TEOREMAS DE "LINKING" APLICADOS À PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMI-LINEARES

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Jesús Alfonso Pérez Sánchez e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 20 de junho de 1996

Prof. Dr. Djairo G. de Figueiredo
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em MATEMÁTICA

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Perez Sánchez, Jesús Alfonso

P415t Teoremas de "Linking" aplicados à problemas elípticos semi-lineares / Jesús Alfonso Perez Sánchez -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1996.

Orientador : Djairo Guedes de Figueiredo

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

1.Equacões diferenciais parciais. 2. Operador Laplaciano. 3. Dirichlet, Problemas de. 4. Equações diferenciais elípticas. I. Figueiredo, Djairo Guedes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

Tese defendida e aprovada em 14 de junho de 1996

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). ELVES ALVES DE BARROS E SILVA

Prof (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES

Prof (a). Dr (a). ALOÍSIO JOSÉ FREIRIA NEVES

Prof (a). Dr (a). CELIUS ANTONIO MAGALHÃES

Prof (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

TEOREMAS DE "LINKING" APLICADOS À PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMI-LINEARES

por

Jesús Alfonso Pérez Sánchez.

com orientação de

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do grau de DOUTOR EM MATEMÁTICA

Ronald Graham, pesquisador:

A matemática é uma coisa emocionante; é um desafio de infinitas possibilidades. Não há ninguém suficientemente apto para contemplar nem que seja uma infinitésima parte do muito que há para desvendar. Há problemas capazes de desafiar seja quem for, e, na minha opinião, isso vai-se repetindo sucessivamente.

É como fazer malabarismo. Quando é que alguém vai conseguir ser um malabarista perfeito? Quando é que se conseguirão aprender todos os truques? Há sempre possibilidade de se fazer o número com mais uma bola.

– Discover.

À memória dos meus pais:

Alicia e Víctor

Agradeço

Aos Professores Djairo Guedes de Figueiredo (orientador) e Elves Alves de Barros e Silva(co-orientador), pelos encontros, os quais proporcionaram valiosas sugestões e correções para a culminação do presente trabalho.

Aos amigos: Daniel, João, Marcelo, Helder, pela solidariedade e companheirismo.

A Rosa Elena, pelo grande apoio.

Índice

Sumário

No presente trabalho estudamos variacionalmente alguns problemas elípticos semilineares, com condição de Neumann ou de Dirichlet.

No Capítulo 1, a equação em questão é da forma: $-\Delta u = f(x,u) + h(x) - t$, em Ω; com condição de Neumann na fronteira, $\partial\Omega$.

Levando em conta que Ω é um domínio limitado em R^N com fronteira suave e que a f é superlinear em $+\infty$, assintoticamente linear em $-\infty$, com crescimento polinomial subcrítico, provamos que para $t < 0$, suficientemente grande em valor absoluto, o problema possui pelo menos duas soluções para todo h tal que $\int h = 0$.

No capítulo 2, demonstramos a existência de pelo menos uma solução não trivial para o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + h(x), & x \in \Omega \\ \text{condição de Neumann ou de Dirichlet, em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f além de ter um comportamento semelhante ao da f do capítulo 1, satisfaz uma condição local no zero e sua primitiva $F(x,s)$ é não negativa. Entretanto, h, satisfazendo uma relação de ortogonalidade, deve também estar em determinada bola de $L_2(\Omega)$.

Finalmente, no capítulo 3 apresentamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami no lugar da condição de Palais-Smale e a aplicamos ao estudo de uma equação de Sturm-Liouville.

Capítulo 1

Um problema elíptico semi-linear, com condição de Neumann.

Introdução.

Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$ com fronteira $\partial\Omega$ suave.

Denotaremos por $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_i \leq \cdots$ os autovalores de $(-\Delta; H^1(\Omega))$, onde $H^1(\Omega)$ é o usual espaço de Sobolev com norma dada por:

$$||u||^2 = \int |\nabla u|^2 + \int u^2$$

(Integrais $\int$ são consideradas sobre todo Ω).

Neste primeiro capítulo consideramos o problema:

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + h(x) - t, & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde, t é um parâmetro real; $h \in L_2(\Omega)$, com $\int h = 0$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz:

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s} = +\infty, \qquad \lim_{s \to -\infty} \frac{f(x,s)}{s} = \beta,$$

com $\lambda_j < \beta < \lambda_{j+1}$.

Nosso trabalho sobre (P) foi motivado por A. Micheletti - A. Pistoia [19] as quais trataram o problema de Dirichlet análogo à (P):

$$(P_D) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + h(x) - t\varphi, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\varphi > 0$ é uma função própria associada com o primeiro valor próprio de $(-\Delta; H_0^1(\Omega))$, e $\int h\varphi = 0$.

Devemos assinalar que Ruf-Srikanth [23] estudaram (P_D) no caso $f(x,u) = \lambda u + (u^+)^p$, onde $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$, e $p > 1$ é restrito na forma usual considerada mais adiante. Ditos autores demonstraram que (P_D), no caso citado, possui pelo menos duas soluções para $t < 0$, suficientemente grande em valor absoluto. Uma solução é encontrada diretamente, a segunda é obtida por uma aplicação do Teorema Generalizado do Passo da Montanha de Rabinowitz. De Figueiredo em [10] obtem um resultado similar para uma classe maior de não linearidades. As condições requeridas em [10] para aplicar o Teorema Generalizado do Passo da Montanha são:

$$(f)^* \qquad f \in C^1, \qquad f'_s(x,s) \geq -\mu, \text{ onde } \qquad \mu < \lambda - \lambda_k,$$

e todas as hipóteses necessárias para obter a condição de Palais-Smale. Em [19], A. Micheletti - A. Pistoia consideram outra classe de não linearidades (as quais não satisfazem $(f)^*$) para as quais o resultado é válido sob a hipótese mais fraca $f \in C(\overline{\Omega} \times I\!R, I\!R)$.

Ditas autoras usam um argumento variacional ligeiramente diferente, para obter diretamente a existência de dois valores críticos diferentes para o funcional de Euler-Lagrange associado com (P_D). O Teorema que assegura a existência de ditos valores críticos exige que o funcional seja de classe C^1, satisfaça a condição de Palais-Smale, e uma certa condição de "enlace" ("linking", na língua inglesa). Este tratamento variacional sera o empregado por nós ao estudar o problema (P), só que utilizaremos uma condição de 'enlace" mais simples e que se adapta melhor à geometria do funcional de Euler-Lagrange associado com (P).

Também queremos assinalar que, no processo de desvendar a geometria do funcional citado, apelaremos a um número m definido da seguinte maneira:

Fixado $j \geq 1$, e denotando por $e_1, e_2, \ldots$ as auto funções de $(-\Delta; H^1(\Omega))$, associadas aos autovalores $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots$, supondo $\int e_i^2 = 1$, para $i = 1, 2, \ldots$, seja H_1 o espaço gerado por $\{e_1, \ldots, e_j\}$.

Definimos $m = inf\left\{\int v^2 + \int ((e_{j+1} + v)^+)^2 : v \in H_1\right\}$. Veremos (proposição 1.3) que $0 < m < 1$.

Por outro lado, em nosso problema (P), a f vem dada por:

(f_0) $$f(x,s) = \beta s^- + c(s^+)^p + W(x,s),$$

onde $c > 0$ e $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$, $1 < p < +\infty$ se $N = 1, 2$. Enquanto que W satisfaz

(W_0) $\quad W : \overline{\Omega} \times I\!\!R \to I\!\!R$ é contínua

(W_1) Existe $k > 0$ tal que

i) $\quad s \leq -k \;\Rightarrow\; W(x,s) = \dfrac{C_0(x)}{|s|^\eta}$, com $C_0 \in C(\overline{\Omega})$, $\eta > 1$.

ii) $\quad s \geq k \;\Rightarrow\; \left|\displaystyle\int_0^s W(x,\tau)d\tau\right| \leq C_1(x) + C_2(x)s^\mu$, com

$$C_1 \in L_1(\Omega), \qquad C_2 \in L_\infty(\Omega), \qquad 1 \leq \mu < p+1.$$

Nosso resultado principal do capítulo vem dado no

Teorema 1.1. Assumindo as hipóteses $(f_0), (W_0), (W_1)$, com $\dfrac{m}{m+1}\lambda_j + \dfrac{1}{m+1}\lambda_{m+1} < \beta < \lambda_{j+1}$, e $\int h = 0$, temos que (P) possui pelo menos duas soluções, para $t < 0$ suficientemente grande em valor absoluto.

Dividimos o capítulo em três seções. Na primeira, consideramos o teorema que nos dara a existência de dois valores críticos para o funcional de Euler-Lagrange associado com (P). Na segunda é demonstrada a condição de Palais-Smale para dito funcional. Na última seção provamos que o funcional em questão satisfaz a condição de "enlace" dada na seção primeira.

Seção 1

Teorema do Passo da Montanha Generalizado de Rabinowitz.

Dados: H um espaço de Hilbert, real: $v \in H$, denotamos:
$\mathbb{R}^+ v = \{tv : t \in [0, +\infty)\}$.

Consideremos H, um espaço de Hilbert real soma direta topológica de H_1 e H_2.

Sejam: $u_0 \in H$, e, uma função $g : H \to \mathbb{R}$. Diremos que g satisfaz a *"condição de enlace"*, (L), com respeito à u_0, H_1, H_2, se:

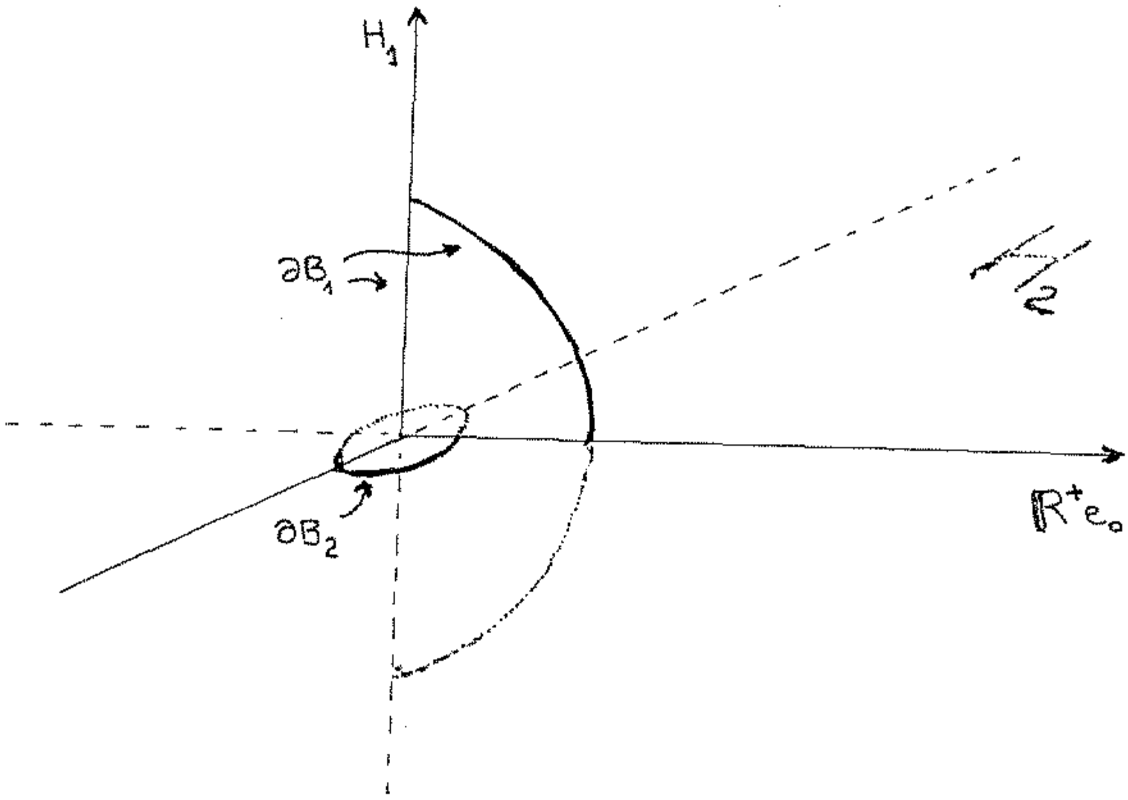
Existem $e_0 \in H_2 \setminus \{0\}$, ρ_1, ρ_2, tais que:

$$(L) \qquad \begin{cases} \rho_1 > 2\rho_2 > 0 \\ \sup\limits_{u_0 + \partial B_1} g < \inf\limits_{u_0 + \partial B_2} g \end{cases}$$

onde,

$$B_1 = \{u \in H_1 \oplus R^+ e_0 : \|u\| < \rho_1\},$$
$$B_2 = \{u \in H_2 : \|u\| < \rho_2\}.$$

Fazendo um desenho, com $u_0 = 0$, para maior simplicidade, temos:



Teorema 1.2

Seja H como indicado acima, com $\dim H_1 < +\infty$.

$g : H \to \mathbb{R}$, de classe C^1, satisfazendo a condição de Palais-Smale (P.S) e a condição (L). Então, existem dois valores críticos C_0 e C_1 de g tais que:

$$\inf_{u_0+B_2} g \leq C_1 \leq \sup_{u_0+\partial B_1} g < \inf_{u_0+\partial B_2} g \leq C_0 \leq \sup_{u_0+B_1} g.$$

Primeira parte: Existência de C_0.

Sem perder generalidade, supomos $u_0 = 0$. Também, usaremos a notação:

$$g^b = \{x \in H : g(x) \leq b\}.$$

Argumentando por contradição, suponhamos que todo valor entre $a = \inf\limits_{\partial B_2} g$ e $b = \sup\limits_{B_1} g$ é valor regular da g. Então, pelo lema da deformação, existe

$\eta : [0,1] \times g^b \to g^b$ tal que, para $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeno de maneira que $\partial B_1 \subset g^{a-\varepsilon}$) temos:

(1) $$\eta(0,u) = u \ , \ \forall u \in g^b$$

(2) $$\eta(t,u) = u \ , \ \forall t \in [0,1], \ \forall u \in g^{a-\varepsilon}$$

(3) $$\eta(1,u) \in g^{a-\varepsilon} \ , \ \forall u \in g^b.$$

Como $B_1 \subset g^b$ e $\partial B_2 \cap g^{a-\varepsilon} = \phi$, resulta, usando (3), que:

(*) $$\eta(1, B_1) \cap \partial B_2 = \phi.$$

Sejam: $P : H_1 \oplus H_2 \to H_2$; $Q : H_1 \oplus H_2 \to H_1$, as projeções canônicas.
Consideremos $\varphi : [0,1] \times B_1 \to H_1 \oplus \mathbb{R}e_0$, dada por:

$$\varphi(t,u) = Q(\eta(t,u)) + (||P(\eta(t,u))|| - \rho_2)\frac{e_0}{||e_0||}$$

Em particular,

$$\varphi(0,u) = Q(u) + (||Pu|| - \rho_2)\frac{e_0}{||e_0||}.$$

Logo, se $u = u_1 + \lambda\frac{e_0}{||e_0||} \in B_1$, então:

$$\varphi(0,u) = u_1 + (\lambda - \rho_2)\frac{e_0}{||e_0||} = u - \rho_2\frac{e_0}{||e_0||},$$

isto é, $\varphi(0,\cdot) : B_1 \to H_1 \oplus Re_0$, é uma translação pelo vetor $-\rho_2\frac{e_0}{||e_0||}$.
A seguir, vejamos que tem sentido usar a teoria do grau de Brouwer e falar de

$$d(\varphi(0,\cdot), B_1, 0) \qquad \text{e} \qquad d(\varphi(0,\cdot), B_1, \rho_2\frac{e_0}{||e_0||}).$$

Com efeito, em caso de existir $u_1^* \in \partial B_1$ tal que

$$\varphi(0, u_1^*) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi(0, u_1^*) = \rho_2 \frac{e_0}{||e_0||},$$

teríamos

$$u_1^* = \rho_2 \frac{e_0}{||e_0||} \qquad \text{ou} \qquad u_1^* = 2\rho_2 \frac{e_0}{||e_0||}$$

Portanto, $u_1^* \in \partial B_2$ ou $u_1^* \in 2\partial B_2$.

Temos chegado, assim, ao absurdo:

$$u_1^* \in \partial B_1 \cap \partial B_2 \qquad \text{ou} \qquad u_1^* \in \partial B_1 \cap (2\partial B_2)$$

Agora, afirmamos que:

$$d(\varphi(0, \cdot), B_1, 0) = d(\varphi(0, \cdot), B_1, \rho_2 \frac{e_0}{||e_0||}).$$

Isso decorre do fato: 0 e $\rho_2 \dfrac{e_0}{||e_0||}$ estão na mesma componente conexa de $I\!R^{\dim B_1 + 1} \setminus \varphi(0, \cdot)(\partial B_1)$.

Por outro lado, usando a hipótese $\rho_1 > 2\rho_2$, é imediato que:

$(1 - t)\varphi(0, \cdot) + tI$ define uma homotopia admissível, com respeito ao ponto $\rho_2 \dfrac{e_0}{||e_0||}$, entre $\varphi(0, \cdot)$ e $I =$ identidade em B_1.

Portanto, $d(\varphi(0, \cdot), B_1, \rho_2 \dfrac{e_0}{||e_0||}) = d(I, B_1, \rho_2 \dfrac{e_0}{||e_0||}) = 1$.

Logo, $d(\varphi(0, \cdot), B_1, 0) = 1$.

De outra parte, $\varphi(\cdot, \cdot)$ define uma homotopia admissível, respeito ao ponto 0, entre $\varphi(0, \cdot)$ e $\varphi(1, \cdot)$, pois, caso contrário, existiriam $t_0 \in [0, 1]$ e $u_1 \in \partial B_1$ tais que:

$$Q(\eta(t_0, u_1)) + (||P(\eta(t_0, u_1))|| - \rho_2) \frac{e_0}{||e_0||} = 0,$$

do qual resulta: $\eta(t_0, u_1) \in \partial B_2$.

Mas, como $\partial B_1 \subset g^{a-\varepsilon}$, usando (2) obtemos: $\eta(t_0, u_1) = u_1$.

Conclusão: $u_1 \in \partial B_1 \cap \partial B_2$ (absurdo).

Portanto, $d(\varphi(1, \cdot), B_1, 0) = d(\varphi(0, \cdot), B_1, 0) = 1$.

Em particular, existe $u \in B_1$ tal que:

$$\varphi(1, u) = 0.$$

donde $\eta(1, u) \in \partial B_2$.

Assim, $\eta(1, B_1) \cap \partial B_2 \neq \phi$, em contradição com $(*)$.

Logo, entre a e b, existe pelo menos, um valor crítico da g.

Segunda parte: Existência de C_1.

Novamente, procurando uma contradição, assumamos que todo valor entre $c = \inf\limits_{B_2} g$ e $d = \sup\limits_{\partial B_1} g$, é valor regular de g.

Pelo lema da deformação, existe $\eta: [0,1] \times g^d \to g^d$ tal que, para $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeno) temos

(i) $\eta(0, u) = u$, $\forall u \in g^d$

(ii) $\eta(t, u) = u$, $\forall u \in g^{c-\varepsilon}$, $\forall t \in [0, 1]$

(iii) $\eta(1, u) \in g^{c-\varepsilon}$, $\forall u \in g^d$.

Como $\partial B_1 \subset g^d$ e $B_2 \cap g^{c-\varepsilon} = \phi$, obtemos, usando (iii), que

$$(**) \qquad \eta(1, \partial B_1) \cap B_2 = \phi.$$

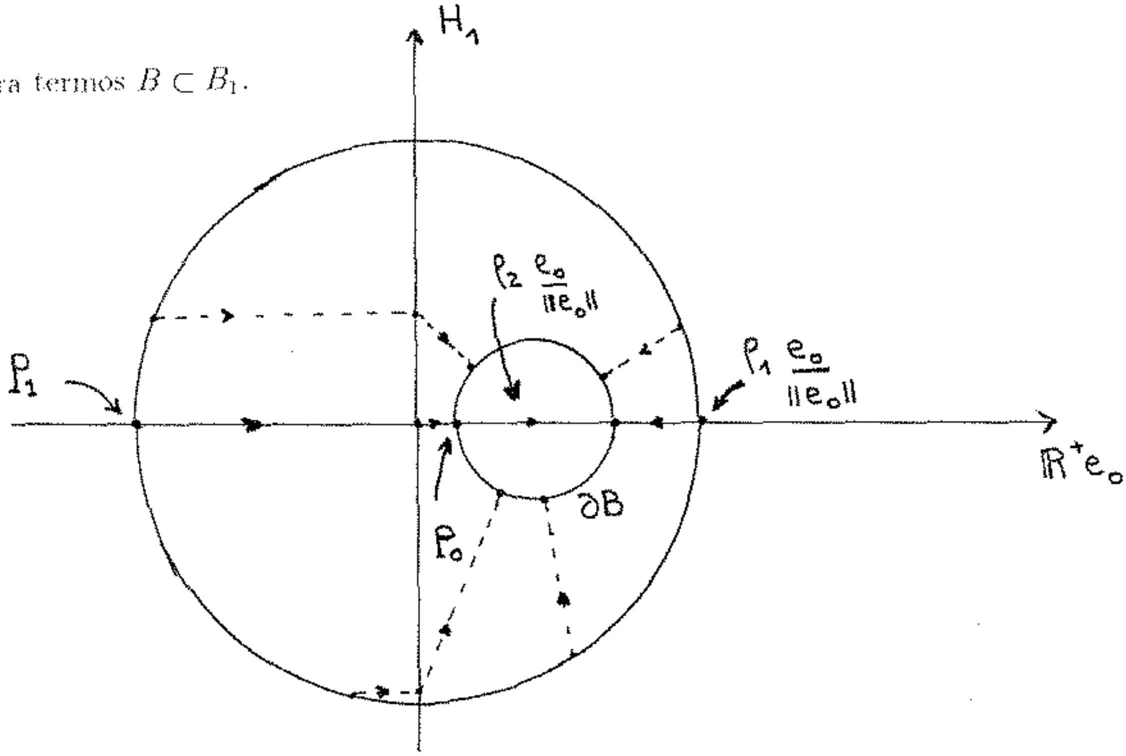
Sejam, como antes, $P : H_1 \oplus H_2 \to H_2$ e $Q : H_1 \oplus H_2 \to H_1$, as projeções canônicas.

Chamando S_{ρ_1} a esfera em $H_1 \oplus \mathbb{R}e_0$ de centro 0 e raio ρ_1, consideremos $\tilde{\varphi} : S_{\rho_1} \to \partial B_1$, definida por:

$$\tilde{\varphi}\left(u_1 + \lambda \frac{e_0}{\|e_0\|}\right) = \begin{cases} u_1 \; ; & \text{se } \lambda \geq 0 \\ u_1 + \lambda \dfrac{e_0}{\|e_0\|} \; , & \text{se } \lambda > 0. \end{cases}$$

Seja B a bola em $H_1 \oplus \mathbb{R}e_0$ de centro $\rho_2 \dfrac{e_0}{\|e_0\|}$ e raio δ, suficientemente pequeno.

para termos $B \subset B_1$.



Definimos $\varphi : [0,1] \times \partial B_1 \longrightarrow H_1 \oplus Re_0$ por

$$\varphi(t,u) = Q(\eta(t,u)) + ||P(\eta(t,u))|| \frac{e_0}{||e_0||}.$$

Notemos que:

$$(***) \qquad \rho_2 \frac{e_0}{||e_0||} \notin I_m(\varphi(t,\cdot)),$$

pois em caso de existir $u_1 \in \partial B_1$ tal que:

$$Q(\eta(t,u_1)) + ||P(\eta(t,u_1))|| \frac{e_0}{||e_0||} = \rho_2 \frac{e_0}{||e_0||},$$

resultaria $\eta(t,u_1) \in \partial B_2$. Em particular, $g(\eta(t,u_1)) > \sup_{\partial B_1} g = d$.

Mas, pela definição de η, temos $\eta(t, u_1) \in g^d$; Logo, obtivemos uma contradição. Considerando, então, a projeção radial:

$$\pi : H_1 \oplus Re_0 \setminus \{\rho_2 \frac{e_0}{||e_0||}\} \longrightarrow \partial B,$$

podemos definir:

$$\Phi(t, \cdot) = \pi_0 \varphi(t, \cdot)_0 \tilde{\varphi} : S_{\rho_1} \longrightarrow \partial B.$$

Usando a teoria do grau para aplicações entre variedades (ver [16]), temos que:

$$d(\Phi(0, \cdot), S_{\rho_1}, P_0) \neq 0,$$

onde $P_0 = (\rho_2 - \delta)\frac{e_0}{||e_0||}$.

Basta observar que $\Phi^{-1}(0, \cdot)(\{P_0\}) = \{P_1\}$, com $P_1 = -\rho_1 \frac{e_0}{||e_0||}$ e, além disso, uma base do espaço tangente à S_{ρ_1}, no ponto P_1, é enviada, mediante a aplicação induzida por $\Phi(0, \cdot)$, em uma base do espaço tangente à ∂B, no ponto P_0. Isto é, P_0 é valor regular para $\Phi(0, \cdot)$.

Vejamos que

$$(****) \qquad d(\Phi(1, \cdot), S_{\rho_1}, P_0) \neq 0.$$

Para tanto, provaremos que

$$\Phi(\cdot, \cdot) : [0, 1] \times S_{\rho_1} \to \partial B$$

é uma homotopia admissível, entre $\Phi(0, \cdot)$ e $\Phi(1, \cdot)$ com respeito ao ponto P_0. Só precisamos estabelecer a continuidade de Φ. Notemos que:

$$\begin{aligned}
&||\varphi(t, \tilde{\varphi}(u)) - \rho_2 \frac{e_0}{||e_0||}||^2 = \\
&= \left|\left| Q(\eta(t, \tilde{\varphi}(u))) - ||P(\eta(t, \tilde{\varphi}(u)))|| \frac{e_0}{||e_0||} - \rho_2 \frac{e_0}{||e_0||} \right|\right|^2 = \\
&= ||Q(\eta(t, \tilde{\varphi}(u)))||^2 + |\ ||P(\eta(t, \tilde{\varphi}(u)))|| - \rho_2|^2 > 0,
\end{aligned}$$

pois, supondo igualdade à zero, obtemos uma contradição, justamente como na prova de $(***)$.

Então, usando a compacidade de S_{ρ_1}, temos que existe $r_0 > 0$ tal que

$$||\varphi(t, \tilde{\varphi}(u)) - \rho_2 \frac{e_0}{||e_0||}|| \geq r_0 > 0 \quad , \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall u \in S_{\rho_1}.$$

Isto acarreta a continuidade da $\Phi(\cdot,\cdot)$, cujo único "perigo" seria a proximidade arbitrária de valores da $\varphi(\cdot,\cdot)_0\tilde{\varphi}$ à $\rho_2 \frac{e_0}{||e_0||}$. De maneira que $(****)$ está provado.

Por tanto, existe $u \in S_{\rho_1}$ tal que:

$$\pi(\varphi(1, \tilde{\varphi}(u))) = P_0 \quad , \quad \text{isto é,}$$
$$\varphi(1, \tilde{\varphi}(u)) = \lambda \frac{e_0}{||e_0||}, \qquad \text{para algum} \qquad \lambda \in [0, \rho_2).$$

Logo. $\quad Q(\eta(1, \tilde{\varphi}(u))) = 0 \quad$ e $\quad ||P(\eta(1, \tilde{\varphi}(u)))|| = \lambda < \rho_2$.

