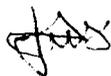


**Cálculo de  
Equilíbrios Econômicos  
por Complementaridade**

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Vladimir Rotondo e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 19 de dezembro de 1988.



Prof. Dr. José Antonio Scaramucci.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada, área: Otimização e Pesquisa Operacional

**Cálculo de  
Equilíbrios Econômicos  
por Complementaridade**

Wladimir Rotondo

**A Simone e meus  
pais, Walter e Pilar.**

## Agradecimentos

A José Antonio Scaramucci, meu orientador, pela brilhante orientação nesta dissertação.

Ao CNPq, ao CAPES e à FAPESP, pelo suporte financeiro durante o programa de mestrado, e em especial a FAPESP pelo acompanhamento técnico do trabalho.

A Alberto Martins, pelo autêntico exemplo de **Mestre**.

A todos meus professores, não só os de mestrado mas a todos aqueles que me ensinaram não como obrigação mas sim como opção, para os quais sempre procurei e procurarei ser recíproco.

Aos meus companheiros, com os quais enriquecemos juntos, e essa riqueza felizmente nos pertencerá indefinidamente.

Finalmente, agradeço a todos aqueles que conheci, no decorrer

desse curso, e que de alguma forma ajudamo-nos mutuamente. Mencionar todos vocês seria até mesmo difícil .... Por isso, peço-lhes desculpas. Porém, mesmo assim, não posso de deixar de citar José Arica pelo seu profissionalismo, Clóvis Perin Filho pela sua polidez no relacionamento pessoal, Antonio Carlos Moretti pela jovialidade que lhe é peculiar, e também a Francisco Ruas, cujas características omito, porque - vamos dizer - foge ao contexto.

Obrigado a todos.

Wladimir Rotondo

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>O Problema de Complementaridade</b>	<b>9</b>
2.1	O Problema de Complementaridade Geral . . . . .	9
2.2	Existência de Soluções . . . . .	11
2.3	Métodos Computacionais . . . . .	12
2.4	Problema de Complementaridade Linear . . . . .	14
2.5	Método de Lemke . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Equilíbrio Econômico</b>	<b>23</b>
3.1	O Problema de Equilíbrio Econômico . . . . .	23
3.2	Existência e Unicidade de Equilíbrios . . . . .	26
3.2.1	Equilíbrio Geral . . . . .	26
3.2.2	Equilíbrio Setorial . . . . .	27
3.3	Cálculo do Equilíbrio por Complementaridade . . . . .	28

3.3.1	Convergência das Linearizações para o Problema de Equilíbrio . . . . .	30
3.3.2	As Linearizações Sucessivas para o Equilíbrio Geral : Complicações . . . . .	31
<b>4</b>	<b>O Algoritmo</b>	<b>35</b>
4.1	A Seqüência Iterativa . . . . .	35
4.1.1	A Linearização e Construção do PCL . . . . .	36
4.1.2	Construção do $z^k$ . . . . .	37
4.1.3	Solução no PCL . . . . .	38
4.2	Convergência do Algoritmo . . . . .	38
4.2.1	Equilíbrio Setorial . . . . .	38
4.2.2	Equilíbrio Geral . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Resultados Computacionais</b>	<b>41</b>
5.1	Experiência Computacional . . . . .	41
5.2	Exemplo 1 . . . . .	42
5.3	Exemplo 2 . . . . .	45
5.4	Exemplo 3 . . . . .	48
5.5	Exemplo 4 . . . . .	51
5.6	Exemplo 5 . . . . .	52
5.7	Exemplo 6 . . . . .	57

<i>CONTEÚDO</i>	3
<b>6 Extensões</b>	<b>63</b>
6.1 Previsão de Tráfego . . . . .	63
6.1.1 Exemplo 6.1 . . . . .	64
6.2 Equilíbrio de Competição Imperfeita . . . . .	66
6.2.1 Redefinição do Equilíbrio . . . . .	67
6.2.2 Reestruturação dos PCLs . . . . .	71
6.2.3 Exemplo 6.2 . . . . .	71
6.2.4 Exemplo 6.3 . . . . .	75
<b>7 Conclusões Finais</b>	<b>81</b>



# Lista de Tabelas

5.1	Dotações dos consumidores - Exemplo 1 . . . . .	43
5.2	Matriz de atividades - Exemplo 1 . . . . .	43
5.3	Coefficientes de utilidade dos consumidores - Exemplo 1	44
5.4	Dotações dos consumidores - Exemplo 2 . . . . .	46
5.5	Matriz de atividades - Exemplo 2 . . . . .	46
5.6	Coefficientes de utilidade dos consumidores - Exemplo 2	47
5.7	Dotações dos consumidores - Exemplo 3 . . . . .	49
5.8	Matriz de atividades - Exemplo 3 . . . . .	49
5.9	Coefficientes de utilidade dos consumidores - Exemplo 3	49
5.10	Dotações dos consumidores - Exemplo 4 . . . . .	51
5.11	Coefficientes de utilidade dos consumidores - Exemplo 4	52
5.12	Matriz de atividades - Exemplo 5 . . . . .	55
5.13	Elasticidades nos preços - Exemplo 5 . . . . .	56
5.14	Matriz de atividades da agroindústria - Exemplo 6 . .	60
6.1	Matriz de atividades - Exemplo 6.1 . . . . .	65

6.2	Parâmetros das firmas - Exemplo 6.2 . . . . .	72
6.3	Matriz de atividades fictícia - Exemplo 6.2 . . . . .	73
6.4	Matriz de atividades - Exemplo 6.3 . . . . .	76

# Capítulo 1

## Introdução

Esta dissertação analisa o equilíbrio econômico computável, geral e setorial, estático.

Várias preocupações da sociedade podem ser vistas sob a ótica de equilíbrio, muitas vezes, econômico. Entre as mais importantes encontram-se: o problema da eficiência econômica das firmas, o qual pode ser colocado como equilíbrio econômico setorial, e um outro problema de grande relevância que é o da equidade na sociedade como um todo, que pode ser analisado como um problema de equilíbrio global ou geral.

Têm-se, na literatura, formas diversas de resolução do problema, definido adiante, tanto no sentido teórico como no computacional.

Basicamente, a obtenção do equilíbrio de uma economia ou setor consiste em encontrar preços para os diversos bens existentes e níveis

de atividades produtivas de forma que seus membros, por exemplo, produtores e consumidores, encontram-se numa posição onde seus objetivos estão sendo otimizados e, com isso, sem incentivo para mudanças. Há de se notar que ocorrem reações quando da ação de mudança isolada, ou de um conjunto, dada a interdependência de preços, demandas e ofertas dos bens.

Observa-se que, quando se tomam as condições de primeira ordem dos objetivos dos agentes dessa economia, chega-se a um sistema de equações e desigualdades que pode ser colocado como um outro problema denominado problema de complementaridade, que consiste em achar

$$z \in R^l / z \geq 0, F(z) \geq 0 \text{ e } z^T F(z) = 0.$$

Como explicado em Mathiesen [28] e Harker [13], existe um problema de otimização equivalente ao colocado acima, caso a função  $F$  seja integrável, ou equivalentemente, se seu jacobiano for simétrico. Se isso é possível, então esta é a forma mais eficiente de solucionar o problema de equilíbrio.

Nessa linha, Samuelson [35] sugeriu a maximização dos excedentes dos produtores e consumidores. Atualmente, essa idéia é usada com relativa freqüência na análise de equilíbrio espacial (Harker [12], [13], Friesz [10]).

Infelizmente, tal condição de integrabilidade parece não ser tão freqüentemente satisfeita.

Como alternativa, foram propostos métodos que visam tornar integráveis as funções, de forma a utilizar e aproveitar a eficiência da otimização (por exemplo Ahn [2]).

Por outro lado, Scarf [41] propõe que equilíbrios econômicos sejam calculados através da sua formulação como um problema de ponto-fixo. Esta linha apresenta-se com uma das melhores no tocante à prova de convergência, e, ainda, nota-se que não há preocupação com a integrabilidade. Teoricamente, porém, sua eficiência parece reduzir-se, quando se passa de funções para multiaplicações. Quanto ao aspecto computacional, os inconvenientes encontram-se na limitação da dimensionalidade do problema.

A idéia de se aplicar métodos de complementaridade teve origem com MacKinnon [23]. Trabalharam, nesta linha, Hansen e Manne [11], Mathiesen [26], Eaves [7], Josephy [16] e Friesz [9] todos preocupados na resolução de equilíbrio setorial espacial. Mais recentemente, Mathiesen [28] procurou adaptar a idéia para o cálculo de equilíbrio geral walrasiano.

Esta dissertação procura abranger os aspectos teóricos e práticos do problema de equilíbrio econômico, bem como de sua resolução.

Para tanto, no capítulo 2, descreve-se o problema de complementaridade, ferramenta fundamental para o método exposto; no 3, o problema de equilíbrio a ser resolvido; no 4, o método utilizado; no 5, exemplos resolvidos de equilíbrios competitivos, geral e setorial; no 6, as extensões na utilização do método para problemas diversos, entre eles, previsão de tráfego e equilíbrio imperfeitamente competitivo. Finalmente, no capítulo 7, dão-se algumas conclusões finais.

## Capítulo 2

# O Problema de Complementaridade

Este capítulo tem como objetivo definir o problema de complementaridade geral, envolvendo os casos linear e não-linear, incluindo uma descrição da teoria existente e métodos computacionais disponíveis.

### 2.1 O Problema de Complementaridade Geral

**Definição 2.1** *Seja  $F : R^n \rightarrow R^n$  e  $z \in R^n$ . O problema de complementaridade consiste em achar  $\bar{z} \geq 0$  tal que  $F(\bar{z}) \geq 0$  e  $\bar{z}^T F(\bar{z}) = 0$ . Estas condições são denotadas por  $F(\bar{z}) \geq 0 : \bar{z} \geq 0$ .*

Isto corresponde a achar  $\bar{z}$  no ortante não-negativo de  $R^n$ ,  $R_+^n$ , tal que sua imagem por  $F$  também esteja em  $R_+^n$  e seja ortogonal a  $\bar{z}$ .

## 12 CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE

Caso a função  $F$  seja linear, o problema é chamado de *complementaridade linear (PCL)*; caso contrário, de *complementaridade não-linear (PCNL)*.

Pode-se mostrar que problema de complementaridade é um caso particular de um problema maior, chamado de *desigualdade variacional*:

**Definição 2.2** Dado  $K \subset \mathbb{R}^n$ , não-vazio, fechado e convexo, e  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , o problema de desigualdade variacional consiste em achar  $\bar{z} \in K$  tal que  $(z - \bar{z})^T F(\bar{z}) \geq 0$  para todo  $z \in K$ .

**Teorema 2.1** Se  $K = \mathbb{R}_+^n$ , o problema de desigualdade variacional resultante é equivalente ao problema de complementaridade da Definição 2.1.

*Demonstração* Karamardian [18]. Se  $\bar{z} \geq 0$ ,  $F(\bar{z}) \geq 0$  e  $\bar{z}^T F(\bar{z}) = 0$ , então é claro que  $(z - \bar{z})^T F(\bar{z}) \geq 0$  para todo  $z \geq 0$ . Reciprocamente, tomando-se  $z = 0$  e  $z = t\bar{z}$ , com  $t > 1$ , no problema de desigualdade variacional, vem  $\bar{z}^T F(\bar{z}) \leq 0$  e  $\bar{z}^T F(\bar{z}) \geq 0$ , respectivamente.  $\square$

O problema de desigualdade variacional é chamado também de ponto estacionário (Eaves [7]) e equação generalizada (Robinson [34]).

## 2.2 Existência de Soluções

Kojima [20] faz um apanhado de teoremas sobre existência de soluções de PCNLs. Alguns deles são citados abaixo, sem as respectivas demonstrações.

**Teorema 2.2** *Suponha que*

- $F$  é continuamente diferenciável em  $R^n$ ;
- $F$  tem jacobiano positivamente limitado, ou seja, existe um escalar  $\sigma > 1$  tal que, para cada  $z \in R^n$ , todo menor principal de  $\nabla F(z)$  está entre  $1/\sigma$  e  $\sigma$ ; e
- O sistema  $y = F(z)$ , com  $n$  equações e  $2n$  incógnitas, é não-degenerado, i.é., toda solução  $(y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n)$  tem no máximo  $n$  zeros.

