

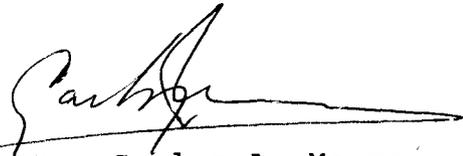
MODELAGEM E SIMULAÇÃO NUMÉRICA
DO TRANSIENTE TÉRMICO
EM MEIOS COMPOSTOS

JOÃO FREDERICO C. A. MEYER

MODELAGEM E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO TRANSIENTE
TÉRMICO EM MEIOS COMPOSTOS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. João Frederico C. A. Meyer e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campos, 23 de Junho de 1988.



Prof. Dr. Carlos A. Moura
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Junho - 1988

A meu orientador, a dívida pelo
exemplo;

A meus amigos, minha gratidão.

Aos leitores a recomendação de
Guimarães Rosa de que "o escuro
só se faz claro de pouquinho"...

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - O MODELO DE EVOLUÇÃO DA TEMPERATURA	1
1.1 - O Modelo Matemático	2
1.2 - Aproximação pelo Método de Galerkin	8
1.3 - Aproximação do Problema com Discretização também da Variável Temporal	12
CAPÍTULO II - DA SOLUÇÃO E SUAS APROXIMAÇÕES	16
2.1 - Limitantes da Solução	20
2.2 - Estimativa a priori para o Método de Galerkin Contínuo no Tempo	25
2.3 - Estimativa a priori para o Método Proposto Crank- -Nicolson/Preditor-Corretor	38
2.4 - Existência e Unicidade da Solução Procurada	71
CAPÍTULO III - ENSAIOS NUMÉRICOS	80
APÊNDICE I - (Da Existência e Unicidade)	84
APÊNDICE II - (Listagem do Programa, em FORTRAN)	91
REFERÊNCIAS	101

INTRODUÇÃO

Na construção de barragens de grande porte pode aparecer um problema comum a todas as grandes estruturas de concreto: devido à característica exotérmica da reação de hidratação do cimento, surgem tensões de compressão nos primeiros instantes (leia-se meses - que, em termos do tempo de vida das barragens, correspondem a instantes...) de existência do maciço de concreto. No período subsequente, terminada a fase de dilatação, há o aparecimento de tensões de retração e podem surgir dentre estas tensões autógenas aquelas que, ultrapassando certo limiar, provocam fissuras ou fendas na estrutura.

Um modo de evitar este problema, mencionado por Wilson [47] e abordado de maneira mais completa por Tagliatella e Eckschmidt [46], é usar técnicas específicas ou programar convenientemente a construção: por um lado pode-se trabalhar com temperaturas iniciais baixas ou usar sistemas de resfriamento posterior com o isolamento térmico das fôrmas de concreto. Por outro lado existe a alternativa de espaçar o lançamento das sucessivas formas possibilitando maior dissipação do calor e, portanto, menor acúmulo deste mesmo calor, gerado dentro de cada fôrma lançada.

A importância do extremo cuidado com que projetistas e construtores devem tratar desta situação é realçada pela lista existente em [46] com o nome de 16 barragens (7 nos EEUU, 5 na França, 4 em outros países europeus) em cujas estruturas este processo se manifestou na forma de fissuras ou fendas de maior ou menor

gravidade. Em um dos casos citados - a barragem de Norfolk - faz-se menção a fendas de até 28 metros de extensão!

Para o projetista, um dos principais métodos de trabalho na eliminação deste problema é lançar fôrmas de dimensão menor (menos concreto levando a menor geração de calor e, portanto, a menores tensões de compressão e de retração) e períodos de tempo mais longos entre o lançamento de sucessivas fôrmas (como já foi mencionado, permitindo mais dissipação de calor, levando, também ao resultado desejado: menores tensões). Para o construtor, no entanto, ambas as técnicas são indesejáveis do ponto de vista econômico. Como cabe ao construtor arcar com o sustento da obra e de toda a infraestrutura montada para acomodar em verdadeiras cidades toda a equipe de construção, qualquer técnica ou programação que torne mais longo o prazo de conclusão envolve um significativo aumento nos gastos. Infelizmente (mas é sempre assim ...), outras maneiras de enfrentar o problema de controlar as citadas tensões autógenas também envolvem altos gastos: seja com a instalação de redes de encanamento no maciço para a refrigeração, seja produzindo concreto a baixíssimas temperaturas, ou ainda misturando ao concreto materiais isolantes que impeçam o acúmulo de fontes de calor, separando-as.

