PRODUTOS TENSORIAIS DE FUNÇÕES SILVA - HOLOMORFAS E A PROPRIEDADE DE APROXIMAÇÃO

Otilia Terezinha Wiermann Paques

Dissertação apresentada ao I
de Matemática, Estatística e
da Computação da Universidad
dual de Campinas como requis
cial para a obtenção do títu
Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mário Carvalho

Agosto de 1977

Para Henrique , Mila e Fernanda.

Agradeço ao Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos pela orientação e incentivo recebidos.

Agradeço à todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

INTRODUÇÃO

J.Sebastião e Silva em (1) e em outros trabalhos definiu um conceito de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos , que posteriormente foi denominado de aplicações Silva - holomorfas . Para E e F espaços localmente convexos complexos e separados , denotamos por $\mathcal{H}_S(E;F)$ o espaço das aplicações $f:E \longrightarrow F$, Silva-holomorfas . Temos que, f pertencente a $\mathcal{H}_S(E;F)$ é holomorfa se , e somente se , f for contínua. Neste trabalho obtivemos resultados sobre a aderência de $\mathcal{H}_S(E;\mathbb{C}) \otimes F$ em ($\mathcal{H}_S(E;F), \tau$) , para as topologias "naturais" τ , neste espaço, relacionando-a com a propriedade de aproximação (P.A.), para ($\mathcal{H}_S(E;\mathbb{C}), \tau$) e para E . As topologias localmente convexas "naturais" τ em $\mathcal{H}_S(E;F)$ são introduzidas e estudadas no capítulo 1 . Para alguns subespaços de $\mathcal{H}_S(E;F)$, como os das aplicações Silva-holomorfas de tipos nuclear e compacto , introduzidas no capítulo 2 , também foram obtidos resultados nesse sentido.

Dizemos que um subconjunto K de E é compacto estrito se existe um subconjunto B limitado, absolutamente convexo e fechado de E tal que K está contido e é compacto no espaço E_B gerado por B e normado pelo funcional de Minkowski p_B . Um espaço E tem a propriedade de S-aproximação (P.S.A.) se , dado um subconjunto compacto estrito K de E , existe um subconjunto B limitado, absolutamente convexo e fechado de E tal que K está contido em E_B e é compacto em E_B e dado $\varepsilon > 0$ existe uma aplicação linear $T:E \longrightarrow E$ limitada sobre os limitados de E , tal que T(E) tem dimensão finita , satisfazendo $p_B(T(x) - x) < \varepsilon$, para todo $x \in K$. Para a topologia τ_{oe} , da convergência uniforme sobre os compactos estritos de E , em $\mathcal{H}_S(E;F)$ e para E quase-completo , são equivalentes:

(1) E tem a P.S.A. .

(2) $\mathcal{H}_S(E) \otimes F$ é τ_{oe}- denso em $\mathcal{H}_S(E;F)$, para todo F .

(3) $(\mathcal{H}_S(E), \tau_{oe})$ tem a P.A. .

A hipótese de E ser quase-completo só é necessária para $(3) \longrightarrow (1)$.

Seja F normado . Uma seminorma p em $\mathcal{H}_S(E;F)$ é K-B portada por algum subconjunto compacto estrito K de E e algum subconjunto limitado, absolutamente convexo e fechado B de E, tal que K está contido em E_B e é compacto em E_B se , dado $\varepsilon > 0$, existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$p(f) \leq c(\varepsilon) \sup \{ \| f(x) \| \ ; \ x \in K+\varepsilon B \} ,$$

para toda $f \in \mathcal{H}_S(E;F)$. A topologia $\tau_{\omega se}$ em $\mathcal{H}_S(E;F)$ é gerada pela família das seminormas definidas acima. Para o estudo da aderência de $\mathcal{H}_S(E) \otimes F$ em $(\mathcal{H}_S(E;F), \tau_{\omega se})$ foi necessário a introdução do conceito de aplicações Silva-holomorfas b-compactas: Dizemos que $f:E \longrightarrow F$ é b-compacta se , para cada subconjunto limitado , absolutamente convexo e fechado B de E , $f|_{E_B}$ é com -

pacta , ou seja , se para todo $x \in E_B$, existe uma vizinhança V_B de x em E_B , tal que $f|_{E_B}(V_B)$ é precompacto em F . Denotamos por $\mathcal{H}_{SK}(E;F)$ o espaço das aplicações Silva-holomorfas b-compactas de E em F . No capítulo 5 obtivemos a fórmula

$$(\mathcal{H}_S(E), \tau_{\omega se})\, \varepsilon\, F \approx (\mathcal{H}_{SK}(E;F), \tau_{\omega se}) \,,$$

para F de Banach , da qual concluímos que $(\mathcal{H}_S(E), \tau_{\omega se})$ tem a P.A. se, e somente se , para todo F de Banach , $\mathcal{H}_S(E) \otimes F$ é $\tau_{\omega se}$- denso em $\mathcal{H}_{SK}(E;F)$.

Em espaços de Banach , para as topologias τ_o (topologia compacto-aberta) e τ_ω (topologia de Nachbin) , resultados nessa direção foram obtidos por Aron e Schottenloher (1) e Aron (1).

Ainda mais , para F e G de Banach , obtivemos também resultados sobre o produto tensorial $\mathcal{H}_S(E;F) \otimes G$ e sobre o completamento de $\mathcal{H}_S(E;F) \bar{\otimes}_\varepsilon G$, nos capítulos 4 e 5 .

RESUMO

Sejam E e F espaços localmente convexos complexos separados, U um subconjunto aberto não vazio de E e $\mathcal{H}_S(U;F)$ o espaço das aplicações Silva-holomorfas de U em F. A aderência do produto tensorial $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ em $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau)$ foi estudada, para diferentes topologias τ e obtivemos resultados sobre a propriedade de aproximação para $(\mathcal{H}_S(U), \tau)$ e para E. Para o produto tensorial completado $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau) \hat{\otimes}_\varepsilon G \subset (\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau)$, para F e G de Banach, também foram obtidos resultados.

ÍNDICE

1. APLICAÇÕES SILVA-HOLOMORFAS ENTRE ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS COMPLEXOS 1
   a) Aplicações Multilineares e Polinômios Silva-limitados 1
   b) Aplicações Silva-holomorfas 5
   c) Topologias em $\mathcal{H}_S(U;F)$ 10
2. ALGUNS SUBESPAÇOS VETORIAIS DO ESPAÇO DAS APLICAÇÕES SILVA-HOLOMORFAS 19
   a) Aplicações Multilineares e Polinômios Silva-limitados de Tipos Nuclear e Compacto 19
   b) Aplicações Silva-holomorfas de Tipos Nuclear e Compacto 27
   c) Outros Subespaços Vetoriais do Espaço das Aplicações Silva-holomorfas 37
3. $\mathcal{E}$ - PRODUTO E PROPRIEDADES DE APROXIMAÇÃO 41
4. PRODUTO TENSORIAL DE FUNÇÕES SILVA-HOLOMORFAS E A PROPRIEDADE DE APROXIMAÇÃO PARA $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe})$ . . 44
5. PRODUTO TENSORIAL DE FUNÇÕES SILVA-HOLOMORFAS E A PROPRIEDADE DE APROXIMAÇÃO PARA $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{\omega se})$ . . 57

BIBLIOGRAFIA 101

CAPÍTULO 1

APLICAÇÕES SILVA-HOLOMORFAS ENTRE ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS COMPLEXOS.

Em todo este trabalho E e F denotam espaços localmente convexos complexos separados e U um subconjunto aberto não vazio de E. $\mathcal{B}_E$ denota a coleção de todos os subconjuntos de E que são limitados, fechados e absolutamente convexos. Se $B \in \mathcal{B}_E$, E_B indica o subespaço de E gerado por B, normado pelo funcional de Minkowski, p_B, determinado por B. Denotamos por SNC(E) o conjunto das seminormas contínuas sobre E.

a) <u>Aplicações Multilineares e Polinômios Silva-limitados</u>.

Sejam $E_1,..,E_n$ espaços localmente convexos complexos separados. Em $E_1 x \ldots x E_n$ consideramos a topologia localmente convexa produto das topologias de $E_1, \ldots, E_n$.

1.1 DEFINIÇÃO $\mathcal{L}_a(E_1,..,E_n;F)$ indica o espaço vetorial das aplicações n-lineares de $E_1x\ldots xE_n$ em F e $\mathcal{L}_b(E_1,..,E_n;F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{L}_a(E_1,..,E_n;F)$ das aplicações n-lineares de $E_1x\ldots xE_n$ em F que são limitadas sobre os subconjuntos limitados de $E_1x\ldots xE_n$. $\mathcal{L}(E_1,..,E_n;F)$ indica o subespaço vetorial de

$\mathcal{L}_b(E_1,\ldots,E_n;F)$ das aplicações n-lineares de $E_1 x \ldots x E_n$ em F que são contínuas. Uma aplicação n-linear T de $E_1 x \ldots x E_n$ em F é Silva-limitada (S-limitada) se, e somente se, $T \in \mathcal{L}_b(E_1,\ldots,E_n;F)$.

1.2 OBSERVAÇÃO Se $B_i \in \mathcal{B}_{E_i}$, $i=1,\ldots,n$, $\beta \in SNC(F)$ e $T \in \mathcal{L}_b(E_1,\ldots,E_n;F)$, indicamos por

$$\|T\|_{B_1,\ldots,B_n,\beta} = \sup\left\{\beta(T(x_1,\ldots,x_n)); x_i \in B_i,\ i=1,\ldots,n\right\}.$$

É fácil verificar que

$$\beta(T(x_1,\ldots,x_n)) \leq \|T\|_{B_1,\ldots,B_n,\beta} \cdot p_{B_1}(x_1)\ldots p_{B_n}(x_n) \text{ ,}$$

para todo $x_i \in E_{B_i}$, $i=1,\ldots,n$.

Em $\mathcal{L}_b(E_1,\ldots,E_n;F)$ consideremos a topologia localmente convexa gerada pelas seminormas $\|\cdot\|_{B_1,\ldots,B_n,\beta}$, onde $B_i \in \mathcal{B}_{E_i}$, $i=1,\ldots,n$ e $\beta \in SNC(F)$. $\mathcal{L}_b(E_1,\ldots,E_n;F)$ indicará sempre o espaço $\mathcal{L}_b(E_1,\ldots,E_n;F)$ munido da topologia definida acima. Quando $B_1 = \ldots = B_n = B$, então $\|\cdot\|_{B_1,\ldots,B_n,\beta}$ será denotado por $\|\cdot\|_{B,\beta}$. $\mathcal{L}_b(^nE;F)$ é o espaço vetorial das aplicações n-lineares S-limitadas de $E^n = Ex\ldots xE$ (n vêzes) em F. $\mathcal{L}_{bs}(^nE;F)$ indica o subespaço vetorial de $\mathcal{L}_b(^nE;F)$ das aplicações n-lineares simétricas e S-limitadas de E^n em F. $\mathcal{L}_s(^nE;F)$ indica o subespaço vetorial de $\mathcal{L}_{bs}(^nE;F)$ das aplicações n-lineares simétricas e contínuas de E^n em F. Para n=0 definimos $\mathcal{L}_b(^oE;F) = \mathcal{L}_{bs}(^oE;F) = F$ como espaço localmente convexo.

1.3 PROPOSIÇÃO Para todo F completo, $\mathcal{L}_b(E_1,\ldots,E_n;F)$ é completo.

1.4 PROPOSIÇÃO Para todo F , $\mathcal{L}_{bs}(^nE;F)$ é um subespaço vetorial topológico fechado de $\mathcal{L}_b(^nE;F)$.

1.5 DEFINIÇÃO Se $T \in \mathcal{L}_b(^nE;F)$, a simetrização T_s de T é uma aplicação n-linear de E^n em F , definida por

$$T_s(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} T(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) ,$$

onde S_n indica o grupo simétrico de ordem n .

1.6 PROPOSIÇÃO A aplicação simetrização $T \in \mathcal{L}_b(^nE;F) \longmapsto T_s \in \mathcal{L}_{bs}(^nE;F)$ é uma projeção contínua sobre $\mathcal{L}_{bs}(^nE;F)$. Além disso , $T = T_s$, se, e somente se, $T \in \mathcal{L}_{bs}(^nE;F)$.

1.7 DEFINIÇÃO Sejam $T \in \mathcal{L}_a(^nE;F)$, $x \in$ e E e $n \in \mathbb{N}$. Se $n=1,2,\ldots$ escrevemos Tx^n para indicar $T(x,\ldots,x)$ com x repetido n vêzes. Para $n=0$, definimos $Tx^0 = T$. Uma aplicação $P:E \longrightarrow F$ é um polinômio n-homogêneo se existe $T \in \mathcal{L}_a(^nE;F)$ tal que $P(x)=Tx^n$, para todo $x \in E$. Para indicar que T corresponde a P usamos a notação $P = \hat{T}$. $\mathcal{P}_a(^nE;F)$ indica o espaço vetorial dos polinômios n-homogêneos de E em F. $\mathcal{P}_b(^nE;F)$ indica o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_a(^nE;F)$ dos polinômios n-homogêneos de E em F que são limitados sobre os subconjuntos limitados de E e $\mathcal{P}(^nE;F)$ indica o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_b(^nE;F)$ dos polinômios n-homogêneos de E em F que são contínuos. Um polinômio n-homogêneo P de E em F é Silva-limitado (S-limitado) se, e somente se, $P \in \mathcal{P}_b(^nE;F)$. Em $\mathcal{P}_b(^nE;F)$ consideremos a topologia localmente convexa definida pelas seminormas:

$$\|P\|_{B,\beta} = \sup \left\{ \beta(P(x)) \ ; \ x \in B \right\} ,$$

para todo $B \in \mathcal{B}_E$, $\beta \in SNC(F)$ e $P \in \mathcal{P}_b({}^nE;F)$. Observamos que

$$\beta(P(x)) \leq \|P\|_{B,\beta} \cdot (p_B(x))^n \quad ,$$

para todo $x \in E_B$.

Indicaremos por τ_s a topologia em $\mathcal{P}_b({}^nE;F)$ definida pelas seminormas $\|\cdot\|_{B,\beta}$, onde $B \in \mathcal{B}_E$ e $\beta \in SNC(F)$. Denotaremos $(\mathcal{P}_b({}^nE;F), \tau_s) = \mathcal{P}_b({}^nE;F)_s$.

1.8 PROPOSIÇÃO A aplicação $T \in \mathcal{L}_{bs}({}^nE;F) \longrightarrow \hat{T} \in \mathcal{P}_b({}^nE;F)$ é um isomorfismo algébrico e topológico entre $\mathcal{L}_{bs}({}^nE;F)$ e $\mathcal{P}_b({}^nE;F)_s$. Além disso

$$\|\hat{T}\|_{B,\beta} \leq \|T\|_{B,\beta} \leq \frac{n^n}{n!} \|\hat{T}\|_{B,\beta} \qquad (1)$$

para todo $B \in \mathcal{B}_E$, $\beta \in SNC(F)$ e $T \in \mathcal{L}_{bs}({}^nE;F)$.

1.9 OBSERVAÇÃO $\dfrac{n^n}{n!}$ é a melhor constante universal em (1). (Nachbin (1)).

1.10 PROPOSIÇÃO Para todo F completo e $n=0,1,\ldots$, $\mathcal{P}_b({}^nE;F)_s$ é completo.

1.11 DEFINIÇÃO Uma aplicação P de E em F é um polinômio Silva-limitado se existem $n=0,1,\ldots$, $P_k \in \mathcal{P}_b({}^kE;F)$ $(k=0,1,\ldots,n)$ tais que $P = P_o + \ldots + P_n$. Denotamos por $\mathcal{P}_b(E;F)$ o espaço vetorial de todos os polinômios Silva-limitados de E em F.

1.12 PROPOSIÇÃO Se $P \in \mathcal{P}_b(E;F)$, $P \neq 0$, existe uma única representação de P na forma $P = P_o + \ldots + P_n$, onde $n=0,1,\ldots$, $P_k \in \mathcal{P}_b({}^kE;F)$ $(k=0,1,\ldots,n)$ e $P_n \neq 0$.

b) Aplicações Silva-holomorfas.

1.13 DEFINIÇÃO Uma série formal de potências de E em F em tôrno de $\xi \in E$ é uma série na variável $x \in E$ da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-\xi)^n \quad ,$$

onde $A_n \in \mathcal{L}_{bs}(^nE;F)$ $(n=0,1,\ldots)$, ou da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x-\xi) \quad ,$$

onde $P_n = \hat{A}_n \in \mathcal{P}_b(^nE;F)$ $(n=0,1,\ldots)$. A_n e P_n são chamados coeficientes da série dada.

1.14 LEMA Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x-\xi)$ em tôrno de $\xi \in E$ é tal que para toda $\beta \in SNC(F)$ e todo $B \in \mathcal{B}_E$, existe $\rho_B > 0$ tal que

$$\lim_{m \to \infty} \beta\left(\sum_{n=0}^{m} P_n(x-\xi) \right) = 0 \quad ,$$

para todo $x \in \xi + \rho_B B$, então $\beta(P_n(t)) = 0$, para $n=0,1,\ldots$ e $t \in E$.

1.15 DEFINIÇÃO Seja U um subconjunto aberto não vazio de E. Uma aplicação $f:U \longrightarrow F$ é Silva-holomorfa (S-holomorfa) em U se para todo $\xi \in U$ existem $P_m \in \mathcal{P}_b(^mE;F)$ $(m=0,1,\ldots)$ tais que para toda $\beta \in SNC(F)$ e todo $B \in \mathcal{B}_E$, existe um $\rho_B > 0$ satisfazendo $\xi + \rho_B B \subset U$, tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x-\xi) \, ,$$

uniformemente em relação a β em $\xi + \rho_B B$. A sequência $(P_m)_{m=0}^{\infty}$ é única para todo $\xi \in E$, pelo LEMA 1.14 . Denotamos P_m por $\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(\xi)$ e A_m por $\frac{1}{m!}\delta^m f(\xi)$, se $\hat{A}_m = P_m$, para $m=0,1,\ldots\ldots$

A notação

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{\delta}^m f(\xi)(x-\xi),$$

indica a série de Taylor de f em ξ . $\mathcal{H}_S(U;F)$ denota o espaço vetorial de todas as aplicações S-holomorfas de U em F.

1.16 DEFINIÇÃO Uma aplicação $f: U \longrightarrow F$ é holomorfa em U se para todo $\xi \in U$, existem $P_m \in \mathcal{P}(^m E;F)$ $(m=0,1,\ldots)$ tais que para cada $\beta \in SNC(F)$, existe um aberto V de U contendo ξ para o qual

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi),$$

uniformemente em relação a β para $x \in V$. $\mathcal{H}(U;F)$ indica o espaço vetorial de todas as aplicações holomorfas de U em F. Referências básicas para tais aplicações encontram-se em Nachbin (2) e (3) e Noverraz (1) . Observamos que uma aplicação $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$ é holomorfa se, e somente se, f for contínua.

1.17 OBSERVAÇÃO $\mathcal{H}_S(U;F) = \mathcal{H}(U;F)$ para todo subconjunto aberto não vazio U de um espaço metrizável, ou Silva, E e para todo F localmente convexo. Mais geralmente $\mathcal{H}_S(U;F) = \mathcal{H}(U;F)$ se U for um subconjunto aberto não vazio de um espaço E holomorficamente bornológico.(Matos (1)).

1.18 PROPOSIÇÃO Uma aplicação $f:U \longrightarrow F$ é S-holomorfa se, e so - mente se, $f|_{U \cap E_B}$ é holomorfa em $U \cap E_B$, para todo $B \in \mathcal{B}_E$.

1.19 COROLÁRIO $\mathcal{P}_b({}^nE;F)|_U \subset \mathcal{H}_S(U;F)$, para todo $n=0,1,\ldots$

1.20 COROLÁRIO Para $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, $\xi \in U$, $x \in U$ e $\rho > 1$ tal que $(1-\lambda)\xi + \lambda x \in U$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < \rho$, então

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f((1-\lambda)\xi + \lambda x)}{\lambda - 1}\, d\lambda .$$

1.21 COROLÁRIO (fórmula integral de Cauchy) Sejam $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, $\xi \in U$, $x \in E$ e $\rho > 0$ tal que $\xi + \lambda x \in U$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq \rho$. Então

$$\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(\xi)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi + \lambda x)}{\lambda^{n+1}}\, d\lambda ,$$

para $n=0,1,\ldots\ldots$

1.22 COROLÁRIO (desigualdade de Cauchy) Se $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, $\beta \in SNC(F)$, $B \in \mathcal{B}_E$, $\xi \in U$ e $\rho_B > 0$ tal que $\xi + \rho_B B \subset U$, então

$$\left\| \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(\xi) \right\|_{B,\beta} \leq \frac{1}{\rho_B^n} \sup_{x-\xi \in \rho_B B} \beta(f(x)) ,$$

para $n=0,1,\ldots$

1.23 LEMA Sejam $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, $\xi \in U$, $x \in U$ e $\rho > 1$, tal que $(1-\lambda)\xi + \lambda x \in U$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq \rho$. Então

$$f(x) - \sum_{k=0}^{m} P_k(x-\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f((1-\lambda)\xi + \lambda x)}{\lambda^{m+1}(\lambda - 1)}\, d\lambda ,$$

onde $P_k = \frac{1}{k!}\hat{\delta}^k f(\xi)$.

1.24 LEMA Se $P \in \mathcal{P}_b({}^kE;F)$, então $\delta^m P \in \mathcal{P}_b({}^{k-m}E; \mathcal{L}_{bs}({}^mE;F))$ e $\hat{\delta}^m P \in \mathcal{P}_b({}^{k-m}E; \mathcal{P}_b({}^mE;F))$, para $m=0,1,..,k$.

Prova: Temos que $\delta^m P(\xi) = m!\binom{k}{m} A\,\xi^{k-m}$, onde $\hat{A} = P$, $A \in \mathcal{L}_{bs}({}^kE;F)$. Desde que para todo $B \in \mathcal{B}_E$ e $\beta \in SNC(F)$,

$$\beta(A(x_1,..,x_k)) \leq \|A\|_{B,\beta}\, p_B(x_1)\dots p_B(x_k) ,$$

para $x_1,..,x_k \in E_B$, temos que

$$\beta(A\,\xi^{k-m}(x_1,\dots,x_m)) = \beta(A(\underbrace{\xi,\xi,\dots,\xi}_{k-m},x_1,\dots,x_m)) \leq$$

$$\leq \|A\|_{B,\beta}\, p_B(\xi)^{k-m}\, p_B(x_1)\dots p_B(x_m) ,$$

para todo $\xi \in E_B$ e $x_1,\dots,x_m \in E_B$.
Logo , $A\,\xi^{k-m} \in \mathcal{L}_{bs}({}^mE;F)$ e

$$\|A\,\xi^{k-m}\|_{B,\beta} \leq \|A\|_{B,\beta}\, p_B(\xi)^{k-m} ,$$

para todo $\xi \in E_B$. Portanto , segue o LEMA. Q.E.D.

1.25 PROPOSIÇÃO Se $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, então $\delta^m f \in \mathcal{H}_S(U; \mathcal{L}_{bs}({}^mE;F))$, $\hat{\delta}^m f \in \mathcal{H}_S(U; \mathcal{P}_b({}^mE;F))$, para $m=0,1,\dots$. Se

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-\xi),$$

é a série de Taylor de f em $\xi \in U$, então as séries de Taylor de $\delta^m f$ e $\hat{\delta}^m f$ em ξ são

$$\delta^m f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^m P_{k+m}(x-\xi) ,$$

$$\hat{\delta}^m f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\delta}^m P_{k+m}(x-\xi) .$$

Prova: Sejam $P_k = \frac{1}{k!}\hat{\delta}^k f(\xi) \in \mathcal{P}_b({}^kE;F)$ e $r_M(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{M} P_k(x-\xi)$, para $x \in U$ e $M \in \mathbb{N}$. Desde que $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, então para $\xi \in U$, $B \in \mathcal{B}_E$ e $\beta \in SNC(F)$, existe $\rho_B > 0$ satisfazendo $\xi + \rho_B B \subset U$ tal que

$$\sup_{t \in \xi + \rho_B B} \beta(f(t)) \leq C < \infty .$$

Sejam $\theta > 0$, $\rho > 0$, $\theta + \rho < 1$ e $\sigma = 1/(\theta + \rho) > 1$, fixos, tais que para todo $x \in \xi + \theta \rho_B B$ e $y \in \rho_B B$, temos $x + \lambda y \in \xi + (\theta + \rho)\rho_B B \subset \xi + \rho_B B \subset U$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq \rho$.

Portanto, do COROLÁRIO 1.21,

$$\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m r_M(x)(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{r_M(x+\lambda y)}{\lambda^{m+1}} \, d\lambda .$$

Pelo LEMA 1.23, temos

$$r_M(x+\lambda y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\sigma} \frac{f((1-\mu)\xi + \mu(x+\lambda y))}{\mu^{M+1}(\mu-1)} \, d\mu ,$$

pois para $|\mu| \leq \sigma$, $(1-\mu)\xi + \mu(x+\lambda y) \in \xi + \rho_B B$. Logo,

$$\beta\left(\frac{1}{m!}\hat{\delta}^m r_M(x)(y)\right) \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi\rho}{\rho^{m+1}} \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi\sigma C}{\sigma^{M+1}(\sigma-1)}$$

$$= \rho^{-m} \sigma^{-M} (\sigma-1)^{-1} C.$$

Portanto

$$\left\| \frac{1}{m!}\hat{\delta}^m r_M(x) \right\|_{B,\beta} \leq \frac{C}{\rho_B^m \; \rho^m \; \sigma^M(\sigma-1)} < +\infty$$

para todo $x \in \xi + \theta \rho_B B$.

Logo, como $\hat{\delta}^m r_M(x) = \hat{\delta}^m f(x) - \sum_{k=m}^{M} \hat{\delta}^m P_k(x - \xi) = \hat{\delta}^m f(x) - \sum_{k=0}^{M-m} \hat{\delta}^m P_{k+m}(x - \xi)$ se $M \geqslant m$, $\hat{\delta}^m P_{k+m} \in \mathcal{P}_b({}^kE; \mathcal{P}_b({}^mE;F))$, pelo LEMA 1.24 e $\left\| \frac{1}{m!} \hat{\delta}^m r_M(x) \right\|_{B,\beta} \longrightarrow 0$, quando $M \longrightarrow \infty$, para todo $x \in \xi + \theta \rho_B B$, temos que $\hat{\delta}^m f \in \mathcal{H}_S(U; \mathcal{P}_b({}^mE;F))$ e

$$\hat{\delta}^m f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\delta}^m P_{k+m}(x - \xi).$$ Q.E.D.

1.26 DEFINIÇÃO Uma aplicação $f:U \longrightarrow F$ é fracamente Silva-holomorfa se, para todo $\phi \in F'$, dual topológico de F, a função $\phi \circ f$ é Silva-holomorfa.

1.27 PROPOSIÇÃO Seja F com a propriedade que para todo subconjunto compacto K de F, a envoltória absolutamente convexa fechada de K, $\Gamma(K)$, é compacta. Então $f:U \longrightarrow F$ é fracamente Silva-holomorfa se, e somente se, f é Silva-holomorfa.

Prova: Se f é fracamente Silva-holomorfa, segue da PROPOSIÇÃO 1.18 que $f|_{U \cap E_B}$ é fracamente holomorfa, para todo $B \in \mathcal{B}_E$. Como $U \cap E_B$ é um aberto no espaço normado E_B e F satisfaz a condição enunciada acima, segue por Nachbin (4) que $f|_{U \cap E_B}$ é holomorfa. Logo, da PROPOSIÇÃO 1.18, f é S-holomorfa. Reciprocamente, se f é S-holomorfa e $\phi \in F'$, então $\phi \circ f$ é S-holomorfa. Q.E.D.

c) Topologias em $\mathcal{H}_S(U;F)$.

1.28 DEFINIÇÃO Um subconjunto compacto estrito de E é um subconjunto K de E tal que existe um $B \in \mathcal{B}_E$ para o qual K está con tido e é compacto em E_B . Se E for normado ou Fréchet (ou $\mathcal{DF}$) então as partes compactas estritas de E coincidem com as partes compactas.

Denotamos por τ_{oe} a topologia localmente convexa em $\mathcal{H}_S(U;F)$ da convergência uniforme sobre os subconjuntos compactos estritos de U , ou seja , a topologia gerada pela família de seminormas p em $\mathcal{H}_S(U;F)$ da forma:

$$p(f) = \sup_{x \in K} \beta(f(x)) \quad ,$$

para toda $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, $K \subset U$ compacto estrito e $\beta \in SNC(F)$.

1.29 PROPOSIÇÃO Sejam U um subconjunto aberto não vazio de E e F completo. Então $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{oe})$ é completo.