*Então o PCNL tem uma solução.*

O teorema de ponto fixo de Kakutani leva ao resultado abaixo:

**Teorema 2.3** *Seja  $G(z) = F(z) - F(0)$  para todo  $z \in R^n$ . Suponha que*

- $G$  é positivamente homogênea de algum grau  $\alpha > 0$ , i.é.,  
 $G(tz) = t^\alpha G(z)$  para todo escalar  $t \in R_+$  e

- $G$  é regular, i.é., o sistema  $z \geq 0, G(z) + te \geq 0$  e  $z^T(G(z) + te) = 0$  tem somente a solução trivial  $z = 0$ , onde  $t \in \mathbb{R}_+$  e  $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ .

Então o PCNL tem uma solução.

## 2.3 Métodos Computacionais

Muitos métodos computacionais para calcular uma solução do problema de complementaridade geral consistem em, dado o valor de  $z$  na iteração  $k = 0, 1, \dots, z^k$ , achar  $z^{k+1}$  que resolve o problema de complementaridade envolvendo uma aproximação de  $F$  no ponto  $z^k$ ,  $F^k$ , repetindo-se o procedimento até se observar convergência (Pang e Chan [33]). Obviamente, é de se esperar que  $F^k$  seja tal que o subproblema resultante seja mais fácil de se resolver que o problema original.

Um procedimento, nesta linha, é classificado como *método de aproximações lineares*, se  $F^k$  é da forma

$$F^k(z) = F(z^k) + A^k(z - z^k),$$

onde  $A^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dentre estes, pode-se citar os seguintes:

- *Método de Newton*, caracterizado por  $A^k = \nabla F(z^k)$ , se  $F$  for diferenciável;

- *Método quase-newtoniano*, se  $A^k$  for uma aproximação do jacobiano de  $F$  no ponto  $z^k$ ;
- *Método de sobre-relaxações sucessivas*, quando  $A^k = L^k + D^k/\omega$  ou  $A^k = U^k + D^k/\omega$ , onde  $\omega$  é o parâmetro de relaxação, tipicamente entre 0 e 2,  $L^k$  e  $U^k$  são as partes triangular inferior e superior, respectivamente, de  $\nabla F(z^k)$ , e  $D^k$  é uma matriz diagonal;
- *Método de Jacobi*, se  $A^k$  for uma matriz diagonal; e
- *Método de projeções*, quando  $A^k = G$ , onde  $G$  é alguma matriz simétrica positiva definida.

O método de aproximações lineares de Newton será usado no Capítulo 3 para o cálculo de equilíbrios econômicos.

Cabe agora investigar as condições de convergência da seqüência  $\{z^k\}$  para a solução do problema de complementaridade, se existir.

Pang e Chan [33] apresentam vários resultados referentes à convergência — local e global — de métodos de aproximações lineares e não-lineares para problemas variacionais e de complementaridade. Algoritmos newtonianos e outros baseados em sobre-relaxações sucessivas são exemplos destes métodos.

A partir de um raciocínio envolvendo contração de normas, o teorema abaixo indica condições suficientes para a convergência local quadrática do método de Newton. Este resultado é de particular interesse para o cálculo de equilíbrios setoriais, como será visto no Capítulo 3.

**Teorema 2.4** *Seja  $\bar{z}$  uma solução do problema de complementaridade. Suponha que  $F$  seja continuamente diferenciável, com  $\nabla F(\bar{z})$  positivo definido. Então, se  $z^0$  for suficientemente próximo de  $\bar{z}$ , a seqüência gerada pelo método de aproximações lineares sucessivas  $\{z^k\}$  é bem definida e converge para  $\bar{z}$ . Além disso, se  $\nabla F$  é Lipschitz contínua em  $\bar{z}$ , então  $\{z^k\}$  converge quadraticamente para  $\bar{z}$ .*

Como o resultado de linearizações sucessivas de um PCNL é uma seqüência de PCLs, faz-se necessário apresentar métodos computacionais para complementaridade linear. Este é o objetivo da seção a seguir.

## **2.4 Problema de Complementaridade Linear**

Problemas de complementaridade linear aparecem subjacentes a várias aplicações de interesse. Problemas de programação linear, por

exemplo, podem ser colocados como PCLs, mas nem sempre o inverso ocorre.

Se  $F$  assumir forma linear (afim), o problema de complementaridade pode ser expresso como:

**Definição 2.3** Para  $q \in R^n$  e  $M \in R^{n \times n}$ , o problema de complementaridade linear consiste em achar  $\bar{z}$  satisfazendo

$$\begin{aligned}\bar{z} &\geq 0; \\ q + M\bar{z} &\geq 0; \text{ e} \\ \bar{z}^T(q + M\bar{z}) &= 0,\end{aligned}$$

ou, simplificadaamente,

$$q + M\bar{z} \geq 0 \quad : \quad \bar{z} \geq 0.$$

Métodos iterativos para a solução de PCLs vêm sendo muito estudados, uma vez que muitos problemas importantes, em áreas diferentes como equações diferenciais parciais, mecânica, teoria de jogos, cadeias de Markov, etc., podem ser formulados equivalentemente em termos de programas de complementaridade linear.

Dentre os algoritmos sugeridos para resolução de PCLs, tem-se:

- Método de Newton;
- Método de pivoteamento principal; e

## 18 CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE

- Método de pivoteamento quase-complementar.

Todos tem convergências asseguradas quando aplicados a determinadas classes de problemas.

O método de Newton pode ser aplicado a PCLs possuindo estruturas especiais, como problemas de cadeias de Markov e equações diferenciais parciais (Aganagić [1]). A importância deste método é ainda mais relevante em problemas de grande porte, visto que os algoritmos baseados em pivoteamento não são eficientes, em geral, quando se depara com matrizes de grande dimensão e esparsas.

Os dois outros métodos apresentam resultados teóricos de convergência quando  $M$  apresenta determinadas estruturas matriciais. No entanto, a complexidade computacional é exponencial (Kappel [17] e Murty [32]); a exemplo do que ocorre com o método dos simplexos, este fato parece não impor dificuldades na prática.

Motivado pela teoria de jogos, Lemke [22] desenvolveu, a partir de conceitos homotópicos (Eaves [8]), o método de pivoteamento quase-complementar para PCLs. Muitos algoritmos baseados neste método tem sido sugeridos (v, por exemplo, Tomlin [42]) e largamente utilizados. Uma descrição detalhada deste método, baseada em Murty [31] encontra-se abaixo.

## 2.5 Método de Lemke

Seja o sistema:

$$w = q + Mz \geq 0 \quad : \quad z \geq 0. \quad (2.1)$$

Obviamente,  $z$  e a variável de excesso  $w$  devem satisfazer

$$\begin{aligned} w - Mz &= q; \\ w &\geq 0; \\ z &\geq 0; \text{ e} \\ w^T z &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

O sistema (2.1) é *factível* se existir  $z \geq 0$  tal que  $q + Mz \geq 0$ .

Se  $q \geq 0$ , então (2.1) possui a solução trivial  $z = 0$  e  $w = q$ . Assim, nesta seção, supõe-se que pelo menos uma componente de  $q$  é negativa.

Como no método dos simplexos, a cada iteração corresponde uma *base* i.é., um conjunto de  $n$  colunas linearmente independentes extraídas, neste caso da matriz  $(I, -M)$ , associada à primeira condição de (2.1). A solução correspondente a uma dada base é obtida fazendo-se todas as variáveis não-básicas iguais a zero e, então, resolvendo-se o sistema resultante para achar os valores das variáveis básicas. Uma base é *factível* se os valores de todas as variáveis básicas na solução

## 20 CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE

são não-negativos.

Uma variável artificial  $z_0$  associada ao vetor em  $e_n = (1, 1, \dots, 1)^T \in R^n$  é introduzida homotopicamente no sistema, para se obter uma base factível inicial:

$$\begin{array}{ccc|c} w & z & z_0 & \\ I & M & -e_n & q \end{array} \quad (2.3)$$

Para isso, seja  $t$  tal que  $q_t = \min\{q_i\}_{i=1}^n$ . Como pressupõe-se que ao menos uma componente de  $q$  é negativa, tem-se que  $q_t < 0$ . A partir da base não-factível  $w = q$ , pode-se, então, pivoteando-se em torno da  $t$ -ésima componente de  $-e_n$ , obter-se a solução básica factível inicial  $(w_1, w_2, \dots, w_{t-1}, z_0, w_{t+1}, \dots, w_n)$ .

O algoritmo trabalha somente com bases factíveis. Somente que, aqui, as bases devem respeitar também a condição de complementaridade. Uma base é denominada *quase-complementar* se contiver no máximo uma variável básica de cada *par complementar*  $(w_j, z_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Se possuir exatamente uma variável básica de cada par complementar, a base é *complementar*. Obviamente, uma base complementar é também quase-complementar; no entanto, a recíproca não se aplica. Pode-se observar que a base inicial, por conter a variável  $z_0$ , é quase-complementar.

Nas iterações subseqüentes, existe uma única forma de manter a

condição de quase-complementaridade, i.é., escolher como variável de entrada o complemento da variável que acaba de ser retirada da base. Isto é conhecido como pivoteamento quase-complementar. Assim, a primeira variável a entrar na base é  $z_t$ .

O passo computacional básico usado é o pivoteamento, o mesmo que no algoritmo dos simplexos. A variável de saída será determinada pelo critério de razão mínima, o que garante a factibilidade da nova base após o pivoteamento (salvo erros numéricos de arredondamento).

A variável  $z_0$  sempre ocupa na base a posição correspondente a um par complementar. Seja uma solução quase-complementar onde ambas as variáveis de um certo par complementar  $(w_s, z_s)$  não estejam na base. Então, entrando-se com cada uma destas variáveis na base, são obtidas exatamente duas soluções quase-complementares adjacentes. A principal propriedade do caminho percorrido pelo algoritmo é que cada ponto obtido somente possui duas bases quase-complementares adjacentes: a anterior e a próxima. Assim, o algoritmo continua de maneira inequívoca, impedindo-se que uma base obtida anteriormente venha a ser repetida.

A possibilidade de degeneração pode ser evitada usando-se o critério lexicográfico no teste de razão mínima ou, ainda, um artifício de somar-se um escalar pequeno aos numeradores das frações de empate

## 22 CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE

(Tomlin [42]). Observado então o cuidado prévio com degeneração, o algoritmo caminha de maneira única até que  $z_0$  saia eventualmente da base, o que ocorre em um número finito de iterações, quando uma solução factível complementar é obtida. Esta é a solução procurada e o algoritmo termina.

Em alguma iteração, o valor de  $z_0$  pode tornar-se pequeno do ponto de vista computacional (Tomlin [42]). Os valores das variáveis básicas, exceto  $z_0$ , são então aqueles dados no tablô; os valores de  $z_0$  e, obviamente, das variáveis não-básicas, são zero.

No entanto, é possível que a coluna atualizada correspondente à variável de entrada seja não-positiva. Neste caso, o teste de razão mínima falha e soluções não-básicas factíveis quase-complementares contendo  $z_0$  são geradas indefinidamente ao longo de um raio extremo. O término em raio extremo faz com que o algoritmo também seja interrompido, sem que, no entanto, uma solução para (2.1) seja encontrada. Isto não quer dizer que o problema de complementaridade linear não possua solução, como mostrado nos resultados abaixo (Murty [31]).

**Definição 2.4** *Uma matriz  $M \in R^{n \times n}$  é:*

- Copositiva, se  $z^T M z \geq 0$  para todo  $z \geq 0$ ;
- Copositiva estrita se  $z^T M z > 0$  para todo  $z > 0$ ;

- Copositiva mais, se ela é copositiva e se quando  $z^T M z = 0$  para  $z > 0$ , tem-se  $z^T (M + M^T) = 0$ ; e
- P-matriz, se todos seus subdeterminantes principais são positivos.