Destas posições de certa forma antagônicas entre projetistas e construtores surge a questão: como programar a priori uma construção de modo a ter (i) os *menores períodos* entre lançamentos de fôrmas e (ii) fôrmas de *dimensões* as *maiores* possíveis, *sem*, no entanto, ultrapassar o limiar a partir do qual as tensões de retração levam a fissuras, ou coisa pior?

Há alguns anos vem sendo usado sistematicamente, no cálculo aproximado de tensões de retração resultantes de determinada sistemática de construção, um programa desenvolvido por Wilson [47] que, via o Método dos Elementos Finitos, calcula as temperaturas no maciço, em seguida os deslocamentos e, finalmente, os tensores de retração.

A dificuldade com este programa é que embora seus resultados sejam aproveitáveis (isto é, se o programa afirma que não surgirão fendas nem fissuras para determinado esquema de construção, isto se confirma posteriormente na barragem), as tensões que o programa calcula não coincidem com aquelas efetivamente medidas na obra concluída. O programa, por assim dizer, erra para o lado certo, por causa de seu exagerado coeficiente de segurança.

Nossa intenção neste trabalho é obter um esquema numérico que calcule valores aproximados para a evolução da temperatura, e cuja precisão permita fornecer melhores resultados - melhores no sentido dessa precisão - quando posteriormente se forem calcular boas aproximações das tensões resultantes.

Para atingir este objetivo, o modelo matemático incorpora tanto a resistência térmica de contato quanto a dependência que a condutibilidade (ou a difusibilidade - ver, do autor [33]) tem da temperatura, dadas as formas geométricas das fôrmas e as características do concreto que as preenche.

Assim, na análise da equação do calor, o termo que reúne o calor específico, a densidade e a condutividade térmica do concreto não será considerado constante, como muitos autores fazem

(ver, por exemplo Singh e Heller [42] e Pardo, Sarmiento, Laura e Gutierrez [38]). Nas situações que estes autores analisam, o período de construção já foi deixado para trás e as tensões que eles estudam são provenientes de mudanças de temperatura no meio ambiente. No entanto, já há certos autores questionando tal independência, e Sivakumeran e Dilger advogam, na introdução de [44], que a abordagem teórica de ignorar os efeitos pequenos da dependência temporal da difusibilidade pode ser enriquecida de "modo realista" incorporando ao modelo matemático tal dependência. Em [37], Noda vai ainda mais longe afirmando categoricamente que "elementos estruturais são frequentemente submetidos a mudanças de temperatura de tal magnitude que suas propriedades materiais não podem mais ser consideradas como sendo constantes nem sequer num sentido aproximado". É este o caso no trabalho aqui apresentado: a difusibilidade não será considerada constante, mas antes uma função do tempo e da temperatura. Terminando esta introdução remetemos o leitor a [28] onde Li e Chen apresentam - para o específico caso de um determinado tipo de aço (Co-Cr-Ni) - uma tabela de dependência linear que a condutividade térmica tem da temperatura (*).

Para autor e orientador foi determinante o fato deste trabalho ter nascido de uma consulta feita pela firma de Projetos de

(*). Ajustando uma reta pelo Método dos Quadrados Mínimos, à tabela que fornece condutividade \times temperatura, obtivemos um coeficiente de correlação de 0,9997.

Engenharia Civil, a THEMAG, ao LABMA (Laboratório de Matemática Aplicada e Computacional do IMECC - UNICAMP). Este trabalho é, então, um dentre muitos exemplos da riqueza científica à espera de matemáticos "garimpeiros" que se disponham a esforços de Matemática Aplicada e Computação Científica.

CAPÍTULO I

O MODELO DE EVOLUÇÃO DA TEMPERATURA

Neste capítulo iremos apresentar um sistema de equações a derivadas parciais que descreve a evolução da temperatura num maciço de concreto formado pelo lançamento de duas fôrmas sucessivas.

No interior deste maciço será usada a clássica equação de difusão do calor e, além da condição inicial (que é também uma condição de contorno do ponto de vista do tempo), serão descritos fenômenos de troca de calor por *convecção* nas superfícies de contato com o meio ambiente e por *radiação* naquelas superfícies térmicas de contato entre os concretos de diferentes idades. Na superfície de contato com a rocha sobre a qual se apóia o maciço, será usada uma condição de Dirichlet.

A partir do sistema de equações a derivadas parciais, formula-se um esquema numérico com o qual podem ser obtidas aproximações da solução. Para delinear tal esquema, são utilizados dois níveis, sendo o primeiro o de discretização espacial e o segundo, de discretização temporal.

