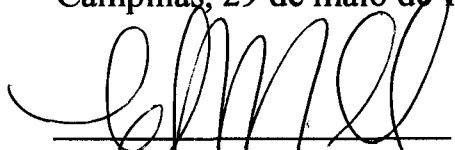


# O PROBLEMA DO TÚNEL DE CONGELAMENTO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. João Eduardo Cardoso Scheidt e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 29 de maio de 1996.



---

Prof. Dr. Clovis Perin Filho

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da UNICAMP como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE em Matemática Aplicada.

UNIDADE	BC
N.º DE FOLHAS	
TIPO DE DOCUMENTO	TI UNICAMP
CLASSIFICAÇÃO	Sch 25p
NUM. DE IDENTIFICAÇÃO	27 881
DATA DE AQUISIÇÃO	667/96
TIPO DE AQUISIÇÃO	D X
VALOR	R\$ 11,00
DATA DE EMISSÃO	03/07/96
N.º CPO	

CM-0005618-0

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Scheidt, João Eduardo Cardoso

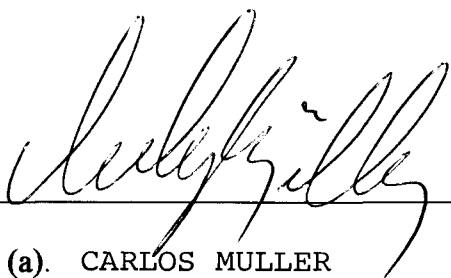
Sch25p O problema do túnel de congelamento / João Eduardo Cardoso  
Scheidt -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1996.

Orientador : Clovis Perin Filho

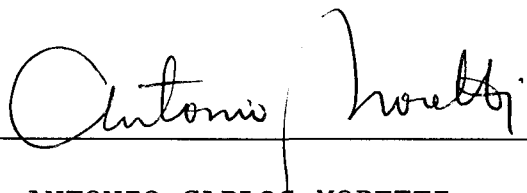
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

1. Produção - Sequenciamento. 2. Heurística. 3. Métodos de  
simulação. 4. Animação por computador. I. Perin Filho, Clovis. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

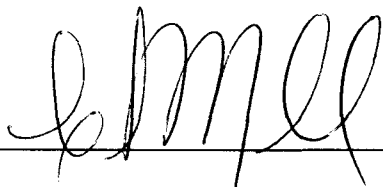
Tese de Mestrado defendida e aprovada em 26 de abril de 1996  
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



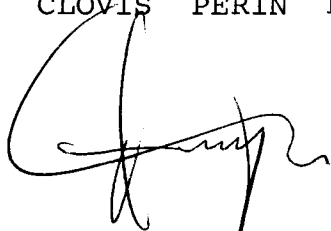
Prof (a). Dr (a). CARLOS MULLER



Prof (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS MORETTI

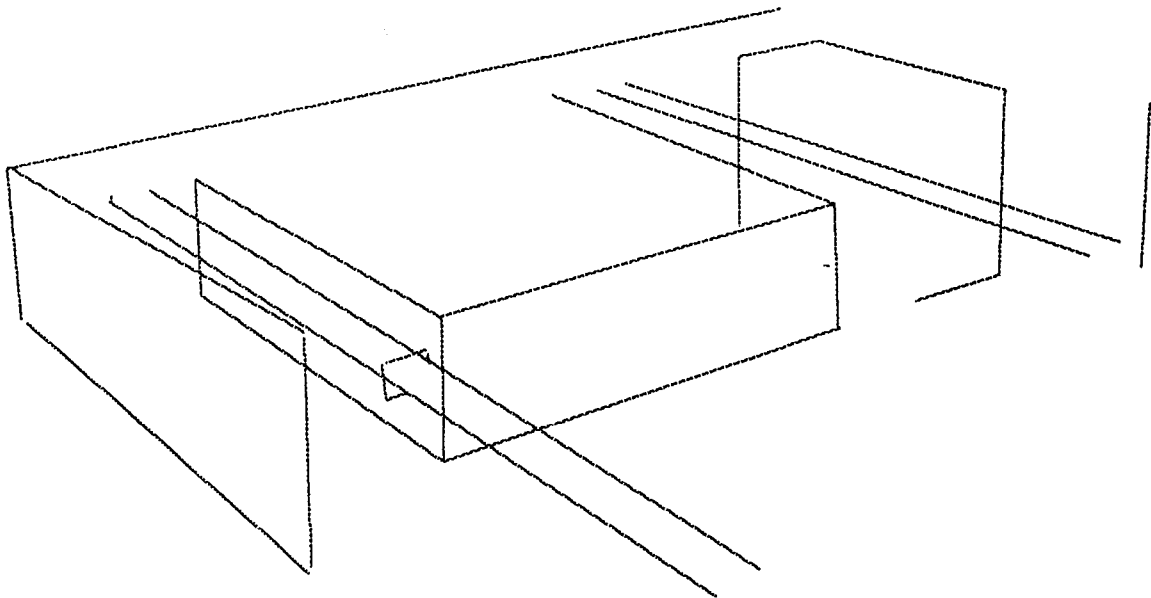


Prof (a). Dr (a). CLÓVIS PERIN FILHO



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

# O PROBLEMA DO TÚNEL DE CONGELAMENTO



João Eduardo Cardoso Scheidt  
Clovis Perin Filho - orientador

abril de 1996

Dedico este trabalho ao João Victor, meu filho,  
e à memória de Takesi Outuca, seu avô.

## **Agradecimentos**

A Clovis Perin, cuja orientação paciente e competente me permitiu desenvolver um trabalho criativo com segurança.

Ao Prof. Miguel Taube, pela colocação do problema e apoio, na UNISOMA, ao projeto correspondente.

A Sérgio Zullo, Marcos Pereira, Denise Lombardo, Marcos Nóbrega e Eduardo Milanez, por suas várias contribuições.

Aos professores Muller, Moretti e Chico, membros da banca examinadora, pelas valiosas sugestões e correções.

À SADIA, pelo acesso às suas instalações e aos dados necessários.

À UNISOMA, CAPES e UNICAMP, pelos recursos disponibilizados.

Aos meus pais, Hugo e Marisa, e à minha esposa, Rejane, pelo incentivo e apoio.

## RESUMO

Túneis de congelamento são equipamentos utilizados pela indústria alimentícia para o condicionamento térmico de produtos tais como iogurte, sorvete, leite, carne e derivados. Assim, geralmente estão no fim do processo de produção de produtos altamente perecíveis. Quando um túnel representa um gargalo do processo, ele causa transtornos à produção que podem até interrompê-la. Este trabalho visa a abordagem do problema de operação eficiente de túneis de congelamento quanto ao aspecto de carregamento.

Primeiramente abordamos o problema estático e suas relaxações e restrições. No problema estático determinístico, o instante de chegada das bandejas de produtos e o tempo de exposição necessário para seu condicionamento são conhecidos de antemão. Deve-se, então, programar por completo o carregamento do refrigerador definindo, para cada bandeja, em que nível do túnel deve ser colocada ou se deve ser rejeitada. Resultados teóricos são obtidos, particularmente para o caso (relaxado) do refrigerador de gavetas. Várias possibilidades de abordagem do problema estático são discutidas.

Em seguida abordamos o problema dinâmico, onde não se dispõe do conhecimento prévio dos parâmetros de cada bandeja. Estes só ficam definidos a partir da chegada de cada bandeja, quando então a decisão quanto ao carregamento ou rejeição da bandeja deve ser tomada. Para o problema dinâmico são apresentadas várias políticas, que são testadas num caso real e em cenários hipotéticos nele baseados. Para avaliação de desempenho das políticas usamos limites inferiores calculados com base no desenvolvimento teórico do problema estático. Os resultados são muito satisfatórios para uma classe de políticas a que chamamos *de encadeamento*.

## **ABSTRACT**

Freezing tunnels are food industry facilities for conditioning of meat, ice-cream, milk, yogurt, etc. They are very unwished bottlenecks because they are positioned at the end of the production process of highly perishable items (low in-process inventory). The freezing tunnel loading problem is that of maximizing its production in terms of the amount of frozen trays of products. The purpose of this study is to model this problem and develop methods for solving its static and dynamic versions.

In the static problem, the arrival time and the conditioning time of each tray are known in advance for the entire loading period. One should then completely schedule the loading of the tunnel. Each tray must be assigned to a position in the tunnel or be rejected. We discuss several approaches and show some theoretical results for relaxed problems.

In the dynamic problem, the arrival and the demand of trays are not known in advance. In this case, the decisions must take place at the arrival times. Several policies are developed. Some real case based scenarios are used for testing the policies.

The study shows the potential gains with the application of some policies, mainly those of the class we named 'chain policies'.

# Sumário

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 O que é um túnel de congelamento .....	1
1.2 O problema de operação do túnel .....	3
1.3 Objetivo do trabalho e apanhado das seções.....	5
<b>CAPÍTULO 2 O PROBLEMA ESTÁTICO .....</b>	<b>8</b>
2.1 O problema dos congeladores.....	8
2.2 Representação de soluções de exemplares .....	11
2.3 Exemplar do problema estático (P4).....	13
2.4 Pesquisa bibliográfica.....	15
2.5 Resultados teóricos.....	17
2.6 Alternativas de abordagem.....	22
2.6.1 Fluxo em redes .....	22
2.6.2 Programação dinâmica.....	25
2.6.3 Programação inteira .....	26
2.6.4 Metaheurísticas .....	29
<b>CAPÍTULO 3 O PROBLEMA DINÂMICO .....</b>	<b>31</b>
3.1 Políticas de carregamento.....	33
3.2 Estudo de caso .....	38
3.2.1 O túnel Recrusul .....	38
3.2.2 A carga .....	39
3.2.3 Forma de operação atual.....	40
3.2.4 Modelo para estudo de caso .....	41
3.2.5 Resultados .....	42



<b>CAPÍTULO 4 COMENTÁRIOS FINAIS.....</b>	<b>63</b>
<b>APÊNDICE A MODELO EM GAMS.....</b>	<b>68</b>
<b>APÊNDICE B TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO TÚNEL .....</b>	<b>71</b>
Decaimento de temperatura do produto.....	71
Aumento da temperatura do túnel.....	73
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>75</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Neste capítulo descrevemos um túnel de congelamento de níveis, seu funcionamento e sua utilização. Introduzimos o problema de operação do túnel e motivamos sua abordagem. Definimos o objetivo do trabalho e, através de um apanhado dos capítulos seguintes, damos uma idéia do método empregado e dos resultados obtidos.

### 1.1 O que é um túnel de congelamento

Túneis de congelamento são equipamentos utilizados pela indústria alimentícia para o condicionamento térmico de produtos perecíveis tais como iogurte, queijo, sorvete, leite, carne e derivados, etc.

Nos túneis, bandejas com caixas do produto a condicionar entram por uma extremidade, percorrem sua extensão (à medida que outras bandejas são colocadas no túnel) e saem pela outra extremidade com o produto já condicionado. Quando um túnel possui vários níveis onde as bandejas podem ser colocadas, ele é chamado de túnel de congelamento *de níveis*.

A função do túnel é fazer baixar rapidamente a temperatura do produto com o objetivo de maximizar sua retenção de qualidade e seu prazo de validade. Há duas classes principais de condicionamento térmico: *resfriamento* e *congelamento*. No *congelamento* pretende-se que o núcleo do produto atinja, tão rápido quanto possível, a temperatura de armazenamento (por volta de  $-20^{\circ}\text{C}$  para carnes). No *resfriamento* deseja-se que o produto todo seja levado o mais rápida e homoganeamente possível, sem que a sua superfície congele, a uma temperatura próxima da de congelamento (solidificação dos fluidos).

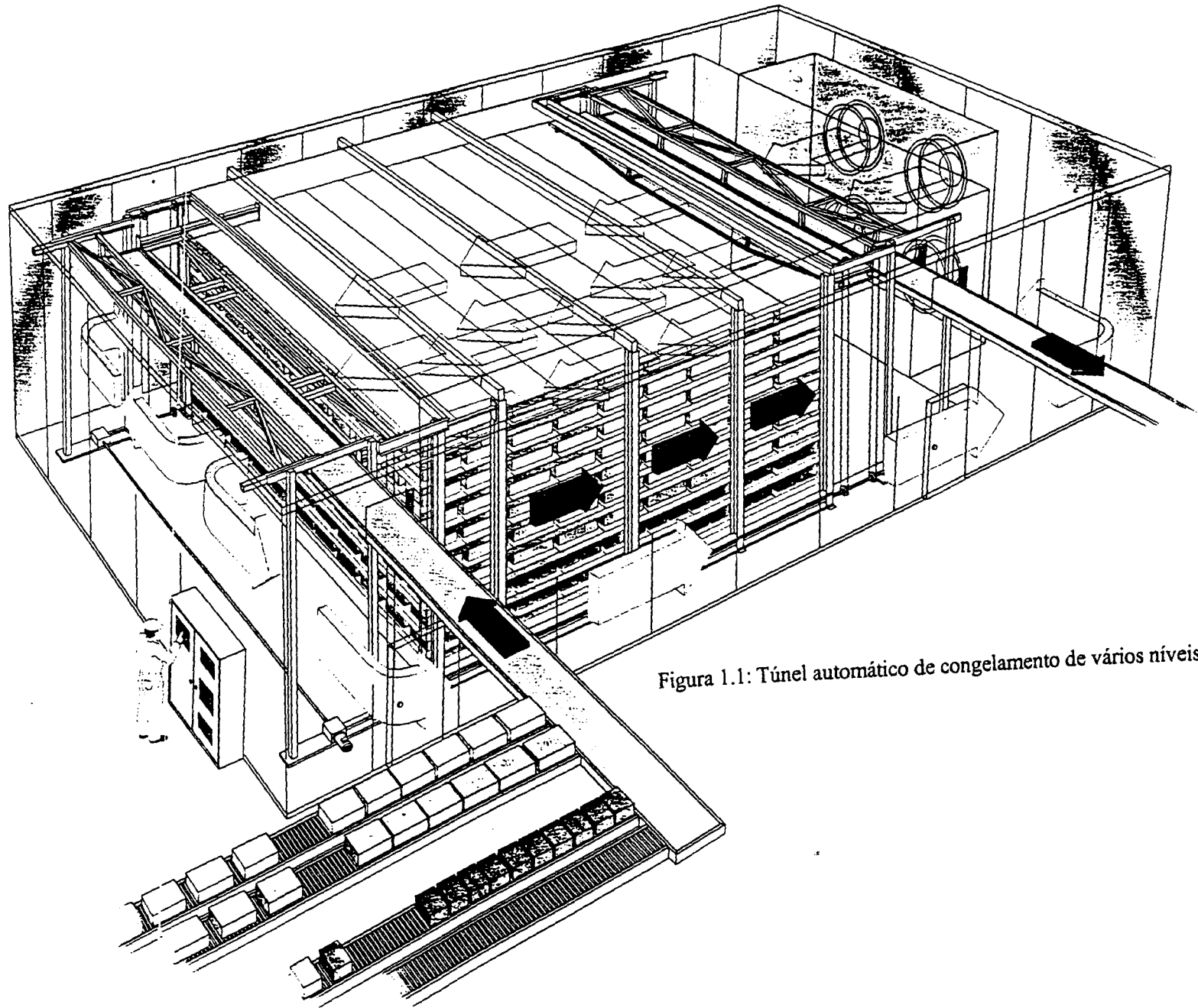


Figura 1.1: Túnel automático de congelamento de vários níveis

A figura 1.1 mostra um túnel de congelamento de vários níveis. Seus principais elementos são o sistema de formação de bandejas, o elevador de carga, os níveis de posicionamento de bandejas, o elevador de descarga, a bancada de ventiladores, a bancada de evaporadores, o isolamento térmico, e os sistemas de compressores e torres de resfriamento (estes últimos não representados na figura).

Os produtos são acondicionados em caixas, as quais são acumuladas em bandejas de alimentação do túnel. Tão logo uma bandeja se forme (complete seu número de caixas), é posicionada à entrada de um dos níveis do túnel e aí é alojada, causando a movimentação de todas as bandejas do nível e a consequente expulsão de uma bandeja pela extremidade de saída do nível. A bandeja expulsa é recebida por um elevador que a posiciona ao nível da abertura por onde as caixas são transportadas para fora do túnel.

O ar é resfriado nas serpentinas, insuflado por entre os níveis por meio de uma bancada de ventiladores e canalizado de volta às serpentinas dos evaporadores. O fluido refrigerante transporta o calor roubado ao fluxo de ar aquecido para o sistema de compressores e torres de resfriamento externo ao túnel.

## **1.2 O problema de operação do túnel**

O projeto desses congeladores limita o acesso às bandejas dentro deles. As bandejas de um nível são retiradas necessariamente na mesma ordem em que são alimentadas ao nível. Essa dificuldade de acesso torna-se problemática quando o túnel está sujeito a alimentação por bandejas de diferentes *perfis térmicos* (capacidade térmica, geometria, constantes de condução, etc). Passam então a ocorrer situações em que as bandejas com tempo de exposição completo não estão acessíveis para retirada: as bandejas ainda não condicionadas bloqueiam a saída das já condicionadas. Em tais situações, a introdução de uma bandeja no túnel força a retirada de uma bandeja com tempo de exposição ainda insuficiente para o condicionamento. Isso dá origem a filas de bandejas

para entrada no túnel. A manutenção de filas de bandejas a carregar no túnel, no entanto, é inconveniente, pois, assim como a exposição insuficiente, a exposição tardia também compromete a qualidade do produto.

Finalmente, se o produto é do tipo a ser *resfriado* a exposição excessiva também é prejudicial, pois o congelamento destrói permanentemente propriedades desejáveis da superfície do produto. Com isso o produto tem de ser comercializado como *congelado*.

Túneis de congelamento estão no fim do processo de produção de produtos altamente perecíveis. Quando um túnel representa um gargalo do processo isso causa transtornos à produção que podem até interrompê-la. Uma solução paliativa comum em sistemas sobrecarregados é o retrabalho de caixas subcongeladas ao fim do período de produção.

Um congelador *de gavetas* não apresenta limitações de acesso a bandejas, porém, certamente exige sistemas de carga e descarga mais complexos e mais espaço interno para a manipulação das bandejas e ventilação, tornando-se mais caro e menos econômico que um túnel de níveis de mesmo espaço útil. A opção pela padronização do perfil térmico das caixas como alternativa para evitar o problema de bloqueio nos túneis, quando não inviável tecnologicamente, é contra indicada, face à moderna necessidade de diversificação da produção.

Túneis são equipamentos caros, que ocupam espaço considerável, e cujos consumo de energia e manutenção os tornam custosos. Por outro lado, qualidade de produto, conservação de energia, flexibilidade de produção, produtividade, redução do custo de equipamentos, entre outras, são preocupações bastante atuais da indústria mundial, que vive um processo de globalização e competição crescentes. As colocações acima fazem, então, ver os inconvenientes da operação pouco eficiente desses equipamentos. De fato, hoje as empresas convivem com um certo nível de sacrifício da qualidade do produto ou com um superdimensionamento da capacidade de condicionamento instalada ou - graças a uma utilização pouco eficiente do equipamento - com ambos problemas.

Para possibilitar uma operação mais eficiente de túneis de congelamento de níveis, vêm sendo postos à disposição das indústrias túneis mais versáteis. Estes túneis têm

sistemas de formação de bandejas que permitem a uniformização das caixas de cada bandeja quanto ao perfil térmico, e CLP's (Controles Lógicos Programáveis) que suportam a especialização de níveis a perfil térmico. Nesses equipamentos cada correia transportadora do sistema de carga conduz caixas de perfis térmicos idênticos ou aproximados (Fig 1.1). Não se permite a formação de bandejas com caixas originárias de mais de uma correia. Um certo número de níveis é reservado para cada tipo de bandeja, possibilitando, por exemplo, a utilização simultânea do túnel para congelamento e resfriamento.

Apenas em poucos casos essa solução é completa, pois normalmente a oscilação do fluxo de caixas de cada perfil térmico impede um ajuste eficiente do número de níveis dedicados a cada perfil. Além disso, o número de níveis limita o número de perfis com que se pode trabalhar.

Problemas análogos aos descritos acima são encontrados também em indústrias que fazem uso de fornos para tratamento térmico de peças metálicas, cozimento de alimentos e 'cura' de produtos cerâmicos. A indústria siderúrgica fornece um bom exemplo: as curvas de aquecimento prescritas para lingotes e a necessidade de economia de energia tornam o problema de reaquecimento de placas (lingotes) análogo ao de resfriamento de alimentos [Me92].

Claramente, a abordagem desses problemas também é importante para fabricantes de congeladores, estufas e fornos industriais. A relaxação do problema para congeladores de gavetas se relaciona, inclusive, com problemas práticos de áreas não industriais, tais como o projeto de circuitos integrados VLSI (Very Large Scale Integrated) [SL93] e o processamento em tempo real de sinais de satélites [Na92].

### **1.3 Objetivo do trabalho e apanhado das seções**

Nesse trabalho nos propomos a desenvolver formas eficientes de operação de um túnel de níveis genérico alimentado com bandejas de produtos a congelar de perfis

térmicos distintos. O modelo dinâmico (em que a carga não é completamente conhecida de antemão) é o mais realista para este problema, porém, o modelo estático (em que o instante de chegada das bandejas de produtos e o tempo de exposição necessário para seu condicionamento são dados) permite uma primeira abordagem muito interessante e proveitosa, que embasa a abordagem do problema dinâmico.

No capítulo 2 nos ocupamos da formulação matemática do problema estático de operação do túnel de congelamento de níveis. Definimos simplificações de modelagem que tornam o problema tratável sem prejudicar a aplicabilidade das suas abordagens. Daí considerarmos a restrição ao emprego de filas, por exemplo, com isso eliminando um aspecto combinatorial do problema. São formulados problemas envolvendo congeladores de estrutura mais simples que o túnel de níveis, bem como versões sujeitas a restrições ora à rejeição, ora ao subcongelamento de bandejas.

Apresentamos, então, o levantamento bibliográfico. Nele não nos foi possível localizar estudos sobre os modelos do túnel simples e do túnel de níveis. Restrições análogas às *restrições de acesso* só aparecem relacionadas à teoria de *filas em série*. A maior parte dos trabalhos utiliza a teoria de grafos intervalares. As referências a modelos dinâmicos são muito raras, o que justifica a colocação desse levantamento no capítulo que trata do problema estático.

No desenvolvimento teórico introduzimos algoritmos exatos para algumas das relaxações formuladas e criticamos rapidamente várias possibilidades de abordagem do problema estático. Discutimos, por exemplo, a adequação da estrutura desse problema à aplicação de busca tabu, *simulated annealing*, algoritmos genéticos, etc.

No capítulo 3 cedemos à conveniência da abordagem do problema dinâmico através da busca de políticas de operação gulosas. Com o auxílio da simulação de sistemas e animação, várias políticas que dispensam o conhecimento prévio completo da carga são formuladas. Definimos aí o conceito de *encadeamento* de bandejas, central no trabalho.

Em seguida realizamos um estudo de caso sobre um túnel de níveis da FRIGOBRÁS (Companhia Brasil de Frigoríficos), unidade da SADIA de Toledo-PR. Testamos as várias políticas no cenário original do caso e em cenários hipotéticos nele

baseados. Os tempos de rodada e a comparação entre os desempenhos mostraram a viabilidade e os ganhos da aplicação de algumas dessas políticas na prática.

No capítulo 4 ressaltamos o papel do uso da animação e do conceito de encadeamento na obtenção de boas políticas. Fazemos, também, uma crítica das hipóteses do modelo de túnel usado e uma avaliação de direções interessantes para novos trabalhos.

O apêndice A traz a listagem do modelo em GAMS do problema do túnel de níveis e o apêndice B contém modelos em equações diferenciais dos processos de transferência de calor que ocorrem no túnel.