**Teorema 2.5** *Se  $M$  é copositiva mais e o sistema (2.1) é factível, então o PCL associado tem uma solução e o algoritmo de Lemke termina com uma base factível complementar. Reciprocamente, quando  $M$  é copositiva mais, se o algoritmo termina em raio extremo, o sistema (2.1) é infactível.*

**Teorema 2.6** *Se  $M$  é copositiva estrita ou uma P-matriz, o algoritmo aplicado a (2.1) termina com uma solução.*



# Capítulo 3

## Equilíbrio Econômico

Este capítulo concentra-se na formulação do problema de equilíbrio econômico como um problema de complementaridade — mais especificamente, na análise da caracterização de soluções. Serão também descritos procedimentos computacionais para o cálculo de equilíbrios econômicos, incluindo uma discussão de suas propriedades numéricas.

### 3.1 O Problema de Equilíbrio Econômico

Uma economia encontra-se em *equilíbrio* se nenhum de seus agentes tiver interesse em mudar sua posição, i.é., se os seus respectivos objetivos encontrarem-se otimizados.

Tradicionalmente, o problema de equilíbrio de uma economia é colocado em termos do excesso da demanda, determinado pelas dotações, pela preferência de seus membros e pelas suas tecnologias de

produção. Para simplificar, restringe-se a uma economia com comportamento competitivo e com preços não-distorcidos — esta hipótese será relaxada posteriormente, quando um comportamento imperfeitamente competitivo for analisado (Capítulo 6).

Considera-se uma economia com produção descrita por atividades lineares, i.é., caracterizada por uma matriz de fatores fixos do tipo de Leontief. Supõe-se que existem nela  $m$  bens e  $n$  atividades, apresentando retornos constantes à escala.

Sejam:

$p \in R_+^m$  o vetor de preços;

$b \in R_+^m$  o vetor de dotações;

$x(p) \in R^m$  as funções de oferta/demanda de mercado, as quais supõem-se continuamente diferenciáveis;

$y \in R_+^n$  o vetor de nível de operação das atividades;

$c \in R^n$  o vetor dos custos unitários para operar cada atividade; e

$A \in R^{m \times n}$ , representando a matriz de atividades ou de insumo-produto, onde  $a_{ij} > 0$  ( $a_{ij} < 0$ ) denota que o bem  $i$  é um produto (insumo) na atividade  $j$ .

Devido à generalidade da teoria de equilíbrio econômico, existem várias formas de caracterizá-lo. Usa-se, então, a seguinte definição (Scarf [41], Definição 5.1.3):

**Definição 3.1** *Um vetor de preços  $p$  e um vetor de níveis de atividades de produção  $y$  constituem um equilíbrio competitivo se:*

$$b + Ay - x(p) \geq 0 \quad : \quad p \geq 0 \quad (3.1)$$

$$c - A^T p \geq 0 \quad : \quad y \geq 0, \quad (3.2)$$

onde  $A^T$  denota a matriz transposta de  $A$ .

Estas relações são interpretadas economicamente da seguinte forma:

(3.1) A demanda excedente é não-positiva. Se a oferta é maior que a demanda para um certo bem, então o preço deste bem é igual a zero; se um preço é maior que zero, então para este bem a oferta é igual a demanda.

(3.2) Nenhuma atividade pode estar produzindo lucro positivo. Se uma atividade produz lucro negativo, então ela não é operada; se for operada, então o lucro associado é zero.

É fácil ver que a Definição 3.1 implica alguns fatos econômicos. Em primeiro lugar, a economia deve operar eficientemente, i.é., mi-

nimizando custo de produção. Isto ocorre, pois (3.1) e (3.2) são exatamente as condições de folga complementar do programa linear que representa a produção. Além disso, os agentes, atuando na produção, encontram-se maximizando lucros supondo-se tomadores de preços. Isto se dá, pois (3.1) significa que preços são custos marginais, já que representam as variáveis duais do programa linear associado à produção. Finalmente, quantidades produzidas satisfazem a demanda motivada pela maximização de utilidades. Esta é a idéia de equilíbrio que se está utilizando.

Logo, o cálculo de equilíbrios econômicos consiste em achar  $p$  e  $y$  que satisfaçam o sistema (3.1)-(3.2).

Diz-se que o equilíbrio é *geral* quando o vetor custo de operação de atividades  $c$  é nulo, i.é., se nenhum preço é dado exogenamente. Por outro lado, é *setorial* ou *parcial* quando o vetor custo tiver algum elemento não-nulo, ou seja, se o preço de um bem de outro setor, que não se inclui no sistema estudado, é dado exogenamente.

## 3.2 Existência e Unicidade de Equilíbrios

### 3.2.1 Equilíbrio Geral

Uma vez definido o problema de equilíbrio, como na seção anterior, a prova de existência pode ser encontrada em Magill [24] e Kehoe

[19]. Neste último, encontra-se também a análise de multiplicidade de equilíbrios, dando as condições para que isso ocorra, sendo que no caso de uma economia regular, o número de pontos de equilíbrios é ímpar (ver exemplos no Capítulo 5).

Magill [24] estabelece um teorema que assegura a existência de um equilíbrio competitivo, considerando algumas hipóteses sobre a economia ( Teorema 3.1)

Já Kehoe [19] analisa a unicidade e multiplicidade. Neste, têm-se resultados do tipo: uma economia regular tem um número finito de equilíbrios que varia continuamente com determinados parâmetros, e que uma economia tem um único equilíbrio, se condições específicas forem verificadas.

### 3.2.2 Equilíbrio Setorial

Resultados de prova de existência também são conhecidos e, diferentemente do equilíbrio geral, o caso setorial, dadas as suas características, apresenta unicidade de equilíbrio, sob determinadas condições de regularidade, tais como continuidade, diferenciabilidade e monotonicidade estrita para algumas funções, lucro e demanda excedente, por exemplo (Friesz [9]).

Friesz [9] aborda questões de existência e unicidade e estabelece

resultados importantes em seus teoremas (Teoremas 1,2 e 3), usando também hipóteses de economia regular. É interessante observar que, toda a análise é feita com o problema de equilíbrio espacial sob a forma de complementaridade. Seu teorema 1 assegura essa equivalência; o teorema 2, a existência; e o 3, a unicidade.

### 3.3 Cálculo do Equilíbrio por Complementaridade

Esta seção representa uma das partes centrais do presente trabalho; é nela que é estabelecida a equivalência entre as noções de equilíbrio e complementaridade.

Retomando o PCNL (Definição 2.1), define-se  $z$  e  $F(z)$  adequadamente, conforme se segue:

$$z = \begin{pmatrix} p \\ y \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$F(z) = \begin{pmatrix} b + Ay - x(p) \\ c - A^T p \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

com isso, então, verifica-se a identificação do problema de complementaridade como um problema de equilíbrio:

### 3.3. CÁLCULO DO EQUILÍBRIO POR COMPLEMENTARIDADE 31

Complementaridade	Equilíbrio Econômico
$z \geq 0$	$p \geq 0$ $y \geq 0$
$F(z) \geq 0$	$b + Ay - x(p) \geq 0$ $c - A^T p \geq 0$
$z^T F(z) = 0$	$p^T [b + Ay - x(p)] = 0$ $(c - A^T p)^T y = 0$

Em particular, se as funções oferta/demanda são lineares,  $x(p) = d + Dp$ , onde  $d \in R^m$  e  $D \in R^{m \times m}$ , o problema de equilíbrio econômico torna-se um problema de complementaridade linear.

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - d \\ c \end{pmatrix} + \left( \begin{array}{c|c} D & A \\ \hline -A^T & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} p \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \quad : \quad \begin{pmatrix} p \\ y \end{pmatrix} \geq 0. \quad (3.5)$$

Porém, observa-se que, no caso geral, tem-se um PCNL. Para resolvê-lo, será usado o método das aproximações lineares sucessivas de Newton. Assim,  $F$  pode ser aproximada localmente em  $z^k$  por

$$F^k(z) = F(z^k) + \nabla F(z^k)(z - z^k) \quad (3.6)$$

O jacobiano de  $F(z^k)$  é dado por

$$\nabla F(z^k) = \nabla F \begin{pmatrix} p^k \\ y^k \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} \nabla x(p^k) & A \\ \hline -A^T & 0 \end{array} \right) = M^k.$$

Assim, (3.6) fica sendo

$$F^k(z) = \begin{pmatrix} b + Ay^k - x(p^k) \\ c - A^T p^k \end{pmatrix} + \left( \begin{array}{c|c} \nabla x(p^k) & A \\ \hline -A^T & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} p^k \\ y^k \end{pmatrix} + M^k z$$

Feita esta aproximação afim, pode-se reescrever (3.1)-(3.2) aproximadamente, na forma convencional de um PCL (v. Definição 2.3) em torno de  $z^k$ :

$$w = q^k + M^k z \geq 0 : z \geq 0 \quad (3.7)$$

onde

$$q^k = \begin{pmatrix} b - x(p^k) + \nabla x(p^k)p^k \\ c \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$M^k = \nabla F(z^k) \quad (3.9)$$

### 3.3.1 Convergência das Linearizações para o Problema de Equilíbrio

Observe-se que o teorema 2.4 requer a positividade do jacobiano de  $F(z)$  para assegurar a convergência do processo de linearizações sucessivas. No entanto, no caso de equilíbrio geral a condição de positividade não é assegurada, dada a ação do efeito renda presente em  $x(p)$ , o que pode causar indefinição no jacobiano de  $F(z)$  (Mathiesen [28]).

No caso de equilíbrio setorial, a ação do efeito renda de  $x(p)$  é pequena (Ahn [2]). Com isso, o jacobiano de  $x(p)$  será, tipicamente, definido negativo, o que implica o jacobiano de  $F(z)$  ser definido positivo (Mathiesen [28]).

### 3.3. CÁLCULO DO EQUILÍBRIO POR COMPLEMENTARIDADE 33

Com essa análise, conclui-se que, para o equilíbrio geral, a seqüência das linearizações sucessivas pode não convergir, enquanto que, para o setorial, a seqüência converge para a solução de (3.1)-(3.2).

#### 3.3.2 As Linearizações Sucessivas para o Equilíbrio Geral : Complicações

No equilíbrio geral, todos os preços são determinados simultaneamente e nenhum deles é dado exogenamente, e, ainda, o vetor  $c$  de custos é nulo. As demandas  $x_i(p), i = 1, \dots, m$  são funções de todos os preços da economia. Supõe-se que essas funções são consistentes com a maximização das utilidades individuais. Se as demandas satisfazem cada família de cestas individuais, e considerando-se a hipótese de não-saciação local, então

$$p^T x(p) = p^T b$$

que é a lei de Walras, a qual caracteriza o equilíbrio (geral) walrasiano, com o qual se trabalha aqui.

Com isso, as demandas são homogêneas de grau zero, ou seja, se o vetor  $p^*$  é de equilíbrio, então  $\lambda p^*$  para  $\lambda > 0$  também o é.

Essa suposição nas demandas gera complicações na resolução dos PCLs aproximados. Primeiro, a homogeneidade implica que o sistema (3.1)-(3.2) determina unicamente preços relativos. Conseqüentemen-

te, tem-se liberdade para normalizar os preços iterativos do processo, i.é.,  $p \in S^m = \{p \mid \sum p_i = 1, p_i \geq 0\}$  onde  $S^m$  é o simplexo unitário de  $R^m$ . Não-saciação e restrição nas cestas individuais implicam que a demanda para o bem  $i$  é indefinida para  $p_i$  (ao menos para algum  $i$ ). Então a solução para um PCL, onde  $p_i = 0$  pode ocorrer, porém invalida essa solução como um preço iterativo. Por isso, é necessário distinguir entre solução do PCL e preços e quantidades da iteração.

Segundo, da equação de Euler para funções homogêneas,

$$[\nabla x_i(p)] p = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.10)$$

e a linearização de  $x_i(p)$  no ponto  $p^k$  como:

$$\begin{aligned} x_i(p|p^k) &\equiv x_i(p^k) + [\nabla x_i(p^k)](p - p^k) = \\ &= x_i(p^k) + [\nabla x_i(p^k)]p, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

vê-se que (3.10) implica o jacobiano da demanda  $D \equiv \nabla x(\cdot)$  ser singular, e, conseqüentemente, as condições linearizadas de (3.1)-(3.2) não calculam o equilíbrio, dada a singularidade de  $M$ , como demonstrado a seguir.