1.1. O MODELO MATEMÁTICO

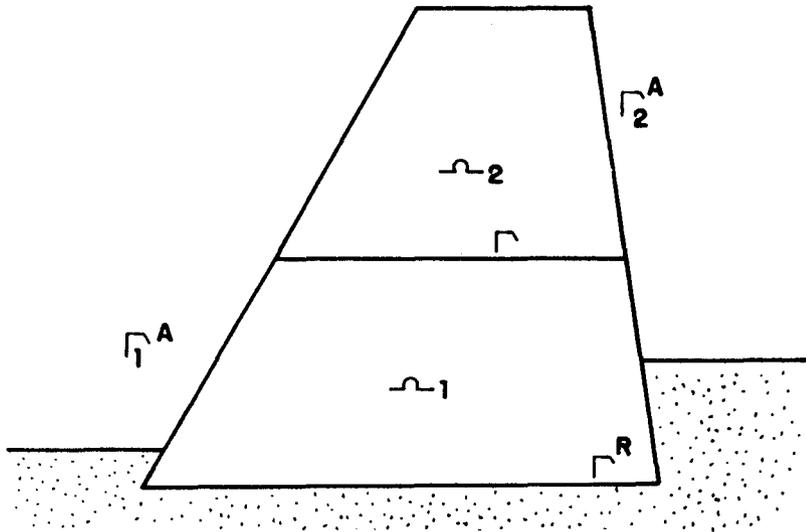
Consideraremos, então, o seguinte sistema:

$$(1.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar a temperatura } u^{(i)}(x,t) \text{ do domínio } \Omega_i \text{ tal que} \\ \frac{\partial u^{(i)}}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha(t, u^{(i)}) \operatorname{grad} u^{(i)}) = Q^{(i)} \\ \text{em } \Omega_i \times (0, T], \text{ para } i = 1, 2, \dots, n, \end{array} \right.$$

onde $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ tais que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n \subset \mathbb{R}^d$, $d \leq 3$, são domínios correspondentes a diversas fôrmas de concreto lançadas sucessivamente cuja temperatura $u^{(i)}(x,t)$ se deseja determinar. Tais fôrmas são preenchidas de concreto, cada uma na sua vez, após um determinado período, conforme comentado na Introdução.

Na figura temos indicadas esquematicamente duas fôrmas Ω_1 e Ω_2 e, no estudo do sistema (1.1), consideraremos que, para $n = 2$ a primeira forma Ω_1 foi lançada previamente e a segunda, Ω_2 , no instante $t = 0$.

(ver figura a seguir)



(Como o número n de fôrmas é finito, iremos daqui por diante trabalhar com $n = 2$ estudando o momento em que uma nova fôrma é lançada, e considerando que naquela lançada anteriormente (e, também, nas que tiverem sido lançadas antes dessa) a reação exotérmica de hidratação do cimento já vem se processando desde o seu instante de lançamento. A idéia de estudar justamente a 2^a fôrma lançada visa englobar o maciço subjacente à construção no modelo. Incorporar, posteriormente, ao modelo a presença da água represada e superfícies térmicas de contato com outras fôrmas de diferentes idades deixa de apresentar, acreditamos, dificuldades de maior expressão.)

Neste momento ($t=0$), são conhecidas as temperaturas $u^{(1)}(x,0)$ para $x \in \Omega_1 \cup \Gamma_1^A \cup \Gamma \cup \Gamma^R$ bem como as temperaturas $u^{(2)}(x,0)$ para $x \in \Omega_2 \cup \Gamma_2^A$.

Nas fronteiras Γ_i^A , $i = 1,2$, onde há contato com o meio ambiente na época da construção, o ar - assumimos a Lei de Newton para a troca de calor por convecção:

$$(1.2) \left[\begin{array}{l} \alpha(t, u^{(i)}) \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \eta_i} = -\gamma(u^{(i)} - \theta^A) \\ \text{para } (x,t) \in \Gamma_i^A \times J \end{array} \right.$$

onde J é o período $(0,T]$ do tempo, θ^A é a temperatura do ar, γ o parâmetro de convecção e η_i a normal à fronteira Γ_i^A no sentido dentro-fora.

No contato da fôrma Ω_1 com a rocha subjacente - ao longo da fronteira Γ^R - assume-se que esta rocha age como reservatório térmico, e impomos a condição

$$(1.3) \left[u^{(1)}(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in \Gamma^R \times J, \right.$$

que indica uma escala de temperatura em que a temperatura constante da rocha é nula. Todas as temperaturas obtidas por este modelo podem ser convertidas à escala Celsius pela soma daquela do maciço rochoso.