# Capítulo 2

## O PROBLEMA ESTÁTICO

Nesse capítulo nos ocupamos da formulação matemática do problema estático de operação do túnel de congelamento de níveis. Modelos progressivamente mais complexos de congeladores são descritos até chegarmos ao túnel de níveis. Quatro problemas são enunciados com base num modelo estático-determinístico para a carga. Definimos formas de representação de soluções de exemplares desses problemas. A hipótese de problema estático e os modelos de congeladores mais simples são úteis para o levantamento bibliográfico e para a o desenvolvimento teórico. Esse desenvolvimento permitirá a determinação de limites inferiores para as soluções de exemplares do problema mais geral: o problema dinâmico do túnel de congelamento de níveis.

### 2.1 O problema do congelador

Primeiramente enunciamos o problema para um congelador genérico: Ao longo de um dia de operação, um congelador de uma fábrica de produtos alimentícios recebe uma carga de  $n$  bandejas de produtos a congelar. Cada bandeja é formada por um número fixo de caixas de produtos do mesmo tipo, o que define o *tipo* da bandeja. Caixas de tipos diferentes têm as mesmas dimensões físicas mas diferentes perfis térmicos. Assim, bandejas de tipos diferentes tomam o mesmo espaço de congelador, mas demandam diferentes tempos de exposição para o completo congelamento.

O espaço disponível no congelador é limitado. O problema do operador do congelador é decidir, para cada bandeja, se ela deve, ao chegar, ser colocada no congelador ou ser rejeitada e desviada para outro congelador qualquer. Não é permitido reter bandejas em fila para posterior carregamento. Por vezes, o operador pode decidir

retirar do congelador uma bandeja ainda não congelada para dar lugar a uma bandeja recém chegada. O objetivo da operação do congelador é minimizar o número de rejeitadas e subcongeladas totalizado ao fim do dia. Em outras palavras, maximizar o número de bandejas completamente congeladas pelo congelador. O tempo consumido pelo elevador para carregar uma bandeja é desprezível. São conhecidos de antemão os instantes de chegada das bandejas candidatas a carregarem o congelador, assim como os tempos de exposição necessários para o completo congelamento de cada uma. No início do período de carregamento o conteúdo do congelador, remanescente do dia anterior, está completamente congelado. As bandejas que permanecem no congelador ao fim do período de carregamento são dadas como congeladas pois só serão retiradas do congelador no dia seguinte.

A dificuldade deste problema depende da forma construtiva do congelador em questão. Identificamos, em seguida, quatro problemas em função dessas formas construtivas e discutimos as relações entre eles.

### **P1 - Congelador simples.**

O congelador dispõe de apenas uma gaveta com espaço para acondicionar uma bandeja de produto por vez.

Podemos representar a solução de um exemplar do problema P1 através de um vetor  $S=(S_j)$  de tamanho  $n$  onde:

$$S_j = \begin{cases} 0 & \text{se a bandeja } j \text{ é rejeitada.} \\ 1 & \text{se a bandeja } j \text{ é aceita.} \end{cases}$$

Segundo  $S=[1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ .. \ 1 \ 0]$ , por exemplo, a primeira bandeja a chegar é colocada no congelador, a segunda é rejeitada, a terceira é colocada e assim por diante.

### **P2 - Congelador de gavetas.**

O congelador dispõe de  $G$  gavetas, cada uma com espaço para acondicionar uma bandeja de produto por vez. O acesso às gavetas é direto, ou seja, é possível carregar ou descarregar cada gaveta sem ter de acessar o conteúdo das outras.

A solução de um exemplar do problema P2 pode ser representada através de um vetor  $S=(S_j)$  de tamanho  $n$  cujos elementos correspondem à numeração das gavetas (1..G) ou a '0' (zero), no caso de rejeição.

$$S_j = \begin{cases} 0 & \text{se a bandeja } j \text{ é rejeitada.} \\ k & \text{se a bandeja } j \text{ é colocada na gaveta } k. \end{cases}$$

Segundo  $S=[3 \ 5 \ 0 \ 4 \ 4 \ 0 \ 2 \ 6 \ 3 \ .. \ 1 \ 0]$ , por exemplo, a primeira bandeja é destinada à gaveta nº 3, a segunda à gaveta nº 5, a terceira é rejeitada, e assim por diante.

Este tipo de problema é uma generalização de P1. Aqui, além de tomar decisões do tipo aceita-ou-rejeita o operador também deve definir em que gaveta uma bandeja eventualmente aceita deve ser colocada.

### **P3 - Túnel de congelamento simples.**

O congelador tem a forma de um túnel. As bandejas são alimentadas por uma extremidade e retiradas pela outra. O túnel dispõe de  $V$  vagas para acondicionar as bandejas. Quando uma bandeja é empurrada para dentro do túnel, ela força a movimentação de todas as que nele já ocupam vagas. A bandeja que ocupe a vaga na extremidade de saída do túnel é, assim, expulsa dele.

Não se pode acessar diretamente as bandejas que estejam em posições intermediárias à entrada e à saída do túnel. A esta característica da operação de túneis chamaremos de *restrição de acesso*.

Assim como para P1, podemos representar a solução de um exemplar do problema P3 através de um vetor  $S=(S_j)$  de tamanho  $n$  cujos elementos são 0's e 1's.

$$S_j = \begin{cases} 0 & \text{se a bandeja } j \text{ é rejeitada.} \\ 1 & \text{se a bandeja } j \text{ é aceita.} \end{cases}$$

Segundo  $S=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ .. \ 1 \ 0]$ , por exemplo, as quatro primeiras bandejas são colocadas no congelador, a quinta é rejeitada e assim por diante.

Nesse tipo de problema as decisões são novamente do tipo aceita-ou-rejeita. Aqui porém, a complexidade é maior do que em P1: O fato de se ter, a todo instante, várias bandejas com restrição de acesso dentro do túnel exige decisões mais integradas no tempo.

#### **P4 - Túnel de congelamento de níveis.**

Este congelador corresponde a uma bancada de túneis simples idênticos trabalhando em paralelo. Cada nível corresponde a um túnel simples de  $V$  vagas. Os  $N$  níveis compartilham o mesmo sistema de carga e descarga.

A solução de um exemplar do problema P4 pode ser representada por de um vetor  $S=(S_j)$  de tamanho  $n$  cujos elementos correspondem à numeração dos níveis do congelador ( $1..N$ ) ou a '0', no caso de rejeição.

$$S_j = \begin{cases} 0 & \text{se a bandeja } j \text{ é rejeitada.} \\ k & \text{se a bandeja } j \text{ é colocada no nível } k. \end{cases}$$

Em  $S=[8 \ 0 \ 2 \ 4 \ 3 \ 2 \ 2 \ 1 \ 7 \ .. \ 0 \ 3]$ , por exemplo, a primeira bandeja é destinada ao nível 8, a segunda é rejeitada, a terceira é destinada ao nível 2, e assim por diante.

Aqui os aspectos que geram dificuldades nos problemas P2 e P3 se somam. É necessário definir, de forma integrada, 'se' e 'onde' se deve colocar cada bandeja.

Este é o problema estático do túnel de congelamento de níveis: o mais geral dos problemas apresentados neste capítulo. Exemplos de P2, por exemplo, podem ser vistos como exemplos de P4 em que cada um dos  $N$  níveis possui vaga para apenas uma bandeja.

## **2.2 Representação de soluções de exemplares**

As formas de representação de soluções de exemplares descritas até agora são naturais e nos permitem avaliar com facilidade o tamanho do espaço solução para os problemas  $((N+1)^n)$ . Há porém uma outra forma de representação de soluções de exemplares destes problemas que é mais geral e conveniente para fins de manipulação

matemática. Ela consiste em registrar, em um vetor  $S=(S_j)$ , a ordem de saída das bandejas do congelador. Para tanto é necessário numerar as bandejas segundo a ordem de chegada, incluindo as que já estão no congelador no início do período de carregamento (a  $j$ -ésima bandeja a chegar recebe o número  $j+C$ ). Quando uma bandeja é rejeitada, seu número deve ser registrado no vetor como se ela tivesse saído do congelador. Dessa forma, seu número coincide com sua posição no vetor acrescida da capacidade  $C$  do congelador. Para P1 a capacidade  $C$  é dada por  $C=1$ ; para P2, por  $C=G$ ; para P3, por  $C=V$ ; para P4, por  $C=N \times V$ .

$$S_j = \begin{cases} j+C & \text{se a bandeja de número } j+C \text{ é rejeitada.} \\ k < j+C & \text{se a bandeja de número } j+C \text{ expulsa a bandeja de número } k. \end{cases}$$

Para um congelador de capacidade  $C=10$ , por exemplo,  $S=[3 \ 4 \ 9 \ 14 \ 8 \ 6 \ 2 \ 17 \ 13]$  é uma solução em que as bandejas de números 3, 4 e 9, remanescentes do dia anterior, são as 3 primeiras a sair, expulsas respectivamente pelas bandejas de números 11, 12 e 13, que são as 3 primeiras bandejas do atual período de carregamento a chegar. A bandeja 14 é rejeitada, já que seu número aparece na quarta posição de  $S$  e o congelador tem capacidade  $C=10$  bandejas.

Essa forma de representação pode ser melhorada se acrescentarmos ao vetor  $S$  (em ordem crescente, por simplicidade) os números das bandejas que permanecem no congelador ao fim do período de carregamento. Assim, temos todas as bandejas do problema representadas em  $S$ : as  $C$  remanescentes do período anterior e as  $n$  do período atual de carregamento.

O vetor  $S$  abaixo representa uma solução de um exemplar de P4 envolvendo uma carga de 12 bandejas e um túnel de 2 níveis de duas vagas. No início do período o túnel tem em seu primeiro nível as bandejas 1 e 2 (1 na saída); e no segundo nível as bandejas 3 e 4 (3 na saída).

$$S=[3 \ 1 \ 2 \ 6 \ 7 \ 4 \ \underline{11} \ 5 \ 8 \ 9 \ 10 \ 12]$$

No vetor  $S$ , os números em negrito representam bandejas que já estavam no congelador no início do período de carregamento; os números em itálico representam as

bandejas que permanecem no congelador após o período de carregamento; os números sublinhados representam as bandejas que são rejeitadas. Nesta solução a bandeja 3 é expulsa pela bandeja 5, que é a primeira a chegar no período, a 1 é expulsa pela 6; a 2 é expulsa pela 7; a 6 é expulsa pela 8; a 7 é expulsa pela 9; a 4 é expulsa pela 10; a 11 é rejeitada (expulsa por si mesma); e a 5 é expulsa pela 12.

Passaremos a empregar esta a forma para representar soluções de exemplares destes problemas.

### 2.3 Exemplar do problema estático (P4)

Para esclarecer o que foi colocado e para fins de exemplificação numérica ao longo do restante do texto formulamos um exemplar de P4.

NÚMERO DA BANDEJA <i>B</i>	INSTANTE DE CHEGADA <i>T<sub>B</sub></i>	INSTANTE DE CONGELAMENTO <i>F<sub>B</sub></i>
7	3:00	8:00
8	4:00	6:15
9	4:15	7:30
10	4:45	7:00
11	5:00	9:00
12	5:45	9:45
13	6:15	9:15
14	7:00	10:15
15	7:30	11:00
16	8:00	12:30
17	9:00	12:15
18	9:15	13:00
19	9:45	14:15
20	10:15	15:00
21	11:00	16:00
22	12:15	15:00
23	12:30	15:15
24	13:00	16:30
25	14:15	15:45
26	15:00	17:00

Tabela 2.3.1: Carga do exemplar

*Exemplo:* Seja uma carga de  $n=20$  bandejas. Seja também um túnel de  $N=3$  níveis em que cada nível tem capacidade para  $V=2$  bandejas. Chamemos de instante de fim de congelamento  $F_B$  de uma bandeja  $B$  à soma do instante de chegada  $T_B$  com o tempo de exposição necessário para o total congelamento  $E_B$ .

O instante de chegada e o instante de fim de congelamento de cada bandeja é dado na tabela 2.3.1. As bandejas da carga são numeradas a partir de 7 porque as bandejas de 1 a 6 são as remanescentes do período anterior: as bandejas 1 e 2 ocupam o nível 1 (1 na saída), 3 e 4 ocupam o nível 2 (3 na saída) e 5 e 6 ocupam o nível 3 (5 na saída).

$S=[5\ 3\ 1\ 6\ 2\ 4\ 9\ 14\ 8\ 7\ 11\ 10\ 12\ 13\ 21\ 17\ 23\ 15\ 19\ 20\ 16\ 18\ 22\ 24\ 25\ 26]$  é uma solução viável e também pode ser escrita como  $S=[3\ 2\ 1\ 3\ 1\ 2\ 1\ 0\ 2\ 3\ 1\ 3\ 2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ 2\ 1]$ . Ela corresponde à ordem de entrada das bandejas nos níveis dada pela tabela 2.3.2.

NÍVEL	ORDEM DE ENTRADA NO NÍVEL							
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
1	9	11	13	17	20	22	26	-
2	8	12	15	19	24	25	-	-
3	7	10	16	18	-	-	-	-

Tabela 2.3.2: Solução não ótima do exemplar

Nessa solução as bandejas 14, 21 e 23 são rejeitadas, as bandejas 8 e 9 são subcongeladas e as bandejas 10, 13 e 15 são supercongeladas.

Já em  $S^*=[5\ 3\ 1\ 4\ 2\ 6\ 8\ 10\ 9\ 7\ 11\ 13\ 12\ 14\ 15\ 17\ 16\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\ 23\ 24\ 25\ 26]$  todas as bandejas são congeladas (solução ótima). Essa solução pode ser escrita em termos de níveis destino como  $S^*=[3\ 2\ 1\ 2\ 1\ 3\ 2\ 2\ 1\ 3\ 1\ 2\ 3\ 2\ 1\ 1\ 3\ 2\ 3\ 2]$ . Ela corresponde à ordem de entrada das bandejas nos níveis dada pela tabela 2.3.3.

NÍVEL	ORDEM DE ENTRADA NO NÍVEL							
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
1	9	11	15	17	21	22	-	-
2	8	10	13	14	18	20	24	26
3	7	12	16	19	23	25	-	-

Tabela 2.3.3: Solução ótima do exemplar

## 2.4 Pesquisa bibliográfica

Não nos foi possível localizar estudos explicitamente ligados aos modelos do túnel de congelamento. As referências mais próximas tratam de modelos onde as *restrições de acesso* não aparecem. É o caso de Arkin e Silverberg, que em 'Scheduling jobs with fixed start and end times' [AS87] abordam um problema onde  $n$  tarefas devem ser executadas em  $k$  máquinas idênticas. Cada máquina só pode executar uma tarefa por vez. Cada tarefa tem instantes de início e término fixos ( $S_i$  e  $T_i$ , respectivamente). Uma vez iniciadas, as tarefas não podem ser interrompidas. Cada tarefa paga um prêmio  $W_i$  por sua execução. O objetivo é selecionar um subconjunto factível de tarefas maximizando o valor total das tarefas executadas. Os autores usam propriedades de grafos de intervalos para estabelecer um algoritmo de complexidade  $O(n^2 \log n)$ . Mostram que o problema torna-se NP-Completo quando se abandona a hipótese de máquinas idênticas e se supõe que para cada tarefa existe um subconjunto de máquinas onde ela pode ser executada. Citam trabalhos em correlatos 'interval scheduling problems' independentemente desenvolvidos por A. Kolen, J. K. Lenstra, C. Papadimitriou e J. Orlin. Este problema, para  $W_i=1$ , é equivalente a P2 com a restrição de que nenhuma bandeja possa ser subcongelada.

Nawijn em 'Minimum loss scheduling problems' [Na92] generaliza os resultados de Arkin e Silverberg para máquinas não idênticas. Os instantes de chegada das tarefas são conhecidos ( $T_i$ ), mas o tempo de processamento e o valor de cada tarefa depende da máquina  $r$  em que é executado ( $P_{ir}$  e  $W_{ir}$ ). Estuda também o caso de um sistema de atraso de perda com máquina única: Ao chegar, a tarefa alimenta uma fila de tarefas de tamanho limitado. Se não houver espaço na fila, a tarefa é rejeitada. Uma única máquina atende a fila. O objetivo é maximizar o número de tarefas executadas e, para tanto, tarefas podem ser rejeitadas apesar de haver espaço na fila. Observa que problemas deste tipo, na prática, aparecem em situações em que tarefas têm chegadas programadas e demanda de serviço conhecida (estacionamento de aeronaves, por exemplo). As tarefas devem ser realizadas em estações com capacidade de estocagem limitada. Pretende-se prevenir fluxo excessivo, que force o uso de estações ou espaços de estocagem auxiliares: fenômeno bem conhecido



de sistemas de movimentação de materiais. Diz que este tipo de problema tem recebido pouca atenção da literatura.

Gavril em 'Algorithms for maximum  $k$ -coloring and  $k$ -covering of transitive graphs' [Ga87] apresenta algoritmos polinomiais para o problema de coloração do máximo número de vértices de um grafo transitivo usando  $k$ -cores e para o problema de cobertura do máximo número de vértices de um grafo transitivo com  $k$  cliques disjuntos. Um *clique* é um subconjunto de vértices adjacentes dois a dois. Um grafo transitivo é um grafo orientado em que a existência dos arcos  $(u,v)$  e  $(v,w)$  implica na existência do arco  $(u,w)$ . O problema de cobertura com cliques é equivalente ao problema de se congelar completamente o maior número de bandejas dispondo-se de um congelador de  $k$  gavetas. Como já dissemos, Silverberg estendeu este problema para o caso em que as bandejas têm valores distintos e nem todos os níveis podem receber cada tarefa. Nawijn foi além e considerou níveis não relacionados, com valores de bandejas dependente do nível em que é processada.

Em 'Maximum  $k$ -colorings and  $k$ -coverings of weighted transitive graphs with applications' [SL93], Sarrafzadeh e Lou desenvolvem um novo algoritmo para o problema de cobertura por  $k$  cliques com nós ponderados. Baseiam-se, para isso, numa solução de Edmonds e Karp para um problema de fluxo em redes. Resolvem, então, problemas em aberto em projeto de circuitos integrados VLSI, teoria de grafos e geometria computacional.

Tovey, Weiss e Wilson em 'Minimum spillage sequencing' [TW88] abordam um problema que surge no processamento de dados em tempo real. Vários satélites e outros equipamentos sensores coletam dados para processamento em um equipamento central. A central aciona a transmissão de dados de cada equipamento. Os dados, em pacotes de tamanho  $L_i$ , são transferidos a uma razão  $R_i$ . O receptor dispõe de uma memória de tamanho limitado. O processador processa os dados da memória a uma taxa  $R$ . Uma vez iniciada a transmissão de dados, o transmissor não pode mais interrompê-la. Se o volume de dados recebido supera a capacidade de armazenagem e processamento do sistema receptor-processador, então dados serão perdidos. Busca-se minimizar a fração perdida da

informação total enviada. A relação com *bin-packing* é citada e a versão dinâmica do problema também é tratada. O início da transmissão do pacote para a central (correspondente ao instante de chegada de uma bandeja no congelador) é incógnita no modelo de Tovey. Em outras palavras: o trabalho de Tovey não permite uma analogia direta com o problema do túnel pois o instante de chegada da bandeja não é a incógnita do nosso problema.

Encontramos alguns pontos de contato entre o problema do túnel de congelamento e os modelos da teoria de *filas em série* [AL95]. Um desses pontos são as restrições de acesso. Porém, no problema do túnel de congelamento uma bandeja deve permanecer um tempo determinado dentro do túnel para congelar, não importa quanto tempo ela se detém em cada posição do nível em que é colocada. Nos modelos de filas em série, porém, cada tarefa (bandeja) deve se deter um certo tempo em cada servidor (posição), e não há um arranjo de conjuntos de servidores em paralelo que seja equivalente aos níveis dos túneis.

Em nenhum dos trabalhos acima a interrupção de tarefas (subcongelamento de bandejas) é permitida e, como é comum em problemas de escalonamento, pequenas modificações nos modelos levam a problemas NP-Difíceis (vide [AS87] e [AL95]).

## 2.5 Resultados teóricos

Nesta seção apresentamos os algoritmos exatos desenvolvidos para o problema P2 e suas versões com restrição à rejeição e ao subcongelamento de bandejas. Para o caso de subcongelamento não permitido, como vimos, já são conhecidos algoritmos exatos [Ga87] [AS87][SL93]. Nosso algoritmo para este caso de P2 é novo e de complexidade inferior aos da literatura. Resolvemos também a versão dinâmica de P2 e apresentamos teoremas que se aplicam aos outros problemas descritos na seção 2.3. Os resultados desta seção nos permitirão calcular limites inferiores para soluções do problema P4 dinâmico e avaliar a influência das restrições de acesso na capacidade efetiva dos túneis de congelamento de níveis.

Começando pelo problema P1, é fácil ver que a seguinte política de alimentação do congelador simples maximiza o número de bandejas completamente congeladas:

*A cada chegada de bandeja, se o instante de fim do congelamento da bandeja que estiver no congelador for posterior ao da bandeja que chegar, colocar a bandeja nova no congelador. Caso contrário, rejeitá-la.*

Esta é uma estratégia gulosa que se justifica pelo fato de que uma rejeição e um subcongelamento influem de forma igualmente negativa no objetivo final de se congelar completamente o maior número de bandejas possível. Não se deve rejeitar uma bandeja quando o congelador estiver disponível. Neste caso é preferível arriscar o subcongelamento a rejeitá-la de antemão. Na disputa pelo congelador entre uma bandeja nova e uma ainda não completamente congelada deve prevalecer a que congelará mais cedo, já que rejeição e subcongelamento são igualmente indesejáveis.

Note-se que esta política dispensa o conhecimento prévio do número de bandejas da carga do período e seus instantes de chegada e fim de congelamento. Resolve, portanto, também o problema P1 dinâmico.

Esta política deriva de uma mais geral, válida para o caso do congelador de gavetas e que apresentaremos e provaremos a seguir.

Consideremos agora o problema P2. No instante de chegada de uma nova bandeja  $B$ , seja  $B'$  a bandeja cujo instante de fim do congelamento é o mais tardio dentre todos os das bandejas do congelador.

**Teorema 1:** *A política abaixo maximiza o número de bandejas congeladas para o problema P2 com restrição a rejeição de bandejas.*

*Para cada bandeja  $B$  que chegar:*

- 1- Colocar  $B$  numa gaveta cuja bandeja já esteja congelada, se houver.*
- 2- Caso não haja, colocar  $B$  na gaveta ocupada por  $B'$ .*

**Prova:** Seja  $S$  a solução dada pela aplicação da política acima a um exemplar de P2 com restrição a rejeição de bandejas. Seja  $S^*$  uma solução ótima para este exemplar, idêntica a  $S$  até a posição  $p$ . Mostraremos que se pode construir, a partir de  $S^*$ , uma solução ótima  $S^{**}$  idêntica a  $S$  até a posição  $p+1$ .

Seja  $a$  o número da bandeja na posição  $p+1$  de  $S^*$  e  $b$  a correspondente à mesma posição de  $S$ . Para obter  $S^{**}$  basta que em  $S^*$  permutemos as posições de  $a$  e  $b$ .

$$S = [s_1 \dots s_p \ b \dots\dots\dots a\dots]$$

$$S^* = [s_1 \dots s_p \ a \dots\dots b \dots\dots]$$

$$S^{**} = [s_1 \dots s_p \ b \dots\dots a \dots\dots]$$

Temos então que:

1 - Se  $b$  sai congelada em  $S^{**}$ , a permutação certamente não diminui o número de bandejas completamente congeladas. Neste caso, como em  $S^{**}$   $a$  sai mais tarde e  $b$  sai mais cedo que em  $S^*$ ,  $S^{**}$  é ótima.

2 - Se  $b$  sai subcongelada em  $S^{**}$ , então  $b$  sai subcongelada também em  $S$ . Conclui-se então, pela política empregada em  $S$ , que  $a$  sai subcongelada em  $S^*$ . Assim:

2.1 - Se  $a$  sai congelada em  $S^{**}$ ,  $S^{**}$  é ótima.