Assim,

$$\eta(1, \tilde{\varphi}(u)) \in B_2,$$

o qual fornece $\quad \eta(1, \partial B_1) \cap B_2 \neq \phi \quad$, contrário à $(**)$.

Então, entre c e d existe pelo menos um valor crítico de g.

Seção 2

A condição de Palais-Smale.

O problema (P) pode ser escrito como

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = g(x, u) + h(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ , & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

com $g(x, s) = f(x, s) - t = -\beta s^- + c(s^+)^p + W(x, s) - t$, e h satisfazendo:

$(h_0) \qquad h \in L_2(\Omega) \quad , \quad \int h = 0.$

Então, usando (W_1) segue-se

$$\lim_{s \to -\infty} [g(x,s) - \beta s] = -t. \tag{2.0}$$

Também, a partir de (W_0) e (W_1) podemos mostrar que: existem $s_0 > 0$ e $\theta \in (0, 1/2)$, verificando

$$0 < G(x,s) \leq \theta s g(x,s) \quad , \quad \forall x \in \overline{\Omega} \ , \ \forall s \geq s_0, \tag{2.1}$$

onde $G(x,s) = \int_0^s g(x,\tau)d\tau$.

Com efeito, para $s > 0$, resulta $g(x,s) = cs^p + W(x,s) - t$.

Portanto,

$$G(x,s) = \frac{c}{p+1}s^{p+1} + \int_0^s W(x,\tau)d\tau - ts.$$

Queremos que:

$$0 < \frac{c}{p+1}s^{p+1} + \int_0^s W(x,\tau)d\tau - ts \leq \theta c s^{p+1} + \theta s W(x,s) - \theta s t,$$

para $s \geq s_0 > 0$ e $\theta \in (0, 1/2)$, a encontrar.

A primeira desigualdade é conseguida, para s suficientemente grande, pois o termo $\frac{c}{p+1}s^{p+1}$ domina.

A segunda desigualdade equivale à:

$$c\left(\theta - \frac{1}{p+1}\right) \geq \frac{\int_0^s W(x,\tau)d\tau}{s^{p+1}} - \frac{\theta W(x,s)}{s^p} + \frac{t(\theta - 1)}{s^p}.$$

Portanto, nosso intuito está garantido se tomarmos $\theta \in \left(\frac{1}{p+1}, \frac{1}{2}\right)$ e s suficientemente grande. Assim, (2.1) é satisfeita.

Veremos agora, que, a partir de (2.0) e (2.1), podemos obter a condição de Palais-Smale para o funcional de Euler-Lagrange associado à (P), isto é, para $f_t : H^1(\Omega) \to I\!R$ definido por

$$f_t(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \int G(x,u) - \int hu.$$

Seja $\{u_n\}$ sequência em $H^1(\Omega)$ tal que:

$$\left|\frac{1}{2}\int |\nabla u_n|^2 - \int G(x,u_n) - \int hu_n\right| \leq \widetilde{C} \tag{2.2}$$

$$\left|\int \nabla u_n.\nabla v - \int g(x,u_n)v - \int hv\right| \leq \varepsilon_n ||v|| \quad . \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{2.3}$$

com $\widetilde{C} > 0$, $\varepsilon_n \to 0^+$.

Para concluir que $\{u_n\}$ possui uma subsequência convergente, é suficiente provarmos que $\{u_n\}$ é limitada.

Suponhamos, por absurdo, que para uma subsequência (ainda denotada por $\{u_n\}$) tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} ||u_n|| = +\infty.$$

Supondo, sem perda da generalidade, que $||u_n|| \geq 1$, $\forall n$, definimos

$$Z_n = \frac{u_n}{||u_n||}.$$

Assim, existe uma subsequência (ainda denotada por $\{Z_n\}$) tal que

$$\begin{cases} Z_n \rightharpoonup Z_0 & . \ (\text{convergência fraca em } H^1(\Omega)) \\ Z_n \to Z_0 & \text{em } \ L_2(\Omega) \\ Z_n(x) \to Z_0(x) & , \ \text{q.t.p. em } \ \Omega \\ |Z_n(x)| \leq q(x) & , \ \text{q.t.p. em } \ \Omega \ , \ \ q \in L_2(\Omega). \end{cases} \tag{2.4}$$

Dividindo (2.3) por $||u_n||$ obtemos

$$\left|\int \nabla Z_n \nabla v - \int \frac{g(x,u_n)}{||u_n||}v - \frac{1}{||u_n||}\int hv\right| \leq \frac{\varepsilon_n}{||u_n||}v.$$

Passando ao limite, segue-se

$$\lim_{n\to+\infty} \int \frac{g(x,u_n)}{||u_n||}v = \int \nabla Z_0.\nabla v \quad , \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.5}$$

Nosso próximo passo é provar:

$$Z_0 \leq 0 \qquad \text{q.t.p. em} \qquad \Omega. \tag{2.6}$$

Chamemos $\Omega^+ = \{x \in \Omega : Z_0(x) > 0\}$, e, denotemos por $|\Omega^+|$ a medida de Lebesgue de Ω^+.

Escolhendo $v = Z_0^+$, em (2.5), resulta

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega^+} \frac{g(x,u_n)Z_0}{||u_n||} = \int_{\Omega^+} |\nabla Z_0|^2 < +\infty. \tag{2.7}$$

Vamos tentar achar uma limitação inferior para $\dfrac{g(x,u_n)Z_0}{||u_n||}$, com $x \in \Omega^+$.

Afirmamos que existe $K_1 > 0$ tal que

$$g(x,s) \geq \beta s - K_1, \qquad \forall s \in I\!R. \tag{2.8}$$

Efetivamente, pela superlinearidade de g em $+\infty$, e sua continuidade existe $C_1 > 0$ tal que

$$g(x,s) \geq \beta s - C_1, \qquad \forall s > 0.$$

Por outro lado, por (2.0) e a continuidade da g, existe $\tilde{C}_1 > 0$ verificando

$$g(x,s) \geq \beta s - \tilde{C}_1, \qquad \forall s \leq 0.$$

Tomando, então, $K_1 = \max\{C_1, \tilde{C}_1\}$, temos (2.8).

Em particular, usando (2.8) e (2.4), resulta, para $x \in \Omega^+$,

$$\frac{g(x,u_n)Z_0(x)}{||u_n||} \geq \frac{(\beta u_n - K_1)Z_0(x)}{||u_n||} \geq (-\beta q(x) - K_1)Z_0(x).$$

Também, utilizando a superlinearidade da g em $+\infty$, junto com o fato que para $x \in \Omega^+$ temos $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$, segue-se que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(x,u_n)Z_0(x)}{||u_n||} = \lim_{n\to+\infty} \frac{g(x,u_n)Z_n(x)Z_0(x)}{u_n(x)} = +\infty, \qquad \forall x \in \Omega^+.$$

Logo, se $|\Omega^+| > 0$, aplicando o Lema de Fatou chegamos à

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega^+} \frac{g(x,u_n)Z_0}{||u_n||} = +\infty,$$

em oposição à (2.7). Portanto, (2.6) está provado.

Na próxima etapa, vejamos que

$$(2.8)' \qquad \int Z_0 = 0.$$

Multiplicando (2.3) por $\frac{1}{2}$, tomando logo $v = u_n$, e subtraindo de (2.2), obtemos

$$(2.8)'' \qquad \left| \int \left[\frac{g(x, u_n)u_n}{2} - G(x, u_n) \right] - \frac{1}{2} \int h u_n \right| \leq \tilde{C} + \frac{\varepsilon_n}{2} ||u_n||.$$

Dividindo esta desigualdade por $||u_n||$, usando (2.4) e, passando ao limite, chega-se à

$$(2.9) \qquad \lim_{n \to +\infty} \int \frac{\frac{g(x,u_n)u_n}{2} - G(x, u_n)}{||u_n||} = \frac{1}{2} \int h Z_0.$$

Fixemos um $s^* > s_0$. Vamos ver que existem $C_1^* > 0$ e $C_2^* > 0$ tais que

$$(2.10) \qquad \left| \frac{g(x, s)s}{2} - G(x, s) \right| \leq C_1^* |s| + C_2^* \quad , \quad \forall s \in (-\infty, s^*] \; , \; \forall x \in \overline{\Omega}$$

Por uma parte, para $s < 0$,

$$g(x, s) = \beta s + W(x, s) - t \; ; \; G(x, s) = \frac{\beta s^2}{2} + \int_0^s W(x, \tau) d\tau - ts.$$

Portanto, usando (W_0) e (W_1), segue-se

$$\left| \frac{g(x, s)s}{2} - G(x, s) \right| \leq \left| \frac{sW(x, s)}{2} - \int_0^s W(x, \tau) d\tau + \frac{ts}{2} \right| \leq C_1^* |s| + \tilde{C}_2.$$

Chamando $\tilde{\tilde{C}}_2 = \max\limits_{\substack{x \in \overline{\Omega} \\ 0 \leq s \leq s^*}} \left| \frac{g(x, s)s}{2} - G(x, s) \right|$, obtemos (2.10), com $C_2^* = \max\{\tilde{C}_2, \tilde{\tilde{C}}_2\}$.

Empregando (2.10), chegamos à:

$$\left|\int_{u_n\leq s^*}\frac{\frac{g(x,u_n)u_n}{2}-G(x,u_n)}{||u_n||}\right|\leq C_1^*\int\frac{|u_n|}{||u_n||}+\frac{C_2^*|\Omega|}{||u_n||}\leq C_1^*|\Omega|^{1/2}+\frac{C_2^*|\Omega|}{||u_n||}$$

Portanto,

$$0\leq\limsup_{n\to+\infty}\left|\int_{u_n\leq s^*}\frac{\frac{g(x,u_n)u_n}{2}-G(x,u_n)}{||u_n||}\right|\leq C_1^*|\Omega|^{1/2}. \tag{2.11}$$

Por outro lado, levando em conta que $s^*>s_0$ e, usando (2.1), segue-se

$$\begin{aligned}I_n=\int_{u_n>s^*}\frac{\frac{g(x,u_n)u_n}{2}-G(x,u_n)}{||u_n||}&\geq\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\int_{u_n>s^*}\frac{g(x,u_n)u_n}{||u_n||}\geq\\ &\geq\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\int_{u_n>s^*}\frac{g(x,u_n)}{||u_n||}.\end{aligned}$$

Então, como $\displaystyle\int\frac{g(x,u_n)}{||u_n||}=\int_{u_n>s^*}\frac{g(x,u_n)}{||u_n||}+\int_{u_n\leq s^*}\frac{g(x,u_n)}{||u_n||}$, temos:

$$I_n\geq\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\int\frac{g(x,u_n)}{||u_n||}-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\int_{u_n\leq s^*}\frac{g(x,u_n)}{||u_n||} \tag{2.12}$$

Escolhendo $K^*>\max_{\overline{\Omega}\times(-\infty,s^*]}|g(x,s)-\beta s|$, a partir de (2.12) resulta

$$\begin{aligned}I_n&\geq\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\int\frac{g(x,u_n)}{||u_n||}-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\beta\int_{u_n\leq s^*}\frac{u_n}{||u_n||}-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\int_{u_n\leq s^*}\frac{g(x,u_n)-\beta u_n}{||u_n||}\geq\\ &\geq-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\int\frac{g(x,u_n)}{||u_n||}-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\beta\int_{u_n\leq s^*}Z_n-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\frac{K^*}{||u_n||}.\end{aligned}$$

Agora, tomaremos limites notando os dois fatos seguintes:

i) Se em (2.5) fazemos $v\equiv 1$, resulta: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int\frac{g(x,u_n)}{||u_n||}=0$

ii) $\displaystyle -\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\beta\int_{u_n\leq s^*}Z_n=-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\beta\int Z_n+\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\beta\int_{u_n>s^*}Z_n\geq$

$$\geq-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\beta\int Z_n\to-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\beta\int Z_0.$$

Assim,

$$(2.12)' \qquad \liminf_{n\to+\infty} I_n \geq -\left(\frac{1}{2}-\theta\right) s^*\beta \int Z_0.$$

Voltando, então, à (2.9) e , usando (2.11) e (2.12)', conseguimos

$$\frac{1}{2}\int hZ_0 = \lim_{n\to+\infty}\left[I_n + \int_{u_n\leq s^*}\frac{\frac{g(x,u_n)u_n}{2}-G(x,u_n)}{||u_n||}\right] \geq -C_1^*|\Omega|^{1/2}-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\beta\int Z_0$$

Como $s^* > s_0 > 0$ é arbitrário, concluimos que $\int Z_0 \geq 0$, o qual, junto com (2.6), fornece $Z_0 = 0$, q.t.p. em Ω.

Em particular, usando (2.4) segue-se

$$(2.12)'' \qquad \int Z_n^2 \to 0 \quad \text{e} \quad \int |Z_n| \to 0$$

Nossa penúltima etapa consistirá em provar:

$$(2.13) \qquad \lim_{n\to+\infty}\int\frac{g(x,u_n)Z_n}{||u_n||} = 0.$$

Em primeiro lugar, pela escolha de K^*, e (2.12)'' segue-se

$$(2.14) \qquad \left|\int_{u_n\leq s_0}\frac{g(x,u_n)Z_n}{||u_n||}\right| \leq \int_{u_n\leq s_0}\frac{(K^*+\beta|u_n|)|u_n|}{||u_n||^2} =$$

$$= \frac{K^*}{||u_n||}\int_{u_n\leq s_0}|Z_n| + \beta\int_{u_n\leq s_0}Z_n^2 \leq \frac{K^*}{||u_n||}\int|Z_n| + \beta\int Z_n^2 \to 0$$

Em segundo lugar, utilizando (2.8)'' obtemos

$$\left|\int\left[\frac{g(x,u_n)u_n}{2}-G(x,u_n)\right]\right| \leq \tilde{C} + \frac{\varepsilon_n}{2}||u_n|| + \frac{1}{2}\left|\int hu_n\right|.$$

Portanto, usando (2.10), conseguimos,

$$\left|\int_{u_n>s_0}\left[\frac{g(x,u_n)u_n}{2}-G(x,u_n)\right]\right|\le\left|\int\left[\frac{g(x,u_n)u_n}{2}-G(x,u_n)\right]\right|$$
$$+\left|\int_{u_n\le s_0}\left[\frac{g(x,u_n)u_n}{2}-G(x,u_n)\right]\right|\le\tilde{C}+\frac{\varepsilon_n}{2}||u_n||+\frac{1}{2}\left|\int hu_n\right|+C_1^*\int|u_n|+C_2^*|\Omega|.$$

Assim, empregando (2.1), segue-se:

$$0\le\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\int_{u_n>s_0}g(x,u_n)u_n\le\int_{u_n>s_0}\left[\frac{g(x,u_n)u_n}{2}-G(x,u_n)\right]\le$$
$$\le\tilde{C}+\frac{\varepsilon_n}{2}||u_n||+\frac{1}{2}\left|\int hu_n\right|+C_1^*\int|u_n|+C_2^*|\Omega|.$$

Em seguida, dividindo por $||u_n||^2$, e tomando limites, vem

$$\lim_{n\to\infty}\int_{u_n>s_0}\frac{g(x,u_n)Z_n}{||u_n||}=0. \tag{2.15}$$

Então, a partir de (2.14) e (2.15), obtemos (2.13).

Finalmente, escolhendo $v=Z_n$ e dividindo por $||u_n||$, (2.3) nos fornece:

$$\left|\int|\nabla Z_n|^2-\int\frac{g(x,u_n)Z_n}{||u_n||}-\frac{\int hZ_n}{||u_n||}\right|\le\frac{\varepsilon_n}{||u_n||},\qquad\text{ou seja}$$

$$\left|1-\int Z_n^2-\int\frac{g(x,u_n)Z_n}{||u_n||}-\frac{\int hZ_n}{||u_n||}\right|\le\frac{\varepsilon_n}{||u_n||}. \tag{2.16}$$

Ora, por (2.12)", (2.13) e (2.4) temos que o primeiro membro de (2.16) tende para 1, quando $n\to+\infty$.

Logo, temos obtido um absurdo e, fica provado que f_t satisfaz (P.S.).

Seção 3

A geometria do funcional f_t

Proposição 1.3. Fixado $j \geq 1$.

Seja $m = \inf\left\{\int v^2 + \int ((e_{j+1} + v)^+)^2 : v \in H_1\right\}$

Então $0 < m < 1$.

Demonstração: escolhendo $v = 0$, resulta $m \leq \int (e_{j+1}^+)^2$.

Por outro lado, como e_{j+1} troca de sinal, tem-se $\int (e_{j+1}^-)^2 > 0$. Assim, $\int (e_{j+1}^+)^2 = \int e_{j+1}^2 - \int (e_{j+1}^-)^2 = 1 - \int (e_{j+1}^-)^2 < 1$. Portanto, $m < 1$.

Suponhamos, agora, por absurdo, que $m = 0$.

Seja $\{v_n\}$ uma sequência em H_1 tal que

$$(*) \qquad \int v_n^2 + \int ((e_{j+1} + v_n)^+)^2 \to 0.$$

Em particular $\int v_n^2 \to 0$, e, sem perda de generalidade, $v_n \to 0$, q.t.p. em Ω.

Logo, $((e_{j+1} + v_n)^+)^2 \to (e_{j+1}^+)^2$, q.t.p. em Ω.

Usando, então, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluimos que:

$$\int ((e_{j+1} + v_n)^+)^2 \to \int (e_{j+1}^+)^2 > 0,$$

em contradição com $(*)$.

Seja m como na proposição 1.3.

Consideremos $0 < \varepsilon < \dfrac{m}{m+1}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)$, e escolhamos $\alpha \in I\!R$ tal que

$$(3.1) \qquad \frac{\lambda_{j+1} + \varepsilon - \beta}{\alpha - \beta} < m$$

Em particular, $\alpha > \dfrac{\lambda_{j+1} + \varepsilon}{m} + \dfrac{(m-1)\beta}{m} > \lambda_{j+1}$.

Assim, levando em conta que $\dfrac{m}{m+1}\lambda_j + \dfrac{1}{m+1}\lambda_{j+1} < \beta < \lambda_{j+1}$, obtemos

$$(3.1)' \qquad \alpha > \beta; \quad \beta > \lambda_j + \varepsilon; \quad \frac{\lambda_{j+1} + \varepsilon - \beta}{\beta - \lambda_j - \varepsilon} < m$$

Consideremos $Q_0 : H^1(\Omega) \to I\!R$ dada por

$$Q_0(u) = \int |\nabla u|^2 + \varepsilon \int u^2 - \alpha \int (u^+)^2 - \beta \int (u^-)^2$$

Proposição 1.4.

Se $v \in \langle e_1, \dots, e_j \rangle$, então $Q_0(v + e_{j+1}) < 0$.

Demonstração.

$$Q_0(v + e_{j+1}) = \int |\nabla v|^2 + \int |\nabla e_{j+1}|^2 + \varepsilon \int v^2 + \varepsilon \int e_{j+1}^2$$
$$-\alpha \int ((v + e_{j+1})^+)^2 - \beta \int ((v + e_{j+1})^-)^2.$$

Então, somando e diminuindo o termo $\beta \int ((v + e_{j+1})^+)^2$ e levando em conta que $\int |\nabla e_{j+1}|^2 = \lambda_{j+1}$ e $\int e_{j+1}^2 = 1$, obtemos:

$$Q_0(v + e_{j+1}) = \int |\nabla v|^2 + \lambda_{j+1} + \varepsilon \int v^2 + \varepsilon + (\beta - \alpha) \int ((v + e_{j+1})^+)^2$$
$$-\beta \int (v + e_{j+1})^2.$$

Como $\int |\nabla v|^2 \leq \lambda_j \int v^2$, conseguimos então:

$$(3.1)'' \quad Q_0(v + e_{j+1}) \leq \lambda_{j+1} - \beta + \varepsilon + (\lambda_j + \varepsilon - \beta) \int v^2 + (\beta - \alpha) \int ((v + e_{j+1})^+)^2.$$

Caso $\lambda_j + \varepsilon - \beta \leq \beta - \alpha$.

Assim sendo, a partir de $(3.1)''$ resulta

$$\begin{aligned} Q_0(v + e_{j+1}) &\leq \lambda_{j+1} - \beta + \varepsilon + (\beta - \alpha)\left[\int v^2 + \int ((v + e_{j+1})^+)^2\right] \leq \\ &\leq \lambda_{j+1} - \beta + \varepsilon + (\beta - \alpha)m = (\alpha - \beta)\left[\frac{\lambda_{j+1} - \beta + \varepsilon}{\alpha - \beta} - m\right] < 0, \end{aligned}$$

por (3.1).

Caso $\lambda_j + \varepsilon - \beta > \beta - \alpha$

Nesta ocasião, usando $(3.1)''$ obtemos

$$\begin{aligned} Q_0(v + e_{j+1}) &\leq \lambda_{j+1} - \beta + \varepsilon + (\lambda_j + \varepsilon - \beta)\left[\int v^2 + \int ((v + e_{j+1})^+)^2\right] \leq \\ &\leq \lambda_{j+1} - \beta + \varepsilon + (\lambda_j + \varepsilon - \beta)m = (\beta - \lambda_j - \varepsilon)\left[\frac{\lambda_{j+1} - \beta + \varepsilon}{\beta - \lambda_j - \varepsilon} - m\right] < 0, \end{aligned}$$

por $(3.1)'$.

Consideremos $H^1(\Omega) = H_1 \oplus H_2$, onde $H_1 = \langle e_1, \ldots, e_j \rangle$, $H_2 = \langle e_{j+1}, \ldots \rangle$.

Definimos

$$M = \{u \in H^1(\Omega) : Q_0'(u).v = 0 \ , \ \forall v \in H_1\}.$$

Proposição 1.5

Dado $u_2 \in H_2$, existe um (único) $u_1 \in H_1$ tal que $u_1 + u_2 \in M$.

Observação: Fica, assim, estabelecida uma correspondência $\gamma_0 : H_2 \to H_1$ tal que $\gamma_0(u_2) + u_2 \in M$.

Em particular, e usando a proposição 1.4, temos

(3.2) $\qquad \gamma_0(e_{j+1}) + e_{j+1} \in M, \qquad e \qquad Q_0(\gamma_0(e_{j+1}) + e_{j+1}) < 0.$

Prova da proposição 1.5.

Em primeiro lugar, notemos que

$\langle u, v\rangle_0 = \int \nabla u.\nabla v + \varepsilon \int uv$ define um produto interno em $H^1(\Omega)$ e dá origem à uma norma, $\|\cdot\|_*$, equivalente com a norma usual de $H^1(\Omega)$ ou seja existem $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ tais que

$$d_1\|u\|^2 \leq \|u\|_*^2 \leq d_2\|u\|^2,$$

onde $\|u\|^2 = \int |\nabla u|^2 + \int u^2$.

Agora, Q_0 pode ser expressado na forma

$$Q_0(u) = \langle u, u\rangle_0 - \alpha \int (u^+)^2 - \beta \int (u^-)^2.$$

Logo,

$$(3.2)' \qquad (-Q_0)'(u).v = -2\langle u, v\rangle_0 + 2\alpha \int u^+ v - 2\beta \int u^- v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Sejam:

• $T : (H^1(\Omega))^* \to H^1(\Omega)$, a aplicação dada pelo teorema de representação de Riesz, isto é,

$$T(\varphi) = v, \quad \text{tal que} \quad \varphi(u) = \langle u, v\rangle_0, \qquad \forall u \in H^1(\Omega).$$

•• $P_1 : H_1 \oplus H_2 \to H_1$, a projeção canônica.

Fixando $u_2 \in H_2$, consideremos a aplicação

$$P_1 \circ T \circ (-Q_0)'(\cdot + u_2) : H_1 \to H_1$$

Provaremos que, se $u_1, \tilde{u}_1 \in H_1$, então

$$(3.3) \quad \langle [P_1 \circ T \circ (-Q_0)'(\cdot + u_2)](u_1) - [P_1 \circ T \circ (-Q_0)'(\cdot + u_2)](\tilde{u}_1), u_1 - \tilde{u}_1\rangle_0 \geq \\ \geq \delta\|u_1 - \tilde{u}_1\|_*^2,$$

para certo $\delta > 0$. Para tanto, usaremos que, se

$$\Gamma(u) = \frac{1}{2}\alpha(u^+)^2 + \frac{1}{2}\beta(u^-)^2 \qquad \text{e} \qquad \gamma(u) = \alpha u^+ - \beta u^-,$$

então, $\forall u, \tilde{u} \in H^1(\Omega)$, tem-se

$$(3.3)' \qquad \frac{\min\{\alpha,\beta\}}{2}(u-\tilde{u})^2 \leq \Gamma(u) - \Gamma(\tilde{u}) - \gamma(\tilde{u})(u-\tilde{u}) \leq \frac{\max\{\alpha,\beta\}}{2}(u-\tilde{u})^2.$$

Escrevendo as desigualdades anteriores com u e $\tilde{u}$ trocados de lugar, somando e levando em conta que no nosso caso $\beta < \alpha$, conseguimos

$$(3.4) \qquad \beta(u-\tilde{u})^2 \leq [\gamma(u) - \gamma(\tilde{u})](u-\tilde{u}) \leq \alpha(u-\tilde{u})^2, \quad \forall u, \tilde{u} \in H^1(\Omega)$$

Agora, partindo do primeiro membro de (3.3) e usando que P_1 é autoadjunta, obtemos

$$\begin{aligned} &\langle P_1(T(-Q_0)'(u_1+u_2))) - P_1(T((-Q_0)'(\tilde{u}_1+u_2))), u_1 - \tilde{u}_1\rangle_0 = \\ = \; &\langle T((-Q_0)'(u_1+u_2)) - T((-Q_0)'(\tilde{u}_1+u_2)), u_1-\tilde{u}_1\rangle_0. \end{aligned}$$

Ora, usando a definição de T e (3.2)', este último produto interno é igual à

$$\begin{aligned} (3.4)' \qquad & (-Q_0)'(u_1+u_2).(u_1-\tilde{u}_1) - (-Q_0)'(\tilde{u}_1+u_2).(u_1-\tilde{u}_1) = \\ &= -2\langle u_1+u_2, u_1-\tilde{u}_1\rangle_0 + 2\alpha\int(u_1+u_2)^+(u_1-\tilde{u}_1) - 2\beta\int(u_1+u_2)^-(u_1-\tilde{u}_1) \\ &+2\langle \tilde{u}_1+u_2, u_1-\tilde{u}_1\rangle_0 - 2\alpha\int(\tilde{u}_1+u_2)^+(u_1-\tilde{u}_1) + 2\beta\int(\tilde{u}_1+u_2)^-(u_1-\tilde{u}_1), \end{aligned}$$

Utilizando as definições de γ e $||\cdot||_*$, o segundo membro de (3.4)' é igual à

$$(3.5) \qquad -2||u_1-\tilde{u}_1||_*^2 + 2\int[\gamma(u_1+u_2) - \gamma(\tilde{u}_1+u_2)](u_1-\tilde{u}_1)$$

Então, empregando (3.4) e o fato que

$$||u||_*^2 \leq (\lambda_j + \varepsilon)\int u^2, \qquad \forall u \in H_1,$$

resulta

$$-2\|u_1-\tilde{u}_1\|_*^2+2\int[\gamma(u_1+u_2)-\gamma(\tilde{u}_1+u_2)](u_1-\tilde{u}_1)\geq$$

$$\geq -2\|u_1-\tilde{u}_1\|_*^2+2\beta\int(u_1-\tilde{u}_1)^2\geq -2\|u_1-\tilde{u}_1\|_*^2+\frac{2\beta}{\lambda_j+\varepsilon}\|u_1-\tilde{u}_1\|_*^2=$$

$$=\frac{2(\beta-\lambda_j-\varepsilon)}{\lambda_j+\varepsilon}\|u_1-\tilde{u}_1\|_*^2.$$

Logo, está provado (3.3) com $\delta=\dfrac{2(\beta-\lambda_j-\varepsilon)}{\lambda_j+\varepsilon}$.