<u>Prova</u>: Sejam $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma rede de Cauchy em $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{oe})$ e $\beta \in SNC(F)$. Então se $B \in \mathcal{B}_E$, $(f_\alpha|_{U\cap E_B})_{\alpha\in I}$ é uma rede de Cauchy em $(\mathcal{H}(U\cap E_B);F), \tau_o)$ (τ_o é a topologia da convergência uniforme sobre os compactos de $U\cap E_B$) .

Desde que $(\mathcal{H}(U\cap E_B;F), \tau_o)$ é completo, para F completo, existe $f_B \in \mathcal{H}(U\cap E_B;F)$, tal que $(f_\alpha|_{U\cap E_B})_{\alpha\in I}$ converge para f_B uniformemente em relação a β, em todo $K \subset U\cap E_B$, compacto. Definindo $f:U\longrightarrow F$ por $f|_{U\cap E_B} = f_B$, para cada $B \in \mathcal{B}_E$, temos que $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge para f na topologia τ_{oe} e $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$ pela PROPOSIÇÃO 1.18. Q.E.D.

<u>Para as próximas definições , vamos considerar F normado.</u>

1.30 DEFINIÇÃO Sejam K um subconjunto compacto estrito de U ,

$B \in \mathcal{B}_E$, tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B . Uma seminorma p em $\mathcal{H}_S(U;F)$ é K-B portada se para cada $\varepsilon > 0$, com $K + \varepsilon B \subset U$, existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$p(f) \leq c(\varepsilon) \sup \left\{ \| f(t) \| ; t \in K+\varepsilon B \right\} ,$$

para toda $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$. A topologia localmente convexa $\tau_{\omega se}$ em $\mathcal{H}_S(U;F)$ é gerada pela família de tais seminormas.

1.31 PROPOSIÇÃO Sejam K um subconjunto compacto estrito de U , $B \in \mathcal{B}_E$, tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B e p uma seminorma em $\mathcal{H}_S(U;F)$ .São equivalentes:

a) p é K-B portada.

b) para cada $\varepsilon > 0$, existe $c(\varepsilon) > 0$, tal que

$$p(f) \leq c(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sup \left\{ \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(t) \right\|_B ; t \in K \right\}$$

para toda $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$. ($\|P\|_B = \sup\{\|P(t)\| ; t \in B\}$) .

Se U é um aberto equilibrado , $\tau_{\omega se}$ é gerada por todas as seminormas p tais que , para algum $K \subset U$ compacto estrito e $B \in \mathcal{B}_E$, tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B , p satisfaz :

para cada $\varepsilon > 0$, existe $c(\varepsilon) > 0$, tal que

$$p(f) \leq c(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{K+\varepsilon B} ,$$

para toda $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$.

1.32 PROPOSIÇÃO Se U é um subconjunto aberto equilibrado de E e $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, então a série de Taylor de f em 0 converge para f em $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{\omega se})$.

1.33 PROPOSIÇÃO Se U é um subconjunto aberto equilibrado de E a topologia $\tau_{\omega se}$ em $\mathcal{H}_S(U;F)$ é gerada por todas as seminormas da forma:

$$p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{K+\alpha_n B} ,$$

para toda $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, onde $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in C_o^+$, $K \subset U$ é um compacto estrito equilibrado e $B \in \mathcal{B}_E$, é tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B . (C_o^+ indica o conjunto das sequências de números reais positivos $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ tais que $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$) .

As provas das PROPOSIÇÕES 1.31 , 1.32 e 1.33 são análogas às das PROPOSIÇÃO 1.2 , LEMA 1.4 e PROPOSIÇÃO 1.5, respectivamente de Bianchini, Zaine , Paques (1) sobre a topologia $\tau_{\omega s}$ em $\mathcal{H}(U;F)$, onde $\tau_{\omega s}$ indica a topologia gerada pela família de seminormas p em $\mathcal{H}(U;F)$, tais que para algum $K \subset U$ compacto e $B \subset E$ limitado e equilibrado , p satisfaz:

para cada $\varepsilon > 0$, com $K + \varepsilon B \subset U$, existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$p(f) \leq c(\varepsilon) \quad \sup \left\{ \| f(t) \| \ ; \ t \in K + \varepsilon B \right\},$$

para toda $f \in \mathcal{H}(U;F)$.

1.34 PROPOSIÇÃO Se U é um subconjunto aberto equilibrado de E então a topologia $\tau_{\omega se}$ em $\mathcal{H}_S(U;F)$ é gerada pela família de seminormas p satisfazendo:

para cada $K \subset U$ compacto estrito equilibrado, $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B e $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in C_o^+$,

$$p(f) = \sup_n \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{K + \alpha_n B} ,$$

para toda $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$.

<u>Prova</u>: É claro que uma seminorma do tipo acima é $\tau_{\omega se}$ - contínua.

Reciprocamente , seja q uma seminorma $\mathcal{T}_{\omega se}$-contínua em $\mathcal{H}_S(U;F)$ dada por

$$q(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{K + \alpha_n B},$$

para toda $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, onde K, B e $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ são como acima. Seja $r > 1$ tal que $rK \subset U$. Pela homogeneidade dos polinômios temos que

$$q(f) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{rK + r\alpha_n B}$$

$$\leq \frac{r}{r-1} \sup_n \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{rK + r\alpha_n B}$$

que demonstra a PROPOSIÇÃO. Q.E.D.

1.35 OBSERVAÇÃO Para um subconjunto aberto equilibrado U de E prova-se de forma análoga à PROPOSIÇÃO anterior que a topologia $\mathcal{T}_{\omega s}$ em $\mathcal{H}(U;F)$ é gerada pela família de seminormas p da forma :

$$p(f) = \sup_n \left\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0) \right\|_{K + \alpha_n B}$$

para toda $f \in \mathcal{H}(U;F)$, onde $K \subset U$ é compacto equilibrado, $B \subset E$ é limitado equilibrado e $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in c_0^+$. Aqui $\frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0)$ denota o n-ésimo coeficiente da série de Taylor de f em 0.

1.36 PROPOSIÇÃO Para F completo e U um subconjunto aberto equilibrado de E , $(\mathcal{H}_S(U;F), \mathcal{T}_{\omega se})$ é completo.

<u>Prova</u> : Seja $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma rede de Cauchy em $(\mathcal{H}_S(U;F), \mathcal{T}_{\omega se})$.

Então , para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f_\alpha(0))_{\alpha \in I}$ é uma rede de Cauchy no espaço completo $(\mathcal{P}_b(^nE;F))_s$ (PROPOSIÇÃO 1.10). Suponhamos que $(\hat{\delta}^n f_\alpha(0))_{\alpha \in I}$ converge para P_n em $\mathcal{P}_b(^nE;F)_s$, para cada $n=0,1,\ldots$. Sejam $K \subset U$ compacto estrito equilibrado , $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B e $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in C_o^+$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\beta_o \in I$, tal que para β_1 , $\beta_2 \geqslant \beta_o$,

$$p(f_{\beta_1} - f_{\beta_2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n(f_{\beta_1} - f_{\beta_2})(0)\right\|_{K+\alpha_n B} \leq \varepsilon.$$

Então , para todo $m \in \mathbb{N}$ e $\beta_1, \beta_2 \geqslant \beta_o$,

$$\sum_{n=0}^{m} \left\| \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f_{\beta_1}(0) - \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f_{\beta_2}(0)\right\|_{K+\alpha_n B} \leq \varepsilon.$$

Passando ao limite para $\beta_1 \in I$, obtemos:

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{m} \left\| \frac{1}{n!} P_n - \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f_{\beta_2}(0)\right\|_{K+\alpha_n B} \leq \varepsilon,$$

para todo m e $\beta_2 \geqslant \beta_o$.

Desde que $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ é também uma rede de Cauchy no espaço completo $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{oe})$ (PROPOSIÇÃO 1.29) , existe $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, tal que $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge para f na topologia τ_{oe} . Em particular para cada $t \in U$, $(f_\alpha(t))_{\alpha \in I}$ converge para f(t). Para obter $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ convergindo para f na topologia $\tau_{\omega se}$, basta mostrar que

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n(t),$$

para cada $t \in U$, pois disso e de $(*)$, temos:

$$p(f - f_{\beta_2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} P_n - \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f_{\beta_2}(0) \right\|_{K+\alpha_n B} \leq \varepsilon ,$$

para $\beta_2 \geq \beta_o$.

Para $t \in U$, existe $\alpha_o \in I$ tal que, para todo $\alpha \geq \alpha_o$, $\|f_\alpha(t) - f(t)\| < \varepsilon$, como também, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| f_\alpha(t) - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f_\alpha(0)(t) \right\| < \varepsilon .$$

Logo, para $t \in U$ e $\alpha \geq \alpha_o$,

$$\left\| f(t) - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f_\alpha(0)(t) \right\| < 2\varepsilon .$$

Portanto como em (*), segue, para α fixo, maior que α_o e um certo β_o, que,

$$\left\| f(t) - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} P_n(t) \right\| \leq \left\| f(t) - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f_\alpha(0)(t) \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{n=0}^{M} \left(\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f_\alpha(0)(t) - \frac{1}{n!} P_n(t) \right) \right\| < 3\varepsilon . \text{ Q.E.D.}$$

A topologia τ_{nse}, $n \in \mathbb{N}$ em $\mathcal{H}_S(U;F)$ é definida pela família de seminormas

$$p(f) = \sup \left\{ \left\| \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f(x)(y) \right\| ; x \in K , y \in B \right\}$$

para $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, onde $j \leq n$, $K \subset U$ é compacto estrito e $B \in \mathcal{B}_E$ é tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B.

Em $\mathcal{H}(U;F)$ a topologia τ_{ns} é definida analogamente em Barroso (1).

A topologia $\tau_{\infty se}$ em $\mathcal{H}_S(U;F)$ é definida pelas seminormas τ_{nse}-contínuas, $n \in \mathbb{N}$. A seguinte inclusão é válida em $\mathcal{H}_S(U;F)$:

$$\tau_{oe} \leq \tau_{nse} \leq \tau_{(n+1)se} \leq \tau_{\infty se} \leq \tau_{\omega se}.$$

$\tau_{\infty se}$ induz em $\mathcal{P}_b(^nE;F)$ a topologia τ_s. A topologia $\tau_{\infty s}$ em $\mathcal{H}(U;F)$ é definida analogamente em Barroso (1).

1.37 PROPOSIÇÃO Para F completo e U um subconjunto aberto de E, $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{nse})$, $n \in \mathbb{N}$ e $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{\infty se})$ são completos.

<u>Prova</u>: Basta fazer para o espaço $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{nse})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Para a $\tau_{\infty se}$ o mesmo argumento funciona.

Seja $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma rede de Cauchy em $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{nse})$. Desde que $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{oe})$ é completo (PROPOSIÇÃO 1.29), existe $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, tal que $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge para f na topologia τ_{oe}. Para $K \subset U$ compacto estrito e $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B, temos, para cada $x \in K$, $y \in B$, $j \leq n$ e $\rho > 0$ tal que $x + \lambda y \in U$, para $|\lambda| \leq \rho$,

$$\left\| \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f_\alpha(x)(y) - \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f(x)(y) \right\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{(f_\alpha - f)(x+\lambda y)}{\lambda^{j+1}} \, d\lambda \right\|$$

pela fórmula integral de Cauchy. (COROLÁRIO 1.21).

Desde que $\{ x + \lambda y, |\lambda| \leq \rho \}$ é um compacto estrito em U, temos

$$\text{(i)} \quad \left\| \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f_\alpha(x)(y) - \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f(x)(y) \right\| \longrightarrow 0.$$

Como $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ é uma rede de Cauchy em $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{nse})$, então

$$\sup_{\substack{j \leq n \\ x \in K \\ y \in B}} \left\| \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f_\alpha(x)(y) - \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f_\beta(x)(y) \right\| \longrightarrow 0.$$

Passando ao limite na expressão acima para $\alpha \in I$, segue de (i) que :

$$\sup_{\substack{j \leq n \\ x \in K \\ y \in B}} \left\| \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f_\beta(x)(y) - \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f(x)(y) \right\| \longrightarrow 0 \, .$$

Q.E.D.

1.38 OBSERVAÇÃO Em $\mathcal{H}(U;F)$, para F completo e E um k-espaço (confere Kelley (1)) , temos os seguintes resultados : $(\mathcal{H}(U;F), \tau_o)$ e $(\mathcal{H}(U;F), \tau_{\infty s})$ são completos . Para U um subconjunto aberto equilibrado de E , $(\mathcal{H}(U;F), \tau_{\omega s})$ é completo.

CAPÍTULO 2

ALGUNS SUBESPAÇOS VETORIAIS DO ESPAÇO DAS APLICAÇÕES SILVA -HOLOMORFAS .

a) Aplicações Multilineares e Polinômios Silva-limitados de Tipos Nuclear e Compacto.

2.1 DEFINIÇÃO Para $\varphi \in E^*$ onde E^* denota o espaço $\mathcal{L}_b(E;\mathbb{C})$ e $b \in F$, denotamos a aplicação linear S-limitada $x \in E \longmapsto \varphi(x).b \in F$ por $\varphi.b \in \mathcal{L}_b(E;F)$. Mais geralmente , para $\varphi_i \in E^*$, $i=1,..,n$, $n \in \mathbb{N}^*$, e $b \in F$ denotamos a aplicação n-linear S-limitada $(x_1,..,x_n) \in E^n \longmapsto \varphi_1(x_1)\ldots\varphi_n(x_n).b \in F$ por $\varphi_1 x\ldots x \varphi_n.b$ $\in \mathcal{L}_b(^nE;F)$. O subespaço vetorial de $\mathcal{L}_b(^nE;F)$ gerado pelos elementos da forma $\varphi_1 x\ldots x \varphi_n.b$, $\varphi_i \in E^*$, $i=1,..,n$ e $b \in F$ é denotado por $\mathcal{L}_{bf}(^nE;F)$. Definimos o subespaço $\mathcal{L}_{bc}(^nE;F)$ de $\mathcal{L}_b(^nE;F)$ como a aderência de $\mathcal{L}_{bf}(^nE;F)$ em $\mathcal{L}_b(^nE;F)$. A topologia de $\mathcal{L}_{bc}(^nE;F)$ será sempre a topologia induzida por $\mathcal{L}_b(^nE;F)$. Logo para F completo, $\mathcal{L}_{bc}(^nE;F)$ é completo. Utilizaremos também as seguintes notações : $\mathcal{L}_{bfs}(^nE;F) = \mathcal{L}_{bf}(^nE;F) \cap \mathcal{L}_{bs}(^nE;F)$ e $\mathcal{L}_{bcs}(^nE;F) = \mathcal{L}_{bc}(^nE;F) \cap \mathcal{L}_{bs}(^nE;F)$. Para n=0, todos estes espaços são tomados iguais a F.

2.2 LEMA Se $T \in \mathcal{L}_{bf}(^nE;F)$, então $T_s \in \mathcal{L}_{bfs}(^nE;F)$.

2.3 PROPOSIÇÃO $\overline{\mathcal{L}_{bfs}(^nE;F)} = \mathcal{L}_{bcs}(^nE;F)$.

2.4 DEFINIÇÃO $A \in \mathcal{L}_b(^nE;F)$ é chamada uma aplicação n-linear Silva-limitada de tipo compacto se, e somente se, $A \in \mathcal{L}_{bc}(^nE;F)$. $A \in \mathcal{L}_{bs}(^nE;F)$ é chamada n-linear, Silva-limitada simétrica de tipo compacto se, e somente se, $A \in \mathcal{L}_{bcs}(^nE;F)$.

2.5 DEFINIÇÃO Para $\varphi \in E^*$, $b \in F$, denotamos o polinômio n-homogêneo Silva-limitado dado por $x \in E \longmapsto \varphi(x)^n.b \in F$ por $\varphi^n.b \in \mathcal{P}_b(^nE;F)$ .O subespaço vetorial de $\mathcal{P}_b(^nE;F)$ gerado pelos elementos da forma $\varphi^n.b$, $\varphi \in E^*$, $b \in F$ é denotado por $\mathcal{P}_{bf}(^nE;F)$. Definimos o subespaço vetorial $\mathcal{P}_{bc}(^nE;F)$ de $\mathcal{P}_b(^nE;F)$ como sendo a aderência de $\mathcal{P}_{bf}(^nE;F)$ em $\mathcal{P}_b(^nE;F)_s$. A topologia de $\mathcal{P}_{bc}(^nE;F)$ será sempre a topologia induzida por $\mathcal{P}_b(^nE;F)_s$. Logo para F completo, $\mathcal{P}_{bc}(^nE;F)$ é completo.

2.6 PROPOSIÇÃO A aplicação natural $T \in \mathcal{L}_{bs}(^nE;F) \longmapsto \hat{T} \in \mathcal{P}_b(^nE;F)$ induz um isomorfismo algébrico e topológico entre $\mathcal{L}_{bcs}(^nE;F)$ e $\mathcal{P}_{bc}(^nE;F)$.

2.7 DEFINIÇÃO Um polinômio n-homogêneo Silva-limitado P de E em F é de tipo compacto se, e somente se , $P \in \mathcal{P}_{bc}(^nE;F)$.

2.8 DEFINIÇÃO Uma aplicação P de E em F é um polinômio Silva - limitado de tipo compacto se existem $n=0,1,..,$ e $P_k \in \mathcal{P}_{bc}(^kE;F)$, $k=0,1,..,n$, tais que $P = P_o + ... + P_n$. Denotamos por $\mathcal{P}_{bc}(E;F)$ o espaço dos polinômios S-limitados de tipo compacto.

2.9 PROPOSIÇÃO A aplicação (n+1)-linear, $(n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\alpha_n : (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, b) \in (E^*)^n \times F \longmapsto \varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n . b \in \mathcal{L}_b({}^nE;F)$$

é contínua quando se coloca a topologia produto no seu domínio.

Prova: A continuidade de α_n segue de

$$\|\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n . b\|_{B_1, \ldots, B_n, \beta} = \|\varphi_1\|_{B_1} \ldots \|\varphi_n\|_{B_n} . \beta(b) ,$$

que acontece para todo $\varphi_i \in E^*$, $B_i \in \mathcal{B}_E$, $i=1,\ldots,n$, $b \in F$ e $\beta \in SNC(F)$. Q.E.D.

2.10 OBSERVAÇÃO : Da PROPOSIÇÃO anterior , temos que existe uma única aplicação linear contínua χ_n do produto tensorial projetivo $E^* \otimes_\pi \ldots \otimes_\pi E^* \otimes_\pi F$ em $\mathcal{L}_b({}^nE;F)$, tal que $\alpha_n = \chi_n \circ \Psi_n$, onde Ψ_n denota a aplicação (n+1)- linear de $E^* \times \ldots \times E^* \times F$ em $E^* \otimes_\pi \ldots \otimes_\pi E^* \otimes_\pi F$. χ_n é injetiva e $\chi_n(E^* \otimes_\pi \ldots \otimes_\pi E^* \otimes_\pi F) = \mathcal{L}_{bf}({}^nE;F)$.

2.11 DEFINIÇÃO Uma seminorma nuclear em $\mathcal{L}_{bf}({}^nE;F)$ é definida por:

$$\|T\|_{N, B_1, \ldots, B_n, \beta} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_{1j}\|_{B_1} \ldots \|\varphi_{nj}\|_{B_n} \beta(b_j) \; ; \right.$$

$$\left. T = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{1j} \times \ldots \times \varphi_{nj} . b_j \; ; \varphi_{ij} \in E^* , \; b_j \in F , \; i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,m \right\},$$

para todo $T \in \mathcal{L}_{bf}({}^nE;F)$, $B_i \in \mathcal{B}_E$, $i=1,\ldots,n$ e $\beta \in SNC(F)$.

Se $B_1 = \ldots = B_n = B$, denotamos $\|T\|_{N, B_1, \ldots, B_n, \beta} = \|T\|_{N, B, \beta}$.

A topologia localmente convexa em $\mathcal{L}_{bf}({}^nE;F)$ definida pelas seminormas nucleares é chamada topologia nuclear.

2.12 PROPOSIÇÃO Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Para $T \in \mathcal{L}_{bf}({}^nE;F)$, $B_i \in \mathcal{B}_E$, $i=1,\ldots,n$ e $\beta \in SNC(F)$, temos

$$\|T\|_{B_1,\ldots,B_n,\beta} \leq \|T\|_{N,B_1,\ldots,B_n,\beta}$$

<u>Prova</u> : Para $T = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{1j} \times \ldots \varphi_{nj}.b_j \in \mathcal{L}_{bf}(^nE;F)$, $\varphi_{ij} \in E^*$ $b_j \in F$, $i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,m$, temos

$$\|T\|_{B_1,\ldots,B_n,\beta} \leq \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_{1j}\|_{B_1} \ldots \|\varphi_{nj}\|_{B_n} \beta(b_j) .$$

Disso segue a PROPOSIÇÃO. Q.E.D.

2.13 OBSERVAÇÃO A topologia localmente convexa definida em $\mathcal{L}_{bf}(^nE;F)$ pelas seminormas nucleares torna este espaço homeomorfo a $E^*\otimes_\pi \ldots \otimes_\pi E^*\otimes_\pi F$ de tal maneira que se $q_i \in SNC(E^*)$ é dada por $\|\cdot\|_{B_i}$, $B_i \in \mathcal{B}_E$, $i=1,\ldots,n$ e $\beta \in SNC(F)$, então

$$\|T\|_{N,B_1,\ldots,B_n,\beta} = \|\chi_n(A)\|_{N,B_1,\ldots,B_n,\beta} =$$

$$= (q_1 \otimes \ldots \otimes q_n \otimes \beta)(A) ,$$

e

$$\|\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n.b\|_{N,B_1,\ldots,B_n,\beta} = q_1(\varphi_1)\ldots q_n(\varphi_n)\beta(b) =$$

$$= \|\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n.b\|_{B_1,\ldots,B_n,\beta},$$

para todo $T \in \mathcal{L}_{bf}(^nE;F)$, $\varphi_i \in E^*$, $i=1,\ldots,n$ e $b \in F$.

2.14 DEFINIÇÃO Para cada $B \in \mathcal{B}_E$, $\beta \in SNC(F)$, $m=1,\ldots,$ está definida uma seminorma nuclear em $\mathcal{P}_{bf}(^mE;F)$, dada por

$$\|P\|_{N,B,\beta} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_B^m \beta(b_j) ; P = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^m . b_j , \varphi_j \in E^*, b_j \in F, j=1,\ldots,n \right\} .$$

A topologia nuclear em $\mathcal{P}_{bf}(^mE;F)$ é definida por essas seminormas. Para $m=0$, coloca-se $\|\cdot\|_{N,B,\beta} = \beta$, para quaisquer $B \in \mathcal{B}_E$ e $\beta \in SNC(F)$.

2.15 PROPOSIÇÃO Se $P \in \mathcal{P}_{bf}(^mE;F)$, $B \in \mathcal{B}_E$, $\beta \in SNC(F)$, $m \in \mathbb{N}$, então

$$\|P\|_{B,\beta} \leq \|P\|_{N,B,\beta} .$$

2.16 PROPOSIÇÃO Para todo $T \in \mathcal{L}_{bfs}(^nE;F)$, $n \in \mathbb{N}^*$, temos

$$\|T\|_{N,B,\beta} \leq \|\hat{T}\|_{N,B,\beta} \leq \frac{n^n}{n!} \|T\|_{N,B,\beta} ,$$

para todo $B \in \mathcal{B}_E$ e $\beta \in SNC(F)$.

Prova: Por definição

$\|T\|_{N,B,\beta} \leq \|\hat{T}\|_{N,B,\beta}$, para todo $T \in \mathcal{L}_{bfs}(^nE;F)$. Sem perda de generalidade, podemos supor

$$T = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{1j} x \dots x \varphi_{nj} . b_j \in \mathcal{L}_{bfs}(^nE;F), \ \varphi_{ij} \in E^*, \ b_j \in F,$$

$i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,m$, $\|\varphi_{ij}\|_B \neq 0$. Temos, então

$$T = \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_{1j}\|_B \dots \|\varphi_{nj}\|_B . \psi_{1j} x \dots x \psi_{nj} . b_j , \text{ onde}$$

$\psi_{ij} = \varphi_{ij}/\|\varphi_{ij}\|_B$, para todo i e j.

Pela fórmula de polarização, temos:

$$\hat{T} = \frac{1}{2^n . n!} \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_{1j}\|_B \dots \|\varphi_{nj}\|_B \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \Big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \psi_{ij}\Big)^n . b_j$$

$$\|\hat{T}\|_{N,B,\beta} \leq \frac{1}{2^n . n!} \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_{1j}\|_B \dots \|\varphi_{nj}\|_B \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \psi_{ij}\Big\|_B^n \beta(b_j)$$

$$\leq \frac{1}{2^n . n!} \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_{1j}\|_B \dots \|\varphi_{nj}\|_B \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} (\|\psi_{1j}\|_B + \dots + \|\psi_{nj}\|_B)^n . \beta(b_j)$$

$$\leq \frac{n^n}{n!} \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_{1j}\|_B \dots \|\varphi_{nj}\|_B \, \beta(b_j) .$$

Então $\|\hat{T}\|_{N,B,\beta} \leq \dfrac{n^n}{n!} \|T\|_{N,B,\beta}$. Q.E.D.

<u>No que segue vamos considerar F completo.</u>

2.17 DEFINIÇÃO Seja $\tilde{\chi}_n$ a extensão contínua de χ_n ao completamento $E^*\hat{\otimes}_\pi \ldots \hat{\otimes}_\pi E^*\hat{\otimes}_\pi F$ de $E^*\otimes_\pi \ldots \otimes_\pi E^*\otimes_\pi F$ em $\mathcal{L}_b(^nE;F)$. Temos que $\tilde{\chi}_n(E^*\hat{\otimes}_\pi \ldots \hat{\otimes}_\pi E^*\hat{\otimes}_\pi F) \subset \mathcal{L}_{bc}(^nE;F)$. Uma aplicação n-linear B-limitada $T \in \mathcal{L}_b(^nE;F)$ é de tipo nuclear se, e somente se, $T \in \tilde{\chi}_n(E^*\hat{\otimes}_\pi \ldots \hat{\otimes}_\pi E^*\hat{\otimes}_\pi F)$. Denotamos $\tilde{\chi}_n(E^*\hat{\otimes}_\pi \ldots \hat{\otimes}_\pi E^*\hat{\otimes}_\pi F) = \mathcal{L}_{bN}(^nE;F)$; $\mathcal{L}_{bNs}(^nE;F) = \mathcal{L}_{bN}(^nE;F) \cap \mathcal{L}_{bs}(^nE;F)$. Para $n=0$ todos os espaços são tomados iguais a F.

2.18 DEFINIÇÃO A topologia nuclear em $\mathcal{L}_{bN}(^nE;F)$ é definida da seguinte maneira : seja $n \in \mathbb{N}^*$ e sejam $B_i \in \mathcal{B}_E$, $i=1,\ldots,n$ e $\beta \in SNC(F)$. Seja $q_i = \|\cdot\|_{B_i} \in SNC(E^*)$, para $i=1,\ldots,n$. Indicamos por $q_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} q_n \hat{\otimes} \beta$ a extensão contínua de $q_1 \otimes \ldots \otimes q_n \otimes \beta$ à $E^*\hat{\otimes}_\pi \ldots \hat{\otimes}_\pi E^*\hat{\otimes}_\pi F$. Para $T \in \mathcal{L}_{bN}(^nE;F)$, indicamos por

$$\|T\|_{N,B_1,\ldots,B_n,\beta} = \inf \left\{ q_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} q_n \hat{\otimes} \beta(A);\ T = \tilde{\chi}_n(A) \right\}.$$

A topologia nuclear é a topologia localmente convexa definida por todas as seminormas nucleares. Para $n=0$ coloca-se a topològia nuclear igual a topologia de F e põe-se $\|T\|_{N,B,\beta} = \beta(A)$, para $A \in \mathcal{L}_{bN}(^0E;F)$.

2.19 OBSERVAÇÃO A topologia nuclear em $\mathcal{L}_{bN}(^nE;F)$ torna esse espaço homeomorfo a $E^*\hat{\otimes}_\pi \ldots \hat{\otimes}_\pi E^*\hat{\otimes}_\pi F \;/\; \mathrm{Ker}\,\tilde{\chi}_n$ e temos ainda

$$\|T\|_{N,B_1,\ldots,B_n,\beta} = q_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} q_n \tilde{\otimes} \beta(A) ,$$

onde, sendo $T = \tilde{\chi}_n(A)$, $\tilde{A}$ denota a classe de equivalência definida por A e $q_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} q_n \tilde{\otimes} \beta$ a seminorma natural defini-

da no espaço quociente pela seminorma $q_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} q_n \hat{\otimes} \beta$.
Temos ainda que $\mathcal{L}_{bN}({}^nE;F)$ munido da topologia nuclear é completo e $\mathcal{L}_{bf}({}^nE;F)$ é denso nesse espaço.

