
LEIS DE CONSERVAÇÃO

SÔNIA MOREIRA FERREIRA LOPES

AOS MEUS PAIS.

AGRADECIMENTOS

Ao PROFESSOR JOSÉ LUIZ BOLDRINI PELA ORIENTAÇÃO CONSTANTE.

Ao CNPQ E CAPES PELO APOIO FINANCEIRO.

AOS COLEGAS, PROFESSORES E FUNCIONÁRIOS DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO, PELA COLABORAÇÃO.

AOS AMIGOS PELO INCENTIVO.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	i
1 - LEIS DE CONSERVAÇÃO.....	01
1.1 Equações Associadas às Leis de Conservação.....	01
1.2 Soluções regulares e Curvas características.....	04
1.3 Soluções descontínuas, choques e condições de Rankine- Hugoniot.....	08
1.3.1 Condições de Rankine-Hugoniot.....	08
1.3.2 Problemas com unicidade de soluções.....	12
2 - PROBLEMAS DE RIEMANN PARA LEIS DE CONSERVAÇÃO.....	15
2.1 Caso Escalar.....	15
2.1.1 O critério de Lax e choques Permissíveis.....	15
2.1.2 Ondas de Rarefação.....	19
2.1.3 Conclusão.....	21
2.2 Caso de Sistemas.....	22
2.2.1 O Critério de Lax e Choques Permissíveis.....	22
2.2.2 Ondas de Rarefação.....	26
2.2.3 Sistemas-p.....	27
2.3 O Critério de Imersão em uma "Teoria mais Completa"...	40
2.3.1 Pseudo Viscosidade.....	40
2.3.2 Pseudo Viscosidade Modificado.....	41
3 - COMPARAÇÃO ENTRE AS SOLUÇÕES DADAS PELO CRITÉRIO DE LAX E PELA PSEUDO VISCOSIDADE MODIFICADO: EVIDÊNCIA NUMÉRICA DA COINCIDÊNCIA GLOBAL.....	43

3.1 Sistemas-p.....	43
3.2 Sistemas-p com transição de Fase.....	53
- BIBLIOGRAFIA.....	57

INTRODUÇÃO

A modelagem dinâmica de fenômenos físicos é frequentemente baseada em princípios físicos chamados Leis de Conservação. Para muitas classes de materiais as equações resultantes de tais princípios são escritas na forma (para o caso unidimensional):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$$

onde $U(x, t)$ representa as variáveis de estado (tais como densidade, temperatura, etc) no ponto x e instante t e $F(U)$ é o fluxo dessas variáveis.

Uma dificuldade que estas equações apresentam é que nem sempre elas admitem soluções regulares (contínuas) e, quando isto acontece, dizemos que a solução tem uma onda de choque (na região de descontinuidade). Soluções desse tipo são difíceis de serem analisadas e obtidas porque as ferramentas matemáticas mais frequentes não podem ser usadas.

Neste trabalho analisamos um tipo especial de equações associadas a leis de conservação que aparece frequentemente nas aplicações, e descrevemos as soluções "corretas" do Problema de Riemann associado ao sistema segundo o critério de Lax. A seguir descrevemos outros critérios para a obtenção de soluções "corretas" e propomos um método numérico baseado em um

critério proposto por Dafermos (veja [1], [2], [3]). Fazemos ensaios numéricos e encontramos evidência da coincidência das soluções obtidas pelo Critério de Lax e de Dafermos. Finalmente utilizamos métodos numéricos para obter algumas informações sobre sistemas de leis de conservação para os quais o critério de Lax não pode ser aplicado (sistemas que admitem mudanças de fase) e pouco é conhecido sobre o comportamento dinâmico das soluções.

CAPÍTULO I

LEIS DE CONSERVAÇÃO

Consideremos um fenômeno físico ocorrendo em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e caracterizado matematicamente por um vetor de estado $u(x,t) \in \mathbb{R}^k$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, onde x é o ponto onde o estado está sendo medido e t o respectivo instante de tempo.

EXEMPLO: No caso de dinâmica de gases à temperatura constante, é usual considerar:

$$u(x,t) = \begin{vmatrix} \rho(x,t) \\ v(x,t) \end{vmatrix}$$

onde $\rho(x,t)$ é a densidade, $v(x,t)$ a velocidade.

1.1 - EQUAÇÕES ASSOCIADAS A LEIS DE CONSERVAÇÃO

Queremos obter equações que regem as mudanças de u em Ω e em função do tempo, e para isso suponhamos que a função fluxo de u seja dada e denotada por $J(x,t) \in \mathbb{R}^n$ para cada $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$.

Observemos então que, se $S \subset \Omega$ for uma superfície orientada então, por definição de fluxo, a quantidade de u que atravessa S na unidade de tempo é dada por:

$$\int_S J(x,t) \cdot \vec{n}(x) \, ds$$

onde $\vec{n}(x)$ é a normal unitária no ponto $x \in S$.

Suponhamos além disso, que $g(x,t)$ é a função que descreve a densidade de fontes e sorvedouros de u . Assim, dado um volume $V \subset \Omega$, a integral

$$\int_V g(x,t) dv$$

fornece quanto de u foi gerado na unidade de tempo.

Além disso, se V tiver fronteira ∂V orientável com normais apontando para o exterior, então a quantia de u que fica dentro de V na unidade de tempo proveniente do "arrasto" de fluxo J , é dado por:

$$- \int_{\partial V} J(x,t) \cdot \vec{n}(x) dx$$

Como a quantia de u em um volume V e um certo instante t é dado por:

$$\int_V u(x,t) dv$$

Então, os princípios de conservação implicam que:

$$\frac{d}{dt} \int_V u(x,t) dv = - \int_{\partial V} J \cdot \vec{n} dA + \int_V g dv \quad (1.1)$$

ou integrando em t de t_0 até t_1 .

$$\begin{aligned} & \int_V u(x,t_1) dv - \int_V u(x,t_0) dv = \\ & = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial V} J \cdot \vec{n} dA dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_V g dv dt \end{aligned} \quad (1.2)$$

Se supusermos que $u(x,t)$, $J(x,t)$ e $g(x,t)$ são suficientemente regulares, em particular que $J(x,t)$ tenha derivadas espaciais contínuas, o uso do Teorema da divergência de Gauss nos leva a

$$\int_{\partial V} J \cdot n \, dA = \int_V \operatorname{div} J \, dv$$

Então (1.1) se torna

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} \, dv = - \int_V \operatorname{div} J \, dv + \int_V g \, dv$$

$$\implies \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} J - g \right) dv = 0$$

Como esta equação vale para todo volume V , devemos ter:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} J = g} \quad (1.3)$$

Esta equação é a forma diferencial da lei de conservação, também conhecida como equação da continuidade.

As equações anteriores são bastante gerais. No entanto a diferenciação entre os vários fenômenos é dada pela diferenciação da relação entre $u(x,t)$ e $J(x,t)$, isto é, pelas relações constitutivas. Estaremos interessados em relações constitutivas da forma:

$$J = f(u)$$

Além disso, consideremos apenas o caso $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$ e $g = 0$

Então (1.3) se torna

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

ou mais explicitamente, se

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \quad f(u) = \begin{pmatrix} f_1(u_1, \dots, u_k) \\ \vdots \\ f_k(u_1, \dots, u_k) \end{pmatrix}$$

temos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f_1(u_1, \dots, u_k) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f_k(u_1, \dots, u_k) = 0 \end{cases}$$

1.2 - SOLUÇÕES REGULARES E CURVAS CARACTERÍSTICAS

Consideremos o caso de uma equação escalar em dimensão espacial um. Isto é, consideremos o seguinte problema de valor inicial.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{array} \right. \quad \forall t > 0, -\infty < x < \infty \quad (1.4)$$

Onde $f(u)$ é a função fluxo e é suposta regular.

Suponhamos inicialmente que $u_0(x)$ e a solução procurada são regulares. Vamos analisar as propriedades que a solução $u(x,t)$ deve satisfazer.

Primeiramente, devido a regularidade de u temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

Consideremos agora uma curva $x = \gamma(t)$ no plano (x,t) (que será chamada de curva característica da equação) satisfazendo a equação diferencial ordinária.

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(x,t))$$

isto é,

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = f'(u(\gamma(t),t)), \quad \forall t \geq 0 \quad (1.6)$$

Consideremos ainda a restrição de $u(x,t)$ a esta curva, isto é,

$$v(t) = u(\gamma(t),t)$$

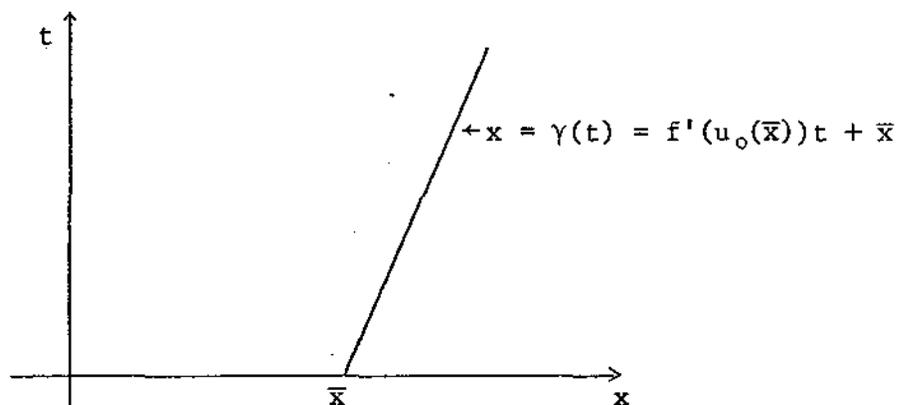
Então

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(t),t) \cdot \frac{d\gamma(t)}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}(\gamma(t),t)$$

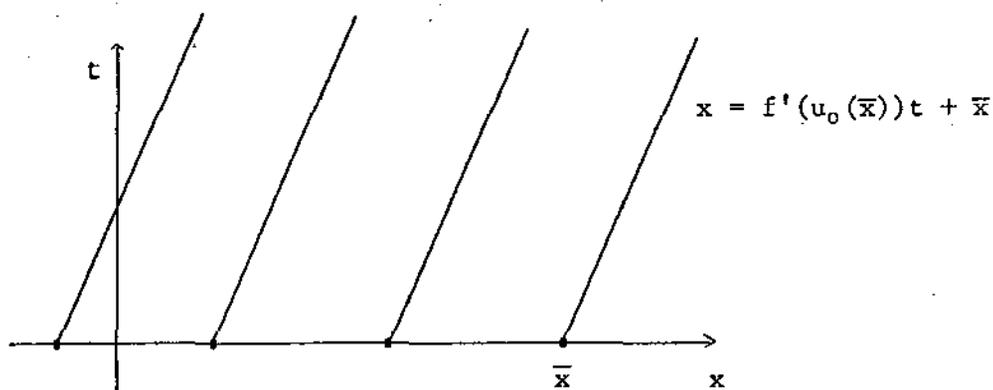
ou usando (1.5) e (1.6) temos

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}(\gamma(t),t) + f'(u(\gamma(t),t)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(t),t) = 0$$

Portanto $v(t)$ é constante e assim $u(x,t)$ restrita a curva $x = \gamma(t)$ é também constante, e ainda (1.6) implica que $\gamma(t)$ é uma reta com inclinação associada a $f'(u_0(x))$



Usando estes argumentos podemos construir a solução $u(x,t)$ a partir da condição inicial $u_0(x)$ em $t = 0$, simplesmente traçando as retas características com as inclinações dadas por $f'(u_0(x))$. Poderemos ter então a solução como na figura abaixo.

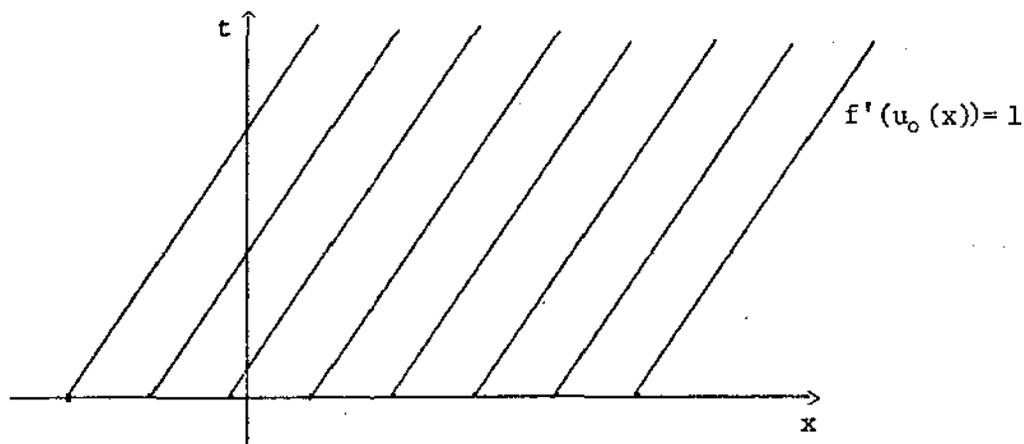


EXEMPLO: Achar a solução de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \\ u(x,0) = 1 \end{array} \right. \quad \forall t > 0 \text{ e } -\infty < x < \infty$$

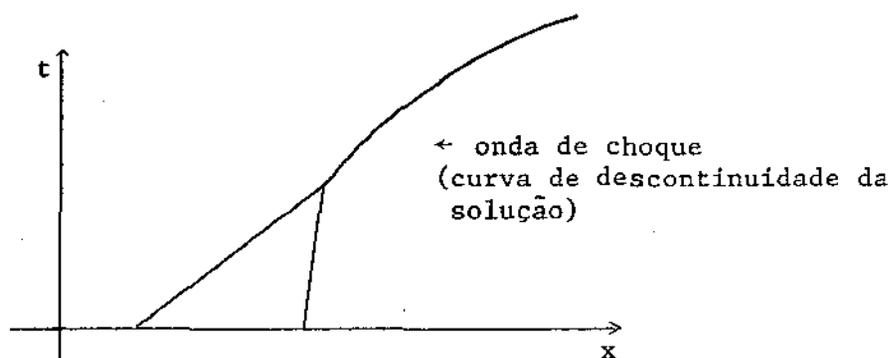
temos que $f'(u) = u \implies f'(u_0(x)) = 1$.