Como, além de (3.3), temos que $P_1\circ T\circ(-Q_0)'(\cdot+u_2)$ é contínua, podemos aplicar o Teorema de Minty [12], para concluir que $P_1\circ T\circ(-Q_0)'(\cdot+u_2)$ é um homeomorfismo.

Em particular, dado $0\in H_1$, existe um (único) $u_1\in H_1$ tal que

$$P_1(T((-Q_0)'(u_1+u_2)))=0, \qquad \text{isto é,}$$
$$T((-Q_0)'(u_1+u_2))\in H_2, \qquad \text{ou seja,}$$
$$(-Q_0)'(u_1+u_2).v=0\ , \qquad \forall v\in H_1.$$

Logo, $(Q_0)'(u_1+u_2).v=0, \qquad \forall v\in H_1$. Portanto, $u_1+u_2\in M$.

Sejam: $z\in\langle e_{j+1},\ldots\rangle$ e $s\leq -k$, onde k vem dado por (W_1).

Definimos $\tilde{\Omega}=\{x\in\Omega : s+z(x)\leq -k\}$

Proposição 1.6. Tem-se

$\limsup\limits_{s\to-\infty}|\Omega\setminus\tilde{\Omega}|=0$, uniformemente para $\|z\|\leq c$.

Prova.

Só precisamos ver o que acontece, quando $s\to-\infty$, com a medida do $\{x\in\Omega : s+z(x)>-k\}$, levando em conta que $\|z\|\leq c$.

Argumentando por absurdo, obtemos sequências $\{s_n\}$ e $\{z_n\}$, tais que $s_n\to-\infty$, $\|z_n\|\leq c$ e chamando

$A_n=\{x\in\Omega : s_n+z_n(x)+k>0\}$, temos

$$(3.5)' \qquad |A_n|\to\mu>0.$$

Seja K_0 = fecho, em $L_2(\Omega)$, das funções $f : \Omega \to I\!R$, não negativas, limitadas (na norma de $L_2(\Omega)$) por $\sqrt{|\Omega|}$. Resulta, então, que K_0 é fracamente compacto em $L_2(\Omega)$.

Por outro lado, denotando por χ_{A_n} a função característica de A_n resulta que $\{\chi_{A_n}\}$ é uma sequência, em K_0.

Portanto, existe $\chi \in K_0$ tal que

$$\chi_{A_n} \rightharpoonup \chi, \quad \text{em} \quad L_2(\Omega). \tag{3.6}$$

Em seguida, consideremos:

- $\varphi_n : L^2(\Omega) \to I\!R$, dada por $\varphi_n(u) = \int \left(1 + \frac{z_n + k}{s_n}\right) u$

•• $\varphi : L^2(\Omega) \to I\!R$, dada por $\varphi(u) = \int u$

Assim, temos que:

(i) φ_n, $\varphi \in (L_2(\Omega))^*$

(ii) $\varphi_n \to \varphi$, em $(L_2(\Omega))^*$

A primeira afirmação é imediata. A segunda segue-se usando os fatos: $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$; $||z_n|| \leq c$, e, a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Vejamos:

$$|\varphi_n(u) - \varphi(u)| = \left| \int \frac{(k + z_n)u}{s_n} \right| \leq \frac{k \int |u|}{|s_n|} + \frac{\int |z_n|\ |u|}{|s_n|} \leq \frac{\text{const.}}{|s_n|} ||u||_{L_2(\Omega)}.$$

Então, tudo indica que podemos aplicar a seguinte propriedade:

Se $x_n \rightharpoonup x$, em um espaço de Banach E, e

$$f_n \to f, \quad \text{em} \quad E^*, \quad \text{então} \quad f_n(x_n) \to f(x). \tag{3.7}$$

Logo, a partir de (3.6) e (ii), utilizando (3.7) segue-se:

$$\varphi_n(\chi_{A_n}) \to \varphi(\chi), \qquad \text{isto é,}$$

$$\int \left(1 + \frac{z_n + k}{s_n}\right) \chi_{A_n} \to \int \chi. \tag{3.8}$$

Mas, como $\left(1+\dfrac{z_n+k}{s_n}\right)\chi_{A_n} \leq 0$, (3.8) permite concluir que $\int \chi \leq 0$. Visto que $\lambda \geq 0$, então, necessariamente $\int \chi = 0$.

Por outro lado, $\varphi(\chi_{A_n}) \to \varphi(\chi)$, ouse seja, $|A_n| \to \int \chi = 0$, contrariando (3.5)'.

Nesta última parte do capítulo, queremos provar que o funcional de Euler-Lagrange associada à (P) satisfaz à condição de "enlace" (L).

O funcional em questão é

$f_t : H^1(\Omega) \longrightarrow I\!R$, dado por:

$f_t(u) = \dfrac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \int F(x,u) - \int hu + t\int u,$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$; $f(x,s) = -\beta s^- + c(s^+)^p + W(x,s)$.

Lema 1.1 Assumindo $(f_0), (W_0), (W_1)$ e (h_0). Se $z \in \langle e_{j+1}, \ldots \rangle$ e $s \leq -k$, então, existem $c_0^* > 0$, $c_1 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} f_t(s+z) - f_t(s) &\geq c_0^* \frac{\lambda_{j+1}-\beta}{2\lambda_{j+1}}||z||^2 - c_1 - (\int h^2)^{1/2}.||z|| \\ &-w(|\Omega \setminus \tilde{\Omega}|).(||z||^\mu + ||z||^{p+1}), \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde a função $w : I\!R^+ \longrightarrow I\!R$ é tal que $\lim_{r \to 0^+} w(r) = 0$.

Prova.

$$\begin{aligned} &f_t(s+z) - f_t(s) = \\ &= \frac{1}{2}\int |\nabla z|^2 - \int F(x,s+z) - \int h(s+z) + t\int (s+z) + \int F(x,s) + \int hs - t\int s = \\ &= \frac{1}{2}\int |\nabla z|^2 - \int F(x,s+z) - \int hz + \int F(x,s) \end{aligned}$$

Logo, por (f_0),

$$\begin{aligned}
f_t|s+z|-f_t(s) &= \frac{1}{2}\int|\nabla z|^2-\frac{\beta}{2}\int((s+z)^-)^2-\frac{c}{p+1}\int((s+z)^+)^{p+1}-\int W(x,s+z)\\
&- \int hz+\frac{\beta}{2}\int s^2+\int W(x,s)\geq\\
&\geq \frac{1}{2}\int|\nabla z|^2-\frac{\beta}{2}\int(s+z)^2-\frac{c}{p+1}\int((s+z)^+)^{p+1}-\int W(x,s+z)-||h||_{L^2}\,||z||\\
&+ \frac{\beta}{2}\int s^2+\int W(x,s)\geq\\
&\geq \frac{1}{2}\int|\nabla z|^2-\frac{\beta}{2}\int z^2-\frac{c}{p+1}\int((s+z)^+)^{p+1}-\int W(x,s+z)-||h||_{L^2}\,||z||-\text{const.}\\
(3.9)'\qquad &\geq c_0^*\frac{\lambda_{j+1}-\beta}{12\lambda_{j+1}}||z||^2-\frac{c}{p+1}\int((s+z)^+)^{p+1}-\int W(x,s+z)-||h||_{L^2}\,||z||-\text{const.}
\end{aligned}$$

Ora, $\displaystyle\int((s+z)^+)^{p+1}=\int_{\Omega\setminus\tilde\Omega}(s+z)^{p+1}+\text{const.}\leq\int_{\Omega\setminus\tilde\Omega}|z|^{p+1}+\text{const.}$
Também,

$$\begin{aligned}
\left|\int W(x,s+z)\right| &= \left|\int_{\tilde\Omega}W(x,s+z)+\int_{\Omega\setminus\tilde\Omega}W(x,s+z)\right|\leq\\
&\leq \text{const.}+\text{const.}\int_{s+z>k}(s+z)^\mu\leq\text{const.}+\text{const.}\int_{\Omega\setminus\tilde\Omega}|z|^\mu
\end{aligned}$$

Assim, obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
\int((s+z)^+)^{p+1} &\leq \text{const.}+\text{const.}||z||_{L_{2^*}}^{p+1}|\Omega\setminus\tilde\Omega|^{\frac{2^*-(p+1)}{2^*}},\\
\left|\int W(x,s+z)\right| &\leq \text{const.}+\text{const.}||z||_{L_{2^*}}^{\mu}|\Omega\setminus\tilde\Omega|^{\frac{2^*-\mu}{2^*}},
\end{aligned}$$

onde $2^*=\dfrac{2N}{N-2}$ (Isto para $N\geq 3$. As estimativas nos casos $N=1,2$, obtém-se analogamente, e em forma mais simples).

Reagrupando as estimativas parciais, voltando à $(3.9)'$, segue-se que

$$\begin{aligned}
f_t(s+z)-f_t(s) &\geq c_0^*\frac{\lambda_{j+1}-\beta}{2\lambda_{j+1}}||z||^2-\text{const.}-||h||_{L_2}||z||\\
&- w(|\Omega\setminus\tilde\Omega|)(||z||^\mu+||z||^{p+1}),
\end{aligned}$$

onde.

$$w(r) = \text{const}.r^{\frac{2^*-(p+1)}{2^*}} + \text{const}.r^{\frac{2^*-\mu}{2^*}}.$$

Logo, (3.9) está provado.

Lema 1.2

Assumindo $(f_0), (W_0), (W_1), (h_0)$. resulta que existe $c_2 > 0$ tal que

$$(3.9)'' \qquad \sup_{v \in \langle e_1, \ldots, e_j \rangle} f_t(s+v) \le f_t(s) + c_2.$$

onde, $t = s\beta$ e $s \le -k$.

Prova. Temos

$$(3.10) \quad f_t(s+v) - f_t(s) = \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2 - \int F(x, s+v) - \int hv + t\int v + \int F(x.s).$$

Por outro lado, utilizando a função auxiliar Q_0 e a definição de Γ, resulta

$$(3.11) \qquad Q_0(s+v) - Q_0(s) = \int |\nabla v|^2 + \varepsilon \int v^2 + 2\varepsilon \int sv - \alpha \int ((s+v)^+)^2$$
$$-\beta \int ((s+v)^-)^2 + \beta \int s^2 = ||v||_*^2 + 2\varepsilon \int sv - 2\int [\Gamma(s+v) - \Gamma(s)].$$

Logo, mediante $(3.3)'$ obtemos

$$(3.12) \qquad Q_0(s+v) - Q_0(s) \le ||v||_*^2 + 2\varepsilon \int sv - \beta \int v^2 - 2\beta \int sv.$$

Também, como $Q_0'(s).v = 2(s,v)_0 - 2\beta \int sv = 2\varepsilon \int sv - 2\beta \int sv$, (3.12) transforma-se em

$$(3.13) \qquad Q_0(s+v) - Q_0(s) \le ||v||_*^2 - \beta \int v^2 + Q_0'(s).v.$$

conseguimos:

$$(3.14) \qquad f_t(s+v) - f_t(s) \leq \frac{(\lambda_j + \varepsilon - \beta)}{2(\lambda_j + \varepsilon)} ||v||_*^2 - \beta \int sv - \int hv + t \int v + \text{const.}$$

Assim, se $t = s\beta$, então (3.14) reduz-se à

$$(3.15) \qquad f_t(s+v) - f_t(s) \leq \frac{(\lambda_j + \varepsilon - \beta)}{2(\lambda_j + \varepsilon)} ||v||_*^2 - \int hv + \text{const.}$$

Como o coeficiente de $||v||_*^2$ é negativo, obtemos, em seguida, $(3.9)''$.

Lema 1.3

Sob as mesmas hipóteses dos lemas 1.1 e 1.2, existem $R_1 > 0$ e $t_0 < 0$ tais que

$$(3.15)' \qquad \inf_{\substack{z \in \langle e_{j+1}, \dots \rangle \\ ||z|| = R_1}} f_t(s+z) > \sup_{v \in \langle e_1, \dots, e_j \rangle} f_t(s+v), \qquad \text{para} \qquad s\beta = t \leq t_0.$$

Prova: Pelo lema 1.1

$$(3.16) \qquad \begin{aligned} f_t(s+z) \geq f_t(s) + a||z||^2 - c_1 - (\int h^2)^{1/2} ||z|| \\ - w(|\Omega \setminus \tilde{\Omega}|).(||z||^\mu + ||z||^{p+1}), \end{aligned}$$

com a e c_1, constantes positivas.

Dado $\delta > 0$ e com c_2, do $(3.9)''$, seja $R_1 > 1$, tal que:

$$(3.17) \qquad aR_1^2 - c_1 - (\int h^2)^{1/2} R_1 > c_2 + 1 + \delta.$$

Mediante a proposição 1.6, podemos afirmar que existe $t_0 < 0$, tal que:

$$(3.18) \qquad t \leq t_0, \qquad \text{e,} \qquad ||z|| \leq R_1 \; \Rightarrow \; w(|\Omega \setminus \tilde{\Omega}|) < \frac{1}{2R_1^{p+1}}.$$

Portanto, para $t \leq t_0$ e $||z|| = R_1$, a partir de (3.16), (3.17) e (3.18), conseguimos

$$f_t(s+z) \geq f_t(s) + aR_1^2 - c_1 - (\int h^2)^{1/2} R_1 - 1 > f_t(s) + c_2 + \delta.$$

Então, utilizando (3.9)", podemos concluir que

$$f_t(s+z) > \sup_{v \in \langle e_1, \ldots, e_j \rangle} f_t(s+v) + \delta. \qquad \forall z \in \langle e_{j+1}, \ldots \rangle, \qquad \text{com} \qquad \|z\| = R_1.$$

Como $\delta > 0$ é arbitrário, temos que (3.15)' é satisfeita.

Lema 1.4 Assumindo as mesmas hipóteses do lema 1.2 e escolhendo $u^* = e_{j+1} + \gamma_0(e_{j+1})$ (Ver (3.2)), temos:

$$\lim_{\substack{\sigma \geq 0 \\ v \in \langle e_1, \ldots, e_j \rangle \\ \|\sigma u^* + v\| \to +\infty}} f_t(s + \sigma u^* + v) = -\infty. \tag{3.19}$$

Prova.

$$\begin{aligned} f_t(s+\sigma u^* + v) \quad = \quad & \frac{1}{2}\int |\nabla(s+\sigma u^* + v)|^2 - \int F(x, s+\sigma u^* + v) - \int h(s+\sigma u^* + v) \\ & + t\int (s+\sigma u^* + v). \end{aligned}$$

Empregando, então, a função auxiliar Q_0, obtemos:

$$\begin{aligned} & f_t(s+\sigma u^* + v) = \frac{1}{2}Q_0(s+\sigma u^* + v) - \frac{\varepsilon}{2}\int (s+\sigma u^* + v)^2 + \frac{\alpha}{2}\int ((s+\sigma u^* + v)^+)^2 \\ & + \frac{\beta}{2}\int ((s+\sigma u^* + v)^-)^2 - \int_{s+\sigma u^* + v \leq -k} F(x, s+\sigma u^* + v) - \int_{-k < s+\sigma u^* + v < k} F(x, s+\sigma u^* + v) \\ & - \int_{s+\sigma u^* + v \geq k} F(x, s+\sigma u^* + v) - \sigma\int hu^* - \int hv + ts|\Omega| + t\sigma\int u^* + t\int v. \end{aligned}$$

Utilizando (W_1) e (3.13) (com σu^* no lugar de s, e, $s+v$ no lugar de v), conseguimos

$$f_t(s+\sigma u^* + v) \leq \frac{1}{2}Q_0(\sigma u^*) + \frac{1}{2}\|s+v\|_*^2 - \frac{\beta}{2}\int (s+v)^2 +$$

Agora, usando (3.10) e (3.11) segue-se

$$f_t(s+v)-f_t(s)=\frac{1}{2}(Q_0(s+v)-Q_0(s))-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2-\varepsilon\int sv+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+$$
$$+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2-\int F(x,s+v)-\int hv+t\int v+\int F(x,s).$$

Então, utilizando (3.12) e o fato que
$||v||_*^2=\int|\nabla v|^2+\varepsilon\int v^2\leq(\lambda_j+\varepsilon)\int v^2$, obtemos:

$$f_t(s+v)-f_t(s)\leq\frac{1}{2}||v||_*^2+\varepsilon\int sv-\frac{\beta}{2}\int v^2-\beta\int sv-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2-\varepsilon\int sv+$$
$$+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2-\int F(x,s+v)-\int hv+t\int v+\int F(x,s)\leq$$
$$\leq\frac{(\lambda_j+\varepsilon-\beta)}{2(\lambda_j+\varepsilon)}||v||_*^2-\beta\int sv-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2$$
$$-\int F(x,s+v)-\int hv+t\int v+\int F(x,s).$$

Em seguida, empregando (f_0) e (W_1), chegamos à

$$f_t(s+v)-f_t(s)\leq\frac{(\lambda_j+\varepsilon-\beta)}{2(\lambda_j+\varepsilon)}||v||_*^2-\beta\int sv-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+$$
$$+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2-\int_{s+v\leq-k}F(x,s+v)-\int_{-k<s+v<k}F(x,s+v)$$
$$-\int_{s+v\geq k}F(x,s+v)-\int hv+t\int v+\frac{\beta}{2}\int s^2+\text{const.}\leq$$
$$\leq\frac{(\lambda_j+\varepsilon-\beta)}{2(\lambda_j+\varepsilon)}||v||_*^2-\beta\int sv-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2$$
$$-\frac{\beta}{2}\int_{s+v\leq-k}(s+v)^2+\text{const.}-\frac{c}{p+1}\int_{s+v\geq k}(s+v)^{p+1}+\text{const.}+\text{const.}\int_{s+v\geq k}(s+v)^\mu$$
$$-\int hv+t\int v+\frac{\beta}{2}\int s^2+\text{const.}$$

Levando, então, em consideração que:

- $\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2-\frac{c}{p+1}\int_{s+v\geq k}(s+v)^{p+1}+\text{const.}\int_{s+v\geq k}(s+v)^\mu\leq\text{const.}$

•• $\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int_{s+v\leq-k}(s+v)^2\leq\text{const.}$

Agora, usando (3.10) e (3.11) segue-se

$$f_t(s+v)-f_t(s)=\frac{1}{2}(Q_0(s+v)-Q_0(s))-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2-\varepsilon\int sv+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+$$
$$+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2-\int F(x,s+v)-\int hv+t\int v+\int F(x,s).$$

Então, utilizando (3.12) e o fato que
$||v||_*^2=\int|\nabla v|^2+\varepsilon\int v^2\leq(\lambda_j+\varepsilon)\int v^2$, obtemos:

$$f_t(s+v)-f_t(s)\leq\frac{1}{2}||v||_*^2+\varepsilon\int sv-\frac{\beta}{2}\int v^2-\beta\int sv-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2-\varepsilon\int sv+$$
$$+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2-\int F(x,s+v)-\int hv+t\int v+\int F(x,s)\leq$$
$$\leq\frac{(\lambda_j+\varepsilon-\beta)}{2(\lambda_j+\varepsilon)}||v||_*^2-\beta\int sv-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2$$
$$-\int F(x,s+v)-\int hv+t\int v+\int F(x,s).$$

Em seguida, empregando (f_0) e (W_1), chegamos à

$$f_t(s+v)-f_t(s)\leq\frac{(\lambda_j+\varepsilon-\beta)}{2(\lambda_j+\varepsilon)}||v||_*^2-\beta\int sv-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+$$
$$+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2-\int_{s+v\leq-k}F(x,s+v)-\int_{-k<s+v<k}F(x,s+v)$$
$$-\int_{s+v\geq k}F(x,s+v)-\int hv+t\int v+\frac{\beta}{2}\int s^2+\text{const.}\leq$$
$$\leq\frac{(\lambda_j+\varepsilon-\beta)}{2(\lambda_j+\varepsilon)}||v||_*^2-\beta\int sv-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2$$
$$-\frac{\beta}{2}\int_{s+v\leq-k}(s+v)^2+\text{const.}-\frac{c}{p+1}\int_{s+v\geq k}(s+v)^{p+1}+\text{const.}+\text{const.}\int_{s+v\geq k}(s+v)^{\mu}$$
$$-\int hv+t\int v+\frac{\beta}{2}\int s^2+\text{const.}$$

Levando, então, em consideração que:

- $\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2-\frac{c}{p+1}\int_{s+v\geq k}(s+v)^{p+1}+\text{const.}\int_{s+v\geq k}(s+v)^{\mu}\leq\text{const.}$
- • $\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int_{s+v\leq-k}(s+v)^2\leq\text{const.}$

Agora, usando (3.10) e (3.11) segue-se

$$f_t(s+v)-f_t(s)=\frac{1}{2}(Q_0(s+v)-Q_0(s))-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2-\varepsilon\int sv+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+$$
$$+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2-\int F(x,s+v)-\int hv+t\int v+\int F(x,s).$$

Então, utilizando (3.12) e o fato que
$\|v\|_*^2=\int|\nabla v|^2+\varepsilon\int v^2\leq(\lambda_j+\varepsilon)\int v^2$, obtemos:

$$f_t(s+v)-f_t(s)\leq\frac{1}{2}\|v\|_*^2+\varepsilon\int sv-\frac{\beta}{2}\int v^2-\beta\int sv-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2-\varepsilon\int sv+$$
$$+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2-\int F(x,s+v)-\int hv+t\int v+\int F(x,s)\leq$$
$$\leq\frac{(\lambda_j+\varepsilon-\beta)}{2(\lambda_j+\varepsilon)}\|v\|_*^2-\beta\int sv-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2$$
$$-\int F(x,s+v)-\int hv+t\int v+\int F(x,s).$$

Em seguida, empregando (f_0) e (W_1), chegamos à

$$f_t(s+v)-f_t(s)\leq\frac{(\lambda_j+\varepsilon-\beta)}{2(\lambda_j+\varepsilon)}\|v\|_*^2-\beta\int sv-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+$$
$$+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2-\int_{s+v\leq -k}F(x,s+v)-\int_{-k<s+v<k}F(x,s+v)$$
$$-\int_{s+v\geq k}F(x,s+v)-\int hv+t\int v+\frac{\beta}{2}\int s^2+\text{const.}\leq$$
$$\leq\frac{(\lambda_j+\varepsilon-\beta)}{2(\lambda_j+\varepsilon)}\|v\|_*^2-\beta\int sv-\frac{\varepsilon}{2}\int v^2+\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2+\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int s^2$$
$$-\frac{\beta}{2}\int_{s+v\leq -k}(s+v)^2+\text{const.}-\frac{c}{p+1}\int_{s+v\geq k}(s+v)^{p+1}+\text{const.}+\text{const.}\int_{s+v\geq k}(s+v)^{\mu}$$
$$-\int hv+t\int v+\frac{\beta}{2}\int s^2+\text{const.}$$

Levando, então, em consideração que:

- $\frac{\alpha}{2}\int((s+v)^+)^2-\frac{c}{p+1}\int_{s+v\geq k}(s+v)^{p+1}+\text{const.}\int_{s+v\geq k}(s+v)^{\mu}\leq\text{const.}$
- •• $\frac{\beta}{2}\int((s+v)^-)^2-\frac{\beta}{2}\int_{s+v\leq -k}(s+v)^2\leq\text{const.}$

$$+\frac{1}{2}Q_0'(\sigma u^*).(s+v) - \frac{\varepsilon}{2}\int (s+\sigma u^*+v)^2 + \frac{\alpha}{2}\int ((s+\sigma u^*+v)^+)^2 + \frac{\beta}{2}\int ((s+\sigma u^*+v)^-)^2$$
$$-\frac{\beta}{2}\int_{s+\sigma u^*+v\leq -k}(s+\sigma u^*+v)^2 + \text{const.} - \frac{c}{p+1}\int_{s+\sigma u^*+v\geq k}(s+\sigma u^*+v)^{p+1} +$$
$$\text{const.}\int_{s+\sigma u^*+v\geq k}(s+\sigma u^*+v)^{\mu} - \sigma\int hu^* - \int hv + ts|\Omega| + t\sigma\int u^* + t\int v.$$

Então, tendo presente que $Q_0(\sigma u^*) = \sigma^2 Q_0(u^*)$, que $Q_0'(\sigma u^*) = \sigma Q_0'(u^*)$, e que. $Q_0'(u^*).(s+v) = 0$ (pois $u^* \in M$, ver (3.2)), chegamos à:

$$f_t(s+\sigma u^*+v) \leq \frac{1}{2}\sigma^2 Q_0(u^*) + \frac{1}{2}\|v\|_*^2 + \frac{\varepsilon}{2}\int s^2 + \int sv - \frac{\beta}{2}\int (s+v)^2$$
$$-\frac{\varepsilon}{2}\int (s+\sigma u^*+v)^2 + \frac{\alpha}{2}\int ((s+\sigma u^*+v)^+)^2 + \frac{\beta}{2}\int ((s+\sigma u^*+v)^-)^2$$
$$-\frac{\beta}{2}\int_{s+\sigma u^*+v\leq -k}(s+\sigma u^*+v)^2 + \text{const.} - \frac{c}{p+1}\int_{s+\sigma u^*+v\geq k}(s+\sigma u^*+v)^{p+1} +$$
$$\text{const.}\int_{s+\sigma u^*+v\geq k}(s+\sigma u^*+v)^{\mu} - \sigma\int hu^* - \int hv + ts|\Omega| + t\sigma\int u^* + t\int v.$$

Tendo em mente que:

- $\|v\|_*^2 \leq (\lambda_j+\varepsilon)\int v^2$

•• $\frac{\alpha}{2}\int ((s+\sigma u^*+v)^+)^2 - \frac{c}{p+1}\int_{s+\sigma u^*+v\geq k}(s+\sigma u^*+v)^{p+1} +$

$+\ \text{const.}\int_{s+\sigma u^*+v\geq k}(s+\sigma u^*+v)^{\mu} \leq \text{const.}$

••• $-\frac{\beta}{2}\int ((s+\sigma u^*+v)^-)^2 - \frac{\beta}{2}\int_{s+\sigma u^*+v\leq -k}(s+\sigma u^*+v)^2 \leq \text{const.},$

obtemos

$$f_t(s+\sigma u^*+v) \leq \frac{1}{2}\sigma^2 Q_0(u^*) + \frac{\lambda_j+\varepsilon-\beta}{2(\lambda_j+\varepsilon)}\|v\|_*^2 + \frac{\varepsilon}{2}\int s^2 + \int sv$$
$$-\beta\int sv - \sigma\int hu^* - \int hv + ts|\Omega| + t\sigma\int u^* + t\int v + \text{const.}$$

Denotemos por:

$$A_1(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 Q_0(u^*) - \sigma\int hu^* + t\sigma\int u^*$$

$$A_2(v) = \frac{\lambda_j + \varepsilon - \beta}{2(\lambda_j + \varepsilon)} \|v\|_*^2 + \int sv - \beta \int sv - \int hv + t \int v$$

$$A_3 = \frac{\varepsilon}{2} \int s^2 + ts|\Omega| + \text{const.}$$

Então, podemos escrever:

$$f_t(s + \sigma u^* + v) \le A_1(\sigma) + A_2(v) + A_3.$$

A seguir, vejamos que dado $\widetilde{M} < 0$, existe $\rho_0 > 0$ tal que para $\rho \ge \rho_0$, tem-se

$$f_t(s + \sigma u^* + v) < \widetilde{M}, \tag{3.20}$$

onde, $\sigma \ge 0$ e $v \in \langle e_1, \dots, e_j \rangle$ cumprem $\|\sigma u^* + v\| = \rho$.