Sejam (3.10) e a linearização de  $-A^T p^* \geq 0$  e  $b + Ay - x(p^*) \geq 0$  em  $p^* \neq 0$  como  $u^* = -A^T p^*$  e  $v^* = b - d + Ay^* + Dp^*$  respectivamente, onde  $d \equiv d(p^*)$  e  $D \equiv \nabla x(p^*)$ .

### 3.3. CÁLCULO DO EQUILÍBRIO POR COMPLEMENTARIDADE 35

Dividindo em básico e não-básico tem-se

$$\begin{pmatrix} -D & A_B & 0 \\ A_B^T & 0 & 0 \\ A_N^T & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^* \\ y_B^* \\ u_N^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^* \\ u_B^* \\ y_N^* \end{pmatrix} = Mx + w = \begin{pmatrix} b - d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$M$  será singular, se  $Q = \begin{pmatrix} -D & A_B \\ A_B^T & 0 \end{pmatrix}$  for singular.

De (3.11)  $A_B^T p^* = 0$  e por (3.10)  $\nabla x(p^*) p^* = 0$ , assim, conseqüentemente,  $\begin{pmatrix} -D \\ A_B^T \end{pmatrix} p^* = 0$ , ou seja, uma combinação linear de vetores de  $Q$  que são não nulos, produzindo o vetor nulo, usando  $p^*$  que é diferente de zero. Logo  $M$  é singular, no equilíbrio.

Evita-se essa singularidade de duas formas. Uma delas é adicionar uma restrição de normalização  $\sum p_i = 1$  para  $i = 1, \dots, m$ ; uma outra é estipular um preço de um bem como numerário.

Neste trabalho, opta-se pela segunda alternativa. Se, na  $k$ -ésima iteração, o numerário escolhido for o bem  $l$ ,  $l = 1, \dots, m$ , fixa-se  $p_l^k = 1$ .

Do sistema linearizado que se tinha com  $x(p) = d + D(p)$

$$\begin{aligned} b - d + Ay - Dp &\geq 0 & : & \quad p \geq 0 \\ -A^T p &\geq 0 & : & \quad y \geq 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

com a estipulação do numerário, fica sendo

$$\begin{aligned} h + By - G\pi &\geq 0 & : & \quad p \geq 0 \\ s - B^T \pi &\geq 0 & : & \quad y \geq 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde  $\pi = (p_1, \dots, p_{m-1})$ , a matriz  $B$  é a  $A$  sem a  $l$ -ésima linha,  $G$  é a matriz  $D$  sem sua  $l$ -ésima coluna,  $s$  é um vetor com elementos  $s_j = -a_{lj}p_l^k$  para  $j = 1, \dots, n$ , e  $h$  é um vetor com  $(m - 1)$  elementos  $h_i = b_i - x_i(p^k) - x_{il}p_l^k, i = 1, \dots, m - 1$  onde  $x_{il}$  é um elemento da  $l$ -ésima coluna de  $D$ .

Conseqüentemente, o sistema acima é obtido de uma linearização de (3.1)-(3.2), fixando  $p_l$  e retirando a  $l$ -ésima equação de balanço do bem  $l$ . A lei de Walras implica que, quando  $(m - 1)$  mercados estão equilibrados, o mercado restante também está (Mathiesen [29]).

# Capítulo 4

## O Algoritmo

Neste capítulo, descreve-se o algoritmo computacional para a solução de (3.1)-(3.2), denominado *SPCL* (Seqüência de Problemas de Complementaridade Linear) (Mathiesen [28]).

Este algoritmo aproxima o cálculo de equilíbrio geral e setorial por uma seqüência de problemas de complementaridade linear.

### 4.1 A Seqüência Iterativa

O algoritmo SPCL pode ser colocado nos seguintes passos:

1. Inicializar

$k = 0$  e estipular preços iniciais  $p_0$

2. Construir e resolver o PCL

Achar  $z$  que resolve  $q^k + M^k z = w$ , onde  $z$ ,  $q^k$  e  $M^k$  são dados por (3.3),(3.8) e (3.9).

## 3. Incrementar contador de iterações

$$k = k + 1$$

4. Construir  $z^k$ 

Se  $z$  pertence aos domínios de  $F$  e  $\nabla F$ , então  $z^k = z$ ; caso contrário,  $z^k = \alpha z^{k-1} + (1 - \alpha)z$ , onde  $0 < \alpha < 1$  (tipicamente  $\alpha = 0.5$ )

## 6. Teste de parada

Sejam  $\epsilon$  e  $\delta$  escalares de valores positivos pequenos (tipicamente  $\epsilon = \delta = 10^{-4}$ )

Se  $F_r(z^k) > -\epsilon$  e  $|z_r^k \cdot F_r(z^k)| < \delta$  para todo  $r$ , parar o valor de  $z^k$  é a solução procurada; senão, ir para passo 2.

### 4.1.1 A Linearização e Construção do PCL

A linearização é feita através do método de Newton, conforme seção 2.3, obtendo-se o sistema linearizado (3.5), e resolvido pelo algoritmo de Lemke.

Como já foi dito na seção 3.3.2, no caso de equilíbrio geral, o PCL a ser resolvido passa a ser aquele colocado no sistema (3.13), dada a singularidade da matriz  $M$ , no equilíbrio.

### 4.1.2 Construção do $z^k$

Foi citada na seção 3.3.2 a possibilidade de alguma demanda não estar definida para algum preço calculado pelo PCL, tanto no equilíbrio geral como no setorial.

Por isso, é preciso estar atento, pois o vetor  $z^k$  será usado para o cálculo de  $F(z)$ , logo  $z^k$  deve pertencer ao domínio de  $F$ , e, caso não seja ainda o equilíbrio, ele será usado como ponto de linearização, portanto terá também de pertencer ao domínio do jacobiano de  $F$ . Então, se uma dessas duas condições falha, gera-se  $z^k$  como sendo uma combinação convexa entre o  $z^{k-1}$  e a solução atual do PCL.

Na realidade, essa combinação é feita somente com os preços, ou seja

$$p^k = p^{k-1} + t (p - p^{k-1}) \quad k \geq 1$$

onde  $p$  é a solução do PCL. Notar que se faz a combinação apenas dos preços, pois estes é que determinam se  $z^k$  é um  $z$  iterativo ou não, e ainda é apenas do que se necessita para retomar o algoritmo.

Feita a combinação, verifica-se então se o resultado pode ser um  $p^k$ , caso não atenda as condições, repete-se a operação, até se achar um  $p^k$ , ou melhor, um  $z^k$ .

### 4.1.3 Solução no PCL

Com a positividade da matriz e com as condições de existência de equilíbrio atendidas, o algoritmo de Lemke calcula a solução dos PCLs parciais (Teoremas 2.5 e 2.6).

Para o equilíbrio geral, mesmo o sistema diminuído (3.13) pode ser não resolvido por Lemke, com a fixação de algum  $p_i$ , devido à persistência da indefinição da matriz  $M$  diminuída. Porém têm-se  $m$  sistemas diminuídos, candidatos a terem solução. Logo é possível que, em algum desses PCLs diminuídos, Lemke calcule uma solução. Esse problema de assegurar que pelo menos um dos  $m$  sistemas diminuídos tenha solução ainda não foi resolvido.

## 4.2 Convergência do Algoritmo

### 4.2.1 Equilíbrio Setorial

É assegurada a convergência local (Teorema 2.4) e global (Pang e Chan [33]), uma vez verificada a existência e unicidade, utilizando as informações da seção 3.3.1.

### 4.2.2 Equilíbrio Geral

Não existem resultados para este caso, tanto para a local como para a global.

Experimentalmente, nota-se que o método converge, sem atender as condições de positividade do  $\nabla F$ , por isso pensa-se que tal condição parece muito forte, para garantir convergência.

Mathiesen [29], tomando um exemplo, verificou que o algoritmo de Lemke calculou uma solução, quando existia; e provou que o SPCL convergiu globalmente para o exemplo estudado.



# Capítulo 5

## Resultados Computacionais

Neste capítulo são descritos alguns dos problemas de equilíbrio — setorial e geral — resolvidos pelo algoritmo SPCL.

### 5.1 Experiência Computacional

O programa foi escrito em FORTRAN77, usando precisão dupla (Real 16). Utilizou 45 segundos de CPU (tempo de processamento) para compilação em ambiente VAX 11/785 (Vax/VMS V4.3), com NODE-BUG E NOOPTIMIZED.

Alguns dos exemplos, como o 1 e 5, foram resolvidos em micro-computador linha PC, sendo que, neste ambiente, o tempo de processamento não foi uma preocupação. A título de informação, pode se dizer que a razão no tempo de resolução, comparado ao VAX, é cerca 3 por 1, no máximo.

Neste capítulo, colocam-se 6 problemas de equilíbrio competitivo. Tempo de CPU, referido adiante, trata-se somente de processamento, excluído leitura (escrita) de arquivos de entrada (saída).

É importante notar que, como o algoritmo é newtoniano, o número de iterações está intimamente relacionado com o valor inicial de  $p$ ; por isso, informa-se o preço inicial.

## 5.2 Exemplo 1

Trata-se de um problema devido a H. Scarf, ilustrativo para um *software* comercial chamado *OCTASOLV*, baseado em ponto fixo, de Broadie (1983), na classe de equilíbrio geral. Tal *software* achou a solução usando 10 segundos de CPU.

### *Dados - Exemplo 1*

- Número de bens :  $m = 5$
- Número de atividades :  $n = 6$
- Número de consumidores :  $nc = 2$

As dotações dos consumidores:

cons. \ bem	1	2	3	4	5
1	0	0	16000	0	0
2	0	0	0	10000	900

Tabela 5.1: Dotações dos consumidores - Exemplo 1

A matriz de atividades:

bem \ ativ.	1	2	3	4	5	6
1	100	100				
2	-10	-10	100	100	100	-100
3	-60	-62	-45	-52	-55	
4	-27	-20	-50	-40	-30	
5	-3	-10	-5	-8	-18	100

Tabela 5.2: Matriz de atividades - Exemplo 1

As funções demandas são Cobb-Douglas, e dadas para cada bem  $i$ , da seguinte forma:

$$d_i(p) = \sum_{j=1}^{n_c} \frac{u_{j_i} \cdot \sum_{k=1}^m p_k \cdot b_{jk}}{p_i}$$

onde os coeficientes de utilidade  $u_{j_i}$  são dados na tabela.

cons. \ bem	1	2	3	4	5
1	0.3	0.6	0.1	0.0	0.0
2	0.6	0.4	0.0	0.0	0.0

Tabela 5.3: Coeficientes de utilidade dos consumidores - Exemplo 1

*Solução - Exemplo 1*

O SPCL acha a solução com 01 iteração, em 04 segundos de CPU, para o valor inicial de  $p = (1, \dots, 1)$ , conforme segue:

<i>Bem</i>	<i>Oferta</i>	<i>Demanda</i>	<i>Preço</i>
1	11340.0000	11340.0000	1.00
2	13960.0000	13960.0000	1.00
3	1600.0000	1600.0000	1.00
4	0.0000	0.0000	1.00
5	0.0000	0.0000	1.00

<i>Atividade</i>	<i>Lucro</i>	<i>Nível de operação</i>
1	0.00	113.4000
2	-2.00	0.0000
3	0.00	71.1830
4	0.00	84.4762
5	-3.00	0.0000
6	0.00	4.7192

Outra versão do problema 1 resulta de uma mudança do elemento  $a(2,6)$  da matriz insumo-produto de -100 para -40 (essa mudança tem interpretação econômica no contexto, para fins de análise de sensibilidade). Aplicando o SPCL, a solução abaixo foi encontrada em 02

iterações, com 4,5 segundos de CPU, para o mesmo preço inicial que o anterior.

<i>Bem</i>	<i>Oferta</i>	<i>Demanda</i>	<i>Preço</i>
1	10548.2315	10548.2315	1.00
2	15269.7143	15269.7143	0.94
3	1600.0000	1600.0000	1.14
4	0.0000	0.0000	0.81
5	0.000	0.0000	0.38

<i>Atividade</i>	<i>Lucro</i>	<i>Nível de operação</i>
1	-2.14	0.0000
2	0.00	105.4823
3	0.00	141.5475
4	2.57	0.0000
5	0.00	27.0992
6	0.00	13.5034

### 5.3 Exemplo 2

Trata-se de um exemplo clássico, na literatura, de equilíbrio geral. Ele foi resolvido por Scarf [41], através do algoritmo de ponto fixo, usando 01 minuto de CPU em um IBM-7094, com precisão de 04 decimais nos resultados.