Teremos, finalmente, na interface Γ entre as duas fôrmas Ω_1 e Ω_2 :

$$(1.4) \quad \begin{cases} \alpha(t, u^{(1)}) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta} = \alpha(t, u^{(2)}) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} \\ (x, t) \in \Gamma \times J. \end{cases}$$

com a normal η considerada no sentido de Ω_1 para Ω_2 .

A condição inicial conforme anteriormente indicado, é

$$(1.5) \quad \begin{cases} u^{(i)}(x, 0) = w_0^{(i)}(x) \quad , \quad x \in \Omega_i \\ i = 1, 2 \quad . \end{cases}$$

Nestas equações figuram:

γ : parâmetro de convecção.

$\alpha(t, u^{(i)}) = \frac{k(t, u^{(i)})}{c_i \rho_i}$: a difusibilidade (multiplicada por -1) que é dada pela condutividade térmica dividida pelo produto do calor específico pela densidade. A escolha de fazer com que a variável espacial figurasse apenas implicitamente (como variável da temperatura $u^{(i)}(x, t)$) se deve à consideração de que as características físicas do concreto variam muitíssimo mais com a evolução do tempo e da temperatura do que com a posição relativa de cada fôrma.

$Q^{(i)}$: calor gerado no maciço Ω_i dividido pelo produto $c_i \rho_i$ (respectivamente calor específico e densidade da fôrma Ω_i).

As notações são usuais. Assim:

$$(u, v)_{0, \Omega_i} = \int_{\Omega_i} u^{(i)}(x, t) \cdot v^{(i)}(x, t) dx = (u, v)_{L^2(\Omega_i)} \quad ,$$

$$\langle u, v \rangle_{0, \partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} u(x, t) \cdot v(x, t) \, d\gamma \quad , \quad e$$

$$a_i(u; v, w) = \int_{\Omega_i} \alpha(t, u^{(i)}) \nabla v^{(i)}(x, t) \cdot \nabla w^{(i)}(x, t) \, dx \quad .$$

Para distinguir melhor a evolução das temperaturas nas diferentes fôrmas, consideraremos as funções com as quais vamos trabalhar como tendo duas componentes: a primeira definida sobre Ω_1 e a segunda sobre Ω_2 , i.e.: estaremos lidando com funções

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = (v^{(1)}(x, t), v^{(2)}(x, t)) \text{ tais que} \\ v^{(i)} \in L^2(J; H^1(\Omega_i)) \quad e \\ \frac{\partial v^{(i)}}{\partial t} \in L^2(J; L^2(\Omega_i)) \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ e com} \\ v^{(1)} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma^R \text{ para } \forall t \in J . \end{array} \right.$$

Com (1.6) identificamos as funções

$$v = (v^{(1)}(x, t), v^{(2)}(x, t)) \in \mathbf{V} .$$

Neste espaço de funções v , cujas componentes estão descritas em (1.6), aplicaremos o Teorema de Green para obter de (1.1)-(1.5) a seguinte formulação variacional.

Determinar

$$u = (u^{(1)}(x, t), u^{(2)}(x, t)) \in \mathbf{V}$$

tal que:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1,2} \left\{ \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t}, v^{(i)} \right)_{0, \Omega_i} - (\operatorname{div} [\alpha(t, u^{(i)}) \nabla u^{(i)}], v^{(i)})_{0, \Omega_i} \right\} = \\
 & = \sum_{i=1,2} \left\{ (Q^{(i)}, v^{(i)})_{0, \Omega_i} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \sum_{i=1,2} \left\{ \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t}, v^{(i)} \right)_{0, \Omega_i} + (\alpha(t, u^{(i)}) \nabla u^{(i)}, \nabla v^{(i)})_{0, \Omega_i} + \right. \\
 & + \gamma \langle u^{(i)}, v^{(i)} \rangle_{0, \Gamma_i^A} \left. \right\} + \int_{\Gamma^R} \alpha(t, u^{(1)}) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta} v^{(1)} d\gamma - \\
 & - \int_{\Gamma} [\alpha(t, u^{(1)}) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta} - \alpha(t, u^{(2)}) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta}] v^{(2)} d\gamma = \\
 & = \sum_{i=1,2} \left\{ (Q^{(i)}, v^{(i)})_{0, \Omega_i} + \gamma \langle \theta^A, v^{(i)} \rangle_{0, \Gamma_i^A} \right\}, \quad \forall v \in \mathbf{V}.
 \end{aligned}$$