Notemos que, como $Q_0(u^*) < 0$ (ver (3.2)), então:

$$\lim_{\sigma \to +\infty} A_1(\sigma) = -\infty$$

Também, $\dfrac{\lambda_j + \varepsilon - \beta}{2(\lambda_j + \varepsilon)} < 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{\|v\|_* \to +\infty} A_2(v) = -\infty$

Sejam: $M_0 = \sup\limits_{\sigma \ge 0} A_1(\sigma)$; $M_1 = \sup\limits_{v \in \langle e_1, \dots, e_j \rangle} A_2(v)$.

Então, dado $\widetilde{M} < 0$, consideremos:

(3.21) σ_0 tal que: $\sigma\|e_{j+1}\| \ge \sigma_0 \;\Rightarrow\; A_1(\sigma) + M_1 + A_3 < \widetilde{M}$

(3.22) k_0 tal que: $\|v\|_* \ge k_0 - \dfrac{\sigma_0 \|\gamma_0(e_{j+1})\|_*}{\|e_{j+1}\|} \;\Rightarrow\; A_2(v) + M_0 + A_3 < \widetilde{M}$.

Agora, em $\mathbb{R}e_{j+1} \oplus \langle e_1, \dots, e_j \rangle$ consideremos a norma:

$$|||\lambda e_{j+1} + v||| = |\lambda| \, \|e_{j+1}\| + \|v\|_*.$$

Escolhamos $\rho_0 = \sigma_0 + k_0$.

Logo, se $|||\sigma u^* + v||| = \rho \ge \rho_0$, então:

$$\sigma\|e_{j+1}\| \ge \sigma_0 \qquad \text{ou} \qquad \|\sigma\gamma_0(e_{j+1}) + v\|_* \ge k_0$$

No primeiro caso, usamos (3.21):

$$f_t(s+\sigma u^*+v)\leq A_1(\sigma)+A_2(v)+A_3\leq A_1(\sigma)+M_1+A_3<\widetilde{M}$$

No segundo caso, resta considerar a situação:

$$||\sigma\gamma_0(e_{j+1})+v||_*\geq k_0,\quad e,\quad \sigma||e_{j+1}||<\sigma_0.$$

Mas então,

$$||v||_*\geq||\sigma\gamma_0(e_{j+1})+v||_*-||\sigma\gamma_0(e_{j+1})||_*\geq k_0-\frac{\sigma_0||\gamma_0(e_{j+1})||_*}{||e_{j+1}||}$$

Podemos, assim, usar (3.22) e obter

$$f_t(s+\sigma u^*+v)\leq A_1(\sigma)+A_2(v)+A_3\leq M_0+A_2(v)+A_3<\widetilde{M}.$$

Conclusão: se $|||\sigma u^*+v|||=\rho\geq\rho_0$, então

$$f_t(s+\sigma u^*+v)<\widetilde{M}.$$

Como $|||\cdot|||$ é equivalente à $||\cdot||$, em $\mathbb{R}e_{j+1}\oplus\langle e_1,\ldots,e_j\rangle$, fica provado (3.20), e, em consequência, está demonstrado (3.19).

Lema 1.5 Nas mesmas hipóteses do lema 1.4, tem-se que, para $t<0$ (grande em valor absoluto) f_t satisfaz a "condição de enlace" (L), com respeito à $u_0=\dfrac{t}{\beta}=s$, $H_1=\langle e_1,\ldots,e_j\rangle$, $H_2=\langle e_{j+1},\ldots\rangle$.

Prova.

Pelo lema 1.3, existem $\rho_2>0$ e $t_1<0$ tais que

$$(3.23)\qquad \inf_{\substack{z\in\langle e_{j+1},\ldots\rangle\\ ||z||=\rho_2}} f_t(s+z)>\sup_{v\in\langle e_1,\ldots,e_j\rangle} f_t(s+v),\qquad \text{para}\quad t=s\beta\leq t_1.$$

Por outro lado, pelo lema 1.4, podemos achar $\rho_1>2\rho_2$, tal que:

$$
\sup_{\substack{\sigma\geq 0 \\ v\in\langle e_1,\dots,e_j\rangle \\ \|\sigma u^*+v\|=\rho_1}} f_t(s+\sigma u^*+v) \leq \sup_{v\in\langle e_1,\dots,e_j\rangle} f_t(s+v) \tag{3.24}
$$

Então, por (3.23) e (3.24), temos que

$$
\sup_{\substack{\sigma\geq 0 \\ v\in\langle e_1,\dots,e_j\rangle \\ \|\sigma u^*+v\|=\rho_1}} f_t(s+\sigma u^*+v) \leq \inf_{\substack{z\in\langle e_{j+1},\dots\rangle \\ \|z\|=\rho_2}} f_t(s+z) \tag{3.25}
$$

com $t = s\beta \leq t_1$. Por outro lado, $u^* = e_{j+1} + \gamma_0(e_{j+1})$.

Portanto, $\sigma u^* + v = \sigma e_{j+1} + \sigma\gamma_0(e_{j+1}) + v \in \mathbb{R}^+ e_{j+1} \oplus H_1$.

Sejam, então:

$$
\begin{aligned}
e_0 &= e_{j+1}, \\
u_0 &= s = \frac{t}{\beta}, \\
B_1 &= \{u \in \mathbb{R}^+ e_0 \oplus H_1 : \|u\| < \rho_1\} \\
B_2 &= \{u \in H_2 : \|u\| < \rho_2\}.
\end{aligned}
$$

Em particular

$$
\partial B_1 = \{u \in \mathbb{R}^+ e_0 \oplus H_1 : \|u\| = \rho_1\} \cup \{u \in H_1 : \|u\| \leq \rho_1\}.
$$

Então, levando em conta (3.23) e (3.25), podemos concluir:

$$
\sup_{u_0+\partial B_1} f_t < \inf_{u_0+\partial B_2} f_t.
$$

Logo, (L) é satisfeita para $t \leq t_1 < 0$.

Em resumo, o funcional f_t satisfaz (P.S.), cumpre a condição (L) e, por (f_0), (W_0) e (W_1), é de classe C^1, com:

$$
f_t'(u).v = \int \nabla u.\nabla v - \int f(x,u)v - \int hv + t\int v.
$$

Então, uma aplicação direta do **Teorema 1.2**, produz o nosso resultado principal (**Teorema 1.1**).

Capítulo 2

Problemas elípticos assintoticamente lineares em $-\infty$ e superlineares em $+\infty$.

Introdução.

O capítulo está dividido em duas seções. Na seção 1, estudamos o problema

$$(P_h) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + h(x), \ x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ , \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $I\!R^N (N \geq 1)$ com fronteira $\partial\Omega$ suave e f satisfaz

(f_0) $\quad f : \overline{\Omega} \times I\!R \to I\!R \quad$ é contínua.

(f_1) $\quad \lim\limits_{s \to -\infty} [f(x,s) - \lambda s] = q(x), \quad$ com $q \in C(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{cases} \lambda > 0 & \text{se } N \geq 2 \\ \lambda > \dfrac{\pi^2}{4} & \text{se } N = 1. \end{cases}$$

(f_2) $\quad$ Existem $s_0 > 0$ e $\theta \in (0, 1/2)$ tais que

$$0 < F(x,s) \leq \theta s f(x,s), \qquad \forall x \in \overline{\Omega}, \qquad \forall s \geq s_0,$$

onde $\quad F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,\tau)d\tau.$

Por outro lado, a função $h : \overline{\Omega} \to I\!R$ verifica uma condição de ortogonalidade $\int h = 0$, e, $||h||_{L^2} < M$, para certa constante $M > 0$.

Além disso, assumiremos

i) uma condição local no zero

(f_3) Existem $\varepsilon_0 > 0$ e $\alpha \in (0, \lambda_1)$ tais que

$$\frac{f(x,s)}{s} \leq \alpha, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall s \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \setminus \{0\},$$

onde, λ_1 é o primeiro autovalor positivo de $(-\Delta; H^1(\Omega))$.

ii) No caso $N \geq 2$:

(f_4) $\quad \limsup_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s^\sigma} = r(x)$, com $r \in C(\overline{\Omega})$, e

onde $\sigma \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$ se $N \geq 3$ $\quad$ e $\quad \sigma \in (1, +\infty)$ se $N = 2$.

iii) Uma condição sobre a primitiva da f:

(f_5) $\quad F(x,s) \geq 0$, $\quad \forall x \in \overline{\Omega}$, $\quad \forall s \in I\!R$.

O problema (P_h) é tratado variacionalmente e nossos principais resultados neste capítulo são: **Teorema 2.2** para o caso $N \geq 2$ (ver página 41), e **Teorema 2.3** para o caso $N = 1$ (ver página 47). Em ambos os casos conclue-se que (P_h) possui pelo menos uma solução não trivial.

Devemos assinalar que Arcoya-Villegas [1], consideram o problema (P_h), no caso $h = 0$, supondo $q = 0$, além da condição: $\frac{f(x,s)}{s} > 0$, $\quad \forall x \in \overline{\Omega}$, $\quad \forall s \neq 0$, no lugar da (f_5). Nesse caso, eles provam, por métodos análogos aos que usaremos, que (P_0) possui, pelo menos uma solução não trivial. Assim, esse resultado está contido no nosso. Também queremos indicar que Arcoya-Villegas [1] foram motivados pelo trabalho de De Figueiredo e Ruf [9], onde eles estudam o problema:

$$(*) \qquad \begin{cases} -u'' = f(x,u) + h(x) \equiv \lambda u + g(x,u) + h(x), & x \in (0,1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Usando o Teorema do Passo da Montanha, ditos autores provam a existência de uma solução de $(*)$, se f satisfaz: $(f_0), (f_2)$, e $\lim_{s \to -\infty} \frac{f(x,s)}{s} = \lambda \in \left(0, \frac{\pi^2}{4}\right)$. Isso, porém, para todo $\quad h \in L_2(0,1)$. (No cap. 3, faremos nova referência à $(*)$).

Na seção 2, aproveitamos a metodologia empregada na seção 1, para estudar problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + f(x,u) + h(x), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde: $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$, com $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots$ valores próprios de $(-\Delta; H_0^1(\Omega))$.

Provaremos que, sob condições para f, análogas às consideradas na seção 1 e agora, com h continua, satisfazendo uma relação de ortogonalidade e com $||h||_{L_2} < M_0$ (certa constante positiva), o problema em questão, possui, pelo menos, uma solução não trivial.

Em ambas as seções, a ferramenta básica é uma especie de generalização do Teorema do Passo da Montanha, a qual indicamos a seguir

Teorema 2.1 [Silva E. [25]]:

Seja $X = X_1 \oplus X_2$, um espaço de Banach, real, com $\dim X_1 < +\infty$.

Se $I \in C^1(X, I\!R)$ satisfaz (P.S.) e

(I_1) $\quad I(u) \leq 0, \qquad \forall u \in X_1,$

(I_2) $\quad$ Existe $\rho > 0$ tal que $I(u) \geq 0, \qquad \forall u \in \partial B_\rho(0) \cap X_2,$

(I_3) $\quad$ Existem $e \in X_2 \setminus \{0\}$ e $\beta_0 \geq 0$ tais que:

$$I(u) \leq \beta_0 \,, \qquad \forall u = v + te, \qquad \text{com } \; v \in X_1, \;\; t > 0.$$

Então: I possui pelo menos um ponto crítico em X diferente de zero.

Seção 1

Problema de Neumann assintoticamente linear em $-\infty$ e superlinear em $+\infty$.

Primeira parte: Caso $N \geq 2$.

Consideraremos o problema:

$$(P_h) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) + h(x), \quad x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde as condições para f têm sido indicadas na introdução do Capítulo.

Antes de especificar as condições para h, devemos fazer as seguintes observações:

• Chamando

$$\begin{aligned} X_1 &= \{\text{funções constantes}\}, \\ X_2 &= \{u \in H^1(\Omega) : \int u = 0\}, \end{aligned}$$

temos $\quad H^1(\Omega) = X_1 \oplus X_2$

•• A norma em $H^1(\Omega)$ é a usual $||u||^2 = \int |\nabla u|^2 + \int u^2$.

Sabemos que, em X_2, $(\int |\nabla u|^2)^{1/2}$ define uma norma equivalente à $||\cdot||$, ou seja, existem $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ tais que

$$(1) \qquad c_1||u||^2 \leq \int |\nabla u|^2 \leq c_2||u||^2 \quad , \quad \forall u \in X_2.$$

••• Como $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_{\sigma+1}(\Omega)$, segue-se que existe $k_0 > 0$ tal que

$$(2) \qquad ||u||_{L_{\sigma+1}} \leq k_0||u|| \, , \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

•••• Levando em conta $(f_0), (f_1), (f_2)$ e (f_4), podemos afirmar que está bem definido o número real positivo:

$$a_0 = k_0^{\sigma+1} \sup_{|s| \geq \varepsilon_0} \frac{F(x,s)}{|s|^{\sigma+1}},$$

com $\varepsilon_0 > 0$ dado em (f_3).

Suporemos então

(h_1) $\quad h : \Omega \to I\!R$, $\int h = 0$, e, $\int h^2 < M^2$, com

$$(3) \qquad M = \frac{\sigma - 1}{a_0^{1/\sigma-1}} \left(\frac{b_0}{\sigma}\right)^{\sigma/\sigma-1}, \qquad \text{onde} \qquad b_0 = \frac{c_1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right).$$

O funcional de Euler-Lagrange correspondente ao problema (P_h) é dado por

$$I_h : H^1(\Omega) \to I\!R$$
$$I_h(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \int F(x,u) - \int hu.$$

A partir de $(f_4), (f_1), (f_0)$, segue-se que $I_h \in C^1(H^1(\Omega), I\!R)$, com

$$I_h'(u)v = \int \nabla u . \nabla v - \int f(x,u)v - \int hv, \qquad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

(Logo, os pontos críticos de I_h são soluções de (P_h)).

Teorema 2.2. Assumindo (f_0), ——, (f_5), (h_1), temos que (P_h) possui pelo menos uma solução não trivial.

Prova: o resultado seguir-se-á como uma aplicação direta do **teorema 2.1.**

Para conferir as exigências de dito teorema, vejamos os dois lemas seguintes.

Lema 2.1 $(f_0), (f_1), (f_2) \Rightarrow I_h$ satisfaz (P.S.).

Prova: trata-se do lema 1.1 de [1].

Lema 2.2 (f_0), ——, (f_5), $(h_1) \Rightarrow I_h$ satisfaz $(I_1), (I_2), (I_3)$.

Verificação de (I_1).

Seja $k \in X_1$. Então, usando (h_1) e (f_5), segue-se:
$I_h(k) = -\int F(x,k) - k\int h = -\int F(x,k) \leq 0.$

Verificação de (I_2).

Seja $u \in X_2$.

Mediante a definição de a_0, e, (f_3), obtemos:

$$I_h(u) \geq \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \frac{\alpha}{2}\int u^2 - \frac{a_0}{k_0^{\sigma+1}}\int |u|^{\sigma+1} - \int hu$$

Portanto, usando (2), a desigualdade de Cauchy-Schwarz, (h_1), e, o fato que $\int |\nabla u|^2 \geq \lambda_1 \int u^2$ resulta

$$(4) \qquad I_h(u) \geq \frac{c_1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)||u||^2 - a_0||u||^{\sigma+1} - M||u||.$$

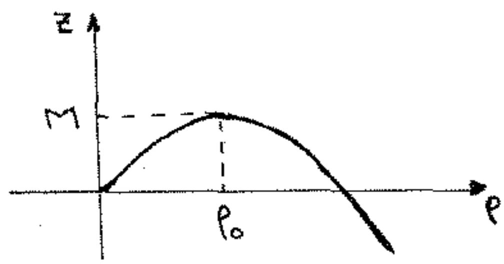
Logo, chamando $||u|| = \rho$ e $b_0 = \frac{c_1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$, o segundo membro de (4) é:

$$b_0\rho^2 - a_0\rho^{\sigma+1} - M\rho.$$

Considerando a função $z : [0, +\infty) \to I\!R$, dada por:

$$z(\rho) = b_0\rho - a_0\rho^{\sigma},$$

o gráfico de z é como na figura:



em que $\rho_0 = \left(\frac{b_0}{a_0\sigma}\right)^{1/\sigma-1}$, e, $z(\rho_0) = M$.

Voltando, então, à (4), e, tomando $||u|| = \rho_0$, temos:

$$I_h(u) \geq \rho_0(z(\rho_0) - M) = 0.$$

Logo, $I_h(u) \geq 0$, $\forall u \in \partial B_{\rho_0}(0) \cap X_2$.

Verificação de (I_3).

Seja $e \in X_2$, não limitado superiormente (tal e existe, pois $H^1(\Omega)$ não está imerso em $L_\infty(\Omega)$, para $N \geq 2$).

Denotemos por:

$$(5) \qquad \lambda_* = \frac{\int |\nabla e|^2}{\int e^2}.$$

Observemos que, trocando e por te, com $t > 0$ pequeno, podemos assumir, sem perder a generalidade, que:

$$(6) \qquad (\lambda_* - \lambda) \int e^2 < \lambda |\Omega|.$$

Por outro lado, usando (f_2), obtemos:

Existem: $k_1 > 0$, $s_1 \geq s_0$, tais que:

$$(7) \qquad F(x,s) \geq \frac{\lambda}{2} s^2 + k_1 s^{1/\theta}, \qquad \forall s \geq s_1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Além disso, (f_0) e (f_1) $\Rightarrow$ Existem: $k_2 > 0, k_1^* > 0$, tais que,

$$(8) \qquad F(x,s) \geq \frac{\lambda s^2}{2} - k_2 |s| - k_1^*, \qquad \forall s \leq s_1, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Seja $u = k + te$, com $k \in X_1$, $t > 0$.

Utilizando (h_1), (5), (7), e, (8), conseguimos:

$$I_h(k+te) = \frac{1}{2} t^2 \int |\nabla e|^2 - \int F(x, k+te) - t \int he =$$

$$= \frac{t^2 \lambda_*}{2} \int e^2 - \int_{k+te \leq s_1} F(x, k+te) - \int_{k+te > s_1} F(x, k+te) - t \int he \leq$$

$$\leq \frac{t^2 \lambda_*}{2} \int e^2 + k_2 \int_{k+te \leq s_1} |k+te| + k_1^* |\Omega| - \frac{\lambda}{2} \int (k+te)^2 - k_1 \int_{k+te > s_1} (k+te)^{1/\theta} + tM (\int e^2)^{1/2}.$$

Assim, chegamos à:

$$(9) \qquad I_h(k+te) \leq \frac{t^2(\lambda_* - \lambda)}{2} \int e^2 + k_2 t \int |e| - k_1 \int_{k+te > s_1} (k+te)^{1/\theta} +$$

$$+ k_2 |k| \, |\Omega| - \frac{\lambda}{2} |\Omega| k^2 + tM (\int e^2)^{1/2} + k_1^* |\Omega|.$$

Em particular.

$$(10)\qquad I_h(k+t\epsilon) \le \frac{t^2(\lambda_*-\lambda)}{2}\int \epsilon^2 + k_2 t\int|\epsilon| + k_2|k|\ |\Omega| - \frac{\lambda}{2}|\Omega|k^2$$
$$+tM(\int \epsilon^2)^{1/2} + k_1^*|\Omega|.$$

1º caso: $\lambda_* - \lambda < 0$.

Notando que, em (10), os coeficientes de t^2 e k^2 são negativos, podemos afirmar que existe $\beta_1 \in I\!R$, dado por: β_1 = máximo do 2º membro de (10), quando (k,t) varia em $I\!R \times I\!R^+$.

Na verdade, este $\beta_1 > 0$ (Para $k = 0$ e $t = \dfrac{k_2\int|\epsilon| + M(\int\epsilon^2)^{1/2}}{(\lambda-\lambda_*)\int\epsilon^2}$, resulta positivo o 2º membro de (10)). Assim, temos:

$$(11)\qquad I_h(k+t\epsilon) \le \beta_1, \qquad \text{com} \quad \beta_1 \in (0,+\infty).$$

2º caso: $\lambda_* - \lambda \ge 0$, e. $k + t \le s_1$

A partír de (10) obtemos:

$$I_h(k+t\epsilon) \le \frac{(s_1-k)^2}{2}(\lambda_*-\lambda)\int \epsilon^2 + k_2|k|\ |\Omega| + k_2(s_1-k)\int|\epsilon| - \frac{\lambda}{2}|\Omega|k^2 +$$
$$+k_1^*|\Omega| + (s_1-k)M(\int\epsilon^2)^{1/2} =$$
$$= [(\lambda_*-\lambda)\int\epsilon^2 - \lambda|\Omega|]\frac{k^2}{2} + k_2|k|\ |\Omega| + k_2(s_1-k)\int|\epsilon| - ks_1(\lambda_*-\lambda)\int\epsilon^2 +$$
$$+\frac{s_1^2(\lambda_*-\lambda)}{2}\int\epsilon^2 + (s_1-k)M(\int\epsilon^2)^{1/2} + k_1^*|\Omega|.$$

Como (6) implica que o coeficiente de k^2 é negativo, concluimos, em forma analoga ao caso anterior, que:

$$(12)\qquad \text{Existe} \quad \beta_2 \in I\!R\ :\ I_h(k+t\epsilon) \le \beta_2$$

3º caso: $\lambda_* - \lambda \ge 0$, e. $k + t > s_1$.

Seja $\Omega_1 = \{x \in \Omega : e(x) > 1\}$.

Logo, $|\Omega_1| > 0$. Também, se $x \in \Omega_1$, então:

$$k + te(x) > k + t > s_1.$$

Então, empregando (9) tem-se:

$$(12) \qquad I_h(k+te) \le \frac{t^2}{2}(\lambda_* - \lambda)\int e^2 + k_2|k|\,|\Omega| + k_2 t\int |e| - \frac{\lambda}{2}|\Omega|k^2$$
$$-k_1(k+t)^{1/\theta}.|\Omega_1| + tM(\int e^2)^{1/2} + k_1^*|\Omega| =$$
$$= [(\lambda_* - \lambda)\int e^2 - \lambda|\Omega|]\frac{k^2}{2} + k_2(k+t)\int |e| + k_2|k|\,|\Omega| - k_2 k\int |e| +$$
$$+\frac{1}{2}(k+t)^2(\lambda_* - \lambda)\int e^2 - k(k+t)(\lambda_* - \lambda)\int e^2 - k_1(k+t)^{1/\theta}.|\Omega_1| +$$
$$+tM(\int e^2)^{1/2} + k_1^*|\Omega|$$

Logo, fazendo $k + t = s$, obtemos:

$$I_h(k+te) \le -k_3k^2 + k_4s^2 + k_5s|k| + k_6s + k_7|k| - k_8s^{1/\theta} + k_1^*|\Omega|,$$

onde: $k_3 > 0$, e, $k_8 > 0$.

Portanto,

$$I_h(k+te) \le -\left[\sqrt{k_3}|k| - \frac{k_7 + k_5 s}{2\sqrt{k_3}}\right]^2 + \frac{(k_7 + k_5 s)^2}{4k_3} + k_4s^2 + k_6 s$$
$$-k_8s^{1/\theta} + k_1^*|\Omega| \le \frac{(k_7 + k_5 s)^2}{4k_3} + k_4s^2 + k_6s - k_8s^{1/\theta} + k_1^*|\Omega| =$$
$$= k_9s^2 + k_{10}s + k_{11} - k_8s^{1/\theta}.$$

Como: $\frac{1}{\theta} > 2$, $k_8 > 0$, e, $s > s_1$, concluimos que,

(13) existe $\beta_3 \in I\!R$, tal que: $I_h(k+te) \le \beta_3$.

Chamando $\beta_0 = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, obtemos, usando (11), (12), e, (13), que:

$$I_h(k+te) \le \beta_0, \qquad \forall (k,t) \in I\!R \times I\!R^+.$$

Portanto, I_h satisfaz (I_3).

Segunda parte: Caso $N = 1$.

Seja $\Omega = (0,1)$.

Suporemos as condições $(f_0), (f_1), (f_2), (f_5)$.

Também, precisaremos de:

$(f_3)^*$ Existem: $\varepsilon_0 > 0$, e, $\alpha \in (0, \lambda_1)$, tais que:

$$\frac{f(x,s)}{s} \leq \alpha, \qquad \forall x \in [0,1], \qquad \forall s \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \setminus \{0\},$$

onde: λ_1 é o primeiro autovalor positivo de $-u''$, em $H^1(0,1)$, com condição de Neumann, na fronteira. Usando a condição $(f_3)^*$ obtemos:

$$F(x,s) \leq \frac{\alpha}{2} s^2, \qquad \forall s \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \qquad \forall x \in [0,1]. \tag{14}$$

Por outro lado, como $H^1(0,1)$ está imerso em $L_\infty(\Omega)$,

$$\text{Existe} \qquad c_0 > 0 \ : \ ||u||_\infty \leq c_0 ||u||, \qquad \forall u \in H^1(0,1). \tag{15}$$

No lugar de (3), consideraremos:

$$M_0 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\frac{\varepsilon_0}{c_0} c_1, \qquad \text{com} \qquad c_1 > 0 \qquad \text{dado em (1).} \tag{16}$$

Respeito à função h, admitiremos:

$(h_1)^*$ $\quad h : (0,1) \to I\!R \ , \ \displaystyle\int_0^1 h(x)dx = 0 \ , \ \int_0^1 h^2(x)dx < M_0^2 \ .$

O problema à considerar é:

$$(P_h)^* \qquad \begin{cases} -u'' &= f(x,u) + h(x), \qquad x \in (0,1) \\ u'(0) &= u'(1) = 0. \end{cases}$$

O funcional, cujos pontos críticos são soluções de $(P_h)^*$, é:

$$J_h : H^1(0,1) \to I\!R, \qquad \text{dado por:}$$
$$J_h(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 - \int_0^1 F(x,u) - \int_0^1 hu.$$

Resulta que: $J_h \in C^1(H^1(0,1), I\!R)$, com

$$J_h'(u).v = \int_0^1 u'v' - \int_0^1 f(x,u)v - \int_0^1 hv, \qquad \forall u, v \in H^1(0,1).$$

Teorema 2.3.