2.2 - Se  $a$  sai subcongelada em  $S^{**}$ , novamente de acordo com a política empregada em  $S$ , todas as bandejas que estão no congelador imediatamente após a retirada de  $b$  em  $S$  (em particular  $a$ ) têm instante de fim de congelamento igual ou anterior ao de  $b$ . Assim,  $b$  sai subcongelada em  $S^*$  e  $S^{**}$  é ótima também neste caso.

Note-se que também aqui a política dispensa o conhecimento prévio do número de bandejas da carga do período e seus instantes de chegada e fim de congelamento. Portanto, ela resolve também o problema P2 dinâmico com restrição ao subcongelamento.

**Teorema 2:** *A política abaixo maximiza o número de bandejas congeladas para o problema P2.*

*Para cada bandeja B que chegar:*

*1- Colocar B numa gaveta cuja bandeja já esteja congelada, se houver.*

*2- Caso não haja:*

*2.1- Se  $F_{B'} > F_B$ , colocar B na gaveta ocupada por B'.*

*2.2- Se  $F_{B'} \leq F_B$ , rejeitar B.*

**Prova:** Análoga à do teorema 1: Seja  $S$  a solução dada pela aplicação da política acima a um exemplar de P2. Seja  $S^*$  uma solução ótima para este exemplar, idêntica a  $S$  até a posição  $p$ . Mostraremos que se pode construir, a partir de  $S^*$ , uma solução ótima  $S^{*'}$  idêntica a  $S$  até a posição  $p+1$ .

Seja  $a$  o número da bandeja na posição  $p+1$  de  $S^*$  e  $b$  a correspondente à mesma posição de  $S$ . Para obter  $S^{*'}$  basta que em  $S^*$  permutemos as posições de  $a$  e  $b$ .

$$S = [s_1 \dots s_p \ b \dots\dots\dots a \dots]$$

$$S^* = [s_1 \dots s_p \ a \dots\dots b \dots\dots\dots]$$

$$S^{*'} = [s_1 \dots s_p \ b \dots\dots a \dots\dots\dots]$$

Temos então que:

1 - Se  $b$  sai congelada em  $S^{*'}$ , a permutação certamente não diminui o número de bandejas completamente congeladas. Neste caso, como em  $S^{*'}$   $a$  sai mais tarde e  $b$  sai mais cedo que em  $S^*$ ,  $S^{*'}$  é ótima.

2 - Se  $b$  não sai congelada (é rejeitada ou subcongelada) em  $S^{*'}$ , então  $b$  não sai congelada também em  $S$ . Conclui-se então, pela política empregada em  $S$ , que  $a$  não sai congelada em  $S^*$ . Assim:

2.1 - Se  $a$  sai congelada em  $S^{*'}$ ,  $S^{*'}$  é ótima.

2.2 - Se  $a$  sai subcongelada em  $S^{*'}$ , novamente de acordo com a política empregada em  $S$ , todas as bandejas que estão no congelador imediatamente após a retirada de  $b$  em  $S$  (em particular  $a$ ) têm instante de fim de congelamento igual ou anterior ao de  $b$ . Assim,  $b$  sai subcongelada em  $S^*$  e  $S^{*'}$  é ótima também neste caso.

Note-se que aqui, como no caso de P1 e P2 restrito quanto a rejeição, a política dispensa o conhecimento prévio do número de bandejas da carga do período e seus instantes de chegada e fim de congelamento. Portanto, esta política resolve também o problema P2 dinâmico.

O teorema e corolário a seguir são enunciados para o problema P4, mas aplicam-se também a seus derivados P1, P2 e P3. Eles também podem ser estendidos com facilidade para o caso em que cada bandeja tem um valor  $W_B$  e o objetivo é maximizar o valor total das bandejas congeladas.

**Teorema 3:** *Para todo exemplar do problema P4 existe uma solução ótima isenta de subcongelamentos.*

**Prova:** Seja  $S^*$  uma solução ótima para um exemplar do problema P4. Seja  $b$  a bandeja de menor número que, segundo  $S^*$ , deixa o congelador subcongelada. Mostraremos que se pode construir, a partir de  $S^*$ , uma solução ótima  $S^{*'}$  idêntica a  $S^*$  até a chegada de  $b$ , mas na qual  $b$  é rejeitada.

Seja  $a$  a bandeja expulsa com a chegada de  $b$  segundo  $S^*$ . Para obtermos  $S^{*'}$  basta que em  $S^*$  coloquemos  $b$  na posição de  $a$ , deslocando de uma posição a bandeja  $a$  e todas as bandejas que aparecem entre  $a$  e  $b$ .

$$S^* = [s_1 .. a ..... c b d ..... s_{n+C}]$$

$$S^{*'} = [s_1 .. b a ... .. c d ..... s_{n+C}]$$

Desta forma obtemos uma solução  $S^{*'}$  em que  $b$  é rejeitada ao invés de subcongelada. Nenhuma das outras bandejas deixa o congelador mais cedo em  $S^{*'}$  que em  $S^*$ , o que garante a otimalidade de  $S^{*'}$ .

**Corolário:** *A solução ótima de um exemplar do problema P4 restrito quanto a subcongelamento é solução ótima também do problema irrestrito.*

**Prova:** O número de bandejas congeladas no problema irrestrito é um limite superior para o número no problema restrito. A prova do teorema 3 fornece uma forma recursiva de transformarmos uma solução ótima para um problema P4 em uma solução também ótima, mas sem subcongelamentos. Portanto, se um algoritmo é exato para P4, associado ao processo recursivo descrito acima, ele resolve também o problema P4 com restrição a subcongelamento.

No caso de P1 e P2 (simplificações de P4) a política descrita no teorema 2 é exata. Assim, para obtermos soluções para P1 e P2 com restrição a subcongelamento devemos primeiro aplicar a política do teorema 2 para obter a solução  $S^*$  do problema não restrito. Depois, aplicar a transformação descrita na prova do teorema 3 tantas vezes quanto necessário para conseguir uma solução isenta de subcongelamentos. Esses algoritmos são de ordem  $O(n)$ , ao passo que o de Arkin e Silverberg é de ordem  $O(n^2 \log n)$ .

Note que este procedimento exige o prévio conhecimento da carga e dos instantes de chegada e fim de congelamento de cada bandeja. Portanto ele não resolve o problema P2 dinâmico com restrição ao subcongelamento.

## **2.6 Alternativas de abordagem**

Nesta seção levantamos algumas possibilidades de abordagem do problema estático (P4) e as criticamos rapidamente. As críticas são de duas naturezas: viabilidade de solução de exemplares grandes (1000 bandejas) e viabilidade de extensão para a situação prática mais comum, em que o perfil da carga não é completamente conhecido de antemão (P4 dinâmico).

### **2.6.1 Fluxo em redes**

No trabalho de Arkin e Silverberg [AS87] encontra-se uma formulação de P2 em programação binária com a extensão para bandejas de diferentes prêmios  $W_B$  por

congelamento. Os autores utilizam a teoria de grafos intervalares para montar uma matriz de restrições em que cada linha corresponde a um *clique maximal*. Mostram que a matriz é totalmente unimodular e concluem que o problema é polinomial. A certa altura do texto o problema é formulado como um problema de fluxo de custo mínimo num grafo em que cada arco corresponde a um *clique maximal*. Nesta seção apresentamos uma formulação alternativa mais simples e direta do mesmo problema como um problema de fluxo de custo máximo. Com isso pretendemos evidenciar que essa abordagem é muito conveniente quando o congelador não apresenta restrições de acesso, mas sua extensão aos casos com este tipo de restrição é improvável.

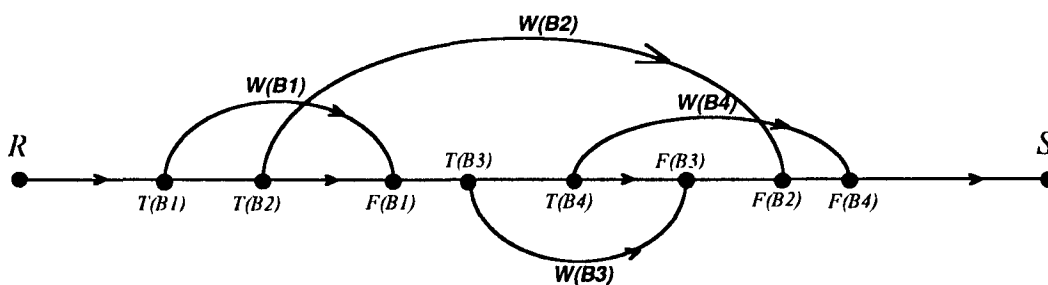


Figura 2.6.1: Grafo do problema do refrigerador de gavetas (P2)

Seja um trecho da reta real orientado de  $R$  para  $S$  como na figura acima.  $R$  corresponde ao instante de início do período de carga e  $S$  a um instante posterior ao mais tardio fim de congelamento das bandejas da carga. Para cada bandeja  $B$  construa um arco orientado do ponto da reta correspondente ao instante de chegada da bandeja ( $T_B$ ) para o ponto correspondente ao instante de congelamento da bandeja ( $F_B$ ). Limite a capacidade destes arcos a uma (1) unidade de fluxo e associe a cada um deles um de custo igual ao prêmio  $W_B$  pago pelo congelamento da sua bandeja. Associe aos arcos correspondentes a intervalos da reta um custo nulo e capacidade ilimitada.

Seja  $R$  fonte e  $S$  o sumidouro de  $G$  unidades de fluxo, onde  $G$  é o número de gavetas em P2. Pretende-se determinar o fluxo de custo máximo de  $R$  para  $S$ . A passagem de uma unidade de fluxo pelo arco correspondente a uma bandeja significa que esta



bandeja é congelada em uma das  $G$  gavetas. Dessa forma todo vetor de fluxo inteiro corresponde a uma política factível de operação do congelador.

Por simplicidade, para formular o problema de fluxo supomos que a cada par  $(i,j)$  corresponde no máximo um arco capacitado. Definimos o conjunto de nós do grafo acima  $I = \bigcup_B \{T_B, F_B\} \cup \{R, S\}$  e o conjunto de arcos  $J = J_B \cup J_I$  onde  $J_B = \{(T_B, F_B), \forall B\}$  está associado às bandejas e  $J_I = \{(I_1, I_2) .. (I_{k-1}, I_k)\}$  forma um caminho que percorre todos os nós de  $R$  para  $S$  ao longo do segmento  $RS$ ; isto é,  $R=I_1 < I_2 < .. < I_k=S$ . Definimos também a demanda  $b_i$  de cada nó e o peso  $W_{ij}$  de cada arco:

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq R, S \\ G & \text{se } i = R \\ -G & \text{se } i = S \end{cases} \quad W_{i,j} = \begin{cases} W_B & \text{se } (i,j) \in J_B \\ 0 & \text{se } (i,j) \in J_I \end{cases}$$

Tomando  $X_{ij}$  como o valor do fluxo no arco  $(i,j)$  temos o seguinte PL:

$$\text{Maximizar } \sum_{(i,j) \in J} W_{ij} X_{ij}$$

Sujeito a

$$\sum_{j:(j,i) \in J} X_{ji} - \sum_{j:(i,j) \in J} X_{ij} = b_i \quad i \in I$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i,j) \in J$$

$$X_{ij} \leq 1 \quad (i,j) \in J_B$$

Este problema é clássico e para resolvê-lo dispomos de algoritmos polinomiais bastante especializados. Arkin e Silverberg mostram, porém, que basta considerarmos gavetas não idênticas (no sentido de que algumas bandejas não podem ser colocadas em certas gavetas) para que o problema acima se torne NP-Difícil. Isso mostra que a abordagem do problema P4 diretamente por essa via é improvável.

## 2.6.2 Programação dinâmica

Nesta seção mostramos que o problema P3 (túnel simples) pode ser modelado com a técnica de programação dinâmica.

Considere uma penalidade  $r_B$  para a rejeição da bandeja  $B$  e uma penalidade  $q_B$  para seu subcongelamento (em P3  $r_B=q_B=1$ ). Deseja-se determinar uma regra de aceitação/rejeição da bandeja que minimize a penalização total. Supõe-se que as bandejas de 1 a  $C$  já estão congeladas dentro do túnel, e que a primeira bandeja a chegar é a de número  $C+1$ . Temos, então, a PD:

$$\text{Minimizar } P_{C+n}(y_1 \dots y_C)$$

sujeito, para  $k = C+1, C+2, \dots, C+n$ , a:

$$\text{se } y_C \neq k, P_k(y_1 \dots y_C) = P_{k-1}(y_1 \dots y_C) + r_k$$

$$\text{se } y_C = k, P_k(y_1 \dots y_C) = \min_{\substack{y_0 = y_1 - 1 \text{ se } y_1 \leq C+1 \\ y_0 = C \text{ se } y_0 < y_1 \text{ se } y_1 > C+1}} P_{k-1}(y_0 \dots y_{C-1}) + \begin{cases} 0 & \text{se } F_{y_0} \leq T_k \\ q_{y_0} & \text{se } F_{y_0} > T_k \end{cases}$$

com a condição inicial  $P_C(y_1 \dots y_C) = 0$

Onde, a cada instante  $T_k$ , as variáveis  $y_1 \dots y_C$  representam os índices das bandejas que estão no túnel (a configuração do túnel). Assim,  $1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_C \leq k$ .

Há que se notar que as penalizações  $q_B$  e  $r_B$  podem diferir de bandeja para bandeja e não devem ser necessariamente fixas para cada bandeja. Pode-se, por exemplo, fazer  $q_B = F_B - T_k$ , para penalizar o subcongelamento de acordo com o seu nível.

A extensão desta formulação para o problema P4 é bastante direta. Os problemas P3 e P4 em suas versões dinâmicas, porém, não podem ser abordados desta maneira.

### 2.6.3 Programação inteira

O problema P4 pode ser formulado como programação binária. A carta de Gantt abaixo representa a relação entre os eventos que envolvem bandejas *excludentes*, ou seja, bandejas colocadas no mesmo nível e tais que a entrada de uma causa a expulsão da outra. Neste exemplo, consideramos um túnel de 10 vagas por nível ( $V=10$ ). Note que a 11ª bandeja a entrar no nível expulsa a 1ª e depois é expulsa pela 21ª.

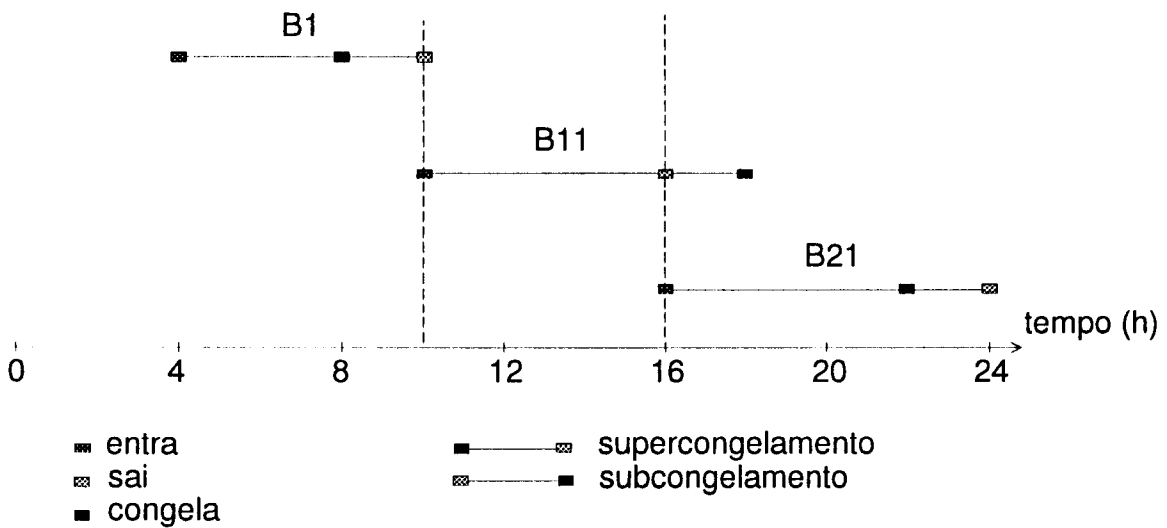


Gráfico 2.6.1: Bandejas excludentes

Este gráfico revela uma importante propriedade do modelo estático-determinístico sem filas: os instantes de entrada no túnel e de possível congelamento ficam definidos. Duas grandezas chave do problema são funções destes números: o supercongelamento e o subcongelamento das bandejas.

Para formularmos o problema de programação binária definimos a variável binária  $X(B,L,O)$ , que vale 1 se a bandeja  $B$  entra no nível  $L$  e é sucedida por outras  $O$  bandejas até o fim do período de carga. Caso contrário,  $X(B,L,O)$  vale 0. Assim, se  $X(12,7,2)=1$  então a bandeja 12 entra no nível 7 e, até o fim do período de carga, mais duas bandejas entram no nível 7. Também são necessários os parâmetros:

$T(B)$ - Instante de chegada da bandeja  $B$ .

$F(B)$ - Instante de fim de congelamento da bandeja  $B$ .

$Q(L)$ - Estimativa para o máximo de bandejas que pode ser colocado no nível  $L$ .

O problema P4 com restrição a subcongelamento pode então ser formulado como segue.

Maximizar  $\sum_{B,L,O} X_{B,L,O}$

Sujeito a

$$\sum_{L,O} X_{B,L,O} \leq 1 \quad \text{para todo } B$$

$$\sum_B X_{B,L,O} \leq 1 \quad \text{para todo } L \text{ e } O \leq Q(L)$$

$$\sum_B X_{B,L,O} \cdot T_B \geq \sum_B X_{B,L,(O+1)} \cdot T_B \quad \text{para todo } L \text{ e } O \leq Q(L) - 1$$

$$\sum_B X_{B,L,O} \cdot T_B \geq \sum_B X_{B,L,(O+V)} \cdot F_B \quad \text{para todo } L \text{ e } O \leq Q(L) - V$$

$$X_{B,L,O} = 0 \text{ ou } 1$$

Maximiza-se o total de bandejas colocadas no túnel. A primeira restrição significa que uma bandeja não pode ser colocada mais de uma vez no túnel. A segunda restrição significa que um nível não pode receber mais de uma bandeja por vez. A terceira restrição significa que não há filas: as bandejas de cada nível são ordenadas por ordem de chegada. A quarta restrição significa que nenhuma bandeja pode sair subcongelada do túnel: O instante de congelamento de uma bandeja é anterior ao instante de chegada de sua excludente.

Se fizermos  $Q(L)=n$ , um número desnecessário de variáveis e equações será criado. Um conjunto de estimativas mais justas e que não restringem o conjunto solução é dado por  $Q(L)=\lceil n/L \rceil$ . Também é desnecessário definir  $X(B,L,O)$  quando  $B+O > n$ .

Uma grande vantagem das abordagens por programação inteira é a facilidade para a representação de diferentes aspectos do problema. Funções objetivo complexas são implementadas facilmente. Podemos, por exemplo, estender o modelo acima para considerar prêmios diferenciados ( $W_B$ ) para o congelamento de cada bandeja  $B$ . Também é possível incluir restrições quanto ao número de bandejas a rejeitar e quanto aos níveis de supercongelamento ou de subcongelamento aceitáveis. Dessa forma pode-se tratar também o problema de resfriamento de produtos.

As dificuldades com abordagens via programação inteira vêm da variabilidade do tempo de solução e da dificuldade em resolver problemas suficientemente grandes para a aplicação.

No modelo TUNEL.GMS (apêndice A) o exemplar da seção 2.3 é formulado em GAMS. Busca-se maximizar o número de bandejas congeladas. Experimentando com esse modelo verificamos uma instabilidade muito grande do tempo de rodada em função das características dos dados de entrada. Exemplos *justos* (demanda próxima da capacidade) tendem a restringir o tamanho da árvore de pesquisa. Exemplos mais *folgados* (carga bastante abaixo da capacidade) são de difícil solução, pois oferecem várias alternativas de pesquisa ao *branch-and-bound*. O exemplar da seção 2.3 foi resolvido em 33 minutos de CPU usando-se o GAMS\_OSL numa estação de trabalho RISC6000. Quando reduzimos o instante de congelamento de cada bandeja em meia hora, porém, mesmo após hora e meia de CPU com incumbente ótimo (20 bandejas) não se obtém sequer uma solução inteira. Quando não usamos incumbente, neste mesmo tempo de CPU o OSL chega apenas a uma solução inteira não ótima em que 16 bandejas são congeladas.

Apesar das dimensões modestas em comparação com problemas reais, o modelo do apêndice já apresenta 484 variáveis binárias. Isso se deve ao fato de que nessa formulação o número de variáveis e restrições explode com o número de bandejas, embora seja muito pouco sensível ao número de vagas por nível. O número de variáveis e o de restrições também aumenta, mas de forma progressivamente mais lenta com o número de níveis. Num problema de túnel simples com carga de 1000 bandejas, por exemplo, teríamos quase 500000 variáveis binárias e um número de restrições da mesma ordem.

Conclui-se, assim, que essa formulação não seria viável para problemas desse tamanho mesmo que sua matriz fosse totalmente unimodular (o que não é).

Por fim, essa abordagem não oferece perspectiva de solução para o problema dinâmico associado. O conhecimento prévio dos instantes de chegada e congelamento de cada bandeja é indispensável para a formulação do problema.

#### 2.6.4 Metaheurísticas

As formas de representação de soluções aqui desenvolvidas para os problemas P4 são perfeitamente adequadas à aplicação das várias técnicas de enumeração implícita. Pode-se, por exemplo, usar soluções de problemas P2 como limites inferiores numa estrutura de *branch-and-bound*. Também se pode usar metaheurísticas tais como algoritmos genéticos, busca tabu e *simulated annealing*.

Para desenvolver algoritmos genéticos é necessário que se possa implementar com facilidade as operações de *crossing-over* e as mutações de soluções. A representação de soluções através de vetores cujos elementos correspondem aos números dos níveis de destino das bandejas (a primeira forma apresentada para P4) facilita essa tarefa. Nessa representação todo vetor corresponde a uma solução viável. Não há dificuldades também com a definição de uma função de mérito de fácil avaliação.

Para desenvolver algoritmos de busca tabu e *simulated annealing* o essencial é que se possa definir uma métrica do conjunto de soluções tal que soluções *vizinhas* tendam a ter desempenhos semelhantes. Para tanto, é muito útil a representação de soluções através de vetores cujos elementos correspondem aos números das bandejas que saem do túnel (a forma utilizada nas provas dos teoremas). A partir daí, podemos usar a norma euclideana, a norma infinito ou a norma 1 para definir vizinhanças. Outra possibilidade é usar as diferenças de posição das bandejas nos vetores para definir a distância entre duas soluções. A soma dos módulos das diferenças de posição, por exemplo, tende a ser pequena se as

soluções são parecidas. Deve-se atentar, porém, para o fato de que nessa representação nem todo vetor corresponde a uma solução viável.

Essas abordagens são possíveis. O tamanho dos problemas práticos, porém, torna desafiante o desenvolvimento de algoritmos de sucesso. O nosso estudo de caso, por exemplo, envolve um túnel de 18 níveis e uma carga de cerca de 1100 bandejas. Isso representa um espaço solução de cardinalidade  $19^{1100}$ .

Estas abordagens também não oferecem perspectivas de solução para o problema dinâmico.

# Capítulo 3

## O PROBLEMA DINÂMICO

Neste ponto devemos fazer uma crítica da hipótese do conhecimento prévio e completo do perfil da carga (problema estático). Essa hipótese foi adotada na definição de P4 como forma de facilitar a apresentação e reflexão sobre o problema dinâmico a partir do problema estático. Ela, porém, é claramente não realista. Torna-se improvável, assim, que possamos usar qualquer das abordagens estáticas descritas na seção 2.6 para obter um algoritmo de aplicação viável. Qualquer fuga de uma previsão inicial para a carga do congelador forçaria o recálculo da solução, o que tomaria possivelmente mais tempo do que o disponível.