2.20 PROPOSIÇÃO Se $T \in \mathcal{L}_{bN}({}^nE;F)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $B_i \in \mathcal{B}_E$, $i=1,..,n$ e $\beta \in SNC(F)$, então

$$\|T\|_{B_1,\dots,B_n,\beta} \leq \|T\|_{N,B_1,\dots,B_n,\beta} .$$

Assim $\mathcal{L}_{bN}({}^nE;F) \subset \mathcal{L}_{bc}({}^nE;F)$ continuamente.

A prova segue imediatamente da PROPOSIÇÃO 2.12.

2.21 DEFINIÇÃO Seja $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$ a imagem de $\mathcal{L}_{bN}({}^nE;F)$ pela aplicação $T \longmapsto \hat{T}$ de $\mathcal{L}_b({}^nE;F)$ em $\mathcal{P}_b({}^nE;F)$. Um polinômio n-homogêneo S-limitado P de E em F é chamado de tipo nuclear se, e somente se , $P \in \mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$.
Claramente $\mathcal{P}_{bN}({}^nE;F) \subset \mathcal{P}_{bc}({}^nE;F)$.

2.22 DEFINIÇÃO A topologia nuclear em $\mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$ é a própria topologia de F se n=0. Se $n \geqslant 1$ a topologia nuclear é a topologia localmente convexa que torna $\mathcal{L}_{bNs}({}^nE;F)$ homeomorfo a $\mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$. Como $\mathcal{L}_{bfs}({}^nE;F)$ é denso em $\mathcal{L}_{bNs}({}^nE;F)$, temos que $\mathcal{P}_{bf}({}^nE;F)$ é denso em $\mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$. Além disso $\mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$ é completo. Portanto $\mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$ é um completamento de $\mathcal{P}_{bf}({}^nE;F)$ munido com a topologia nuclear.
Se $B \in \mathcal{B}_E$ e $\beta \in SNC(F)$, $\|\cdot\|_{N,B,\beta}$ pode ser estendida continuamente a $\mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$. Tal extensão será denotada também por $\|\cdot\|_{N,B,\beta}$. A coleção dessas seminormas define a topologia nuclear em $\mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$.

2.23 PROPOSIÇÃO Se $n \in \mathbb{N}^*$, $T \in \mathcal{L}_{bNs}({}^nE;F)$, $B \in \mathcal{B}_E$ e $\beta \in SNC(F)$, então

$$\|T\|_{N,B,\beta} \leq \|\hat{T}\|_{N,B,\beta} \leq \frac{n^n}{n!} \|T\|_{N,B,\beta} .$$

A prova segue da PROPOSIÇÃO 2.16.

2.24 PROPOSIÇÃO Para $P \in \mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$, $n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{B}_E$ e $\beta \in SNC(F)$, temos

$$\|P\|_{B,\beta} \leq \|P\|_{N,B,\beta} .$$

Assim $\mathcal{P}_{bN}({}^nE;F) \subset \mathcal{P}_{bc}({}^nE;F)$ continuamente.

2.25 DEFINIÇÃO Uma aplicação P de E em F é um polinômio S-limitado de tipo nuclear se existem $n=0,1,\ldots$, e $P_k \in \mathcal{P}_{bN}({}^kE;F)$, $k=0,1,\ldots,n$, tais que $P = P_o + \ldots + P_n$. Denotamos por $\mathcal{P}_{bN}(E;F)$ o espaço de tais polinômios.

2.26 PROPOSIÇÃO Sejam B_1 e $B_2 \in \mathcal{B}_E$ tais que $cB_1 \subset B_2$, para algum $c > 0$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\beta \in SNC(F)$,

$$c^n \|P_n\|_{N,B_1,\beta} \leq \|P_n\|_{N,B_2,\beta} ,$$

para todo $P_n \in \mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$.

<u>Prova</u>: Se $P_n \in \mathcal{P}_{bf}({}^nE;F)$, então

$$c^n \|P_n\|_{N,B_1,\beta} = c^n \inf \Big\{ \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_{ij}\|_{B_1}^n \beta(b_j) \; ; \; P_n = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}^n b_j$$

$$\varphi_{ij} \in E^*, b_j \in F, i=1,\ldots,n \; ; \; j=1,\ldots,m \Big\} =$$

$$= \inf \Big\{ \sum_{j=1}^{m} \|c\, \varphi_{ij}\|_{B_1}^n \beta(b_j) \; ; \; P_n = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}^n . b_j \; ; \; \varphi_{ij} \in E^*,$$

$$b_j \in F, i=1,\ldots,n \; ; \; j=1,\ldots,m \Big\} =$$

$$=\inf\left\{\sum_{j=1}^{m}\|\varphi_{ij}\|_{cB_1}^{n}\beta(b_j)\ ;\ P_n=\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}\cdot b_j\ ;\ \varphi_{ij}\in E^*,\right.$$

$$\left. b_j\in F\ ,\ i=1,\ldots,n\ ;\ j=1,\ldots,m\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\inf\left\{\sum_{j=1}^{m}\|\varphi_{ij}\|_{B_2}^{n}\beta(b_j)\ ;\ P_n=\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}\cdot b_j\ ;\varphi_{ij}\in E^*,\right.$$

$$\left. b_j\in F\ ,\ i=1,\ldots,n\ ;\ j=1,\ldots,m\right\}=\|P_n\|_{N,B_2,\beta}\ .$$

Disso segue a PROPOSIÇÃO. Q.E.D.

2.27 OBSERVAÇÃO Se $B_1\subset B_2$, então para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\|P_n\|_{N,B_1,\beta}\leqslant\|P_n\|_{N,B_2,\beta}\quad ;\ P_n\in\mathcal{P}_{bN}(^nE;F),$$ e se $cB_1=B_2$,

para algum $c>0$,

$$c^n\|P_n\|_{N,B_1,\beta}=\|P_n\|_{N,B_2,\beta}\quad ;\ P_n\in\mathcal{P}_{bN}(^nE;F).$$

b) Aplicações S-holomorfas de Tipos Nuclear e Compacto.

2.28 DEFINIÇÃO $\mathcal{H}_{SN}(E;F)$ indica o subespaço vetorial de $\mathcal{H}_S(E;F)$ das aplicações S-holomorfas de E em F tais que:

(1) para cada $n=0,1,\ldots,\ \frac{1}{n!}\hat{\delta}^nf(0)\in\mathcal{P}_{bN}(^nE;F)$;

(2) para cada subconjunto compacto estrito equilibrado K de E , $B\in\mathcal{B}_E$ tal que $K\subset E_B$ e é compacto em E_B e $\beta\in SNC(F)$, existe $\varepsilon>0$, tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{1}{n!}\hat{\delta}^nf(0)\right\|_{N,K+\varepsilon B,\beta}<\infty\ .$$

Um elemento $f\in\mathcal{H}_{SN}(E\ ;F)$ é chamado uma aplicação S-holomorfa de tipo nuclear de E em F. Em $\mathcal{H}_{SN}(E;F)$ definimos a topologia T_{Ne} gerada pela família de seminormas p que satisfazem:

para cada subconjunto compacto estrito equilibrado K de E, $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset E_B$ e é compacto em E_B, $\beta \in SNC(F)$ e $\varepsilon > 0$ existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$p(f) \leq c(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\varepsilon B,\beta} ,$$

para toda $f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$.

2.29 PROPOSIÇÃO Seja $f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \in \mathcal{H}_S(E;F)$ e $\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \in \mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$, para $n=0,1,\ldots$. Então as seguintes condições são equivalentes:

(1) $f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$.

(2) para cada subconjunto compacto estrito equilibrado K de E, $B \in \mathcal{B}_E$, tal que $K \subset E_B$ e é compacto em E_B, $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in c_0^+$ e $\beta \in SNC(F)$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\alpha_n B,\beta} < \infty .$$

(3) para cada subconjunto compacto estrito equilibrado K de E, $B \in \mathcal{B}_E$, tal que $K \subseteq E_B$ e é compacto em E_B, $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in c_0^+$ e $\beta \in SNC(F)$, temos

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\alpha_n B,\beta}^{1/n} = 0 .$$

<u>Prova</u>. (1)$\longrightarrow$(2). Sejam f, K, B, e $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ como no enunciado de (2). Da DEFINIÇÃO 2.28(2), existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\varepsilon B,\beta} < \infty$$

. Desde que $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in c_0^+$, seja n_0 um inteiro positivo tal que $\alpha_n \leq \varepsilon$, para $n \geq n_0$. Então, temos

$$\left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} \leq \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, K+\varepsilon B, \beta} \quad \text{para } n \geq n_0 \, .$$

Portanto

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} < \infty \, .$$

Desde que

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} < \infty \qquad , \text{ temos } (1) \longrightarrow (2).$$

(2) $\longrightarrow$ (3) . Sejam K , B e $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ como no enunciado. Seja $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de números reais positivos tais que $d = \sup \beta_n^{1/n} < \infty$. Então dK é um compacto estrito equilibrado e $(\beta_n^{1/n} \alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in c_0^+$. Por (2), temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, dK+\beta_n^{1/n} \alpha_n B, \beta} < \infty \, .$$

Da OBSERVAÇÃO 2.27 , para cada n ,temos

$$\beta_n \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} = \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, \beta_n^{1/n} K+\beta_n^{1/n} \alpha_n B, \beta} \leq$$

$$\leq \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, dK+\beta_n^{1/n} \alpha_n B, \beta} \, .$$

Logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} < \infty$$

e

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\beta_n \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} \right)^{1/n} \leq 1 \, .$$

Tomando $\beta_n = c^n$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left(\left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{c} .$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} \right)^{1/n} = 0 \text{ e } (2) \longrightarrow (3).$$

(3) $\longrightarrow$ (1). Suponhamos por absurdo que $f \notin \mathcal{H}_{SN}(E;F)$; então existem um compacto estrito equilibrado $K \subset E$, $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset E_B$ e é compacto em E_B e $\beta \in SNC(F)$, tais que para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, K+\varepsilon B, \beta} = \infty .$$

Tomando $\varepsilon = 1$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|^{1/n}_{N, K+B, \beta} \geq 1 .$$

Seja n_1 tal que

$$\left\| \frac{1}{n_1!} \hat{\delta}^{n_1} f(0) \right\|^{1/n_1}_{N, K+B, \beta} \geq \frac{1}{2} .$$

Por indução tomemos $n_k > n_{k-1}$ tal que

$$\left\| \frac{1}{n_k!} \hat{\delta}^{n_k} f(0) \right\|^{1/n_k}_{N, K+1/k\, B, \beta} \geq \frac{1}{2} .$$

Definindo

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{para } n \leq n_1 \\ 1/k & \text{para } n_{k-1} < n < n_k \end{cases}$$

obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|^{1/n}_{N, K+\alpha_n B, \beta} \geq \frac{1}{2} \qquad \text{e } (\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in c_0^+ .$$

Isto contradiz (3).Q.E.D.

2.30 PROPOSIÇÃO Se $f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$, então a série de Taylor de f em 0 converge para f em $(\mathcal{H}_{SN}(E;F),T_{Ne})$.

2.31 PROPOSIÇÃO A topologia T_{Ne} em $\mathcal{H}_{SN}(E;F)$ é gerada por todas as seminormas da forma

$$(1) \qquad p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\alpha_n B,\beta} ,$$

para toda $f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$, onde $K \subset E$ é compacto estrito equilibrado, $B \in \mathcal{B}_E$ é tal que $K \subset E_B$ e é compacto em E_B , $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in c_o^+$ e $\beta \in SNC(F)$.

Prova: Pela PROPOSIÇÃO 2.29 , p(f) é finito para toda $f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$. Então é uma seminorma em $\mathcal{H}_{SN}(E;F)$. Mostraremos agora que p é T_{Ne} contínua . Dado $\varepsilon > 0$, seja n_o um inteiro positivo tal que $\alpha_n \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_o$. Como na PROPOSIÇÃO 2.29, temos:

$$\sum_{n=n_o}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\alpha_n B,\beta} \leq \sum_{n=n_o}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\varepsilon B,\beta} ,$$

para toda $f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$.

Para $n=0,1,\ldots,n_o-1$, existe $\delta > 0$ tal que $\delta(K+\alpha_n B) \subset K+\varepsilon B$. Assim da PROPOSIÇÃO 2.26 , para toda $f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$ e $n=0,1,\ldots, \ldots,n_o-1$,

$$\left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\alpha_n B,\beta} \leq \delta^{-n} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\varepsilon B,\beta} .$$

Portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\alpha_n B,\beta} \leq \left(\sup_{i \leq n_o} \delta^{-i} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\varepsilon B,\beta} .$$

Então p é contínua em $(\mathcal{H}_{SN}(E;F),T_{Ne})$. Agora seja p_1 uma seminorma contínua em $(\mathcal{H}_{SN}(E;F),T_{Ne})$. Mostraremos que p_1 é dominada por uma seminorma da forma (1). Da DEFINIÇÃO 2.28 , para al - gum compacto estrito equilibrado $K \subset E$, $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset E_B$ e é compacto em E_B e $\beta \in SNC(F)$, p_1 satisfaz : para cada $\varepsilon > 0$ existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$p_1(f) \leq c(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, K+\varepsilon B, \beta} \text{ , para toda}$$

$f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$.

Então para $P_n \in \mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$, $p_1(P_n) \leq c(\varepsilon) \|P_n\|_{N, K+\varepsilon B, \beta}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, seja $K_n(\varepsilon)$ o menor número positivo ou nulo tal que

$$p_1(P_n) \leq K_n(\varepsilon) \|P_n\|_{N, K+\varepsilon B, \beta} ,$$

para todo $P_n \in \mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$. Desde que $K_n(\varepsilon) \leq c(\varepsilon)$ para todo n , temos $\limsup_{n \to \infty} K_n(\varepsilon)^{1/n} \leq 1$. Seja n_1 um inteiro positivo tal que $(K_n(1))^{1/n} \leq 2$ para todo $n \geq n_1$ e por indução tomemos $n_k > n_{k-1}$ e

$$K_n(1/k)^{1/n} \leq 2 \quad \text{para } n \geq n_k.$$

Seja

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{para } n < n_2 \\ 1/k & \text{para } n_k \leq n < n_{k+1} \end{cases} .$$

Então $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in c_0^+$ e $K_n(\alpha_n)^{1/n} \leq 2$, para $n \geq n_1$. Logo existe $C > 0$ tal que $K_n(\alpha_n) < C.2^n$, para todo n . Da PROPOSIÇÃO 2.30 temos

$$p_1(f) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_1\left(\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\alpha_n) \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta}$$

$$\leq \; C \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left\| \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\alpha_n B,\beta} ,$$

ou seja

$$p_1(f) \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,2K+2\alpha_n B,\beta} ,$$

para toda $f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$. Q.E.D.

2.32 PROPOSIÇÃO A topologia T_{Ne} em $\mathcal{H}_{SN}(E;F)$ é gerada pela família de seminormas p do tipo

$$p(f) = \sup_n \left\| \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\alpha_n B,\beta} ,$$

para toda $f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$, onde $K \subset E$ é um compacto estrito equilibrado , $B \in \mathcal{B}_E$ é tal que $K \subset E_B$ e é compacto em E_B , $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in C_o^+$ e $\beta \in SNC(F)$.

A prova é análoga à da PROPOSIÇÃO 1.31.

Desde que a topologia T_{Ne} em $\mathcal{H}_{SN}(E;F)$ induz em $\mathcal{P}_{bN}(^nE;F)$ a topologia nuclear para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

2.33 PROPOSIÇÃO Para F completo, $(\mathcal{H}_{SN}(E;F), T_{Ne})$ é completo.

<u>Prova</u>: Seja $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma rede de Cauchy em $(\mathcal{H}_{SN}(E;F), T_{Ne})$. Então , para $n=0,1,\ldots$, $(\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f_\alpha(0))_{\alpha \in I}$ é uma rede de Cauchy no espaço completo $\mathcal{P}_{bN}(^nE;F)$. Suponhamos que $\hat{\delta}^n f_\alpha(0) \longrightarrow P_n$ em $\mathcal{P}_{bN}(^nE;F)$, $\alpha \in I$, para $n=0,1,\ldots$.. Seja $K \subset E$ compacto estrito equilibrado , $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset E_B$ e é compacto em E_B , $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in C_o^+$ e $\beta \in SNC(F)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\beta_o \in I$,tal que para $\beta_1, \beta_2 \geq \beta_o$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n (f_{\beta_1} - f_{\beta_2})(0) \right\|_{N,K+\alpha_n B,\beta} \leq \varepsilon .$$

Então para qualquer m inteiro positivo e $\beta_1, \beta_2 \geq \beta_0$,

$$\sum_{n=0}^{m} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f_{\beta_1}(0) - \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f_{\beta_2}(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} \leq \varepsilon .$$

Passando ao limite para $\beta_1 \in I$, temos

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{m} \left\| \frac{1}{n!} P_n - \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f_{\beta_2}(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} \leq \varepsilon ,$$

para todo m e $\beta_2 \geq \beta_0$.

Em particular

$$\sum_{n=0}^{m} \left\| \frac{1}{n!} P_n \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f_{\beta_0}(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} + \varepsilon < \infty .$$

Logo, da PROPOSIÇÃO 2.29,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n \in \mathcal{H}_{SN}(E;F) .$$

($*$) também nos dá que

$$\sum_{n=0}^{m} \left\| \frac{1}{n!} P_n - \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f_{\beta_2}(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} \leq \varepsilon , \text{ para todo m}$$

e $\beta_2 \geq \beta_0$.

Então,

$$p(f - f_{\beta_2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} P_n - \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f_{\beta_2}(0) \right\|_{N, K+\alpha_n B, \beta} \leq \varepsilon ,$$

para todo $\beta_2 \geq \beta_0$. Q.E.D.

2.34 DEFINIÇÃO. Seja U um subconjunto aberto não vazio de E. $\mathcal{H}_{Sc}(U;F)$ denota o subespaço vetorial de $\mathcal{H}_S(U;F)$ das aplicações S-holomorfas $f: U \longrightarrow F$ tais que para cada $x \in U$ e $n \in \mathbb{N}$,

$\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(x) \in \mathcal{P}_{bc}(^nE;F)$. Um elemento $f \in \mathcal{H}_{Sc}(U;F)$ será chamado de aplicação S-holomorfa de tipo compacto.

2.35 LEMA (i) Se $A \in \mathcal{L}_{bc}(^nE;F)$ e $x_i \in E$, $i=1,..,k$, $1 \leq k \leq n$, então $A.x_1...x_k \in \mathcal{L}_b(^{n-k}E;F)$, definida por

$$(A.x_1....x_k)(x_{k+1},..,x_n) = A(x_1,..,x_k,x_{k+1},..,x_n)$$

para todo $(x_{k+1},..,x_n) \in E^{n-k}$, pertence a $\mathcal{L}_{bc}(^{n-k}E;F)$.

(ii) Se $P \in \mathcal{P}_{bc}(^nE;F)$ é tal que $P = \hat{A}$ para $A \in \mathcal{L}_{bcs}(^nE;F)$,então $A.x_1...x_k \in \mathcal{P}_{bc}(^{n-k}E;F)$, $x_i \in E$, $i=1,..,k$, $1 \leq k \leq n$.

<u>Prova</u>: (i) Suponhamos inicialmente que $A \in \mathcal{L}_{bf}(^nE;F)$, ou seja

$$A = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{1j} x \dots x \varphi_{nj}.b_j \quad ; \varphi_{ij} \in E^*,\ b_j \in F\ ,\ i=1,..,n$$

e $j=1,..,m$. Para $x_i \in E$, $i=1,..,k$, $1 \leq k \leq n$, temos

$$(A.x_1...x_k)(x_{k+1},..,x_n) = A(x_1,..,x_k,x_{k+1},..,x_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \varphi_{1j}(x_1)\dots \varphi_{kj}(x_k).\ \varphi_{k+1}(x_{k+1})\dots \varphi_{nj}(x_n).b_j =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_{1j}(x_1)\dots \varphi_{kj}(x_k).\ \varphi_{k+1j}\ x \dots x\ \varphi_{nj}.b_j\right)(x_{k+1},..,x_n) ,$$

para todo $(x_{k+1},..,x_n) \in E^{n-k}$. Logo,

$$A.x_1...x_k = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{1j}(x_1)\dots \varphi_{kj}(x_k).\ \varphi_{k+1j}\ x \dots x\ \varphi_{nj}.b_j$$

$\in \mathcal{L}_{bf}(^{n-k}E;F)$.

Para $A \in \mathcal{L}_{bc}(^nE;F)$ o resultado segue da densidade de $\mathcal{L}_{bf}(^nE;F)$ em $\mathcal{L}_{bc}(^nE;F)$.

(ii) segue por argumentos análogos à (i). Q.E.D.

2.36 PROPOSIÇÃO Sejam F completo e U um subconjunto aberto não vazio de E. Então $(\mathcal{H}_{Sc}(U;F), \tau_{\infty se})$ é completo. Se U for equilibrado, então $(\mathcal{H}_{Sc}(U;F), \tau_{wse})$ é completo.

Prova: Seja $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma rede de Cauchy em $(\mathcal{H}_{Sc}(U;F), \tau_{wse}) \subset (\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{wse})$. Pela PROPOSIÇÃO 1.36, existe $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, tal que $((f_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge para f na topologia τ_{wse} de $\mathcal{H}_S(U;F)$ e $(\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f_\alpha(0))_{\alpha\in I}$ converge para $\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0)$ em $\mathcal{P}_b({}^nE;F)_s$, para cada $n=0,1,\ldots$ Desde que $\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f_\alpha(0) \in \mathcal{P}_{bc}({}^nE;F)$, que é fechado em $\mathcal{P}_b({}^nE;F)_s$, temos que para cada $n=0,1,\ldots$, $\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0) \in \mathcal{P}_{bc}({}^nE;F)$. Resta mostrar que para cada $x \in U$, $i \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{i!}\hat{\delta}^i f(x) \in \mathcal{P}_{bc}({}^iE;F)$. Desde que para cada $x \in U$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0)x ,$$

temos da PROPOSIÇÃO 1.25 que

$$\frac{1}{i!}\hat{\delta}^i f(x) = \sum_{n\geq i} \frac{1}{n!}\, \widehat{\delta^n f(0).x^{n-i}}$$

no sentido de $\mathcal{P}_b({}^iE;F)_s$. Do LEMA anterior (ii), temos que $\frac{1}{n!}\widehat{\delta^n f(0).x^{n-i}} \in \mathcal{P}_{bc}({}^iE;F)$, para todo $x \in U$ e $n \geq i$. Logo,

$\frac{1}{i!}\hat{\delta}^i f(x) \in \mathcal{P}_{bc}({}^iE;F)$.

A prova da PROPOSIÇÃO para a topologia $\tau_{\infty se}$ segue da PROPOSIÇÃO 1.37 e da fórmula integral de Cauchy. Q.E.D.

c) Outros Subespaços Vetoriais do Espaço das Aplicações S-holomorfas.

2.37 DEFINIÇÃO Seja U um subconjunto aberto não vazio de E e $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{H}_{Sn}(U;F)$ denota o subespaço vetorial de $\mathcal{H}_S(U;F)$ das aplicações S-holomorfas $f:U \longrightarrow F$, tais que para cada $x \in U$ e $j \leq n$, $\frac{1}{j!}\hat{\delta}^j f(x) \in \mathcal{P}_{bC}({}^jE;F)$ ($\mathcal{P}_{bC}({}^jE;F) = F$ para $j=0$ e $\mathcal{P}_{bC}({}^jE;F) = \overline{\mathcal{P}_b({}^jE) \otimes F}$, aderência em $\mathcal{P}_b({}^jE;F)_s$, para $j \geqslant 1$).
Observamos que $\mathcal{H}_{S0}(U;F) = \mathcal{H}_S(U;F)$. Denotamos por

$\mathcal{H}_{SC}(U;F) = \left\{ f \in \mathcal{H}_S(U;F) \right.$, tais que para $x \in U$ e $j \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{j!}\hat{\delta}^j f(x) \in \left. \mathcal{P}_{bC}({}^jE;F) \right\}$.

Para o caso de funções holomorfas , denotamos por $\mathcal{H}_n(U;F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{H}(U;F)$ das aplicações holomorfas $f:U \longrightarrow F$ tais que para cada $x \in U$ e $j \leq n$, $\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(x) \in \mathcal{P}_C({}^jE;F)$.
($\mathcal{P}_C({}^jE;F) = F$ para $j=0$ e $\mathcal{P}_C({}^jE;F) = \overline{\mathcal{P}({}^jE) \otimes F}$, $j \geqslant 1$, aderência em $\mathcal{P}({}^jE;F)_s$).

$\mathcal{H}_C(U;F) = \left\{ f \in \mathcal{H}(U;F) \right.$, tais que para cada $x \in U$ e $j \in \mathbb{N}$, $\left. \frac{1}{j!}\hat{d}^j f(x) \in \mathcal{P}_C({}^jE;F) \right\}$.

2.38 LEMA Se $A \in \overline{\mathcal{L}_{bs}({}^nE) \otimes F}$, aderência em $\mathcal{L}_{bs}({}^nE;F)$, $x \in E$, $i \leq n$, $A.x^{n-i}$ definida por

$$A.x^{n-i}(x_1,..,x_i) = A(\underbrace{x,\ldots\ldots,x}_{n-i},x_1,..,x_i)$$

para $(x_1,..,x_i) \in E^i$, pertence a $\overline{\mathcal{L}_{bs}({}^iE) \otimes F}$.

Prova : Basta mostrar o LEMA para $A \in \mathcal{L}_{bs}(^nE) \otimes F$. Seja
$A = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \otimes b_j$, $\varphi_j \in \mathcal{L}_{bs}(^nE)$, $b_j \in F$, $j=1,..,m$. Logo,

$$(A.x^{n-i})(x_1,..,x_i) = A(\underbrace{x,..,x}_{n-i},x_1,..,x_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\underbrace{x,...,x}_{n-i},x_1,..,x_i).b_j = \left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j.x^{n-i} \otimes b_j\right)(x_1,..,x_i) ,$$

para $(x_1,..,x_i) \in E^i$.

Portanto $A.x^{n-i} = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j.x^{n-i} \otimes b_j$. Desde que $\varphi_j.x^{n-i} \in \mathcal{L}_{bs}(^iE)$, temos que $A.x^{n-i} \in \mathcal{L}_{bs}(^iE) \otimes F$. Q.E.D.

2.39 PROPOSIÇÃO Se F é completo e U é um subconjunto aberto equilibrado de E , então $(\mathcal{H}_{SC}(U;F), \tau_{\omega se})$ é completo.

Prova: Seja $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma rede de Cauchy em $(\mathcal{H}_{SC}(U;F), \tau_{\omega se}) \subset (\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{\omega se})$. Pela PROPOSIÇÃO 1.36 , existe $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, tal que $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge para f na topologia $\tau_{\omega se}$. Como na PROPOSIÇÃO 2.36 , $\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0) \in \mathcal{P}_{bC}(^nE;F)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, resta mostrar que para cada $x \in U$ e $i \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{i!}\hat{\delta}^i f(x) \in \mathcal{P}_{bC}(^iE;F)$.

Desde que para cada $x \in U$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \hat{\delta}^n f(0)x ,$$

temos da PROPOSIÇÃO 1.25 que

$$\frac{1}{i!}\hat{\delta}^i f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{\delta^n f(0).x^{n-i}} ,$$

no sentido de $\mathcal{P}_b(^iE;F)_s$. Do LEMA anterior, $\frac{1}{n!}\delta^n f(0).x^{n-i} \in \overline{\mathcal{L}_{bs}(^iE) \otimes F}$. Logo, $\frac{1}{n!}\widehat{\delta^n f(0).x^{n-i}} \in \overline{\mathcal{P}_b(^iE) \otimes F} = \mathcal{P}_{bC}(^iE;F)$.

Disso resulta que $\frac{1}{i!}\hat{\delta}^i f(x) \in \mathcal{P}_{bC}(^iE;F)$. Q.E.D.

2.40 PROPOSIÇÃO Para $n \in \mathbb{N}$, F completo e U um subconjunto aberto não vazio de E, $(\mathcal{H}_{Sn}(U;F), \tau_{nse})$ e $(\mathcal{H}_{SC}(U;F), \tau_{\infty se})$ são completos.

Prova: Basta fazer para $n \geqslant 1$. Esta prova segue da PROPOSIÇÃO 1.37 e da fórmula integral de Cauchy. Q.E.D.

2.41 OBSERVAÇÃO Usando a OBSERVAÇÃO 1.38 é possível provar, com argumentos análogos aos das PROPOSIÇÕES 2.39 e 2.40 que, para E um k-espaço e F completo, $(\mathcal{H}_n(U;F), \tau_{ns})$ e $(\mathcal{H}_C(U;F), \tau_{\infty s})$ são completos, para $U \subset E$ aberto não vazio e que $(\mathcal{H}_C(U;F), \tau_{\omega s})$ é completo, para $U \subset E$ aberto equilibrado.