Assumindo $(f_0), (f_1), (f_2), (f_5), (f_3)^*, (h_1)^*$, tem-se que $(P_h)^*$ possui, pelo menos, uma solução não trivial, se

$$\lambda > \frac{\pi^2}{4}. \tag{17}$$

Prova.

É só conferir que J_h satisfaz todos os requisitos do **teorema 2.1.**

A prova do fato: $(f_0), (f_1), (f_2) \Rightarrow J_h$ satisfaz (P.S.), é a mesma do lema 1.1 de [1].

Assim mesmo, a demonstração de que J_h satisfaz (I_1), decorre a partir de $(h_1)^*$ e (f_5): dado $k \in X_1$,

$$J_h(k) = -\int_0^1 F(x,k) - \int_0^1 hk = -\int_0^1 F(x,k) \leq 0.$$

J_h **verifica** (I_2).

Efetivamente,

Seja $u \in X_2$, tal que: $||u|| = \dfrac{\varepsilon_0}{2c_0}$.

Então, utilizando (15), segue-se que: $||u||_\infty \leq \dfrac{\varepsilon_0}{2}$.

Portanto, mediante (14), conseguimos: $F(x,u) \leq \dfrac{\alpha}{2}u^2$.

Assim,

$$J_h(u) \geq \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 - \frac{\alpha}{2}\int_0^1 u^2 - \int_0^1 hu$$

Aplicando, então, a condição $(h_1)^*$, e, usando o fato que $\displaystyle\int_0^1 (u')^2 \geq \lambda_1 \int_0^1 u^2$, chegamos à:

$$J_h(u) \geq \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 - \frac{\alpha}{2}\int_0^1 u^2 - M_0(\int_0^1 u^2)^{1/2} \geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\int_0^1 (u')^2 - M_0||u||.$$

Logo, em vista de (1), e, 16, temos:

$$\begin{aligned} J_h(u) &\geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)c_1||u||^2 - M_0||u|| = ||u||\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)c_1||u|| - M_0\right] = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2c_0}\left[\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\frac{c_1\varepsilon_0}{c_0} - M_0\right] = 0. \end{aligned}$$

Conclusão: $J_h(u) \geq 0, \qquad \forall u \in X_2$, com $||u|| = \dfrac{\varepsilon_0}{2c_0}$.

Verificação de (I_3).

Não podemos agir como no caso $N \geq 2$, onde, usamos que $H^1(\Omega)$ não está imerso em $L_\infty(\Omega)$.

Seja $e_0 \in X_2$, dada por: $e_0(x) = \dfrac{2}{\pi} - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}x,\ x \in [0,1]$.

Usando (17) resulta:

$$\frac{\int_0^1 (e_0')^2}{\int_0^1 e_0^2 + ||e_0||_\infty^2} = \frac{\pi^2}{4} < \lambda.$$

Seja $\delta \in (0, ||e_0||_\infty)$, tal que:

$$\frac{\int_0^1 (e_0')^2}{\int_0^1 e_0^2 + \delta^2} < \lambda. \tag{18}$$

Seja $u = k + te_0$, com $k \in I\!R$, $t > 0$.

Mediante um trabalho análogo ao feito para a obtenção de (9), chegamos à:

$$\begin{aligned} J_h(k+te_0) \leq -\frac{1}{2}k^2\lambda + \frac{t^2}{2}\left(\int_0^1 (e_0')^2 - \lambda\int_0^1 e_0^2\right) + tM_0(\int_0^1 e_0^2)^{1/2} + \\ + k_2\left(t\int_0^1 |e_0| + |k|\right) - k_1\int_{k+te_0>s_1} (k+te_0)^{1/\theta} + k_1^*. \end{aligned} \tag{19}$$

Notemos que se $\displaystyle\int_0^1 (e_0')^2 < \lambda\int_0^1 e_0^2$, então, usando (19) segue-se, imediatamente, que J_h é limitado superiormente, em $X_1 \oplus I\!R^+ e_0$.

Quando $\int_0^1 (e_0')^2 \geq \lambda \int_0^1 e_0^2$, consideramos duas situações:

$$\text{(a)} \quad k + \delta t \leq s_1 \qquad , \qquad \text{(b)} \quad k + \delta t > s_1.$$

No primeiro caso, resulta: $t^2 \leq \dfrac{(s_1 - k)^2}{\delta^2}$, e, em vista de (19), obtemos:

$$J_h(k + te_0) \leq -\frac{[\lambda(\delta^2 + \int_0^1 e_0^2) - \int_0^1 (e_0')^2]}{2\delta^2} k^2 + k_1^* + \frac{(s_1 - k)}{\delta} M_0 (\int e_0^2)^{1/2} +$$
$$+ \left(-\frac{1}{\delta^2} s_1 k + \frac{s_1^2}{2\delta^2}\right) \left(\int_0^1 (e_0')^2 - \lambda \int_0^1 e_0^2\right) + k_2 \left(\frac{s_1 - k}{\delta} \int_0^1 |e_0| + |k|\right).$$

Então, aplicando (18), concluimos que J_h está limitado superiormente, em $X_1 \oplus I\!R^+ e_0$.

No segundo caso, chamamos $\Omega_1^* = \{x \in [0,1] : \; e_0(x) > \delta\}$;

Assim, $\forall x \in \Omega_1^*$, tem-se: $k + te_0(x) > k + t\delta > s_1$.

Em seguida, utilizando (19) deduzimos que:

$$\begin{aligned} J_h(k + te_0) \quad &\leq \quad -\frac{1}{2}k^2\lambda + \frac{t^2}{2}\left(\int_0^1 (e_0')^2 - \lambda \int_0^1 e_0^2\right) + k_1^* + tM_0(\int e_0^2)^{1/2} + \\ &+ \quad k_2 \left(t \int_0^1 |e_0| + |k|\right) - k_1 (k + \delta t)^{1/\theta} . |\Omega_1^*|. \end{aligned}$$

Logo, levando em conta que $|\Omega_1^*| > 0$, a situação é análoga à obtida em (12)'; então, mediante um argumento similar ao feito naquela ocasião, resulta $J_h(k + te_0)$ limitado superiormente no caso (b).

Estando consideradas todas as possibilidades, concluimos que J_h satisfaz (I_3).

Observação: Pode ser provado (Ver [1]), que, se $0 < \lambda < \dfrac{\pi^2}{4}$, então J_h não satisfaz (I_3).

Seção 2

Problema de Dirichlet assintoticamente linear em $-\infty$ e superlinear em $+\infty$.

Parte (i): Caso $N \geq 2$.

Nosso propósito é estudar o problema:

$$(P_h)^{**} \qquad \begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + f(x,u) + h(x), \qquad x \in \Omega \\ u &= 0, \qquad \partial\Omega. \end{cases}$$

onde:

$$\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1} \quad , \quad \text{para algum} \quad k \geq 1.$$

com $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots$ valores próprios de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, com as correspondentes autofunções: $e_1, e_2, \ldots$.

Assumiremos: $(f_0), (f_2), (f_4), (f_5)$, além de:

$(f_1)^*$ $\qquad \lim\limits_{s \to -\infty} f(x,s) = q(x)$, com $q \in C(\overline{\Omega})$.

$(f_3)^{**}$ $\qquad$ Existem: $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha_0 \in (0, \lambda_{k+1} - \lambda)$, tais que,

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}\alpha_0 s^2 \quad , \quad \forall s \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$$

$(h_1)^{**}$ $\qquad h : \overline{\Omega} \to I\!R$, é contínua, verificando:

$$\int hu = 0, \qquad \forall u \in \langle e_1, \ldots, e_k \rangle.$$

Precisaremos, também, de

$$\sigma\theta < \frac{1}{2} + \frac{1}{N}. \tag{20}$$

O funcional de Euler-Lagrange correspondente à $(P_h)^{**}$ é: $I_h : H_0^1(\Omega) \to I\!R$, dado por:

$$I_h(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}\int u^2 - \int F(x,u) - \int hu.$$

Como consequência de $(f_0), (f_1)^*$ e (f_4) segue-se que $I_h \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Notemos, também, que os pontos críticos de I_h são soluções de $(P_h)^{**}$.

Teorema 2.4.

Supondo $(f_0), (f_1)^*, (f_2), (f_3)^{**}, (f_4), (f_5), (h_1)^{**}, (20)$, existe uma constante $M^* > 0$ tal que, se

$$\int h^2 < (M^*)^2, \tag{21}$$

então, $(P_h)^{**}$ possui, pelo menos, uma solução não trivial.

Prova:

Novamente, a ferramenta essencial é o **teorema 2.1.**

Veremos que I_h satisfaz as suas exigências, considerando quatro lemas, a seguir.

Em nosso caso, $X = H_0^1(\Omega)$, com $||u||^2 = \int |\nabla u|^2$, $X_1 = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, $X_2 = X_1^{\perp}$.

Lema 2.3 $\quad (f_5)$, e, $(h_1)^{**} \Rightarrow I_h$ satisfaz (I_1).

Prova: seja $u \in X_1$.

Usando $(h_1)^{**}$, e, a desigualdade variacional $\int |\nabla u|^2 \leq \lambda_k \int u^2$, obtemos:

$$\begin{aligned} I_h(u) &\leq \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_k}\int |\nabla u|^2 - \int F(x,u) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\int |\nabla u|^2 - \int F(x,u) \\ &\leq -\int F(x,u). \end{aligned}$$

Assim, aplicando (f_5), concluimos: $I_h(u) \leq 0, \qquad \forall u \in X_1$.

Lema 2.4

$(f_0), (f_1)^*, (f_2), (f_4), (f_3)^{**}, (21) \Rightarrow I_h$ satisfaz (I_2).

Prova:

Primeiro, notemos que, analogamente como em (2), podemos considerar o número real positivo:

$$a_0 = k_0^{\sigma+1} \sup_{|s|\geq r_0} \frac{F(x,s)}{|s|^{\sigma+1}}.$$

Seja $u \in X_2$.

Em vista da desigualdade variacional: $\int |\nabla u|^2 \geq \lambda_{k+1} \int u^2$, resulta:

$$I_h(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_{k+1}}||u||^2 - \int F(x,u) - \int hu.$$

Empregando $(f_3)^{**}$, a definição de a_0, e (21) (com M^* a escolher), segue-se que:

$$I_h(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_{k+1}}||u||^2 - \frac{a_0}{k_0^{\sigma+1}} \int |u|^{\sigma+1} - \frac{\alpha_0}{2} \int u^2 - \frac{M^*||u||}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}$$

Isto é,

$$(1)^* \qquad I_h(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_0 + \lambda}{\lambda_{k+1}}\right)||u||^2 - a_0||u||^{\sigma+1} - \frac{M^*}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}||u||.$$

Chamando $||u|| = \rho$, e, $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_0 + \lambda}{\lambda_{k+1}}\right) = b_0^*$, temos, usando $(f_3)^{**}$, que $b_0^* > 0$, e, o segundo membro de $(1)^*$ é:

$$b_0^*\rho^2 - a_0\rho^{\sigma+1} - \frac{M^*}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}\rho.$$

Observamos, então, analogia completa com (4) (Seção 1), onde M, está no lugar de $\frac{M^*}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}$, e, b_0 no lugar de b_0^*.

Aproveitando o feito naquela oportunidade, podemos afirmar:

Para $||u|| = \rho_0 = \left(\frac{b_0^*}{a_0\sigma}\right)^{1/\sigma-1}$ tem-se:

$$I_h(u) \geq \rho_0\left(z(\rho_0) - \frac{M^*}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}\right), \qquad \text{com} \qquad z(\rho) = b_0^*\rho - a_0\rho^\sigma.$$

Portanto, escolhendo:

$$M^* = \sqrt{\lambda_{k+1}}.z(\rho_0) = \sqrt{\lambda_{k+1}}\frac{(\sigma-1)}{a_0^{1/\sigma-1}}.\left(\frac{b_0^*}{\sigma}\right)^{\sigma/\sigma-1},$$

conseguimos:

$$I_h(u) \geq 0 \quad , \qquad \forall u \in X_2 \cap \partial B_{\rho_0}(0).$$

Lema 2.5

$(f_0), (f_1)^*, (f_2), (h_1)^{**}, (21) \Rightarrow I_h$ satisfaz (I_3).

Prova.

Seja $e \in X_2$, não limitado superiormente. Chamemos:

(2)* $$\lambda_* = \frac{\int |\nabla e|^2}{\int e^2}.$$

Logo, $\lambda_* \geq \lambda_{k+1}$.

Em particular $\lambda_* - \lambda > 0$.

Como o valor de λ_* não muda ao substituir e por te, podemos supor:

(3)* $$2(\lambda_* - \lambda)\int e^2 < \delta^*\left(\frac{\lambda}{\lambda_k} - 1\right), \qquad \text{com} \quad \delta^* > 0$$

tal que, $\delta^*\|v\|_\infty^2 \leq \int |\nabla v|^2, \qquad \forall v \in X_1$.

Por outro lado, seja $\tilde{f}(x,s) = \lambda s + f(x,s)$.

Logo, $\tilde{F}(x,s) = \dfrac{\lambda s^2}{2} + F(x,s)$.

Então, usando (f_2), segue-se que: existem, $\tilde{s}_0 \geq s_0$, e, $\tilde{\theta} \in (\theta, 1/2)$, tais que:

$$0 < \widetilde{F}(x,s) \leq \widetilde{\theta} s \widetilde{f}(x,s), \qquad \forall s \geq \widetilde{s}_0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Portanto, podemos achar: $R_1 > 0$, e, $s_1 \geq \widetilde{s}_0$, tais que:

$$(4)^* \qquad \widetilde{F}(x,s) \geq \frac{\lambda}{2}s^2 + R_1 s^{1/\widetilde{\theta}} > 0, \qquad \forall s > s_1, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Sabendo que $\lim_{s \to -\infty} [\widetilde{f}(x,s) - \lambda s] = q(x)$, e, utilizando (f_0), obtemos:
Existem $R_2 > 0$, $R_3 > 0$, tais que:

$$(5)^* \qquad \widetilde{F}(x,s) \geq \frac{\lambda}{2}s^2 - R_2|s| - R_3, \qquad \forall s \leq s_1, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Seja, então, $u = v + te \in X_1 \oplus I\!R^+ e$.
Em vista de $(h_1)^{**}, (2)^*, (4)^*$, e, $(5)^*$, resulta:

$$\begin{aligned} I_h(v+te) &= \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2 + \frac{t^2}{2}\int |\nabla e|^2 - \int \widetilde{F}(x, v+te) - t\int he \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2 + \frac{t^2}{2}\lambda_* \int e^2 - \frac{\lambda}{2}\int_{v+te \leq s_1} (v+te)^2 + R_2 \int_{v+te\leq s_1} |v+te| + R_3|\Omega| \\ &-\frac{\lambda}{2}\int_{v+te>s_1} (v+te)^2 - R_1 \int_{v+te>s_1} (v+te)^{1/\widetilde{\theta}} - t\int he. \end{aligned}$$

Em seguida, utilizando (21), a definição de δ^*, e, a desigualdade variacional $\int |\nabla v|^2 \leq \lambda_k \int v^2$, segue-se:

$$(6)^* \qquad \begin{aligned} I_h(v+te) \leq \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* ||v||_\infty^2 + \tfrac{t^2}{2}(\lambda_* - \lambda)\textstyle\int e^2 + R_2|\Omega|\, ||v||_\infty + \\ + R_3|\Omega| + R_2 t \textstyle\int |e| - R_1 \int_{v+te>s_1}(v+te)^{1/\widetilde{\theta}} + tM^*(\int e^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Vejamos, então, o:

$1^{\underline{o}}$ **caso.** $\quad v_0 + t \leq s_1$,

onde: $\quad v_0 = \min_{x \in \overline{\Omega}} v(x)$.

Como $0 < t \leq s_1 - v_0$, utilizando $(6)^*$ conseguimos:

$$I_h(v+t\epsilon) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* ||v||_\infty^2 + \frac{(s_1 - v_0)^2}{2}(\lambda_* - \lambda)\int \epsilon^2 + R_3|\Omega| +$$

$$R_2|\Omega|\,||v||_\infty + R_2(s_1 - v_0)\int|\epsilon| + (s_1 - v_0)M^*(\int \epsilon^2)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + (\lambda_* - \lambda)\int \epsilon^2\right]||v||_\infty^2 + \frac{s_1^2}{2}(\lambda_* - \lambda)\int \epsilon^2 + R_2 s_1 \int |\epsilon| +$$

$$+R_3|\Omega| + \left[s_1(\lambda_* - \lambda)\int \epsilon^2 + R_2|\Omega| + R_2\int|\epsilon| + M^*(\int \epsilon^2)^{1/2}\right]||v||_\infty + s_1 M^*(\int \epsilon^2)^{1/2}.$$

Ora, em vista de $(3)^*$, o coeficiente de $||v||_\infty^2$ é negativo, resultando, então, que: $I_h(v+t\epsilon)$ é limitado superiormente, no caso em questão.

$2^{\underline{o}}$ **caso.** $\quad v_0 + t > s_1$.

Denotando $\Omega_1 = \{x \in \Omega : \epsilon(x) > 1\}$, resulta:

$$|\Omega_1| > 0, \qquad \text{e.} \qquad \Omega_1 \subset \{x \in \Omega : v + t\epsilon > s_1\}.$$

Destaquemos duas situações:

i) $$||v||_\infty \leq \frac{2R_2|\Omega|}{(\lambda_* - \lambda)\int \epsilon^2}.$$

Assim sendo, usando $(6)^*$, obtemos:

$$(7)^* \qquad \begin{aligned} I_h(v+t\epsilon) &\leq \frac{t^2}{2}(\lambda_* - \lambda)\int \epsilon^2 2 + \frac{2R_2^2|\Omega|^2}{(\lambda_* - \lambda)\int \epsilon^2} + R_3|\Omega| + \\ &+ R_2 t\int|\epsilon| - R_1(v_0 + t)^{1/\widetilde{\theta}}|\Omega_1| + tM^*(\int \epsilon^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Levando em conta que: $\widetilde{\theta} \in (0, 1/2)$, e, $|v_0| \leq ||v||_\infty \leq$ const., resulta que o limite, quando $t \to +\infty$, do $2^{\underline{o}}$ membro de (7^*) é:

$$\lim_{t \to +\infty} t^{1/\widetilde{\theta}}\Big[\frac{(\lambda_* - \lambda)\int \epsilon^2}{2t^{1/\widetilde{\theta}-2}} + \frac{2R_2^2|\Omega|^2}{t^{1/\widetilde{\theta}}(\lambda_* - \lambda)\int \epsilon^2} + \frac{R_3|\Omega|}{t^{1/\widetilde{\theta}}} + \frac{R_2\int|\epsilon|}{t^{1/\widetilde{\theta}-1}}$$

$$-R_1\left(\frac{v_0}{t}+1\right)^{1/\tilde{\theta}}.|\Omega_1| + \frac{M^*(\int e^2)^{1/2}}{t^{1/\tilde{\theta}-1}}\Bigg] = (+\infty)(-R_1)|\Omega_1| = -\infty.$$

Portanto, $I_h(v+te)$ é limitado superiormente, na situação considerada.

ii) $$||v||_\infty > \frac{2R_2|\Omega|}{(\lambda_* - \lambda)\int e^2}, \quad \text{ou seja,}$$

$$R_2|\Omega| < \frac{1}{2}(\lambda_* - \lambda)(\int e^2).||v||_\infty.$$

Utilizando esta última desigualdade, e, $(6)^*$, tem-se:

$$I_h(v+te) \leq \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + (\lambda_* - \lambda)\int e^2\right]||v||_\infty^2 + \frac{t^2}{2}(\lambda_* - \lambda)\int e^2 + R_3|\Omega| +$$
$$R_2 t\int|e| - R_1(v_0+t)^{1/\tilde{\theta}}.|\Omega_1| + tM^*(\int e^2)^{1/2}.$$

Em seguida, usando os fatos: $v_0^2 \leq ||v||_\infty^2$, e,
$\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + (\lambda_* - \lambda)\int e^2 < 0,$ chegamos à:

$$I_h(v+te) \leq \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + (\lambda_* - \lambda)\int e^2\right]v_0^2 + \frac{t^2}{2}(\lambda_* - \lambda)\int e^2 + R_3|\Omega| +$$
$$+R_2 t\int|e| - R_1(v_0+t)^{1/\tilde{\theta}}.|\Omega_1| + tM^*(\int e^2)^{1/2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + (\lambda_* - \lambda)\int e^2\right]v_0^2 + \frac{(v_0+t)^2}{2}(\lambda_* - \lambda)\int e^2 - \frac{v_0^2}{2}(\lambda_* - \lambda)\int e^2$$
$$-v_0(v_0+t)(\lambda_* - \lambda)\int e^2 + v_0^2(\lambda_* - \lambda)\int e^2 + R_3|\Omega| + R_2(v_0+t)\int|e|$$
$$-R_2 v_0\int|e| - R_1(v_0+t)^{1/\tilde{\theta}}.|\Omega_1| + tM^*(\int e^2)^{1/2}.$$

Fazendo $v_0 + t = s$, conseguimos, então:

$$I_h(v+te) \leq \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + (\lambda_* - \lambda)\int e^2\right]v_0^2 + \frac{s^2}{2}(\lambda_* - \lambda)\int e^2 +$$
$$+\frac{v_0^2}{2}(\lambda_* - \lambda)\int e^2 - v_0 s(\lambda_* - \lambda)\int e^2 + R_3|\Omega| + R_2 s\int|e| - R_2 v_0\int|e|$$
$$-R_1 s^{1/\tilde{\theta}}|\Omega_1| + (s - v_0)M^*(\int e^2)^{1/2}.$$

Assim,

$$I_h(v+te) \leq -k_3^* v_0^2 + k_4^*|v_0| + k_5^* s^2 + k_6^* s + k_7^*|v_0|s + R_3|\Omega| - k_8^* s^{1/\tilde{\theta}}$$

onde: $\quad k_8^* = R_1|\Omega_1|$, $\quad$ e , $\quad k_3^* = -\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + 2(\lambda_* - \lambda)\int e^2\right]$

Como $k_8^* > 0$, e, em vista de $(3)^*$, resulta $k_3^* > 0$, temos uma situação completamente analoga com aquela de $(12)'$ (Seção 1), e, podemos concluir que $I_h(v+te)$ é limitado superiormente, na situação ii).

Logo, juntando os resultados, fica provado que I_h verifica (I_3).

Lema 2.6

Supondo (f_0), $(f_1)^*$, (f_2), (f_4), $(h_1)^{**}$, e, (20), tem-se:

I_h satisfaz a condição de Palais-Smale. (P.S.)

Prova. Usaremos o lema 1 de [10]:

Se $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ satisfaz:

(G_1) $\quad g$ é contínua

(G_2) $\quad$ Existem: $\lambda \neq \lambda_j$, e, $0 \leq \alpha, < 1$, tais que,

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{g(x,s) - \lambda s}{|s|^\alpha} = 0$$

(G_3) $\quad \lim_{s \to +\infty} \frac{g(x,s)}{s^\sigma} = 0$, com $\quad \begin{cases} 1 < \sigma < \frac{N+2}{N-2} & \text{, se } N \geq 3 \\ 1 < \sigma < +\infty & \text{, se } N = 2 \end{cases}$

(G_4) $\quad$ Existem: $\theta \in (0, 1/2)$, $s_0 > 0$, tais que:

$$0 < G(x,s) \leq \theta s g(x,s), \qquad \forall s \geq s_0, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

(G_5) $\quad \sigma\theta < \min\left\{\frac{1}{1+\alpha}, \frac{N+2}{2N}\right\}$, então, o funcional $\Phi : H_0^1(\Omega) \to I\!R$, dado por:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \int G(x,u),$$

satisfaz a condição (P.S.).

Aplicando dito lema ao nosso caso, temos:

$$g(x,s) = \lambda s + f(x,s) + h(x)$$

Então, (f_0) e $(h_1)^{**}$ garantem (G_1).

Por outro lado, se $0 < \alpha < 1$, e, usamos $(f_1)^*$ e $(h_1)^{**}$, conseguimos:

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{g(x,s) - \lambda s}{|s|^\alpha} = \lim_{s\to-\infty} \frac{f(x,s) + h(x)}{|s|^\alpha} = 0.$$

Por tanto, (G_2) é satisfeita $\quad \forall \alpha \in (0,1)$.

Em relação à (G_3), percebe-se na prova do lema 1 de [10], que o importante é que exista uma constante $c > 0$, tal que:

$$|g(x,s)| \le c + c|s|^\sigma, \qquad \forall s > 0.$$

Mas, em nosso problema isto é garantido pelas condições (f_0), (f_4), e, $(h_1)^{**}$

A seguir, procuramos: $\theta^* \in (0, 1/2)$, e, $s_0^* > 0$, tais que:

$$0 < G(x,s) \le \theta^* s g(x,s), \qquad \forall s \ge s_0^*, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Como $G(x,s) = \dfrac{\lambda s^2}{2} + F(x,s) + h(x)s$, queremos que:

$$(8)^* \qquad 0 < \frac{\lambda s^2}{2} + F(x,s) + h(x)s \le \theta^*\lambda s^2 + \theta^* s f(x,s) + \theta^* s h(x), \qquad \forall s \ge s_0^*.$$

Mas, aplicando (f_2) podemos afirmar que: existe $s_2 \ge s_0$, tal que:

$$0 < \frac{\lambda s^2}{2} + F(x,s) + h(x)s \le \frac{\lambda s^2}{2} + \theta s f(x,s) + h(s)s, \qquad \forall s \ge s_2.$$

Então, para conseguirmos $(8)^*$, seria bom termos:

$$\frac{\lambda s^2}{2} + \theta s f(x,s) + h(x)s \leq \theta^* \lambda s^2 + \theta^* s f(x,s) + \theta^* s h(x),$$

isto é,

$$\lambda \left(\frac{1}{2} - \theta^*\right) s^2 + (1-\theta^*) s h(x) \leq (\theta^* - \theta) f(x,s) s,$$

ou seja,

$$(9)^* \qquad \lambda \left(\frac{1}{2} - \theta^*\right) + \frac{(1-\theta^*)h(x)}{s} \leq (\theta^* - \theta)\frac{f(x,s)}{s}.$$

Como $\lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = +\infty$, basta tomar $\theta^* \in (\theta, 1/2)$, e, teremos $(9)^*$, para todo s suficientemente grande.

Logo, (G_4) é verificada.

Finalmente, vejamos que é possível escolher θ^* de modo a satisfazer (G_5).

Em primeiro lugar, utilizando (20), e, tomando $\theta^* > \theta$, suficientemente perto de θ, temos:

$$\sigma\theta^* < \frac{1}{2} + \frac{1}{N}.$$

Em segundo lugar, vamos aproveitar que, na condição (G_2), no nosso caso, serve qualquer $\alpha \in (0,1)$.

Assim sendo, quando $N \geq 3$, escolhemos $\alpha \in (0, 1/5)$, de maneira que: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{N} \leq \dfrac{5}{6} < \dfrac{1}{1+\alpha}$.