Assim a solução é como na figura abaixo.



Suponhamos no entanto que $f'(u)$ é estritamente crescente e $u_0(x)$ estritamente decrescente em alguma região, então as retas características provenientes de dois pontos distintos na condição inicial se cruzarão, e não poderemos atribuir um valor único para $u(x,t)$ no ponto de cruzamento. Isto significa que mesmo que $u_0(x)$ seja bastante regular, não poderemos assumir que $u(x,t)$ será regular para todo $t > 0$.

Resolve-se isto admitindo soluções descontínuas (choques) e dizendo que ondas de choque são formadas quando as características colidem.



1.3 - SOLUÇÕES DESCONTÍNUAS, CHOQUES E CONDIÇÕES DE RANKINE - HUGONIOT

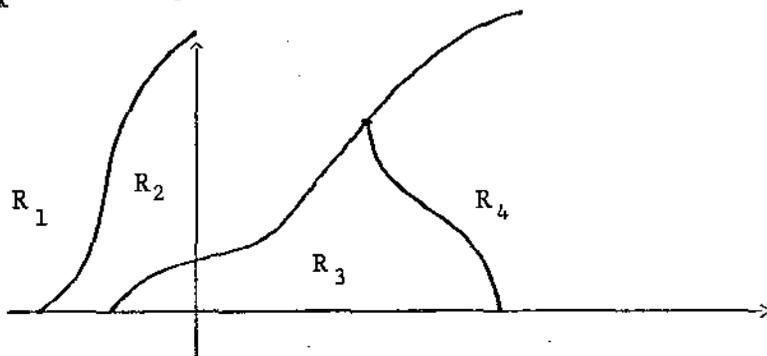
Adotaremos nesta seção, a postura de aceitar soluções descontínuas.

1.3.1 - CONDIÇÕES DE RANKINE-HUGONIOT

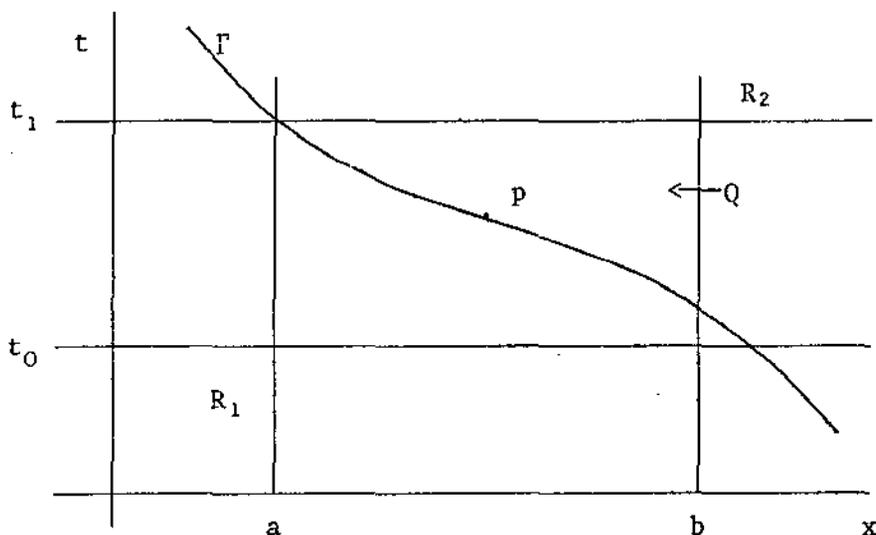
Procuremos condições que soluções descontínuas devem satisfazer nas regiões de descontinuidade. Tais condições são chamadas condições de Rankine-Hugoniot e para obtê-las devemos retornar à formulação integral do problema para a qual soluções descontínuas fazem sentido.

Vamos procurar as condições de descontinuidade na classe de soluções suaves por partes, isto é, soluções $u(x,t)$ suaves em cada uma das regiões abertas R_1, R_2, \dots, R_k tais que $R \times (0, \infty) = \cup \bar{R}_k$, com extensão contínua para o bordo $\partial \bar{R}_k$ de cada região e tal que ∂R_k seja diferenciável a menos de pontos de contacto de mais do que duas regiões.

OBS: As ∂R_k são interpretadas fisicamente como ondas de choque.



Analiseemos o que acontece em um ponto p do espaço tempo de contacto entre duas de tais regiões (denotadas por R_1 e R_2). Consideremos um retângulo qualquer Q no espaço tempo, tal que $P \in [a, b] \times [t_0, t_1]$. Seja Γ o segmento da curva de descontinuidade de u contida em Q



Denotemos por $u^+(x, t)$ e $u^-(x, t)$ os valores de u sobre Γ por extensão sobre \bar{R}_2 e \bar{R}_1 respectivamente.

Como $u(x, t)$ é solução da equação integral (1.2), temos:

$$0 = \int_a^b u(x, t_1) dx - \int_a^b u(x, t_0) dx + \int_{t_0}^{t_1} [f(u(b, t)) - f(u(a, t))] dt$$

Se denotarmos $\vec{F}(x, t) = (f(u(x, t)), u(x, t))$ a equação acima é equivalente a

$$\int_{\partial Q} \vec{F} \cdot \vec{N} ds = 0 \quad (1.7)$$

Onde ∂Q é o bordo de Q e ds é o elemento infinitesimal do comprimento de arco sobre ∂Q e \vec{N} é o vetor unitário exterior

a Q.

Além disso, sejam $V_1 = R_1 \cap Q$ e $V_2 = R_2 \cap Q$, e como em R_1 e R_2 $u(x,t)$ é regular, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(u(x,t)) = 0, \quad \forall (x,t) \in V_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(u(x,t)) = 0, \quad \forall (x,t) \in V_2$$

então

$$0 = \iint_{V_1} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(u(x,t)) \right) dx dt$$

$$0 = \iint_{V_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial x}(u(x,t)) \right) dx dt$$

usando a notação anterior:

$$0 = \iint_{V_1} \operatorname{div}_{(x,t)} \vec{F}(x,t) dx dt$$

$$0 = \iint_{V_2} \operatorname{div}_{(x,t)} \vec{F}(x,t) dx dt$$

$$\text{onde, } \operatorname{div}_{(x,t)} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{du}{dt},$$

NV_1 é o vetor unitário exterior a V_1 e NV_2 é o vetor unitário exterior a V_2 .

Somando membro a membro as duas últimas igualdades, lembrando que $NV_1 = -NV_2$ sobre Γ , temos:

$$0 = \int_{\partial Q} \vec{F} \cdot \vec{N} ds + \int_{\Gamma} (\vec{F}(x,t) - \vec{F}(x,t)) \cdot \vec{N} V_2 ds$$

onde

$$\vec{F}^+(x, t) = (f(u^+(x, t)), u^+(x, t))$$

$$\vec{F}^-(x, t) = (f(u^-(x, t)), u^-(x, t))$$

usando (1.7) temos:

$$0 = \int_{\Gamma} (\vec{F}^+(x, t) - \vec{F}^-(x, t)) \cdot \vec{N} V_2 ds$$

mas, se $x = x(t)$ é uma parametrização diferencial de Γ ,

então

$$NV_2 ds = \left(-1, \frac{dx}{dt} \right) dt$$

Assim obtemos

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left[-(f(u^+(x(t), t)) - f(u^-(x(t), t))) + \right. \\ \left. + (u^+(x(t), t) - u^-(x(t), t)) \frac{dx}{dt} \right] dt$$

Como este resultado vale para qualquer t_0, t_1 (desde que p pertença ao Q correspondente) e a função do integrando é contínua, concluímos:

$$S[u^+ - u^-] = [f(u^+) - f(u^-)]$$

onde $S = \frac{dx}{dt}$ é interpretada fisicamente como velocidade da onda de choque.

Como exemplo de aplicação, podemos agora achar a solução do seguinte problema de valor inicial

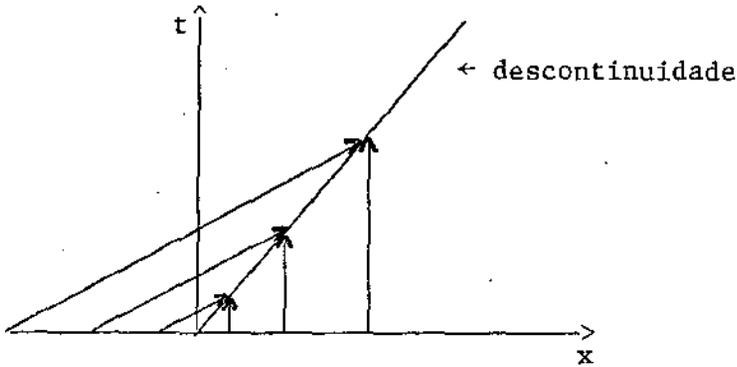
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} = 0 \quad -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Para esta equação a condição de Rankine-Hugoniot é

$$S [0 - 1] = [0 - 1]$$

$$S = 1 \implies \frac{dx}{dt} = 1 \implies x = t$$

As curvas características no plano (x,t) ficam como na figura



A solução do problema é, portanto

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < t \\ 0 & \text{se } x > t \end{cases}$$

1.3.2 - PROBLEMAS COM A UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Quando permitimos soluções descontínuas satisfazendo as condições de Rankine-Hugoniot não temos ainda todos os nossos problemas resolvidos.

Considere o exemplo abaixo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0 \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

$$u(x,0) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Neste caso, temos pelo menos duas (na verdade são per

mitidas infinitas) soluções satisfazendo a condição de Rankine - Hugoniot.

$$1) u(x,t) = \begin{cases} 1 & x > 0, t > 0 \\ -1 & x < 0, t > 0 \end{cases}$$

$$2) u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > \frac{1}{2} t \\ 0 & \text{se } -\frac{1}{2} t < x < \frac{1}{2} t \\ -1 & \text{se } x < -\frac{1}{2} t \end{cases}$$

Temos portanto, que esclarecer critérios que nos permitam estabelecer uma única solução.

Neste trabalho consideraremos duas possibilidades (a serem explicadas posteriormente com mais detalhes).

I) CRITÉRIO DE LAX.

É uma espécie de critério de causalidade, isto é, do ponto de vista filosófico, exige-se que o futuro seja determinado pelo passado e não ao contrário, e se traduz ao ponto de vista matemático, por desigualdades relacionando a velocidade dos choques e as inclinações das características.

II) CRITÉRIO DA IMERSÃO EM UMA "TEORIA MAIS COMPLETA"

Heurísticamente, este critério estabelece que estas dificuldades são obtidas por estarmos considerando uma teoria incompleta do material, isto é, se considerássemos funções mais realistas para a função fluxo (considerando por exemplo a viscosidade) não teríamos descontinuidade, mas sim transições rápidas

das. Deveríamos exigir portanto, que as soluções dadas por estas teorias "mais completas" se aproximem da solução com descontinuidade "correta" quando os termos extras da "teoria mais completa" se aproximarem de zero.

CAPITULO II

PROBLEMAS DE RIEMANN PARA LEIS DE CONSERVAÇÃO

Consideremos o problema de achar $U(x,t)$, para $t > 0$ e $-\infty < x < \infty$ tal que:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0$$

$$U(x,0) = \begin{cases} U^- & p/ & x < 0 \\ U^+ & p/ & x > 0 \end{cases}$$

onde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é suave

Este problema especial é importante tanto do ponto de vista teórico (mais fácil de ser entendido) quanto do ponto de vista numérico, isto é, aproximações de condições iniciais mais gerais podem ser obtidas usando interpolação juntamente com soluções de vários problemas de Riemann (métodos de Goudunov - Glimm). Uma boa referência para este capítulo é [5].

2.1 - CASO ESCALAR

Consideremos o caso de apenas uma equação escalar.

