação $D \neq 0$ ω-homogênea localmente nilpotente de B tal que $KerD = k[f, g]$ onde f e g são ω-homogêneos tais que $mdc(\omega(f), \omega(g)) = 1$. Então, $B_{(fg)} = A_{(fg)}^{[1]}$.*

Demonstração: Da proposição (2.22) temos que $\overline{k}[f, g] \in KLND(\overline{B})$ onde $\overline{B} = \overline{k}[x, y, z]$. Pelo corolário (2.21) a derivação Jacobiana $\overline{\Delta}_{(f,g)} : \overline{B} \to \overline{B}$ é irredutível ω-homogênea e localmente nilpotente com $Ker\overline{\Delta}_{(f,g)} = \overline{k}[f, g] = \overline{A}$. Pelo resultado anterior temos que $\overline{B}_{(fg)} = \overline{A}_{(fg)}^{[1]}$. Agora, do lema (3.5) segue que $\overline{B}_{fg} = \overline{A}_{fg}[v_1] = \overline{A}_{fg}^{[1]}$ para algum elemento v_1 ω− homogêneo de $\overline{B}$. Do lema (1.32) temos que existe $a \in \overline{A} \backslash \{0\}$, tal que $a\overline{\Delta}_{(f,g)}(v_1) \in S$, onde $S = \left\{1, fg, (fg)^2, \ldots\right\}$. Fazendo $\overline{v} = av_1$ temos que $\overline{\Delta}_{(f,g)}(\overline{v}) \in S$, portanto, $\overline{\Delta}_{(f,g)}(\overline{v}) = (fg)^\alpha$ para algum $\alpha \in \mathbb{N}$ e $a \in A$ ω- homogêneo, logo $\overline{v}$ é ω- homogêneo. Mostraremos que existe um elemento $v \in B$ ω- homogêneo tal que $\Delta_{(f,g)}(v) = (fg)^\alpha$. Para isto escreva $\overline{v} = \sum_{i=1}^n b_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i}$, com $b_i \in \overline{k}$, $1 \leq i \leq n$, $\alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2 + \gamma_i\omega_3 = \alpha_j\omega_1 + \beta_j\omega_2 + \gamma_j\omega_3$. Observe que $L = k(b_1, \cdots, b_n) = k(\xi)$ é finita de grau $m \in \mathbb{N}$ com $\{1, \xi, \cdots, \xi^{m-1}\}$ sendo k− LI. Como x, y, z são variáveis sobre k tem-se que $[k(x, y, z)(\xi) : k(x, y, z)] = m$. Agora, para cada i, $1 \leq i \leq n$ escreva $b_i = \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij}\xi^j$, $a_{ij} \in k$, assim

$$\overline{v} = \sum_i \sum_j a_{ij}\xi^j x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i} = \sum_j (\sum_i a_{ij} x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i})\xi^j$$

Chamando $\sum_i a_{ij} x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i} = h_j \in B$ podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma $\overline{v} = \sum_j h_j \xi^j$. Agora, como a restrição da $\overline{k}$-derivação $\overline{\Delta}_{(f,g)}$ a B é $\Delta_{(f,g)}$ temos

$$(fg)^\alpha = \overline{\Delta}_{(f,g)}(\overline{v}) = \sum_j (\Delta_{(f,g)}(h_j))\xi^j,$$

mas $\{1, \xi, \cdots, \xi^{m-1}\}$ é $k(x,y,z)-$LI e $(fg)^\alpha \in B$ e, assim, podemos concluir que $(fg)^\alpha = \Delta_{(f,g)}(h_0)$, é claro que h_0 é ω- homogêneo . Portanto, existe $v \in B$ $\omega-$homogêneo tal que $\Delta_{(f,g)}(v) = (fg)^\alpha$. Logo pelo corolário (1.25) $B_{fg} = A^{[1]}_{fg} = A_{fg}[v]$. Finalmente, do lema (3.5) tem-se que $B_{(fg)} = A^{[1]}_{(fg)}$ ■