#### *Dados - Exemplo 2*

- Número de bens :  $m = 6$
- Número de atividades :  $n = 8$

- Número de consumidores :  $nc = 5$

As dotações dos consumidores:

cons. \ bem	1	2	3	4	5	6
1		3.0	5.0	0.1		1.0
2		0.1	0.1	7.0		2.0
3		2.0	6.0	0.1		1.5
4		1.0	0.1	8.0		1.0
5		6.0	0.1	0.5		2.0

Tabela 5.4: Dotações dos consumidores - Exemplo 2

A matriz de atividades:

bem \ ativ.	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4.0	5.0	1.6	1.6	1.6	0.9	7.0	8.0
2	-5.3	-5.0	-2.0	-2.0	-2.0	-1.0	-4.0	-5.0
3	-2.0	-1.0	-2.0	-4.0	-1.0		-3.0	-2.0
4	-1.0	-6.0	-3.0	-1.0	-8.0		-1.0	-8.0
5			6.0	8.0	7.0			
6	4.0	3.5						

Tabela 5.5: Matriz de atividades - Exemplo 2

As funções demandas são do tipo C.E.S. (Elasticidades constantes de substituição), e dadas para cada bem  $i$ , da seguinte forma:

$$d_i(p) = \sum_{j=1}^{nc} \frac{u_{ji}}{p_i^{e_j}} \frac{\sum_{k=1}^m p_k \cdot b_{jk}}{\sum_{k=1}^m p_k^{1-e_j} u_{jk}}$$

onde os coeficientes de utilidade  $u_{ji}$  são dados na tabela.

cons. \ bem	1	2	3	4	5	6
1	4.0		0.2		2.0	3.6
2	0.4			0.6	4.0	1.0
3	2.0		0.5		2.0	1.5
4	5.0			0.2	5.0	4.5
5	3.0			0.2	4.0	2.0

Tabela 5.6: Coeficientes de utilidade dos consumidores - Exemplo 2

*Solução - Exemplo 2*

O SPCL resolveu em 03 iterações, usando, aproximadamente, 20 segundos de CPU, com precisão de 20 casas decimais. O preço inicial foi dado  $p = (1, \dots, 1)$ . A solução é dada a seguir:

<i>Bem</i>	<i>Oferta</i>	<i>Demanda</i>	<i>Preço</i>
1	11.2670	11.2670	1.00
2	0.0000	0.0000	0.99
3	1.0184	1.0184	0.89
4	2.1326	2.1326	0.35
5	22.1604	22.1604	0.54
6	10.7717	10.7717	0.85

<i>Atividade</i>	<i>Lucro</i>	<i>Nível de operação</i>
1	0.00	0.0374
2	0.00	0.8920
3	0.00	2.3211
4	0.00	1.0292
5	-0.39	0.0000
6	-0.11	0.0000
7	0.00	0.1853
8	-1.85	0.0000

### 5.4 Exemplo 3

Este é um exemplo de multi-equilíbrio, sugerido e resolvido por Kehoe [19] através de diminuições de atividades.

Kehoe afirma que métodos baseados em ponto fixo (tradicional), apesar de apresentarem convergência global para algum equilíbrio, nunca calculariam o terceiro ponto de equilíbrio.

Mathiesen [29] resolveu também o problema em questão. Contudo ele diz que, para se obter os três equilíbrios, foram necessárias mudanças no seu algoritmo.

Aqui, com o SPCL, calcularam-se todos os equilíbrios, mudando-se os preços iniciais, sem mais nenhuma mudança.

#### *Dados - Exemplo 3*

- Número de bens :  $m = 4$
- Número de atividades :  $n = 7$
- Número de consumidores :  $nc = 4$

As dotações dos consumidores:

cons. \ bem	1	2	3	4
1	50			
2		50		
3			50	
4				50

Tabela 5.7: Dotações dos consumidores - Exemplo 3

A matriz de atividades:

bem \ ativ.	1	2	3	4	5	6	7
1	-1				6	-1	-1
2		-1			-1	3	4
3			-1		-4	-1	3
4				-1	-1	-1	-1

Tabela 5.8: Matriz de atividades - Exemplo 3

As funções demandas são Cobb-Douglas (com as do exemplo 1) e os coeficientes de utilidade  $u_{ji}$  são dados abaixo.

cons. \ bem	1	2	3	4
1	0.5200	0.4000	0.0400	0.0400
2	0.8600	0.1000	0.0200	0.0200
3	0.5000	0.2000	0.2975	0.0025
4	0.6000	0.2500	0.0025	0.6875

Tabela 5.9: Coeficientes de utilidade dos consumidores - Exemplo 3

*Solução - Exemplo 3*

O programa obteve os três equilíbrios, variando apenas os preços iniciais, conforme segue.

Com o preço inicial  $p = (2, 2, 2, 34)$  o primeiro equilíbrio.

<i>Bem</i>	<i>Oferta</i>	<i>Demanda</i>	<i>Preço</i>
1	260.3636	260.3636	1.00
2	232.1429	232.1429	1.27
3	127.5714	127.5714	0.64
4	276.7917	276.7917	2.18

e o vetor níveis de atividades  $y^* = (0, 0, 0, 0, 47.65, 72.42, 3.13)$ . Com o preço inicial  $p = (1, 2, 3, 1)$  o segundo equilíbrio.

<i>Bem</i>	<i>Oferta</i>	<i>Demanda</i>	<i>Preço</i>
1	303.9340	303.9340	1.00
2	192.2623	192.2623	0.91
3	122.1315	122.1315	1.12
4	281.6722	281.6722	0.60

e  $y^* = (0, 0, 0, 0, 53.18, 65.15, 0)$ .

Com o preço inicial  $p = (1, 1, 1, 1)$  o terceiro equilíbrio.

<i>Bem</i>	<i>Oferta</i>	<i>Demanda</i>	<i>Preço</i>
1	293.1139	293.0000	1.00
2	205.0000	205.0000	1.00
3	123.0000	123.0000	1.00
4	279.0000	279.0000	1.00

e  $y^* = (0, 0, 0, 0, 52.0, 69.0, 0)$ .

## 5.5 Exemplo 4

Este exemplo foi proposto por Eaves [6], para ilustrar um algoritmo de cálculo de equilíbrio. A ausência de produção é a característica deste exemplo, o que o classifica em equilíbrio geral com troca simples, sem produção.

*Dados - Exemplo 4*

- Número de bens :  $m = 8$
- Número de atividades :  $n = \dots$
- Número de consumidores :  $nc = 5$

As dotações dos consumidores:

cons. \ bem	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3			3		5	2	
2		15			2			
3					3			
4			5	4			4	4
5	4			13			6	6

Tabela 5.10: Dotações dos consumidores - Exemplo 4

As funções demandas são do tipo Cobb-Douglas, como as dos exemplos 1 e 3, onde os coeficientes de utilidade  $u_{ji}$  são dados na tabela.

cons. \ bem	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.3		0.13				0.38	0.19
2					1			
3		1.0						
4				0.73				0.27
5				0.47		0.11	0.05	0.37

Tabela 5.11: Coeficientes de utilidade dos consumidores - Exemplo 4

*Solução - Exemplo 4*

O SPCL resolveu em 546 iterações com precisão de 2 casas decimais. O preço inicial foi dado  $p = (1, \dots, 1)$ . É importante observar a discrepância entre alguns preços entre si, e também quanto aos preços iniciais, na solução que se segue.

Bem	Oferta	Demanda	Preço
1	7.000	6.997	1.00
2	15.000	15.000	0.6 E-116
3	5.000	5.000	0.61
4	20.000	20.000	3.20
5	5.000	5.000	0.3 E-115
6	5.000	5.000	1.72
7	12.000	12.000	1.064
8	10.000	10.000	4.344

**5.6 Exemplo 5**

Trata-se de um problema de planejamento energético, resolvido pelo modelo PIES por Hogan [14] e também por Mathiesen [28]



A matriz de atividades:

Bem \ Ativ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1								-1	-1	
2				1	1	1							-1
3							1	1					
4									1	1			
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11											1		1
12													
13													
14												1	
15	-1												
16		-1											
17			-1										
18				-1									
19					-1								
20						-1							
21							-1						
22								-1					
23									-1				
24										-1			

(continuação)

Bem \ Ativ.	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1													
2	-1												
3		-1	-1										
4				-1	-1								
5		.6		.6		-1		-1					
6		.4		.4			1			-1			
7			.5		.5					-1		-1	
8			.5		.5						-1		-1
9						1				1			
10							1				1		
11								1				1	
12													1
13									1				1
14	1												
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													

Tabela 5.12: Matriz de atividades - Exemplo 5



<i>Bem</i>	<i>Preço</i>	<i>Quantidade</i>
9	12.10	1274
10	9.10	1064
11	9.45	1100
12	12.43	1290
13	9.60	1070
14	10.95	999

## 5.7 Exemplo 6

Este exemplo foi formulado com o objetivo de analisar a eficiência econômica de uma agroindústria (Scaramucci e Rotondo [37]), visto que, implicitamente, operar em equilíbrio implica minimização de custos.

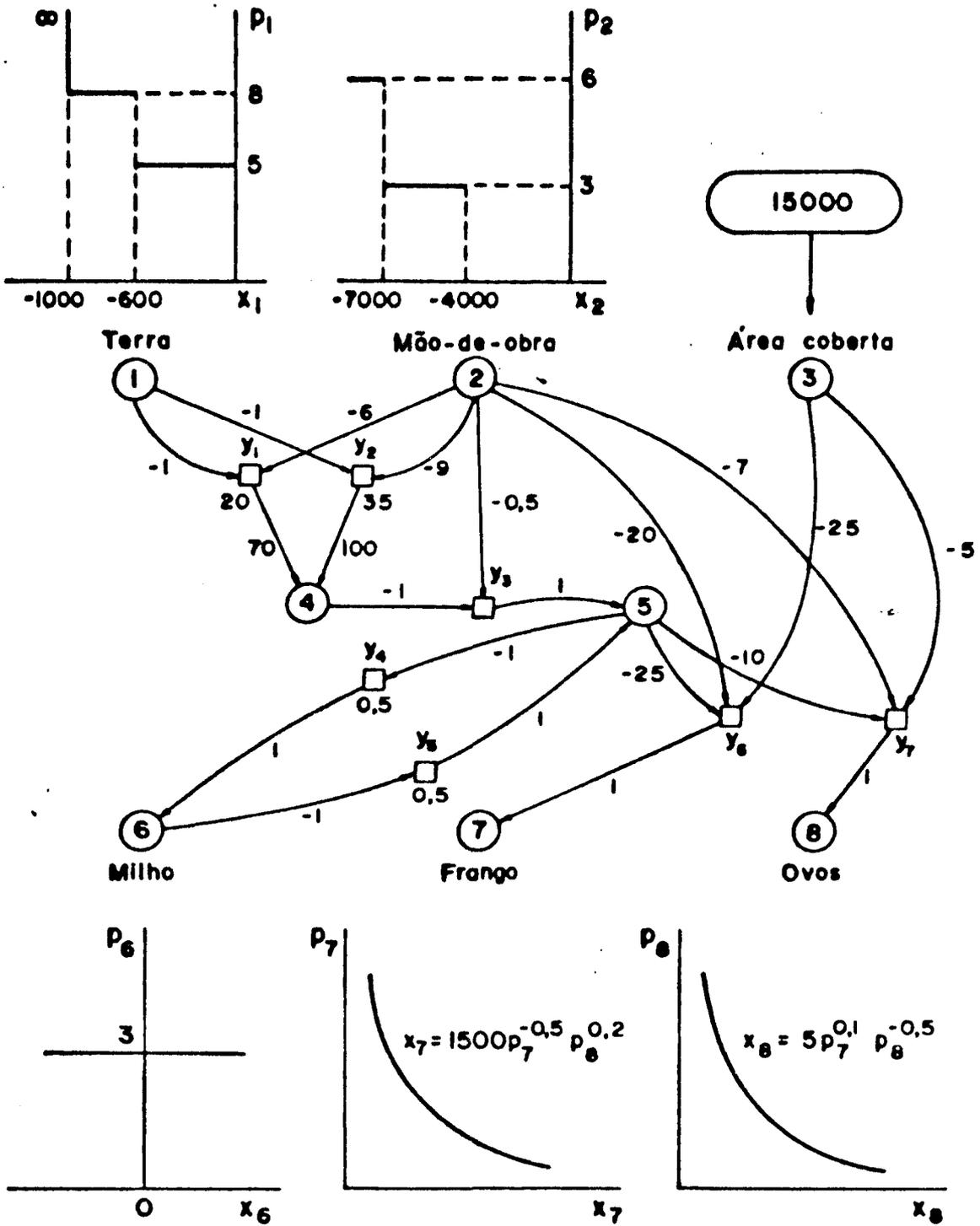
Considera-se uma agroindústria que utiliza insumos de terra, mão-de-obra e capital (espaço físico) para produzir milho, frango e ovos, como indicado na figura a seguir. Os bens 4 e 5 são intermediários, representando o milho cultivado e o colhido, respectivamente.