2.1.1 - O CRITÉRIO DE LAX E CHOQUES PERMISSÍVEIS

Considere o seguinte problema:

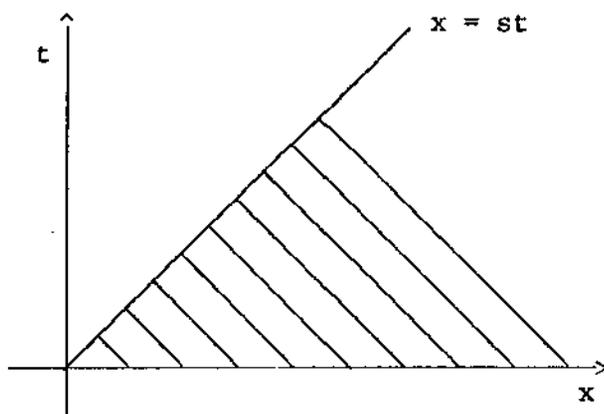
Achar $u(x,t) \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} u^- & \text{se } x < 0 \\ u^+ & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

onde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f''(u) > 0$

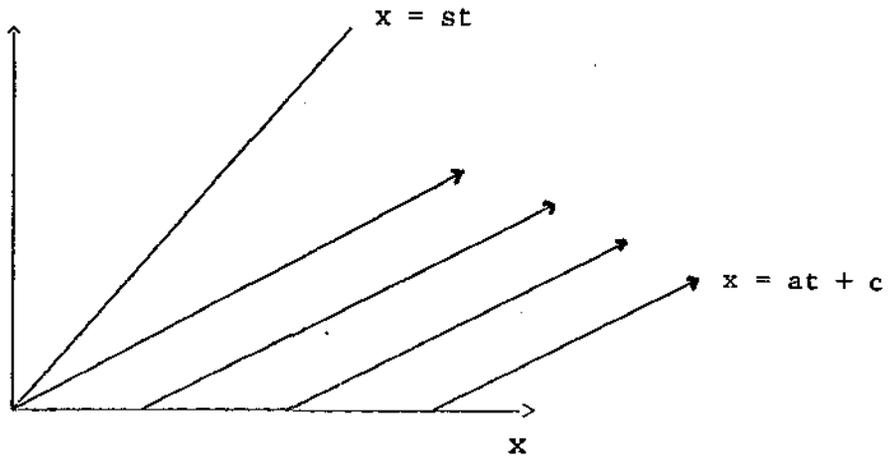
Para este caso temos primeiramente que detalhar o critério da Lax. Para isto consideremos inicialmente o seguinte problema linear:

Achar a solução $u(x,t)$ de $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, sendo $a = \text{constante}$ na região $x > st$, com s dado e conhecendo $u(x,0)$ para $x > 0$.

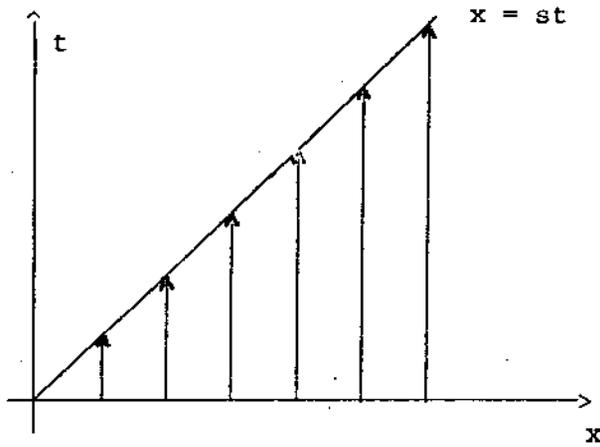


A questão é; em que condições isto é possível sem impor arbitrariamente uma condição adicional (no caso, o valor de contorno $u(x,t)$ sobre a reta $x = st$).

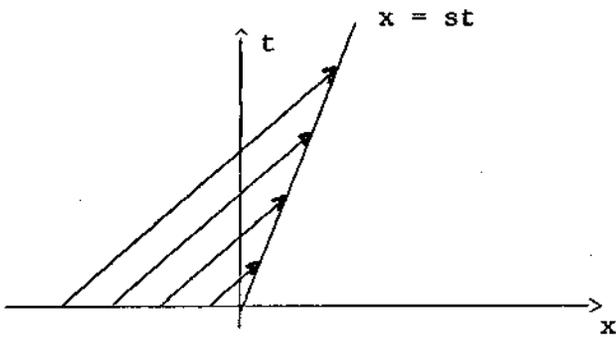
Como $u(x,t)$ é constante ao longo das características, observemos que, se $a > s$ não é possível determinar $u(x,t)$ na região sem impor condições adicionais



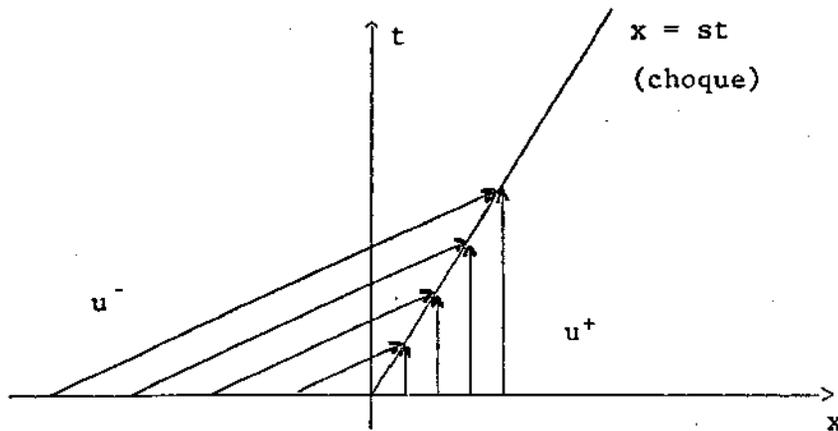
por outro lado se $a < s$ isto é possível.



Analogamente quando a condição inicial é dada para $x < 0$, concluímos que é possível determinar $u(x,t)$ sem impor condições adicionais para $a > s$



Por outro lado, observemos que colocar uma onda de choque no problema de Riemann é equivalente a dois destes problemas se assumirmos a postura filosófica de que os valores à esquerda e à direita do choque devem ser totalmente determinados pelas condições iniciais (causalidade).



Do argumento anterior, vemos que para o valor u^+ a direita do choque ser determinado pelas condições iniciais, a inclinação das características à direita (neste caso $a = f'(u^+)$) deve satisfazer $f'(u^+) < s$ e analogamente à esquerda $f'(u^-) > s$.

Temos então a condição de Lax para choques permissíveis com velocidade s

$$f'(u^+) < s < f'(u^-)$$

Como por hipótese $f''(u) > 0$, então f é crescente e a condição de Lax se resume a exigir $u^+ < u^-$. Isto significa que, se no problema de Riemann (2.1) temos $u^+ < u^-$ a solução é dada por:

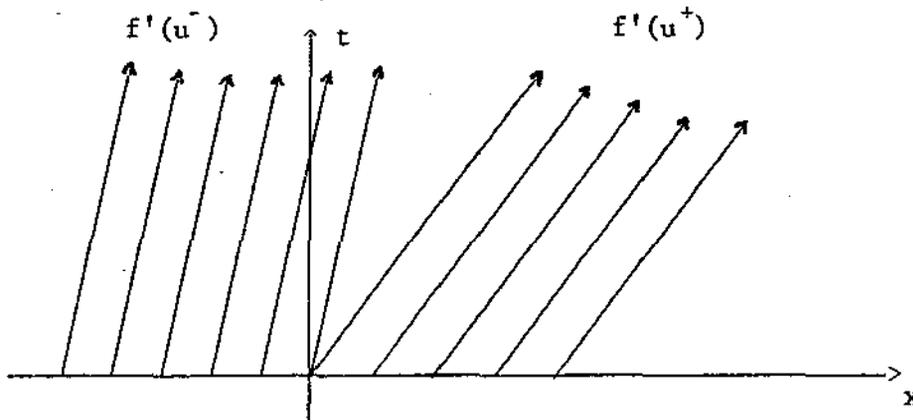
$$u(x,t) = \begin{cases} u^- & \text{para } x < st, t > 0 \\ u^+ & \text{para } x > st, t > 0 \end{cases}$$

onde, pela condição de Rankine-Hugoniot s é dado por:

$$s = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$$

2.1.2 - ONDAS DE RAREFAÇÃO

No caso em que $u^- < u^+$ choques não são permitidos segundo o critério de Lax, isto significa que teremos um "buraco" no semi-plano $\{(x,t), t > 0\}$, com a solução ainda não determinada neste buraco



Nesta situação introduz-se uma solução especial (chamada onda de rarefação) no "buraco" de tal forma que teremos uma solução definida em todo semi-plano $\{(x,t), t > 0\}$.

Estas ondas de rarefação são soluções diferenciáveis (exeto na origem) da equação.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

da forma $u(x,t) = w\left(\frac{x}{t}\right)$, isto é, são soluções constantes ao longo de cada reta $\frac{x}{t} = \xi$, para:

$$f'(u^-) \leq \xi \leq f'(u^+)$$

$$\text{e tais que } w(f'(u^-)) = u^- \text{ e } w(f'(u^+)) = u^+$$

Para determinarmos $w(\xi)$, observemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dw}{d\xi} \cdot \left(-\frac{x}{t^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dw}{d\xi} \cdot \frac{1}{t}$$

Substituindo na equação (2.2), temos

$$\left[-\xi + f'(w(\xi)) \right] \frac{dw}{d\xi} = 0$$

impondo a condição $\frac{dw}{d\xi} \neq 0$ temos que $w(\xi)$ deve satisfazer $f'(w(\xi)) = \xi$ que juntamente com as condições anteriores determina $w(\xi)$.

EXEMPLO: Achar a solução de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^3}{3} \right) = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

como $u^- = 1 < 2 = u^+$ devemos ter uma onda de rarefação partindo da

origem. Neste caso

$$f(u) = \frac{u^3}{3}, \quad f'(u) = u^2$$

então devemos ter

$$w^2(\xi) = \xi$$

$$w(f'(u^-)) = w(1) = 1$$

$$w(f'(u^+)) = w(4) = 2$$

$$\text{Isto é, } w(\xi) = \sqrt{\xi}$$

Portanto a solução é:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < t \\ \sqrt{\frac{x}{t}} & \text{se } t < x < 4t \\ 2 & \text{se } x > 4t \end{cases}$$

2.1.3 - CONCLUSÃO

Das discussões anteriores, o Problema de Riemann no caso escalar (2.1) pode ser completamente resolvido da seguinte forma

I - se $u^- = u^+$, a solução é trivial $u(x,t) = u^- = u^+$

II - se $u^- > u^+$, a solução é dada por:

$$u(x,t) = \begin{cases} u^- & \text{se } x < st, t > 0 \\ u^+ & \text{se } x > st, t > 0 \end{cases}$$

$$\text{com } s = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$$

III - Se $u^+ < u^-$, a solução é dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} u^- & \text{se } x < f'(u^-) t \\ w(\xi) & \text{se } f'(u^-) t < x < f'(u^+) t \\ u^+ & \text{se } x > f'(u^+) t \end{cases}$$

onde $w(\xi)$ é determinado pelas condições $f'(w(\xi)) = \xi$; $w(f'(u^-)) = u^-$; $w(f'(u^+)) = u^+$ com $\xi = \frac{x}{t}$

2.2 - CASO DE SISTEMAS

Consideremos agora o caso quando temos várias equações escalares acopladas.

2.2.1 - O CRITÉRIO DE LAX E CHOQUES PERMISSÍVEIS

Como motivação para a condição de Lax, consideremos um sistema de n equações lineares, escrito na forma

$$U_t + \Lambda U_x = 0$$

onde

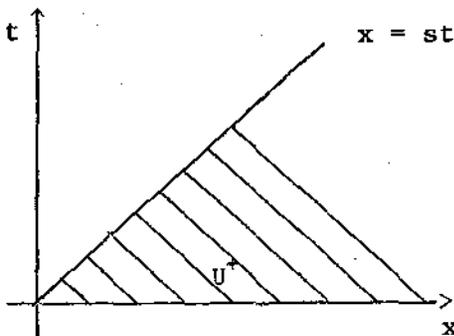
$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}$$

com $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ e $U = (u_1, \dots, u_n)^T$

Inicialmente, procuremos quantas condições de contorno no devemos impor para resolver o seguinte problema na região:
 $\{(x,t); t > 0, x > st\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t + \Lambda U_x = 0 \\ U(x,0) = U^+ \text{ para } x > 0 \\ \text{condições de contorno em } \{(x,t), x = st, t > 0\} \end{array} \right.$$

com U^+ e s dados.



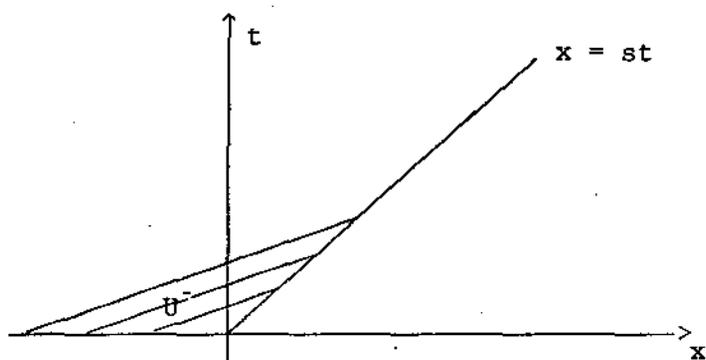
Raciocinando como no caso escalar, com cada uma das curvas características dadas por $\frac{dx}{dt} = \lambda_i$, vemos que se;

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_k < s < \lambda_{k+1} < \dots < \lambda_n$$

temos que impor $n-k$ condições de contorno em
 $\{(x,t), t > 0, x = st\}$

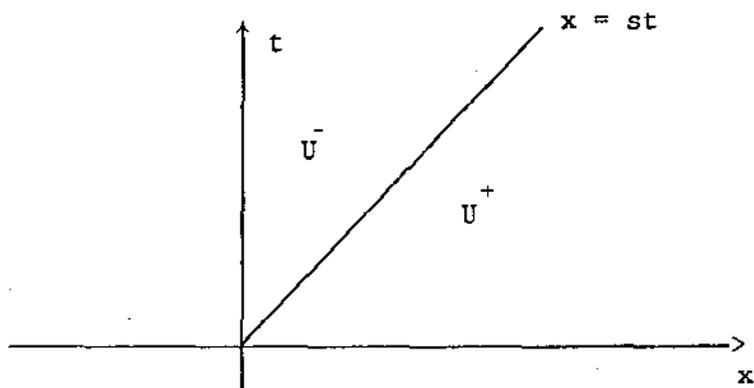
analogamente para resolvermos o problema na região
 $\{(x,t), t > 0, x < st\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t + \Lambda U_x = 0 \\ U(x,0) = U^- \text{ para } x < 0 \\ \text{condições de contorno em } \{(x,t); t > 0, x = st\} \end{array} \right.$$



se, neste caso $\lambda_1 < \dots < \lambda_\ell < s < \lambda_{\ell+1} < \dots < \lambda_n$ temos que impor ℓ condições de contorno.