Corolário 3.21. *Sejam (B,ω) um anel graduado, com $B = k[x,y,z]$, $\omega \in \mathbb{N}^3$ e $mdc(\omega) = 1$, e $D : B \to B$ uma derivação ω-homogênea localmente nilpotente não-nula com núcleo $KerD = A = k[f,g]$, onde f e g são ω-homogêneos. Se $d(D) > 1$ então $B_{(fg)} = A^{[1]}_{(fg)}$.*

Demonstração: Se $d(D) > 1$ a proposição (3.11) mostra que o subanel R de B, definido por $R = \oplus_{i\in\mathbb{N}} R_i$, onde $R_i = B_i$ se $i \cong 0(mod\ d)$ e $R_i = \{0\}$ no caso contrário, é um DFU. Mais ainda a derivação $\Delta : R \to R$ definida nesta proposição satisfaz $Ker\Delta = A = k[f,g]$ e $d(\Delta) = 1$. Agora, pelo corolário (3.13) temos que $R = k[x',y',z'] = k^{[3]}$, onde a graduação de R está determinada por $\omega' = (\omega(x'), \omega(y'), \omega(z'))$. Como $mdc(\omega') > 1$ podemos considerar o anel graduado (R, ω''), onde $\omega'' = \omega'/mdc(\omega')$. Daí, $mdc(\omega'') = 1$, portanto, temos que $R_{(fg)} = A^{[1]}_{(fg)}$. E, obviamente $B_{(fg)} = R_{(fg)} = A^{[1]}_{(fg)}$. ■

Referências Bibliográficas

[1] Atiyah, M. F. e Macdonald I.G. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley. Massachusetts, 1969.

[2] Daigle, Daniel. *Locally Nilpotent Derivations*. Lectures notes for the ”September School” of Algebraic Geometry. Lukecin, Poland, September, 2003.

[3] Daigle, Daniel. *On some properties of Locally Nilpotent Derivations*. Journal of Pure and Applied Algebra **114** (1997) 221-230.

[4] Daigle, Daniel. *Homogeneous Locally Nilpotent Derivations Of* $k[x, y, z]$. Journal of Pure and Applied Algebra **128** (1998) 109-132.

[5] Daigle, Daniel. *Locally Nilpotent Derivations Over A UFD And An Application To Rank Two Locally Nilpotent Derivations Of* $K[x_1, \ldots, x_n]$. Journal of Algebra **204** (1998) 353-371.

[6] Daigle, Daniel. *On Kernels Of Homogeneous Locally Nilpotent Derivations Of* $k[x, y, z]$.Osaka Journal Mathematics **37** (2000) 689-699.

[7] Eisenbud, David. *Commutative Algebra With a View Toward Algebraic Geometry*. Springer-Verlag. Graduate Texts in Mathematics, 1994.

[8] Freudenburg, Gene. *A counterexample to Hilbert's Fourteenth Problem In Dimension Six*, Transform. Groups **5** (2000) 69-71.

[9] Kaplansky, I. *Commutative Rings*. The University of Chicago Press, 1974.

[10] Kunz, Ernest. *Introduction To Commutative Algebra And Algebraic Geometry*. Birkhäuser. Boston, 1985.

[11] S. Kuroda. *A counterexample to the fourteenth problem of Hilbert in dimension three*. preprint (2004)

[12] Lang, Serge. *Algebra*. Terceira Edição. Addison-Wesley, 1993.

[13] Miyanishi, M. *Normal Affine Subalgebras Of A Polynomial Ring, Algebraic and Topological Theories*. Em memória de Dr. Takehiko Miyata. Kinokuniya, 1985, pp. 33-51.

[14] Simis, Aron. *Two Differential Themes In Characteristic Zero*. Contemporary Mathematics **324** (2003) 195-204

[15] Nowicki, Andrzej. *Polynomial Derivations And Their Rings Of Constants*. Torun, 1994.

[16] Russel, K.P. e Sathaye, A. *On Finding And Concelling Variables In* $k[x, y, z]$. Journal of Algebra **57** (1979) 151-166.

[17] Zariski, Oscar e Samuel, Pierre. *Commutative Algebra*. Volume I. Springer-Verlag, 1958.

[18] O. Zariski *Interprétations Algébrico-Géométriques Du Quatorzième Problème De Hilbert*. Bull. Sci. Math. **78** (1954), 155-168.