Por outro lado, a seção 2.5, relativa a resultados teóricos, mostrou que para os problemas P2 e P1 existem políticas de carregamento ótimas que resolvem suas versões dinâmicas. Essas políticas são algoritmos gulosos na dimensão das bandejas, e é justamente esta característica que os capacita a resolver o problema dinâmico derivado da retirada da hipótese estática sobre a carga. Esse é um dos pontos que encoraja a busca de políticas também para o problema P4 dinâmico. Outra observação importante é que, como uma política é um conjunto de regras simples, a implementação delas na prática costuma não apresentar dificuldades. Boas políticas tendem a ser facilmente programáveis em CLPs, adaptáveis às alterações de estado corriqueiras do sistema e robustas o suficiente para amortecer os efeitos de alterações imprevistas.

A simulação de sistemas com animação foi utilizada para desenvolvimento e teste das políticas. A possibilidade de representação de diferentes aspectos do sistema real é quase ilimitada quando se usa simulação. Além disso, esse problema permite uma visualização privilegiada do comportamento do sistema sujeito a uma política de operação. Pudemos usar uma matriz bidimensional para representar o túnel na tela do computador.



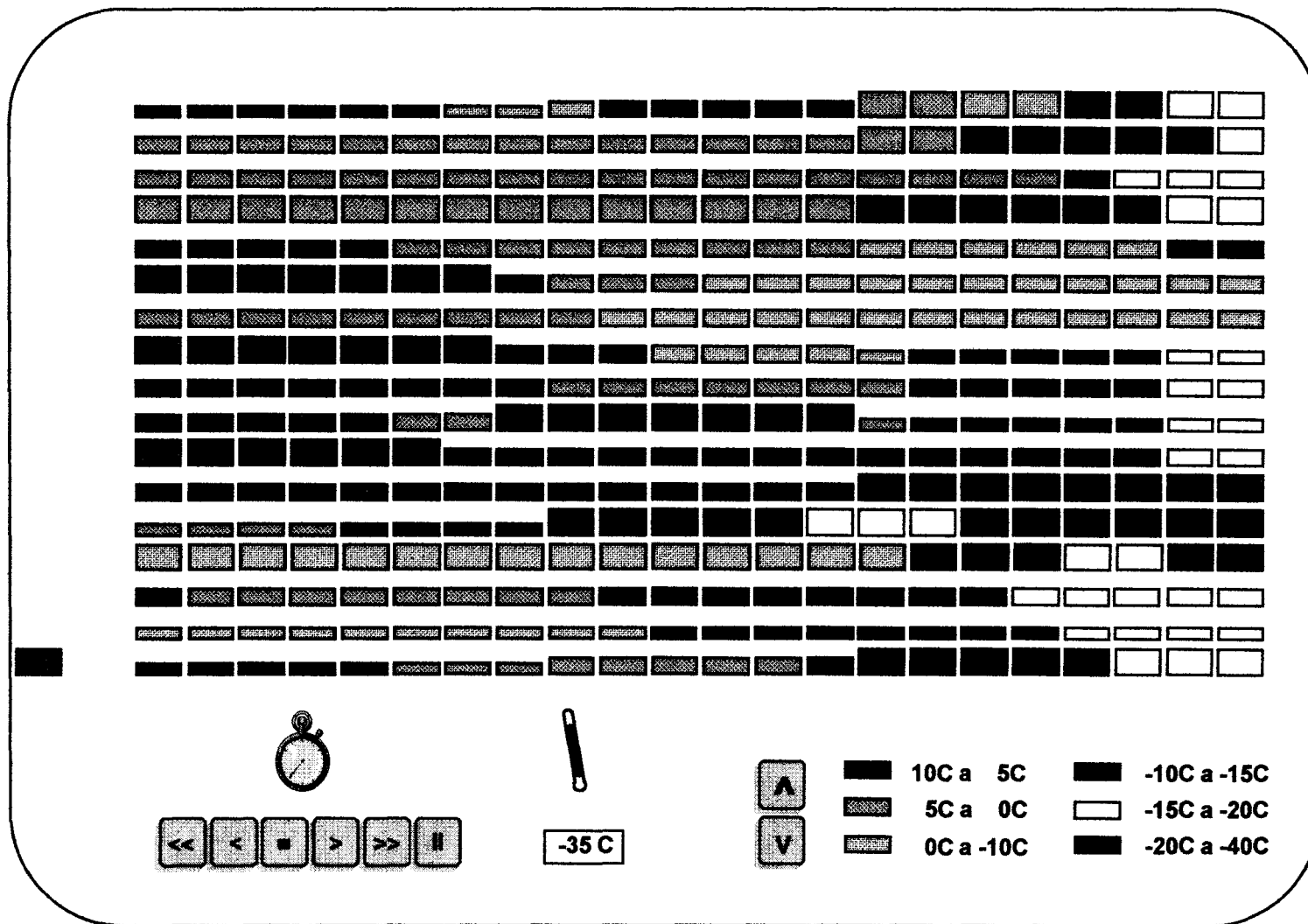


Figura 3.1: Tela do simulador-animador (estudo)

Representamos as bandejas em tela por retângulos cujas cores codificavam ora a temperatura da bandeja, ora o instante de chegada, ora o tipo, de acordo com comandos de teclado dados à medida que a simulação transcorre. Os padrões de evolução das regiões coloridas na matriz podem ser associados a aspectos desejáveis ou não da política. A figura 3.1 mostra um estudo de tela feito para o simulador-animador que desenvolvemos em Pascal para esse trabalho.

O texto que segue apresenta as principais políticas desenvolvidas. As informações sobre programação de paradas de carregamento e distribuição porcentual da carga por tipos de bandeja (fração da carga que é do tipo 1, do tipo 2, do tipo 3) costumam ser razoavelmente confiáveis na prática. Por isso essas informações são supostas conhecidas em algumas das políticas.

As políticas foram desenvolvidas e testadas com base num caso de tamanho considerável (1100 bandejas). Os seus desempenhos foram comparados entre si e balizados por cálculos de limites inferiores que o desenvolvimento teórico apresentado atrás nos permitiu. Os resultados foram bastante satisfatórios e são apresentados na seção 3.3, após a descrição do caso estudado na seção 3.2.

### **3.1 Políticas de carregamento**

No instante de chegada (ou formação) da bandeja  $B$  chamaremos de *disponível* todo nível cuja bandeja na posição de saída já esteja congelada. Também definimos:

$L_q$  - o nível cuja bandeja na posição de saída é a de instante de congelamento mais tardio dentre todas as que ocupam posições de saída.

$L_f$  - o nível cuja bandeja na posição de saída é a de instante de congelamento mais adiantado dentre todas as que ocupam posições de saída.

$L_{qf}$  - o nível cuja bandeja na posição de saída é a de instante de congelamento mais tardio dentre todas as que ocupam posições de saída e bloqueiam alguma bandeja congelada.

Com isso podemos descrever as políticas do elenco a ser testado. Algumas políticas são implementadas de forma a oferecer referenciais para a comparação, como é o caso da política de operação atual (política 1) e das políticas ótimas para o problema relaxado (políticas 14 e 15). Outras são usadas para avaliar o efeito da introdução de uma ou outra característica de operação tal como a consideração prioritária das bandejas mais congeladas para a saída (política 6). Por fim, há aquelas que foram desenvolvidas com o fim de terem o melhor desempenho possível (políticas 10 a 13, por exemplo).

Outra subdivisão das políticas diz respeito às restrições que assumem. Temos políticas que não aceitam rejeição de bandejas, as que não aceitam a eliminação de bandejas subcongeladas e as que aceitam tanto rejeição quanto eliminação de subcongeladas. Pode-se dizer, porém, que todas visam a redução do total de bandejas rejeitadas e subcongeladas.

**Política 1:** Esta é uma política muito simples. Consiste em alimentar sequencial e ciclicamente os níveis sem tomar em consideração o estado de congelamento da bandeja a sair do túnel ou o tipo da bandeja a entrar. Quando uma bandeja chega, é colocada no nível seguinte ao que recebeu a última bandeja. O primeiro nível é considerado como o seguinte ao último, fechando assim o ciclo. Esta política não permite rejeições de bandejas.

Ela é implementada para fornecer termos de comparação, dada sua frequente utilização na prática. É adequada para o caso em que as bandejas são todas do mesmo tipo e a rejeição não é permitida, mas mesmo nesse caso pode ser superada por políticas menos míopes.

**Política 2:** Uma alteração interessante da política 1 consiste em pular a vez dos níveis que tenham bandejas não congeladas na saída. Começa-se a pesquisa pelo nível que recebeu a última bandeja até encontrar um que esteja disponível (com bandeja já congelada na saída). No caso de não haver nível disponível, rejeita-se a bandeja. Esta política não permite o subcongelamento de bandejas. Ela é muito vulnerável a travamentos de nível, ou seja, a bloqueios prolongados da saída do nível por bandeja de elevado tempo de congelamento.

**Política 3:** Esta é a política de especialização de níveis com rejeição. Consiste em reservar um conjunto de níveis para cada tipo de bandeja. Para definir o nível onde colocar uma bandeja de determinado tipo começa-se a pesquisa pelo nível de seu conjunto que recebeu a última bandeja, prosseguindo até encontrar, no conjunto, um nível que esteja disponível (com bandeja já congelada na saída). No caso de não haver nível disponível no conjunto correspondente ao tipo da bandeja, deve-se tentar colocar essa bandeja em um nível de um conjunto reservado a um tipo que exija um tempo de exposição imediatamente maior. Esgotadas essas possibilidades, rejeita-se a bandeja.

Para fazer uma reserva de níveis razoavelmente eficiente é necessário que se conheça a proporção entre os números de bandejas de cada tipo na carga. Nos testes que fizemos na análise de caso usamos tentativa e erro para conseguir uma boa distribuição de níveis a tipos. Nos cenários simulados usamos as proporções 2:12:4 para determinar o número de níveis especializados respectivamente a bandejas dos tipos 1, 2 e 3. De fato, a oscilação da proporção entre os tipos ao longo do dia é um dos maiores complicadores dessa política. Não se pode aplicá-la caso o número de tipos seja da mesma ordem do número de níveis. Esta política também não permite o subcongelamento de bandejas.

**Política 4:** Esta é a política de *encadeamento* de bandejas. Uma idéia de *encadeamento* é colocar, tanto quanto possível, as bandejas nos níveis em ordem crescente de instante de fim de congelamento. Pode-se assim, prevenir travamentos de níveis. Essa idéia pode ser aperfeiçoada para usar a informação sobre paradas programadas de carga (intervalos entre sub-períodos de carga). Como nenhuma bandeja deixa o túnel durante uma parada de carga, podemos, para todos os efeitos, considerar um fim de congelamento que ocorra durante uma parada como ocorrendo ao fim dessa parada. Dessa forma conseguimos mais flexibilidade de escolha do nível onde colocar uma bandeja sem desrespeitar o *encadeamento*.

De forma geral, chamaremos de *encadeamento* a todo processo de decisão que use estimativas dos instantes de saída das bandejas (como o fim de congelamento no processo acima) para definir o nível onde colocar uma bandeja quando esta chega ao congelador.

Nossa proposta para este trabalho é que não se dependa, para essa estimação, de mais informações sobre o perfil futuro da carga do que a programação de paradas e a distribuição percentual da carga por tipos de bandejas. Isso exclui do escopo as formas recursivas de estimação (uso de resultados de uma simulação como estimativas em outra).

A fórmula de estimação por nós utilizada baseia-se na suposição de que todas as bandejas que permanecerão no nível após a colocação da nova bandeja sairão dele tão logo alcancem a posição de saída e estejam congeladas, mas que a bandeja a entrar será expulsa tão logo alcance a posição de saída, mesmo que não esteja congelada.

Portanto, a estimativa para o instante de saída da próxima bandeja a entrar no nível L é o maior instante de congelamento das bandejas do nível, exceto a da saída. Se este instante pertence a uma parada programada, considera-se o instante de retomada de carga como estimativa. Note-se que o tipo da bandeja a entrar não influi na previsão do seu instante de saída.

A política de encadeamento puro consiste em escolher, entre os níveis disponíveis, aquele que leve à menor estimativa de subcongelamento da bandeja a entrar. No caso de não haver nível disponível que leve a estimativa de subcongelamento, busca-se aquele disponível que leve à menor estimativa de supercongelamento. Caso nenhum nível esteja disponível, todos os níveis serão considerados disponíveis para efeito de aplicação da política.

Uma sutileza que permite melhorar o desempenho desta política é, quando a bandeja for do tipo de mais fácil congelamento, buscar-se o nível que leve à maior estimativa de subcongelamento ao invés daquele que leve à menor. Com isso, essas bandejas são melhor distribuídas pelos níveis, o que é desejável, pois elas jamais bloqueiam congeladas.

Esta política não permite a rejeição de bandejas.

**Política 5:** Consiste em se aplicar a política 4, a menos que ela decida pela expulsão de uma bandeja que ainda não tenha completado pelo menos metade de seu tempo de exposição ideal. Neste caso rejeita-se a bandeja candidata a entrar no túnel.

**Política 6:** Consiste em se empregar a política de encadeamento descrita acima sempre que houver ao menos um nível disponível. Quando não, colocar no nível  $L_f$ , de forma a expulsar a bandeja de mais próximo instante de congelamento dentre as que estejam em posição de saída.

**Política 7:** Consiste em se empregar a política de encadeamento sempre que houver ao menos um nível disponível. Quando não, colocar no nível  $L_q$ , de forma a expulsar a bandeja de mais tardio instante de congelamento dentre as que estejam em posição de saída.

**Política 8:** Consiste em se aplicar a política 7, a menos que ela decida pela expulsão de uma bandeja que ainda não tenha completado pelo menos metade de seu tempo de exposição ideal. Neste caso rejeita-se a bandeja candidata a entrar no túnel.

**Política 9:** Consiste em se empregar a política de encadeamento sempre que houver ao menos um nível disponível. Quando não, rejeitar a nova bandeja.

**Política 10:** Consiste em se empregar a política de encadeamento sempre que houver ao menos um nível disponível.

Se não houver nível disponível e a nova bandeja for de difícil congelamento (tipo 1, no estudo de caso), rejeitar a bandeja.

Se não houver nível disponível, a nova bandeja não for de difícil congelamento e se em algum nível houver bandeja congelada bloqueada por bandeja em posição de saída, colocar a nova bandeja no nível  $L_{qf}$ . Dessa forma expulsando a bandeja de mais tardio instante de congelamento dentre as que estejam bloqueando congeladas. Esgotadas essas possibilidades, rejeita-se a bandeja.

Esta política permite tanto o subcongelamento quanto a rejeição de bandejas.

**Política 11:** Consiste em se aplicar a política 10, a menos que ela decida pela expulsão de uma bandeja que ainda não tenha completado pelo menos metade de seu tempo de exposição ideal. Neste caso rejeita-se a bandeja candidata a entrar no túnel.

**Política 12:** Essa política usa especialização de níveis e encadeamento combinados. Consiste em se empregar a política 3 (especialização de níveis) alterada de forma que, no caso de não haver nível disponível no conjunto correspondente ao tipo da

bandeja, deve-se tentar colocar essa bandeja em um nível de um conjunto reservado a um tipo que exija um tempo de exposição imediatamente *menor* que o seu. Se ela decidir pela rejeição da bandeja, aplica-se alternativamente a política 10 (de encadeamento).

Esta política permite tanto o subcongelamento quanto a rejeição de bandejas.

**Política 13:** Consiste em se aplicar a política 12, a menos que ela decida pela expulsão de uma bandeja que ainda não tenha completado pelo menos metade de seu tempo de exposição ideal. Neste caso rejeita-se a bandeja candidata a entrar no túnel.

**Política 14:** Esta política maximiza o número de bandejas congeladas para o problema P4 relaxado (P2) com restrição a rejeição de bandejas. Ela já foi descrita no teorema 1.

**Política 15:** Esta política maximiza o número de bandejas congeladas para o problema P4 relaxado (P2). Ela também já foi descrita atrás (teorema 2).

## 3.2 Estudo de caso

### 3.2.1 O túnel Recrusul

O túnel que estudamos está instalado na FRIGOBRAS em Toledo-PR desde 1980. É um RECRUSUL VRT 9900 de 25m de comprimento por 7,1m de largura máxima e 8,5m de altura. Possui 18 níveis (1 de retorno), todos com 20 vagas para bandejas. Foi projetado para congelar frangos acondicionados em caixas abertas de 12Kg a 15Kg cada, com 9 caixas por bandeja. Considerando-se uma temperatura média de entrada de +10°C e média de saída de -20°C, sua produção é de até 9900kg/h, equivalentes a 815.000Kcal/h. A temperatura de evaporação do fluido refrigerante nas serpentinas é cerca de -45°C. A vazão de ar é de 230.000m<sup>3</sup>/h, em contracorrente com o fluxo de produto. A movimentação mecânica é realizada por um sistema hidráulico controlado por um CLP. Tempos de retenção mínimos podem ser programados individualmente para cada nível e

prioridades de nível podem ser selecionadas pelo operador de forma a sequenciar a carga dos níveis.

Nos esquemas do apêndice não há nível de retorno porque naqueles túneis as caixas deslizam sobre roletes impulsionadas por barras de aço. No caso do RECRUSUL - mais antigo - as caixas são colocadas sobre plataformas (bandejas) que, em contato entre si, impulsionam umas às outras quando do alojamento de nova bandeja no nível. O nível de retorno é uma solução para a retroalimentação de bandejas. No RECRUSUL a entrada e a saída de produtos se dá pela mesma extremidade, embora não pela mesma janela. A dinâmica de funcionamento de um túnel deste tipo é um pouco mais complexa: quando uma bandeja é expulsa de um nível pela entrada de uma bandeja com produtos ainda por congelar, ela é retroalimentada pelo nível de retorno, causando a expulsão, na extremidade por onde se alimentou a bandeja com produto *quente*, de uma bandeja congelada pelo nível de retorno. Uma vez esvaziada, essa bandeja servirá de plataforma para as próximas caixas de produto a entrar no túnel.

### **3.2.2 A carga**

As caixas que alimentam esse túnel são todas de produtos a congelar, mas têm perfis térmicos distintos. Elas têm base de 60cm por 40cm e altura variável entre 12cm e 20cm. São justapostas em número de 9 nas bandejas pela face de 60cm de base. Apesar da previsão inicial de projeto, a maior parte dos produtos é de partes de frango, frangos inteiros são destinados a outros 2 túneis MADEFs. Isso porque as partes são acondicionadas em engradados plásticos para posterior embalagem, ao passo que o frango inteiro é acondicionado diretamente em caixas de papelão. Os engradados costumam enroscar nos roletes dos túneis MADEFs, sendo então preferível colocá-los no RECRUSUL. Os tempos de exposição necessários para congelamento das caixas (em condições ideais) são muito variáveis, entre 4:20h e 7:20h.



As bandejas são formadas pelas caixas segundo a ordem de chegada, sem homogeneização da bandeja quanto ao perfil térmico das caixas. A temperatura do produto ao entrar no túnel é de aproximadamente 10°C, graças à passagem por resfriadores *chillers* onde o frango absorve água e tem a temperatura reduzida a cerca de 4°C para posterior processamento. Este parâmetro é relativamente estável pois a temperatura do abatedouro é controlada quanto ao máximo (18°C).

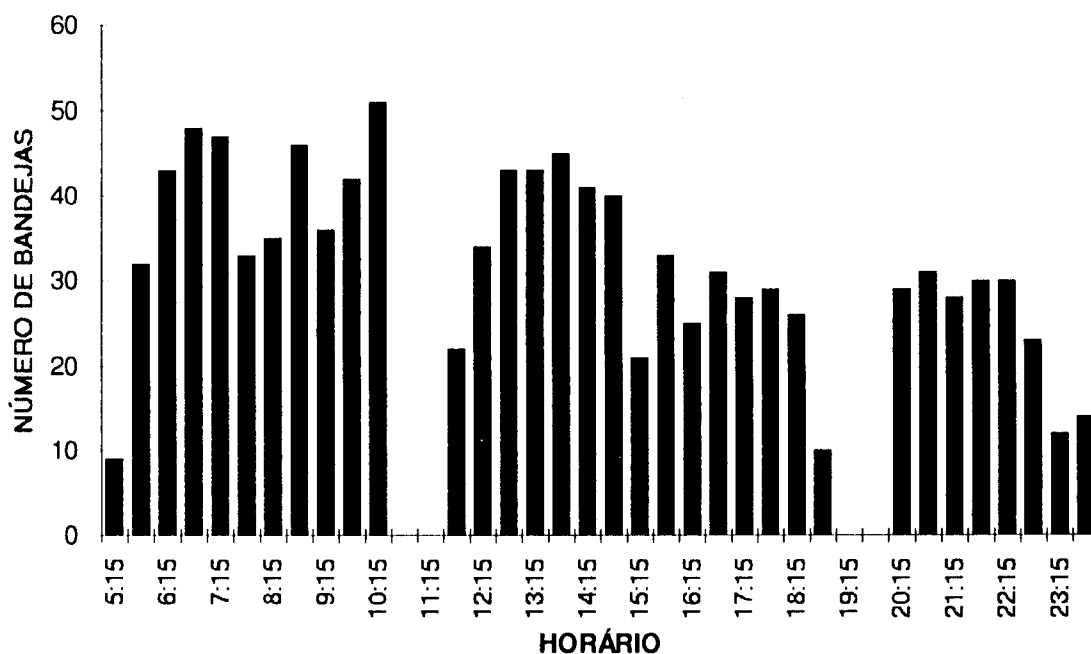


Gráfico 3.2.1: Carga total do túnel de congelamento Recrusul (estudo de caso)

### 3.2.3 Forma de operação atual

A operação do túnel é automática, comandada por um Controle-Lógico-Programável (CLP). Não há programação de tempos de retenção mínimos. Os níveis são alimentados seqüencial e ciclicamente, recebendo uma bandeja a cada ciclo.

O carregamento tem início por volta das 5:00h e finaliza por volta das 23:00h, com interrupções das 10:00h às 11:00h, 18:00 às 19:00h, e 3 paradas de 5 a 10min para descanso e troca de turno.

Cerca de 1000 bandejas são alimentadas ao túnel por dia. Como sua capacidade de alojamento é de 360 bandejas, no terço inicial de sua operação o túnel libera exclusivamente caixas produzidas no dia anterior, já perfeitamente congeladas. As bandejas colocadas no terço final não chegam a sair do túnel no mesmo dia. Ficam retidas até o reinício do período de carga no dia ou semana seguinte.

Durante a madrugada, quando não há alimentação do túnel, todos os ventiladores são desligados, bem como alguns compressores, para evitar que trabalhem em vazio. Durante este período, o túnel, cuja temperatura medida na extremidade quente chega a atingir  $-30^{\circ}\text{C}$  durante o dia, recupera esta temperatura até o nível de  $-38^{\circ}\text{C}$ ,  $-40^{\circ}\text{C}$ . Em Toledo o abate se dá nos dias úteis, por vezes avançando até o sábado.

Quando a taxa de bandejas subcongeladas produzidas pelo túnel torna-se intolerável, a providência normal é de suspender sua alimentação por 40 minutos, o que implica na suspensão do abate por período semelhante. Enquanto a taxa de subcongelados for aceitável eles são realimentados às correias transportadoras para serem retrabalhados pelo túnel. Outra causa de interrupção do abate é o acúmulo de caixas para alimentação causado por manutenção de emergência. As panes mecânicas e elétricas são frequentes e o tempo que levam para serem sanadas é bastante imprevisível.

### **3.2.4 Modelo para estudo de caso**

Em nosso modelo para estudo de caso consideramos um túnel ideal cuja temperatura do ar se mantenha inalterada ao longo do dia e em que a ventilação é perfeitamente distribuída. Assim, todas as posições do túnel têm o mesmo rendimento nas trocas de calor e este rendimento não se altera ao longo do dia. Consideramos níveis idênticos, sem retorno. Consideramos que as caixas são agrupadas em bandejas segundo seus perfis térmicos e toda bandeja é alimentada ao túnel tão logo se forme e chegue ao elevador. Desta forma não há formação de fila na entrada do túnel. Não consideramos realimentação de caixas ao túnel.