Este raciocínio implica que, se tivermos um choque com velocidade s segundo a figura abaixo



para a equação

$$U_t + F(U)_x = 0$$

$$\text{com } F(U) = (f_1(U), f_2(U), \dots, f_n(U))^T$$

Teremos do lado direito do choque a equação:

$$U_t + dF(U^+) U_x = 0$$

onde $dF(U)$ é a matriz Jacobiana de F .

Portanto, se $\lambda_1(U^+) < \lambda_2(U^+) < \dots < \lambda_n(U^+)$ forem os autovalores de $dF(U^+)$ e $[\lambda_1(U^+) < \dots < \lambda_k(U^+) < S < \lambda_{k+1}(U^+) < \dots < \lambda_n(U^+)]$ devemos impor $n-k$ condições de contorno.

Raciocinando analogamente do lado esquerdo do choque, temos que se

$$\lambda_1(U^-) < \dots < \lambda_\ell(U^-) < S < \lambda_{\ell+1}(U^-) < \dots < \lambda_n(U^-)$$

onde os $\lambda_i(U^-)$ são autovalores de $dF(U^-)$, devemos impor ℓ condições.

Portanto estamos "livres" para impor $n-k+\ell$ condições. Porém, devemos obedecer as condições de Rankine-Hugoniot.

$$S [U^+ - U^-] = [F(U^+) - F(U^-)]$$

Eliminando S das n equações escalares pela condição de Rankine-Hugoniot, obtemos $n-1$ equações que devem ser satisfeitas por U^- e U^+ .

Portanto, para que a solução dependa somente de condições iniciais e não de condições de contorno impostas arbitrariamente no choque, devemos ter $n-k+\ell = n-1$, isto é, $\ell = k-1$.

Temos então que, para um choque ser permissível segundo o critério de Lax, dados U^+ , U^- e S , para algum k ($1 \leq k \leq n$) devemos ter:

$$\lambda_1(U^+) < \dots < \lambda_k(U^+) < s < \lambda_{k+1}(U^+) < \dots < \lambda_n(U^+)$$

$$\lambda_1(U^-) < \dots < \lambda_{k-1}(U^-) < s < \lambda_k(U^-) < \dots < \lambda_n(U^-)$$

2.2.2 - ONDAS DE RAREFAÇÃO

Vamos agora, como no caso escalar, analisar soluções do tipo ondas de rarefação.

Uma onda de rarefação é definida como uma solução contínua da equação

$$U_t + F(U)_x = 0$$

$$\text{da forma } U = U\left(\frac{x}{t}\right)$$

Na onda de rarefação, as características são semi-retas que saem da origem do plano (x,t) , pois os λ_k são funções de U , que por sua vez só dependem de x/t . Deste modo

$$\frac{x}{t} = \lambda_k(U(x/t)) \quad (2.3)$$

Denotando $\xi = x/t$, então $U(\xi)$ deve satisfazer a equação diferencial ordinária

$$-\xi U_\xi + F_\xi(U) = 0$$

ou

$$(dF(u) - \xi I) U_\xi = 0 \quad (2.4)$$

onde I é a matriz identidade.

Impondo a condição $U_\xi \neq 0$, então U_ξ deverá ser um autovetor de $dF(U)$ correspondente ao autovalor ξ . Quando $dF(U)$ possui n autovalores reais e distintos, temos n famílias de onda de refração.

A seguir estudaremos um sistema especial e muito importante nas aplicações que fará com que as noções anteriores sejam melhor compreendidas.

2.2.3 - SISTEMAS - P

Resolveremos agora, o seguinte Problema de Riemann:

Achar $u(x,t)$, $v(x,t)$ com $-\infty < x < +\infty$ e $t > 0$, tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - v_x = 0 \\ v_t + p(u)_x = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} u^+ & \text{se } x > 0 \\ u^- & \text{se } x < 0 \end{cases} \\ v(x,0) = \begin{cases} v^+ & \text{se } x > 0 \\ v^- & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

com as condições:

$$p'(u) = \frac{dP(u)}{du} < 0 \quad \text{e} \quad p''(u) = \frac{d^2P(u)}{du^2} > 0$$

Se escrevermos

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} -v \\ p(u) \end{bmatrix}$$

a matriz Jacobiana de $F(U)$ é

$$dF(U) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ p'(u) & 0 \end{bmatrix}$$

que devido as condições sobre $p(u)$, possui dois autovalores reais e distintos $\lambda_1(U)$ e $\lambda_2(U)$.

$$\lambda_1(U) = -\sqrt{-p'(u)} < 0 < \sqrt{-p'(u)} = \lambda_2(U)$$

Vamos analisar o problema de Riemann (2.5) que consiste no seguinte PVI

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 \\ U(x,0) = \begin{cases} U^- & \text{se } x < 0 \\ U^+ & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\text{sendo } U^- = \begin{bmatrix} u^- \\ v^- \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U^+ = \begin{bmatrix} u^+ \\ v^+ \end{bmatrix}$$

Analisemos os choques permissíveis segundo o critério de Lax. Temos as possibilidades:

a) 1-choque (Back-Shock) satisfazendo

$$\lambda_1(U^+) < s < \lambda_2(U^+)$$

e

$$s < \lambda_1(U^-) < \lambda_2(U^-)$$

b) 2-choque (Front-shock) satisfazendo

$$\lambda_1(U^+) < \lambda_2(U^+) < s$$

e

$$\lambda_1(U^-) < s < \lambda_2(U^-)$$

Proporemos a seguinte questão:

Dado U^- quais são os estados U^+ que podem ser ligados a direita de U^- através de 1-choque e 2-choque?

Suponhamos primeiramente que $U^- = (u^-, v^-)^T$ e $U^+ = (u^+, v^+)^T$ sejam ligados por 1-choque. As relações de Lax impõem que

$$\lambda_1(U^+) < s < \lambda_1(U^-)$$

ou

$$-\sqrt{-p'(u^+)} < s < -\sqrt{-p'(u^-)}$$

Esta desigualdade juntamente com a condição $p''(u) > 0$, implicam que:

$$u^- > u^+$$

Por outro lado, devemos satisfazer as condições de Rankine-Hugoniot.

$$s [u^+ - u^-] = -v^+ + v^-$$

$$s [v^+ - v^-] = p(u^+) - p(u^-)$$

eliminando s , temos

$$v^+ = v^- \pm \sqrt{(u^+ - u^-)(p(u^-) - p(u^+))}$$

para escolhermos o sinal certo, observemos que:

$$s < \lambda_1(U^-) = -\sqrt{-p'(u^-)} < 0, \text{ e como sabemos que}$$

$u^- > u^+$ a primeira das relações de Rankine-Hugoniot implicam que $v^- > v^+$, e portanto devemos escolher o sinal negativo da raiz quadrada.

Resumindo, os estados $(u, v)^T$ que podem ser unidos à direita de $(u^-, v^-)^T$ por 1-choque satisfazem a relação:

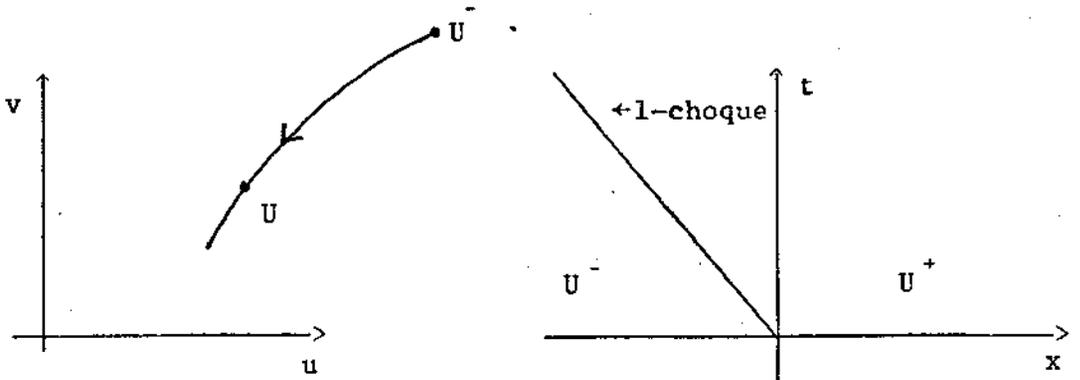
$$v = v^- - \sqrt{(u - u^-)(p(u^-) - p(u))}$$

Portanto, o conjunto S_1 de estados procurados deve ser:

$$S_1 = \{(u, v)^T; u < u^- \text{ e } v = v^- + s_1(u, u^-)\}$$

$$\text{onde } s_1(u, u^-) = -\sqrt{(u - u^-)(p(u^-) - p(u))}$$

O gráfico de s_1 é como na figura abaixo.

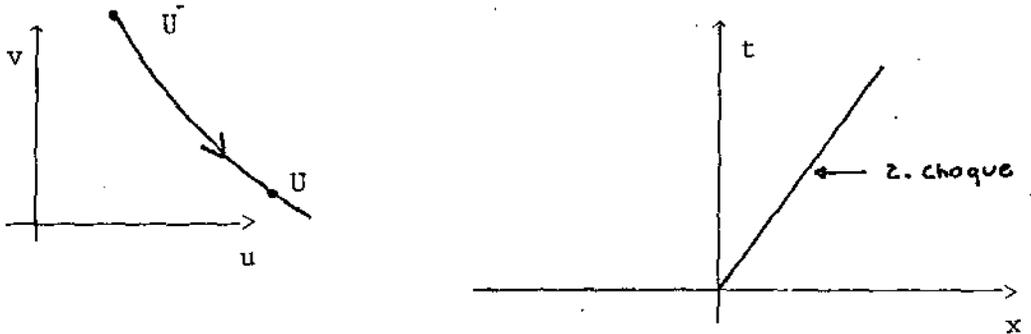


por uma análise similar, podemos construir o conjunto S_2 para 2-choque

$$S_2 = \{(u, v)^T; u > u^-, v = v^- + s_2(u, u^-)\}$$

$$\text{onde } s_2(u, u^-) = -\sqrt{(u - u^-)(p(u^-) - p(u))}$$

O gráfico de s_2 é como na figura abaixo.



Estudaremos agora, as ondas de rarefação para os sistemas-p.

Como temos dois autovalores reais e distintos, teremos duas famílias de onda de rarefação.

Começemos com a correspondente a λ_1 , denominaremos de 1-onda de rarefação.

Seja $U_\xi = \begin{bmatrix} u_\xi \\ v_\xi \end{bmatrix}$, então de (2.4), temos;

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1 & -1 \\ p'(u) & -\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\xi \\ v_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 u_\xi + v_\xi = 0 \implies \frac{v_\xi}{u_\xi} = -\lambda_1$$

assim

$$\frac{dy}{du} = -\lambda_1(U) = \sqrt{-p'(u)}$$

integrando

$$v^+ - v^- = \int_u^{u^+} \sqrt{-p'(y)} dy = r_1(u^+, u^-) \quad (2.7)$$

Observando que uma k-onda de rarefação é aquela onda de rarefação na qual a k-ésima velocidade característica cresce quando x/t cresce, isto é, se x/t cresce então $\lambda_k(U(x/t))$ cresce. Isto garante que a k-ésima família de curvas características se abre em leque.

Assim como U^+ é a solução a direita de U^- e que λ_1 deve crescer com x/t numa l-onda de rarefação, vemos que

$$\lambda_1(u^+) > \lambda_1(u^-) \implies p'(u^+) > p'(u^-)$$

juntamente com a condição $p'' > 0$ temos que $U^+ > U^-$

Para determinarmos $U(x/t)$ na região $\lambda_1(U^-) < x/t < \lambda_1(U^+)$ o procedimento é o seguinte:

Da equação (2.3), com $k = 1$ obtem-se $u(x/t)$

$$\frac{x}{t} = \lambda_1(U(x/t)) = -\sqrt{-p'(u(x/t))}$$

e $v(x/t)$ sai de (2.7)

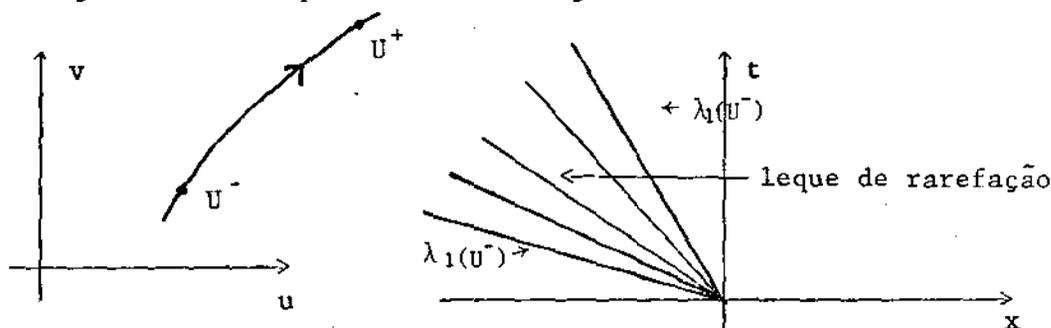
$$v(x/t) = v^- + \int_u^{u(x/t)} \sqrt{-p'(y)} dy$$

Resumindo, o problema de Riemann possui uma solução do tipo l-onda de rarefação se U^+ pertencer ao conjunto

$$R_1 = \{ (u, v)^T ; u > u^-, v = v^- + r_1(u, u^-) \}$$

$$\text{onde } r_1(u, u^-) = \int_{u^-}^u \sqrt{-p'(y)} dy$$

O gráfico de R_1 é como na figura abaixo.