2.42 DEFINIÇÃO $\mathcal{H}_{Sb}(E;F) = \{ f \in \mathcal{H}_S(E;F)$, tais que para todo subconjunto limitado B de E, $f(B)$ é limitado em $F \}$.

Em $\mathcal{H}_{Sb}(E;F)$ definimos a topologia τ_s da convergência uniforme sobre os limitados de E.

Em $\mathcal{H}_{Sb}(E;F)$ são válidos os seguintes resultados:

a) se $f \in \mathcal{H}_{Sb}(E;F)$, então a série de Taylor de f em 0 converge para f em $(\mathcal{H}_{Sb}(E;F), \tau_s)$;

b) $(\mathcal{H}_{Sb}(E;F), \tau_s)$ é completo, para F completo.

2.43 DEFINIÇÃO Seja U um subconjunto aberto não vazio de E. Uma aplicação $f: U \longrightarrow F$ é compacta se para cada $x \in U$, existe V, vizinhança de x em U, tal que $f(V)$ é precompacto em F. Denotamos por $\mathcal{H}_K(U;F)$ o espaço das aplicações holomorfas compactas de U em F.

Se $P:E \longrightarrow F$ é um polinômio n-homogêneo compacto e B é um subconjunto limitado de E, então P(B) é precompacto em F. Para E normado, um polinômio n-homogêneo P de E em F é compacto se, e somente se, para cada subconjunto limitado B de E, P(B) é precompacto em F. Denotamos por $\mathcal{P}_K({}^nE;F)$ o espaço dos polinômios n-homogêneos contínuos e compactos de E em F.

2.44 DEFINIÇÃO Seja U um subconjunto aberto não vazio de E. Uma aplicação $f:U \longrightarrow F$ é b-compacta se para cada $B \in \mathcal{B}_E$, $f|_{U \cap E_B}$ é compacta. Denotamos por $\mathcal{H}_{SK}(U;F)$ o espaço das aplicações S-holomorfas e b-compactas de U em F.

Um polinômio n-homogêneo P de E em F é b-compacto se, e somente se, para cada $B \in \mathcal{B}_E$, P(B) é precompacto em F. Denotamos por $\mathcal{P}_{bK}({}^nE;F)$ o espaço dos polinômios n-homogêneos S-limitados e b-compactos de E em F.

No capítulo 5 veremos algumas propriedades de $\mathcal{P}_K({}^nE;F)$ e $\mathcal{P}_{bK}({}^nE;F)$.

CAPÍTULO 3

ε-PRODUTO E PROPRIEDADES DE APROXIMAÇÃO

3.1 DEFINIÇÃO Dados E e F espaços localmente convexos separados, denotamos por F'_c, o dual de F munido da topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos compactos absolutamente convexos de F e por $E \varepsilon F = \mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,;E)$ o espaço das aplicações lineares contínuas de F'_c em E, com a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos equicontínuos de F'. A topologia em $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,;E)$ é gerada pela família de seminormas $\beta \varepsilon \alpha$ definidas por:

$$\beta \varepsilon \alpha(T) = \sup \left\{ |\langle T(u),v\rangle| \,;\ u \in F',\ |u| \leq \beta\ ,\ v \in E',\ |v| \leq \alpha \right\},$$

$T \in \mathcal{L}_\varepsilon(F'_c\,;E)$, $\beta \in SNC(F)$ e $\alpha \in SNC(E)$. Temos que $E \varepsilon F \simeq F \varepsilon E$.

3.2 DEFINIÇÃO Um espaço localmente convexo separado E, tem a propriedade de aproximação (P.A.) se para toda $\alpha \in SNC(E)$, todo $\varepsilon > 0$ e todo subconjunto compacto absolutamente convexo K de E, existe $T \in E' \otimes E$, tal que $\alpha(T(x) - x) < \varepsilon$, para todo $x \in K$.

3.3 DEFINIÇÃO Um espaço localmente convexo separado E, tem a propriedade de S-aproximação (P.S.A.) se dado K subconjunto compacto estrito de E, existe $B \in \mathcal{B}_E$, tal que $K \subset E_B$ e é compacto em E_B, e dado $\varepsilon > 0$, existe $T \in E^* \otimes E$ tal que $p_B(T(x) - x) < \varepsilon$, para todo $x \in K$.

3.4 OBSERVAÇÃO Se E tem a P.S.A., $E' = E^*$ e as partes compactas estritas de E coincidem com as partes compactas, então E tem a P.A.. Logo se E for normado, ou Fréchét, ou $\mathcal{LF}$, com a P.S.A. então E tem a P.A. . Se E for um limite indutivo estrito de uma sequência $(E_n)_{n=0}^{\infty}$ de espaços de Banach com a P.A. então E tem a P.S.A. .
O exemplo do Enflo (Enflo (1)) é de um espaço de Banach que não tem a P.S.A..

A seguinte PROPOSIÇÃO reune alguns resultados que serão utilizados:

3.5 PROPOSIÇÃO

a) Se E e F são espaços localmente convexos separados, então $E \otimes_\varepsilon F$ (produto tensorial de E por F munido da topologia ε) é um subespaço vetorial topológico de $E \varepsilon F$.(Schwartz (1)).

b) Um espaço localmente convexo separado E tem a P.A. se, e somente se, para todo F localmente convexo separado, $E \otimes F$ é denso em $E \varepsilon F$. (Schwartz (1)).

c) Seja E quase-completo. Então E tem a P.A. se, e somente se, para todó F de Banach, $E \otimes F$ é denso em $E \varepsilon F$. (Prolla (1)).

d) Se E e F localmente convexos separados têm a P.A. , então $E \varepsilon F$ tem a P.A. (Schwartz(1)).

e) Se E e F são metrizáveis (completos), então $E \varepsilon F$ é metrizável (completo) , então $E \varepsilon F$ é metrizável (completo) (Schwartz (1)).

f) Se E e F são localmente convexos separados completos e um verifica a P.A. , então $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$ é idêntico a $E \varepsilon F$. (Schwartz(1)).

($E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$ denota o completamento de $E \otimes_{\varepsilon} F$).

CAPÍTULO 4

PRODUTO TENSORIAL DE FUNÇÕES SILVA-HOLOMORFAS E A PROPRIEDADE DE APROXIMAÇÃO PARA $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe})$.

Neste capítulo vamos estudar a aderência do produto tensorial $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ em $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{oe})$ e obter algumas relações com a propriedade de S-aproximação para E e com a propriedade de aproximação para $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe})$. Em espaços de Banach, Aron e Schottenloher (1) e Aron (1), obtiveram resultados nesse sentido para o espaço $(\mathcal{H}(U), \tau_o)$. No final do capítulo serão obtidos alguns resultados para $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{oe}) \hat{\otimes}_\varepsilon G$, para F e G de Banach.

4.1 TEOREMA Se E tem a P.S.A. e U é um subconjunto aberto equilibrado de E então $\mathcal{H}_{Sc}(U) \otimes F$ é τ_{oe}-denso em $\mathcal{H}_S(U;F)$, para todo F localmente convexo.

<u>Prova</u>: Seja $K \subset U$ um compacto estrito. Da hipótese de E ter a P.S.A., existe $B \in \mathcal{B}_E$, tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B, de modo que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $T \in E^* \otimes E$ satisfazendo $p_B(T(x) - x) < \varepsilon$, para todo $x \in K$.

Sejam $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, $\varepsilon > 0$ dado e $\beta \in SNC(F)$. Mostraremos inicialmente que existe um $\delta > 0$, $\delta \leq \operatorname{dist}_{E_B}(K, \complement_{E_B}(U \cap E_B))$ (onde $\complement_{E_B}(U \cap E_B)$ indica o complementar de $U \cap E_B$ em E_B), tal que se $p_B(x - y) < \delta$, $x \in K$, então $\beta(f(x)-f(y)) < \varepsilon$.

Como $f|_{U \cap E_B}$ é contínua (PROPOSIÇÃO 1.18) , então para cada $x \in K$, existe $\delta_x > 0$, $\delta_x \leq \operatorname{dist}_{E_B}(K, \complement_{E_B}(U \cap E_B))$ tal que $\beta(f(x)-f(y)) < \varepsilon/2$, para $p_B(x-y) < \delta_x$. Desde que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B , $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta_{x_i})$ para algum conjunto $\{x_1,..,x_n\}$ contido em K. ($B(a,r) = \{x \in E_B,\ p_B(x-a) < r$, quando $a \in E_B$ e $r > 0\}$).

Definimos $\gamma(x) = \sup\{\delta_{x_i} - p_B(x-x_i); i=1,..,n\}$, para $x \in K$.

Então $\gamma : K \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\gamma > 0$. Seja $\delta = \inf\{\gamma(x) \ ; \ x \in K\}$.

Então para $x \in K$ e $y \in B(x, \delta)$, existe algum i com $B(x, \delta) \subset B(x_i, \delta_{x_i})$, tal que

$\beta(f(x)-f(y)) \leq \beta(f(x)-f(x_i)) + \beta(f(x_i)-f(y)) < \varepsilon$.

Como E tem a P.S.A. , existe $T \in E^* \otimes E$, tal que $p_B(T(x)-x) < \delta$, para $x \in K$. Pela parte acima, isto acarreta que $\beta(f(T(x))-f(x)) < \varepsilon$, para $x \in K$. Seja $\{g_1,\dots,g_n\}$ uma base para T(E) e suponhamos que

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) g_i \ , \text{ onde } x \in E \text{ e } \{\phi_i\}_{i=1}^{n} \subset E^* .$$

Seja $U_o = U \cap E_B \cap T(E)$. Como f é S-holomorfa, f pode ser considerada como uma aplicação holomorfa do aberto equilibrado de di mensão finita U_o em F. Portanto

$$f(z) = f(\sum_{i=1}^{n} z_i g_i) = \sum_{\substack{|p|=0 \\ p\in N^n}}^{\infty} z^p f_p \quad ,$$

onde $(z_1,\ldots,z_n)\in \mathbb{C}^n$, $f_p \in F$ e a convergência é uniforme nos compactos de U_o. Como $T(K)\subset U\cap E_B$ e é compacto em U_o, existe $M\in \mathbb{N}$ tal que

$$\beta(f(z) - \sum_{|p|\leq M} z^p f_p) < \varepsilon \text{ , para todos os pontos}$$

$z= \sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)g_i \in T(K)$. Logo se $x\in K$, $\beta(f(x) - \sum_{|p|\leq M}\phi^p(x)f_p) \leq$

$$\beta(f(x) - f(T(x))) + \beta(f(T(x)) - \sum_{|p|\leq M}\phi^p(x)f_p) \leq 2\varepsilon .$$

Como $\sum_{|p|\leq M}\phi^p.f_p \in \mathcal{H}_{Sc}(E)\otimes F$, a prova se completa. Q.E.D.

Veremos agora uma generalização do TEOREMA 4.1 para uma classe maior de abertos.

4.2 DEFINIÇÃO Seja $U\subset E$ um aberto não vazio. Dizemos que U é S-Runge em E se $\mathcal{P}_b(E)$ é denso em $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe})$. U é finitamente S-Runge em E se para todo E_o , subespaço de E de dimensão finita, $U\cap E_o$ é S-Runge em E_o .

4.3 OBSERVAÇÃO No caso de E ser Banach , esta definição coincide com a de Aron-Schottenloher (1) , para abertos de Runge e finitamente Runge. Se $U\subset E$ é um aberto equilibrado , então U é finitamente S-Runge e S-Runge. Equivalências para esta definição encontram-se em Zaine,M.C. (tese de doutorado - a aparecer).

4.4 TEOREMA Se E tem a P.S.A. e $U\subset E$ é um aberto não vazio fi nitamente S-Runge, então $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ é τ_{oe}-denso em $\mathcal{H}_S(U;F)$, para todo F localmente convexo.

Para a prova deste TEOREMA necessitamos da seguinte:

4.5 PROPOSIÇÃO Seja F com a propriedade que para todo subconjunto compacto K de F, a envoltória absolutamente convexa fechada de K, $\Gamma(K)$, é compacto em F. Se $U \subset E$ é um aberto não vazio, então $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe}) \varepsilon F$ é isomorfo algebricamente e topologicamente a $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{oe})$. (como também $(\mathcal{P}_b(^nE), \tau_{oe}) \varepsilon F$ é isomorfo algebricamente e topologicamente a $(\mathcal{P}_b(^nE;F), \tau_{oe})$, para $n \in \mathbb{N}$.)

<u>Prova</u>: Esta PROPOSIÇÃO é um caso particular do TEOREMA 5.20 do capítulo 5. Lá mostraremos que a aplicação
$T: (\mathcal{H}_{Sn}(U;F), \tau_{nse}) \longrightarrow (\mathcal{H}_S(U), \tau_{nse}) \varepsilon F$, definida por $T(f) = T_f$, onde $T_f(\phi)(x) = (\phi \circ f)(x)$, para $\phi \in F'$, $x \in U$ e $f \in \mathcal{H}_{Sn}(U;F)$, é linear, injetora e um isomorfismo topológico sobre a imagem, para F Banach e $n \in \mathbb{N}$. Verificaremos que para $n=0$ basta que F satisfaçá a condição enunciada acima. Além disso, para $n=0$, T é sobrejetora. É o que vamos mostrar agora.
Temos que $T: \mathcal{H}_S(U;F) \longrightarrow \mathcal{L}(F'_c, (\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe}))$ é definida por $T(f)(\phi)(x) = (\phi \circ f)(x)$, para $x \in U$, $\phi \in F'$ e $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$. Seja $A \in \mathcal{L}(F'_c, (\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe}))$. Para $x \in U$, definimos a aplicação linear $f(x): F' \longrightarrow \mathbb{C}$ por $f(x)(\phi) = A(\phi)(x)$, para $\phi \in F'$. Para cada $x \in U$, $f(x)$ é contínua em F'_c e portanto pertence a F. (Robertson-Robertson (1)). Além disso, para todo $\phi \in F'$, $\phi \circ f = A(\phi)$

pertence a $\mathcal{H}_S(U)$ e logo f é fracamente S-holomorfa . Pela PROPOSIÇÃO 1.27 , f é S-holomorfa em U. Finalmente , como $T(f)=A$, segue que T é sobrejetora. Q.E.D.

4.6 COROLÁRIOS DA PROPOSIÇÃO 4.5

Para um subconjunto aberto não vazio U de E, temos:

a) Se F é completo e F ou $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe})$ tem a P.A. , então $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe})\, \hat{\otimes}_\varepsilon F \approx (\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{oe})$. Em particular se E tem dimensão finita e F for completo , então

$(\mathcal{H}(U), \tau_o)\, \hat{\otimes}_\varepsilon F \approx (\mathcal{H}(U;F), \tau_o)$.

b) Se F tem a P.A. e a propriedade enunciada na PROPOSIÇÃO 4.5, então $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ é τ_{oe}-denso em $\mathcal{H}_S(U;F)$.

c) $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe})$ tem a P.A. se, e somente se , $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ é denso em $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{oe})$ para todo F de Banach.

A prova de a) segue da PROPOSIÇÃO 4.5 e PROPOSIÇÃO 3.5(f). A prova de b) segue da PROPOSIÇÃO 4.5 e PROPOSIÇÃO 3.5(b) e a prova de c) segue da PROPOSIÇÃO 4.5 , PROPOSIÇÃO 3.5(c) e da PROPOSIÇÃO 1.29.

Prova do TEOREMA 4.4 : Sejam $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, $K \subset U$ um compacto estrito e $\beta \in SNC(F)$. Da hipótese de E ter a P.S.A. , existe $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B , de modo que para todo $\varepsilon > 0$, existe $T \in E^* \otimes E$ satisfazendo $p_B(T(x)-x) < \varepsilon$, para todo $x \in K$. Como no TEOREMA 4.2 , existe $\delta > 0$,

$\delta < \operatorname{dist}_{E_B} (K, \complement_{E_B} (U \cap E_B))$ tal que se $p_B(T(x)-x) < \delta$, então

$\beta(f(T(x))- f(x))<\varepsilon$, para $x\in K$. Seja $U_o = U\cap E_B\cap T(E)$. Como $T(E)$ tem dimensão finita , segue do COROLARIO 4.6 a) que $(\mathcal{H}(U_o;\hat{F})\ ,\ \tau_o)$ é isomorfo algebricamente e topologicamente a $(\mathcal{H}(U_o),\ \tau_o)\ \hat{\otimes}_\varepsilon\ \hat{F}$, onde $\hat{F}$ é o completamento de F. Portanto para $f|_{U_o}$, existe $f_1\in\mathcal{H}(U_o)\otimes\hat{F}$, tal que

$\beta(\ f|_{U_o}(y) - f_1(y))<\varepsilon$, para $y\in T(K)$. Seja

$$f_1 = \sum_{j=1}^{m}\varphi_j\otimes z_j\ ,\ \text{onde}\ \varphi_j\in\mathcal{H}(U_o)\ \text{e}\ z_j\in\hat{F}, j=1,..,m.$$

Existem $\bar{z}_j\in F, j=1,..,m$, com $\|\varphi_j\|_{T(K)}\cdot\beta(z_j-\bar{z}_j)<\varepsilon/2m$, e desde que U_o é S-Runge em $T(E)$, existem $\bar{\varphi}_j\in\mathcal{H}_S(T(E))$ com

$$\|\varphi_j - \bar{\varphi}_j\|_{T(K)}\cdot\beta(\bar{z}_j)<\varepsilon/2m\quad,\ j=1,..,m.$$

Seja $f_2 = \sum_{j=1}^{m}\bar{\varphi}_j\otimes\bar{z}_j\in\mathcal{H}_S(T(E))\otimes F$, então $\beta(f_1(y)-f_2(y))<\varepsilon$ para $y\in T(K)$. Tomando $h=f_2\circ T|_U\in\mathcal{H}_S(U)\otimes F$, temos , para todo $x\in K$, $\beta(f(x) - h(x))\leq\beta(f(x) - f|_{U_o}(T(x)))+$ $+\ \beta(f|_{U_o}(T(x)) - f_1(T(x))) + \beta(f_1(T(x))- f_2(T(x)))<3\varepsilon$.Q.E.D.

4.7 OBSERVAÇÃO Na realidade mostramos que $f_2\in\mathcal{P}_b(T(E))\otimes F$, ou seja , $h = f_2\circ T\in\mathcal{P}_b(E)\otimes F$. Logo, isto significa, em particular, que se E tem a P.S.A. e U é um subconjunto aberto finitamente S-Runge de E , então U é S-Runge.

4.8 TEOREMA Sejam E quase-completo e U um subconjunto aberto não vazio de E . Se $(\mathcal{H}_S(U),\ \tau_{oe})$ tem a P.A. , então E tem a P.S.A.

<u>Prova</u>: Vamos mostrar que $E^*_{ce} = (E^*\ ,\ \tau_{oe})$ tem suplementar topo-

lógico em $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe})$; isto implicará que E^*_{ce} tem a P.A. Em seguida , com a hipótese de E ser quase-completo, obteremos que E tem a P.S.A..

Para $a \in U$, a aplicação $D_a : (\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe}) \longrightarrow E^*_{ce}$, definida por $D_a(f) = \hat{\delta}^1 f(a)$, para $f \in \mathcal{H}_S(U)$, é uma projeção contínua sobre E^*_{ce} . É claro que $D_a^2 = D_a$. Para mostrar a continuidade , seja K um subconjunto compacto estrito de E . Logo, existe $B \in \mathcal{B}_E$, tal que $K \subset E_B$ e é compacto em E_B . Seja $\delta > 0$, tal que $a + \delta K \subset U \cap E_B$. Da desigualdade de Cauchy(COROLÁRIO 1.22) ,

$$\sup_{x \in K} \left| \hat{\delta}^1 f(a)(x) \right| \leq \frac{1}{\delta} \sup_{x \in K} \left| f(a + \delta x) \right| \qquad , \text{ para toda}$$

$f \in \mathcal{H}_S(U)$. Logo, D_a é contínua.

Mostraremos agora que E tem a P.S.A.. Como E^*_{ce} tem a P.A. , para todo $\mathcal{X} \subset E^*_{ce}$ compacto e absolutamente convexo, para todo $K \subset E$, compacto estrito e para todo $\varepsilon > 0$, existe $g \in (E^*_{ce})' \otimes E^* \subset (E'_c)' \otimes E^* = E \otimes E^*$, pois E é quase-completo, tal que $\| g(\varphi) - \varphi \|_K < \varepsilon$, para todo $\varphi \in \mathcal{X}$. Como $g \in (E^*_{ce})' \otimes E^*$,

$$g = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \otimes x_i \quad , \ \varphi_i \in (E^*_{ce})' \ , \ x_i \in E^*, \ i=1,..,m.$$

Desde que para cada $i=1,..,m$, $\varphi_i : E^*_{ce} \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínua , $|\varphi_i(\varphi)| \leq c_i p_i(\varphi)$, para $\varphi \in E^*$, onde $p_i(\varphi) = \| \varphi \|_{L_i}$, para algum L_i compacto estrito de E. Sejam $B_i \in \mathcal{B}_E$ tais que $L_i \subset E_{B_i}$ e são compactos em E_{B_i} , para cada $i=1,..,m$. Como K é compacto estrito em E, existe $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset E_B$ e é compacto em E_B .

Seja $L = \Gamma(\bigcup_{i=1}^{m} L_i \cup K)$. Logo, $|\varphi_i(\varphi)| \leq c\|\varphi\|_L$, onde c é uma constante. Para $D \in \mathcal{B}_E$ tal que $B \subset D$ e $B_i \subset D$, para i=1,..,m, L é um compacto absolutamente convexo no espaço de Banach E_D.

Pelo teorema de Hahn - Banach existem, para cada i=1,..,m, $\tilde{\varphi}_i : (E_D)' \longrightarrow \mathbb{C}$ extensões lineares de φ_i, tais que $|\tilde{\varphi}_i(\varphi)| \leq \|\varphi\|_L$, para $\varphi \in (E_D)'$. Portanto, cada $\tilde{\varphi}_i \in (E_D)'_c$.

Seja $\Psi : E^*_{ce} \longrightarrow (E_D)'_c$ definida por $\Psi(T) = T|_{E_D} = T_D$, para $T \in E^*$. Ψ é linear e contínua. Logo, $\Psi(\mathcal{X}) = \mathcal{X}_D$ é compacto absolutamente convexo em $(E_D)'_c$ e então equicontínuo. Podemos, então escrever $\mathcal{X}_D = V^o$, com V vizinhança do zero em E_D, absolutamente convexa e fechada. ($V = \{v \in E_D,\ p_D(v) \leq \delta\}$, para algum $\delta > 0$). Logo $\mathcal{X}_D^o = V^{oo} = V$. Como temos $K \subset E_D$,

$$\sup_{t \in K} |g(\varphi)(t) - \varphi(t)| = \sup_{t \in K} |g(\varphi_D)(t) - \varphi_D(t)| < \varepsilon, \text{ se } \varphi_D \in$$

$\mathcal{X}_D$; ou seja

$$\sup_{t \in K} \left| \sum_{i=1}^{m} \tilde{\varphi}_i(\varphi_D) x_i(t) - \varphi_D(t) \right| < \varepsilon \ , \ \varphi_D \in \mathcal{X}_D \ .$$

Logo,

$$\sup_{t \in K} \left| \varphi_D\left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{\varphi}_i x_i(t) - t \right) \right| < \varepsilon \ , \text{ para } \varphi_D \in V^o \ , \text{ e}$$

então $1/\varepsilon \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{\varphi}_i x_i(t) - t \right) \in V$, ou seja,

$\sup_{t \in K} p_D(g(t) - t) \leq \varepsilon\,\delta$. Desde que $g \in E^* \otimes E$ e δ independe de ε, segue que E tem a P.S.A. Q.E.D.

4.9 DEFINIÇÃO E tem a propriedade de aproximação Silva-holomorfa (P.A.S.H.) se, dado $K \subset E$ compacto estrito, existe $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset E_B$ e é compacto em E_B e dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{H}_S(E) \otimes E$ tal que $p_B(g(x) - x) < \varepsilon$, para todo $x \in K$.

É claro que se E tem a P.S.A., então E tem a P.A.S.H.. Para a recíproca é necessário que E seja quase-completo, ou mais precisamente temos o seguinte TEOREMA que reune os anteriores para um subconjunto aberto finitamente S-Runge.

4.10 TEOREMA Sejam E quase-completo e U um subconjunto aberto finitamente S-Runge de E. São equivalentes:

a) E tem a P.A.S.H..

b) Para todo F localmente convexo, $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ é τ_{oe}-denso em $\mathcal{H}_S(U;F)$.

c) $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe})$ tem a P.A..

d) E tem a P.S.A..

<u>Observação</u>: A hipótese de E ser quase-completo só é necessária para c) $\longrightarrow$ d).

<u>Prova</u>: b) $\longrightarrow$ c) é o COROLÁRIO 4.6 c) que vale para todo subconjunto aberto U de E. c) $\longrightarrow$ d) é o TEOREMA 4.8. d) $\longrightarrow$ a) é evidente. Resta mostrar a) $\longrightarrow$ b). Esta prova é idêntica à do TEOREMA 4.4, substituindo a aplicação $T \in E^* \otimes E$ por uma $g \in \mathcal{H}_S(E) \otimes E$ da definição de P.A.S.H.. Q.E.D.

4.11 COROLÁRIO Seja E quase-completo. Então E tem a P.S.A. se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_b(^nE), \tau_{oe})$ tem a P.A..

<u>Prova</u>: Se E tem a P.S.A., segue do TEOREMA 4.10 que para todo subconjunto aberto finitamente S-Runge U de E, $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{oe})$

tem a P.A. . Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_b(^nE), \mathcal{T}_{oe})$ tem suplementar topológico em $(\mathcal{H}_S(U), \mathcal{T}_{oe})$, temos que $(\mathcal{P}_b(^nE), \mathcal{T}_{oe})$ tem a P.A. . Reciprocamente, em particular E^*_{ce} tem a P.A. Isto acarreta que E tem a P.S.A..(como na prova do TEOREMA 4.8). Q.E.D.

4.12 OBSERVAÇÃO : Deste COROLÁRIO podemos ainda obter que para E quase-completo e U um subconjunto aberto finitamente S-Runge de E, então $(\mathcal{H}_S(U), \mathcal{T}_{oe})$ tem a P.A. se, e somente se, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_b(^nE), \mathcal{T}_{oe})$ tem a P.A. . Contudo da PROPOSIÇÃO 5.12 do capítulo 5 , vamos obter: Para E qualquer e U subconjunto aberto equilibrado de E, $(\mathcal{H}_S(U), \mathcal{T}_{oe})$ tem a P.A. se, e somente se, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_b(^nE), \mathcal{T}_{oe})$ tem a P.A..

Veremos agora alguns resultados sobre a aderência de $\mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$, para F e G de Banach, em $(\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \mathcal{T}_{oe})$. Notemos inicialmente que isto faz sentido pois $\mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$ está canônicamente imerso em $\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ pela aplicação $f \otimes g\,(x) = f(x) \otimes g$, para $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, $g \in G$ e $x \in U$. Da mesma forma , podemos considerar $\mathcal{P}_b(^nE;F) \otimes G$ como um subespaço de $\mathcal{P}_b(^nE;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$, para $n=0,1,\ldots$.

4.13 LEMA Para $f \in \mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ e K um subconjunto compacto estrito de U, temos que

$$L = \left\{ f(x)(\phi) \ , \ x \in K, \ \phi \in F', \ \|\phi\| \leq 1 \right\}$$ é relativamente compacto em G.

<u>Prova</u>: É suficiente mostrar que toda sequência da forma $(f(x_m)(\phi_m))_{m=1}^{\infty}$ tem uma subsequência convergente em G, para $x_m \in K$, $\phi_m \in F'$, $\|\phi_m\| \leq 1$, $m=1,\ldots$.

Desde que $f \in \mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ e $F \varepsilon G$ é completo, então f pode ser considerada como uma aplicação de U em $F \varepsilon G = \mathcal{L}_\varepsilon (F'_c;G)$. Como f(K) é compacto em $F \varepsilon G$, há $x_o \in K$ tal que para $B=\{\phi \in F', \|\phi\| \leq 1\}$ e k=1,2, ... existe x_{n_k} tal que

$$\sup_{\phi \in B} | f(x_{n_k})(\phi) - f(x_o)(\phi)| < 1/k .$$

Como $f(x_o)(B)$ é compacto em G , há $\phi_o \in B$ tal que para cada j=1, 2,... existe $\phi_{n_{k_j}} \in B$ tal que

$|f(x_o)(\phi_{n_{k_j}}) - f(x_o)(\phi_o)| < 1/j$. Agora é fácil ver que $(f(x_{n_{k_j}})(\phi_{n_{k_j}}))_{j=1}^{\infty}$ converge para $f(x_o)(\phi_o)$. Q.E.D.