A tabela 3.2.1 traz um levantamento da carga do túnel por períodos de 30 minutos num dia representativo de 1992. Nenhuma medição mais precisa dos tempos de congelamento está disponível, por isso, nesse levantamento os produtos foram, de forma estimativa, agrupados em 3 perfis térmicos distintos: tipo1, de 7:20h para congelamento; tipo 2, de 5:00h; e tipo 3, de 4:20h.

Pode-se ver nessa tabela também o horário normal de operação e paradas do túnel. O gráfico 3.2.1 mostra a carga total do túnel para aquele dia.

HORA	TIPO1	TIPO2	TIPO3	HORA	TIPO1	TIPO2	TIPO3
5:15	1	6	2	14:45	7	26	6
5:45	6	21	4	15:15	5	14	2
6:15	6	32	4	15:45	1	27	5
6:45	10	33	4	16:15	0	21	4
7:15	8	34	3	16:45	0	27	3
7:45	4	28	1	17:15	0	24	4
8:15	7	26	2	17:45	0	23	6
8:45	7	35	3	18:15	0	19	6
9:15	6	26	4	18:45	0	8	2
9:45	9	29	4	19:15	-	-	-
10:15	8	37	4	19:45	-	-	-
10:45	-	-	-	20:15	0	24	5
11:15	-	-	-	20:45	0	23	8
11:45	3	17	1	21:15	0	20	7
12:15	5	25	4	21:45	0	21	8
12:45	6	34	2	22:15	0	23	6
13:15	6	30	6	22:45	0	18	4
13:45	7	30	7	23:15	0	8	4
14:15	8	26	6	23:45	0	8	6

Tabela 3.2.1: Carga real do túnel de congelamento Recrusul

Para testar as políticas, serão gerados exemplares do problema com base na tabela acima. Consideramos que num período de 30 minutos as bandejas se formam regularmente, com frequência determinada pela duração do período e o número de bandejas que nele se formam. O tipo de cada bandeja é estabelecido com base na probabilidade determinada pela proporção entre os números de bandejas de cada tipo naquele período.

### 3.2.5 Resultados

Nessa seção as políticas das seções 3.1 e 2.5 são testadas em 6 cenários diferentes.

O primeiro cenário corresponde à situação real levantada para o caso estudado. Um túnel de 18 níveis e 20 vagas por nível é sujeito à carga dada pela tabela 3.2.1. São gerados 1000 exemplares deste cenário. Todos têm os mesmos instantes de chegada para as bandejas, porém, o tipo da bandeja é definido aleatoriamente com base na proporção entre os tipos do sub-período de 30 minutos. Dessa forma, os exemplares têm cargas com o mesmo número total de bandejas, mas que podem diferir quanto à distribuição por tipos.

O segundo cenário corresponde a um adiantamento de 30 minutos no instante de início da primeira parada de 1h. Isso é feito alterando a carga da tabela 3.2.1 de forma a que a parada se inicie às 10:15h, a produção dos subperíodos entre 11:45h e 14:15h seja adiantada de 30 minutos e a produção do sub-período das 10:15h seja deslocada para o período das 13:15h. Isso diminui a sobrecarga do túnel no período da manhã. Para esse cenário e todos os seguintes geramos 200 exemplares.

O terceiro cenário corresponde a um acréscimo da capacidade do túnel. A carga é a mesma do cenário 1, mas consideramos 22 vagas por nível.

No quarto cenário consideramos 18 vagas por nível, para simular uma relação carga/capacidade menos favorável.

No quinto cenário consideramos uma forma alternativa de embalagem que transforma cada bandeja do tipo 1 (7:20h) em duas bandejas do tipo 3 (4:20). Com isso temos um maior número de bandejas, mas uma maior homogeneidade e uma retenção ideal média menor.

No sexto cenário consideramos um túnel de 9 níveis e 40 vagas por nível. Assim as restrições de acesso são reforçadas em relação ao primeiro cenário.

Em seguida apresentamos, para cada um dos cenários descritos acima, duas tabelas e três gráficos onde registramos o total de bandejas subcongeladas (SUB), o total de bandejas rejeitadas (REJ), a temperatura média das subcongeladas (TSUB) e a temperatura máxima das subcongeladas (TMAX). A primeira tabela de cada grupo exemplifica os resultados para um exemplar genérico. A segunda tabela e os gráficos são referentes ao total de exemplares gerados e trazem os valores médios das observações. Os gráficos trazem as medianas e os quartis das observações realizadas. Os pontos isolados nos gráficos são os que estão distantes da mediana mais de 1,5 vezes a distância entre os quartis. Escolhemos mostrar a mediana e os quartis em lugar da média e desvio padrão pois assim temos uma melhor idéia do perfil das distribuições das observações (não as supomos distribuições normais). Além disso, as tabelas mostram os valores médios com maior precisão.

#### **Cenário 1 - Caso real - Ressaltamos as seguintes observações:**

1- O desempenho das políticas de 8 a 13 é surpreendente, já que os limites inferiores representados pelas políticas 14 e 15 são soluções ótimas para o problema estático com a relaxação das restrições de acesso!

2- A média de bandejas rejeitadas ou subcongeladas com a política 1 é a muito alta.

3- A média de SUB+REJ com a política 6 é próxima da média da política 1, com a desvantagem de uma maior dispersão. As médias para TMED e TMAX, porém, são as melhores dentre as políticas que permitem subcongelamento.

4- A política de melhor desempenho em termos de SUB+REJ foi a política 10. Em média, apenas 4 bandejas foram rejeitadas ou subcongeladas a mais que o limite inferior

5- As políticas 5, 8 e 13, as quais não permitem expulsão de bandejas que não tenham completado pelo menos metade de seu tempo de permanência no túnel, mostraram melhor desempenho que suas versões sem essa restrição.

POLÍTICA	SUB+REJ	SUB	REJ	TMED	TMAX
1	137	137	0	-17	-11
2	101	0	101	-20	-20
3	77	0	77	-20	-20
4	104	65	39	-17	-9
5	110	110	0	-13	5
6	149	149	0	-18	-17
7	63	63	0	-2	7
8	58	18	40	-10	-9
9	50	0	50	-20	-20
10	50	42	8	-3	5
11	50	17	33	-10	-9
12	47	39	8	-3	5
13	47	16	31	-10	-9
14	39	39	0	4	8
15	39	31	8	3	8

Tabela 3.1: Exemplo do cenário 1

POLÍTICA	SUB+REJ	SUB	REJ	TMED	TMAX
1	136.43	136.43	0.00	-16.39	-11.42
2	89.03	0.00	89.03	-20.00	-20.00
3	70.19	0.00	70.19	-20.00	-20.00
4	97.49	97.49	0.00	-13.37	5.21
5	85.54	64.50	21.04	-16.86	-9.94
6	135.89	135.89	0.00	-18.47	-16.90
7	57.22	57.22	0.00	-0.59	6.59
8	48.57	9.69	38.88	-13.17	-12.05
9	45.52	0.00	45.52	-20.00	-20.00
10	44.84	38.05	6.79	0.70	5.76
11	45.82	7.55	38.27	-13.14	-12.12
12	45.25	38.46	6.79	-3.23	5.69
13	45.27	14.93	30.34	-10.37	-9.34
14	40.84	40.84	0.00	3.87	7.94
15	40.84	29.05	11.79	2.37	7.89

Tabela 3.2: Médias de 1000 exemplares do cenário 1

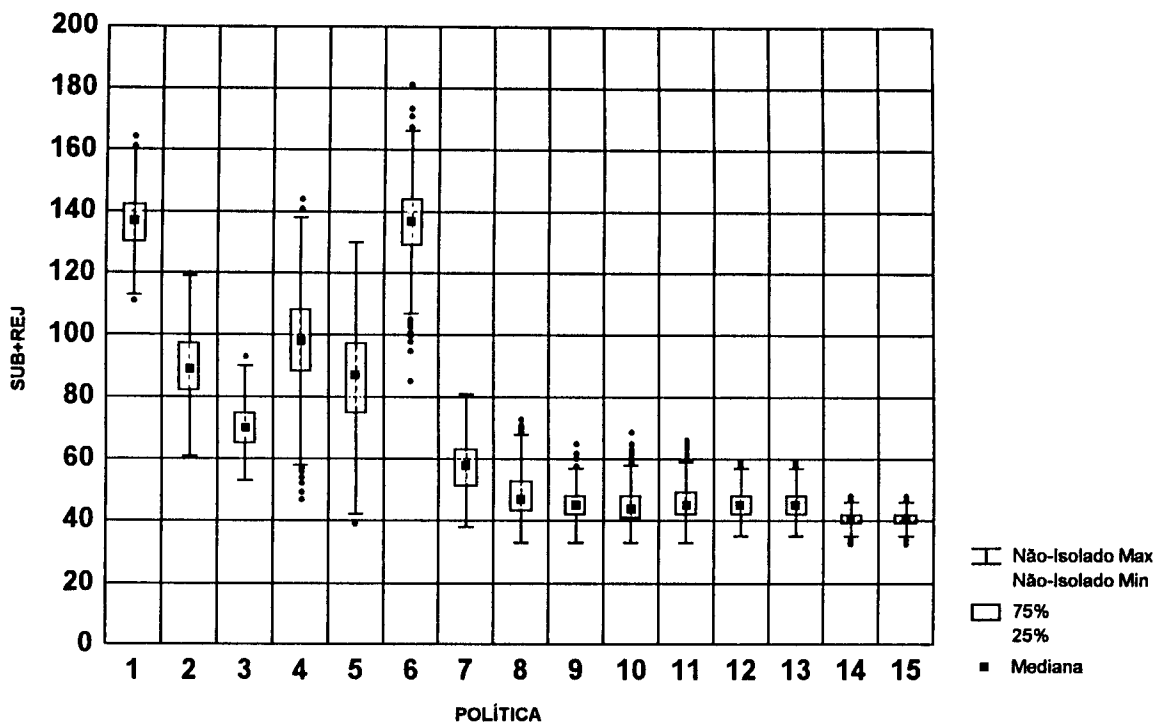


Gráfico 3.1: Número de rejeitadas ou subcongeladas no cenário 1

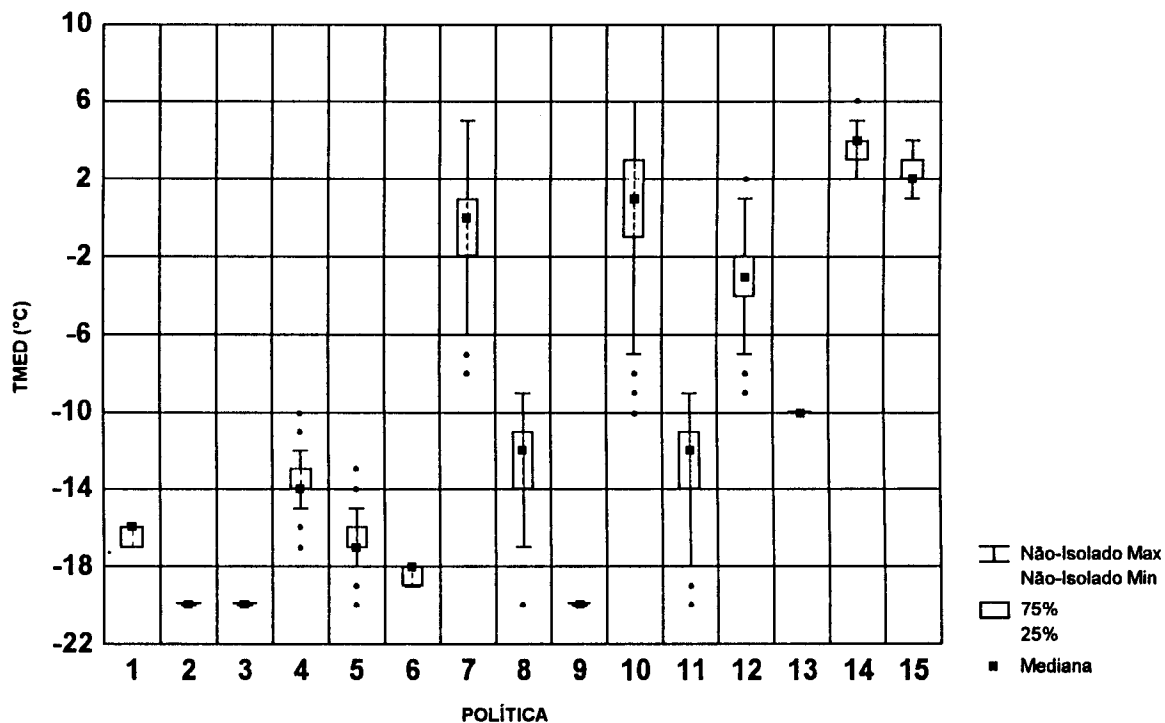


Gráfico 3.2: Temperatura média das subcongeladas no cenário 1

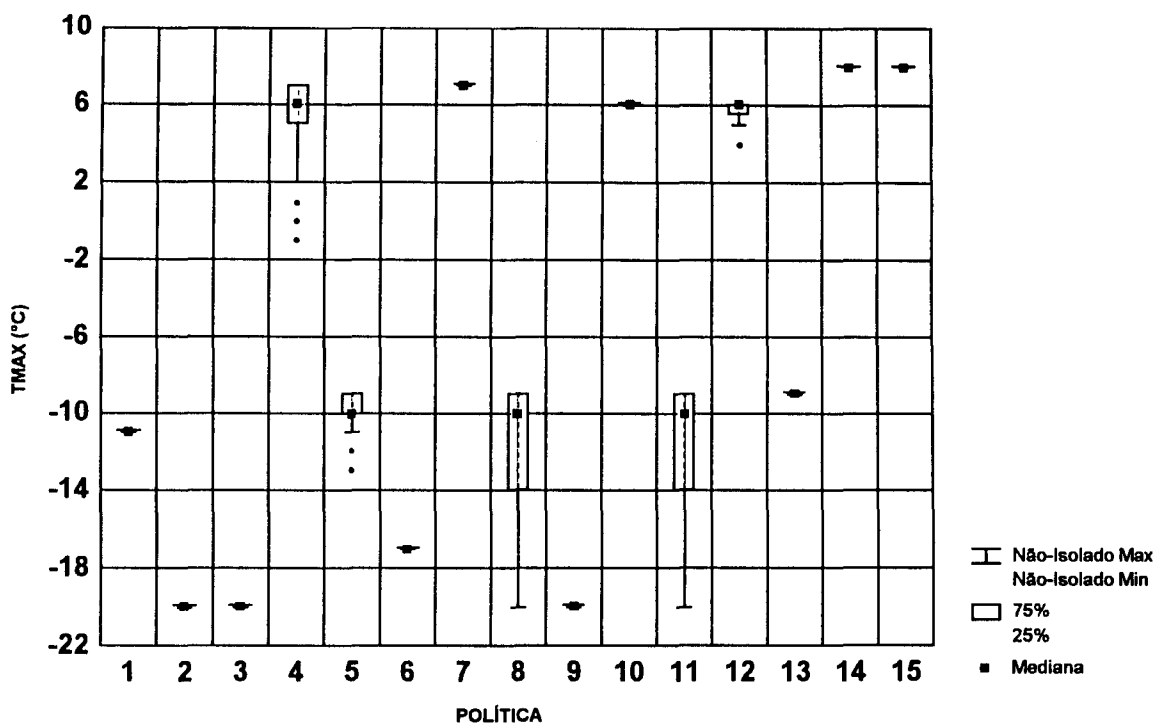


Gráfico 3.3: Temperatura máxima das subcongeladas no cenário 1

**Cenário 2 - Adiantamento de parada** - Ressaltamos as seguintes observações:

1- A dispersão das observações caiu para todas as políticas, e de forma surpreendente para os quesitos de temperatura das políticas 1 e 6.

2- A política 1 teve uma piora de desempenho quanto ao parâmetro REJ+SUB, embora quanto a TMED e TMAX sua melhora também seja visível..

3- Todas as políticas que fazem uso de encadeamento (4 a 13) tiveram melhora significativa de desempenho quanto a REJ+SUB (reduções de cerca de 20 bandejas para todas)

4- As políticas 12 e 13 foram as de melhor desempenho quanto a REJ+SUB, mantendo-se, como no cenário 1, a cerca de 4 bandejas do limite inferior.



POLÍTICA	SUB+REJ	SUB	REJ	TMED	TMAX
1	146	146	0	-17	-13
2	92	0	92	-20	-20
3	65	0	65	-20	-20
4	44	44	0	-12	5
5	64	51	13	-18	-11
6	122	122	0	-19	-18
7	36	36	0	1	6
8	34	5	29	-10	-9
9	32	0	32	-20	-20
10	36	32	4	0	5
11	34	5	29	-10	-9
12	30	28	2	-1	5
13	30	6	24	-11	-9
14	22	22	0	3	8
15	22	22	0	3	8

Tabela 3.3: Exemplo do cenário 2

POLÍTICA	SUB+REJ	SUB	REJ	TMED	TMAX
1	155.67	55.67	0.00	-17.27	-12.98
2	90.38	0.00	90.38	-20.00	-20.00
3	56.94	0.00	56.94	-20.00	-20.00
4	53.00	53.00	0.00	-13.77	3.12
5	51.37	41.03	10.33	-16.68	-10.12
6	116.96	116.96	0.00	-18.95	-17.94
7	30.92	30.92	0.00	-1.83	4.74
8	30.10	7.74	22.36	-11.07	-9.95
9	30.48	0.00	30.48	-20.00	-20.00
10	30.14	28.05	2.09	-2.34	4.08
11	29.84	7.42	22.43	-11.12	-9.98
12	29.80	27.85	1.95	-0.75	4.42
13	29.80	1.98	27.82	-13.42	-12.96
14	24.48	24.48	0.00	2.81	7.86
15	24.48	22.17	2.31	2.37	7.68

Tabela 3.4: Médias de 200 exemplares do cenário 2

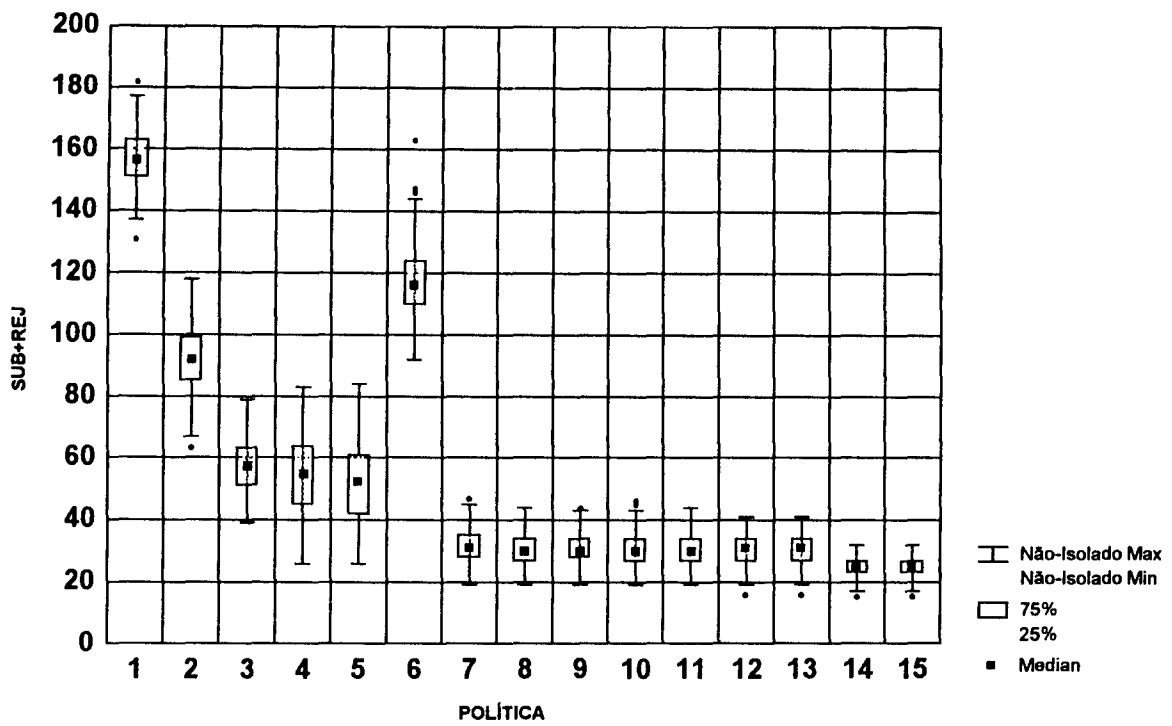


Gráfico 3.4: Número de rejeitadas ou subcongeladas no cenário 2

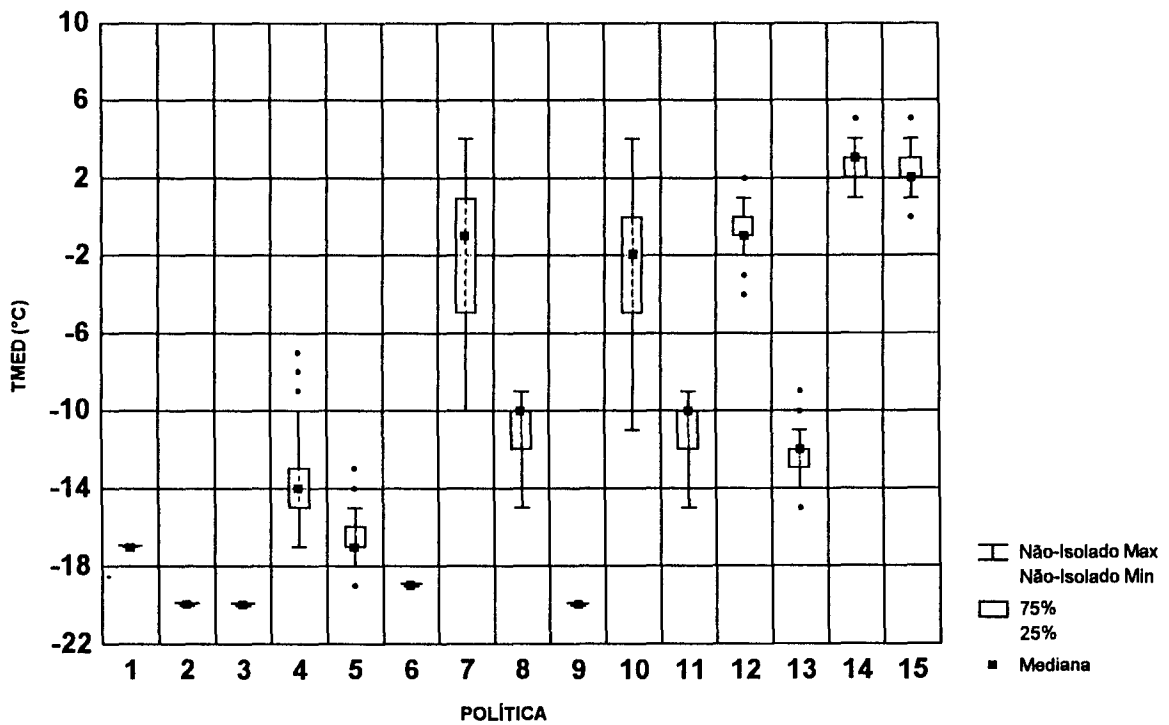


Gráfico 3.5: Temperatura média das subcongeladas no cenário 2

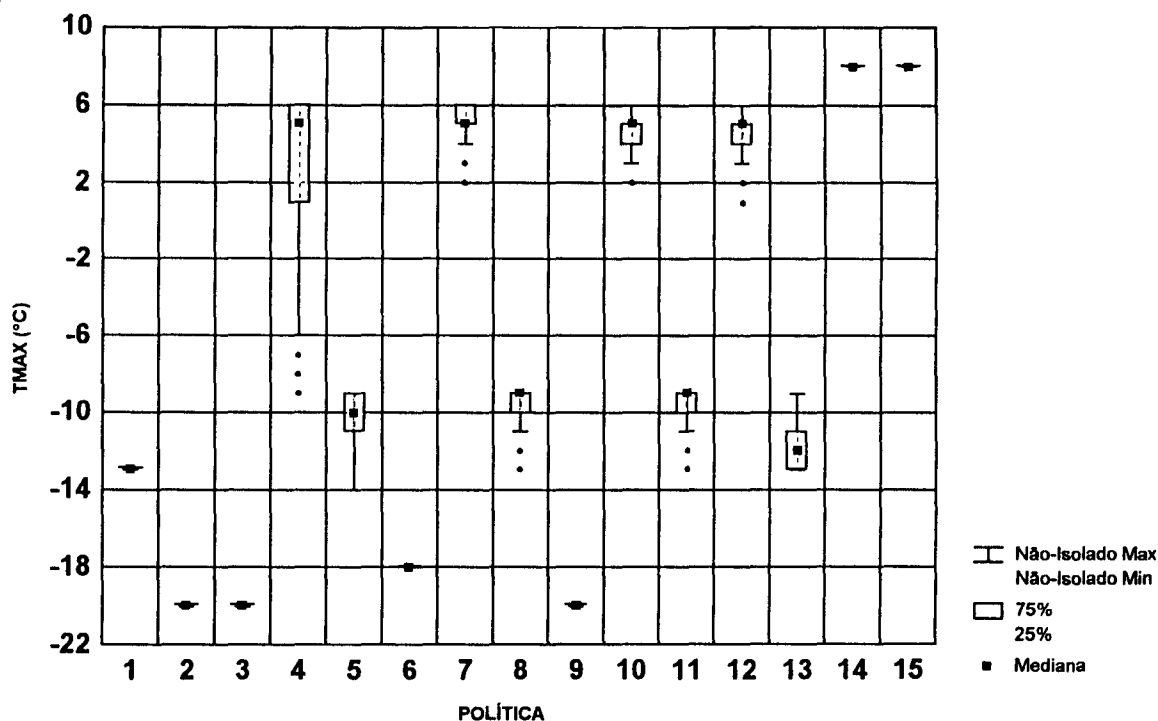


Gráfico 3.6: Temperatura máxima das subcongeladas no cenário 2

**Cenário 3 - Acréscimo de capacidade** - Ressaltamos as seguintes observações:

- 1- Todas as políticas de encadeamento tiveram desempenho excelente. Em especial da política 7 a 13 tiveram a mesma média das políticas ótimas 14 e 15.
- 2- As políticas que não usam encadeamento tiveram desempenho sofrível.
- 3- A política 6 não rejeita bandejas e as subcongeladas que produz estão sempre abaixo de  $-19.65^{\circ}\text{C}$ .
- 4- Com a eliminação de bandejas mais supercongeladas a dispersão das observações relativas a temperaturas aumentou muito.