Finalmente analisemos as soluções com 2-onda de rarefação. Por uma análise análoga a anterior, concluímos que o Problema de Riemann (2.6) possuirá uma solução com 2-onda de rarefação se U^+ pertencer ao conjunto

$$R_2 = \{ (u, v)^T ; u < u^-, v = v^- + r_2(u, u^-) \} \quad (2.8)$$

onde

$$r_2(u, u^-) = - \int_{u^-}^u \sqrt{-p'(y)} dy$$

Na região $\lambda_2(U^-) < x/t < \lambda_2(U^+)$ obtem-se $U(x,t)$ do seguinte modo:

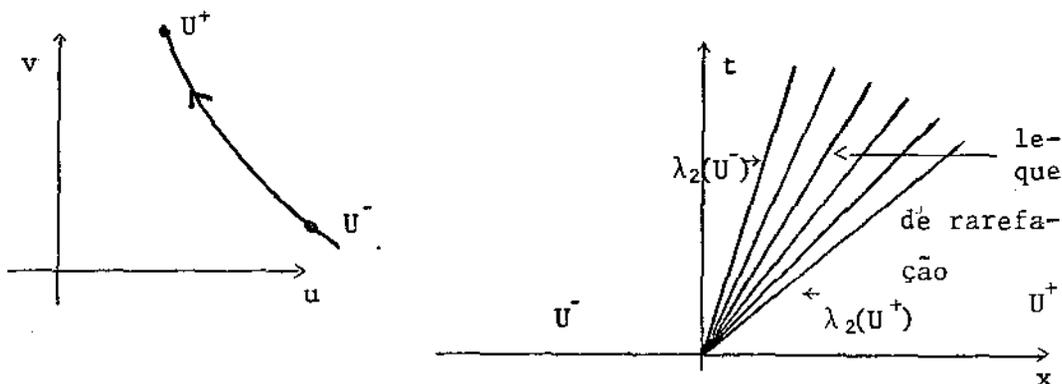
Da equação (2.3) com $k = 2$ obtem-se $u(x/t)$

$$\frac{x}{t} = \lambda_2(U(x/t)) = \sqrt{-p'(u(x/t))}$$

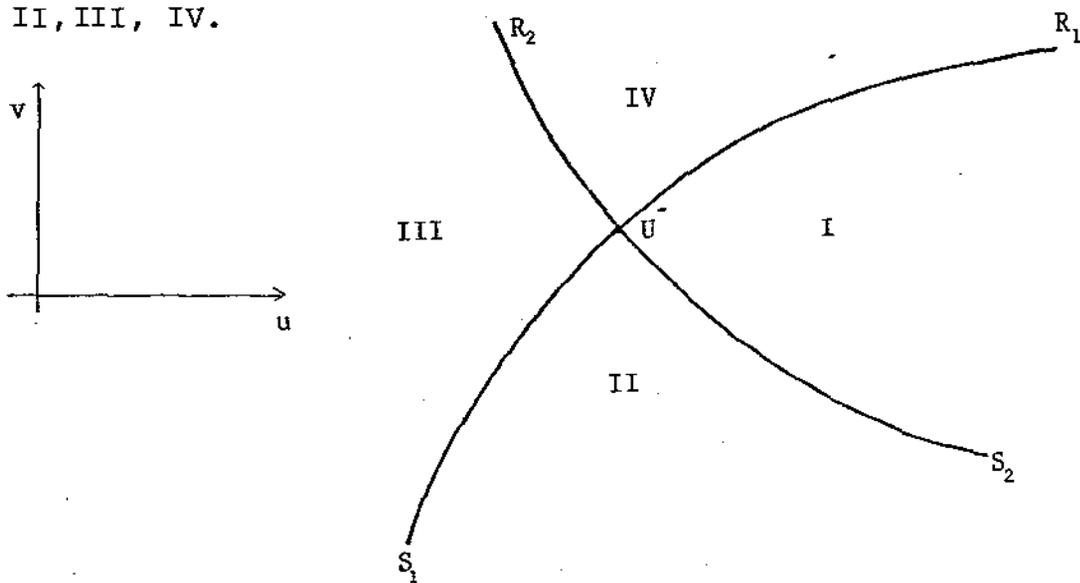
e $v(x/t)$ sai de (2.8)

$$v(x/t) = v^- - \int_{u^-}^{u(x/t)} \sqrt{-p'(y)} dy$$

O gráfico de R_2 é como na figura abaixo.



Juntando estes resultados, vemos na figura abaixo que S_1, S_2, R_1 e R_2 , para cada estado U^- divide o plano em quatro regiões I, II, III, IV.



Se U^+ estiver sobre uma destas curvas, já sabemos como resolver o problema de Riemann (2.6). Temos então que resolvê-lo quando U^+ não estiver sobre uma destas curvas.

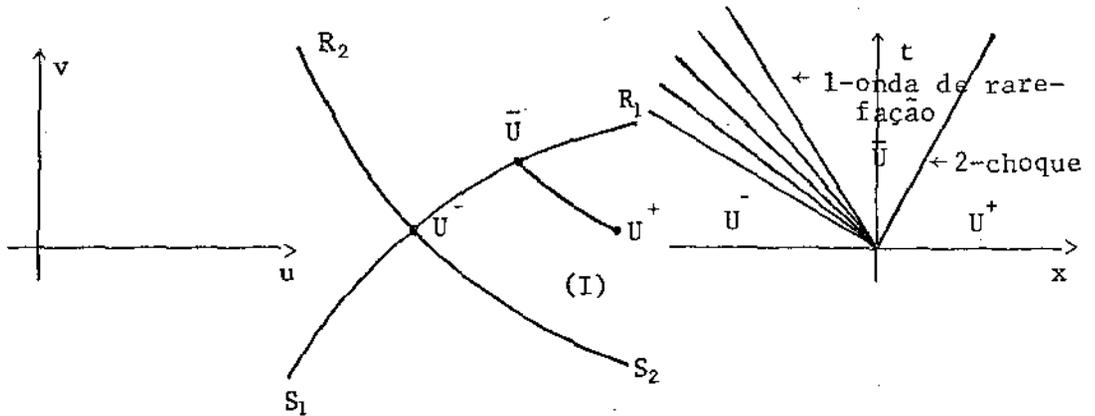
Se $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{v})^T$, denotemos

$$S_i(\bar{U}) = \{(u, v)^T; v = \bar{v} + s_i(u, \bar{v})\}, \quad i=1, 2$$

$$R_i(\bar{U}) = \{(u, v)^T; v = \bar{v} + r_i(u, \bar{v})\}, \quad i=1, 2$$

Analisemos agora, como resolver o problema quando U^+ estiver em alguma das quatro regiões.

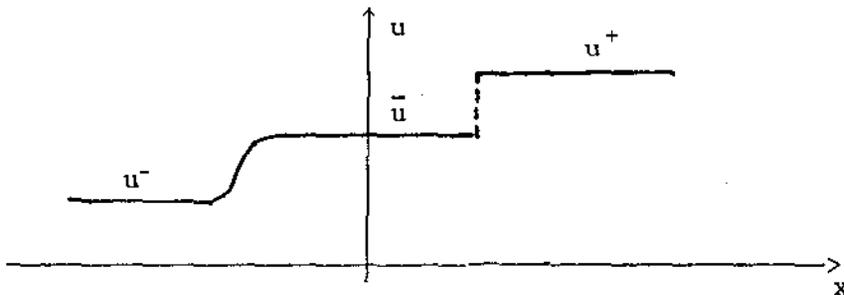
Caso I: Se U^+ estiver na região I

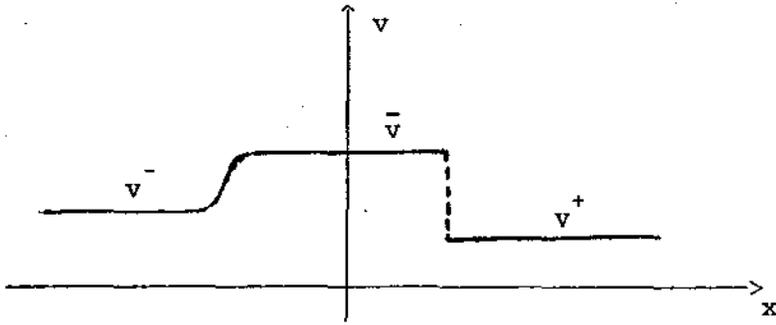


À direita de U^- é conectado um estado \bar{U} por 1-onda de rarefação, em seguida conectamos à direita de \bar{U} o estado U^+ por 2-choque. Note que \bar{U} não poderia estar sobre S_2 pois teríamos que conectar U^- a \bar{U} por 2-choque e \bar{U} a U^+ por 1-onda de rarefação o que não é possível.

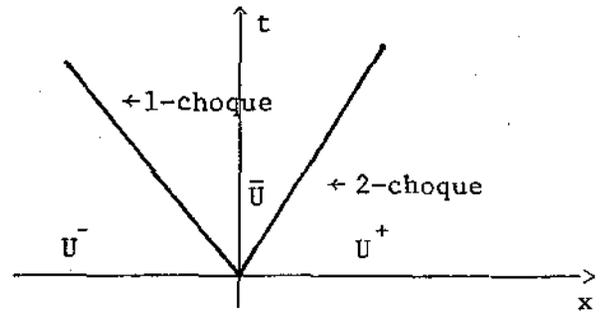
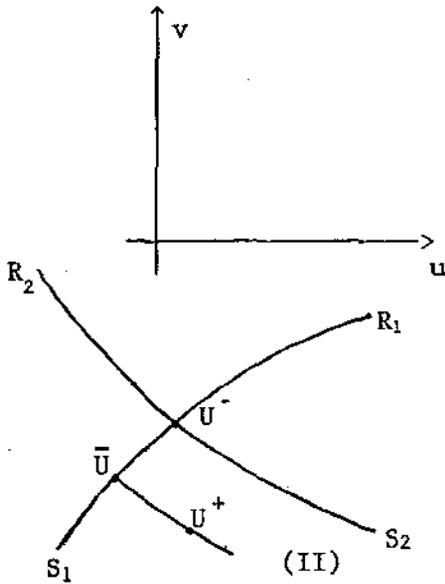
Para o caso I temos as relações:

$$\begin{cases} u^- < \bar{u} < u^+ \\ v^- < \bar{v}, v^+ < \bar{v} \end{cases}$$





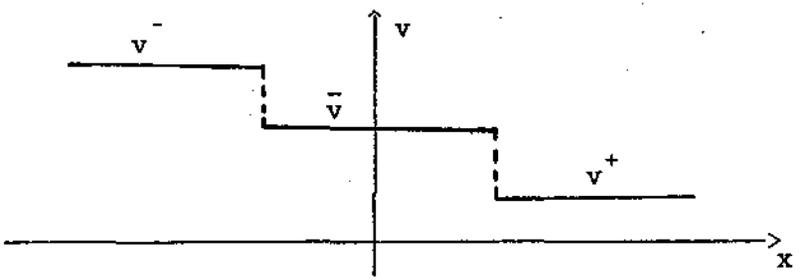
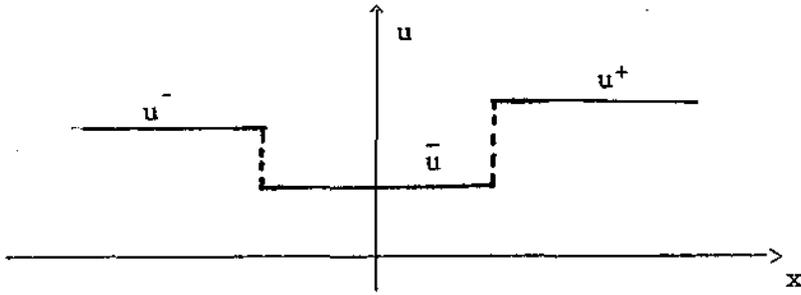
Caso II - Se U^+ estiver na região II