Portanto,

$$\min\left\{\frac{1}{1+\alpha}, \frac{N+2}{2N}\right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{N} > \sigma\theta^*.$$

Quando $N = 2$, escolhemos $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, tal que:

$$\sigma\theta^* < \frac{1}{1+\alpha} < 1$$

Concluímos, então, que I_h satisfaz (P.S.).

Parte (ii). Caso $N = 1$.

Trataremos o problema:

$$(P_h)^*_* \quad \begin{cases} -u'' &= \lambda u + f(x,u) + h(x), \qquad x \in (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0., \end{cases}$$

onde: $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$, para algum $k \geq 1$, com $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots$ autovalores de $(-u'', H_0^1(0,1))$, e, $e_1, e_2, \ldots$ as correspondentes autofunções.

Nossas hipóteses serão:

$(f_0), (f_1)^*, (f_2), (f_3)^{**}, (f_5), (h_1)^{**}$, Além de:

(22) $$\frac{\delta^* \lambda_k + 3\lambda_k \lambda_{k+1}}{\delta^* + 3\lambda_k} < \lambda,$$

onde δ^* é dado em $(3)^*$.

(23) $$\left(\int_0^1 h^2 \right)^{1/2} < M_0^* = \sqrt{\lambda_{k+1}} \left(1 - \frac{\alpha_0 + \lambda}{\lambda_{k+1}} \right) \frac{\varepsilon_0}{4c_0},$$

onde, $c_0 > 0$ é tal que: $||u||_\infty \leq c_0 ||u||$, $\quad \forall u \in H_0^1(0,1)$.

(24) $$\limsup_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s^\sigma} = r(x), \quad \text{com} \quad r \in C([0,1]),$$

onde: $1 < \sigma < +\infty$, e, $\sigma\theta < 1$.

Consideraremos, a seguir, o:

Teorema 2.5. Sob as hipóteses $(f_0), (f_1)^*, (f_2), (f_3)^{**}, (f_5), (h_1)^{**}, (22), (23), (24)$, resulta que, $(P_h)^*_*$ possui, pelo menos, uma solução não trivial.

Prova.

Mais uma vez, apelamos ao **teorema 2.1.**

O funcional a considerar é:

$I_h^* : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$, dado por:

$$I_h^*(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u')^2 - \int_0^1 F(x,u) - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 u^2 - \int_0^1 hu.$$

Também, $H_0^1(0,1) = X_1 \oplus X_1^\perp$, onde $X_1 = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$.

Em $H_0^1(0,1)$ estamos supondo a norma dada por:

$$||u||^2 = \int_0^1 (u')^2.$$

Como consequência de (f_0) resulta que I_h^* é de classe C^1.

Por outro lado, o fato que I_h^* satisfaz (P.S.) prova-se como no **lema 2.6**, com a diferença que, no lugar de (G_5), temos $\sigma\theta < 1$, o qual é suficiente.

Assim mesmo, I_h^* verifica (I_1), e, a prova é como no **lema 2.3.**

Conferindo a condição (I_2):

Seja $u \in X_2 = X_1^\perp$, tal que $||u|| = \rho = \dfrac{\varepsilon_0}{2c_0}$, onde ε_0 é dado em $(f_3)^{**}$, e, c_0 em (23).

Temos: $||u||_\infty \leq \dfrac{\varepsilon_0}{2}$.

Logo, $(f_3)^{**}$ fornece: $\quad F(x,u) \leq \dfrac{\alpha_0}{2} u^2$.

Portanto,

$$I_h^*(u) \geq \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 - \frac{\alpha_0}{2}\int_0^1 u^2 - \frac{\lambda}{2}\int_0^1 u^2 - \int_0^1 hu$$

Assim, aplicando a desigualdade de Scharwz, e, a desigualdade variacional: $\int^1 (u')^2 \geq \lambda_{k+1}\int_0^1 u^2$, obtemos:

$$I_h^*(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_0 + \lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\int_0^1 (u')^2 - \frac{(\int_0^1 h^2)^{1/2}.(\int_0^1 (u')^2)^{1/2}}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}$$

Então, utilizando (23), resulta:

$$I_h^*(u) \geq ||u|| \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_0 + \lambda}{\lambda_{k+1}}\right)||u|| - \frac{M_0^*}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}\right] = \frac{\varepsilon_0}{2c_0}\left[\left(1 - \frac{\alpha_0 + \lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\frac{\varepsilon_0}{4c_0} - \frac{M_0^*}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}\right] = 0.$$

Conclusão: $\qquad I_h^*(u) \geq 0, \qquad \forall u \in X_2 \cap \partial B_\rho(0)$.

Logo, I_h^* satisfaz (I_2).

Verificação de (I_3).

Escolhamos $e = e_{k+1} \in X_2 \setminus \{0\}$,
definida por: $e(x) = \sqrt{2}\text{sen}(k+1)\pi x, \qquad x \in [0,1]$.

Denotando $\tilde{f}(x,s) = \lambda s + f(x,s)$, temos:

$$\tilde{F}(x,s) = \frac{\lambda s^2}{2} + F(x,s).$$

Aplicando (f_0), $(f_1)^*$, e, (f_2), obtemos que:
Existem: $s_1 \geq s_0$, $\tilde{\theta} \in (\theta, 1/2)$, $R_1^* > 0$, $R_2^* > 0$, $R_3^* > 0$, tais que:

$$\bullet \quad \tilde{F}(x,s) \geq \frac{\lambda s^2}{2} + R_1^* s^{1/\tilde{\theta}} > 0, \qquad \forall s > s_1$$

$$\bullet\bullet \quad \tilde{F}(x,s) \geq \frac{\lambda s^2}{2} - R_2^*|s| - R_3^*, \qquad \forall s \leq s_1.$$

Utilizando estas desigualdades, conseguimos, para $u = v + te \in X_1 \oplus \mathbb{R}^+ e$, que:

$$\begin{aligned}
I_h^*(v+te) &= \frac{1}{2}\int_0^1 (v' + te')^2 - \int_0^1 \tilde{F}(x, v+te) - \int_0^1 h(v+te) = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2 + \frac{t^2}{2}\int_0^1 (e')^2 - \int_0^1 \tilde{F}(x, v+te) - t\int_0^1 he \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2 + \frac{t^2}{2}\lambda_{k+1} - \frac{\lambda}{2}\int_{v+te\leq s_1} (v+te)^2 + R_2^*\int_{v+te\leq s_1} |v+te| - R_1^*\int_{v+te>s_1} (v+te)^{1/\tilde{\theta}} \\
&-\frac{\lambda}{2}\int_{v+te>s_1} (v+te)^2 + t\Big(\int_0^1 h^2\Big)^{1/2} + R_3^*.
\end{aligned}$$

Assim, desenvolvendo $-\dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int_0^1 (v+te)^2$, e, usando desigualdade variacional: $\displaystyle\int_0^1 (v')^2 \leq \lambda_k \int_0^1 v^2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(25) \quad I_h^*(v+te) \;&\leq\; \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\int_0^1 (v')^2 + \frac{t^2}{2}(\lambda_{k+1} - \lambda) + R_2^* t\int_0^1 |e| + R_3^* + \\
&+\; R_2^*\int_0^1 |v| + tM_0^* - R_1^*\int_{v+te>s_1} (v+te)^{1/\tilde{\theta}}.
\end{aligned}$$

Chamemos $v_0 = \min\limits_{[0,1]} v$, e consideremos dois casos:

1º) $\quad v_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \leq s_1.$

Logo, $$\frac{t^2}{2} \leq (s_1 - v_0)^2.$$

Assim, a partir de (25), segue-se que:

$$\begin{aligned} I_h^*(v+te) \ \leq \ & \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\int_0^1 (v')^2 + (s_1-v_0)^2(\lambda_{k+1}-\lambda) + R_2^*||v||_\infty + \\ R_3^* \ + \ & R_2^*(s_1-v_0)\sqrt{2}\int_0^1 |e| + \sqrt{2}(s_1-v_0)M_0^* \end{aligned}$$

Então, com o desenvolvimento de $(s_1-v_0)^2$, chegamos à:

$$I_h^*(v+te) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\int_0^1 (v')^2 + s_1^2(\lambda_{k+1}-\lambda) - 2s_1v_0(\lambda_{k+1}-\lambda) +$$
$$+v_0^2(\lambda_{k+1}-\lambda) + R_2^*||v||_\infty - R_2^*v_0\sqrt{2}\int_0^1 |e| + R_2^*s_1\sqrt{2}\int_0^1 |e| + R_3^*$$
$$-\sqrt{2}v_0M_0^* + \sqrt{2}s_1M_0^*$$

Em seguida, aplicando (22), e usando que $v_0 \leq ||v||_\infty$, conseguimos:

$$I_h^*(v+te) \leq \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + 2(\lambda_{k+1}-\lambda)\right]||v||_\infty^2 + s_1^2(\lambda_{k+1}-\lambda) + R_3^* +$$
$$+R_2^*s_1\sqrt{2}\int_0^1 |e| + \sqrt{2}s_1M_0^* + \left[2s_1(\lambda_{k+1})-\lambda) + R_2^* + R_2^*\sqrt{2}\int_0^1 |e| + \sqrt{2}M_0^*\right]||v||_\infty.$$

Ora, $\quad (22) \Rightarrow \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + 3(\lambda_{k+1}-\lambda) < 0.$

Em particular, o coeficiente de $||v||_\infty^2$ é negativo.

Portanto, $I_h^*(v+te)$ é limitado superiormente.

2º) $\quad v_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}t > s_1.$

Chamemos $\Omega_1^{**} = \left\{x \in [0,1] : \mathbf{e}(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$

Então: $\quad |\Omega_1^{**}| > 0$, e, se $x \in \Omega_1^{**}$

segue-se que: $v(x) + te(x) \geq v_0 + t\mathbf{e}(x) > v_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}t > s_1.$

A partir de (25) obtemos:

$$(26) \qquad I_h^*(v+te) \le \frac{t^2}{2}(\lambda_{k+1}-\lambda) + R_2^* \int_0^1 |v| + R_2^* t \int_0^1 |e| - R_1^* \left(v_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^{1/\widetilde{\theta}} .|\Omega_1^{**}|$$
$$+ \quad R_3^* + tM_0^*.$$

Agora, temos dois subcasos a considerar

i) $$||v||_\infty \le \frac{2R_2^*}{\lambda_{k+1}-\lambda}.$$

Em particular, $|v_0| \le \dfrac{2R_2^*}{\lambda_{k+1}-\lambda}$.
Então, aplicando (26), conseguimos:

$$I_h^*(v+te) \le \frac{t^2}{2}(\lambda_{k+1}-\lambda) + R_2^*||v||_\infty + R_2^* t \int_0^1 |e| - R_1^* \left(v_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^{1/\widetilde{\theta}} .|\Omega_1^{**}| +$$
$$+R_3^* + tM_0^* \le \frac{t^2}{2}(\lambda_{k+1}-\lambda) + \frac{2(R_2^*)^2}{\lambda_{k+1}-\lambda} + R_2^* t \int_0^1 |e| + R_3^*$$
$$-R_1^* \left(v_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^{1/\widetilde{\theta}} .|\Omega_1^{**}| + tM_0^*$$

Portanto,

$$I_h^*(v+te) \le t^{1/\widetilde{\theta}} \Big[\frac{\lambda_{k+1}-\lambda}{2t^{1/\widetilde{\theta}-2}} + \frac{2(R_2^*)^2}{t^{1/\widetilde{\theta}}(\lambda_{k+1}-\lambda)} + \frac{R_2^* \int_0^1 |e|}{t^{1/\widetilde{\theta}}-1}$$
$$- \quad R_1^* \left(\frac{v_0}{t} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1/\widetilde{\theta}} .|\Omega_1^{**}| + \frac{M_0^*}{t^{1/\widetilde{\theta}-1}} + \frac{R_3^*}{t^{1/\widetilde{\theta}}}\Big] \to (+\infty)(-R_1^*) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1/\widetilde{\theta}} |\Omega_1^{**}| = -\infty,$$

quando $t \to +\infty$.

Logo, $I_h^*(v+te)$ é limitado superiormente.

ii) $$||v||_\infty > \frac{2R_2^*}{\lambda_{k+1}-\lambda}.$$

Portanto, $R_2^* < \dfrac{(\lambda_{k+1}-\lambda)||v||_\infty}{2}$.

Substituindo, então, no termo $R_2^*\int_0^1|e|$, de (25), e, usando $(3)^*$, segue-se que:

$$I_h^*(v+te) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^*\|v\|_\infty^2 + \frac{t^2}{2}(\lambda_{k+1}-\lambda) + R_2^*\|v\|_\infty + R_3^* +$$

$$+R_2^* t\int_0^1|e| - R_1^*\left(v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^{1/\widetilde{\theta}}.|\Omega_1^{**}| + tM_0^* \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^*\right]\|v\|_\infty^2 + \frac{t^2}{2}(\lambda_{k+1}-\lambda) + \frac{(\lambda_{k+1}-\lambda)}{2}\|v\|_\infty^2 + R_2^* t\int_0^1|e|$$

$$-R_1^*\left(v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^{1/\widetilde{\theta}}.|\Omega_1^{**}| + R_3^* + tM_0^* = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + \lambda_{k+1}-\lambda\right]\|v\|_\infty^2$$

$$+\frac{t^2}{2}(\lambda_{k+1}-\lambda) + R_2^* t\int_0^1|e| + R_3^* + tM_0^* - R_1^*\left(v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^{1/\widetilde{\theta}}.|\Omega_1^{**}|.$$

Como, por (22), resulta $\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + \lambda_{k+1}-\lambda < 0$, conseguimos, a partir do último membro obtido acima, que:

$$\begin{aligned} I_h^*(v+te) \;\; &\leq \;\; \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + \lambda_{k+1}-\lambda\right]v_0^2 + \frac{t^2}{2}(\lambda_{k+1}-\lambda) + R_2^* t\int_0^1|e| + R_3^* + \\ &+ \;\; tM_0^* - R_1^*\left(v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^{1/\widetilde{\theta}}.|\Omega_1^{**}| \end{aligned}$$

Somando e subtraindo termos apropriados, visando a aparição da expressão $v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t$, obtemos:

$$I_h^*(v+te) \leq \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + \lambda_{k+1}-\lambda\right]v_0^2 + \left(v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2(\lambda_{k+1}-\lambda) - v_0^2(\lambda_{k+1}-\lambda)$$

$$-\sqrt{2}tv_0(\lambda_{k+1}-\lambda) + R_2^* t\int_0^1|e| + R_3^* + tM_0^* - R_1^*\left(v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^{1/\widetilde{\theta}}.|\Omega_1^{**}| =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^* + \lambda_{k+1}-\lambda\right]v_0^2 + \left(v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2(\lambda_{k+1}-\lambda) - v_0\left(v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)(\lambda_{k+1}-\lambda) +$$

$$+v_0\frac{\sqrt{2}}{2}t(\lambda_{k+1}-\lambda)+R_3^*+tM_0^*-\sqrt{2}tv_0(\lambda_{k+1}-\lambda)+R_2^*t\int_0^1|\epsilon|$$
$$-R_1^*\left(v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^{1/\widetilde{\theta}}.|\Omega_1^{**}|=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^*+\lambda_{k+1}-\lambda\right]v_0^2+$$
$$+\left(v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2(\lambda_{k+1}-\lambda)-v_0\left(v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)(\lambda_{k+1}-\lambda)-\frac{\sqrt{2}}{2}tv_0(\lambda_{k+1}-\lambda)+$$
$$+R_2^*t\int_0^1|\epsilon|+R_3^*+tM_0^*-R_1^*\left(v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^{1/\widetilde{\theta}}.|\Omega_1^{**}|.$$

Chamando $s=v_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t$, a estimativa obtida escreve-se:

$$I_k^*(v+t\epsilon)\le\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^*+\lambda_{k+1}-\lambda\right]v_0^2+s^2(\lambda_{k+1}-\lambda)-v_0s(\lambda_{k+1}-\lambda)+$$
$$-v_0(s-v_0)(\lambda_{k+1}-\lambda)+R_2^*(s-v_0)\sqrt{2}\int_0^1|\epsilon|-R_1^*s^{1/\widetilde{\theta}}.|\Omega_1^{**}|+R_3^*+(s-v_0)\sqrt{2}M_0^*$$

Reagrupando, então, alguns termos, resulta:

$$I_k^*(v+t\epsilon)\le\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^*+3(\lambda_{k+1}-\lambda)\right]v_0^2+s^2(\lambda_{k+1}-\lambda)-2v_0s(\lambda_{k+1}-\lambda)+$$
$$+R_2^*s\sqrt{2}\int_0^1|\epsilon|-R_2^*v_0\sqrt{2}\int_0^1|\epsilon|-R_1^*s^{1/\widetilde{\theta}}.|\Omega_1^{**}|+s\sqrt{2}M_0^*-v_0\sqrt{2}M_0^*+R_3^*\le$$
$$\le-k_3'v_0^2+k_4'v_0+k_5's^2+k_6's+k_7'|v_0|s-k_8's^{1/\widetilde{\theta}}+R_3^*,$$

onde: $k_3'=-\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\delta^*+3(\lambda_{k+1}-\lambda)\right]$, e, $k_8'=R_1^*.|\Omega_1^{**}|>0$.

Como (22) $\Rightarrow$ $k_3'>0$, temos obtido uma situação inteiramente análoga com aquela de (12)′ (Seção 1).

Portanto, $I_k^*(v+t\epsilon)$ é limitado superiormente, também, na presente ocasião.

Capítulo 3

Condição de Cerami.

Introdução.

Na metodologia utilizada nos capítulos anteriores percebemos a importância de certa "compacidade" do funcional de Euler Lagrange associado ao problema que queriamos solucionar. Estamos falando da condição de Palais-Smale (P.S.).

Esta é generalizada, e assim, obtemos a "condição de Cerami", mais uma ferramenta para expressar a "compacidade" das sequências que convergem à um ponto "candidato" a ser ponto crítico do funcional em questão.

Este terceiro capítulo possui duas partes.

Na primeira, provamos que se X é um espaço de Banach e a função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, limitada inferiormente e satisfaz a condição de Cerami (em todo nível), então φ é coerciva.

Li Shujie [15], provou o resultado analogo para a condição de Palais-Smale. Para tanto, utilizou o teorema de deformação, via o método "fluxo-gradiente". Nós usaremos o princípio variacional de Ekeland na maneira como é aplicado no artigo The Palais-Smale condition versus coercivity", por David Costa e Elves A. Silva [7].

Outro assunto que consideramos nesta parte do capítulo é uma proposição relativa às sequências minimizantes de funcionais C^1, limitados inferiormente, satisfazendo a condição de Cerami. (Certamente, é uma prova diferente do lema 1.6 de [13], onde João Marcos B. prova que tais sequências possuem uma sub-sequência convergente, generalizando a proposição 2 de Brezis-Nirenberg [3]).

Na segunda parte do capítulo, temos uma versão do Teorema do Passo da Montanha, com a condição de Cerami no lugar da condição (P.S.) e aproveitamos para aplicá-la no estudo da equação:

$$\begin{cases} -u'' &= \lambda u + g(x,u) + h(x), \qquad x \in (0,1) \\ u'(0) &= u'(1) = 0, \end{cases}$$

onde $0 \leq \lambda < \frac{\pi^2}{4}$; $h \in L_2(0,1)$; e a não linearidade g satisfaz algumas condições diferentes daquelas consideradas, no problema análogo, em [9], por D.G. Figueiredo-B. Ruf. Por exemplo, no caso $\lambda = 0$, ditos autores colocam a condição:
$g(x,s) > 0$, $\forall (x,s) \in (0,1) \times I\!R$; $\lim_{s \to -\infty} g(x,s) = 0$. Enquanto que nós supomos $\lim_{s \to -\infty} g(x,s) = -\infty$, sem impor condição sobre o sinal de g.

Assim, uma situação com $g(x,s) = \begin{cases} s^2, & s \geq 0 \\ -\sqrt{-s}, & s \leq 0, \end{cases}$ estaria descartada em [9], mas, não no nosso caso.

Seção 1

Condição de Cerami versus Coercividade.

Seja X um espaço de Banach.

• $\varphi : X \to I\!R$ é *coerciva* se $\varphi(u) \to +\infty$, quando $||u|| \to +\infty$.
Isto é equivalente à
$\forall d \in I\!R$, o conjunto $\varphi^d = \{x \in X : \varphi(u) \leq d\}$ é limitado.

•• Uma função $\varphi : X \to I\!R$, Fréchet-diferenciável, satisfaz a *condição de Cerami*, no nível $c \in R$, se toda sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que

$$\begin{cases} \varphi(u_n) \to c \\ ||\varphi'(u_n)||_{X^*}(1 + ||u_n||) \to 0, \qquad \text{quando} \quad n \to +\infty, \end{cases}$$

possui uma sub-sequência convergente.

Usaremos a notação: φ satisfaz $(C_e)_c$.

Nosso propósito é provar que se $\varphi \in C^1(X, I\!R)$ é limitada inferiormente, e, satisfaz $(C_e)_c$, $\forall c \in I\!R$ então φ é coerciva.

Para tanto, utilizaremos o *Princípio Variacional de Ekeland*.

Seja M um espacio métrico completo, $\varphi : M \to I\!R \cap \{+\infty\}$, $\varphi \not\equiv +\infty$, semi-continua inferiormente, limitada inferiormente.

Chamando $a = \inf_M \varphi$, sejam:

$\varepsilon > 0$, $\overline{u} \in M$, tais que, $\varphi(\overline{u}) \leq a + \varepsilon$.

Então $\forall \lambda > 0$ existe $u_\lambda \in M$, verificando

(i) $\varphi(u_\lambda) \leq \varphi(\overline{u})$

(ii) $d(u_\lambda, \overline{u}) \leq \lambda$

(iii) $\varphi(u_\lambda) < \varphi(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, u_\lambda)$. $\qquad \forall u \in M, \quad u \neq u_\lambda$.

Proposição 3.1

Sejam: $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, tais que

(1) $\qquad \varphi^d$ é limitado, para $d < c$.

(2) $\qquad \varphi^d$ é ilimitado, para $d > c$.

Então existe $\{u_n\} \subset X$ tal que

- $\varphi(u_n) \to c$
- • • $||\varphi'(u_n)||_{X^*}(1 + ||u_n||) \to 0$, quando $n \to +\infty$
- • • • $||u_n|| \to +\infty$.

Prova:

Em vista de (1), tem-se que:

Para cada $n \geq 2$, existe $R_n \geq n$, tal que:

$\varphi^{c-\frac{1}{n}} \subset B_{R_n}(0)$. (bola aberta de centro 0, e raio R_n)

Definimos

$$\begin{aligned} M_n &= X \setminus B_{R_n}(0) \\ \theta_n &= \varphi_{|M_n} \qquad (\varphi \text{ restrita à } M_n) \end{aligned}$$

Notemos que:

$$c_n = \inf_{M_n} \theta_n \geq c - \frac{1}{n} \tag{3}$$

Como (2) $\Rightarrow$ $\varphi^{c+\frac{1}{n}}$ é ilimitado, podemos escolher $\overline{u_n} \in X$, satisfazendo:

$$\varphi(\overline{u_n}) \leq c + \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad ||\overline{u_n}|| \geq \frac{R_n + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Logo. $\overline{u_n} \in M_n$ e, usando (3), obtemos

$$\varphi(\overline{u_n}) \leq c + \frac{1}{n} \leq c_n + \frac{2}{n}$$

Aplicando, então, o princípio Variacional de Ekeland, com $\varepsilon = \dfrac{2}{n}$ e $\lambda = \dfrac{||\overline{u_n}||}{\sqrt{n}}$, conseguimos:

Para cada $n \geq 2$, existe $u_n \in M_n$, verificando

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{(i)} \quad c - \dfrac{1}{n} \leq c_n \leq \varphi(u_n) \leq \varphi(\overline{u_n}) \leq c + \dfrac{1}{n} \leq c_n + \dfrac{2}{n} \\ \text{(ii)} \quad \varphi(u_n) < \varphi(u) + \dfrac{2||u_n - u||}{\sqrt{n}||\overline{u_n}||}, \qquad \forall u \in M_n,\ u \neq u_n \\ \text{(iii)} \quad ||u_n - \overline{u_n}|| \leq \dfrac{||\overline{u_n}||}{\sqrt{n}}. \end{cases}$$

A partir de (4) (i), segue-se que $\varphi(u_n) \to c$.

Também, usando (4) (iii), temos:

$$||u_n|| \geq ||\overline{u_n}|| - ||\overline{u_n} - u_n|| \geq ||\overline{u_n}|| - \frac{||\overline{u_n}||}{\sqrt{n}} = ||\overline{u_n}|| \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq R_n + 1 \geq n + 1$$

Em particular $||u_n|| \to +\infty$ e u_n pertence ao interior de M_n.

Por outro lado, utilizando (4)(ii) , obtemos

$$\frac{\varphi(u_n) - \varphi(u)}{||u_n - u||} < \frac{2}{\sqrt{n}||\overline{u_n}||}, \qquad \forall u \in M_n, \quad u \neq u_n.$$

Portanto,

$$(5) \qquad ||\varphi'(u_n)||_{X^*} \leq \frac{2}{\sqrt{n}||\overline{u_n}||}, \qquad \forall n \geq 2.$$

Assim, aplicando (5) e (4)(iii), segue-se que:

$$||\varphi'(u_n)||_{X^*}(1 + ||u_n||) \leq ||\varphi'(u_n)||_{X^*} + ||\varphi'(u_n)||_{X^*}||\overline{u_n}|| +$$
$$+ ||\varphi'(u_n)||_{X^*}||u_n - \overline{u_n}|| \leq \frac{2}{\sqrt{n}||\overline{u_n}||} + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n}.$$

Logo, $||\varphi'(u_n)||_{X^*}(1 + ||u_n||) \to 0$, quando $n \to +\infty$.

Corolário 3.1

Se $\varphi \in C^1(X, I\!R)$, satisfaz $(C_e)_c$ e φ^d é limitado para todo $d < c$, então $\varphi^{c+\gamma}$ é limitado, para algum $\gamma > 0$.

Prova: Efetivamente, se for $\varphi^{c+\gamma}$ ilimitado, $\forall \gamma > 0$, aplicando a proposição 3.1, concluiriamos que φ não satisfaz $(C_e)_c$, contrário à nossa hipótese.

Observações:

(1)* Em particular, deduz-se a partir do corolário 3.1, que φ^c é limitado.

(2)* Se $\varphi \in C^1(X, I\!R)$, satisfaz $(C_e)_c$ e φ^c é limitado, então. $\varphi^{c+\gamma}$ é limitado, para algum $\gamma > 0$.

(3)* Se $\varphi \in C^1(X, I\!R)$ é limitada inferiormente, com $a = \inf\limits_X \varphi$. e, satisfaz $(C_e)_a$, então:

$\varphi^{a+\gamma}$ é limitado, para algum $\gamma > 0$.

(4)* Considerando a função $\varphi_0 : I\!R \to I\!R$, dada por $\varphi_0(x) = e^x$, temos:

φ_0^d é limitado, $\forall d < 0$.