O milho pode ser vendido ou comprado junto ao mercado, em qualquer quantidade, ao preço 3,00. A disponibilidade de área coberta é limitada a 15.000. As demandas de frango e ovos têm elasticidades com relação a preços constantes e, por se tratarem de bens substituíveis, apresentam efeitos cruzados. Como o jacobiano do vetor de demandas não é simétrico, a condição de integrabilidade não se

verifica neste caso. Assim, os métodos baseados na maximização do excedente total não podem ser aplicados, a menos que um processo de aproximações sucessivas por demandas independentes seja utilizado, como é o caso do algoritmo PIES (Ahn e Hogan [2]).

As atividades 1 e 2 constituem-se em tecnologias alternativas para o cultivo de milho, a última sendo mais intensiva. Os custos de operação referem-se a gastos com fertilizantes, defensivos agrícolas, irrigação, etc. A atividade 3 consiste na colheita de milho. As de número 4 e 5 são de transporte entre o local de produção e o mercado cerealista, tendo um custo unitário associado de 0,5. Finalmente, as atividades 6 e 7 fornecem frango e ovos, respectivamente.

Deve-se ressaltar, também, que, como as ofertas de terra, mão-de-obra e a oferta/demanda de milho não são diferenciáveis, é necessário considerar cada degrau existente como um bem artificial, tendo como dotação a extensão do patamar correspondente. A conexão com a rede de transformação é feita através de atividades auxiliares, tendo um custo de operação dado pelo preço associado ao degrau, no caso de uma oferta, ou o negativo dele, se o patamar corresponder a uma demanda.



*Dados - Exemplo 6*

- Número de bens :  $m = 12$
- Número de atividades :  $n = 14$

As atividades de 8 a 14 são artificiais assim como os bens 9,10,11 e 12.

O vetor das dotações da agroindústria é dado por

$$b = (0, 0, 15000, 0, 0, 0, 0, 0, 600, 400, 4000, 3000)$$

O vetor de custos da agroindústria é dado abaixo

$$c = (20, 35, 0, 0.5, 0.5, 0, 0, 5, 8, 0, 3, 6, 3, -3)$$

A matriz de atividades:

bem \ ativ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	-1	-1						1	1					
2	-6	-9	-5			-20	-7			1	1	1		
3						-25	-5							
4	70	100	-1											
5			1	-1	1	-25	-10							
6				1	-1								1	-1
7						1								
8							1							
9								-1						
10									-1					
11										-1				
12											-1			

Tabela 5.14: Matriz de atividades da agroindústria - Exemplo 6

As funções demandas são dadas apenas para os bens 7 e 8, como

$$d_7 = 1500p_7^{-0,5} p_8^{0,2} \quad e \quad d_8 = 5p_7^{0,1} p_8^{-0,5}$$

*Solução - Exemplo 6*

Aplicando-se o algoritmo, obteve-se o resultado listado abaixo.

<i>Bem</i>	<i>Oferta/Demanda</i>	<i>Preço</i>
1	-47.0626	5.00
2	-7.000.0000	5.37
3	6.334.3116	0.00
4	0.0000	0.82
5	0.0000	3.50
6	-3.044.9005	3.00
7	253.1736	194.82
8	0.9944	72.56

<i>Atividade</i>	<i>Lucro</i>	<i>Nível de operação</i>
1	0.00	47.0626
2	-6.59	0.00000
3	0.00	3.294.3833
4	-1.00	0.0000
5	0.00	3.044.9005
6	0.00	253.1736
7	0.00	0.9944

Pode-se observar, por exemplo, que a produção de milho, a partir de  $y_3 = 3.294,3833$ , não é vantajosa, pois o preço da mão-de-obra passaria a ser 6,00, implicando  $p_4 = (6 \times 6,00 + 1 \times 5,00 + 20)/70 = 0,87$ .

de forma que cada unidade adicional teria um custo de  $(0,50 \times 6,00 + 0,87) = 3,87$ , superior, portanto, à soma do valor do bem no mercado (3,00) com os gastos de transporte (0,50). Assim, além do cultivo de 3.294,3833 unidades de milho, uma quantidade adicional de 3.044,9005, necessária para a produção de frango e ovos, é comprada junto ao mercado. Como somente uma parte da área coberta é utilizada, o setor opera, em equilíbrio, com capacidade ociosa. O lucro total alcançado é de 28.561,72. Um lucro não-nulo pode ser explicado pelo fato do setor produtivo, como um todo, exibir deseconomias de escala, embora cada atividade apresente retornos constantes.

# Capítulo 6

## Extensões

Neste capítulo, o objetivo é utilizar o método exposto em outros problemas interessantes. no caso, previsão de tráfego e equilíbrio de competição imperfeita (Cournot-Nash).

É importante observar que a base teórica continua a mesma; porém, são feitas complementações na formulação do problema anterior, com adição de alguns elementos apropriados e específicos para a análise em questão. No caso de competição imperfeita, a estrutura dos PCLs será alterada.

Aplica-se, então, o programa SPCL para a resolução dos exemplos.

### 6.1 Previsão de Tráfego

A previsão de tráfego é um exemplo da versatilidade de métodos de solução baseados em complementaridade. Uma distribuição de tráfego

constitui-se em um equilíbrio se, sempre que existir fluxo entre dois pontos quaisquer, um caminho efetivamente utilizado tem custo menor ou igual ao correspondente a qualquer outro trajeto alternativo.

É evidente que as interpretações de bens e atividades são particulares, assim como, por consequência, os dotes, os custos, matriz de atividades e funções demanda. Em Scaramucci [39], pode-se encontrar maiores detalhes sobre a metodologia para a equivalência.

### 6.1.1 Exemplo 6.1

Resolve-se um problema simples de previsão de tráfego, sugerido por Dafermos [5], através de sua formulação como um problema equivalente de equilíbrio econômico setorial.

#### *Dados - Exemplo 6.1*

- Número de bens :  $m = 7$
- Número de atividades :  $n = 5$

Considera-se o vetor  $b = (0, 0, 0, 0, 0, -210, -120)$ .

A “matriz de atividades”:

bem \ ativ.	1	2	3	4	5
1	-1				
2		-1			
3			-1		
4				-1	
5					-1
6	1	1	1		
7				1	1

Tabela 6.1: Matriz de atividades - Exemplo 6.1

O vetor custo das atividades é nulo.

As funções são lineares, ou seja, da forma  $x(p) = d + Dp$ , onde  $d = (78.9400, 46.6285, 150.0000, 42.1000, 50.1370)$  e a matriz  $D$  dada abaixo

$$D = \begin{pmatrix} -0.10526 & 0 & 0 & 0.02632 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.06757 & 0 & 0 & 0.01351 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01053 & 0 & 0 & 0.05263 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0027 & 0 & 0 & -0.04054 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Solução - Exemplo 6.1*

Usando o preço inicial  $p = (1, \dots, 1)$ , a solução é encontrada na primeira iteração, dada a linearidade da demanda, conforme segue.

<i>Bem</i>	<i>Oferta</i>	<i>Demanda</i>	<i>Preço</i>
1	-119.990	-119.990	2550.03
2	-90.010	-90.010	2550.03
3	0.000	0.000	3000.00
4	-69.994	-69.994	2640.05
5	-50.006	-50.006	2640.05
6	0.000	0.000	2550.03
7	0.000	0.000	2640.05

<i>Atividade</i>	<i>Lucro</i>	<i>Nível</i>
1	0.00	119.990
2	0.00	90.009
3	-449.97	0.000
4	0.00	69.994
5	0.00	50.006

A solução acima equivale, no problema de previsão de tráfego, a um vetor fluxo

$$f = (120, 90, 0, 70, 50)^T$$

e um vetor individual de custos

$$c = (2550, 2550, 3000, 2640, 2640, 2550, 2640)^T$$

## 6.2 Equilíbrio de Competição Imperfeita

Algumas complementações e ajustes são necessárias para utilizar o método SPCL no equilíbrio econômico de competição imperfeita (Scaramucci e Rotondo, 1988), conforme se vê a seguir.

### 6.2.1 Redefinição do Equilíbrio

Retomando a definição de equilíbrio, no capítulo 3, a mudança básica é substituir o custo  $c$  por  $d(p, y)$ . Com isso, o sistema (3.1)-(3.2) passa a ser:

$$b - x(p) + Ay \geq 0 \quad : \quad p \geq 0 \quad (6.1)$$

$$d(p, y) - A^T p \geq 0 \quad : \quad y \geq 0 \quad (6.2)$$

onde  $b, x$  e  $A$  são os mesmos que os definidos anteriormente, e  $d \in R_+^n$ , sendo que  $d_j(p, y)$  representa o diferencial de preço associado a atividade  $j$ .

Abaixo, dá-se uma interpretação à idéia do diferencial de preço, e, também, às outras condições.

Seja  $I_p$  o conjunto de bens internos para o processo de produção. Conseqüentemente,  $i \in I_p$ ,  $b_i = x_i(p) = 0$ . Para bens internos, a primeira condição de (6.1) significa simplesmente que o fluxo físico de produção deve ser factível.

Analogamente, seja  $J_p$  o conjunto de atividades de produção. Claramente, estas atividades envolvem somente produção de bens. Para  $j \in J_p$ , considera-se  $d_j(p, y)$  como uma constante  $c_j$ , representando os custos de todos bens exógenos usados na atividade quando ela é operada a nível unitário. Sob minimização de custos, o plano de produção

é dado pelo problema de programação linear

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J_p} c_j y_j \\ \text{s/t} \quad & \sum_{j \in J_p} a_{ij} y_j > 0 \quad i \in I_p : p_i > 0 \\ & y_j \geq 0 \quad j \in J_p, \end{aligned}$$

onde  $a_{ij}$  representa os coeficientes de insumo-produto, de maneira que  $p_i \geq 0$ ,  $i \in I_p$ , são as variáveis do problema dual associado. Portanto, para  $j \in J_p$ , a primeira condição de (6.1) deve valer.

A factibilidade de ambos programas é completada pela segunda condição de (6.1) e (6.2), respectivamente. E, ainda, para bens internos e atividades de produção, (6.1) e (6.2) representam, também, as condições de folgas complementares. Portanto, (6.1) (6.2) produzem planos ótimos de produção.

Em outras palavras, seja  $I_0$ , que denota o atual mercado de bens, sendo os mesmos insumos e produtos do sistema de produção, e seja também  $J_0$ , que indica quais atividades representam as ligações com o mercado. Se um setor de produção opera em um mercado de insumos (ou produtos)  $i \in I$ , comprando (ou vendendo) o bem interno correspondente  $i' \in I_p$ , através da atividade  $j \in J_0$ , então  $a_{ij}$  é -1 (ou 1) e  $a_{i'j}$  é 1 (ou -1); e todos os outros elementos da atividade são zero.

O diferencial de preço associado com uma atividade de mercado pode assumir diferentes formas, dependendo do comportamento do setor de produção.

Para  $j \in J_0$ , seja  $c_j$ , representando o custo unitário de participação no mercado. Este custo resulta das atividades envolvidas, tais como transportes, comercialização, etc.