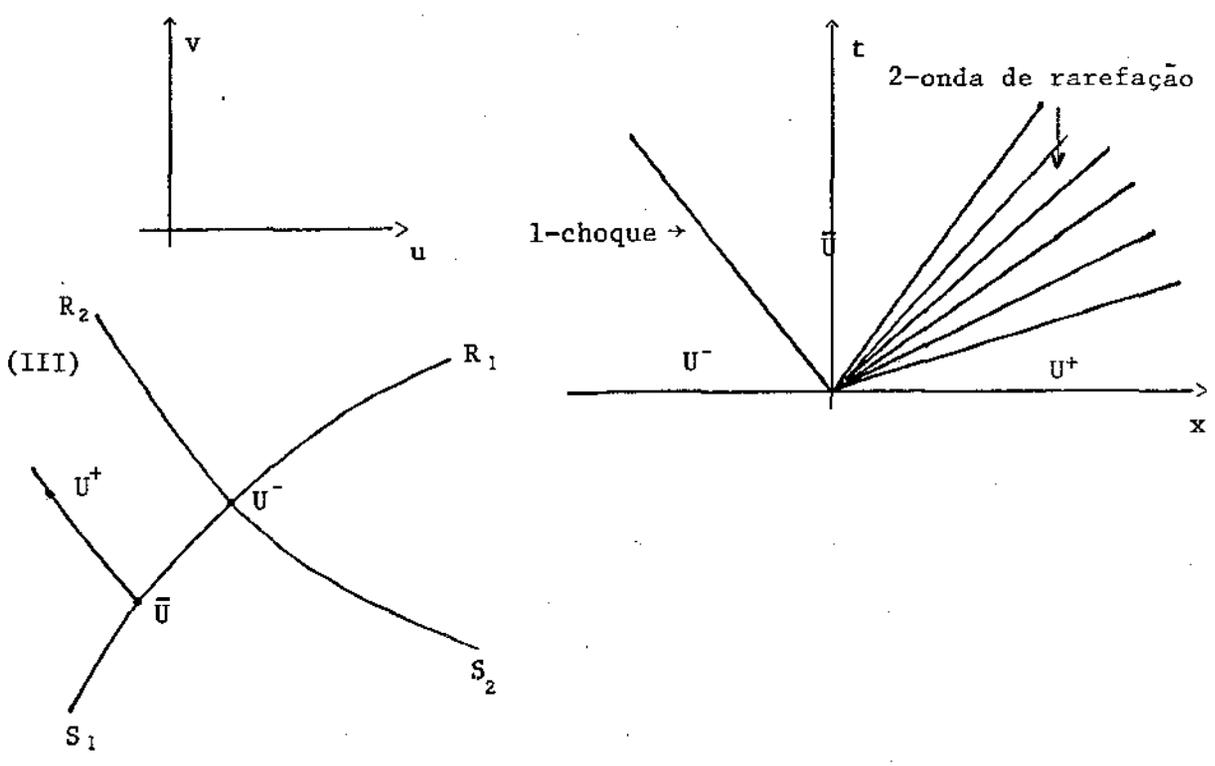
Neste caso \bar{u} é conectado à direita de U^- por 1-choque, e U^+ é conectado à direita de \bar{u} por 2-choque.

Para o caso II temos as relações

$$\left\{ \begin{array}{l} v^+ < \bar{v} < v^- \\ \bar{u} < u^-, \bar{u} < u^+ \end{array} \right.$$



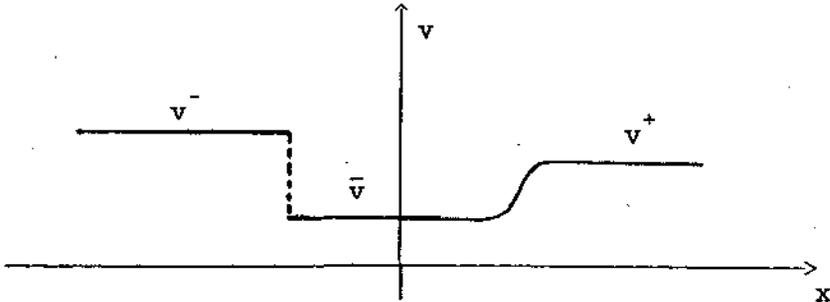
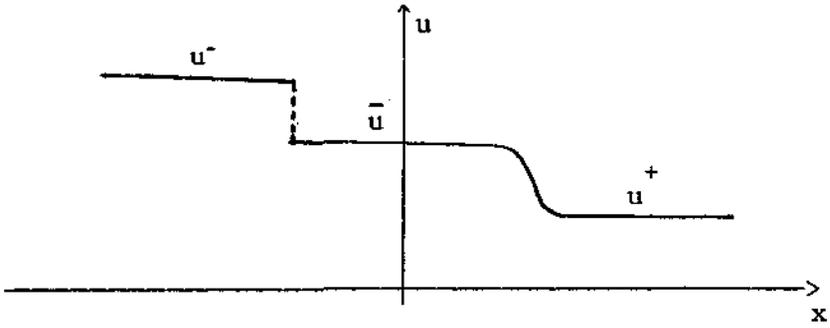
Caso III - Se U^+ estiver na região III



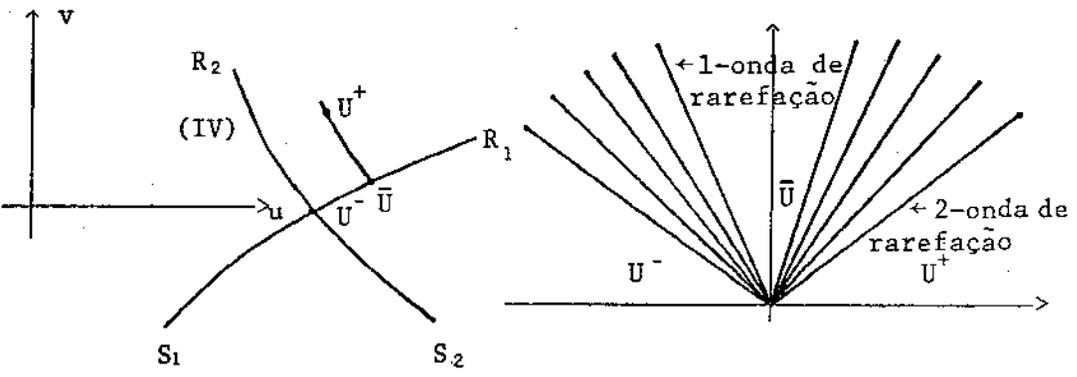
O estado \bar{U} é conectado a direita de U^- por 1-choque, e U^+ é conectado a direita de \bar{U} por 2-onda de rarefação.

Para o caso III temos as relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^+ < \bar{u} < u^- \\ \bar{v} < v^-, \bar{v} < v^+ \end{array} \right.$$



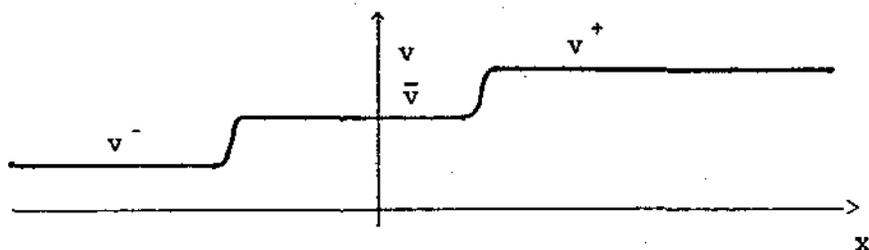
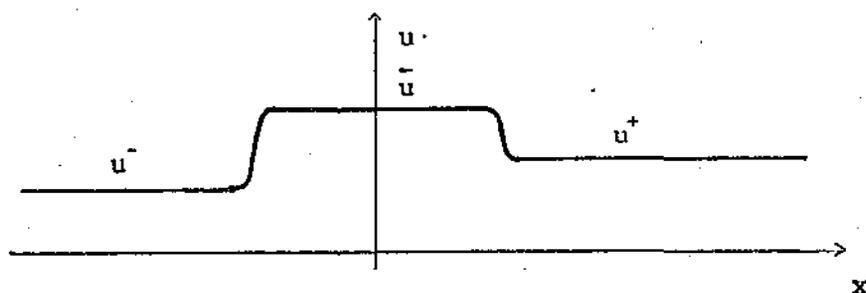
Caso IV - Se U^+ estiver na região IV.



\bar{u} é conectado à direita de U^- por 1-onda de rarefação e u^+ é conectado a \bar{u} por 2-onda de rarefação.

Para este caso, temos as relações

$$\left\{ \begin{array}{l} u^- < \bar{u} \text{ , } u^+ < \bar{u} \\ v^- < \bar{v} < v^+ \end{array} \right.$$



2.3 - O CRITÉRIO DA IMERSÃO EM UMA "TEORIA MAIS COMPLETA"

Conforme dissemos anteriormente, este critério considera que as soluções corretas de sistemas do tipo

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (2.9)$$

devem ser limites de soluções de sistemas de leis de conservação associadas a leis materiais "mais completas".

2.3.1 - PSEUDO VISCOSIDADE

Um procedimento comum é considerar as soluções corretas do sistema (2.9) como limites de soluções do sistema

$$\frac{\partial U^\xi}{\partial t} + \frac{\partial F(U^\xi)}{\partial x} = \xi A \frac{\partial^2 U^\xi}{\partial x^2}$$

onde A é uma matriz conveniente (em geral positiva definida) quando ξ vai a zero, isto é;

$$U = \lim_{\xi \rightarrow 0} U^\xi$$

Este procedimento é chamado método da Pseudo-Viscosidade.

A crítica a este procedimento é que, nos problemas físicos, ele introduz muita dissipação ao introduzir uma viscosidade que não existe em uma das equações de balanço (a correspondente a conservação de massa) ao tentar corrigir a equação

correspondente à lei de conservação de movimento linear, pela introdução das forças viscosas.

2.3.2 - PSEUDO VISCOSIDADE MODIFICADO

Para tentar minimizar esta dissipação em excesso, ao nível do Problema de Riemann associado a estas equações, Dafermos (veja [1], [2], [3]) propôs o seguinte método da Pseudo Viscosidade modificado.

A solução correta de (2.9) U , deve satisfazer

$$U = \lim_{\xi \rightarrow 0} U^\xi$$

onde U^ξ é solução de

$$\frac{\partial U^\xi}{\partial t} + \frac{\partial F(U^\xi)}{\partial x} = \xi \cdot t \cdot A \frac{\partial^2 U^\xi}{\partial x^2} \quad (2.10)$$

Em particular, para os sistemas-p temos (com $A = \text{Identidade}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t^\xi = v_x^\xi + \xi \cdot t \cdot u_{xx} \\ v_t^\xi = -p(u)_x + \xi \cdot t \cdot v_{xx} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Observa-se também, que sistemas da forma (2.10) com condições iniciais que determinam um problema de Riemann

$$U(x,0) = \begin{cases} U^- \text{ (constante) para } x < 0 \\ U^+ \text{ (constante) para } x > 0 \end{cases}$$

tem soluções da forma

$$U(x,t) = U\left(\frac{x}{t}\right)$$

pois (2.10) é invariante por transformações do tipo

$$t \rightarrow at$$

$$x \rightarrow ax$$

$$\text{com } a \neq 0$$

Dafermos provou que, sob certas condições (2.11) tem soluções (u^ξ, v^ξ) que, quando $\xi \rightarrow 0$, se aproximam de funções (u, v) que são soluções fracas de

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = v_x \\ v_t = -p(u)_x \end{array} \right.$$

e que localmente satisfazem as condições do critério de Lax. Porém não foi provado que (u, v) coincide globalmente com as soluções descritas anteriormente.

No próximo capítulo o nosso trabalho será o de verificar numericamente esta coincidência global.

CAPÍTULO 3

EVIDÊNCIA NUMÉRICA DA COINCIDÊNCIA GLOBAL

Usaremos métodos numéricos para testar a coincidência de soluções dadas pelo critério de Lax e pelo método da pseudo-viscosidade modificado. No final utilizaremos as mesmas técnicas numéricas para obter indicações sobre o comportamento de soluções de sistemas-p, sem as condições requeridas pelo critério de Lax.

3.1 - SISTEMAS-P

Usaremos a regularização proposta por Dafermos (método da Pseudo-Viscosidade modificado) para os sistemas-p, isto é, consideremos o sistema:

$$\begin{cases} u_t = v_x + \xi t u_{xx} \\ v_t = -p(u)_x + \xi t v_{xx} \end{cases} \quad (3.1)$$

com as condições iniciais:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u^-, & \text{se } x < 0 \\ u^+, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$v(x, 0) = \begin{cases} v^-, & \text{se } x < 0 \\ v^+, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Para resolver o sistema acima, utilizaremos o fato

de (3.1) e (3.2) serem invariantes pela transformação $(x,t) \rightarrow (ax, at)$, isto é, o sistema admite soluções da forma $u\left(\frac{x}{t}\right), v\left(\frac{x}{t}\right)$.

$$\text{Fazendo } z = \frac{x}{t}$$

as equações (3.1) se tornam:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi u_{zz} = -v_z - z u_z \\ \xi v_{zz} = p'(u) u_z - z v_z \end{array} \right.$$

com as condições de contorno.

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(-\infty) = u^- & u(+\infty) = u^+ \\ v(-\infty) = v^- & v(+\infty) = v^+ \end{array} \right.$$

Assim, temos um problema de perturbação singular com condições de fronteira.

Para tirarmos a singularidade uma idéia é tomarmos L grande.

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi u_{zz} = -v_z - z u_z \\ \xi v_{zz} = p'(u) u_z - z v_z \end{array} \right.$$

e as condições de contorno se tornam:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(-L) = u^- & u(L) = u^+ \\ v(-L) = v^- & v(L) = v^+ \end{array} \right.$$

esperamos que quando $L \rightarrow \infty$, a solução (u_L^ξ, v_L^ξ) se aproxime de (u^ξ, v^ξ) .