4.14 TEOREMA :

a) Se G tem a P.A. e U é um subconjunto aberto não vazio de E, então $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{oe}) \hat{\otimes}_\varepsilon G$ é isomorfo algebricamente e topologicamente a $(\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{oe})$. (que é equivalente à $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{oe}) \varepsilon G \simeq (\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{oe})$.

b) Se E tem a P.S.A. e U é um subconjunto aberto equilibrado de E, então $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{oe}) \hat{\otimes}_\varepsilon G$ é isomorfo algebricamente e topologicamente a $(\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{oe})$.

<u>Prova</u>: a) Desde que $(\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{oe})$ é completo, pois $F \hat{\otimes}_\varepsilon G$ é completo (PROPOSIÇÃO 1.29) , devemos mostrar somente que $\mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$ é τ_{oe}-denso em $\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ e que $(\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{oe})$ induz a topologia ε no produto tensorial $\mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$.

Sejam $f \in \mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$, K um subconjunto compacto estrito de U e $\varepsilon > 0$. Como F e G são completos e G tem a P.A. , $F \hat{\otimes}_\varepsilon G =$

$F \mathcal{E} G = \mathcal{L}_{\mathcal{E}}(F'_c;G)$ (PROPOSIÇÃO 3.5(f)) , assim podemos considerar f como uma aplicação de U em $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}(F'_c;G)$. Do LEMA anterior,

$$L = \left\{ f(x)(\phi) \ , \ x \in K \ , \ \phi \in F', \ \|\phi\| \leq 1 \right\}$$ é relativamente

compacto em G. Seja $T \in G' \otimes G$, tal que $\| T(z) - z \| < \mathcal{E}$, para $z \in L$. Seja $\{g_1,..,g_k\}$ uma base para $T(G)$. Para $i=1,..,k$, seja $c_i : U \longrightarrow F''$ definida por

$$T(f(x)(\Psi)) = \sum_{i=1}^{k} c_i(x)(\Psi) g_i \ ,$$ onde $\Psi \in F'$. Para cada

$x \in U$, $c_i(x)$ é contínua em F'_c e logo por Robertson-Robertson(1), $c_i(x)$ pertence a F. Além disso , $c_i : U \longrightarrow F$ é fracamente S-holomorfa, pois se $\Psi \in F'$, então $\Psi(c_i(x)) = \phi_i \circ T(f(x)(\Psi))$, onde $\phi_i \in G'$, $\phi_i(g_j) = \delta_{ij}$. Pela PROPOSIÇÃO 1.27 , c_i é S-holomorfa. Finalmente , para $x \in K$, $\sup_{x \in K} \| T \circ f(x) - f(x) \|_{F \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} G} \leq$

$$\sup \left\{ |\Psi(T(f(x)(\phi))) - f(x)(\phi)| \ ; x \in K, \phi \in F', \|\phi\| \leq 1 \ , \Psi \in G', \ \|\Psi\| \leq 1 \right\} \leq$$

$$\sup \left\{ \| T(f(x)(\phi)) - f(x)(\phi) \| \ ; \ x \in K, \ \phi \in F', \ \phi \leq 1 \right\} < \mathcal{E}.$$

Como $T \circ f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i(x) \otimes g_i \in \mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$, temos a função procurada.

Para completar a prova de a) , vamos mostrar que $(\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} G) \ , \ \tau_{oe})$ induz a topologia $\mathcal{E}$ no produto tensorial $(\mathcal{H}_S(U;F), \ \tau_{oe}) \otimes G$. Isto decorre do seguinte , que é devido ao teorema de Hahn- Banach: seja K um subconjunto compacto estrito de U e

$$h(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \otimes g_i \in \mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} G) \ ,$$

onde $f_i \in \mathcal{H}_S(U;F)$ e $g_i \in G$, $i=1,\dots,k$, então

$$\sup_{x \in K} \| h(x) \|_{F \hat{\otimes}_\varepsilon G} = \sup_{x \in K} \Big\| \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \otimes g_i \Big\|_{F \hat{\otimes}_\varepsilon G} \leq 1 ,$$

se, e somente se,

$$\sup \Big\{ \Big\| \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \Psi(g_i) \Big\|_F , \ x \in K , \ \Psi \in G', \ \|\Psi\| \leq 1 \Big\} \leq 1 .$$

Prova de b) . Basta mostrar que nas hipóteses dadas $\mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$ é $\mathcal{T}_{oe}$-denso em $\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$, pois na segunda parte da prova de a) , não se usou o fato de G ter a P.A..
Seja $f \in \mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$, K um subconjunto compacto estrito de U e $\varepsilon > 0$. Com prova idêntica à do TEOREMA 4.1, obtemos que $\mathcal{H}_S(U) \otimes (F \otimes G)$ é $\mathcal{T}_{oe}$-denso em $\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ .Logo, como $\mathcal{H}_S(U) \otimes (F \otimes G) = (\mathcal{H}_S(U) \otimes F) \otimes G \subset \mathcal{H}_S(U;F) \otimes G \subset \mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$, obtemos também que $\mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$ é $\mathcal{T}_{oe}$-denso em $\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$. Q.E.D.

4.15 COROLÁRIO Sejam E com a P.S.A. , $U \subset E$ aberto equilibrado e F Banach. Então $(\mathcal{H}_S(U;F), \mathcal{T}_{oe})$ tem a P.A. se, e somente se, $(\mathcal{H}_S(U;F), \mathcal{T}_{oe}) \,\varepsilon\, G \approx (\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \mathcal{T}_{oe})$, para todo G de Banach.

Prova: Desde que nas hipóteses dadas $\mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$ é $\mathcal{T}_{oe}$-denso em $\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$, para todo G Banach, temos que se $(\mathcal{H}_S(U;F), \mathcal{T}_{oe}) \,\varepsilon\, G \approx (\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \mathcal{T}_{oe})$, então da PROPOSIÇÃO 3.5(c) , $(\mathcal{H}_S(U;F), \mathcal{T}_{oe})$ tem a P.A..
Reciprocamente é imediato devido à PROPOSIÇÃO 3.5(f) e o TEOREMA anterior. Q.E.D.

CAPÍTULO 5

PRODUTO TENSORIAL DE FUNÇÕES SILVA-HOLOMORFAS E A PROPRIEDADE DE APROXIMAÇÃO PARA $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{\omega se})$.

Neste capítulo vamos estudar a aderência do produto tensorial $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ em $\mathcal{H}_S(U;F)$ com topologias mais fortes que a τ_{oe}, definidas no capítulo 1. Alguns resultados para os subespaços de $\mathcal{H}_S(U;F)$ definidos no capítulo 2, serão obtidos. Para E holomorficamente infratonelado e k-espaço, examinaremos a aderência do produto tensorial $\mathcal{H}(U) \otimes F$ em $\mathcal{H}(U;F)$, para as topologias $\tau_{\omega s}$, τ_{ns} e $\tau_{\infty s}$. Para as topologias $\tau_{\omega s}$ em $\mathcal{H}(U;F)$ e $\tau_{\omega se}$ em $\mathcal{H}_S(U;F)$ foi necessário um estudo mais detalhado sobre as aplicações holomorfas compactas e S-holomorfas b-compactas. Desses resultados obteremos algumas relações com a P.A. para E e para $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{\omega se})$ e $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{\infty se})$, como foi obtido por Aron e Schottenloher (1) e Aron (1), para espaços de Banach em $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ e $(\mathcal{H}(U), \tau_\infty)$. ($\tau_\omega$ é a topologia de Nachbin, (Nachbin (1))). Veremos a seguir resultados sobre o completamento de $(\mathcal{H}_S(U), \tau) \otimes_\varepsilon F$ em $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau)$, para as diferentes topologias τ aqui utilizadas. Finalmente será es tudado o $\mathcal{H}_S(U;F) \hat{\otimes}_\varepsilon G$, para F e G de Banach.

Iniciaremos o capítulo com propriedades básicas das aplicações holomorfas compactas e S-holomorfas b-compactas (DEFINIÇÕES 2.43 e 2.44), que serão necessárias.

5.1 PROPOSIÇÃO a) Seja F Banach com a P.A.. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_K(^nE;F) \subset \mathcal{P}_C(^nE;F)$ e $\mathcal{P}_{bK}(^nE;F) \subset \mathcal{P}_{bC}(^nE;F)$.
b) Seja F normado. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{bC}(^nE;F) \subset \mathcal{P}_{bK}(^nE;F)$.

<u>Prova</u> a) Vamos provar somente o caso contínuo, pois o outro é análogo. Sejam $P \in \mathcal{P}_K(^nE;F)$ e $B \in \mathcal{B}_E$. Como F é Banach e tem a P.A., dado $\varepsilon > 0$, existe $T \in F' \otimes F$ tal que $\|T(z) - z\| < \varepsilon$, para todo $z \in P(B)$. Desde que $T \circ P \in \mathcal{P}(^nE) \otimes F$ e $\|T \circ P - P\|_B < \varepsilon$, segue que $P \in \mathcal{P}_C(^nE;F)$.
b) Notemos inicialmente que $\mathcal{P}_b(^nE) \otimes F \subset \mathcal{P}_{bK}(^nE;F)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, pois se $B \in \mathcal{B}_E$ e $P \in \mathcal{P}_b(^nE) \otimes F$, então $P(B) \subset [P(E)]$. ($[P(E)]$ denota o subespaço gerado por $P(E)$, de dimensão finita em F). Logo, $P(B)$ é precompacto em F.
Seja, agora $P \in \overline{\mathcal{P}_b(^nE) \otimes F}$, aderência em $\mathcal{P}_b(^nE;F)_s$. Logo, se $B \in \mathcal{B}_E$ e $\varepsilon > 0$ é dado, existe $Q \in \mathcal{P}_b(^nE) \otimes F$, tal que

$$\sup_{x \in B} \| P(x) - Q(x)\| < \varepsilon/3 .$$

Desde que $Q(B)$ é precompacto em F, existe $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset B$, tal que $Q(B) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon/3}(Q(x_i))$. ($B_r(a) = \{x \in F , \|x - a\| < r\}$).

Portanto, para cada $x \in B$, existe i, tal que $\|P(x) - P(x_i)\| \leq$
$\leq \|P(x) - Q(x)\| + \|Q(x) - Q(x_i)\| + \|Q(x_i) - P(x_i)\| < \varepsilon$.
Isto significa que $P(B) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(P(x_i))$, ou seja, que $P(B)$ é

precompacto em F. Q.E.D.

5.2 OBSERVAÇÃO Um espaço E localmente convexo é holomorficamente infratonelado se, para todo $U \subset E$ e todo F, a coleção $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}(U;F)$ é equicontínua se $\mathcal{X}$ é limitada em todos os subconjuntos compactos de U. (Nachbin (5)). Mais adiante veremos que quando E for holomorficamente infratonelado e k-espaço e F Banach com a P.A., então $\mathcal{P}_C(^nE;F) = \mathcal{P}_K(^nE;F)$.

Para um polinômio n-homogêneo $P : E \longrightarrow F$, $P^*: F' \longrightarrow \mathcal{P}(^nE)$, é definida por $P^*(\varphi)(x) = \varphi \circ P(x)$, $\varphi \in F'$ e $x \in E$. Claramente P^* é linear.

5.3 PROPOSIÇÃO 1) Sejam E holomorficamente infratonelado, F Banach e $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$. São equivalentes:

a) $P: E \longrightarrow F$ é compacta.

b) $P^*: F'_c \longrightarrow \mathcal{P}(^nE)_s$ é contínua.

c) $P^*: F'_s \longrightarrow \mathcal{P}(^nE)_s$ é compacta.

(Como F é Banach, $F'_c = (F', \tau_o)$. F'_s indica F' com a topologia da norma e $\mathcal{P}(^nE)_s = (\mathcal{P}(^nE), \tau_s)$).

2) Sejam F Banach e $P \in \mathcal{P}_b(^nE;F)$. São equivalentes:

a) $P: E \longrightarrow F$ é b-compacta.

b) $P^*: F'_c \longrightarrow \mathcal{P}_b(^nE)_s$ é contínua.

c) $P^*: F'_s \longrightarrow \mathcal{P}_b(^nE)_s$ é b-compacta.

<u>Prova</u> : 1) a)$\rightarrow$b) Seja $B \in \mathcal{B}_E$ e $p(P) = \|P\|_B$ uma seminorma τ_s-contínua em $\mathcal{P}(^nE)$. Por a), $\overline{P(B)} = L$ é compacto em F. Logo, $p(P^*(\varphi)) = p(\varphi \circ P) = \|\varphi \circ P\|_B \leq \|\varphi\|_L$, para todo $\varphi \in F'$.

b)$\longrightarrow$c) O conjunto $\{\varphi \in F', \|\varphi\| \leq 1\}$ é equicontínuo em F' e logo compacto em F'_c . Assim , por b) , $P^*(\{\varphi \in F', \|\varphi\| \leq 1\})$ é compacto e logo precompacto em $\mathcal{P}(^nE)_s$. Portanto P^* é compacta.

c) $\longrightarrow$ a). Aplica-se a) $\longrightarrow$ c) à aplicação linear P^* . Logo , $P^{**}:(\mathcal{P}(^nE)_s)'_s \longrightarrow \mathcal{P}(^nF'_s)_s$ é compacta. Contudo se $\varphi \in (\mathcal{P}(^nE)_s)'$, então $P^{**}(\varphi) \in (F'_s)'_s$. De fato, $P^{**}(\varphi):F'_s \longrightarrow C$ é dada por $P^{**}(\varphi)(\psi) = \varphi \circ P^*(\psi)$ é linear e contínua. A continuidade segue de $|P^{**}(\varphi)(\psi)| = |\varphi \circ P^*(\psi)| \leq cq(P^*(\psi))$, onde $q \in SNC(\mathcal{P}(^nE)_s)$ é dada por $q(P^*(\psi)) = \|P^*(\psi)\|_B = \|\psi\|_{P(B)}$ para algum $B \in \mathcal{B}_E$. Além disso , $P(B)$ é limitado em F.

Ainda mais, a aplicação

$T': P^{**}((\mathcal{P}(^nE)_s)'_s) \subset \mathcal{P}(^nF'_s)_s \longrightarrow (F'_s)'_s$, definida por $T'(P^{**}(\varphi)) = P^{**}(\varphi)$, para $\varphi \in (\mathcal{P}(^nE)_s)'$ é linear e contínua. Isto vai significar que a aplicação

$$(\mathcal{P}(^nE)_s)'_s \xrightarrow{P^{**}} \mathcal{P}(^nF'_s)_s \xrightarrow{T'} (F'_s)'_s \text{ é compacta.}$$

Como $T' \circ P^{**} = P^{**}$, vem que $P^{**}:(\mathcal{P}(^nE)_s)'_s \longrightarrow (F'_s)'_s$ é compacta.

Vamos mostrar, agora que a aplicação $T:E \longrightarrow (\mathcal{P}(^nE)_s)'_s$, $x \longmapsto T_x$, definida por $T_x(P) = P(x)$, para $x \in E$ e $P \in \mathcal{P}(^nE)$ é contínua , se E for holomorficamente infratonelado. Notemos inicialmente que T_x é linear e $|T_x(P)| = |P(x)| \leq q_x(P)$, onde $q_x(P) = |P(x)| \in SNC(\mathcal{P}(^nE)_s)$, pois $\{x\}$ é um subconjunto limitado de E. Vejamos agora que T é contínua.

Seja $q \in SNC((\mathcal{P}(^nE)_s)'_s)$, $q(\varphi) = \sup_{P \in \mathcal{B}} |\varphi(P)|$, onde $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(^nE)_s \subset (\mathcal{H}(E), \tau_{ws})$ é limitado. Como E é holomorficamente infratonelado e $\mathcal{B}$ é τ_o-limitado em $\mathcal{H}(E)$, temos que $\mathcal{B}$ é equi -

contínuo. Logo, para cada $x \in E$, existe $V(x)$, vizinhança de x em E, tal que se $t \in V(x)$, $\sup_{P \in \mathcal{B}} \{|P(x) - P(t)|\} < M$. Ou seja para $t \in V(x)$,

$$q(T_x - T_t) = \sup_{P \in \mathcal{B}} \{|T_x(P) - T_t(P)|\} = \sup_{P \in \mathcal{B}} \{|P(x) - P(t)|\} < M .$$

Portanto T é contínua. Disso, obtemos que a aplicação $P^{**} \circ T: E \longrightarrow (F'_s)'_s$ é compacta. Desde que para $x \in E$,

$(P^{**} \circ T)(x)(\varphi) = P^{**}(T(x))(\varphi) = T(x)(P^*(\varphi)) = T_x(\varphi \circ P) = \varphi \circ P(x)$, para $\varphi \in F'$ e como todo elemento de F pode ser considerado como um elemento de F'', temos que $\varphi \circ P(x) = P(x) \in F$. Portanto $(P^{**} \circ T)(x) = P(x)$, para todo $x \in E$ e então $P: E \longrightarrow F$ é compacta.

2) a)$\longrightarrow$b)$\longrightarrow$c) é análogo à 1). Resta somente mostrar que c)$\longrightarrow$a). Da mesma forma que em 1), aplicamos a)$\longrightarrow$c) à aplicação P^* e obtemos que $P^{**}: (\mathcal{P}_b(^nE)_s)'_s \longrightarrow \mathcal{P}_b(^nF'_s)_s$ é b-compacta. Como também, $P^{**}: (\mathcal{P}_b(^nE)_s)'_s \longrightarrow (F'_s)'_s$ é b-compacta.

Veremos agora que para cada $B \in \mathcal{B}_E$, a aplicação $\Psi_B: E_B \longrightarrow (\mathcal{P}_b(^nE)_s)'_s$ definida por $\Psi_B(x)(P) = P(x)$, para $x \in E_B$ e $P \in \mathcal{P}_b(^nE)$, é contínua. Para isto vamos verificar que Ψ_B é um polinômio n-homogêneo S-limitado.

Seja $\varphi: \underbrace{E_B \times \ldots \times E_B}_{n} \longrightarrow (\mathcal{L}_{bs}(^nE))'_s$, tal que

$\varphi(x_1,\ldots,x_n)(A) = A(x_1,\ldots,x_n)$, para $x_i \in E_B$, $i=1,\ldots,n$ e $A \in \mathcal{L}_{bs}(^nE)$. Desde que $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ é linear e satisfaz:

$$|\varphi(x_1,\ldots,x_n)(A)| = |A(x_1,\ldots,x_n)| \leq \|A\|_C \cdot p_C(x_1)\ldots p_C(x_n) ,$$

onde $C = \Gamma(\{x_1,\ldots,x_n\})$, segue que $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathcal{L}_{bs}(^nE))'$.

Notemos também que φ é n-linear e simétrica.

Seja I o isomorfismo topológico canônico entre $\mathcal{L}_{bs}(^nE)$ e $\mathcal{P}_b(^nE)_s$. Definimos, então

$\varphi_1 : E_B \underbrace{x \ldots x}_{n} E_B \longrightarrow (\mathcal{P}_b(^nE)_s)'_s$, por

$\varphi_1(x_1,\ldots,x_n)(\hat{A}) = \varphi(x_1,\ldots,x_n)(I^{-1}(\hat{A})) = \varphi(x_1,\ldots,x_n)(A) =$

$=A(x_1,\ldots,x_n)$, para $\hat{A} \in \mathcal{P}_b(^nE)$ e $x_i \in E_B$, $i=1,\ldots,n$.

Logo, φ_1 é n-linear e simétrica. Desde que $\hat{\varphi}_1(x) = \varphi_1(\underbrace{x,\ldots,x}_{n})$ é tal que $\varphi_1(x,\ldots,x)(P) = P(x) = \Psi_B(x)(P)$, segue que $\hat{\varphi}_1(x) = \Psi_B(x)$, para todo $x \in E_B$. Isto significa que $\Psi_B \in \mathcal{P}_a(^nE_B, (\mathcal{P}_b(^nE)_s)'_s)$. Ainda mais , se H é limitado em E_B , $\Psi_B(H)$ é limitado em $(\mathcal{P}_b(^nE)_s)'_s$ se for limitado sobre os limitados de $\mathcal{P}_b(^nE)_s$, ou seja se $\sup_{\substack{x \in H \\ P \in \mathcal{C}}} |\Psi_B(x)(P)| < \infty$, onde $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}_b(^nE)$ e é limitado. Mas , temos que $\sup_{\substack{x \in H \\ P \in \mathcal{C}}} |\Psi_B(x)(P)| =$

$= \sup_{\substack{x \in H \\ P \in \mathcal{C}}} |P(x)| < \infty$, pois $\mathcal{C}$ é limitado sobre os limitados de E.

Logo, $\Psi_B \in \mathcal{P}_b(^nE_B; (\mathcal{P}_b(^nE)_s)'_s) = \mathcal{P}(^nE_B; (\mathcal{P}_b(^nE)_s)'_s)$, pois E_B é normado , e temos aí a continuidade de Ψ_B .

Se $D = \Gamma(\Psi_B(B))$, então $D \in \mathcal{B}_{(\mathcal{P}_b(^nE)_s)'_s}$. Se $x \in E_B$, existe $\lambda > 0$, tal que $x = \lambda y$, com $y \in B$. Logo, $\Psi_B(x) =$ $= \lambda^n \Psi_B(y) \in ((\mathcal{P}_b(^nE)_s)'_s)_D$, ou seja $\Psi_B(E_B) \subset ((\mathcal{P}_b(^nE)_s)'_s)_D$.

Desde que por hipótese , $P^{**}((\mathcal{P}_b(^nE)_s)'_s)_D \longrightarrow (F'_s)'_s$ é compacta , segue que $P^{**} \circ \Psi_B : E_B \longrightarrow (F_s')_s'$ é compacta. Temos ainda que para $x \in E_B$, $(P^{**} \circ \Psi_B)(x) = P(x)$. Logo a aplicação $P: E_B \longrightarrow F$ é compacta.

Definindo $\Psi = \Psi_B$, para cada $B \in \mathcal{B}_E$, obtém-se que $P^{**} \circ \Psi = P : E \longrightarrow F$ é b-compacta. Q.E.D.

5.4 TEOREMA . 1) Seja E holomorficamente infratonelado e k-espaço. Então $\mathcal{P}(^nE)_s \, \varepsilon \, F$ é isomorfo algebricamente e topologicamente a $(\mathcal{P}_K(^nE;F), \tau_s)$, para todo F de Banach. Consequentemente, $\mathcal{P}(^nE)_s$ tem a P.A. se, e somente se , $\mathcal{P}(^nE) \otimes F$ é denso em $(\mathcal{P}_K(^nE;F), \tau_s)$, para todo F de Banach.

2) Seja E qualquer. Então $\mathcal{P}_b(^nE)_s \, \varepsilon \, F$ é isomorfo algebricamente e topologicamente a $(\mathcal{P}_{bK}(^nE;F), \tau_s)$, para todo F de Banach. Consequentemente $\mathcal{P}_b(^nE)_s$ tem a P.A. se, e somente se, $\mathcal{P}_b(^nE) \otimes F$ é denso em $(\mathcal{P}_{bK}(^nE;F) , \tau_s)$, para todo F de Banach.

<u>Prova</u> : 1) Pela PROPOSIÇÃO 5.3 1) a aplicação $P \longmapsto P^*$, para $P \in \mathcal{P}_K(^nE;F)$ em $\mathcal{L}_\varepsilon(F_c' \, ; \mathcal{P}(^nE)_s) = \mathcal{P}(^nE)_s \, \varepsilon \, F$ é bem definida e linear. É injetora, pois F' separa pontos de F . É sobrejetora pois se $\varphi \in \mathcal{P}(^nE)_s \, \varepsilon \, F$, então $\varphi \in (\mathcal{P}(^nE) , \tau_o) \, \varepsilon \, F$ e logo pela PROPOSIÇÃO 1.1 de Aron e Schottenloher (1) , existe $T \in \mathcal{P}(^nE;F)$ tal que $\varphi = T^*$, pois E é um k-espaço. Como φ é contínua , segue da PROPOSIÇÃO 5.3 1) que T é compacta. Desde que pelo teorema de Hahn-Banach, $\|P\|_B \leq \varepsilon$ se, e somente se, $\sup \{ \|P^*(\psi)\|_B \; , \psi \in F', \|\psi\| \leq 1 \} \leq \varepsilon$, para $B \in \mathcal{B}_E$ e $P \in \mathcal{P}_K(^nE;F)$, e as seminormas $\sup \{ \|P^*(\psi)\|_B \; , \psi \in F' \; \|\psi\| \leq 1 \}$ determinam a topologia em $\mathcal{P}(^nE)_s \, \varepsilon \, F$ (DEFINIÇÃO 3.1) , temos que es-

te isomorfismo é topológico. A segunda afirmação, segue do fato que se E for um k-espaço então $\mathcal{P}(^nE)_s$ é completo e da PROPOSIÇÃO 3.5 (c).

2) A prova de 2) segue como em 1) usando as PROPOSIÇÕES 5.4 , 5.3 2) , COROLÁRIO 1.10 e PROPOSIÇÃO 3.5 (c). Q.E.D.

5.5 OBSERVAÇÃO Deste teorema segue que quando F for Banach com a P.A. e E for holomorficamente infratonelado e k-espaço , então $\mathcal{P}_K(^nE;F) = \mathcal{P}_C(^nE;F)$. De fato, se F tem a P.A. então $\mathcal{P}(^nE)_s \otimes F$ é denso em $\mathcal{P}(^nE)_s \varepsilon F$ (PROPOSIÇÃO 3.5 (c)). Da definição de $\mathcal{P}_C(^nE;F)$ segue o resultado.

Vejamos agora uma proposição que mostra que uma aplicação holomorfa de E em F é compacta se, e somente se , é compacta na origem. (valendo o mesmo para as aplicações S-holomorfas de E em F e b-compactas.)

5.6 PROPOSIÇÃO Seja F normado. 1) Se $f \in \mathcal{H}(E;F)$, são equivalentes:

a) $f \in \mathcal{H}_K(E;F)$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in E$, $\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(x) \in \mathcal{P}_K(^nE;F)$, onde $\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(x)$ indica o n-ésimo coeficiente da série de Taylor de f em x .

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0) \in \mathcal{P}_K(^nE;F)$.

d) existe V_o vizinhança do zero em E , tal que $f(V_o)$ é pre-compacto em F.

2) Se $f \in \mathcal{H}_S(E;F)$, são equivalentes:

a) f é b-compacta.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in E$, $\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(x) \in \mathcal{P}_{bK}({}^nE;F)$.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0) \in \mathcal{P}_{bK}({}^nE;F)$.

d) para cada $B \in \mathcal{B}_E$, existe V_B , vizinhança do zero em E_B , tal que $f(V_B)$ é precompacto em F.

Prova : 1). a) $\longrightarrow$ b) . Para $x \in E$, existe por a) uma vizinhança de x em E , $V_x = \{y \in E \; ; \alpha(y - x) < 1\}$, $\alpha \in SNC(E)$, tal que $f(V_x)$ é precompacto em F. Agora $\left\{\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(x)(a) \; ; \alpha(a) < 1\right\} \subset \Gamma(f(V_x))$, para cada n , o que implica b), pois a envoltória absolutamente convexa fechada de um precompacto é precompacto. De fato, se existe $b = \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(x)(a)$, para algum a , com $\alpha(a) < 1$, tal que $b \notin \Gamma(f(V_x))$, então pelo teorema de Hahn-Banach , existe $\varphi \in F'$, tal que $|\varphi(z)| \leq 1$ e $|\varphi(b)| > 1$, para todo $z \in \Gamma(f(V_x))$. Logo, se $g(\lambda) = \varphi \circ f(x+\lambda a), \lambda \in \mathbb{C}$, temos
$|\varphi(b)| = |\frac{1}{n!}g^{(n)}(0)| \leq \sup\{|g(\lambda)| \; ; |\lambda| = 1\} \leq 1$, que é uma contradição.

Com esta mesma prova , obtém-se d) $\longrightarrow$ c) . Como b) $\longrightarrow$ c) e a) $\longrightarrow$ d), basta provar c) $\longrightarrow$ a) . Seja $x \in E$. Como $f \in \mathcal{H}(E;F)$, existe uma vizinhança V_x de x em E , tal que

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)(y) \quad , \text{ uniformemente em } V_x.$$

Por c) para cada $M \in \mathbb{N}$, existe uma vizimhança U_x^M de x em E tal que o conjunto

$$\left\{ \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)(y) \; ; \; y \in U_x^M \right\} \qquad \text{é precompacto em } F.$$

Então se $\varepsilon > 0$ é dado, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que

$\left\| f(y) - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)(y)\right\| < \varepsilon/3$, para todo $y \in V_x$ e

$\left\{\sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)(y) \quad ; \; y \in U_x^M \right\}$ é precompacto em F.