Para simplificar, supomos aqui que setores de produção são tomadores de preços no mercado. O caso de oligopsônio poderia ser facilmente implementado, se necessário. Seja  $i \in I_0$  um insumo correspondendo ao bem de produção  $i' \in I_p$  através da atividade de mercado  $j \in J_0$ . Como a variável dual  $p_{i'}$  é a demanda condicional inversa, uma atividade de compra é operada somente se o preço de mercado, incluindo custo de operação, é igual a  $p_{i'}$ , i.é.,  $p_{i'} = p_i + c_j$ . Portanto,  $d_j(p, y) = c_j$ .

Agora, consideremos um setor vendendo o produto  $i' \in I_p$  em um mercado  $i \in I_0$ , através de uma atividade  $j \in J_0$ . Neste caso,  $p_{i'}$  representa o custo marginal de produzir o bem interno correspondente.

Analogamente ao mercado de insumos competitivo, um tomador de preços, na atividade de venda, é caracterizado por  $d_j(p, y) = c_j$ .

Em mercado oligopolistas, o equilíbrio Cournot-Nash é dado por

$$p_i = p_{i'} + c_j - y_j \left( \frac{\partial x_{i'}(p)}{\partial p_i} \right)^{-1} \quad (6.3)$$

para todas as atividades  $j \in J_0$ , ligando  $i' \in I_p$  e  $i \in I_0$ , que são operadas, desde que certas condições de regularidade são satisfeitas (Murphy et al. [30]; Harker [12]). A relação acima diz, essencialmente,

que, no equilíbrio, receita marginal deve ser igual a custo marginal para todos os setores ativos no mercado. Conseqüentemente, para estas atividades, o diferencial de preço é

$$d_j(p, y) = c_j - y_j \left( \frac{\partial x_i(p)}{\partial p_i} \right)^{-1} \quad (6.4)$$

Supondo que todos os mercados oligopolistas são caracterizados por funções de demandas com elasticidades constantes, não possuindo qualquer efeito cruzado, (6.4) pode ser reescrita como

$$d_j(p, y) = c_j \frac{p_i}{\varepsilon_i} s_{ij}$$

onde

$$\varepsilon_i = - \frac{\partial x_i(p)}{\partial p_i} \frac{p_i}{x_i(p_i)}$$

é a elasticidade preço da demanda para o mercado, e

$$s_{ij} = \frac{y_j}{x_i(p_i)}$$

é a fração de mercado para o setor, operando através da atividade  $j$ .

É importante observar das condições acima que somente o produtor mais eficiente pode estar ativo no mercado produtor perfeitamente competitivo. Contudo, em um equilíbrio Cournot-Nash, setores menos eficientes podem operar, porém num segmento menor do mercado.

É claro também que, se existe somente um setor tomador de preços em um mercado, a atividade de ligação pode ser omitida, contanto que custos de operação não estejam presentes.

### 6.2.2 Reestruturação dos PCLs

Observa-se que o termo  $d(p, y)$  também deve ser linearizado.

Portanto, a mesma linearização que se fez com  $x(p)$ , ou seja,

$$x^k(p) = x(p^k) + \nabla_p x(p^k)(p - p^k)$$

faz-se também com  $d(p, y)$ , conforme segue

$$d^k(p, y) = d(p^k, y^k) + \nabla_p d(p^k, y^k)(p - p^k) + \nabla_y d(p^k, y^k)(y - y^k)$$

E assim, conseqüentemente, a nova estrutura dos PCLs parciais a serem resolvidos terão a forma:

$$w = \begin{pmatrix} b - x(p^k) + \nabla_p x(p^k)p^k \\ d(y^k, p^k) - \nabla_p d(y^k, p^k)p^k - \nabla_y d(y^k, p^k)y^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla_p x(p^k) \\ \nabla_p d(y^k, p^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \quad : \quad \begin{pmatrix} p \\ y \end{pmatrix} \leq 0$$

### 6.2.3 Exemplo 6.2

Este exemplo foi usado por Murphy [30] para ilustrar um algoritmo seu. Admite-se um mercado oligopolista com 5 firmas, e função custo total para cada uma delas como:

$$f_i(q_i) = c_i q_i + \frac{\beta_i}{\beta_i + 1} K_i^{\frac{1}{\beta_i}} q_i^{\frac{\beta_i + 1}{\beta_i}}$$

Observa-se que

$$f'_i(q_i) = c_i + K_i^{\frac{1}{\beta_i}} q_i^{\frac{1}{\beta_i}}, \quad (6.5)$$

onde os parâmetros são dados na tabela.

<i>Firma</i>	$c_i$	$K_i$	$\beta_i$
1	10	5	1.2
2	8	5	1.1
3	6	5	1.0
4	4	5	0.9
5	2	5	0.8

Tabela 6.2: Parâmetros das firmas - Exemplo 6.2

Além disso, a curva de demanda é dada por:

$$Q = 5000p^{-1,1} \text{ ou } p(Q) = 5000^{\frac{1}{1,1}} Q^{-\frac{1}{1,1}} \quad (6.6)$$

A fim de formular conforme sistema (6.1)-(6.2) considera-se os seguintes dados abaixo.

*Dados - Exemplo 6.2*

- Números de bens :  $m = 6$
- Números de atividades :  $n = 5$

A matriz de atividades (fictícia) é:

bem \ ativ.	1	2	3	4	5
1	-1				
2		-1			
3			-1		
4				-1	
5					-1
6	1	1	1	1	1

Tabela 6.3: Matriz de atividades fictícia - Exemplo 6.2

O vetor  $b$  é nulo.

As demandas/ofertas são dadas da seguinte forma:

$$x_i(p) = K_i p_i^{-3}, \quad i = 1, \dots, 5$$

e para  $i=6$

$$x_i(p) = 5000 p_i^{-1,1}$$

usando os mesmos parâmetros da tabela dada anteriormente.

Toma-se  $d(p, y)$  como o definido em (6.4).

Detalhando então, considera-se cada firma como sendo os bens de 1 a 5, com suas ofertas/demandas correspondendo às respectivas curvas de ofertas marginais individuais, e o bem 6 como sendo o bem real do mercado oligopolista, com demanda, em função de seu próprio preço, conhecida.

*Solução - Exemplo 6.2*

Usando o programa SPCL, com algumas modificações para acomodar as alterações teóricas, a solução foi obtida na iteração 24, com a utilização do preço inicial  $p_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ , conforme abaixo.

<i>Bem</i>	<i>Oferta</i>	<i>Demanda</i>	<i>Preço</i>
1	-36.9319	-36.9319	5.29
2	-41.8186	-41.8186	6.89
3	-43.7067	-43.7067	8.74
4	-42.6593	-42.6593	10.83
5	-39.1790	-39.1790	13.11
6	204.2955	204.2955	18.30

<i>Atividade</i>	<i>Lucro</i>	<i>Nível</i>
1	0.00	36.9319
2	0.00	41.8186
3	0.00	43.7067
4	0.00	42.6593
5	0.00	39.1790

Com essa solução, pode se fazer a correspondência com o mercado real, ou seja, as participações das firmas, no mercado, são dadas pelas atividades 1 a 5, respectivamente. Têm-se disponíveis os custos marginais das firmas como os preços dos bens 1 a 5, também respectivamente. E, ainda, o preço do bem no mercado imperfeitamente

competitivo como sendo o  $p_6$  que é 18.30.

### 6.2.4 Exemplo 6.3

Motivado pelo mercado brasileiro de combustível líquido, descreve-se, simplificadaamente, o setor econômico conforme a figura a seguir.

O setor energético brasileiro é inteiramente regulamentado pelo governo. Desde que trabalho, cana-de-açúcar e petróleo participam como insumos em processos diferentes de produção, é de interesse investigar como a política pode afetar outros mercados. Então, a produção de açúcar é incorporada, neste modelo.

Álcool é ofertado através das atividades 2 e 3, representando regiões produtoras distintas. Os custos associados a cada uma dessas atividades correspondem a despesas de capital. Observar que a tecnologia usada na atividade 2 é mais intensiva em trabalho e menos intensiva em capital, quando comparada com outra região.

Petróleo pode ser produzido domesticamente ao custo unitário de 45, até a quantidade de 50 unidades, uma quantidade maior pode ser obtida no mercado internacional ao preço de 75. Atividade 4 representa refino de petróleo.

Considera-se que competição perfeita prevalece no mercado correspondente aos bens 1,2,3 e 6. Pelo fato de custos de operação não

estarem presentes, as atividades de mercado correspondentes podem ser omitidas, conforme explicado anteriormente. Atividades 5 e 6 são ligações com o mercado de combustível líquido.

*Dados - Exemplo 6.3*

- Números de bens :  $m = 8$
- Números de atividades :  $n = 10$

Observar que inclui-se acima bens e atividades artificiais.

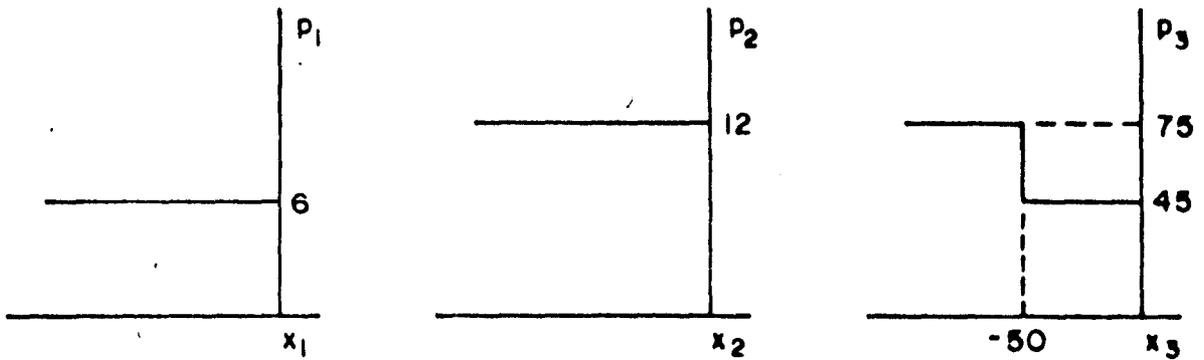
As demandas são dadas para o bem 6 e 7 como

$$x_6(p) = 1500p_6^{-1.2} \quad e \quad x_7(p) = 5000p_7^{-1}$$

A matriz de atividades é:

Bem \ Ativ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-30	-14	-4				1			
2	-10	-10	-10					1		
3				-1					1	1
4		2	3		-1					
5				1		-1				
6	4									
7					1	1				
8									-1	

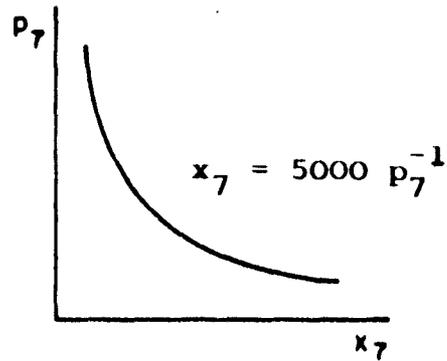
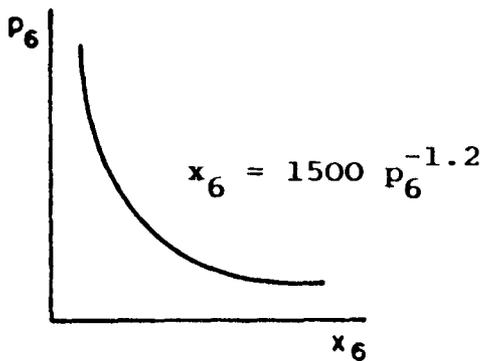
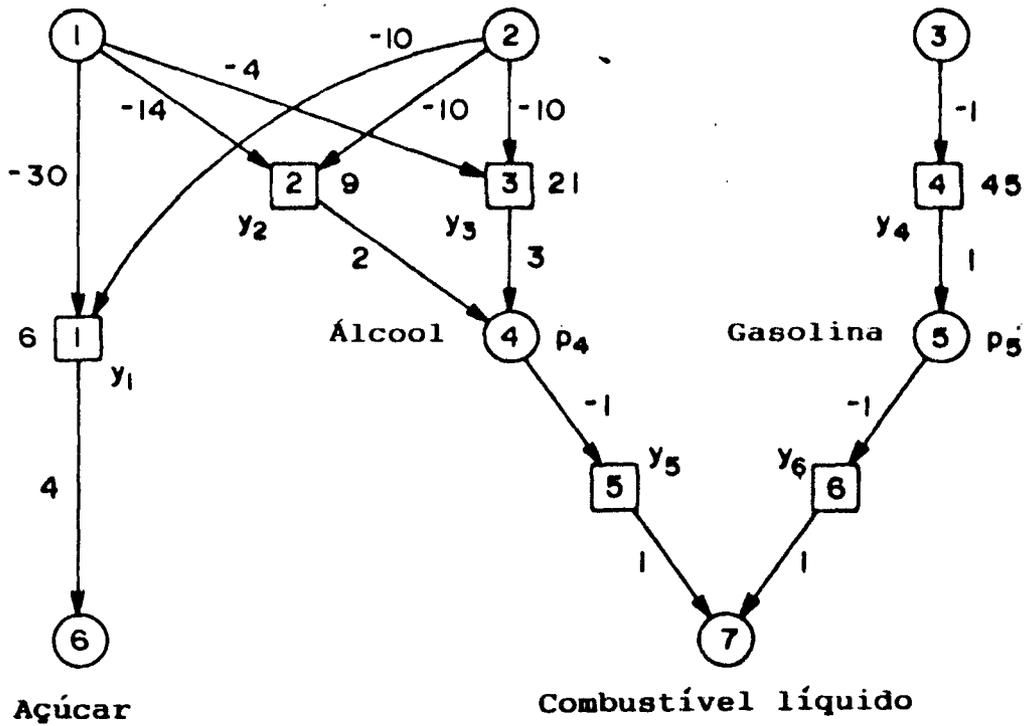
Tabela 6.4: Matriz de atividades - Exemplo 6.3