Fazendo a mudança de variável $y = \frac{z}{L}$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi}{L^2} u_{yy} = -\frac{1}{L} v_y \cdot y u_y \\ \frac{\xi}{L^2} v_{yy} = \frac{1}{L} p'(u) u_y - y v_y \end{array} \right.$$

com as condições de contorno.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(-1) = u^- \\ v(-1) = v^- \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} u(1) = u^+ \\ v(1) = v^+ \end{array}$$

temos então:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{yy} + \frac{L}{\xi} v_y + \frac{L^2}{\xi} y u_y = F(u, v) = 0 \\ v_{yy} - \frac{L}{\xi} p'(u) u_y + \frac{L^2}{\xi} y v_y = G(u, v) = 0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(-1) = u^- \\ v(-1) = v^- \end{array} \right. , \quad \begin{array}{l} u(1) = u^+ \\ v(1) = v^+ \end{array}$$

Fazendo a transformação

$$T\Delta u = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + t\Delta u) - f(u)}{t}$$

O sistema (3.3) se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_{yy} + \frac{L}{\xi} \Delta v_y + \frac{L^2}{\xi} y \Delta u_y = f_1 \\ \Delta v_{yy} - \frac{L}{\xi} p'(u^{(0)}) \Delta u_y - \frac{L}{\xi} p''(u^{(0)}) u_y^{(0)} \Delta u + \frac{L^2}{\xi} y \Delta v_y = f_2 \end{array} \right.$$

onde

$$f_1 = - \left(u_{yy}^{(0)} + \frac{L}{\xi} v_y^{(0)} + \frac{L^2}{\xi} y u_y^{(0)} \right)$$

$$f_2 = - \left(v_{yy}^{(0)} - \frac{L}{\xi} p'(u^{(0)}) u_y^{(0)} + \frac{L^2}{\xi} y v_y^{(0)} \right)$$

os zeros superscritos indicam a aproximação inicial de u e v .

Se tomarmos:

$$\Delta u = a, \quad \Delta v = b, \quad p'(u) = g_1(y) \text{ e } p''(u) = g_2(y)$$

temos

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{yy} + \frac{L}{\xi} b_y + \frac{L^2}{\xi} y a_y = f_1 \\ b_{yy} - \frac{L}{\xi} g_1(y) a_y - \frac{L}{\xi} g_2(y) u_y a + \frac{L^2}{\xi} y b_y = f_2 \end{array} \right.$$

as condições de contorno se tornam:

$$a(-1) = b(-1) = a(1) = b(1)$$

Façamos agora uma discretização por "spline" cúbica.

$$a(y) = \sum_{i=-1}^{n+1} A_i \beta_i(y)$$

$$b(y) = \sum_{i=-1}^{n+1} B_i \beta_i(y)$$

A solução discreta será obtida através do método da colocação, onde os pontos de colocação são os nós naturais. Desse modo, obtemos o seguinte sistema de equações:

k_0	$4k_3$	k_1	$2k_3$									A_0	$f_1(y_0)$
$4k_4$	k_0	$2k_4$	k_1									B_0	$f_2(y_0)$
k_6	$-k_3$	k_2	0	k_5	k_3							A_1	$f_1(y_1)$
$k_8 - k_4$	k_6	$4k_8$	k_2	$k_4 + k_8$	k_5							B_1	$f_2(y_1)$
		k_6	$-k_3$	k_2	0	k_5	k_3					\vdots	
		$k_8 - k_4$	k_6	$4k_8$	k_2	$k_4 + k_8$	k_5					\vdots	$= \frac{h^2}{3}$
												\vdots	
						k_6	$-k_3$	k_2	0	k_5	k_3	\vdots	
						$k_8 - k_4$	k_6	$4k_8$	k_2	$k_4 + k_8$	k_5		
								$-k_1$	$-2k_3$	k_7	$-4k_3$	A_n	$f_1(y_n)$
								$-2k_4$	$-k_1$	$-4k_4$	k_7	B_n	$f_2(y_n)$

onde:

$$k_0 = -12 + 4h \frac{L^2}{\xi} y$$

$$k_1 = 2h \frac{L^2}{\xi} y$$

$$k_2 = -4$$

$$k_3 = h \frac{L}{\xi}$$

$$k_4 = h \frac{L}{\xi} g_1(y)$$

$$k_5 = 2 + h \frac{L^2}{\xi} y$$

$$k_6 = 2 - h \frac{L^2}{\xi} y$$

$$k_7 = -12 - 4h \frac{L^2}{\xi} y$$

$$k_8 = \frac{h^2}{3} \frac{L}{\xi} g_2(y) \text{ uy}$$

Este sistema é muito fácil de ser resolvido pelo algoritmo de decomposição LU para matrizes tridiagonais por blocos.

Note que em cada uma das diagonais, os valores se repetem a cada duas linhas, assim poderemos dividir a matriz por blocos de submatrizes do seguinte modo:

A	B				
C	D	E			
		C	D	E	
			C	D	E
				F	G

onde $A = \begin{bmatrix} k_0 & 4k_3 \\ 4k_4 & k_0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} k_1 & 2k_3 \\ 2k_4 & k_1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} k_6 & -k_3 \\ k_8 - k_4 & k_6 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 4k_8 & k_2 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} k_5 & k_3 \\ k_4 + k_8 & k_5 \end{bmatrix}$

$F = \begin{bmatrix} -k_1 & -2k_3 \\ -2k_4 & -k_1 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} k_7 & -4k_3 \\ -4k_4 & k_7 \end{bmatrix}$

assim as submatrizes se repetem (exceto) na primeira e última linha de submatrizes). O que torna muito econômico o processo em termos de armazenagem e tempo de cálculo. O método do shooting foi utilizado como tentativa inicial, mas pela instabilidade do problema não foi obtida a convergência.

3.1 - SISTEMAS-P

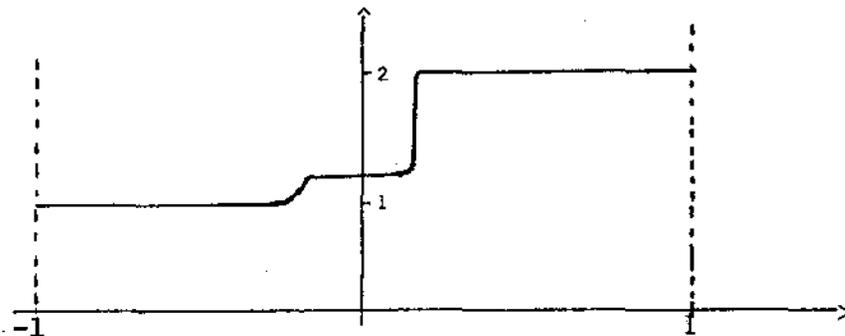
Apresentaremos agora os resultados numéricos obtidos, procurando situações em cada um dos casos, I, II, III, IV apresentados na seção 2.2.3.

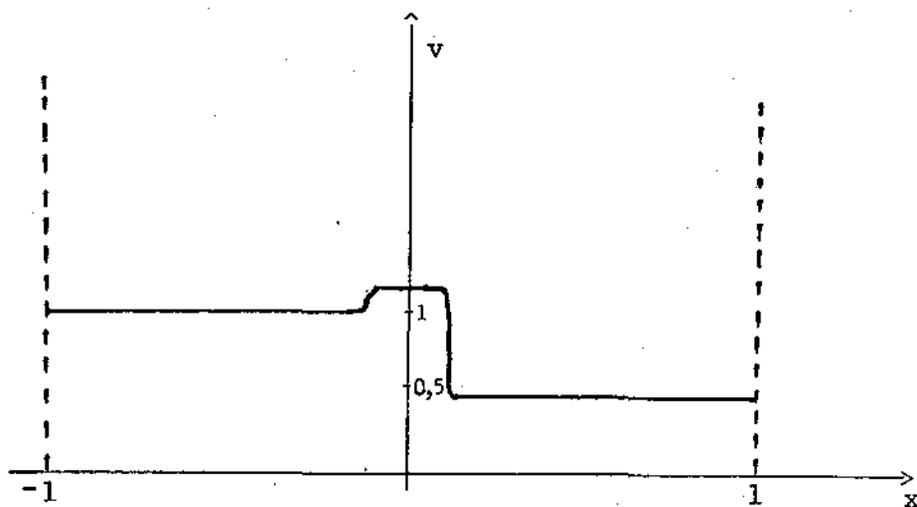
Tomaremos para exemplificar $p(u) = \frac{1}{u}$, com a aproximação inicial para u e v sendo uma reta de u^- a u^+ e v^- a v^+ . Encontramos os seguintes resultados com U^+ situado em cada uma das quatro regiões.

CASO I

com: $u^- = 1$, $u^+ = 2$
 $v^- = 1$, $v^+ = 0,5$

Os resultados encontrados coincidem com as relações para o caso I, segundo o critério de Lax, como mostra a figura abaixo:





Os valores de \bar{u} e \bar{v} encontrados são:

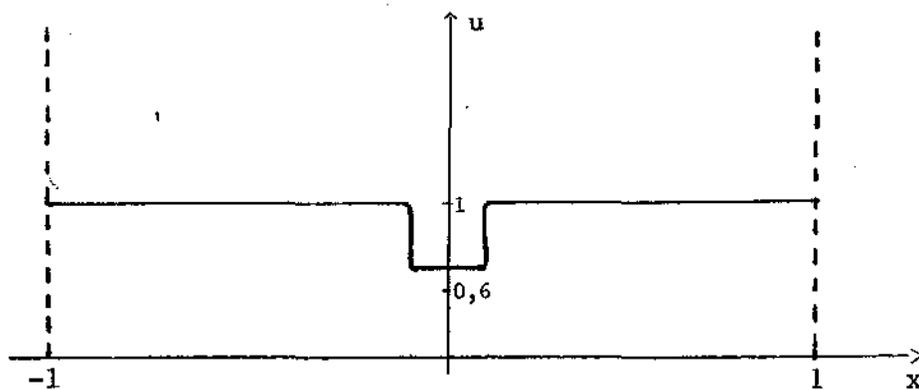
$$\bar{u} \cong 1,1 \text{ e } \bar{v} \cong 1,1.$$

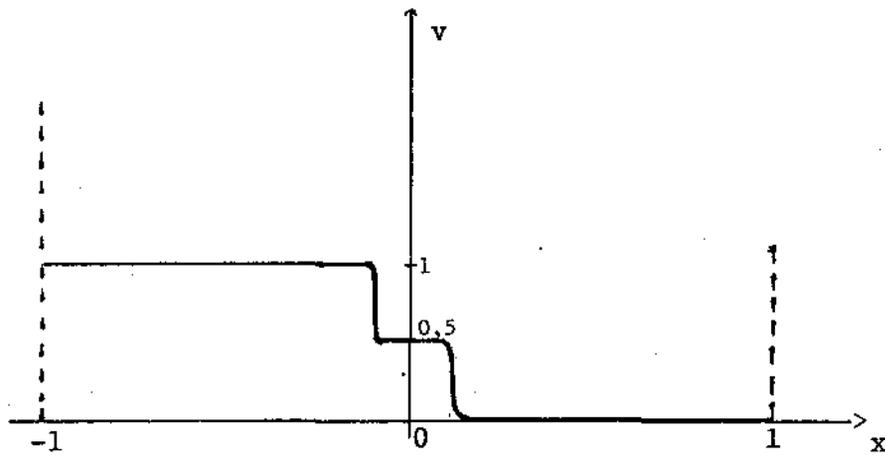
CASO II

$$\text{com } \begin{cases} u^- = 1 & , & u^+ = 1 \\ v^- = 1 & , & v^+ = 0 \end{cases}$$

Os resultados encontrados, são como na figura abai-

xo.





Os valores de \bar{u} e \bar{v} encontrados são:

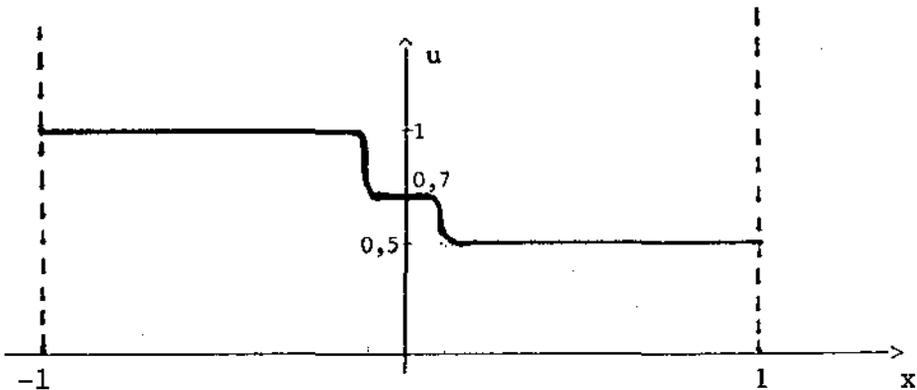
$\bar{u} \cong 0,6$ e $\bar{v} \cong 0,5$, e como mostra a figura satisfaz as relações do caso II conforme o critério de Lax.