Como φ^γ é ilimitado, $\forall \gamma > 0$, concluimos, usando o corolário 3.1, que φ_0 não satisfaz $(C_e)_0$

Proposição 3.2

Seja $\varphi \in C^1(X, I\!R)$, limitada inferiormente.

Se φ não é coerciva, então, φ não satisfaz $(C_e)_{c_0}$ onde

$$c_0 = \sup\{d \in I\!R : \varphi^d \text{ é limitado}\}.$$

Observação: notemos que no caso da φ_0, em (4)*, resulta $c_0 = 0$.

Prova da proposição 3.2

Denotando por $C = \{d \in I\!R : \varphi^d$ é limitado$\}$, tem-se que: $C \neq \phi$, pois φ é limitada inferiormente. Seja $c_0 = \sup C$.

Como φ não é coerciva, então $c_0 < +\infty$.

Também, pela definição de c_0, resulta:

φ^d é ilimitado, para $d > c_0$.

Assim, uma aplicação direta da proposição 3.1 permite concluir que φ não satisfaz $(C_e)_{c_0}$.

Corolário 3.2

Se $\varphi \in C^1(X, I\!R)$ é limitada inferiormente e satisfaz $(C_e)_c$, $\forall c \in I\!R$, então:

φ é coerciva.

Proposição 3.3

Seja $\varphi \in C^1(X, I\!R)$, limitada inferiormente. Chamemos

$$\alpha = \inf_X \varphi.$$

Se φ satisfaz $(C_e)_\alpha$, então toda sequência minimizante possui uma subsequência convergente.

Prova.

Seja $\{x_n\} \subset X$, tal que: $\varphi(x_n) \to \alpha$.

Se $||x_n|| \to 0$, então, não temos mais nada a provar.

Assumamos, assim, sem perda de generalidade, que existe $\delta > 0$, tal que: $||x_n|| \geq \delta$, $\forall n \geq 1$.

Para uma subsequência (denotada ainda por $\{x_n\}$), podemos supor que:

$$\varphi(x_n) \leq \alpha + \frac{1}{n^2} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Aplicando o princípio variacional de Ekeland, com $\varepsilon = \dfrac{1}{n^2}$, e, $\lambda = \dfrac{||x_n||}{h}$, segue-se que:

Existe uma sequência $\{y_n\} \subset X$, tal que:

- $\alpha \leq \varphi(y_n) \leq \varphi(x_n) \leq \alpha + \frac{1}{n^2}$

•• $\varphi(y_n) < \varphi(u) + \frac{1}{n||x_n||}||u - y_n||, \qquad \forall u \neq y_n$

••• $||y_n - x_n|| \leq \frac{||x_n||}{n}$

Deduzimos, então, que:

$$\varphi(y_n) \to \alpha \quad , \text{e},$$
$$||\varphi'(y_n)||_{X^*} \leq \frac{1}{n||x_n||}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
||\varphi'(y_n)||_{X^*}(1 + ||y_n||) &\leq ||\varphi'(y_n)||_{X^*} + ||\varphi'(y_n)||_{X^*} \cdot ||y_n - x_n|| + \\
+||\varphi'(y_n)||_{X^*}||x_n|| &\leq \frac{1}{n||x_n||} + \frac{1}{n||x_n||}.\frac{||x_n||}{n} + \frac{1}{n||x_n||}.||x_n|| \leq \\
&\leq \frac{1}{n\delta} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Assim, uma aplicação direta da condição $(C_e)_\alpha$, fornece:

$\{y_n\}$ possui uma subsequência $\{y_{n_k}\}$ convergente.

A seguir, vejamos que se $y_{n_k} \to y_0$, em X, então, $x_{n_k} \to y_0$, em X.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
||x_{n_k}|| &\leq ||x_{n_k} - y_{n_k}|| + ||y_{n_k} - y_0|| + ||y_0|| \leq \\
&\leq \frac{||x_{n_k}||}{n_k} + ||y_{n_k} - y_0|| + ||y_0||
\end{aligned}$$

Logo,

$$||x_{n_k}|| \leq \frac{||y_{n_k} - y_0|| + ||y_0||}{1 - \frac{1}{n_k}}.$$

Finalmente, então:

$$\begin{aligned}
||x_{n_k} - y_0|| &\leq ||x_{n_k} - y_{n_k}|| + ||y_{n_k} - y_0|| \leq \frac{||x_{n_k}||}{n_k} + ||y_{n_k} - y_0|| \leq \\
&\leq \frac{||y_{n_k} - y_0|| + ||y_0||}{n_k - 1} + ||y_{n_k} - y_0|| \to 0, \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.1

Para terminar a seção 1, consideremos um exemplo de uma função que satisfaz $(C_\epsilon)_0$, mas não verifica $(\text{P.S.})_0$.

Seja $\varphi : I\!R^2 \to I\!R$, definida por:

$$\varphi(x,y) = x\left(arctgy - \frac{\pi}{2}\right)$$

Consideremos a sequência $\{(0,n)\}_{n\geq 1}$.

Temos:

- $\varphi(0,n) = 0. \qquad \forall n$
- •• $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0,n) = arctgn - \dfrac{\pi}{2} \;\; ; \;\; \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(0,n) = 0.$

Logo, $\|\varphi'(0,n)\|_{(I\!R^2)^*} \to 0$, quando $n \to +\infty$.

Assim, $\{(0,n)\}_{n\geq 1}$é uma sequência de Palais-Smale, no nível 0.

Como dita sequência não possui subsequência convergente, então, φ não satisfaz $(\text{P.S.})_0$.

Seja, agora, $\{(z_n, w_n)\}_{n\geq 1}$, sequência em $I\!R^2$, tal que:

- $\varphi(z_n, w_n) \to 0$
- •• $\|\varphi'(z_n, w_n)\|_{(I\!R^2)^*}.(1 + \sqrt{z_n^2 + w_n^2}) \to 0,$

quando $n \to +\infty$.

Vamos provar que $\{(z_n, w_n)\}_{n\geq 1}$ é limitada (isto fornecería que: φ satisfaz $(C_\epsilon)_0$).

Em seguida, obtemos:

(i)* $\qquad z_n\left(arctgw_n - \dfrac{\pi}{2}\right) \to 0$

(ii)* $\qquad \sqrt{z_n^2 + w_n^2}\left(arctgw_n - \dfrac{\pi}{2}\right) \to 0$

(iii)* $\qquad \sqrt{z_n^2 + w_n^2}.\dfrac{z_n}{1 + w_n^2} \to 0.$

Se tivermos $|z_n| \to +\infty$, então, usando $(i)^*$, resultaria: $w_n \to +\infty$.

Por outro lado, $\sqrt{z_n^2 + w_n^2} \geq w_n$

Logo,

$$\sqrt{z_n^2 + w_n^2}\left(arctgw_n - \frac{\pi}{2}\right) \leq w_n\left(arctgw_n - \frac{\pi}{2}\right) \to -1$$

em contradição com (ii)*.

Assim, $|z_n| \leq$ const..

Só resta analisar o caso: $|z_n| \leq c$, e, $\{w_n\}$ ilimitada inferiormente.

Suponhamos, então, que $\{w_n\}$ possui uma subsequência, (ainda denotada por $\{w_n\}$) tal que: $w_n \to -\infty$.

Então, aplicando (i)*, resulta: $z_n \to 0$.

Portanto, utilizando (ii)*, chega-se à:

$-w_n\left(arctgw_n - \frac{\pi}{2}\right) \to 0$, o qual é um absurdo, pois,

$\lim\limits_{w_n \to -\infty} - w_n\left(arctgw_n - \frac{\pi}{2}\right) = -\infty$.

Conclusão: $|z_n| \leq$ const.. , e, $|w_n| \leq$ const.., como queríamos provar.

Seção 2

Teorema do Passo da Montanha, com condição de Cerami no lugar de (P.S.)

Teorema 3.1.

Seja E um espaço de Hilbert, real.

Consideremos $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, e, S um subconjunto fechado, de E, desconectando E.

Suponhamos que x_0 e x_1 estão em diferentes componentes conexas de $E \setminus S$.

Assumamos, também, que I é limitado inferiormente em S, e:

$$\inf_S I \geq b > a = \max\{I(x_0), I(x_1)\}.$$

Denotemos por: $\Gamma = \{f \in C([0,1], E) : f(0) = x_0,\ f(1) = x_1\}$.

Então:

$$c = \inf_{f\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(f(t)) > -\infty,$$

e, se I satisfaz $(C_e)_c$, teremos que c é valor crítico de I.

Prova: ver Apêndice.

Exemplo 3.2

Seja $F : I\!R^2 \to I\!R$, dada por:

$$F(x, y) = x^2 - (x-1)^3 y^2.$$

São facilmente verificáveis os seguintes fatos:

- F é de classe C^1
- •• $(0, 0)$ é o único ponto crítico de F.
- ••• Existem: uma vizinhança aberta, U, de $\overline{0} = (0, 0)$:

$$u_0 \notin \overline{U}; \quad c_0 > \max\{F(\overline{0}),\ F(u_0)\},$$

tais que:

$$\max\{F(\overline{0}), F(u_0)\} < c_0 \leq F(u), \qquad \forall u \in \partial U.$$

(Basta tomar $U = B_\rho(\overline{0})$, com ρ pequeno, e, u_0 qualquer ponto fora de $\overline{U}$, verificando $F(u_0) \leq 0$).

Então, ao considerar a família $\mathcal{A}$, de todas as trajetórias contínuas unindo $\overline{0}$ com u_0, temos que:

$$c = \inf_{A\in\mathcal{A}} \max_{u\in A} F(u) \geq c_0 > 0.$$

Em vista de que $c > 0$, resulta que c não é valor crítico de F. Como o Teorema do Passo da Montanha "falha", concluímos que $(C_e)_c$ não é satisfeita.

Vejamos isto de maneira mais concreta.

Escolhamos $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$.

Temos que S é fechado e desconecta $\mathbb{R}^2$.

Tomemos $u_0 = (2, 2)$.

Aplicando o teorema da alfândega temos que: cada elemento de $\mathcal{A}$ intersecta S, e, como $F_{|_S} \equiv 1$, resulta que:

$$c = \inf_{A \in \mathcal{A}} \max_{u \in A} F(u) \geq 1.$$

Vamos provar que $c = 1$.

Para tanto, definimos:

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{(x-1)^{3/2}}, x > 1\}.$$

Temos que: $(2, 2) \in \Gamma_0$, e, $F_{|_{\Gamma_0}} \equiv 0$.

Vamos considerar um elemento de $\mathcal{A}$, como indicado na figura 3.1. (k será escolhido apropriadamente).

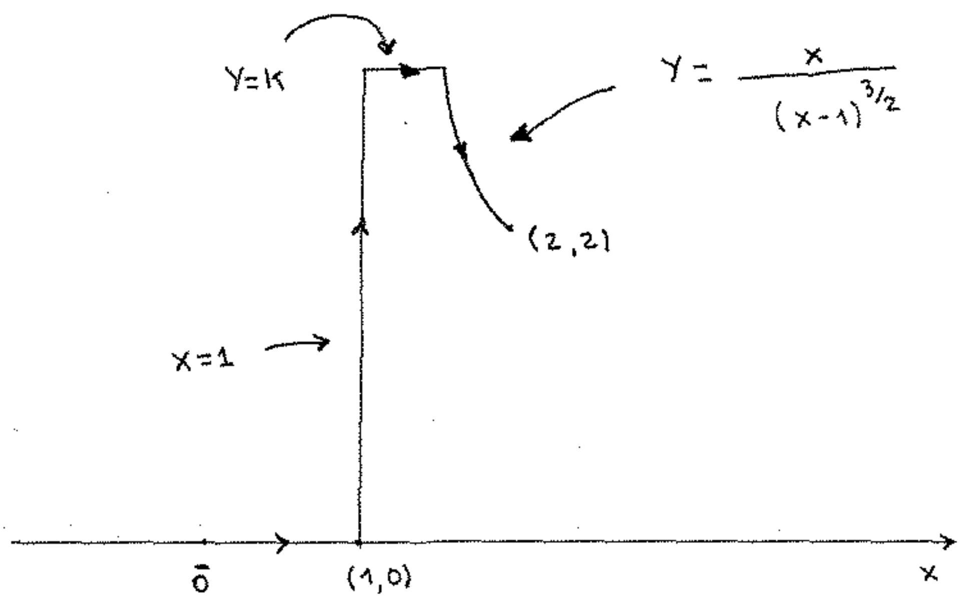


Figura 3.1.

Vemos que, ao longo desse caminho, acontece:

i) De $\bar{0}$ até $(1,0)$, o valor máximo de F é 1.

ii) De $(1,0)$ até $(1,k)$, F vale, sempre, 1.

iii) Levando em conta que a função $w(x) = x^2 - (x-1)^3 k^2$, $x \in [1, +\infty)$, $k > 0$ possui um máximo local em $x = 1 + \dfrac{1}{3k^2} + \dfrac{\sqrt{1+6k^2}}{3k^2}$, sendo o valor desse máximo=

$$= \left(1 + \frac{1}{3k^2} + \frac{\sqrt{1+6k^2}}{3k^2}\right)^2 - \frac{(1+\sqrt{1+6k^2})^3}{27k^4} = m,$$

resulta que, no trajeto de $(1,k)$ até $(1+\varepsilon, k)$ $\left(\text{com } k = \dfrac{1+\varepsilon}{\varepsilon^{3/2}}\right)$, o valor máximo de F está entre 1 e m.

Em resumo, ao longo do elemento de $\mathcal{A}$, indicado na figura 3.1, tem-se que: o valor máximo de F é maior ou igual à 1, e, menor ou igual à m.

Mas, notemos que, quando $k \to +\infty$, tem-se que $m \to 1$.

Logo, dado $\delta > 0$, existe $A_0 \in \mathcal{A}$ (tal elemento A_0 é como na figura 3.1, com k suficientemente grande) tal que:

$$\max_{u \in A_0} F(u) < 1 + \delta.$$

Portanto,

$$c = \inf_{A \in \mathcal{A}} \max_{u \in A} F(u) = 1.$$

Em seguida, vejamos que F não satisfaz $(C_c)_1$. Basta considerar a sequência $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 1}$, com:

$$x_n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{n} \quad , \quad y_n = \frac{n}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}.$$

Imediatamente prova-se que:

$$F(x_n, y_n) \to 1 \ ; \ (1 + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}).||F'(x_n, y_n)||_{(R^2)^*} \to 0,$$

mas, $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq 1}$ não possui subsequência convergente.

Nesta última parte estudaremos o seguinte problema de Neumann:

$$(1) \qquad \begin{cases} -u'' = \lambda u + g(x, u) + h(x), & x \in (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

onde:

$$(2) \qquad g : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{é contínua, e, } h \in L_2(0, 1).$$

Enquanto que, o comportamento de g em $-\infty$, vem dado por:

$$(3) \qquad \text{Existe} \quad \alpha \in (0, 1) \ \text{ tal que: } \lim_{s \to -\infty} \frac{g(x, s)}{(-s)^\alpha} = 0,$$

uniformemente em x.

O funcional a considerar é:

$$I : H \to \mathbb{R}, \qquad \text{dado por:}$$

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2 - \frac{\lambda}{2}\int_0^1 u^2 - \int_0^1 G(x, u) - \int_0^1 hu,$$

onde: $H = H^1(0, 1)$ é o usual espaço de Sobolev, com a norma:

$$||u||^2 = \int_0^1 (u')^2 + \int_0^1 u^2.$$

Devemos assinalar que precisaremos provar que I é limitado inferiormente em certa variedade, e, para isso necessitaremos que seja:

$$(4) \qquad 0 \leq \lambda < \frac{\pi^2}{4}$$

Em relação à $G(x, s) = \int_0^s g(x, \tau)d\tau$, suporemos:

(5) Existem : $\theta \in (0, 1/2)$, $k \in [0, 1/2 - \theta)$, $s_0 > 0$, tais que:

$$G(x, s) \leq \theta s g(x, s) + k s^2, \quad \forall s \geq 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

(6) Existem : $\quad a_0 > 0,\ \mu \in (\alpha + 1, 2),\ b_0 \in I\!R,$ tais que:

$$\frac{1}{2} g(x, s).s - G(x, s) \geq a_0 s^{\mu} - b_0, \quad \forall s > 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

(7) Se $\quad 0 < \lambda < \dfrac{\pi^2}{4},$ existem : $c_0 \in \left(-\infty, \dfrac{\lambda}{2}\right)$, e, $\{a_n\} \subset I\!R,$

tais que $a_n \to +\infty$, e, $\displaystyle\int_0^1 G(x, a_n) \geq -c_0 a_n^2, \qquad \forall n$ suficientemente grande.

(8) Se $\quad \lambda = 0,$ existem : $c_1 \in \left(\int |h|, +\infty\right)$, e, $\{b_n\} \subset I\!R,$

tais que $b_n \to +\infty$, e, $\displaystyle\int_0^1 G(x, b_n) \geq c_1 b_n, \quad \forall n$ suficientemente grande.

Finalmente, se $\lambda = 0$, assumiremos:

(9) $\displaystyle\lim_{s \to -\infty} g(x, s) = -\infty, \qquad$ uniformemente em x.

Claramente, $I \in C^1(H, I\!R)$, com:

$$I'(u).v = \int_0^1 u'v' - \lambda \int_0^1 uv - \int_0^1 g(x, u)v - \int_0^1 hv, \qquad \forall u, v \in H.$$

Assim, todo ponto crítico de I é solução de (1).

Nosso intuito é provar os seguintes teoremas:

Teorema 3.2.

Assumindo (2), ——, (7), tem-se que (1) possui uma solução.

Teorema 3.3.

Supondo (2), —— (6), (8), e, (9), resulta que:

(1) possui uma solução.

A prova de ditos teoremas será uma aplicação direta do teorema 3.1.

Assim, no que resta de capítulo veremos quatro lemas, visando preencher os requisitos do teorema 3.1.

Lema 3.1.

(2), (3), (5), e, (6) $\Rightarrow$ I satisfaz $(C_e)_c$, $\forall c \in I\!R$.

Agora, seja $N = \{u \in H : u(x) < 0, \ \ \forall x \in [0,1]\}$.

Sua fronteira, $\partial N = \{u \in H : u \leq 0$, e, $u(x) = 0$ para algum $x \in [0,1]\}$, pode ser caracterizada como a seguir.

Seja $E_1 = \{u \in H : \int_0^1 u = 0\}$.

Denotando por $\mathbb{1}$, a função constante igual à 1 em $(0,1)$, definimos: $f_1 : E_1 \to \partial N$, por

$$f_1(u) = u - \sigma(u)\mathbb{1},$$

onde:
$$\sigma(u) = \sup_{(0,1)} u.$$

Resulta que, f_1 possui inversa: a função $f_2 : \partial N \to E_1$, dada por: $f_2(z) = z - \int_0^1 z$.

Como consequência disso, f_1 é um homeomorfismo, e, ∂N é uma C^0-variedade (modelada globalmente em E_1), que separa H em duas componentes.

Lema 3.2.

(3) e (4) $\Rightarrow$ $I_{|\partial N}$ é limitado inferiormente.

Lema 3.3.

(i) (2), e (3), no caso $\lambda > 0$ $\Rightarrow$ $I(\rho(-\mathbb{1})) \to -\infty$, quando $\rho \to +\infty$

(ii) (2), e (9), no caso $\lambda = 0$ $\Rightarrow$ $I(\rho(-\mathbb{1})) \to -\infty$, quando $\rho \to +\infty$.

Lema 3.4.

(i) (7), no caso $\lambda > 0 \Rightarrow I(a_n(1\!\!1)) \to -\infty$, quando $n \to +\infty$

(ii) (8), no caso $\lambda = 0 \Rightarrow I(b_n(1\!\!1)) \to -\infty$, quando $n \to +\infty$

Prova do lema 3.1.

Sejam: $c \in I\!\!R$, e, $\{u_n\} \subset H$, tais que:

$$(10) \qquad I(u_n) \to c \quad ,e, \quad ||I'(u_n)||_{H^*}(1 + ||u_n||) \to 0.$$

Queremos provar que $\{u_n\}$ possui uma subsequência convergente. Para tanto, é suficiente demonstrar que $\{u_n\}$ é limitada (Ver observação, no Apêndice).

Suponhamos, então, por contradição, que $\{u_n\}$ possui uma subsequência, denotada ainda por $\{u_n\}$, tal que:

$$||u_n|| \to +\infty, \qquad \text{quando} \quad n \to +\infty$$

Sem perda de generalidade, supomos $||u_n|| \neq 0, \qquad \forall n$.

Seja $z_n = \dfrac{u_n}{||u_n||}$.

Logo, $||z_n|| = 1, \qquad \forall n$, e, assim:

Existe $z_0 \in H$, tal que: $z_n \rightharpoonup z_0$, em H.

(*) Com H está imerso compactamente em $C[0,1]$ tem-se: $z_n \to z_0$, uniformemente.

Em particular, $z_n \to z_0$, em $L_2(0,1)$.

Veremos que $z_0 \equiv 0$, e isto nos dará uma contradição.

Primeiro, provemos que $z_0 \leq 0$.

Denotemos por $\Omega^+ = \{x \in (0,1) : z_0(x) > 0\}$.

Suponhamos $\Omega^+ \neq \phi$.

Então, existe $[a,b] \subset \Omega^+$, com $b > a$.

Seja $M = \inf_{[a,b]} z_0 > 0$.

Em vista de (*), existe n_0 (que só depende de M) tal que:

$$n \geq n_0 \Rightarrow z_n(x) > \frac{M}{2}, \qquad \forall x \in [a,b]$$

Portanto,

$$[a,b] \subset \{x \in (0,1) : z_n(x) > 0\}, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Assim, $\forall n \geq n_0$, temos: $\displaystyle\int_{z_n>0} z_n^\mu \geq \int_{[a,b]} z_n^\mu.$

Mas, $\displaystyle\int_{[a,b]} z_n^\mu \to \int_{[a,b]} z_0^\mu \geq M^\mu(b-a) > 0.$

Logo,

$$\text{(11)} \qquad \int_{u_n>0} u_n^\mu = \left(\int_{z_n>0} z_n^\mu\right).\|u_n\|^\mu \to +\infty, \qquad \text{quando} \quad n \to +\infty$$

Por outro lado,

$$-\frac{1}{2}I'(u_n).u_n + I(u_n) = -\frac{1}{2}\int_0^1 hu_n + \int_0^1 \left[\frac{1}{2}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n)\right]$$

Então, aplicando (6), segue-se que:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}I'(u).u_n + I(u_n) \quad &\geq \quad -\frac{1}{2}\int_0^1 hu_n + a_0\int_{u_n>0} u_n^\mu - b_0\int_{u_n>0} 1 + \\ &+ \quad \int_{u_n\leq 0}\left[\frac{1}{2}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n)\right] \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned} \frac{-\frac{1}{2}I'(u_n).u_n + I(u_n)}{\int_{u_n>0} u_n^\mu} \quad &\geq \quad \frac{-\frac{1}{2}\int_0^1 hu_n}{\int_{u_n>0} u_n^\mu} + a_0 - \frac{b_0\int_{u_n>0} 1}{\int_{u_n>0} u_n^\mu} + \\ &+ \quad \frac{\int_{u_n\leq 0}[\frac{1}{2}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n)]}{\int_{u_n>0} u_n^\mu}. \end{aligned}$$

Em vista de (10) e (11), o primeiro membro de (12) tende para zero, quando $n \to +\infty$

Também, usando (11), temos que:

$$\frac{-b_0\int_{u_n>0} 1}{\int_{u_n>0} u_n^\mu} \to 0, \qquad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Entanto que:

$$\frac{\left|-\frac{1}{2}\int_0^1 hu_n\right|}{\int_{u_n>0} u_n^\mu} \leq \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 |h|\,|u_n|}{\left(\int_{z_n>0} z_n^\mu\right)||u_n||^\mu} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 |h|\,|z_n|}{\left(\int_{z_n>0} z_n^\mu\right)||u_n||^{\mu-1}} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 |h|\,|z_n|}{\left(\int_{[a,b]} z_n^\mu\right)||u_n||^{\mu-1}} \longrightarrow \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 |h|\,|z_0|}{\left(\int_{[a,b]} z_0^\mu\right)(+\infty)} = 0$$

Estudemos o último termo de (12).

Utilizando (2) e (3), segue-se que: dado $\varepsilon > 0$, existe $c_\varepsilon > 0$, tal que:

$$(13) \qquad |g(x,s)| \leq \varepsilon|s|^\alpha + c_\varepsilon\,, \qquad \forall s \leq 0.$$

Logo,

$$|G(x,s)| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha+1}|s|^{\alpha+1} + c_\varepsilon|s|, \qquad \forall s \leq 0.$$

Então, usando (13), resulta (para $n \geq n_0$):

$$\frac{\left|\int_{u_n\leq 0}[\frac{1}{2}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n)]\right|}{\int_{u_n>0} u_n^\mu} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{\varepsilon}{2}\int_{u_n\leq 0}|u_n|^{\alpha+1} + \frac{c_\varepsilon}{2}\int_{u_n\leq 0}|u_n| + \frac{\varepsilon}{\alpha+1}\int_{u_n\leq 0}|u_n|^{\alpha+1} + c_\varepsilon\int_{u_n\leq 0}|u_n|}{\int_{[a,b]} z_n^\mu . ||u_n||^\mu}$$

Portanto, como $\mu > \alpha + 1$, obtemos, que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_{u_n\leq 0}[\frac{1}{2}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n)]}{\int_{u_n>0} u_n^\mu} = 0$$

De maneira que, tomando limites, em (12), resulta:

$$0 \geq a_0,$$

contradizendo (6).

Conclusão: $\Omega^+ = \phi$, e, portanto, $z_0 \leq 0$.

Agora, chamemos de $\Omega^- = \{x \in (0,1) : z_0(x) < 0\}$. Suponhamos que $\Omega^- \neq \phi$.

Seja $v_0 \in C^\infty[0,1]$, com suporte compacto contido em Ω^-.

Aplicando (10), temos que: $||I'(u_n)||_{H^*} \to 0$.

Logo,

$$(14) \qquad \left|\int_0^1 u_n'v_0' - \lambda\int_0^1 u_n v_0 - \int_0^1 g(x,u_n)v_0 - \int_0^1 hv_0\right| \leq \varepsilon_n||v_0||,$$

com: $\varepsilon_n \to 0^+$, quando $n \to +\infty$.

Em seguida, obtemos:

$$(15) \qquad \left|\int_0^1 z_n'v_0' - \lambda\int_0^1 z_n v_0 - \int_0^1 \frac{g(x,u_n)v_0}{||u_n||} - \frac{\int_0^1 hv_0}{||u_n||}\right| \leq \frac{\varepsilon_n||v_0||}{||u_n||}.$$

Por outro lado, como $z_n \rightharpoonup z_0$, segue-se que:

$$\int_0^1 z_n'v_0' \to \int_0^1 z_0'v_0' \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 z_n v_0 \to \int_0^1 z_0 v_0.$$

Também, em vista de $||u_n|| \to +\infty$, tem-se

$$\int_0^1 \frac{hv_0}{||u_n||} \to 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\varepsilon_n||v_0||}{||u_n||} \to 0.$$

Vamos ver que: $\displaystyle\int_0^1 \frac{g(x,u_n)v_0}{||u_n||} \to 0$, quando $n \to +\infty$.