POLÍTICA	SUB+REJ	SUB	REJ	TMED	TMAX
1	92	92	0	-17	-13
2	37	0	37	-20	-20
3	23	0	23	-20	-20
4	6	6	0	-15	-3
5	6	4	2	-19	-18
6	8	8	0	-20	-20
7	6	6	0	-5	-5
8	6	0	6	-20	-20
9	6	0	6	-20	-20
10	6	5	1	-5	-5
11	6	0	6	-20	-20
12	6	5	1	-13	-13
13	6	5	1	-13	-13
14	6	6	0	8	8
15	6	5	1	7	8

Tabela 3.5: Exemplo do cenário 3

POLÍTICA	SUB+REJ	SUB	REJ	TMED	TMAX
1	89.98	89.98	0.00	-17.20	-13.41
2	48.92	0.00	48.92	-20.00	-20.00
3	36.74	0.00	36.74	-20.00	-20.00
4	5.23	5.23	0.00	-12.66	-6.50
5	5.23	3.55	1.68	-17.48	-16.10
6	6.32	6.32	0.00	-19.76	-19.65
7	4.79	4.79	0.00	-5.61	-4.30
8	4.79	0.99	3.80	-17.91	-17.77
9	4.79	0.00	4.79	-20.00	-20.00
10	4.79	3.98	0.81	-5.98	-4.66
11	4.79	0.86	3.93	-17.95	-17.82
12	4.79	3.98	0.81	-13.24	-12.78
13	4.79	3.70	1.09	-13.85	-13.42
14	4.79	4.79	0.00	4.90	5.59
15	4.79	3.98	0.81	4.83	5.47

Tabela 3.6: Médias de 200 exemplares do cenário 3

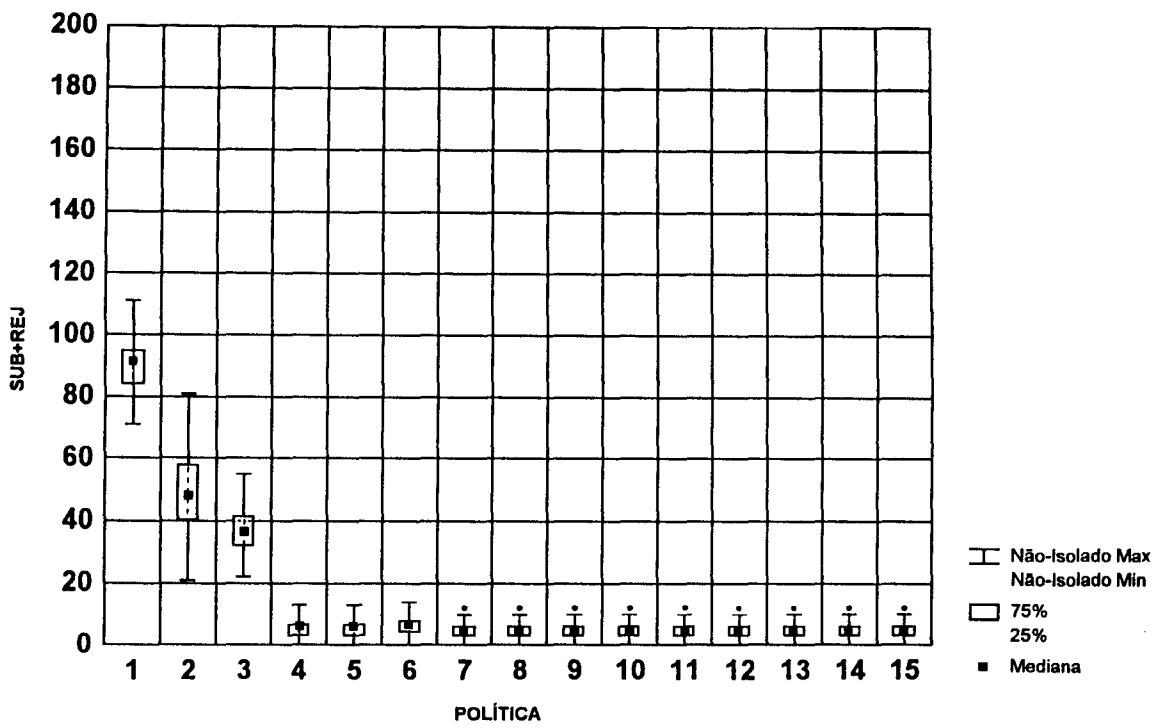


Gráfico 3.7: Número de rejeitadas ou subcongeladas no cenário 3

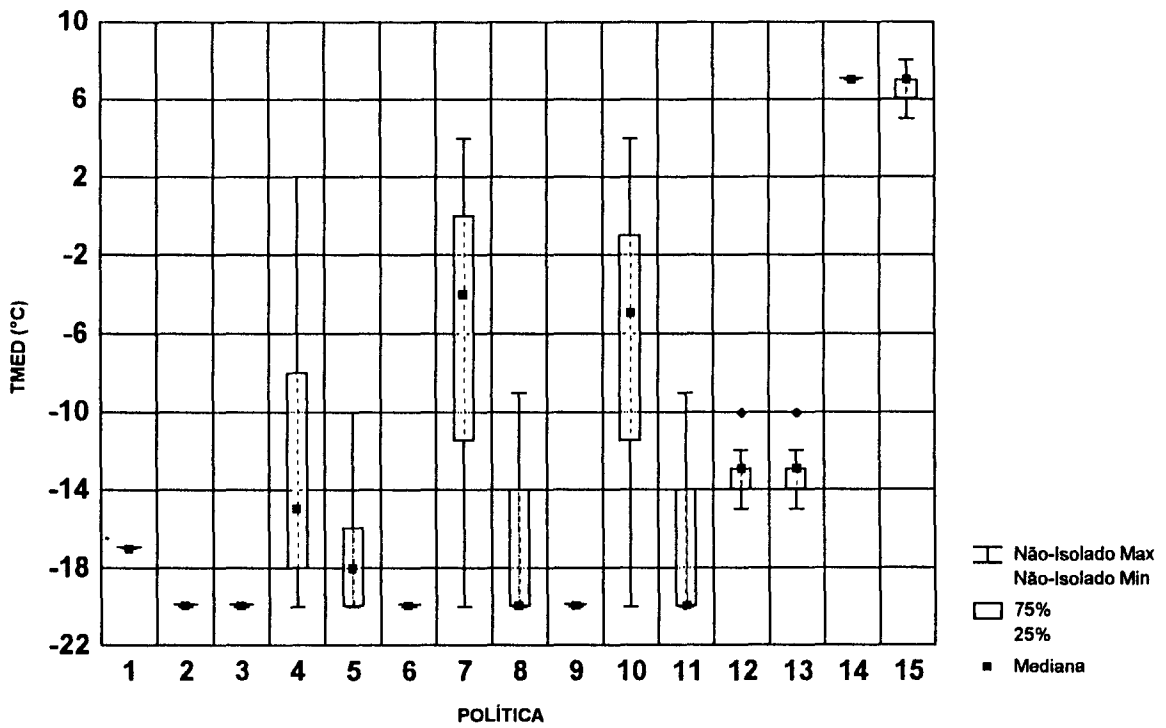


Gráfico 3.8: Temperatura média das subcongeladas no cenário 3

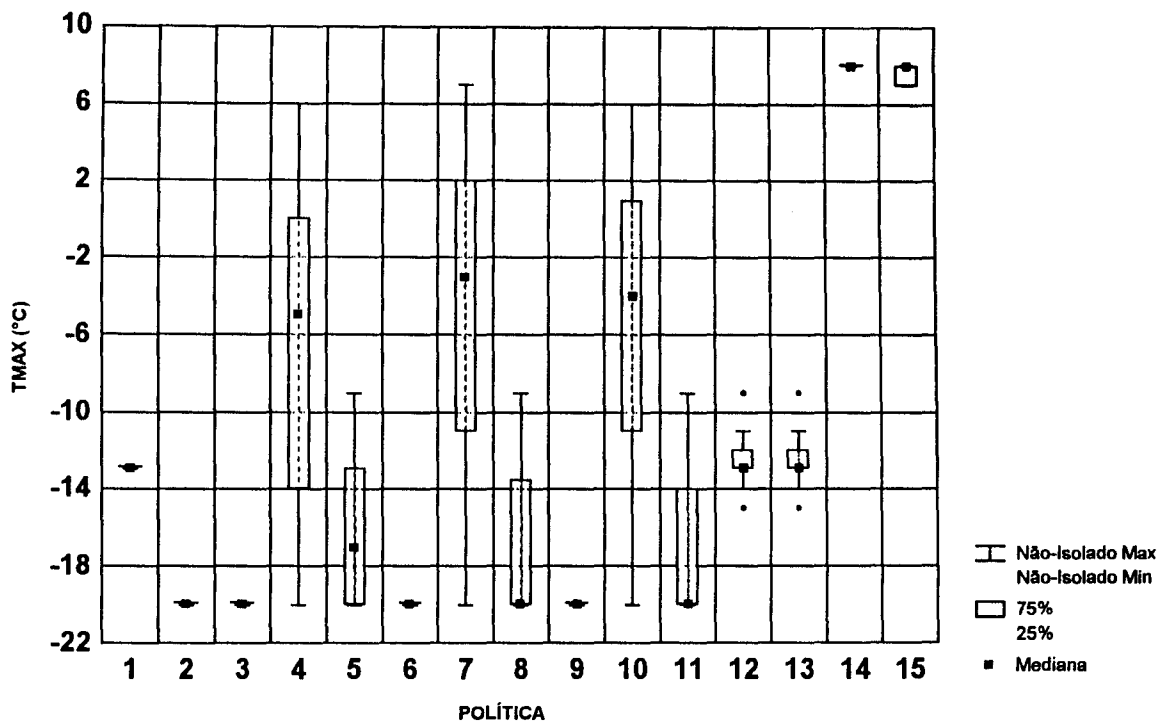


Gráfico 3.9: Temperatura máxima das subcongeladas no cenário 3

**Cenário 4 - Decréscimo de capacidade** -Ressaltamos as seguintes observações:

1- Neste cenário o parâmetro REJ+SUB explode para a política 6, porém, as subcongeladas saem em média a  $-18^{\circ}\text{C}$  e nenhuma bandeja é expulsa a mais de  $-10^{\circ}\text{C}$ .

2- Novamente as políticas 5, 8 e 13 mostraram melhor desempenho que suas versões sem garantia de tempo mínimo de permanência no túnel (políticas 4, 7 e 12).

3- A política 6 é a única que apresenta alguma dispersão para as observações de temperatura média de subcongeladas.

4- Este é o primeiro cenário em que as políticas 14 e 15 diferem em SUB+REJ.

5- A diferença de cerca de 4 bandejas entre as políticas de bom desempenho e o limite inferior volta a se manifestar neste cenário.

6- A política 10 é novamente a da melhor desempenho.

POLÍTICA	SUB+REJ	SUB	REJ	TMED	TMAX
1	292	292	0	-17	-10
2	130	0	130	-20	-20
3	123	0	123	-20	-20
4	204	204	0	-12	7
5	169	113	56	-16	-9
6	451	451	0	-18	-14
7	110	110	0	4	7
8	102	3	99	-10	-9
9	102	0	102	-20	-20
10	102	86	16	4	6
11	102	3	99	-10	-9
12	111	92	19	1	6
13	111	13	98	-9	-9
14	98	98	0	5	8
15	98	50	48	3	8

Tabela 3.7: Exemplo do cenário 4

POLÍTICA	SUB+REJ	SUB	REJ	TMED	TMAX
1	288.69	288.69	0.00	-16.68	-9.93
2	151.60	0.00	151.60	-20.00	-20.00
3	115.97	0.00	115.97	-20.00	-20.00
4	185.79	185.79	0.00	-10.82	6.78
5	167.30	105.54	61.76	-16.18	-9.27
6	457.16	457.16	0.00	-17.62	-12.12
7	119.19	119.19	0.00	2.94	6.81
8	111.95	14.18	97.77	-10.10	-9.24
9	108.43	0.00	108.43	-20.00	-20.00
10	108.24	93.23	15.01	3.34	6.12
11	108.41	11.79	96.62	-10.15	-9.26
12	108.57	93.40	15.17	1.62	6.07
13	108.55	13.71	94.84	-9.53	-9.14
14	104.07	104.07	0.00	5.11	7.94
15	103.90	48.00	55.90	2.14	7.93

Tabela 3.8: Médias de 200 exemplares do cenário 4

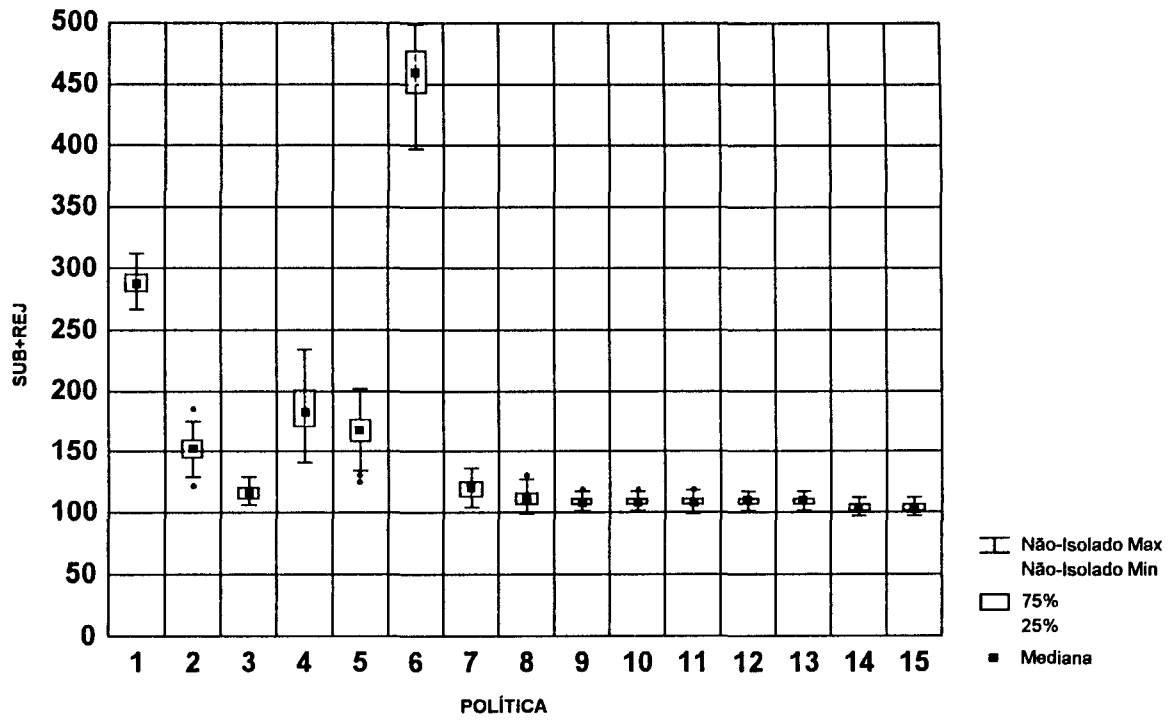


Gráfico 3.10: Número de rejeitadas ou subcongeladas no cenário 4

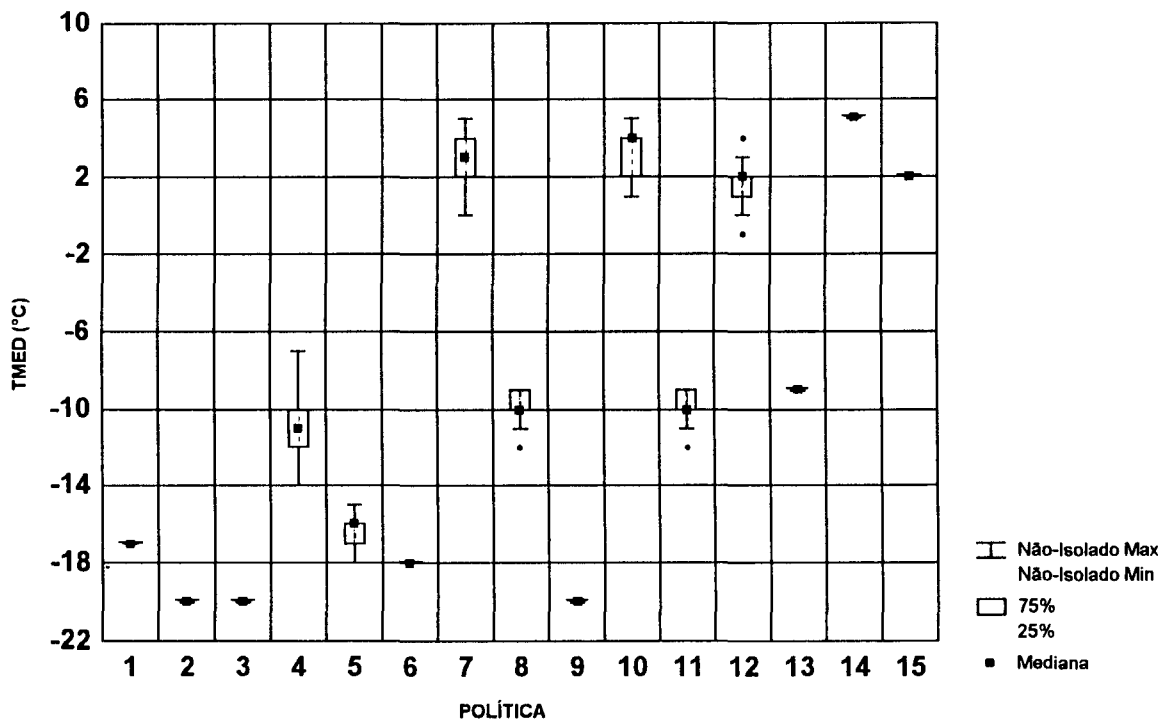


Gráfico 3.11: Temperatura média das subcongeladas no cenário 4



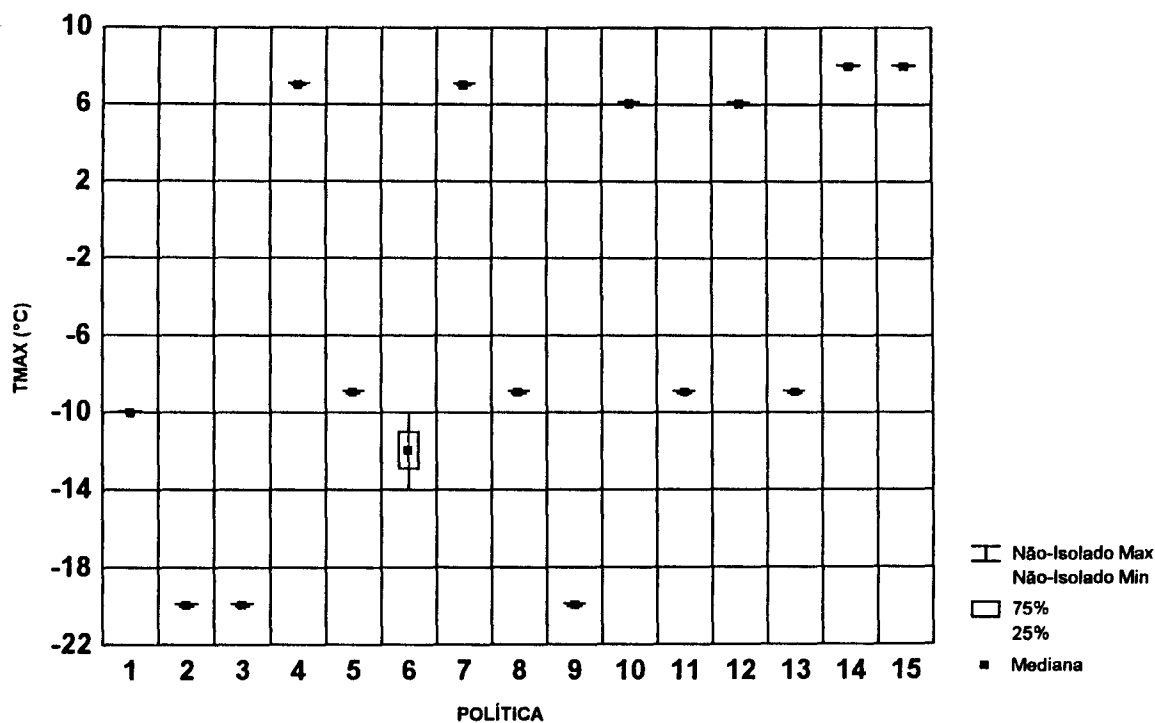


Gráfico 3.12: Temperatura máxima das subcongeladas no cenário 4

**Cenário 5 - Embalagem alternativa** -Ressaltamos as seguintes observações:

1- As políticas 9 e 12 são as de melhor desempenho neste cenário, com médias SUB+REJ idênticas às das políticas ótimas 14 e 15.

2- As médias neste cenário são muito maiores que as dos outros cenários de mesma capacidade (em número de vagas), caracterizando-se a inconveniência de se adotar uma política de embalagem que reduza o tempo ideal de permanência médio ao custo de um número maior de bandejas na carga neste caso específico.