Portanto , para algum conjunto finito $\{y_1,\ldots,y_k\} \subset U_x^M \cap V_x = U$, temos que para cada $y \in U$, existe y_i tal que

$\left\| \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)(y) - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)(y_i)\right\| < \varepsilon/3$. Daí, segue que

se $y \in U$, $\| f(y) - f(y_i)\| \leq \left\| f(y) - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)(y)\right\| +$

$+ \left\| \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)(y) - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)(y_i)\right\| +$

$+ \left\| \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)(y_i) - f(y_i)\right\| < \varepsilon$. Logo, f(U) é precompacto em F. Isto significa que f é compacta.

2) A prova de 2) segue imediatamente da definição de aplicações S-holomorfas b-compactas e do ítem anterior. Q.E.D.

5.7 OBSERVAÇÃO 1) Uma consequência da PROPOSIÇÃO 5.6 2) é que $(\mathcal{H}_{SK}(E;F), \mathcal{T}_{\omega se})$, para F de Banach , é completo. De fato, pela PROPOSIÇÃO 1.36, toda rede de Cauchy $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ em $(\mathcal{H}_{SK}(E;F), \mathcal{T}_{\omega se}) \subset (\mathcal{H}_S(E;F), \mathcal{T}_{\omega se})$ converge para um elemento $f \in \mathcal{H}_S(E;F)$. Desde que $\left(\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f_\alpha(0)\right)_{\alpha\in I}$ converge para $\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0)$ em $\mathcal{P}_b(^nE;F)_s$, para cada n e $(\mathcal{P}_{bK}(^nE;F) , \mathcal{T}_s)$ é completo (devido à PROPOSIÇÃO 5.4 2)), segue que $\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0) \in \mathcal{P}_{bK}(^nE;F)$.

Logo, pela PROPOSIÇÃO 5.6 2) , $f \in \mathcal{H}_{SK}(E;F)$.

Analogamente, para E holomorficamente infratonelado e k-espaço e F Banach, $(\mathcal{H}_K(E;F), \mathcal{T}_{\omega s})$ é completo.

2) Com uma prova análoga à c)$\rightarrow$a) da Proposição anterior, pode-se obter o seguinte: para $U \subset E$ aberto não vazio , F normado e $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$, então $f \in \mathcal{H}_{SK}(U;F)$ se, e somente se , para cada $x \in U$ e $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(x) \in \mathcal{P}_{bK}(^nE;F)$. Logo, podemos afirmar que $(\mathcal{H}_{SK}(U;F), \tau_{\infty se})$ é completo, para F de Banach e $U \subset E$ um aberto não vazio. Como também , para F de Banach , com a P.A., $\mathcal{H}_{SK}(U;F) = \mathcal{H}_{SC}(U;F)$.

Analogamente , para $U \subset E$, aberto não vazio , F normado e $f \in \mathcal{H}(U;F)$, então $f \in \mathcal{H}_K(U;F)$ se , e somente se , para cada $x \in U$ e $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(x) \in \mathcal{P}_K(^nE;F)$. Disso e da OBSERVAÇÃO 5.5 , temos que para E holomorficamente infratonelado e k-espaço e F de Banach com a P.A. , então $\mathcal{H}_K(U;F) = \mathcal{H}_C(U;F)$. Como também, para F de Banach , $(\mathcal{H}_K(U;F), \tau_{\infty s})$ é completo.

Vamos agora enunciar e provar o resultado principal para aplicações holomorfas compactas e aplicações S-holomorfas b-compactas.

5.8 TEOREMA a) Seja E holomorficamente infratonelado e k-espaço. Então para todo F de Banach, $(\mathcal{H}_K(E;F), \tau_{\omega s})$ é isomorfo algebricamente e topologicamente a $(\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s}) \varepsilon F$. Ainda mais , para um subconjunto aberto não vazio U de E , $(\mathcal{H}_K(U;F), \tau_{\infty s})$ é isomorfo algebricamente e topologicamente a $(\mathcal{H}(U), \tau_{\infty s}) \varepsilon F$, para todo F de Banach.

b) Seja E qualquer. Então $(\mathcal{H}_{SK}(E;F), \tau_{\omega se})$ é isomorfo algebricamente e topologicamente a $(\mathcal{H}_S(E), \tau_{\omega se}) \varepsilon F$, para todo F de Banach. Ainda mais , para um subconjunto aberto não vazio U de

E , $(\mathcal{H}_{SK}(U;F), \tau_{\infty se})$ é isomorfo algebricamente e topologicamente a $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{\infty se}) \varepsilon F$, para todo F de Banach.

A prova deste teorema segue do próximo lema:

5.9 LEMA 1) Para E holomorficamente infratonelado e k-espaço , F de Banach e $f \in \mathcal{H}(E;F)$, são equivalentes:

a) $f \in \mathcal{H}_K(E;F)$.

b) a aplicação $f^*: (\mathcal{H}(F), \tau_o) \longrightarrow (\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s})$, definida por $f^*(g)(x) = (g \circ f)(x)$, para $g \in \mathcal{H}(F)$ e $x \in U$ é contínua.

c) $f^*: F'_c \longrightarrow (\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s})$ é contínua.

d) $f^*: F'_s \longrightarrow (\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s})$ é compacta.

e) para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in E$, a aplicação $\left(\frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x) \right)^* : F'_s \longrightarrow \mathcal{P}(^nE)_s$ é compacta.

2) Sejam E qualquer e F de Banach. Para $f \in \mathcal{H}_S(E;F)$, são equivalentes:

a) $f \in \mathcal{H}_{SK}(E;F)$.

b) $f^*: (\mathcal{H}(F), \tau_o) \longrightarrow (\mathcal{H}_S(E), \tau_{\omega se})$ é contínua.

c) $f^*: F'_c \longrightarrow (\mathcal{H}_S(E), \tau_{\omega se})$ é contínua.

d) $f^*: F'_s \longrightarrow (\mathcal{H}_S(E), \tau_{\omega se})$ é b-compacta .

e) para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in E$, a aplicação $\left(\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x) \right)^* : F'_s \longrightarrow \mathcal{P}_b(^nE)_s$ é b-compacta.

Prova : 1) $a \longrightarrow b$. Seja p uma seminorma $\tau_{\omega s}$-contínua em $\mathcal{H}(E)$, K-B portada por algum $K \subset E$ compacto e $B \subset E$ limitado. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $c(\varepsilon) > 0$, tal que

$$p(f) \leq c(\varepsilon) \sup_{x \in K+\varepsilon B} \| f(x) \|$$, para toda $f \in \mathcal{H}(E)$. Por

a) , para alguma vizinhança $V = U + K$, de K, (onde U é vizinhança do zero em E), $\overline{f(V)} = L$ é compacto em F. Como B é limitado , existe $\rho_B > 0$ tal que $\rho_B B \subset U$. Portanto , para alguma constante $c(\rho_B) > 0$,

$$p(f^*(g)) \leq c(\rho_B) \sup_{x \in K+\rho_B B} \| (g \circ f)(x) \| \leq c(\rho_B) \cdot \|g\|_L$$

para todo $g \in \mathcal{H}(F)$, que mostra a continuidade de f .

b)$\rightarrow$c) é óbvio , desde que a aplicação $\Psi : F'_c \longrightarrow (\mathcal{H}(F), \tau_o)$ definida por , $\Psi(T) = T$, para $T \in F'$ é contínua.

c)$\longrightarrow$d) . O conjunto $B = \{ \varphi \in F', \|\varphi\| \leq 1 \}$ é compacto em F'_c . Por c) , $f^*(B)$ é compacto e logo precompacto em $(\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s})$. Isto significa que f^* é compacta na origem , logo,compacta.

d)$\rightarrow$e). Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in E$, a aplicação

$P_n : (\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s}) \longrightarrow \mathcal{P}(^nE)_s$, definida por $P_n(g) = \frac{1}{n!} \hat{d}^n g(x)$, para $g \in \mathcal{H}(E)$, é linear e contínua . Como $(\frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x)) = P_n \circ f^*$ e f^* é compacta, segue que $(\frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x))^*$ é compacta.

e)$\longrightarrow$a). Desde que $(\frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x))^*$ é compacta, segue da PROPOSIÇÃO 5.3 1) , que $\frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x)$ é compacta , para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in E$. Logo, da PROPOSIÇÃO 5.6 1), segue que $f \in \mathcal{H}_K(E;F)$.

A prova de 2) é análoga à de 1) , usando as PROPOSIÇÕES 5.3 2) e 5.6 2). Q.E.D.

5.10 OBSERVAÇÃO : Do LEMA anterior e da OBSERVAÇÃO 5.7 2) , temos o seguinte resultado:

1) Sejam E holomorficamente infratonelado e k-espaço, U um subconjunto aberto não vazio de E , F de Banach e $f \in \mathcal{H}(U;F)$.

São equivalentes:

a) $f \in \mathcal{H}_K(U;F)$.

b) $f^*: (\mathcal{H}(F), \tau_o) \longrightarrow (\mathcal{H}(U), \tau_{\infty s})$ é contínua.

c) $f^*: F'_c \longrightarrow (\mathcal{H}(U), \tau_{\infty s})$ é contínua.

d) $f^*: F'_s \longrightarrow (\mathcal{H}(U), \tau_{\infty s})$ é compacta.

e) para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in U$, a aplicação $(\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(x))^*: F'_s \longrightarrow \mathcal{P}(^nE)_s$ é compacta.

2) Sejam E qualquer, U um subconjunto aberto não vazio de E, F de Banach e $f \in \mathcal{H}_S(U;F)$. São equivalentes:

a) $f \in \mathcal{H}_{SK}(U;F)$.

b) $f^*: (\mathcal{H}(F), \tau_o) \longrightarrow (\mathcal{H}_S(U), \tau_{\infty se})$ é contínua.

c) $f^*: F'_c \longrightarrow (\mathcal{H}_S(U), \tau_{\infty se})$ é contínua.

d) $f^*: F'_s \longrightarrow (\mathcal{H}_S(U), \tau_{\infty se})$ é b-compacta.

e) para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in U$, a aplicação $(\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(x))^*: F'_s \longrightarrow \mathcal{P}_b(^nE)_s$ é b-compacta.

A prova é baseada no fato que $\tau_{\infty s} \leq \tau_{\omega s}$ e $\tau_{\infty se} \leq \tau_{\omega se}$.

<u>Prova do TEOREMA 5.8</u> 1). Pelo LEMA 5.9 1) a aplicação $f \longmapsto f^*$, para $f \in (\mathcal{H}_K(E;F), \tau_{\omega s})$ em $(\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s}) \varepsilon F$ é bem definida e linear. É injetora pois F' separa pontos de F. É sobrejetora, pois se $T \in (\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s}) \varepsilon F$, então $T \in (\mathcal{H}(E), \tau_o) \varepsilon F$, e logo, da PROPOSIÇÃO 1.1 de Aron e Schottenloher (1), existe $f \in \mathcal{H}(E;F)$, tal que $f^* = T$. Desde que T é contínua, segue do LEMA 5.9 1) que $f \in \mathcal{H}_K(E;F)$. Resta mostrar que este isomorfismo é topológico. Seja K um subconjunto compacto equilibrado de E, $B \subset E$ limitado e absolutamente convexo e $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in c_o^+$. Segue pelo teorema de

Hahn-Banach , que para $g \in \mathcal{H}_K(E;F)$, então

$$\sup\left\{\left\|\frac{1}{n!}\hat{d}^n g(0)\right\|_{K+\alpha_n B} ;\ n \in \mathbb{N}\right\} \leq \varepsilon \text{ se, e somente se ,}$$

$$\sup\left\{\left\|\frac{1}{n!}\hat{d}^n (g * \varphi)(0)\right\|_{K+\alpha_n B} ;\ n \in \mathbb{N},\ \varphi \in F',\ \|\varphi\| \leq 1\right\} \leq \varepsilon.$$

Como a topologia $\tau_{\omega s}$ em $\mathcal{H}_K(E;F)$ é gerada por todas as seminormas do tipo $\sup\left\{\left\|\frac{1}{n!}\hat{d}^n g(0)\right\|_{K+\alpha_n B} ;\ n \in \mathbb{N}\right\}$, para $g \in \mathcal{H}_K(E;F)$ (OBSERVAÇÃO 1.35) e desde que as seminormas

$$\sup\left\{\left\|\frac{1}{n!}\hat{d}^n (g * \varphi)(0)\right\|_{K+\alpha_n B} ;\ n \in \mathbb{N},\ \varphi \in F',\ \|\varphi\| \leq 1\right\} \text{, deter-}$$

minam a topologia em $(\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s}) \varepsilon F$, segue que este isomorfismo é topológico.

Da OBSERVAÇÃO 5.10 a aplicação $f \longmapsto f^*$, para $f \in (\mathcal{H}_K(U;F), \tau_{\infty s})$ em $(\mathcal{H}(U), \tau_{\infty s}) \varepsilon F$ é bem definida e linear. É sobrejetora e injetora pelos mesmos argumentos usados para a topologia $\tau_{\omega s}$. Da definição da $\tau_{\infty s}$, segue que este isomorfismo é topológico.

2) Do LEMA 5.9 2) a aplicação $f \longmapsto f^*$, para $f \in (\mathcal{H}_{SK}(E;F), \tau_{\omega se})$ em $(\mathcal{H}_S(E), \tau_{\omega se}) \varepsilon F$ é bem definida , linear e injetora. É sobrejetora, pois se $T \in (\mathcal{H}_S(E), \tau_{\omega se}) \varepsilon F$, então $T \in (\mathcal{H}_S(E), \tau_{oe}) \varepsilon F$ e logo da PROPOSIÇÃO 4.5 , existe $f \in \mathcal{H}_S(E;F)$, tal que $f^* = T$. Desde que T é contínua, segue do LEMA 5.9 2) que $f \in \mathcal{H}_{SK}(E;F)$. Da PROPOSIÇÃO 1.34 segue usando o mesmo argumento do ítem 1) que este isomorfismo é topológico.

Da OBSERVAÇÃO 5.10 a aplicação $f \longmapsto f^*$, para $f \in (\mathcal{H}_{SK}(U;F), \tau_{\infty se})$ em $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{\infty se}) \varepsilon F$ é bem definida, linear e injetora. É sobrejetora devido à PROPOSIÇÃO 4.5. Da definição da $\tau_{\infty se}$, segue que este isomorfismo e topológico. Q.E.D.

Veremos agora resultados sobre a aderência do produto tensorial $\mathcal{H}(U) \otimes F$ em $\mathcal{H}(U;F)$, para as topologias $\tau_{\omega s}$ e $\tau_{\infty s}$ e as relações com a P.A. para E e para $(\mathcal{H}(U),\tau_{\omega s})$ e $(\mathcal{H}(U),\tau_{\infty s})$. Simultâneamente, veremos a aderência do produto tensorial $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ em $\mathcal{H}_S(U;F)$, para as topologias $\tau_{\omega se}$ e $\tau_{\infty se}$. Resultados nesse sentido são obtidos do TEOREMA 5.8:

5.11 COROLÁRIO . 1) Seja E de Banach. Então E tem a P.A. se, e somente se, para todo F holomorficamente infratonelado e k-espaço , $\mathcal{H}(F) \otimes E$ é denso em $(\mathcal{H}_K(F;E),\tau_{\omega s})$.

2) Seja E de Banach. Então E tem a P.A. se, e somente se, para todo F , $\mathcal{H}_S(F) \otimes E$ é denso em $(\mathcal{H}_{SK}(F;E), \tau_{\omega se})$.

3) Seja E holomorficamente infratonelado e k-espaço. Então $(\mathcal{H}(E),\tau_{\omega s})$ tem a P.A. se, e somente se , para todo F de Banach , $\mathcal{H}(E) \otimes F$ é denso em $(\mathcal{H}_K(E;F), \tau_{\omega s})$.

4) Para qualquer E , $(\mathcal{H}_S(E),\tau_{\omega se})$ tem a P.A. se, e somente s se, $\mathcal{H}_S(E) \otimes F$ é denso em $(\mathcal{H}_{SK}(E;F),\tau_{\omega se})$, para todo F de Banach.

5) Sejam E holomorficamente infratonelado e k-espaço, e U um subconjunto aberto não vazio de E. Então $(\mathcal{H}(U),\tau_{\infty s})$ tem a P.A. se, e somente se, para todo F de Banach , $\mathcal{H}(U) \otimes F$ é denso em $(\mathcal{H}_K(U;F),\tau_{\infty s})$.

6) Sejam E qualquer e U um subconjunto aberto não vazio de E. Então $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{\infty se})$ tem a P.A. se, e somente se, para todo F de Banach , $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ é denso em $(\mathcal{H}_{SK}(U;F),\tau_{\infty se})$.

<u>Prova</u>: 1) Seja E com a P.A. Então para todo G localmente convexo

separado, $E \otimes G$ é denso em $E \varepsilon G$, (PROPOSIÇÃO 3.5 b)). Tomando $G = (\mathcal{H}(F), \tau_{\omega s})$, para F como no enunciado, temos $(\mathcal{H}(F), \tau_{\omega s}) \otimes E$ é denso em $(\mathcal{H}(F), \tau_{\omega s}) \varepsilon E \approx (\mathcal{H}_K(F;E), \tau_{\omega s})$.

Reciprocamente, se para todo F holomorficamente infratonelado e k-espaço, $(\mathcal{H}(F), \tau_{\omega s}) \otimes E$ é denso em $(\mathcal{H}_K(F;E), \tau_{\omega s})$, então isto também vale para todo F de Banach. Contudo para E e F de Banach, $(\mathcal{H}_K(F;E), \tau_{\omega s}) = (\mathcal{H}_K(F;E), \tau_\omega)$ (τ_ω é a topologia de Nachbin). Logo do TEOREMA 4.1 de Aron e Schottenloher (1), segue o resultado.

2) A prova é como em 1), usando o fato que para E e F de Banach $(\mathcal{H}_S(F;E), \tau_{\omega se}) = (\mathcal{H}(F;E), \tau_\omega)$.

3) Suponhamos que $(\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s})$ tem a P.A. . Logo, para todo F de Banach, $\mathcal{H}(E) \otimes F$ é denso em $(\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s}) \varepsilon F$ (PROPOSIÇÃO 3.5 c)), que é isomorfo a $(\mathcal{H}_K(E;F), \tau_{\omega s})$. Daí a suficiência de 3). A recíproca segue imediatamente do TEOREMA 5.8 e do fato que nas condições dadas $(\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s})$ é completo.

4), 5) e 6) seguem analogamente à 3), usando o TEOREMA 5.8 e os fatos que $(\mathcal{H}(U), \tau_{\infty s})$, $(\mathcal{H}_S(E), \tau_{\omega se})$ e $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{\infty se})$ são completos. (OBSERVAÇÃO 1.38, PROPOSIÇÃO 1.36 e PROPOSIÇÃO 1.37, respectivamente.). Q.E.D.

Ainda sobre a P.A. , temos a seguinte proposição , que também é válida para $U \subset E$ aberto equilibrado.

5.12 PROPOSIÇÃO a) $(\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s})$ tem a P.A. se, e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(^nE)_s$ tem a P.A..

b) $(\mathcal{H}_S(E), \tau_{\omega se})$ tem a P.A. se, e somente se , para todo $n \in \mathbb{N}$,

$\mathcal{P}_b({}^nE)_s$ tem a P.A..

c) $(\mathcal{H}(E), \tau_{\infty s})$ tem a P.A. se, e somente se , para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}({}^nE)_s$ tem a P.A..

d) $(\mathcal{H}_S(E), \tau_{\infty se})$ tem a P.A. se, e somente se , para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_b({}^nE)_s$ tem a P.A..

Prova: Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $P_n : (\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s}) \longrightarrow \mathcal{P}({}^nE)_s$, $P_n(f) = \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)$; $P_n : (\mathcal{H}(E), \tau_{\infty s}) \longrightarrow \mathcal{P}({}^nE)_s$, $P_n(f) = \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)$; $P_n : (\mathcal{H}_S(E), \tau_{\omega se}) \longrightarrow \mathcal{P}_b({}^nE)_s$, $P_n(f) = \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0)$; e $P_n : (\mathcal{H}_S(E), \tau_{\infty se}) \longrightarrow \mathcal{P}_b({}^nE)_s$, $P_n(f) = \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0)$.

Em cada caso, P_n é linear e contínua . $P_n \circ P_n = P_n$, $P_n(\mathcal{H}(E)) = \mathcal{P}({}^nE)$ e $P_n(\mathcal{H}_S(E)) = \mathcal{P}_b({}^nE)$. Assim $\mathcal{P}({}^nE)_s$ tem suplementar topológico em $(\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s})$ e em $(\mathcal{H}(E), \tau_{\infty s})$.(como também $\mathcal{P}_b({}^nE)_s$ tem suplementar topológico em $(\mathcal{H}_S(E), \tau_{\omega se})$ e em $(\mathcal{H}_S(E), \tau_{\infty se})$). Desses fatos, temos as suficiências de cada um dos casos da PROPOSIÇÃO.

a) Suponhamos que $\mathcal{P}({}^nE)_s$ tem a P.A. , para cada $n \in \mathbb{N}$. Seja $\mathcal{X} \subset (\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s})$ compacto absolutamente convexo , $\varepsilon > 0$ e p uma seminorma $\tau_{\omega s}$-contínua em $\mathcal{H}(E)$. Vamos mostrar inicialmente que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$p\Big(f - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)\Big) < \varepsilon \quad , \text{ para toda } f \in \mathcal{X} .$$

Como $\mathcal{X}$ é compacto, logo, precompacto , existe $Y = \{f_1, \ldots, f_j\}$ em $\mathcal{X}$ tal que para $f \in \mathcal{X}$ e $\varepsilon > 0$, existe $f_i \in Y$ tal que $p(f - f_i) < \varepsilon/3$. Ou seja,

$$p(f - f_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n(f - f_i)(0) \right\|_{K+\alpha_n B} < \varepsilon/3 \quad , \text{ para } K \subset E$$

compacto equilibrado , $B \subset E$ limitado equilibrado e $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in c_0^+$.

(PROPOSIÇÃO 1.2 de Bianchini, Zaine, Paques (1)).

Para cada $f_i \in Y$, existe $M_i \in \mathbb{N}$ $(i=1,..,j)$, tal que

$p(f_i - \sum_{n=0}^{M_i} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f_i(0)) < \varepsilon/3$. Se $M = \max_{1 \leq i \leq j} M_i$, então

para toda $f_i \in Y$,

$p(f_i - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f_i(0)) < \varepsilon/3$. Logo, para cada $f \in \mathcal{X}$,

$$p(f - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0)) \leq p(f - f_i) + p(f_i - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f_i(0))$$

$$+ \; p(\sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} \hat{d}^n (f - f_i)(0)) < \varepsilon .$$

Desde que $\mathcal{P}(^nE)_s$ tem a P.A. , para cada $n = 0,1,,.,M$, existe $T_n \in (\mathcal{P}(^nE)_s)' \otimes \mathcal{P}(^nE)_s$ tal que

$p(T_n(\frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0)) - \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0)) < \varepsilon/(M+1)$, para toda $f \in \mathcal{X}$;

aqui usamos o fato que $\tau_{\omega s}$ induz a topologia τ_s em $\mathcal{P}(^nE)$ e que $P_n(\mathcal{X})$ é compacto e absolutamente convexo em cada $\mathcal{P}(^nE)_s$.

Definimos $T : (\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s}) \longrightarrow (\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s})$ por

$T(f) = \sum_{n=0}^{M} T_n(\frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0))$. T é linear , contínua e

$T(\mathcal{H}(E))$ tem dimensão finita. Além disso, para $f \in \mathcal{X}$,

$$p(T(f) - f) \leq p(T(f) - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0)) + p(\sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0) - f)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{M} p(T_n(\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)) - \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)) + p(\sum_{n=0}^{M}\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0) - f) < 2\varepsilon.$$

b) A prova e análoga à do ítem a), usando a PROPOSIÇÃO 1.33 e o fato que $\tau_{\omega se}$ induz em $\mathcal{P}_b({}^nE)$ a topologia τ_s, para cada $n \in \mathbb{N}$.

c) Suponhamos que $\mathcal{P}({}^nE)_s$ tem a P.A. , para cada $n \in \mathbb{N}$. Seja $\mathcal{X} \subset (\mathcal{H}(E),\tau_{\infty s})$ compacto absolutamente convexo , $\varepsilon > 0$ e $p \in SNC(\mathcal{H}(E),\tau_{\infty s})$. Desde que $\tau_{\infty s} \leq \tau_{\omega s}$ em $\mathcal{H}(E)$, existe $M \in \mathbb{N}$ (por a)) tal que

$$p(f - \sum_{n=0}^{M}\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)) < \varepsilon \quad , \text{ para toda } f \in \mathcal{X}.$$

Desde que $\mathcal{P}({}^nE)_s$ tem a P.A. , para cada $n=0,1,..,M$, existe $T_n \in (\mathcal{P}({}^nE)_s)' \otimes \mathcal{P}({}^nE)_s$ tal que

$$p(T_n(\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)) - \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)) < \varepsilon/(M+1) \quad , \text{ para toda } f \in \mathcal{X} \;;$$

aqui , usamos o fato que $\tau_{\infty s}$ induz em $\mathcal{P}({}^nE)$ a topologia τ_s e que $P_n(\mathcal{X})$ é compacto absolutamente convexo em $\mathcal{P}({}^nE)_s$. Definindo $T : (\mathcal{H}(E),\tau_{\infty s}) \longrightarrow (\mathcal{H}(E),\tau_{\infty s})$ por

$$T(f) = \sum_{n=0}^{M} T_n(\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)) \quad , \text{ temos que}$$

$T \in (\mathcal{H}(E),\tau_{\infty s})' \otimes (\mathcal{H}(E),\tau_{\infty s})$. Logo, como em a) , $p(T(f) - f) < 2\varepsilon$, para toda f em $\mathcal{X}$, temos que $(\mathcal{H}(E),\tau_{\infty s})$ tem a P.A..

d) A prova da necessidade de d) segue o mesmo raciocínio de c) usando os fatos que $\tau_{\infty se} \leq \tau_{\omega se}$ e que $\tau_{\infty se}$ induz em $\mathcal{P}_b({}^nE)$

a topologia $\mathcal{T}_s$,para cada $n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

5.13 OBSERVAÇÃO Na OBSERVAÇÃO 4.12 do capítulo 4, obtivemos para E quase-completo , que $(\mathcal{H}_S(E), \mathcal{T}_{oe})$ tem a P.A. se, e somente se, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_b(^nE), \mathcal{T}_{oe})$ tem a P.A.. Usando a mesma prova do ítem b) da PROPOSIÇÃO 5.12 , desde que

$\mathcal{T}_{oe} \leq \mathcal{T}_{\omega se}$, obtemos para E qualquer, que $(\mathcal{H}_S(E), \mathcal{T}_{oe})$ tem a P.A. se, e somente se, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_b(^nE), \mathcal{T}_{oe})$ tem a P.A. (como também , para $U \subset E$ aberto equilibrado, $(\mathcal{H}_S(U), \mathcal{T}_{oe})$ tem a P.A. se, e somente se, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_b(^nE), \mathcal{T}_{oe})$ tem a P.A..).

Veremos agora resultados sobre a aderência de $\mathcal{H}(U) \otimes F$ em $(\mathcal{H}(U;F), \mathcal{T}_{ns})$, $n \in \mathbb{N}$, como também , sobre a aderência de $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ em $(\mathcal{H}_S(U;F), \mathcal{T}_{nse})$, bem como outros resultados para as topologias $\mathcal{T}_{\infty se}$ e $\mathcal{T}_{\omega se}$. Nesse sentido também obteremos resultados para as aplicações S-holomorfas de tipos nuclear e compacto.

Dizemos que um espaço de Banach F tem a propriedade de aproximação limitada (P.A.L.) se existe $M > 0$, tal que , para todo $K \subset F$ compacto e $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação $T \in F' \otimes F$ de norma $\leq M$, tal que $\| T(z) - z \| < \varepsilon$, para todo $z \in K$.

5.14 TEOREMA 1) Seja F de Banach com a P.A..

a) Se E é holomorficamente infratonelado e k-espaço , então para todo $n \in \mathbb{N}$ e $U \subset E$ aberto não vazio, $\mathcal{H}(U) \otimes F$ é $\mathcal{T}_{ns}$-denso em $\mathcal{H}_n(U;F)$. Ainda mais, $\mathcal{H}(U) \otimes F$ é $\mathcal{T}_{\infty s}$-denso em $\mathcal{H}_C(U;F)$ =

$\mathcal{H}_K(U;F)$.

b) Sejam E qualquer e $U \subset E$ um aberto não vazio , então para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ é τ_{nse}-denso em $\mathcal{H}_{Sn}(U;F)$. Ainda mais, $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ é $\tau_{\infty se}$-denso em $\mathcal{H}_{SC}(U;F) = \mathcal{H}_{SK}(U;F)$.