Aplicando $(*)$, podemos afirmar que:

$\forall n$ suficientemente grande, se $x \in \operatorname{supp} v_0$, então, $\quad u_n(x) < 0$.

Logo, dado $x \in \operatorname{supp} v_0$, usando (13), obtemos:

$$0 \leq \frac{|g(x,u_n(x))v_0(x)|}{||u_n||} \leq \frac{(\varepsilon|u_n(x)|^\alpha + c_\varepsilon)|v_0(x)|}{||u_n||}, \ \forall n$$

suficientemente grande.

Assim, para $x \in \operatorname{supp} v_0$, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(x,u_n(x))v_0(x)}{||u_n||} = 0.$$

Assim mesmo, para $x \in \operatorname{supp} v_0$, e, n suficientemente grande:

$$\frac{|g(x,u_n(x))v_0|}{||u_n||} \leq \frac{(\varepsilon|u_n|^\alpha + c_\varepsilon)|v_0|}{||u_n||} \leq \text{const.}.|v_0|$$

Então, o Teorema da Convergência Dominada nos fornece:

$$\int_0^1 \frac{g(x,u)v_0}{||u_n||} \to 0, \qquad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Portanto, tomando limites, em (15), segue-se que:

$$(16) \qquad \int_0^1 z_0' v_0' - \lambda \int_0^1 z_0 v_0 = 0, \qquad \forall v_0 \in C^\infty[0,1], \qquad \text{com}$$

$\text{supp} v_0 \subset \Omega^-$.

Ora, se $\lambda > 0$, então (16) significa que z_0 é uma autofunção do problema: $-z'' = \lambda z$, em qualquer intervalo $J \subset \Omega^-$. Mas, isto implica que $\lambda \geq \pi^2$, contrário à (4).

Enquanto que, se $\lambda = 0$, resulta, em vista de (16), que:

$$\int_0^1 z_0' v_0' = 0, \qquad \forall v_0 \in C^\infty[0,1], \qquad \text{com} \quad \text{supp} v_0 \subset \Omega^-.$$

Logo, $z_0 = \text{const.} < 0$, em todo $\Omega = (0,1)$.

Em particular: $\Omega^- = (0,1)$.

Escolhendo $v_0 \equiv 1$, em (14), conseguimos:

$$\left| - \int_0^1 g(x,u_n) - \int_0^1 h \right| \leq \varepsilon_n ||\mathbb{1}||.$$

Portanto,

$$(17) \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g(x,u_n) = - \int_0^1 h$$

Por outro lado, a partir de (9), obtemos que: dado $M^* < 0$, existe $S_{M^*} < 0$, tal que:

$$s \leq s_{M^*} \Rightarrow g(x,s) < M^*.$$

Como $u_n(x) \to -\infty$, para $x \in \Omega^-$, segue-se que: $g(x,u_n(x)) < M^*$, $\forall n$ suficientemente grande, e, $x \in \Omega^- = (0,1)$.

Assim, temos que: $\displaystyle\int_0^1 g(x,u_n(x)) < M^*$, $\qquad \forall n$ suficientemente grande.

Como $M^* < 0$ é arbitrário, concluímos que:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 g(x, u_n) = -\infty,$$

em contradição com (17).

Logo, deve ser $\Omega^- = \phi$, e, portanto: $z_0 \equiv 0$. A partir deste fato, vamos obter uma contradição final.

Por um lado, como $\displaystyle\int_0^1 z_n^2 + \int_0^1 (z_n')^2 = 1$, e, $\displaystyle\int_0^1 z_n^2 \to \int_0^1 z_0^2 = 0$, segue-se que:

$$\int_0^1 (z_n')^2 \to 1, \qquad \text{quando} \quad n \to +\infty. \tag{18}$$

Por outro lado, em vista de (10), temos:

Existe $c_0^* > 0$, tal que:

$$c_0^* \geq I(u_n) - \theta I'(u_n).u_n$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c_0^* \ &\geq \ \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \int_0^1 [(u_n')^2 - \lambda u_n^2] + \int_0^1 [\theta g(x, u_n) u_n - G(x, u_n)] + \\ &+ (\theta - 1) \int_0^1 h u_n. \end{aligned}$$

Assim, utilizando (5), obtemos:

$$\begin{aligned} c_0^* \ &\geq \ \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \int_0^1 [(u_n')^2 - \lambda u_n^2] - k \int_{u_n > s_0} u_n^2 + \int_{0 \leq u_n \leq s_0} [\theta g(x, u_n) u_n - G(x, u_n)] + \\ &+ \int_{u_n < 0} [\theta g(x, u_n) u_n - G(x, u_n)] + (\theta - 1) \int_0^1 h u_n. \end{aligned}$$

Logo, aplicando (2), conseguimos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \int_0^1 (u_n')^2 &\leq \tilde{c}_0 + \lambda \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \int_0^1 u_n^2 + k \int_{u_n > s_0} u_n^2 + \\ &+ \int_{u_n < 0} [G(x, u_n) - \theta g(x, u_n) u_n] + (1 - \theta) \int_0^1 h u_n. \end{aligned} \tag{19}$$

Também, usando (13), segue-se que:

$$(20)\quad \left|\int_{u_n<0}[G(x,u_n)-\theta g(x,u_n)u_n]\right| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha+1}\int_{u_n<0}|u_n|^{\alpha+1}+c_\varepsilon\int_{u_n<0}|u_n|+ +\theta\varepsilon\int_{u_n<0}|u_n|^{\alpha+1}+\theta c_\varepsilon\int_{u_n<0}|u_n|.$$

Levando em conta (20), em (19), e dividindo por $||u_n||^2$, chegamos à:

$$\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\int_0^1(z_n')^2 \leq \frac{\tilde{c}_0}{||u_n||^2}+\lambda\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\int_0^1 z_n^2+\frac{k\int_{u_n>s_0}u_n^2}{||u_n||^2}+ \frac{\varepsilon\left(\frac{1}{\alpha+1}+\theta\right)\int|u_n|^{\alpha+1}}{||u_n||^2}+\frac{c_\varepsilon(1+\theta)\int_{u_n<0}|u_n|}{||u_n||^2}+\frac{(1-\theta)\int_0^1 hu_n}{||u_n||^2}.$$

Em seguida, tomando limites, e, aplicando (5), obtemos:

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\int_0^1(z_n')^2\leq\frac{k}{\frac{1}{2}-\theta}<1,$$

em contradição com (18).

Conclusão: $\{u_n\}$ é limitado, e, assim, o lema 3.1* está provado.

Prova do lema 3.2.

Ver proposição 1.3, e, lema 1.2, de [9].

Prova do lema 3.3.

(i) Temos: $\qquad I(\rho(-\mathbb{1}))=-\frac{\lambda}{2}\rho^2-\int_0^1 G(x,-\rho)+\rho\int_0^1 h.$

$$(**)\qquad \text{ou seja,}\qquad \frac{I(\rho(-\mathbb{1}))}{\rho^2}=-\frac{\lambda}{2}-\frac{\int_0^1 G(x,-\rho)}{\rho^2}+\frac{\int_0^1 h}{\rho}.$$

Mas, $\dfrac{\int_0^1 h}{\rho}\to 0$, quando $\rho\to+\infty$.

Vejamos que: $\dfrac{\int_0^1 G(x,-\rho)}{\rho^2}\to 0$, quando $\rho\to+\infty$.

Com efeito, a partir de (13), obtemos:

$$|G(x,-\rho)|\leq\frac{\varepsilon}{\alpha+1}\rho^{\alpha+1}+c_\varepsilon\rho$$

O qual fornece: $\qquad \dfrac{\left|\int_0^1 G(x,-\rho)\right|}{\rho^2} \leq \dfrac{\varepsilon}{\alpha+1}\dfrac{\rho^{\alpha+1}}{\rho^2} + \dfrac{c_\varepsilon}{\rho}.$

Logo, $\qquad \lim\limits_{\rho\to+\infty} \dfrac{\left|\int_0^1 G(x,-\rho)\right|}{\rho^2} = 0.$

Então, tomando limites em $(**)$, segue-se que:

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{I(\rho(-\mathbb{1}))}{\rho^2} = -\frac{\lambda}{2}.$$

Assim,

$$I(\rho(-\mathbb{1})) = \frac{I(\rho(-\mathbb{1}))}{\rho^2}.\rho^2 \to \left(-\frac{\lambda}{2}\right).(+\infty) = -\infty.$$

(ii) $\qquad I(\rho(-\mathbb{1})) = -\int_0^1 G(x,-\rho) + \rho\int_0^1 h.$

Isto é,

$$\frac{I(\rho(-\mathbb{1}))}{\rho} = -\frac{\int_0^1 G(x,-\rho)}{\rho} + \int_0^1 h. \tag{21}$$

Por outro lado, em vista de (9), tem-se que:

Dado $k > 1 + \int_0^1 h$, existe $s_k < 0$, tal que:

$$s \leq s_k \;\Rightarrow\; g(x,s) < -k.$$

Logo, se $-\rho < s_k$ então:

$$\begin{aligned} G(x,-\rho) &= \int_0^{-\rho} g(x,\tau)d\tau = \int_0^{s_k} g(x,\tau)d\tau + \int_{s_k}^{-\rho} g(x,\tau)d\tau = \\ &= \int_0^{s_k} g(x,\tau)d\tau - \int_{-\rho}^{s_k} g(x,\tau)d\tau > \int_0^{s_k} g(x,\tau)d\tau + k(s_k+\rho) \end{aligned}$$

Substituindo, então, em (21), segue-se que: para $\rho > -s_k$, é:

$$\frac{I(\rho(-\mathbb{1}))}{\rho} < \frac{-\int_0^1\left[\int_0^{s_k} g(x,\tau)d\tau\right]dx}{\rho} - \frac{k(s_k+\rho)}{\rho} + \int_0^1 h. \tag{22}$$

Logo, tomando limites em (22), obtemos:

$$\lim_{\rho\to+\infty} \sup \frac{I(\rho(-\mathbb{1}))}{\rho} \leq -k + \int_0^1 h < -1.$$

Portanto, $I(\rho(-\mathbb{1})) \to -\infty$, quando $\rho \to +\infty$.

Prova do Lema 3.4.

(i) Em vista de (7), segue-se que:
para n suficientemente grande,

$$\frac{I(a_n(\mathbb{1}))}{a_n^2} = -\frac{\lambda}{2} - \frac{\int_0^1 G(x, a_n)}{a_n^2} - \frac{\int_0^1 h}{a_n} \leq -\frac{\lambda}{2} + c_0 - \frac{\int_0^1 h}{a_n}.$$

Portanto, $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \dfrac{I(a_n(\mathbb{1}))}{a_n^2} \leq -\dfrac{\lambda}{2} + c_0 < 0.$

Assim, $I(a_n(\mathbb{1})) \to -\infty$, quando $n \to +\infty$.

(ii) Aplicando (8), obtemos, para n suficientemente grande:

$$\frac{I(b_n(\mathbb{1}))}{b_n} = -\frac{\int_0^1 G(x, b_n)}{b_n} - \int_0^1 h \leq -c_1 - \int_0^1 h.$$

Mas, o último membro é negativo, pois:

$$-\int_0^1 h \leq \left| -\int_0^1 h \right| \leq \int_0^1 |h| < c_1.$$

Logo, $I(b_n(\mathbb{1})) \to -\infty$, quando $n \to +\infty$.

Exemplos.

(1) Se $g(x, s) = \begin{cases} s^2, s \geq 0, \\ -\sqrt{-s}, \ s \leq 0 \end{cases}$ verificam-se: (2), (3), (5), (6), (7), (8), (9).

(2) Se $g(x, s) = \begin{cases} -\sqrt{s}, s \geq 0, \\ 0, \ s \leq 0 \end{cases}$ são satisfeitas: (2), (3), (5), (6), (7).

Apêndice

Observação. Na prova do lema 3.1, usamos o fato que, para demonstrar que uma sequência, satisfazendo (10), possui uma subsequência convergente, basta ver que dita sequência é limitada. Efetivamente, a partir de (10) segue-se que:

$$||I'(u_n)||_{H^*} \to 0, \qquad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Logo, temos:

$$(23) \qquad \left| \int u_n' v' - \lambda \int u_n v - \int g(x, u_n) v - \int hv \right| \leq \varepsilon_n ||v||, \qquad \forall v \in H,$$

onde: $\varepsilon_n \to 0^+$.

Escolhendo, em (23), $v = u_n - u_0$,
(onde: $u_n \rightharpoonup u_0$, em H), obtemos

$$(24) \quad \left| \int u_n'(u_n' - u_0') - \lambda \int u_n(u_n - u_0) - \int g(x, u_n)(u_n - u_0) - \int h(u_n - u_0) \right| \leq$$
$$\leq \varepsilon_n ||u_n - u_0||.$$

Por outro lado:

$$u_n \rightharpoonup u_0 \;\Rightarrow\; \int h(u_n - u_0) \to 0, \qquad \text{e,} \qquad \lambda \int u_n u_0 \to \lambda \int u_0^2.$$

Também, como $H = H^1(0,1)$ está imerso compactamente em $L_2(0,1)$, temos:

$$\int u_n^2 \to \int u_0^2.$$

Logo, $$\lambda \int u_n(u_n - u_0) \to 0, \qquad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Então, se provarmos que $\int g(x, u_n)(u_n - u_0) \to 0$, podemos concluir, utilizando (24), que:

$$(25) \qquad \int u_n'(u_n' - u_0') \to 0, \qquad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Ora, como $\{u_n\}$ é limitada em $C[0,1]$, resulta que, aplicando a continuidade da g, e, a desigualdade de Scharwz, obtemos:

$$\left|\int g(x,u_n)(u_n-u_0)\right| \leq \int |g(x,u_n)|\,|u_n-u_0| \leq \text{const.}.||u_n-u_0||_{L_2} \to 0.$$

Estabelecida (25), vejamos que: $\int (u_n')^2 \to \int (u_0')^2$.

Com efeito,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \;\Rightarrow\; \int u_0' u_n' \to \int (u_0')^2.$$

Portanto,

$$\int u_0'(u_n'-u_0') \to 0, \qquad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Usando este último resultado, junto com (25), segue-se que:

$$\int (u_n')^2 - \int (u_0')^2 = \int u_n'(u_n'-u_0') + \int u_0'(u_n'-u_0') \to 0. \tag{26}$$

Ou seja, $||u_n|| \to ||u_0||$.

Mas, sabemos, que em um espaço de Hilbert:

$$\left.\begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u_0 \\ ||u_n|| \to ||u_0|| \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \to u_0.$$

Lema 3.5.

Sejam: E um espaço de Hilbert, real, e, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo $(C_\epsilon)_c$.

Então: se c nao é valor crítico de I, dado $\bar{\varepsilon} > 0$, existem:

$\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, e, $\eta \in C([0,1] \times E; E)$, tais que,

(η_1) $\quad \eta(t,u) = u, \quad \forall u \in I^{c-\bar{\varepsilon}}, \quad \forall t \in [0,1]$

(η_2) $\quad \eta(1, I^{c+\varepsilon}) \subseteq I^{c-\varepsilon}$.

Prova. Afirmamos que, dado $R > 1$, existem:

$\hat{\varepsilon} > 0$, $k_1 > 0$, $\overline{\sigma} > 0$, tais que:

$$||I'(u)|| > k_1 \qquad \text{se} \qquad u \in I^{-1}([c - \hat{\varepsilon},\ c + \hat{\varepsilon}]) \cap B_R(0) \tag{27}$$

$$||I'(u)||.||u|| \geq \overline{\sigma} \qquad \text{se} \qquad u \in I^{-1}([c - \hat{\varepsilon},\ c + \hat{\varepsilon}]) \cap (E \setminus B_R(0)). \tag{28}$$

Efetivamente, em primeiro lugar, existem:
$\overline{\sigma} > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, tais que:

$$||I'(u)||.||u|| \geq \overline{\sigma}, \qquad \forall u \in I^{-1}([c - \varepsilon_1, c + \varepsilon_1]) \cap (E \setminus B_R(0)),$$

pois, caso contrário, conseguimos $\{u_n\} \subset E$, com:

$$u_n \in I^{-1}\left(\left[c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right]\right) \cap (E \setminus B_R(0)). \qquad \text{e,}$$
$$||I'(u_n)||.||u_n|| < \frac{1}{n}.$$

Portanto,

$$I(u_n) \to c, \qquad \text{e,}$$
$$||I'(u_n)||(1 + ||u_n||) \leq ||I'(u_n)||.R + ||I'(u_n)||\ ||u_n|| \leq$$
$$\leq ||I'(u_n)||.||u_n|| + ||I'(u_n)||.||u_n|| < \frac{2}{n}.$$

Então, aplicando a condição $(C_e)_c$, junto com o fato $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, concluimos que, c é um valor crítico de I, contradizendo nossa hipótese.

Em segundo lugar, existem:
$k_1 > 0$, $\tilde{\varepsilon} > 0$, tais que:

$$||I'(u)|| > k_1, \qquad \forall u \in I^{-1}([c - \tilde{\varepsilon}, c + \tilde{\varepsilon}]) \cap B_R(0),$$

pois, não sendo assim, encontraríamos $\{v_n\} \subset E$, tal que:

$$v_n \in I^{-1}\left(\left[c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right]\right),\ ||v_n|| \leq R, ||I'(v_n)|| \leq \frac{1}{n}.$$

Logo,

$$I(v_n) \to c \qquad \text{, e,}$$
$$||I'(v_n)||(1 + ||v_n||) \leq ||I'(v_n)||(1 + R) \leq \frac{1 + R}{n} \to 0.$$

E, novamente, apelando à $(C_c)_c$, e, ao fato $I \in C^1(E, I\!R)$, chegamos à conclusao de que c é um valor crítico de I, contrariando nossa hipótese.

Tomando, então, $\hat{\varepsilon} = \min\{\varepsilon_1, \tilde{\varepsilon}\}$, seguem-se (27) e (28).

Além disso, como (27) e (28) continuam valendo se escolhermos um $\hat{\varepsilon}$ menor, podemos assumir:

$$\hat{\varepsilon} < \min\{\bar{\varepsilon}, 1/8\}. \tag{29}$$

Por sinal, também temos:

$$||I'(u)|| > 0, \quad \forall u \in I^{-1}[c - \hat{\varepsilon}, c + \hat{\varepsilon}].$$

Sejam, agora,

$\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon})$, e , $g : E \to [0, 1]$, Lipschitz-contínua, com:

$$\begin{array}{lll} g \equiv 0 & \text{em} & A = I^{c-\hat{\varepsilon}} \cup I_{c+\hat{\varepsilon}} \\ g \equiv 1 & \text{em} & B = I^{c+\varepsilon} \cap I_{c-\varepsilon}. \end{array}$$

onde, usamos a notação $I_{c-\varepsilon} = \{x \in E : I(x) \geq c - \varepsilon\}$.

Consideremos $W : E \to E$, dado por:

$$W(u) = \begin{cases} -g(u).\dfrac{V(u)}{||V(u)||^2}, & \text{para} \quad u \in \tilde{E} = \{u \in E : I'(u) \neq 0\} \\ 0, \quad \text{para} \quad u \notin \tilde{E}, \end{cases}$$

onde, V é um campo pseudo-gradiente para I, em $\tilde{E}$.

Tem-se que W é um campo vetorial, localmente Lipschitz-contínuo, tal que:

$$||W(u)|| \leq M_1 + M_2||u||, \quad \forall u \in E,$$

onde, M_1 e M_2 são constantes positivas.

Proposto o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta}{dt} = W(\eta(t)) \\ \eta(0) = u \in E \ , \end{cases}$$

temos que: para cada $u \in E$, existe uma (única) soluçao $\eta(\cdot, u)$, definida em $[0, +\infty)$.

Por outro lado, se $u \in I^{c-\bar{\varepsilon}}$, a partir da construção de W deduzimos:

$$\eta(t, u) = u, \qquad \forall t \qquad (\text{pois, nesse caso,} \quad g(u) = 0)$$

Assim, verifica-se (η_1).

Notemos também, que $I(\eta(t, u))$ é não-crescente, em $[0, +\infty)$, $\qquad \forall u \in E$.

Logo, para obtermos (η_2), basta considerarmos $Y = I^{c+\varepsilon} \cap I_{c-\varepsilon}$, e, mostrarmos que:

$$\eta(1, u) \in I^{c-\varepsilon}, \ \forall u \in Y$$

Ora, dado $u \in Y$, seja $s > 0$, tal que:

$$\eta(t, u) \in Y, \qquad \forall t \in [0, s]$$

Em vista de V ser um campo pseudo-gradiente, obtemos:

$$\frac{d}{dt} I(\eta(t, u)) = -I'(\eta(t, u)) . \frac{V(\eta(t, u))}{||V(\eta(t, u))||^2} \leq -\frac{1}{4}, \quad \forall t \in [0, s].$$

Então, integrando segue-se que:

$$I(\eta(s, u)) - I(\eta(0, u) \leq -\frac{s}{4}. \tag{30}$$

Mas, $\qquad \begin{cases} c - \varepsilon & \leq \quad I(\eta(s, u)) \leq c + \varepsilon \\ -c - \varepsilon & \leq \quad -I(\eta(0, u)) \leq -c + \varepsilon \end{cases}$

Portanto,

$$-2\varepsilon \leq I(\eta(s, u)) - I(\eta(0, u)) \leq 2\varepsilon. \tag{31}$$

Aplicando (30) e (31), resulta: $\varepsilon \geq \frac{s}{8}$.

Então, levando em conta (29), deve ser: $s < 1$.

Logo, $\qquad \eta(1, u) \notin Y$, e, então, $\eta(1, u) \in I^{c-\varepsilon}$

Prova do teorema 3.1.

Notemos que $f([0,1]) \cap S \neq \phi$. $\qquad \forall f \in \Gamma$.

Portanto, para cada $f \in \Gamma$, tem-se:

$$\max_{t\in[0,1]} I(f(t)) \geq b.$$

Logo, $\qquad c \geq b$.

Supondo que c não é valor crítico de I, podemos usar, então, o lema 3.5*, com $\bar{\varepsilon} = \dfrac{b-a}{2}$.

Assim, obtemos que:

Existem: $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{b-a}{2}\right)$, $\quad \eta \in C([0,1] \times E; E)$, tais que,

(32) $$\eta(t,u) = u, \qquad \forall u \in I^{c-\bar{\varepsilon}}, \qquad \forall t \in [0,1]$$

(33) $$\eta(1, I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$$

Sendo $f_0 \in \Gamma$, tal que:

(34) $$\max_{t\in[0,1]} I(f_0(t)) \leq c + \varepsilon,$$

definimos: $\qquad \widehat{f}_0(t) = \eta(1, f_0(t))$.

Resulta que: $\widehat{f}_0 \in \Gamma$.

Com efeito,

Como $I(x_0) \leq a < c - \bar{\varepsilon}$, tem-se:

$$\widehat{f}_0(0) = \eta(1, f_0(0)) = \eta(1, x_0) = x_0.$$

Assim mesmo, em vista de que $I(x_1) \leq a < c - \bar{\varepsilon}$, segue-se que:

$$\widehat{f}_0(1) = \eta(1, f_0(1)) = \eta(1, x_1) = x_1.$$

Mas, (34) e (33), implicam que:

$$I(\widehat{f}_0(t)) = I(\eta(1, f_0(t)) \leq c - \varepsilon, \qquad \forall t \in [0,1].$$

Logo,

$$\max_{t\in[0,1]} I(\widehat{f}_0(t)) \leq c - \varepsilon,$$

contrariando a definiçao de c.

Bibliografia

[1] David Arcoya - Salvador Villegas – Nontrivial solutions for a Neumann problem with a nonlinear term asymptotically at $-\infty$ and superlinear at $+\infty$. Revised version. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada 1994.

[2] Haïm Brezis – Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, 1987.

[3] H. Brezis and L. Nirenberg – Remarks on finding critical points, Comm. Pure Apply. Math. 44 (1991) 939-963.

[4] Alfonso Castro – Métodos Variacionales y Análisis funcional no lineal. X Colóquio Colombiano de Matemáticas, 1980.

[5] David G. Costa – Tópicos em Análise Não-linear e Aplicações às equações diferenciais. VIII Escola Latinoamericana de Matemática, 1986.

[6] D.G. Costa and C.A. Magalhães – Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 23, nº 11, pp. 1401-1412, 1994.

[7] D.G. Costa and Elves A. de B. Silva – The Palais-Smale Condition versus Coercivity. Notas e Comunicações de Matemática nº 166. Departamento de Matemática. Universidade Federal de Pernambuco, 1989.

[8] Deimling, Klaus – Nonlinear functional analysis, Springer-Verlag, 1985.

[9] D.G. Figueiredo and B. Ruf – On a superlinear Sturm-Liouville equation and a related bouncing problem. J. reine angew. Math. 421 (1991), 1-22.

[10] D.G. Figueiredo – On superlinear elliptic problems with nonlinear interacting only with higher eigenvalues. Rocky Mountain Journal of Mathematics.

Volume 18, Number 2, Winter 1988.

[11] D.G. Figueiredo – Lectures Notes on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours Tata Institute of Fundamental Research Lectures in Mathematical and Physics, 81. Springer-Verlag (1989).

[12] D.G. Figueiredo – Equações Elípticas não Lineares, 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1977.

[13] João Marcos B. do Ó – Existência de soluções para algumas equações elípticas quasilineares. Tese de Doutorado, UNICAMP, Brasil, (1995)

[14] Otared Kavian – Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problémes elliptiques. Springer-Verlag.

[15] Li Shujie – Some aspects of critical point theory, preprint 1986.

[16] Lima, Elon L. – Introdução à Topologia Differecial. Notas de Matemática nº 23. IMPA.

[17] Lima, Elon L. – Espaços Métricos. Projeto Euclides, 2ª edição.

[18] A. Marino - A.M. Micheletti - A. Pistoia – Some Variacional Results on semilinear problems with asymptotically nonsimmetric behaviour. Quaderni dell'Instituto di Matematiche Applicate "U. Dini". Facoltà di Ingegnería - Università di Pisa (1991).

[19] A.M. Micheletti - A. Pistoia – A multiplicity result for a class of superlinear elliptic problems. Portugaliae Mathematica. Vol. 51. Fasc. 2, 1994.

[20] L. Nirenberg – Variational and Topological Methods in Nonlinear problems. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society. Vol. 4, Number 3, May 1981.

[21] Paul. H. Rabinowitz – Minimax Methods in critical point Theory with applications to differential equations. "Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of Miami, January 9-13, 1984".

[22] Miguel P.N. Ramos – Teoremas de Enlace na Teoria dos Pontos Críticos. Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências, Dpto. de Matemática, 1993.

[23] B. Ruf and P.N. Srikanth, Multiplicity results for superlinear elliptic problems with partial interference with the spectrum. SISSA preprint.

[24] Sánchez Luís – Métodos da Teoría de pontos críticos. Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências. Depto. de Matemática, 1993.

[25] Elves A. de B. e Silva – Linking theorems and applications to semilinear elliptic problems at resonance. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 16. nº 5, pp. 455-477, 1991.

[26] Zeidler – Nonlinear Functional Analysis and its applications, I. Springer. New York 1986.