POLÍTICA	SUB+REJ	SUB	REJ	TMED	TMAX
1	321	321	0	-18	-15
2	140	0	140	-20	-20
3	119	0	119	-20	-20
4	126	126	0	-14	7
5	128	105	23	-16	-9
6	203	203	0	-18	-16
7	106	106	0	0	6
8	106	23	83	-15	-9
9	101	0	101	-20	-20
10	106	23	83	-15	-9
11	106	106	0	0	6
12	101	101	0	4	6
13	101	13	88	-10	-9
14	101	101	0	7	8
15	101	33	68	6	8

Tabela 3.11: Exemplo do cenário 5

POLÍTICA	SUB+REJ	SUB	REJ	TMED	TMAX
1	320.99	320.99	0.00	-18.40	-15.01
2	131.11	0.00	131.11	-20.00	-20.00
3	119.36	0.00	119.36	-20.00	-20.00
4	120.70	120.70	0.00	-13.42	4.64
5	119.31	92.96	26.35	-15.80	-9.25
6	187.57	187.57	0.00	-17.88	-15.70
7	99.86	99.86	0.00	-0.08	6.21
8	99.86	23.30	76.56	-14.66	-9.87
9	94.68	0.00	94.68	-20.00	-20.00
10	99.86	99.86	0.00	-0.08	6.21
11	99.86	23.30	76.56	-14.66	-9.87
12	94.68	94.68	0.00	2.90	6.07
13	94.70	16.95	77.75	-10.62	-9.02
14	94.68	94.68	0.00	7.38	7.93
15	94.68	32.40	62.28	6.47	7.93

Tabela 3.12: Médias de 200 exemplares do cenário 5

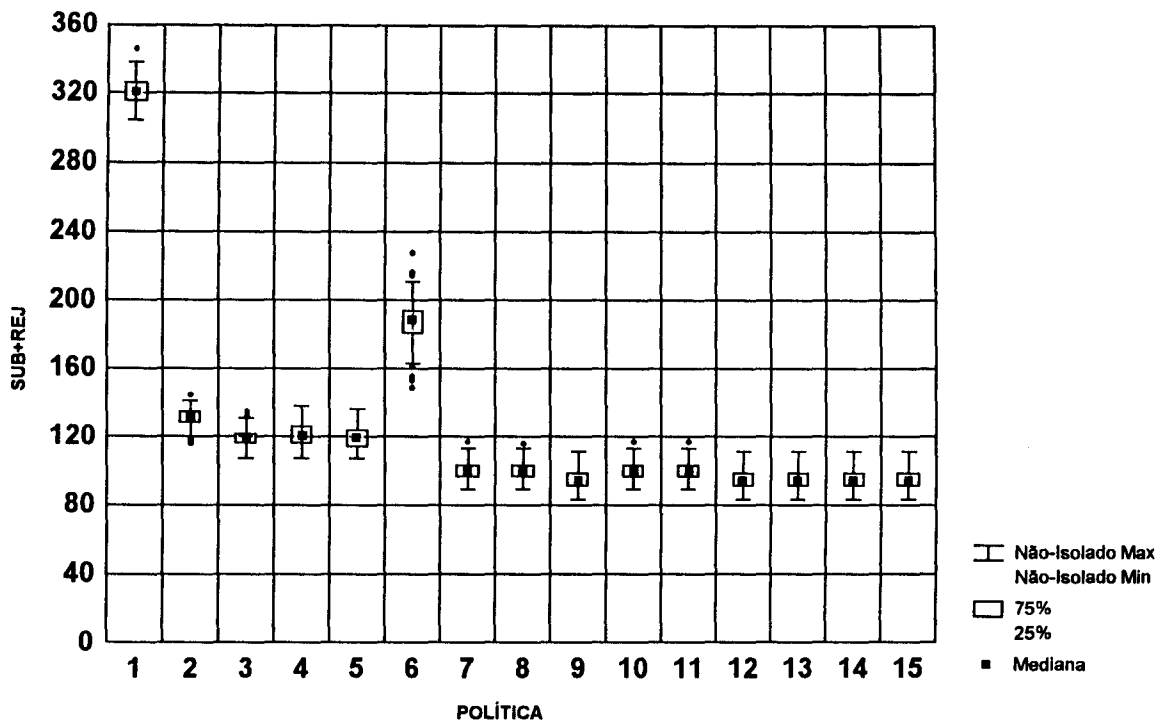


Gráfico 3.13: Número de rejeitadas ou subcongeladas no cenário 5

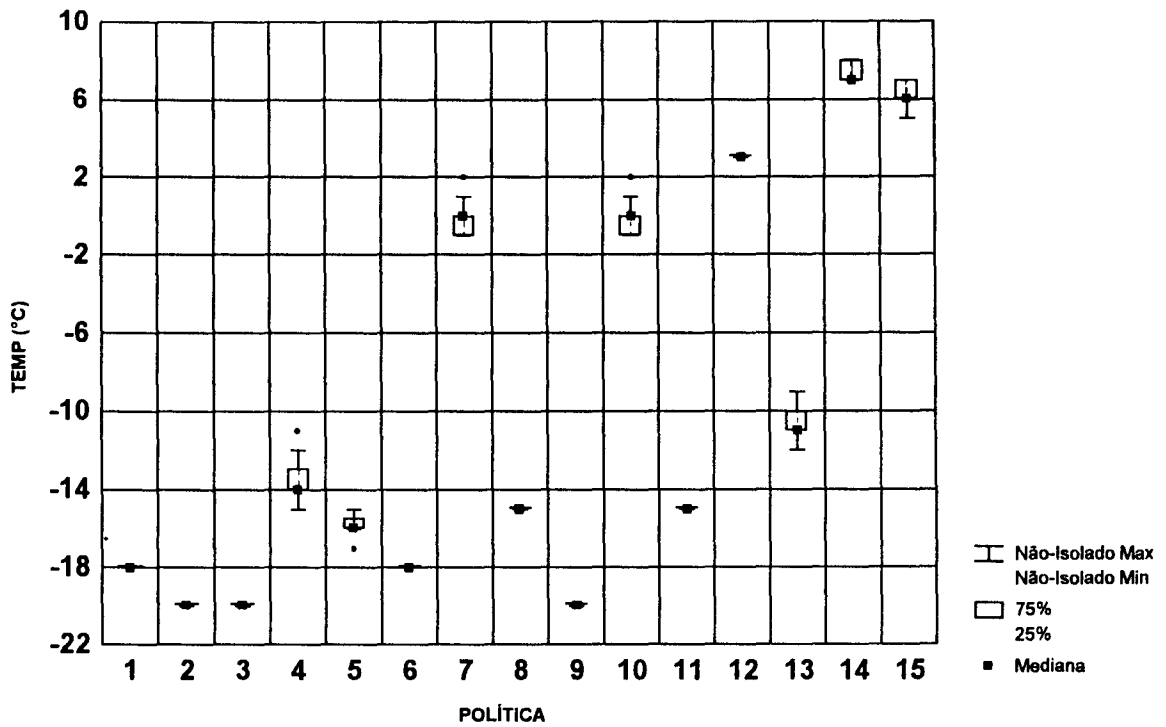


Gráfico 3.14: Temperatura média das subcongeladas no cenário 5

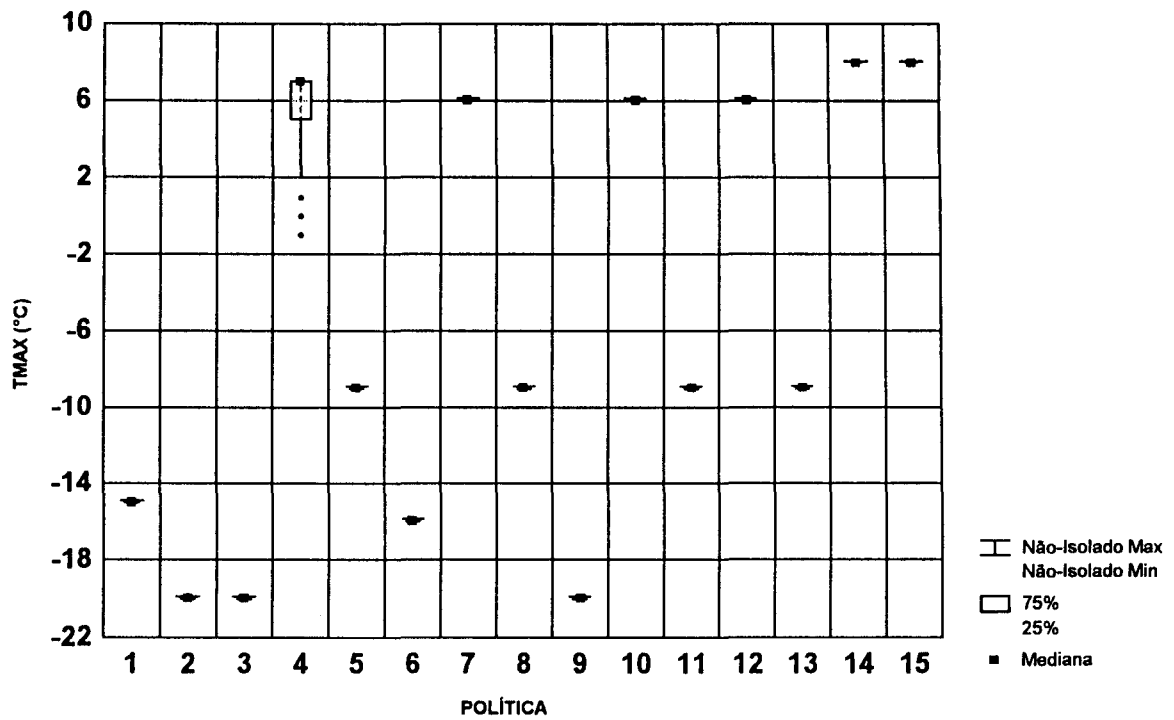


Gráfico 3.15: Temperatura máxima das subcongeladas no cenário 5

**Cenário 6 - Túnel Alternativo - Ressaltamos as seguintes observações:**

- 1- Neste cenário a política 9 é a de melhor desempenho novamente.
- 2- A política 2 mostrou-se bastante sensível às restrições de acesso.
- 3- A política 3 (de especialização de níveis) manteve seu desempenho.
- 4- A política 6 mostrou-se pouco sensível às restrições de acesso.
- 5- Em geral houve maior dispersão das observações.

POLÍTICA	SUB+REJ	SUB	REJ	TMED	TMAX
1	134	134	0	-16	-11
2	107	0	107	-20	-20
3	72	0	72	-20	-20
4	98	98	0	-13	4
5	74	46	28	-18	-11
6	148	148	0	-18	-17
7	59	59	0	-6	4
8	54	21	33	-12	-9
9	53	0	53	-20	-20
10	53	47	6	-7	-3
11	53	20	33	-12	-9
12	50	44	6	-10	-3
13	45	16	29	-10	-9
14	41	41	0	3	8
15	41	30	11	2	8

Tabela 8.9: Exemplo do cenário 6

POLÍTICA	SUB+REJ	SUB	REJ	TMED	TMAX
1	135.76	135.76	0.00	-16.41	-11.43
2	120.32	0.00	120.32	-20.00	-20.00
3	70.38	0.00	70.38	-20.00	-20.00
4	114.07	114.07	0.00	-14.60	-0.16
5	101.76	82.36	19.39	-16.82	-9.66
6	140.26	140.26	0.00	-18.25	-16.29
7	74.92	74.92	0.00	-6.87	2.06
8	64.10	34.09	30.00	-12.09	-9.58
9	50.06	0.00	50.06	-20.00	-20.00
10	56.54	49.44	7.10	-8.04	-2.91
11	51.96	26.51	25.45	-12.19	-9.87
12	57.24	49.82	7.43	-7.77	-0.44
13	54.33	22.45	31.89	-10.62	-9.03
14	40.81	40.81	0.00	3.89	7.94
15	40.81	28.95	11.85	2.39	7.90

Tabela 3 10: Médias de 200 exemplares do cenário 6

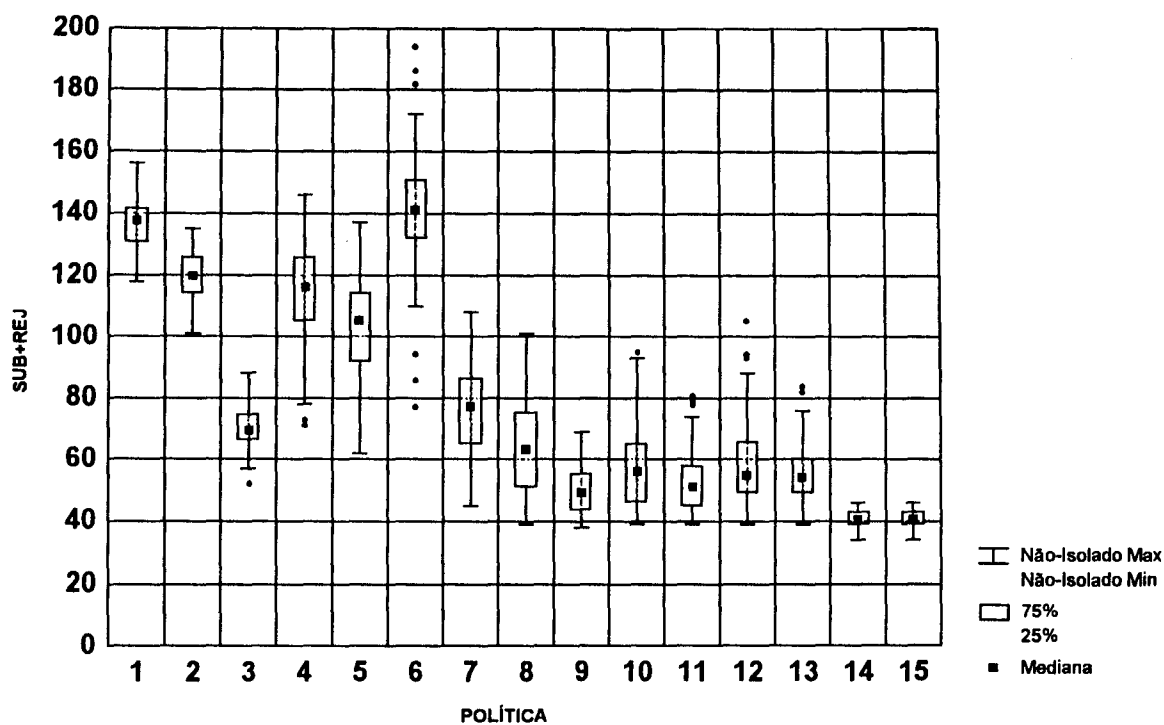


Gráfico 3.16: Número de rejeitadas ou subcongeladas no cenário 6

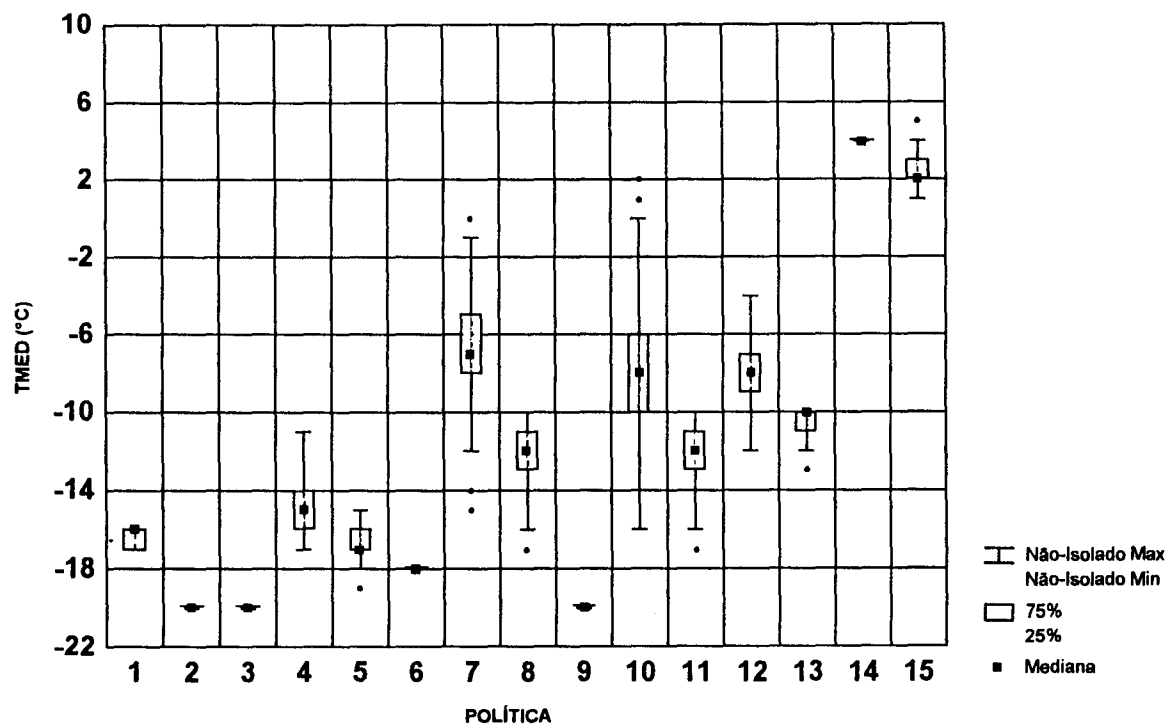


Gráfico 3.17: Temperatura média das subcongeladas no cenário 6

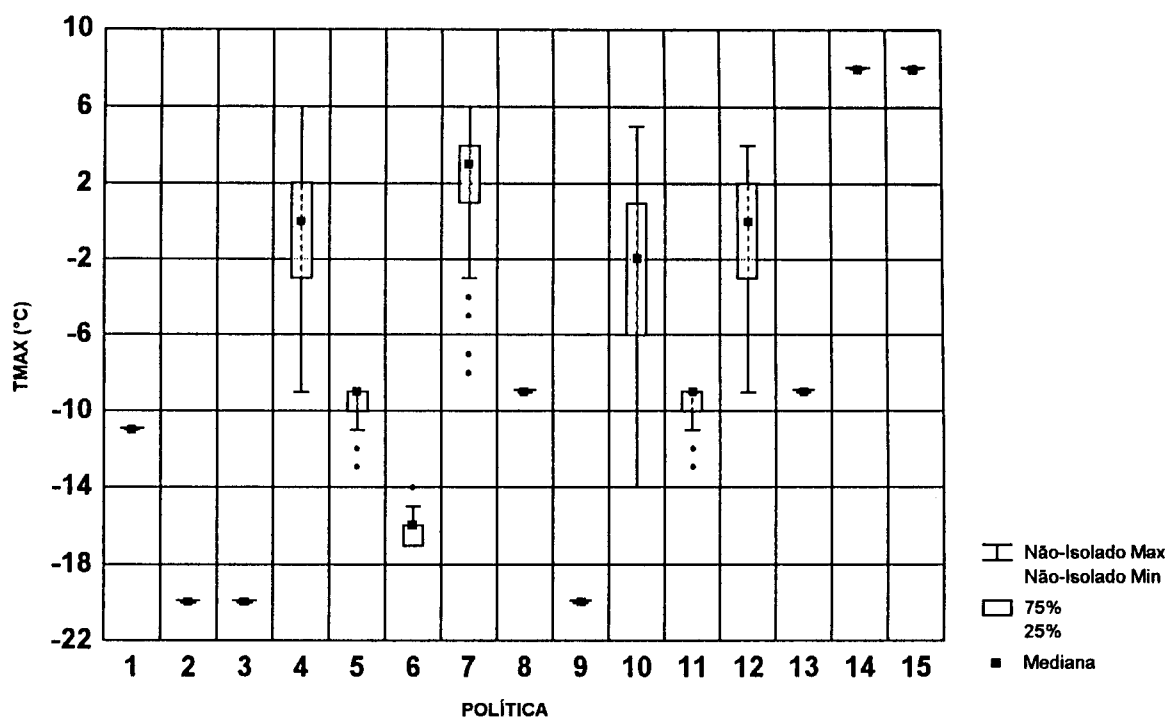


Gráfico 3.18: Temperatura máxima das subcongeladas no cenário 6

Com base no conjunto de cenários simulados, pudemos fazer uma análise de cada política. Avaliamos o desempenho das políticas em 3 quesitos: REJ+SUB, TMED e TMAX. Para os dois últimos, classificamos subjetivamente o desempenho de acordo com as tabelas 3.11(a) e 3.11(b), independentemente do cenário.

TMED	DESEMPENHO
de 8°C a -4°C	PÉSSIMO
de -4°C a -14°C	RUIM
de -14°C a -18°C	BOM
de -18°C a -20°C	EXCELENTE

3.11(a)

TMAX	DESEMPENHO
de 8°C a 0°C	PÉSSIMO
de 0°C a -6°C	RUIM
de -6°C a -14°C	BOM
de -14°C a -20°C	EXCELENTE

3.11(b)

Tabelas 3.11: Classificação de desempenho segundo TMED e TMAX.

Quanto ao quesito REJ+SUB a classificação foi feita de forma comparativa, cenário a cenário. Os valores subjetivos, porém, foram restritos aos da tabelas acima.

Na tabela 3.12 a classificação de desempenho das políticas nos quesitos REJ+SUB, TMED e TMAX (nesta ordem) é indicada pelos símbolos '++', '+', '-' e '--', que correspondem às classes excelente, bom, ruim e péssimo, respectivamente. Desempenhos extremos (melhores ou piores) são vistos em negrito.

CENÁRIO	POLÍTICA												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	--	-	-	-	-	--	-	++	++	++	++	++	++
	+			-	+	++	--	-		--	-	--	-
	+			--	+	++	--	+		--	+	--	+
2	--	-	-	-	-	--	++	++	++	++	++	++	++
	+			-	+	++	--	-		--	-	--	-
	+			--	+	++	--	+		--	+	--	+
3	--	-	-	++	++	++	++	++	++	++	++	++	++
	+			-	+	++	-	+		-	++	-	-
	+			+	++	++	-	++		-	++	+	+
4	--	-	+	-	-	--	+	+	++	++	++	++	++
	+			-	+	++	--	-		--	-	--	-
	+			--	+	+	--	+		--	+	--	+
5	--	-	+	+	+	-	+	+	++	+	+	++	++
	++			-	+	+	--	+		--	+	--	-
	++			--	+	++	--	+		--	+	--	+
6	--	--	-	--	-	--	-	-	+	+	+	+	+
	+			+	+	++	-	-		-	-	-	-
	+			-	+	++	--	+		-	+	-	+

Tabela 3.12: Desempenho relativo das políticas.

As políticas 1, 4, 6 e 7 não permitem a rejeição de bandejas, o que é característica desejável se o sistema está sobrecarregado e o retrabalho é aceitável. Já as políticas 2, 3 e 9 não permitem subcongelamento. Esta característica é interessante se o retrabalho é caro e refrigeradores auxiliares menos eficientes estão disponíveis. Com isso em mente, fazemos a seguinte análise do desempenho das políticas:

**Política 1** - Mostrou desempenho péssimo quanto a REJ+SUB para todos os cenários, inclusive o de acréscimo de capacidade. Seu desempenho geral só pode ser considerado satisfatório no caso da embalagem alternativa, quando o número e homogeneidade das bandejas são grandes. Não é sensível às restrições de acesso.

**Política 2** - Teve desempenho ruim quanto a REJ+SUB para todos os cenários, exceto o do túnel alternativo, onde foi péssimo. Assim, é sensível às restrições de acesso.



**Política 3** - Seu desempenho quanto a REJ+SUB só chega a ser bom nos casos de decréscimo de capacidade e de embalagem alternativa (maior número de bandejas). Também mostrou ser robusta quanto às restrições de acesso.

**Política 4** - Só pode ser considerada satisfatória para cenários com folga de capacidade, o que não significa muito. Seu péssimo desempenho apenas mostra que o 'encadeamento' não deve ser usado quando ocorre bloqueio de todos os níveis do túnel.

**Política 5** - Tem desempenho geral fraco, mas a maior homogeneidade das bandejas favorece seu desempenho quanto a REJ+SUB. Também mostra robustez frente às restrições de acesso.