2) Seja F de Banach com a P.A.L..

a) Se E é holomorficamente infratonelado e k-espaço ,então para todo $U \subset E$ aberto não vazio, $\mathcal{H}(U) \otimes F$ é $\tau_{\omega s}$-denso em $\mathcal{H}_C(U;F) = \mathcal{H}_K(U;F)$.

b) Sejam E qualquer e $U \subset E$ aberto não vazio, então $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ é $\tau_{\omega se}$-denso em $\mathcal{H}_{SC}(U;F) = \mathcal{H}_{SK}(U;F)$.

A prova deste teorema segue do próximo lema :

5.15 LEMA 1) Sejam E holomorficamente infratonelado e k-espaço e F de Banach com a P.A.. Se $f \in \mathcal{H}_n(U;F)$, $K \subset U$ é compacto e $B \subset E$ é limitado então

$$L = \left\{ \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(x)(y) \quad ; x \in K,\ y \in B \text{ e } j \leq n \right\}$$ é relativamente compacto em F.

2) Sejam E qualquer e F de Banach. Se $f \in \mathcal{H}_{Sn}(U;F)$, $K \subset U$ é compacto estrito e $B \in \mathcal{B}_E$ é tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B , então

$$L = \left\{ \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f(x)(y) \quad ; x \in K,\ y \in B \text{ e } j \leq n \right\}$$ é relativamente compacto em F.

<u>Prova:</u> 1) É suficiente mostrar que toda sequência da forma $\left(\frac{1}{j!} \hat{d}^j f(x_m)(y_m)\right)_{m=1}^{\infty}$ tem uma subsequência convergente em F, onde $x_m \in K$, $y_m \in B$, $m=1,\dots,$ e $j \leq n$. Desde que a aplicação

$x \in U \longmapsto \frac{1}{j!}\hat{d}^j f(x) \in \mathcal{P}({}^jE;F)_s$ é contínua, existe uma sub-rede de $\left(\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(x_m)\right)_{m=1}^{\infty}$ convergindo para $\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(x_o)$ em $\mathcal{P}({}^jE;F)_s$. Da hipótese $\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(x_o) \in \mathcal{P}_C({}^jE;F) = \mathcal{P}_K({}^jE;F)$ (OBSERVAÇÃO 5.5). Logo, $\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(x_o)(B)$ é relativamente compacto em F e assim podemos obter uma subsequência de $\left(\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(x_m)(y_m)\right)_{m=1}^{\infty}$ convergente em F.

2) A prova de 2) é análoga à de 1), usando os fatos que a aplicação $x \in U \cap E_B \longmapsto \frac{1}{j!}\hat{\delta}^j f(x) \in \mathcal{P}_b({}^jE;F)_s$ é contínua, para $B \in \mathcal{B}_E$ e que $\mathcal{P}_{bC}({}^jE;F) \subset \mathcal{P}_{bK}({}^jE;F)$.(PROPOSIÇÃO 5.1). Q.E.D.

<u>Prova do TEOREMA 5.14</u> 1)a) Sejam $f \in \mathcal{H}_{Sn}(U;F)$, $K \subset U$ compacto, $B \subset E$ limitado e $\varepsilon > 0$ qualquer. Pelo LEMA 5.15 1),

$$L = \left\{ \frac{1}{j!}\hat{d}^j f(x)(y) \ ; \ x \in K,\ y \in B,\ j \leq n \right\}$$ é relativamente compacto em F. Seja $T \in F' \otimes F$ tal que $\| T(z) - z \| < \varepsilon$, para todo $z \in L$. Suponhamos que

$$T(y) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(y) f_i \ ; \ \phi_i \in F',\ f_i \in F,\ i=1,..,m .$$ Então

$$\sup\left\{ \left\| \frac{1}{j!}\hat{d}^j f(x) - \frac{1}{j!}\hat{d}^j (T \circ f)(x) \right\|_B \ ; \ x \in K,\ j \leq n \right\} =$$

$$\sup\left\{ \left\| \frac{1}{j!}\hat{d}^j f(x)(y) - T\left(\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(x)(y)\right) \right\|,\ x \in K,\ y \in B,\ j \leq n \right\} < \varepsilon.$$

Como $T \circ f \in \mathcal{H}(U) \otimes F$, temos a função procurada.

b) A prova é análoga usando o LEMA 5.15 2).

2) a) Sejam $f \in \mathcal{H}_C(U;F)$ e p uma seminorma $\tau_{\omega s}$-contínua em $\mathcal{H}(U;F)$, K-B portada, para algum $K \subset U$ compacto e $B \subset E$ limitado.

Da desigualdade de Cauchy , existe $b > 0$, tal que

$$\limsup_n \left\{ \sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{n!} d^n f(x) \right\|_B \right\}^{1/n} \leq b .$$

Como p é K-B portada , dado $\delta = 1/2b > 0$, existe $c(\delta) > 0$ tal que

$$p(g) \leq c(\delta) \sum_{m=0}^{\infty} \delta^m \sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m g(x) \right\|_B \quad , \text{ para toda}$$

$g \in \mathcal{H}(U;F)$. Para o δ tomado, a série acima converge . Portanto dado $\varepsilon > 0$, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que

$$(M+1)\, c(\delta) \sum_{m=J}^{\infty} \sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(x) \right\|_B < \varepsilon/2 \quad , \text{ onde } M \text{ é}$$

o que ocorre na definição de P.A.L..

Pela parte 1)a) podemos encontrar uma aplicação $T \in F' \otimes F$ de norma $\leq M$ tal que

$$c(\delta) \sum_{m=0}^{J} \delta^m \sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(x) - \frac{1}{m!} \hat{d}^m (T \circ f)(x) \right\|_B < \varepsilon/2.$$

Assim

$$p(f - T \circ f) \leq c(\delta) \sum_{m=0}^{J} \delta^m \sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m (f - T \circ f)(x) \right\|_B +$$

$$+ c(\delta) \sum_{m=J}^{\infty} \delta^m \sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(x) - \frac{1}{m!} \hat{d}^m (T \circ f)(x) \right\|_B <$$

$$< \varepsilon/2 + c(\delta) \sum_{m=J}^{\infty} \delta^m \sup_{x \in K} \left\{ \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(x) \right\|_B + \| T \| \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(x) \right\|_B \right\}$$

$$\leq \varepsilon/2 + c(\delta) \sum_{m=J}^{\infty} \delta^m (M+1) \sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(x) \right\|_B < \varepsilon .$$

Como $T \circ f \in \mathcal{H}(U) \otimes F$, segue o TEOREMA.

b) A prova é análoga , usando a definição de função S-holomorfa e o ítem 1)b). Q.E.D.

5.16 OBSERVAÇÃO Em 2)a) do TEOREMA 5.14 , vimos que quando F é de Banach com a P.A.L. , E satisfaz as condições enunciadas e U = E , então $\mathcal{H}(E) \otimes F$ é $\tau_{\omega s}$-denso em $\mathcal{H}_c(E;F) = \mathcal{H}_K(E;F)$. Contudo esse resultado já foi obtido do TEOREMA 5.8 a) , para F de Banach com a P.A. . De fato, para F de Banach com a P.A. , $\mathcal{H}(E) \otimes F$ é denso em $(\mathcal{H}(E), \tau_{\omega s}) \varepsilon F \approx (\mathcal{H}_K(E;F), \tau_{\omega s})$ (COROLÁRIO 5.11 1)). Veremos, agora um teorema que mostra que ainda no caso U = E , E qualquer e F normado , $\mathcal{H}(E) \otimes F$ é $\tau_{\omega s}$-denso em $\mathcal{H}_c(E;F)$.

5.17 TEOREMA Para E qualquer e F normado temos:

1) $\overline{\mathcal{H}(E) \otimes F}^{\tau_{\omega s}} = \overline{\mathcal{H}(E) \otimes F}^{\tau_{\infty s}} = \mathcal{H}_c(E;F)$.

2) $\overline{\mathcal{H}_S(E) \otimes F}^{\tau_{\omega se}} = \overline{\mathcal{H}_S(E) \otimes F}^{\tau_{\infty se}} = \mathcal{H}_{Sc}(E;F)$.

3) $\overline{\mathcal{H}_{Sc}(E) \otimes F}^{\tau_{\omega se}} = \overline{\mathcal{H}_{Sc}(E) \otimes F}^{\tau_{\infty se}} = \mathcal{H}_{Sc}(E;F)$.

4) $\overline{\mathcal{H}_{Sb}(E) \otimes F} = \mathcal{H}_{Sb}(E;F) \cap \mathcal{H}_{Sc}(E;F)$, onde a aderência é em $(\mathcal{H}_{Sb}(E;F), \tau_s)$. (DEFINIÇÃO 2.42).

5) $\overline{\mathcal{H}_{SN}(E) \otimes F}^{T_{Ne}} = \mathcal{H}_{SN}(E;F)$. (DEFINIÇÃO 2.28).

1),2) e 3) valem também para $U \subset E$ aberto equilibrado.

<u>Prova</u>: 1) Vamos mostrar que $\mathcal{H}(E) \otimes F$ é $\tau_{\omega s}$-denso em $\mathcal{H}_c(E;F)$; o resultado para a $\tau_{\infty s}$ segue diretamente disso. Sejam $f \in \mathcal{H}_c(E;F)$, $p \in SNC(\mathcal{H}(E;F), \tau_{\omega s})$ e $\varepsilon > 0$. Pelo LEMA 1.4 de Bianchini, Zaine, Paques (1) , a série de Taylor de f em 0 conver-

ge para f na topologia $\tau_{\omega s}$, assim para algum $M \in \mathbb{N}$,

$$p\left(f - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)\right) < \varepsilon/2 .$$

Desde que $\tau_{\omega s}$ induz a topologia τ_s em $\mathcal{P}(^nE;F)$, para cada $n=0,1,..,M$, existe $P_n \in \mathcal{P}(^nE) \otimes F$ tal que $p(P_n - \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0)) < \varepsilon/2(M+1)$. Logo, $p(f - \sum_{n=0}^{M} P_n) < \varepsilon$.

2) A prova de 2) segue como em 1), usando a PROPOSIÇÃO 1.32 e o fato que $\tau_{\omega se}$ induz em $\mathcal{P}_b(^nE;F)$ a topologia τ_s.

3) Sejam $f \in \mathcal{H}_{Sc}(E;F)$ e $p \in SNC(\mathcal{H}_{Sc}(E;F),\tau_{\omega se})$. Como em 2), dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$p\left(f - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0)\right) < \varepsilon/2 .$$

Desde que $\tau_{\omega se}$ induz a topologia τ_s em $\mathcal{P}_b(^nE;F)$ e $\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0) \in \mathcal{P}_{bc}(^nE;F)$, para cada $n=0,1,..,M$, existe $P_n \in \mathcal{P}_{bf}(^nE;F)$ tal que $p(P_n - \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0)) < \varepsilon/2(M+1)$.

Como $\sum_{n=0}^{M} P_n \in \mathcal{P}_{bf}(E;F) \subset \mathcal{H}_{Sc}(E) \otimes F$ e $p(f - \sum_{n=0}^{M} P_n) < \varepsilon$, segue 3).

4) Se $f \in \mathcal{H}_{Sb}(E;F) \cap \mathcal{H}_{Sc}(E;F)$, segue da DEFINIÇÃO 2.42 a) que a série de Taylor de f em 0, converge para f em $(\mathcal{H}_{Sb}(E;F), \tau_s)$. Logo, se $p \in SNC(\mathcal{H}_{Sb}(E;F), \tau_s)$, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que

$$p\left(f - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0)\right) < \varepsilon/2 .$$

Desde que $\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0) \in \mathcal{P}_{bc}(^nE;F)$, para cada $n=0,1,..,M$, existe

$P_n \in \mathcal{P}_b({}^nE) \otimes F$ tal que $p(P_n - \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0)) < \varepsilon/2(M+1)$. Como $p(f - \sum_{n=0}^{M} P_n) < \varepsilon$ e $\sum_{n=0}^{M} P_n \in \mathcal{P}_b(E) \otimes F \subset \mathcal{H}_{Sb}(E) \otimes F$, temos 4).

5) Sejam $f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$, $p \in SNC(\mathcal{H}_{SN}(E;F), T_{Ne})$ e $\varepsilon > 0$. Da PROPOSIÇÃO 2.30 , a série de Taylor de f em O converge para f na topologia T_{Ne} , assim para algum $M \in \mathbb{N}$,

$$p(f - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0)) < \varepsilon/2 .$$

Desde que T_{Ne} induz a topologia nuclear em $\mathcal{P}_{bN}({}^nE;F)$, para cada $n=0,1,..,M$, existe $P_n \in \mathcal{P}_{bf}({}^nE;F)$, tal que $p(P_n - \frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0)) < \varepsilon/2(M+1)$. Como $\sum_{n=0}^{M} P_n \in \mathcal{P}_{bf}(E;F) \subset \mathcal{H}_{SN}(E) \otimes F$ e $p(f - \sum_{n=0}^{M} P_n) < \varepsilon$, segue 5). Q.E.D.

A partir dos resultados dos TEOREMAS 5.14 e 5.17 , vamos agora obter o completamento de $(\mathcal{H}_S(U), \tau) \otimes_\varepsilon F$ em $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau)$, para as diferentes topologias τ usadas neste capítulo. Em seguida veremos também o completamento de $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau) \otimes_\varepsilon G$ em $(\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau)$, para F e G de Banach. O caso contínuo será estudado no final.

5.18 TEOREMA Sejam E qualquer e F de Banach.

a) Para todo $U \subset E$ aberto não vazio , $\mathcal{H}_{SC}(U;F)$ pode ser imerso em $\mathcal{L}(F'_c, (\mathcal{H}_S(U), \tau_{\omega se}))$ e então em $\mathcal{L}(F'_c, (\mathcal{H}_S(U), \tau_{\omega se}))$.

b) Para todo $U \subset E$ aberto equilibrado, $(\mathcal{H}_{SC}(U;F), \tau_{\omega se})$ induz a topologia ε no produto tensorial $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{\omega se}) \otimes F$.

Consequentemente , do TEOREMA 5.17 2) , temos que se $U \subset E$ é um aberto equilibrado e F é de Banach , então

$$(\mathcal{H}_S(U), \tau_{\omega se}) \hat{\otimes}_\varepsilon F \approx (\mathcal{H}_{SC}(U;F), \tau_{\omega se}).$$

Para a prova deste teorema é necessário o seguinte:

5.19 LEMA . Sejam $f \in \mathcal{H}_{SC}(U;F)$, F de Banach , $K \subset U$ compacto estrito e $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B . Então existe $\varepsilon > 0$, tal que o conjunto

$$L = \left\{ \varepsilon^n \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x)(y) \;;\; x \in K , y \in B \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$$

é relativamente compacto em F .

<u>Prova</u> : Sejam K e B como no enunciado. Da desigualdade de Cauchy existe $c > 0$, tal que

$$\limsup_n \left\{ \sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x) \right\|_B \right\}^{1/n} \leq c .$$

Se $\varepsilon = 1/2c$, então $\varepsilon^n \sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x) \right\|_B \xrightarrow{(*)} 0$, quando $n \longrightarrow \infty$. Seja $(z_k)_k$ uma sequência em L. Se um número infinito de

$$z_k \in \left\{ \varepsilon^n \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x)(y) \;;\; x \in K , y \in B \right\}$$

para algum n , então pelo LEMA 5.15 2) , existe um ponto limite. Por outro lado , se existe alguma subsequência (z_{k_j}) tal que para cada j ,

$$z_{k_j} \in \left\{ \varepsilon^{k_j} \frac{1}{k_j!} \hat{\delta}^{k_j} f(x)(y) \;;\; x \in K, y \in B \right\} ,$$

então por $(*)$, $z_{k_j} \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$. Isto prova o LEMA.

Prova do TEOREMA 5.18 :

a) Seja $T: \mathcal{H}_{SC}(U;F) \longrightarrow \mathcal{L}(F'_c, (\mathcal{H}_S(U), \tau_{\omega se}))$, definida por $T(f)(\phi)(x) = f^*(\phi)(x) = \phi(f(x))$, para $f \in \mathcal{H}_{SC}(U;F)$, $\phi \in F'$ e $x \in U$. Claramente $T(f)(\phi) \in \mathcal{H}_S(U)$ para cada f e ϕ .

T é injetora pois F' separa pontos de F . Resta mostrar que para cada $f \in \mathcal{H}_{SC}(U;F)$, $T(f)$ é contínua. Seja p uma seminorma K-B portada em $\mathcal{H}_S(U)$, (para algum $K \subset U$ compacto estrito e $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset U \cap E_B$ e e compacto em E_B) , então dado $\varepsilon > 0$, existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$p(g) \leq c(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n g(x) \right\|_B \quad , \text{ para toda } g \in \mathcal{H}_S(U).$$

Seja $f \in \mathcal{H}_{SC}(U;F)$. Para algum $r > 0$,

$$\limsup_n \left\{ \sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x) \right\|_B^{1/n} \right\} \leq r .$$

Pelo LEMA 5.19 , se $\varepsilon = 1/4r$, então o conjunto

$$L = \left\{ (2\varepsilon)^n \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x)(y) \quad , \quad n \in \mathbb{N},\ x \in K,\ y \in B \right\}$$

é relativamente compacto em F. Logo $(\Gamma(L))^o$ é uma vizinhança do zero em F'_c . Consequentemente , se $\phi \in (\Gamma(L))^o$,

$$p(\phi \circ f) \leq c(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{x \in K} \left\| \phi\, (2\varepsilon)^n \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(x) \right\|_B$$

$$\leq c(\varepsilon) \sum_{n=0} \frac{1}{2^n} = 2\, c(\varepsilon) \text{ , que prova a).}$$

b) Desde que a topologia ε sobre o produto tensorial $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{\omega se}) \otimes F$ é a topologia induzida por $(\mathcal{H}_S(U), \tau_{\omega se})\, \varepsilon\, F$

$= \mathcal{L}_{\varepsilon}(F'_c, (\mathcal{H}_S(U), \mathcal{T}_{\omega se}))$, basta mostrar que a aplicação $T : (\mathcal{H}_{SC}(U;F), \mathcal{T}_{\omega se}) \longrightarrow (\mathcal{H}_S(U), \mathcal{T}_{\omega se}) \varepsilon F$, definida no ítem a) é um isomorfismo topológico sobre a imagem. Isto segue do fato que se $K \subset U$ é compacto estrito equilibrado, $B \in \mathcal{B}_E$ é tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B e $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in c_0^+$, então pelo teorema de Hahn-Banach, se $f \in \mathcal{H}_{SC}(U;F)$,

$$\sup_n \sup_{x \in K+\alpha_n B} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0)(x) \right\| \leq 1$$

se, e somente se, para todo $\phi \in F'$, $\|\phi\| \leq 1$,

$$\sup_n \sup_{x \in K+\alpha_n B} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n (T(f)(\phi))(0)(x) \right\| \leq 1 .$$

Desde que a topologia $\mathcal{T}_{\omega se}$ em $\mathcal{H}_{SC}(U;F)$ é dada pela família de seminormas da forma $\sup\limits_n \sup\limits_{x \in K+\alpha_n B} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0)(x) \right\|$ (PROPOSIÇÃO 1.34), temos o resultado.

Consequentemente do TEOREMA 5.17 2) e do fato que $(\mathcal{H}_{SC}(U;F), \mathcal{T}_{\omega se})$ é completo, para F de Banach e $U \subset E$ aberto equilibrado (PROPOSIÇÃO 2.39), temos que

$$(\mathcal{H}_{SC}(U;F), \mathcal{T}_{\omega se}) \approx (\mathcal{H}_S(U), \mathcal{T}_{\omega se}) \hat{\otimes}_{\varepsilon} F \text{ . Q.E.D.}$$

5.20 COROLÁRIO Para $U \subset E$ aberto equilibrado, $(\mathcal{H}_S(U), \mathcal{T}_{\omega se})$ tem a P.A. se, e somente se,

$$(\mathcal{H}_S(U), \mathcal{T}_{\omega se}) \varepsilon F \approx (\mathcal{H}_{SC}(U;F), \mathcal{T}_{\omega se}) ,$$

para todo F de Banach.

<u>Prova</u>: Desde que na hipótese dada, $\mathcal{H}_S(U) \otimes F$ é $\mathcal{T}_{\omega se}$-denso em $\mathcal{H}_{SC}(U;F)$, para todo F de Banach, temos que se

$$(\mathcal{H}_S(U),\tau_{\omega se})\,\varepsilon\, F \;\approx\; (\mathcal{H}_{SC}(U;F),\tau_{\omega se})\ ,$$

então $(\mathcal{H}_S(U),\tau_{\omega se})$ tem a P.A..

Reciprocamente é imediato , devido ao TEOREMA 5.18 e à PROPOSIÇÃO 3.5 f). Q.E.D.

5.21 TEOREMA Sejam E qualquer , F de Banach e $U \subset E$ um aberto não vazio. Então

a) para $n=0,1,\ldots,$ $\mathcal{H}_{Sn}(U;F)$ pode ser imerso em $\mathcal{L}(F'_c,(\mathcal{H}_S(U),\ \tau_{nse}))$.

b) para $n=0,1,\ldots,(\mathcal{H}_{Sn}(U;F),\ \tau_{nse})$ induz a topologia ε no produto tensorial $(\mathcal{H}_S(U),\ \tau_{nse}) \otimes F$. Além disso , $(\mathcal{H}_{SC}(U;F),\tau_{\infty se})$ induz a topologia ε no produto tensorial $(\mathcal{H}_S(U),\ \tau_{\infty se}) \otimes F$.

Consequentemente , para F de Banach com a P.A. ,

$$(\mathcal{H}_{Sn}(U;F),\tau_{nse}) \approx (\mathcal{H}_S(U),\tau_{nse})\,\hat{\otimes}_\varepsilon F \;=\; (\mathcal{H}_S(U),\tau_{nse})\,\varepsilon\, F$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e

$$(\mathcal{H}_{SK}(U;F),\tau_{\infty se}) = (\mathcal{H}_{SC}(U;F),\tau_{\infty se}) \approx (\mathcal{H}_S(U),\tau_{\infty se})\,\hat{\otimes}_\varepsilon F\ .$$

<u>Prova</u> . a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos a aplicação $T\colon \mathcal{H}_{Sn}(U;F) \longrightarrow \mathcal{L}(F'_c,(\mathcal{H}_S(U),\ \tau_{nse}))$, por $T(f)(\phi)\ (x) = f^*(\phi)\ (x) = \phi(f(x))$, para $f \in \mathcal{H}_{Sn}(U;F)$, $\phi \in F'$ e $x \in U$.

Claramente $T(f)(\phi) \in \mathcal{H}_S(U)$, para cada f e ϕ . T é injetora. Resta mostrar que para cada $f \in \mathcal{H}_{Sn}(U;F)$, T(f) é contínua. Seja $p \in SNC(\mathcal{H}_S(U),\ \tau_{nse})$, dada por

$$p(g) = \sup_{\substack{x \in K \\ j \leq n}} \left\| \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j g(x) \right\|_B$$

para $g \in \mathcal{H}_S(U)$, onde $K \subset U$ é compacto estrito e $B \in \mathcal{B}_E$ é tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B . Seja $f \in \mathcal{H}_{Sn}(U;F)$. Pelo LEMA 5.15 2) , o conjunto

$$L = \left\{ \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f(x)(y) \quad ; x \in K \ , \ y \in B \ , \ j \leq n \right\}$$

é relativamente compacto em F . Logo $(\Gamma(\bar{L}))^o$ é uma vizinhança do zero em F'_c . Consequentemente se $\phi \in (\Gamma(\bar{L}))^o$, então

$$p(T(f)(\phi)) = p(\phi \circ f) = \sup_{\substack{x \in K \\ j \leq n}} \left\| \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j (\phi \circ f)(x) \right\|_B =$$

$$= \sup_{\substack{x \in K \\ j \leq n}} \left\| \phi \left(\frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f(x) \right) \right\|_B \leq 1 .$$

Isto prova que $T(f)$ é contínua.

b)Como no TEOREMA anterior , basta verificar que a aplicação $T:(\mathcal{H}_{Sn}(U;F), \tau_{nse}) \longrightarrow \mathcal{L}_\varepsilon(F'_c, (\mathcal{H}_S(U), \tau_{nse}))$ definida em a) , é um isomorfismo topológico sobre a imagem . Isto vem do fato que se $K \subset U$ é um compacto estrito e $B \in \mathcal{B}_E$ é tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B e $f \in \mathcal{H}_{Sn}(U;F)$, então pelo teorema de Hahn-Banach ,

$$\sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f(x) \right\|_B \leq 1 \quad , \text{ se, e somente se , para } \phi \in F',$$

$$\|\phi\| \leq 1 \text{ e } j \leq n \ , \ \sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j (T(f)(\phi)(x) \right\|_B \leq 1 .$$

Consequentemente , para F de Banach com a P.A. , segue do TEOREMA 5.14 1)b) e do fato que $(\mathcal{H}_{Sn}(U;F), \tau_{nse})$ é completo,(PRO-

POSIÇÃO 2.40),

$$(\mathcal{H}_{Sn}(U;F),\ \tau_{nse}) \approx (\mathcal{H}_S(U),\ \tau_{nse})\ \hat{\otimes}_{\varepsilon} F \quad ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ainda mais, desde que $(\mathcal{H}_{SC}(U;F), \tau_{\infty se})$ é completo (PROPOSIÇÃO 2.40), segue do TEOREMA 5.14 1)b) que para F de Banach com a P.A.,

$$(\mathcal{H}_S(U), \tau_{\infty se})\ \hat{\otimes}_{\varepsilon} F \approx (\mathcal{H}_{SC}(U;F), \tau_{\infty se}) \text{ . Q.E.D.}$$

5.22 OBSERVAÇÃO 1) No caso de $n=0$, a) e b) valem para F com a propriedade que para $K \subset F$ compacto, $\Gamma(K)$ é compacto em F. Esta prova completa a prova da PROPOSIÇÃO 4.5.

2) O resultado para a topologia $\tau_{\infty se}$ já foi obtido no TEOREMA 5.8 b) , para F de Banach , na forma

$$(\mathcal{H}_{SK}(U;F), \tau_{\infty se}) \approx (\mathcal{H}_S(U), \tau_{\infty se})\ \varepsilon\ F \text{ .}$$

5.23 TEOREMA Sejam E qualquer e F de Banach reflexivo. Então:

a) $\mathcal{H}_{SN}(E;F)$ pode ser imerso em $\mathcal{L}(F'_{\tau}, (\mathcal{H}_{SN}(E), T_{Ne}))$, onde F'_{τ} indica F' com a topologia de Mackey $\tau(F', F)$.

b) $(\mathcal{H}_{SN}(E;F), T_{Ne})$ induz a topologia ε no produto tensorial $(\mathcal{H}_{SN}(E), T_{Ne}) \otimes F$.

Consequentemente ,

$$(\mathcal{H}_{SN}(E;F), T_{Ne}) \approx (\mathcal{H}_{SN}(E), T_{Ne})\ \hat{\otimes}_{\varepsilon} F \text{ .}$$

<u>Prova</u>: a) Seja $T: \mathcal{H}_{SN}(E;F) \longrightarrow \mathcal{L}(F'_{\tau}, (\mathcal{H}_{SN}(E), T_{Ne}))$ definida por $T(f)(\phi)(x) = f^*(\phi)(x) = \phi(f(x))$, para $f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$, $\phi \in F'$ e $x \in E$. Claramente $T(f)(\phi) \in \mathcal{H}_{SN}(E)$, para toda f e ϕ . Resta mostrar que para cada $f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$, $T(f)$ é contínua. Seja p uma seminorma contínua em $(\mathcal{H}_{SN}(E), T_{Ne})$, então dado $\varepsilon > 0$, exis

te $c(\varepsilon) > 0$, tal que

$$p(g) \leq c(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n g(0) \right\|_{N,K+\varepsilon B} \quad , \text{ para toda } g \in$$

$\mathcal{H}_{SN}(E)$, onde $K \subset E$ é compacto estrito equilibrado e $B \in \mathcal{B}_E$ é tal que $K \subset E_B$ e é compacto em E_B .(DEFINIÇÃO 2.28).