Mão de obra

Cana de açúcar

Petróleo



*Solução - Exemplo 6.3*

Supõem-se duas possibilidades para o comportamento do mercado de combustível líquido: perfeitamente e imperfeitamente competitivo. A seguir, portanto, dão-se as duas soluções separadamente, e, logo após, faz-se a comparação entre as ambas.

- Solução para mercado perfeitamente competitivo

<i>Bem</i>	1	2	3	4	5	6	7
<i>Preço</i>	6.00	12.00	45.00	55.00	90.00	76.50	55.00
<i>Atividade</i>	1	2	3	4	5	6	
<i>Nível</i>		2.06	0.00	30.30	0.00	90.91	0.00

Observa-se que, como esperado, somente o produto competitivo mais eficiente pode ser vendido no mercado, neste caso, o álcool.

- Solução para o mercado imperfeitamente competitivo

<i>Bem</i>	1	2	3	4	5	6	7
<i>Preço</i>	6.00	12.00	45.00	55.00	90.00	76.50	145.00
<i>Atividade</i>	1	2	3	4	5	6	
<i>Nível</i>		2.06	0.00	7.13	13.08	21.40	13.08

Observar que, agora, ambos os produtos são vendidos no mercado. Conforme mencionado anteriormente, em um equilíbrio Cournot-Nash, o setor mais eficiente leva uma maior fração de mercado.

Nas tabelas seguintes, é feita uma comparação entre os resultados para os casos de competição perfeita e imperfeita.

*Competição perfeita*

	Custo de produção	Preço de mercado	Quantidade vendida	Lucro	Fração do mercado
<i>Alcool</i>	55.00	55.00	90.91	0.00	1.00
<i>Gasolina</i>	90.00				

*Competição imperfeita*

	Custo de produção	Preço de mercado	Quantidade vendida	Lucro	Fração do mercado
<i>Alcool</i>	55.00	145.00	21.40	1926.00	0.621
<i>Gasolina</i>	90.00	145.00	13.08	719.40	0.379



# Capítulo 7

## Conclusões Finais

Vê-se que o método descrito atende às condições de convergência local e global, para equilíbrio setorial e , sob determinadas condições, também para o geral (Mathiesen [29]).

Em aplicações práticas, é importante atentar para suas características de segurança, precisão nas soluções e eficiência computacional. O método proposto atende a estes requisitos. Por ser baseado no método de Newton, o algoritmo supera os métodos de ponto fixo e de otimização. Ele tem a vantagem de, na prática, poder ser aplicado para problemas de equilíbrio geral e setorial, apesar de algumas questões teóricas ainda não estarem devidamente esclarecidas.

Procurou-se mostrar também a fácil adaptação do método sugerido para a resolução de outros problemas, que não o de equilíbrio de competição perfeita. Nesse particular, é de especial interesse a

extensão feita para se tratar de equilíbrios imperfeitamente competitivos. Isto abre uma vasta gama de possibilidades de aplicações do método a outros problemas, além dos mencionados e solucionados.

Dois pontos ficam para possíveis futuros estudos: a sustentação teórica para a aplicabilidade do método ao equilíbrio geral e o desenvolvimento de novas extensões para outros problemas de interesse.

# Bibliografia

- [1] Aganagić, M., “Newton’s Method for Linear Complementarity Problems”, *Mathematical Programming* 28 (1984) 349–362.
- [2] Ahn, B. e W. W. Hogan, “On Convergence of the PIES Algorithm for Computing Equilibria”, *Operations Research* 30 (1982) 281–300.
- [3] Ahn, B., “Computation of Market Equilibria for policy analysis: The Project Independence Evaluation System approach”. Tese de doutoramento (Universidade de Stanford, Stanford, California, 1978).
- [4] Awoniyi, S. e M. J. Todd, “An Efficient Simplicial Algorithm for Computing a Zero of a Convex Union Smooth Functions”, *Mathematical Programming* 25 (1983) 83–108.
- [5] Dafermos, S., “Traffic Equilibrium and Variational Inequalities”, *Transportation Science* 14 (1980) 42–54.
- [6] Eaves, B. C., *Finite Solution of Pure Trade Markets with Cobb-Douglas*

- Utilities*. Relatório técnico SOL (Departamento de Pesquisa operacional, Universidade de Stanford, Stanford, Califórnia, 1984).
- [7] Eaves, B. C., *A Locally Quadratically Convergent Algorithm for Computing Stationary Points*. Relatório técnico SOL 78-13 (Departamento de Pesquisa operacional, Universidade de Stanford, Stanford, Califórnia, 1978).
- [8] Eaves, B. C., "A View of Complementary Pivot Theory (Or Solving Equations with Homotopies)", em C. V. Coffman e G. J. Fix, *Constructive Approaches to Mathematical Models*. Academic Press, Nova York, NY, 1979.
- [9] Friesz, T. L., R. L. Tobin, T. E. Smith e P. T. Harker, "A Nonlinear Complementarity Formulation and Solution Procedure for the General Derived Demand Network Equilibrium Problem", *Journal of Regional Science* 23 (1983) 337-359.
- [10] Friesz, T. L., P. T. Harker e R. L. Tobin, "Alternative Algorithms for the General Network Spatial Price Equilibrium Problem", *Journal of Regional Science* 24 (1984) 475-507.
- [11] Hansen, T., A. S. Manne. "Equilibrium And Linear Complementarity: An Economy with Institutional Constraints

- on prices”, *Equilibrium and Disequilibrium in Economy Theory* (D. Reidel, Mass, 1977).
- [12] Harker, P. T., “A Variational Inequality Approach for the Determination of Oligopolistic Market Equilibrium”, *Mathematical Programming* 30 (1984) 105-111.
- [13] Harker, P. T., “Alternative Models of Spatial Competition”, *Operations Research* 34 (1986) 410-425.
- [14] Hogan, W. W., “Energy Policy Models for Project Independence”, *Computers & Operations Research* 2 (1975) 251-271.
- [15] Jones, P. C. et al., “Computing Nonlinear Network Equilibria”, *Mathematical Programming* 31 (1985) 57-66.
- [16] Josephy, N. H. “Newton’s Method for Generalized Equations”, *Relatório Técnico MRC*, University of Wisconsin (1979)
- [17] Kappel, N. W. e L. T. Watson, “Iterative Algorithms for the Linear Complementarity Problem”, *International Journal of Computer Mathematics* 19 (1986) 273-297.
- [18] Karamardian, S., “Generalized Complementarity Problem”, *Journal of Optimization Theory and Applications* 8 (1971) 161-168.

- [19] Kehoe, T. J., "Computing All of the Equilibria of Economics of the Factors of Production", *Journal of Mathematical Economics*, 13 (1984) 207-224.
- [20] Kojima, M., "A Unification of the Existence Theorems of the Nonlinear Complementarity Problems", *Mathematical Programming*, 9 (1975) 257-278.
- [21] Kolstad C. D. e A. E. Burris, "Imperfectly Competitive Equilibria in International Commodity Markets", *American Journal of Agricultural Economics* fevereiro (1986) 27-36.
- [22] Lemke, C. E., "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming", *Management Science* 11 (1965) 681-689.
- [23] MacKinnon, J. G. "An Algorithm for the Generalized Transportation Problem" *Regional Science and Urban Economics* 5 (1975) 455-464.
- [24] Magill, M. J. P., "An Equilibrium Existence Theorem", *Mathematical Analysis and Applications* 84 (1981) 162-169.
- [25] Mangasarian, O. L. "Equivalence of the Complementarity Problem to a System of Nonlinear Equations", *SIAM Journal of Applied Mathematical* 31 (1976) 89-91.

- [26] Mathiesen, L. "Efficiency Pricing in a Linear Programming Model: A Case with Constraints on Dual Variables", *Scandinavian Journal of Economics*, 4 (1977) 468-477.
- [27] Mathiesen, L., "Computation of Economic Equilibria by a Sequence of Linear Complementarity Problems", *Mathematical Programming Study* 23 (1985) 1-25.
- [28] Mathiesen, L., "Computational Experience in Solving Equilibrium Models by a Sequence of Linear Complementarity Problems", *Operations Research* 33 (1985) 1225-1250.
- [29] Mathiesen, L., "An Algorithm Based on a Sequence of Linear Complementarity Problems Applied to a Walrasian Equilibrium Model: An Example", *Mathematical Programming* 37 (1987) 1-18.
- [30] Murphy, F. H., H. D. Sherali and A. L. Soyster, "A Mathematical Programming Approach for Determining Oligopolistic Market Equilibrium", *Mathematical Programming* 24 (1982) 92-106.
- [31] Murty, K., *Linear and Combinatorial Programming* (Wiley Nova York, N. Y., 1976).
- [32] Murty, K., "Computational Complexity of Complementary Pivot

- Methods”, *Mathematical Programming Study* 7 (1978) 61-73.
- [33] Pang, J. S. e D. Chan, “Iterative Methods for Variational and Complementarity Problems”, *Mathematical Programming* 24 (1982) 284-313.
- [34] Robinson, S. M., “Strongly regular generalized equations”, *Mathematics of Operations Research* 5 (1980) 43-62.
- [35] Samuelson, P. A., “Spatial Price Equilibrium and Linear Programming”, *American Economic Review* 42 (1952) 283-303.
- [36] Scaramucci, J. A. e J. R. Arica Chávez, “Métodos Homotópicos para a Determinação de Equilíbrios Econômicos”, IX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (Brasília, 1987).
- [37] Scaramucci, J. A. e W. Rotondo, “Cálculo de Equilíbrios Setoriais por Complementaridade” 7º Encontro Latino-Americano da Econometric Society (São Paulo, SP, Brasil, 1987).
- [38] Scaramucci, J. A. e W. Rotondo, “Eficiência Econômica: Uma Análise Setorial por Complementaridade” X Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (Gramado, RS, Brasil 1987).
- [39] Scaramucci, J. A., “Previsão de Tráfego como um Problema de Equilíbrio Econômico” XI Congresso Nacional de Matemática Aplicada

e Computacional (Ouro Preto, MG, Brasil, 1988).

- [40] Scaramucci, J. A. e W. Rotondo, "Treating Perfect and Imperfect Competition in Engineering-Economics Models", comunicação aceita para a 2<sup>a</sup> Conferência sobre Aplicações de Matemática à Economia e à Gestão (Lisboa, Portugal, 1988).
- [41] Scarf, H. e T. Hansen, *Computation of Economic Equilibria* (Yale University Press, Conn., 1973).
- [42] Tomlin, J. A., "Robust Implementation of Lemke's Method for the Linear Complementarity Problems", *Mathematical Programming Study* 7 (1978) 55-60.