**Política 6** - Tem desempenho péssimo quanto a REJ+SUB, mas excelente quanto a TMED e TMAX. Particularmente, TMAX excelente e não rejeição são características importantes para sistemas sobrecarregados em que algum subcongelamento seja tolerável.

**Política 7** - Em todos os cenários seu TMAX é o pior. Quanto a REJ+SUB, seu desempenho oscila entre ruim e excelente, o que não é bom. Mostrou sensibilidade às restrições de acesso.

**Política 8** - Tem desempenho geral muito bom, se observarmos REJ+SUB e TMAX. Mostrou, porém, sensibilidade às restrições de acesso.

**Política 9** - Tem desempenho notável quanto a REJ+SUB: 'excelente' em todos os cenários, exceto o sexto, onde, mesmo tendo desempenho apenas 'bom', é o melhor.

**Política 10** - Também tem desempenho notável quanto a REJ+SUB, pois em 3 dos cenários tem o melhor desempenho neste quesito. Quanto a TMED e TMAX, seu desempenho é sempre ruim ou péssimo. É a de melhor desempenho no cenário original.

**Política 11** - Tem desempenho geral excelente, se observarmos REJ+SUB e TMAX. Sua vantagem em relação à política 8 é ser menos sensível às restrições de acesso.

**Política 12** - Seu desempenho geral é muito parecido com o da política 10. Também tem o melhor desempenho quanto a REJ+SUB em 3 dos cenários, por exemplo.

**Política 13** - Desempenho geral semelhante ao da excelente política 11. Apenas um pouco melhor quanto a REJ+SUB.

# Capítulo 4

## COMENTÁRIOS FINAIS

Dentre as hipóteses adotadas na modelagem do problema, uma das mais críticas é a relativa à estabilidade e homogeneidade de condições das várias posições do túnel. Ao longo do período de carga o túnel, como um todo, perde rendimento. Sua temperatura média sobe devido à sobrecarga. Durante as paradas há recuperação parcial de rendimento. No caso estudado, por exemplo, a temperatura do RECRUSUL oscila entre  $-40^{\circ}\text{C}$  e  $-32^{\circ}\text{C}$  ao longo do dia. Este, porém, é um efeito ao qual é fácil adaptar as políticas desenvolvidas. Mais difícil é contornar o efeito da ventilação. Túneis de congelamento possuem ventilação forçada para potencializar as trocas de calor. Fazer com que ela seja bem distribuída é um difícil problema de engenharia. Embora as diferenças de temperatura entre regiões do túnel não sejam significativas, as diferenças de ventilação costumam ser.

Os gráficos 4.1 e 4.2 mostram que esse efeito é significativo. Eles foram obtidos com o auxílio de *datatraces*, instrumentos que monitoram a temperatura dos objetos em que são fixados. Neles vemos o comportamento da temperatura de dois frangos de tamanhos idênticos que foram colocados em posições distintas da mesma bandeja. A bandeja foi colocada num túnel MADEF, de ventilação transversal ao fluxo de bandejas. O frango do gráfico 4.1 ficou na extremidade da bandeja próxima à bancada de ventiladores e o do gráfico 4.2 ficou na extremidade oposta.

Num túnel como o RECRUSUL, de fluxo contra-corrente, as bandejas próximas à saída estão sujeitas a uma ventilação bem mais intensa do que a das bandejas recém colocadas. A ventilação, porém, praticamente elimina o efeito da posição das outras bandejas sobre as trocas de calor de cada bandeja com o ar. A diferença de temperatura do ar entre a parte *quente* e a *fria* do RECRUSUL, por exemplo, não passa de  $2^{\circ}\text{C}$ .

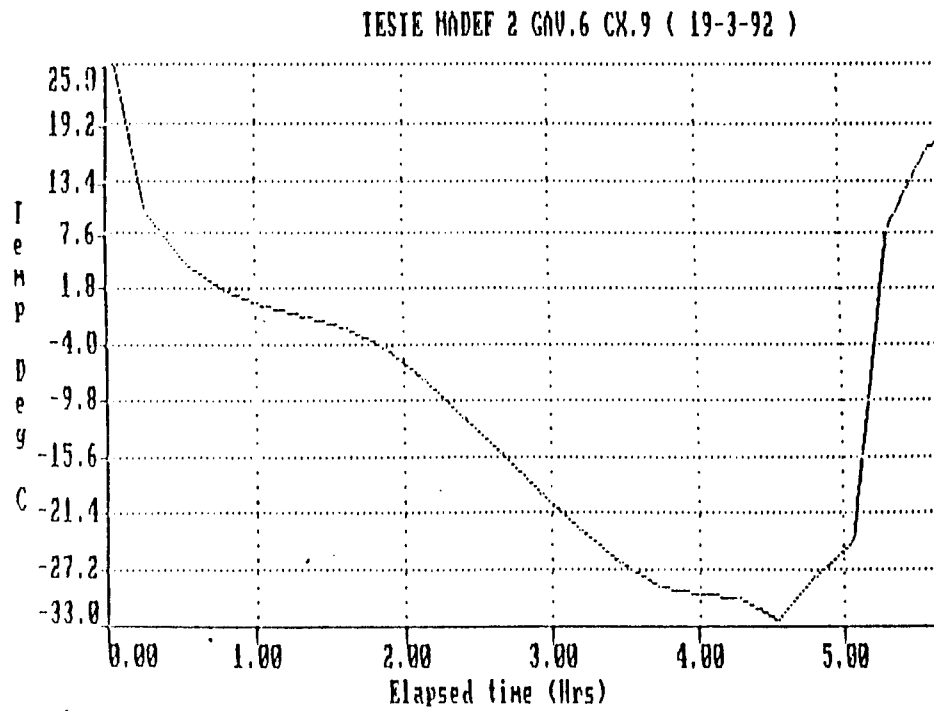


Gráfico 4.1: Decaimento da temperatura junto à bancada de ventiladores

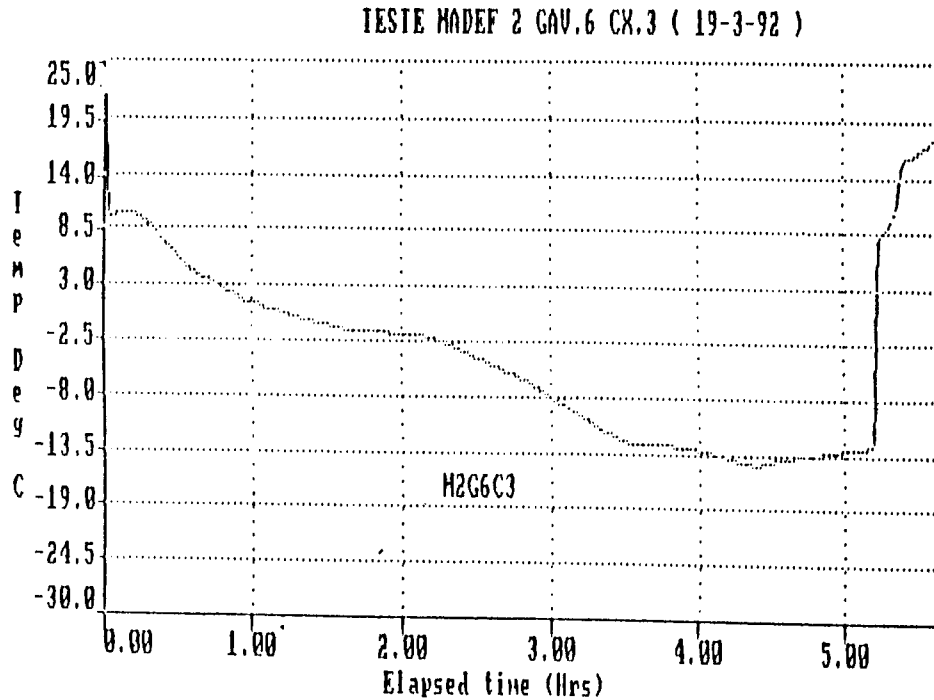


Gráfico 4.2: Decaimento da temperatura à distância da bancada de ventiladores

Seria conveniente o desenvolvimento de algoritmos que tomassem essas questões em consideração.

Um outro detalhe dos gráficos 4.1 e 4.2 que chama atenção é a indesejável recuperação de temperatura após a saída do túnel. Isso acontece porque as caixas que deixam o túnel devem ser acumuladas em *palets* do mesmo produto antes de serem armazenadas. Isso ocorre numa sala mantida a 15°C. A diversidade da produtos faz com que a formação dos *palets* seja lenta, especialmente para produtos de baixa produção. Esta é outra fonte de retrabalho de caixas. É, portanto, muito conveniente a redução do tempo de paletização. A aplicação das políticas apresentadas de fato contribui para isso. Elas tendem a fazer uma *filtragem* das bandejas produzidas no dia. Quando essas bandejas começam a sair, a maior percentagem é de bandejas do tipo 3, pois as de outros tipos não tiveram tempo de congelar. Aos poucos as bandejas do tipo 2 vão aumentando de proporção, seguidas das do tipo 1. Essa concentração de tipos em períodos favorece a paletização. Pode-se, inclusive, esperar uma redução da área ocupada pelos palets. Incluir o período de paletização no modelo é certamente desejável.

Consideramos no estudo de caso a inexistência de filas de espera e que bandejas subcongeladas não retornam ao túnel. Com isso eliminamos aspectos combinatorias do problema. Essas hipóteses, porém, podem não ser adequadas em certos casos. De fato, a formação de filas e o retrabalho de bandejas é comum em sistemas sobrecarregados. No caso de tratamento térmico de peças industriais, por exemplo, a formação de uma fila se justificaria: peças metálicas não são perecíveis.

Neste trabalho procuramos desenvolver políticas independentes do conhecimento completo e prévio da carga. Em geral utilizamos apenas a programação de paradas e o conhecimento dos tipos de bandejas que compõem a carga. Na prática, porém, embora não se tenha uma descrição prévia e completa da carga do dia e paradas emergenciais sejam comuns, dispõe-se de muito mais informação sobre a carga do que nos permitimos usar aqui. Apenas no caso das políticas que usam especialização de níveis usamos a proporção agregada entre as bandejas dos vários tipos. A queda de rendimento do túnel ao longo do

dia citada acima, por exemplo, é ligada à carga e razoavelmente previsível. Isso significa que as políticas aqui apresentadas podem ser melhoradas para aplicações específicas.

No caso de produtos que devam ser *resfriados* devemos nos preocupar também com o supercongelamento. Ele altera permanentemente as propriedades superficiais do produto, o que (no caso do frango) faz com que este tenha de ser retrabalhado como congelado e comercializado como tal. Além disso, os produtos a resfriar ficam menos tempo no túnel do que os produtos a congelar, o que dificulta o seu retrabalho quando subcongelado.

Lembramos também que é comum a colocação de congelados e resfriados num mesmo túnel. No caso estudado, por exemplo, a produção de resfriados é concentrada em alguns períodos do dia, quando um número conveniente de níveis é reservado para aqueles produtos. Num túnel MADEP o frango consome 1h para ser resfriado. Geralmente 2 dos 10 níveis são reservados por 2h durante a manhã.

Como se pode notar, políticas adequadas ao carregamento de resfriados são possivelmente muito mais sensíveis ao perfil da carga do que as que apresentamos para o carregamento de congelados. A formulação em programação inteira apresentada na seção 2.3 suporta, como dissemos então, a extensão para o caso de resfriados presentes na carga (bem como diferenças de rendimento entre áreas do túnel e diferenças de prêmio por tipo de bandeja congelada). Ao que nos parece, ela pode ser utilizada em problemas pequenos para inspirar heurísticas ou políticas para essas extensões.

Algumas técnicas também podem ser empregadas em trabalhos futuros. É o caso do *fix-and-relax*, que pode ser implementado com base na formulação do problema em programação inteira. Também a aplicação recorrente de políticas de encadeamento de forma a fazer convergir as previsões de instante de saída das bandejas pode ser tentada dentro de uma abordagem do problema estático. Mesmo a aplicação de metaheurísticas ainda não foi tentada por nós.

Há que se ressaltar o importante papel que a animação da simulação desempenhou neste trabalho e que certamente pode desempenhar em suas extensões. Com a animação da simulação das políticas foi possível avaliar seus pontos fracos. A visualização

da simulação foi facilitada pelo fato de podermos usar códigos de cores em uma matriz bidimensional. As cores foram, de fato, usadas para representar a temperatura da bandeja, o tipo e o estado de congelamento. Os padrões de evolução das regiões coloridas na matriz foram associados a comportamentos desejáveis ou não das políticas. Por exemplo: é indesejável que bandejas das cores associadas a bandejas não congeladas se acumulem na região da matriz correspondente à saída do túnel. Cremos que a *simulação visual iterativa* [BK95] seja a técnica mais promissora para o desenvolvimento de novas políticas e para a adaptação a aplicações específicas.

Por fim, vale colocar a questão quanto à classe de P3 e P4 em termos de complexidade. Como ficou claro no levantamento bibliográfico, problemas análogos menos difíceis são bastante sensíveis quanto à complexidade. É razoável esperar, então, que ao menos P4 também seja não-polinomial, mas esse é um problema em aberto.

# Apêndice A

## MODELO EM GAMS

```
OPTION ITERLIM=600000;  
OPTION RESLIM=2000;  
OPTION OPTCA=0;  
OPTION OPTCR=0;
```

### SETS

- \* NUMERACAO DAS BANDEJAS POR ORDEM DE CHEGADA AO TUNEL  
B BANDEJA /7\*26/
- \* NIVEIS DO TUNEL (CADA UM COM DUAS VAGAS)  
N NIVEL /A,B,C/
- \* NUMERO DE BANDEJAS QUE ENTRAM NUM NIVEL DEPOIS DE OUTRA  
O ORDEM /'0','1','2','3','4','5','6','7','8','9','10','11','12','13',  
'14','15','16','17','18','19'/

```
ALIAS(O,OX);
```

- \* INSTANTE EM QUE A BANDEJA 'B' CHEGA NO TUNEL  
PARAMETER CHEGA(B)

```
/7 3.00  
8 4.00  
9 4.25  
10 4.75  
11 5.00  
12 5.75  
13 6.25  
14 7.00  
15 7.50  
16 8.00  
17 9.00  
18 9.25  
19 9.75  
20 10.25  
21 11.00  
22 12.25  
23 12.50  
24 13.00  
25 14.25  
26 15.00 /;
```

**\* INSTANTE DE CONGELAMENTO DA BANDEJA 'B'**

**PARAMETERS CONGELA(B)**

/ 7	8.00
8	6.25
9	7.50
10	7.00
11	9.00
12	9.75
13	9.25
14	10.25
15	11.00
16	12.50
17	12.25
18	13.00
19	14.25
20	15.00
21	16.00
22	15.00
23	15.25
24	16.50
25	15.75
26	17.00 /;

**VARIABLES**

X(B,N,O) VALE 1 SE 'O' BANDEJAS ENTRAM EM 'N' DEPOIS DE 'B', ZERO CC  
Z FUNCAO OBJETIVO;

**BINARY VARIABLE X;**

**EQUATIONS**

EQ1(B)  
EQ2(N,O)  
EQ3(N,O,OX)  
EQ4(N,O,OX)  
FO;

**\* UM NIVEL NAO PODE RECEBER MAIS DE UMA BANDEJA POR VEZ**

$$EQ1(B) \quad .. \text{SUM}((N,O), X(B,N,O)) = L = 1;$$

**\* UMA BANDEJA NAO PODE ENTRAR NO TUNEL MAIS DE UMA VEZ**

$$EQ2(N,O) \quad .. \text{SUM}(B,X(B,N,O)) = L = 1;$$

**\* AS BANDEJAS DE UM NIVEL SAO ORDENADAS POR INSTANTE DE CHEGADA**

$$EQ3(N,O,OX) \$ ((ORD(OX) EQ ORD(O)-1) \text{ AND } (ORD(O) GT 1)) \\ .. \text{SUM}(B,X(B,N,O)*CHEGA(B)) = L = \text{SUM}(B,X(B,N,OX)*CHEGA(B));$$

**\* NENHUMA BANDEJA PODE DEIXAR O TUNEL SUBCONGELADA**

$$EQ4(N,O,OX) \$ ((ORD(OX) EQ ORD(O)-2) \text{ AND } (ORD(O) GT 2)) \\ .. \text{SUM}(B,X(B,N,O)*CONGELA(B)) - \text{SUM}(B,X(B,N,OX)*CHEGA(B)) = L = 0 ;$$



\* MAXIMIZA-SE O TOTAL DE BANDEJAS CONGELADAS

FO .. SUM((B,N,O),X(B,N,O)) =E= Z;

\* PODE-SE REDUZIR O NUMERO DE VARIAVEIS X(B,N,O)

LOOP((B,N,O)\$(((ORD(B)+ORD(O)) GT 21)OR(ORD(O) GT CEIL(20/ORD(N))))),  
X.FX(B,N,O)=0)

MODEL TUNEL/ALL/;

SOLVE TUNEL USING MIP MAXIMIZING Z;

# Apêndice B

## TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO TÚNEL

Os processos de transmissão de calor dentro do túnel são aqui estudados para que se possa representar de forma conveniente o decaimento da temperatura dos volumes de produto.

### **Decaimento de temperatura do produto**

Aqui, chamaremos de 'volume' à bandeja de 9 caixas formada com caixas de perfis térmicos idênticos. Consideramos como  $-20^{\circ}\text{C}$  a temperatura objetivada para o núcleo de um volume e que os tempos de retenção ideais são para exposição a  $-40^{\circ}\text{C}$  (túnel ideal), a partir de uma temperatura inicial de  $10^{\circ}\text{C}$ .

Seria mais fácil e preciso o cálculo da curva de decaimento da temperatura do núcleo a partir do instante de congelamento (solidificação dos fluidos) do volume pois, daí para a frente, perda de calor latente e mudanças de constantes térmicas não mais intervêm. Não dispomos, porém, do tempo de exposição necessário para o congelamento dos volumes. Assim, por ora simplesmente deixaremos de considerar os efeitos da mudança de estado, enquanto consideramos que:

- 1- O túnel mantém-se a  $-40^{\circ}\text{C}$  o tempo todo.
- 2- A temperatura decai homoganeamente em toda a extensão do volume, exceto seu núcleo pontual.
- 3- A diferença de temperatura entre a superfície do volume e o ar do túnel é 10% inferior à diferença entre a temperatura do núcleo do volume e a do ar do túnel. Ou seja: quando a superfície do volume atinge  $-10^{\circ}\text{C}$  (dos  $-40^{\circ}\text{C}$  possíveis) seu núcleo é  $-7^{\circ}\text{C}$ .

Podemos então descrever matematicamente a queda de temperatura do volume  $V$  pelo seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{aligned}\Theta'_V(t) &= -K_V \cdot [\Theta_V(t) - \Theta_T] \\ \Theta_V(0) &= \Theta_A\end{aligned}$$

onde:

$\Theta_V(t)$  é a temperatura da superfície do volume no instante  $t$  (h).

$K_V$  é uma constante positiva associada ao volume  $V$ .

$\Theta_T$  é a temperatura do túnel (-40°C).

$\Theta_A$  é a temperatura inicial do produto (10°C).

A solução deste PVI é:

$$\Theta_V(t) = (\Theta_A - \Theta_T) \cdot e^{-K_V t} + \Theta_T$$

onde:

$$K_V = -E_V^{-1} \cdot \ln\left(\frac{\Theta_n^* - \Theta_T}{f \cdot (\Theta_A - \Theta_T)}\right)$$

$\Theta_n^*$  é a temperatura objetivada para o núcleo do volume (-20°C).

$f$  é a razão entre a diferença de temperatura núcleo-túnel e a superfície-túnel (1,1).

$E_V$  é o tempo de exposição a  $\Theta_T$  ideal para o volume  $V$  (4.33h, 5.00h ou 7.33h).

Assim, temos a temperatura  $\Theta_{n_V}(t)$  do núcleo do volume  $V$ :

$$\Theta_{n_V}(t) = \min\left\{\Theta_A, f \cdot e^{-K_V t} \cdot (\Theta_A - \Theta_T) + \Theta_T\right\}$$

com a correspondência dada pela tabela A.1:

$E_V$ (h)	$K_V$
4:20	0,234
5:00	0,202
7:20	0,138

Tabela A.1: Tempo de retenção e constante de convecção

Uma observação importante pode ser feita: por esse modelo, volumes que permanecem no túnel idênticas frações de seus tempos de exposição ideais adquirem a mesma temperatura de núcleo.

### Aumento da temperatura do túnel

A temperatura do ar no túnel ao longo do dia é função de seu carregamento. Embora o modelo de túnel usado no texto ignore este fato, registramos aqui um sistema de equações diferenciais que pode ser usado como primeira aproximação do problema.

No túnel, os volumes cedem calor ao ar e ao metal de sua estrutura interna. O ar, por sua vez, cede calor às aletas da serpentina do congelador. Também ar e metal trocam calor. Usando as considerações acima acerca do resfriamento dos volumes, assumindo que o fluxo de ar pelas aletas é constante, com temperatura de entrada  $\Theta_A(t)$  e temperatura de saída  $-40^\circ\text{C}$ , e ainda, que o ar e o metal estão em equilíbrio térmico entre si, o processo é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais

$$C_T \cdot \Theta_V'(t) + \sum_V C_V \cdot \Theta_V'(t) = -K_T \cdot (\Theta_T(t) - \Theta_S)$$

$$\Theta_V'(t) = -K_V \cdot (\Theta_V(t) - \Theta_T(t))$$

onde:

$\Theta_T(t)$  é a temperatura do túnel no instante  $t$  (h).

$\Theta_S$  é a temperatura das aletas da serpentina do túnel ( $-40^\circ\text{C}$ ).

$C_T$  é a capacidade térmica do túnel (ar e estrutura interna).

$K_T$  é uma constante que rege a transmissão de calor entre o ar e as aletas.

A primeira equação diz que o calor cedido pelo ar às aletas é proporcional à diferença de temperaturas  $\Theta_T(t) - \Theta_S$  e que este calor é transferido ao ar e à estrutura pelos volumes.

As equações restantes dizem que a queda de temperatura dos volumes é proporcional ao gradiente de temperatura  $\Theta_T(t) - \Theta_T(t)$ .

A solução deste sistema de equações não é difícil, envolveria apenas o cálculo de um sistema de equações lineares. A dificuldade é que as condições de contorno mudam a cada entrada de um novo volume no túnel. Por isso, talvez convenha trabalhar com este modelo em equações a diferenças discretas.

Uma outra lacuna do modelo é a ausência de influência da temperatura ambiente. É razoável esperar um maior rendimento do túnel a uma temperatura ambiente menor.

## Bibliografia

- [IY81] Ivahashi, Y. et al., "Computer control systems for continuous reheating furnace", Preprints 8th IFAC World Congress, XVIII (1981) 147-152.
- [AS87] Arkin, E.M., e Silverberg, E.B., "Scheduling jobs with fixed start and end times", Discrete and Applied Mathematics 18 (1987) 1-8.
- [Ga87] Gavril, F., "Algorithms for maximum k-coloring and k-covering of transitive graphs", Networks 17 (1987) 465-470.
- [TW88] Tovey, C.A., Weiss, G., and Wilson, J.R., "Minimum spillage sequencing", Management Science 34 (1988) 306-330.
- [Na92] Nawijn, W.M., "Minimum loss scheduling problems", European Journal of Operational Research 56 (1992) 364-369.
- [Me92] Mendes, M.J., "O CIM e a indústria siderúrgica" publicado pelo Instituto Latino-Americano de Tecnologia e IBM Brasil (1992).
- [SL93] Sarrafzadeh, M., Lou, R., D., "Maximum k-coloring and k-covering of weighted transitive graphs with applications", Algoritmica 9 (1993) 84-100.
- [BK95] Bell, P.C., O'Keefe, R.M., "An experimental investigation into the efficacy of visual interactive simulation", Management Science 41 (1995) 1018-1038.
- [AL95] Avi-Itzak, B., Levy, H., "A sequence of Servers with arbitrary input and regular service times revisited", Management Science 41 (1995) 1039-1047.