Seja $f \in \mathcal{H}_{SN}(E;F)$. Da DEFINIÇÃO 2.28 2) , existe $\delta > 0$, tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\delta B} < \infty$$

. Para este δ e $\phi \in F'$ com $\|\phi\| \leq 1$, então

$$p(f^*(\phi)) = p(\phi \circ f) \leq c(\delta) \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \phi(\hat{\delta}^n f(0)) \right\|_{N,K+\delta B}$$

$$\leq c(\delta) \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \right\|_{N,K+\delta B} < \infty .$$

Desde que F é reflexivo , $\{ \phi \in F', \|\phi\| \leq 1 \}$ é uma vizinhança do zero em F'_τ , e a prova se completa.

b) Desde que a topologia ε sobre $(\mathcal{H}_{SN}(E), T_{Ne}) \otimes F$ é a topologia induzida por $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau, (\mathcal{H}_{SN}(E), T_{Ne}))$, basta mostrar que a aplicação $T:(\mathcal{H}_{SN}(E;F), T_{Ne}) \longrightarrow \mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau, (\mathcal{H}_{SN}(E), T_{Ne}))$, definida no ítem a) é um isomorfismo topológico sobre a imagem. Isto segue pelo teorema de Hahn-Banach , como no TEOREMA 5.18 b) usando a PROPOSIÇÃO 2.32 .

Consequentemente do TEOREMA 5.17 (5) e do fato que $(\mathcal{H}_{SN}(E;F), T_{Ne})$ é completo, (PROPOSIÇÃO 2.33), temos que

$$(\mathcal{H}_{SN}(E;F), T_{Ne}) \approx (\mathcal{H}_{SN}(E), T_{Ne}) \hat{\otimes}_\varepsilon F \text{ . Q.E.D.}$$

5.24 TEOREMA Sejam E qualquer e F de Banach.

a) Para todo $U \subset E$, aberto não vazio, $\mathcal{H}_{Sc}(U;F)$ pode ser imerso em $\mathcal{L}(F'_c;(\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau))$, onde $\tau = \tau_{\omega se}$ ou $\tau_{\infty se}$.

b) Para todo $U \subset E$, aberto equilibrado, $(\mathcal{H}_{Sc}(U;F),\tau)$ induz a topologia ε no produto tensorial $(\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau)\otimes F$, onde $\tau = \tau_{\omega se}$ ou $\tau_{\infty se}$.

Consequentemente, para $U \subset E$ aberto equilibrado,

$$(\mathcal{H}_{Sc}(U;F),\tau_{\omega se}) \approx (\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau_{\omega se})\,\hat{\otimes}_{\varepsilon} F \quad \text{e}$$

$$(\mathcal{H}_{Sc}(U;F),\tau_{\infty se}) \approx (\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau_{\infty se})\,\hat{\otimes}_{\varepsilon} F .$$

<u>Prova</u>: a) Basta mostrar para a topologia $\tau = \tau_{\omega se}$. Seja $T: \mathcal{H}_{Sc}(U;F) \longrightarrow \mathcal{L}(F'_c;(\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau_{\omega se}))$, definida por $T(f)(\phi)(x) = f^*(\phi)\,(x) = \phi(f(x))$, para $f \in \mathcal{H}_{Sc}(U;F)$, $\phi \in F'$ e $x \in U$. Claramente $T(f)(\phi) \in \mathcal{H}_{Sc}(U)$, para toda f e ϕ. T é injetora. A continuidade de $T(f)$ segue como no TEOREMA 5.18 a).

b) A prova de b) também é analoga à de b) do TEOREMA 5.18.

Consequentemente, para $U \subset E$ aberto equilibrado, segue do TEOREMA 5.17 (3) e dos fatos que $(\mathcal{H}_{Sc}(U;F),\tau_{\omega se})$ e $(\mathcal{H}_{Sc}(U;F),\tau_{\infty se})$ são completos, (PROPOSIÇÃO 2.36), que

$$(\mathcal{H}_{Sc}(U;F),\tau_{\omega se}) \approx (\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau_{\omega se})\,\hat{\otimes}_{\varepsilon} F \quad \text{e}$$

$$(\mathcal{H}_{Sc}(U;F),\tau_{\infty se}) \approx (\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau_{\infty se})\,\hat{\otimes}_{\varepsilon} F .\ \text{Q.E.D.}$$

5.25 COROLÁRIO Seja $U \subset E$ aberto equilibrado. Então $(\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau_{\omega se})$ tem a P.A. se, e somente se, para todo F de Banach,

$$(\mathcal{H}_{Sc}(U;F),\tau_{\omega se}) \approx (\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau_{\omega se})\,\varepsilon\, F .$$

$(\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau_{\infty se})$ tem a P.A. se, e somente se , para todo F de Banach,

$$(\mathcal{H}_{Sc}(U;F),\tau_{\infty se}) \approx (\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau_{\infty se})\ \varepsilon\ F\ .$$

<u>Prova</u> . Desde que na hipótese dada , $\mathcal{H}_{Sc}(U)\otimes F$ é $\tau_{\omega se}(\tau_{\infty se})$ -denso em $\mathcal{H}_{Sc}(U;F)$, para todo F de Banach , temos que se

$$(\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau_{\omega se})\,\varepsilon\, F \approx (\mathcal{H}_{Sc}(U;F),\tau_{\omega se})$$

$$((\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau_{\infty se})\,\varepsilon\, F \approx (\mathcal{H}_{Sc}(U;F),\tau_{\infty se}))\ ,$$

então $(\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau_{\omega se})$ $((\mathcal{H}_{Sc}(U),\tau_{\infty se}))$ tem a P.A.. Reciprocamente é imediato devido ao TEOREMA 5.24 e à PROPOSIÇÃO 3.5 f). Q.E.D.

5.26 TEOREMA Sejam E qualquer e F de Banach reflexivo. Então

$$(\mathcal{H}_{Sb}(E;F),\tau_s) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau,(\mathcal{H}_{Sb}(E),\tau_s))\ ,$$

onde F'_τ indica F' com a topologia de Mackey $\tau(F',F)$.

<u>Prova</u>: Seja $T:\ \mathcal{H}_{Sb}(E;F) \longrightarrow \mathcal{L}(F'_\tau,(\mathcal{H}_{Sb}(E),\tau_s))$, definida por $T(f)(\phi)(x) = f^*(\phi)(x) = \phi(f(x))$, para $f\in\mathcal{H}_{Sb}(E;F)$, $\phi\in F'$ e $x\in E$. Claramente $T(f)(\phi)\in\mathcal{H}_{Sb}(E)$, para toda f e ϕ . T é injetora. Resta mostrar que para cada $f\in\mathcal{H}_{Sb}(E;F)$, $T(f)$ é contínua e que T é sobrejetora. Seja $p\in SNC(\mathcal{H}_{Sb}(E),\ \tau_s)$, dada por

$$p(g) = \sup_{x\in B}\|g(x)\| \qquad ,\ \text{para toda } g\in\mathcal{H}_{Sb}(E),\ \text{onde}$$

$B\subset E$ é limitado.

Se $f\in\mathcal{H}_{Sb}(E;F)$ e $\phi\in F'$, $\|\phi\|\leq 1$, então

$$p(T(f)(\phi)) = p(\phi\circ f) = \sup_{x\in B}\|\phi(f(x))\| \leq \sup_{x\in B}\|f(x)\| < \infty\,.$$

Desde que F é reflexivo , $\{\phi \in F', \|\phi\| \leq 1\}$ é uma vizinhança do zero em F'_{τ} , segue a continuidade de $T(f)$.

Agora, seja $A \in \mathcal{L}(F'_{\tau}, (\mathcal{H}_{Sb}(E), \tau_s))$. Para $x \in U$, definimos a aplicação linear $f(x)$ em F' por $f(x)(\phi) = A(\phi)\ (x)$. $f(x)$ é contínua em F'_{τ} e logo pelo Teorema de Mackey, $f(x) \in F$. Além disso como f é fracamente S-holomorfa , então f é S-holomorfa (PROPOSIÇÃO 1.27). Desde que $A(\phi) \in \mathcal{H}_{Sb}(E)$, segue que $f(B)$ é limitado em F , para cada $B \subset E$ limitado. Logo, $f \in \mathcal{H}_{Sb}(E;F)$. Finalmente , como $T(f) = A$, segue que T é sobrejetora.

Para completar a prova do teorema , resta mostrar que $T: (\mathcal{H}_{Sb}(E;F), \tau_s) \longrightarrow \mathcal{L}_{\varepsilon}(F'_{\tau}, (\mathcal{H}_{Sb}(E), \tau_s))$ definida anteriormente , é um isomorfismo topológico . Isto segue diretamente do teorema de Hahn-Banach, pois se $f \in \mathcal{H}_{Sb}(E;F)$ e $B \subset E$ é limitado, então $\sup_{x \in B} \|f(x)\| \leq 1$, se, e somente se , para todo $\phi \in F'$ $\|\phi\| \leq 1$, $\sup_{x \in B} \|T(f)(\phi)(x)\| \leq 1$. Q.E.D.

No caso de funções holomorfas , temos o seguinte:

5.27 TEOREMA . Sejam E holomorficamente infratonelado e k-espaço, F de Banach e $U \subset E$ um aberto não vazio. Então :

a) para $n=0,1,..,$ $\mathcal{H}_n(U;F)$ pode ser imerso em $\mathcal{L}(F'_c, (\mathcal{H}(U), \tau_{ns})$.

b) para $n=0,1,...,$ $(\mathcal{H}_n(U;F), \tau_{ns})$ induz a topologia ε no produto tensorial $(\mathcal{H}(U), \tau_{ns}) \otimes F$.

Consequentemente , para F de Banach com a P.A.

$$(\mathcal{H}_n(U;F), \tau_{ns}) \approx (\mathcal{H}_n(U), \tau_{ns}) \hat{\otimes}_{\varepsilon} F \quad ,\text{para } n=0,1,...$$

Observações: A prova deste teorema é análoga à do TEOREMA 5.21 , usando o LEMA 5.15 (1). Um teorema análogo ao TEOREMA 5.18 para funções holomorfas não faz sentido aqui, pois seria necessário colocar nas hipóteses E holomorficamente infratonelado e k-espaço e F de Banach com a P.A. , obtendo

$$(\mathcal{H}_C(U;F),\tau_{\omega s}) = (\mathcal{H}_K(U;F),\tau_{\omega s}) \approx (\mathcal{H}(U),\tau_{\omega s})\, \varepsilon\, F ,$$

para $U \subset E$ aberto equilibrado , que é um resultado já obtido no TEOREMA 5.8 a). O mesmo acontece com a topologia $\tau_{\infty s}$.

Veremos agora resultados sobre $(\mathcal{H}_S(U;F),\tau)\,\hat{\otimes}_\varepsilon G$, para F e G de Banach , em $(\mathcal{H}_S(U;F\,\hat{\otimes}_\varepsilon G),\tau)$, onde τ indica as diferentes topologias usadas neste capítulo . Para $\tau = \tau_{oe}$, resultados nesse sentido já foram obtidos no capítulo 4. Já vimos também , no capítulo 4 que $\mathcal{H}_S(U;F)\otimes G$ está canônicamente imerso em $\mathcal{H}_S(U;F\,\hat{\otimes}_\varepsilon G)$.

Para $n=0,1,\ldots,\infty$, denotamos por $\mathcal{H}_S^n(U;F\,\hat{\otimes}_\varepsilon G)$, o subespaço de $\mathcal{H}_S(U;F\,\hat{\otimes}_\varepsilon G)$ das aplicações S-holomorfas $f:U \longrightarrow F\,\hat{\otimes}_\varepsilon G$, tais que para cada $x\in U$ e $j \leq n$, $\frac{1}{j!}\hat{\delta}^j f(x) \in \overline{\mathcal{P}_b({}^jE;F)\otimes G}$, aderência em $\mathcal{P}_b({}^jE;F\,\hat{\otimes}_\varepsilon G)_s$. Desde que $F\,\hat{\otimes}_\varepsilon G$ é completo , temos que $(\mathcal{H}_S(U;F\,\hat{\otimes}_\varepsilon G),\tau_{oe})$ é completo. Isto vai acarretar que $(\mathcal{H}_S^n(U;F\,\hat{\otimes}_\varepsilon G),\tau_{nse})$ é completo , para $n=0,1,\ldots,\infty$. Como também , $(\mathcal{H}_S^\infty(U;F\,\hat{\otimes}_\varepsilon G),\tau_{\omega se})$ é completo, para $U\subset E$ aberto equilibrado.

5.28 TEOREMA Sejam E qualquer , $U \subset E$ aberto não vazio , F e G de Banach.

1)Se G tem a P.A. , então

a)para cada $n=0,1,\ldots,\infty$,

$$(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{nse}) \hat{\otimes}_\varepsilon G \approx (\mathcal{H}^n_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{nse}).$$

b) para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(\mathcal{H}_{Sn}(U;F), \tau_{nse}) \hat{\otimes}_\varepsilon G \approx (\mathcal{H}_{Sn}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{nse})$$

e então

$$(\mathcal{H}_{SC}(U;F), \tau_{\infty se}) \hat{\otimes}_\varepsilon G \approx (\mathcal{H}_{SC}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{\infty se}).$$

2) Se G tem a P.A.L., então $\mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$ é $\tau_{\omega se}$- denso em $\mathcal{H}^\infty_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ e $\mathcal{H}_{SC}(U;F) \otimes G$ é $\tau_{\omega se}$- denso em $\mathcal{H}_{SC}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$.

3) para G qualquer e $U \subset E$ aberto equilibrado ,então

$$(\mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{\omega se}) \approx (\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{\omega se}) \hat{\otimes}_\varepsilon G$$

e

$$(\mathcal{H}_{SC}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{\omega se}) \approx (\mathcal{H}_{SC}(U;F), \tau_{\omega se}) \hat{\otimes}_\varepsilon G .$$

<u>Prova</u> : 1)a)Desde que $(\mathcal{H}^n_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{nse})$ é completo, para cada $n=0,1,\ldots,\infty$, basta mostrar que $\mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$ é τ_{nse}- denso em $\mathcal{H}^n_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ e que $(\mathcal{H}^n_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{nse})$ induz a topologia ε no produto tensorial $\mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$.

Sejam $f \in \mathcal{H}^n_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$, $K \subset U$ compacto estrito , $B \in \mathcal{B}_E$, tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B , $\varepsilon > 0$ e m um inteiro $\leq n$. Como F e G são completos e G tem a P.A. , $F \hat{\otimes}_\varepsilon G = F \varepsilon G = \mathcal{L}_\varepsilon(F'_c;G)$ (PROPOSIÇÃO 3.5 f)). Dessa forma , f pode ser pensada como uma aplicação de U em $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_c;G)$. Por argumentos análogos ao do LEMA 5.15 (2) e usando o fato que $\{\phi \in F', \|\phi\| \leq 1\}$ é compacto em F'_c , temos que o conjunto

$$L = \left\{ \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f(x)(y)(\phi) \ ;\ x \in K, y \in B, \phi \in F', \|\phi\| \leq 1 \ ,, j \leq m \right\}$$

é relativamente compacto em G. Seja $T \in G' \otimes G$ tal que $\| T(z) - z \| < \varepsilon$, para $z \in L$. Seja $\{g_1, \ldots, g_k\}$ uma base para $T(G)$. Para $i=1,..,k$, seja $c_i : U \longrightarrow F''$, definida por

$$T(f(x)(\Psi)) = \sum_{i=1}^{k} c_i(x)(\Psi) g_i \quad , \text{ onde } \Psi \in F'.$$ Para cada $x \in U$, $c_i(x)$ é contínua em F'_c e logo $c_i(x) \in F$. Além disso se $\phi_i \in G'$, $\phi_i(g_j) = \delta_{ij}$, então para $\Psi \in F'$, $\Psi(c_i(x)) = $ $= \phi_i \circ T(f(x)(\Psi))$. Isto significa que $c_i : U \longrightarrow F$ é fracamente S-holomorfa e logo , S-holomorfa . Finalmente , para $x \in K$, $y \in B$ e $j \leq n$

$$\left\| \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j (T \circ f - f)(x)(y) \right\| = \sup_{\substack{\Psi \in F' \\ \|\Psi\| \leq 1}} \left\| \frac{1}{j!} \ T(\hat{\delta}^j f(x)(y)(\Psi)) - \hat{\delta}^j f(x)(y)(\Psi) \right\| \leq \varepsilon.$$

Como $T \circ f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i(x) \otimes g_i \in \mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$, temos a aplicação procurada.

Para completar a prova de a) vamos mostrar que $(\mathcal{H}_S^n(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \ \tau_{nse})$ induz a topologia ε no produto tensorial $\mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$. Isto segue da próxima observação que é devida ao teorema de Hahn-Banach : seja $K \subset U$ compacto estrito, $B \in \mathcal{B}_E$ tal que $K \subset U \cap E_B$ e é compacto em E_B , $j \leq n$ e

$$h(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \otimes g_i \in \mathcal{H}_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G) \ , \ f_i \in \mathcal{H}_S(U;F) \ ,$$

$g_i \in G$, $x \in U$, $i=1,..,k$. Então

$$\sup_{x \in K} \left\| \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j h(x) \right\| = \sup_{x \in K} \ \sup_{y \in B} \left\| \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{j!} \hat{\delta}^j f_i(x)(y) \otimes g_i \right\|_{F \hat{\otimes}_\varepsilon G} \leq 1$$

se, e somente se ,

$$\sup_{\substack{x\in K\\ y\in B\\ \phi\in G'\\ \|\phi\|\leq 1}} \left\| \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{j!}\hat{\delta}^j f_i(x)(y)\phi(g_i)\right\| \leq 1$$

Observação . Esta prova contém como caso particular a prova do TEOREMA 4.14 a).

b) Neste caso , usa-se a mesma aproximação

$$T \circ f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i(x) \otimes g_i$$, para mostrar que

$\mathcal{H}_{Sn}(U;F) \otimes G$ é τ_{nse}- denso em $\mathcal{H}_{Sn}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$. Devemos somente mostrar que se $f \in \mathcal{H}_{Sn}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$, então $c_i \in \mathcal{H}_{Sn}(U;F)$. Como $f \in \mathcal{H}_{Sn}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$, então para $j \leq n$, $x \in U$, $\frac{1}{j!}\hat{\delta}^j f(x) \in$ $\overline{\mathcal{P}_b(^jE) \otimes (F \otimes_\varepsilon G)}$, aderência em $\mathcal{P}_b(^jE;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)_s$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\sum_{s=1}^{m} P_s \otimes (x_s \otimes y_s)$, $P_s \in \mathcal{P}_b(^jE)$, $x_s \in F$, $y_s \in G$, tal que

$$\left\| \frac{1}{j!}\hat{\delta}^j f(x) - \sum_{s=1}^{m} P_s \otimes (x_x \otimes y_s) \right\|_B \leq \varepsilon$$, onde $B \in \mathcal{B}_E$.

Desde que $c_i(x) = \phi_i \circ T(f(x))$, $\frac{1}{j!}\hat{\delta}^j c_i(x) = \phi_i \circ T(\frac{1}{j!}\hat{\delta}^j f(x))$

e

$$\left\|\phi_i \circ T(\frac{1}{j!}\hat{\delta}^j f(x)) - \sum_{s=1}^{m}(P_s \otimes x_s)\phi_i \circ T(y_s)\right\|_B \leq \|\phi_i\| \, \|T\| \, \varepsilon ,$$

segue que $\frac{1}{j!}\hat{\delta}^j c_i(x) \in \overline{\mathcal{P}_b(^jE) \otimes (F \otimes_\varepsilon G)}$, aderência em $\mathcal{P}_b(^jE;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)_s$.

2) Analogamente à prova do TEOREMA 5.14 2)b) , obtemos que

$\mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$ é $\tau_{\omega se}$- denso em $\mathcal{H}^\infty_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$. Para o $\mathcal{H}_{SC}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$, us mos a mesma aproximação, e como em 1)b) mostra-se que $c_i \in \mathcal{H}_{SC}(U;F)$.

3) Sejam $U \subset E$ aberto equilibrado , $f \in \mathcal{H}^\infty_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ e $p \in$ SNC$(\mathcal{H}^\infty_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{\omega se})$. Logo , dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que

$$p(f - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0)) < \varepsilon/2 .$$

Desde que $\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \in \overline{\mathcal{P}_b(^nE;F) \otimes G}$, aderência em $\mathcal{P}_b(^nE;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)_s$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\tau_{\omega se}$ induz em $\mathcal{P}_b(^nE;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ a topologia τ_s , segue que, para cada $n=0,1,..,M$, existe $Q_n \in \mathcal{P}_b(^nE;F) \otimes G$, tal que $p(\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) - Q_n) < \varepsilon/2(M+1)$.

Logo $p(f - \sum_{n=0}^{M} Q_n) < \varepsilon$. Como $\sum_{n=0}^{M} Q_n \in \mathcal{P}_b(E;F) \otimes G \subset \mathcal{H}_S(E;F) \otimes G$, segue que $\mathcal{H}_S(U;F) \otimes G$ é $\tau_{\omega se}$- denso em $\mathcal{H}^\infty_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$.

Desde que $(\mathcal{H}^\infty_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{\omega se})$ induz a topologia ε no produto tensorial $(\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{\omega se}) \otimes G$ e $(\mathcal{H}^\infty_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{\omega se})$ é completo, segue que

$$(\mathcal{H}^\infty_S(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{\omega se}) \approx (\mathcal{H}_S(U;F), \tau_{\omega se}) \hat{\otimes}_\varepsilon G .$$

Agora, seja $f \in \mathcal{H}_{SC}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ e p uma seminorma contínua em $(\mathcal{H}_{SC}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{\omega se})$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$,tal que

$$p(f - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0)) < \varepsilon/2 .$$

Desde que $\frac{1}{n!} \hat{\delta}^n f(0) \in \overline{\mathcal{P}_b(^nE) \otimes (F \otimes G)}$, aderência em

$\mathcal{P}_b({}^nE;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)_s$, para cada n e $\tau_{\omega se}$ induz em $\mathcal{P}_b({}^nE;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ a topologia τ_s , segue que para cada $n=0,1,..,M$, existe $Q_n \in \mathcal{P}_b({}^nE) \otimes (F \otimes G)$ tal que $p(\frac{1}{n!}\hat{\delta}^n f(0) - Q_n) < \varepsilon/2(M+1)$.
Logo, $p(f - \sum_{n=0}^{M} Q_n) < \varepsilon$. Como $\sum_{n=0}^{M} Q_n \in \mathcal{P}_b(E) \otimes (F \otimes G) = (\mathcal{P}_b(E) \otimes F) \otimes G \subset \mathcal{H}_{SC}(E;F) \otimes G$, segue que $\mathcal{H}_{SC}(U;F) \otimes G$ é $\tau_{\omega se}$- denso em $\mathcal{H}_{SC}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$.
Desde que $(\mathcal{H}_{SC}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G),\tau_{\omega se})$ induz a topologia ε no produto tensorial $\mathcal{H}_{SC}(U;F) \otimes G$ e $(\mathcal{H}_{SC}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{\omega se})$ é completo (PROPOSIÇÃO 2.39), segue o resultado. Q.E.D.

Para o caso de funções holomorfas é necessário colocar muitas hipóteses. Inicialmente , para $n=0,1,...,\infty$, definimos $\mathcal{H}^n(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ como o subespaço vetorial de $\mathcal{H}(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ das funções holomorfas $f:U \longrightarrow F \hat{\otimes}_\varepsilon G$, tais que para cada $x \in U$ e $j \leq n$,
$\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(x) \in \overline{\mathcal{P}({}^jE;F) \otimes G}$, aderência em $\mathcal{P}({}^jE;F \hat{\otimes}_\varepsilon G)_s$.

Temos que para E metrizável e F e G de Banach , que $(\mathcal{H}^n(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{ns})$ é completo, para cada n .

5.29 TEOREMA Sejam F e G de Banach e E metrizável . Então
1) Se F e G têm a P.A. e $U \subset E$ é um aberto não vazio,

$$(\mathcal{H}(U;F), \tau_{ns}) \hat{\otimes}_\varepsilon G \approx (\mathcal{H}^n(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G), \tau_{ns}) ,$$

para cada $n=0,1,...,$. Como também , para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(\mathcal{H}_n(U;F), \tau_{ns}) \hat{\otimes}_\varepsilon G \approx (\mathcal{H}_n(U;F \hat{\otimes}_\varepsilon G) , \tau_{ns}).$$

2) Se G tem a P.A.L. e F tem a P.A. , então para $U \subset E$ aberto não

vazio, $\mathcal{H}(U;F) \otimes G$ é $\tau_{\omega s}$- denso em $\mathcal{H}^{\infty}(U;F \hat{\otimes}_{\varepsilon} G)$ e $\mathcal{H}_C(U;F) \otimes G$ é $\tau_{\omega s}$- denso em $\mathcal{H}_C(U;F \hat{\otimes}_{\varepsilon} G)$.

3) Para F e G quaisquer e $U \subset E$ aberto equilibrado

$$(\mathcal{H}(U;F), \tau_{\omega s}) \hat{\otimes}_{\varepsilon} G \approx (\mathcal{H}^{\infty}(U;F \hat{\otimes}_{\varepsilon} G), \tau_{\omega s})$$

e

$$(\mathcal{H}_C(U;F), \tau_{\omega s}) \hat{\otimes}_{\varepsilon} G \approx (\mathcal{H}_C(U;F \hat{\otimes}_{\varepsilon} G), \tau_{\omega s}) .$$

A prova deste teorema é análoga à do TEOREMA anterior. Devemos colocar F e G com a P.A. e E metrizável em 1) para que o conjunto L usado na prova seja relativamente compacto em G. A hipótese de E ser metrizável ainda é usada para se obter a aplicação c_i holomorfa.

BIBLIOGRAFIA

Aron, R.

(1) Tensor products of holomorphic functions - Indag. Math. 35 , nº 3 (1973).

Aron, R. - Schottenloher , M.

(1) Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the Approximation Property - Journal of Functional Analysis, Vol. 21 , nº 1 (1976).

Barroso, J.A.

(1) Topologia nos espaços de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos - Anais da Academia Brasileira de Ciências , Vol. 43 (1971).

Bianchini, M. - Zaine , M.C. - Paques , O.W.

(1) On the strong compact-ported topology for spaces of holomorphic mappings - a aparecer.

Dineen, S.

(1) Holomorphy types on Banach space - Studia Mathematica , 39 (1971).

Enflo, P.

(1) A counterexample to the approximation property in Banach space - Acta Math. 130 (1973).

Grothendieck, A.

(1) Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires - Mem. A.M.S. , nº 16 (1955).

Gupta, C.P.

(1) Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on Banach space - thesis - University of Rochester , 1966 - Reproduced by Instituto de Matematica Pura e Aplicada , Rio de Janeiro , Brasil , Notas de Matemática , nº 37 (1968).

Hogbe-Nlend , H.

(1) Deux Remarques sur les Applications Analytiques en Dimension Infinie - Anais da Academia Brasileira de Ciências , (1973) , 45 (1).

(2) Sur la propriété d'approximation de Banach-Grothendieck - Math. Ann. 203 (1973).

(3) Théorie des Bornologies et applications - Lectures Notes, 213 - Berlin-Heidelberg-New York , Springer (1971).

Kelley, J.

(1) General Topology - Van Nostrand , Princeton, N.J. 1955.

Lazet, D.

(1) Comptes rendues , 273 , série A, (1971).

Lazet, D. - Colombeau , J.

(1) Sur les theoremes de Vitali et de Montel en dimension infinie - C. R. Acad. Sc. Paris , t. 274 (1972).

Matos, M.C.

(1) Holomorphically bornological spaces and infinite dimensional versions of Hartogs theorem - a aparecer.

Nachbin, L.

(1) Topologia dos espaços de aplicações holomorfas - Colóquio

Brasileiro de Matemática , 6., Poços de Caldas , 1967.

(2) Holomorfia em dimensão infinita - Notas de aula do curso na Universidade Estadual de Campinas - (1976).

(3) Topology on spaces of holomorphic mappings - Ergenbnisse der Mateematik, vol.47 , Springer - Verlag, Berlin,1969.

(4) A first course in complex analysis in infinite dimensions Instituto de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco , Recife - a aparecer.

(5) Some holomorphically significant properties of locally convex spaces - Memórias de Matemática - Vol.70 - Universidade Federal do Rio de Janeiro - 1976.

Noverraz, Ph.

(1) Pseudo-convexité, convexité polynomiale et domaines d'holomorphie en dimension infinie. - Notas de Matematica, 48 , North-Holland , Amsterdan , 1973.

Pisanelli, D.

(1) Sur la L-F-analitycité - Analyse fonctionelle et applications - L.Nachbin, editor - Hermann, Paris, 1975.

Prolla, J.B.

(1) Approximation of Vector Valued functions - North-Holland, Amsterdan , 1977 - a aparecer.

Robertson, A.P.- Robertson , W.J.

(1) Topological Vector Spaces - Cambridge - 1973.

Schwartz , L.

(1) Théorie des distribuitions à valeurs vectorielles I.- Ann. Inst. Fourier , 7 (1957).

Schottenloher, M.

(1) ε-product and continuation of analytic mappings - fonctionelle et applications - L.Nachbin -editor , Hermann, Paris , 1975.

Silva, J.S.

(1) Conceitos de função differenciável em espaços loca convexos - Publicação do "Centro de Estudos Matemá de Lisboa", 1957.