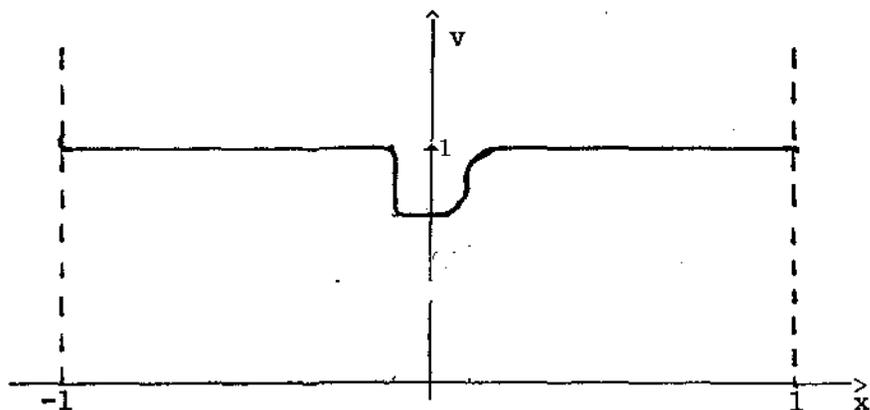
CASO III

com $u^- = 1$, $u^+ = 0,5$

$v^- = 1$, $v^+ = 1$

encontramos o seguinte resultado





Os valores \bar{u} e \bar{v} encontrados são:

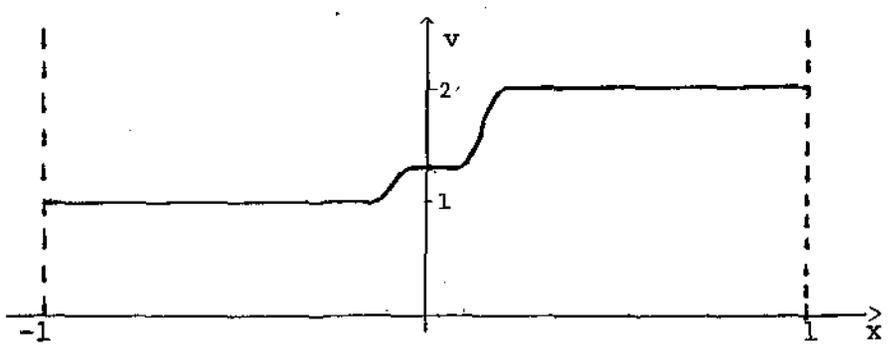
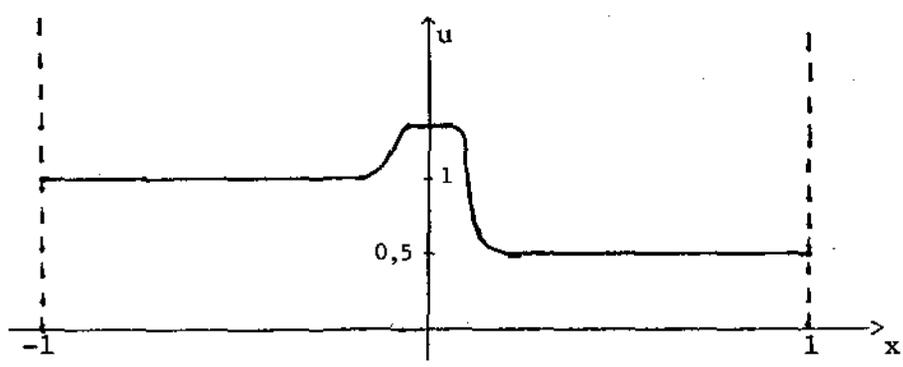
$$\bar{u} \approx 0,7 \quad , \quad \bar{v} \approx 0,7$$

CASO IV

com $u^- = 1$, $u^+ = 0,5$

$$v^- = 1 \quad , \quad v^+ = 2$$

os resultados obtidos são:



Os valores encontrados de \bar{u} e \bar{v} são

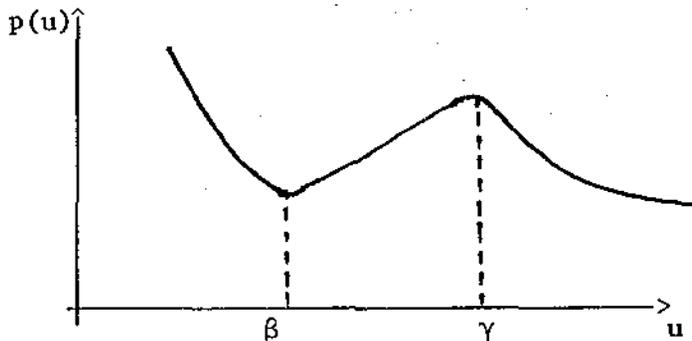
$$\bar{u} \cong 1,17 \text{ e } \bar{v} \cong 1,17$$

Obs: em todos os casos usamos $\alpha = 10$ e $\xi = 0,01$.

3.2 - SISTEMAS-P COM TRANSIÇÃO DE FASE

Baseados na coincidência entre as soluções dadas utilizando o critério de Lax e o método da Pseudo-viscosidade mo dificado, utilizaremos este último método para obter algumas so luções em que o critério de Lax não pode ser utilizado.

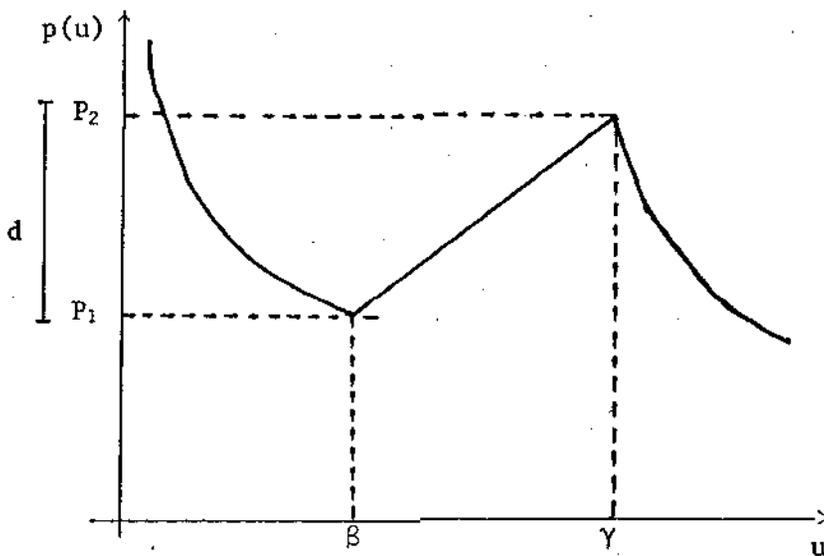
Uma situação onde isto acontece é a de sistemas em que transição de fase é permitida. Uma modelagem simples dessa si tuação leva a sistemas-p onde a função $p(u)$ não é estritamente decrescente. Por exemplo, como a figura abaixo.



A região $\{u: 0 < u < \beta\}$ é chamada Fase I, a região $\{u: u > \beta\}$ é chamada Fase II. A região $\{u: \alpha < u < \beta\}$ é uma região de transição e é uma região de instabilidade.

Pouco se conhece sobre o comportamento dinâmico das soluções nestes casos. Para obter alguma informação faremos um ensaio numérico com

$$P(u) = \begin{cases} \frac{1}{u} & ; \text{ se } u < \gamma \\ P_1 + \frac{d}{\gamma - \beta} (u - \beta) & ; \text{ se } \beta \leq u \leq \gamma \\ \frac{1}{u - (\gamma - \beta)} + d & ; \text{ se } u > \gamma \end{cases}$$



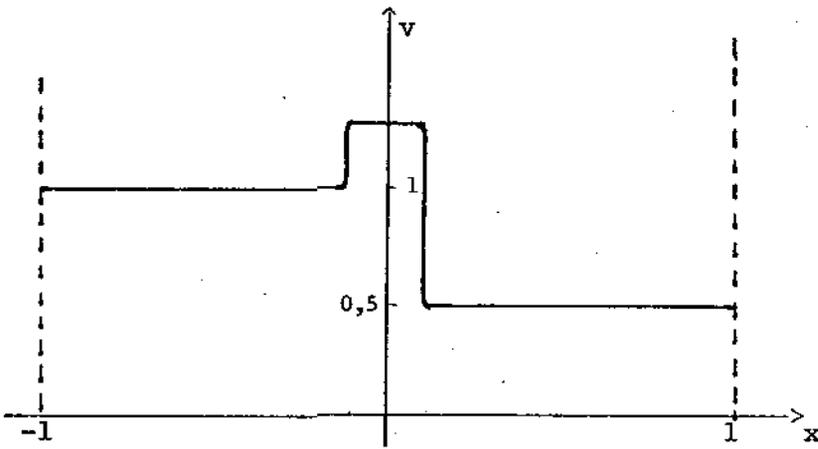
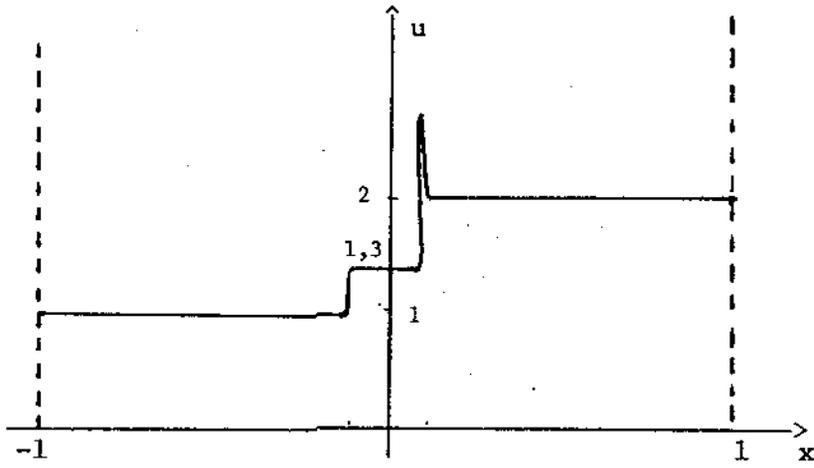
e comparemos com o problema de Riemann com as mesmas condições iniciais usadas para $p(u) = \frac{1}{u}$

Os resultados foram os seguintes:

com as condições iniciais como no caso I, isto é;

$$\begin{cases} u^- = 1 & , & u^+ = 2 \\ v^- = 1 & , & v^+ = 0,5 \end{cases}$$

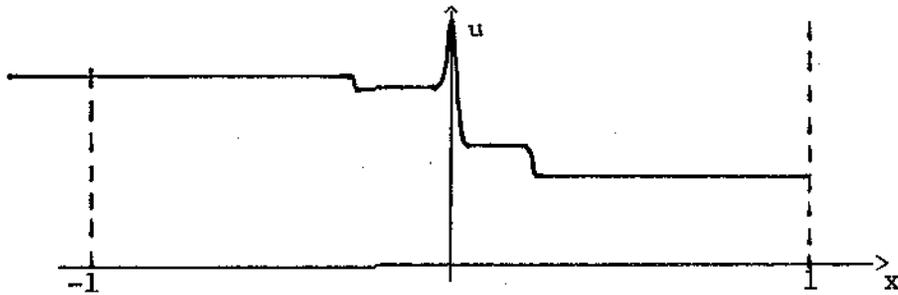
e com $\beta = 1,6$, $\gamma = 1,8$, e $d = 0,001$.

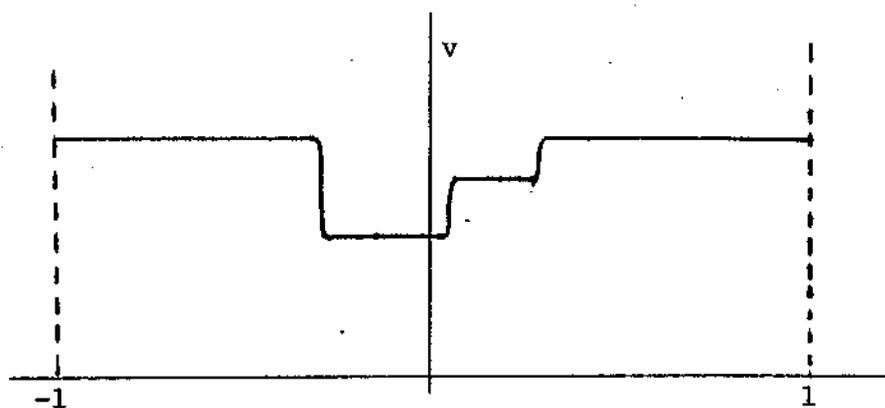


com as condições iniciais como no caso III, isto é;

$$\begin{cases} \bar{u} = 1 & , & u^+ = 0,5 \\ \bar{v} = 1 & , & v^+ = 1 \end{cases}$$

e com $\beta = 0,6$, $\gamma = 0,8$ e $d = 0,001$





Notamos que, com a transição de fase forma-se esta
dos intermediários entre U^- e U^+ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] C.M.Dafermos, Solution of the Riemann Problem for a class of hyperbolic systems of conservation laws by the viscosity method. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 52, nº 1, 1973, pp. 1-9.
- [2] C.M.Dafermos, Structure of solutions of the Riemann Problem for hyperbolic systems of conservation laws. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 53, nº 3, 1974, pp. 203-217.
- [3] C.M.Dafermos e R.J.Diperna, The Riemann Problem for certain classes of hyperbolic systems of conservation laws, Journal of Differential Equations, vol. 20, nº 1, 1976, pp. 90-114.
- [4] E.Isacson, H. Keller. Analysis of Numerical Methods. John Wiley & Sons 1966.
- [5] J.Smoller, Shock Waves and Reaction Difusion Equations. Springer Verlag, 1983.