As duas últimas parcelas do lado esquerdo da igualdade se anulam e, então, obtêm-se a formulação variacional desejada:

$$(1.7) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Determinar} \\ u \in \mathbf{V}: \quad \sum_{i=1,2} \left\{ \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t}, v^{(i)} \right)_{0, \Omega_i} + a_i(u^{(i)}; u^{(i)}, v^{(i)}) \right. \\ \left. + \gamma \langle u^{(i)}, v^{(i)} \rangle_{0, \Gamma_i^A} \right\} = \sum_{i=1,2} \left\{ (Q^{(i)}, v^{(i)})_{0, \Omega_i} + \right. \\ \left. + \gamma \langle \theta^A, v^{(i)} \rangle_{0, \Gamma_i^A} \right\}, \quad \forall v \in \mathbf{V}; \end{array} \right.$$

com a condição inicial

$$(1.8) \quad \left[\begin{array}{l} (u^{(i)}(x,0), v^{(i)}(x,0))_{0, \Omega_i} = \\ = (\omega_0^{(i)}(x), v^{(i)}(x,0))_{0, \Omega_i}, \quad i = 1, 2, \quad \forall v \in \mathbf{V}. \end{array} \right.$$

Hã alguns modelos que guardam certas semelhanças com este aqui explicitado. Autores como Jaworski [24], ou como Lanchon, Makaya, Mirgoux e Saint Jean Paulin [27], ou ainda Winget e Hughes [48] apresentam situações ora estacionárias ora de evolução que confirmam opções feitas na modelagem de (1.1)-(1.5).

A equação de difusão é obviamente a mesma (ainda que se restrinja a um meio simples, na maioria dos casos); as condições de contorno guardam diversas semelhanças, e os métodos variam desde métodos como aqueles aqui estudados, a equações íntegro-diferenciais com o uso de elementos de contorno.

Também em Gurtin e MacCamy [23], um modelo matemático semelhante a este é usado num fenômeno de difusão de uma espécie e parece nos possível usar técnicas e experiências de composição do meio de transmissão de calor para o estudo de duas populações vizinhas.

1.2. APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE GALERKIN

Definimos a seguir uma aproximação via Método de Galerkin do Problema Variacional descrito acima, em (1.7) e (1.8). A solução aproximada de que se necessita é $u_h = (u_h^{(1)}, u_h^{(2)})$ num subespaço \mathbf{V}_h de \mathbf{V} de dimensão finita, subespaço este que, como \mathbf{V} , é formado por funções cujas componentes estão em \mathbf{V}_{1_h} e \mathbf{V}_{2_h} ,

também estes subespaços de dimensão finita de - respectivamente - V_1 e V_2 . Assim,

$$(2.1) \quad u_h^{(i)} = \sum_{j=N_1^{(i)}}^{N_2^{(i)}} u_j(t) \varphi_j(x) \quad , \quad i = 1, 2,$$

onde a distinção entre aquelas $\varphi_j(x)$ que estão em V_{1h} e as de V_{2h} é feita de acordo com o índice j : as primeiras $N_2^{(1)}$ funções $\varphi_j(x)$ têm domínio em Ω_1 , gerando V_{1h} , e aquelas associadas a j indo de $N_1^{(2)} = N_2^{(1)} + 1$ até $N_2^{(2)} = N$ têm domínio em Ω_2 e geram V_{2h} .

Na equação (1.7), substituiremos $u \in V$ por $u_h \in V_h$ e as $v \in V$ pelas φ_k em V_{1h} ou V_{2h} (conforme o valor de k). Obtém-se, então, fazendo $a_i(u; v, w) = (\alpha(t, u) \nabla v, \nabla w)_{0, \Omega_i}$

$$(2.2) \quad \left[\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial t} (\varphi_j, \varphi_k)_{0, \Omega_i} + \sum_{j=1}^N u_j(t) a_i(u_h^{(i)}; \varphi_j, \varphi_k) + \\ & + \gamma \sum_{j=1}^N u_j(t) \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle_{0, \Gamma_i^A} = \\ & = (Q_h^{(i)}, \varphi_k)_{0, \Omega_i} + \gamma \langle \theta^A, \varphi_k \rangle_{0, \Gamma_i^A} \quad , \quad i = 1, 2 \quad , \end{aligned} \right.$$

com a condição inicial dada por

$$(2.3) \quad \left[\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N u_j(0) (\varphi_j, \varphi_k)_{0, \Omega_i} = (\tilde{\omega}_0^{(i)}(x), \varphi_k(x))_{0, \Omega_i} \\ & i = 1, 2 \quad . \end{aligned} \right.$$

Nestas igualdades temos $\tilde{\omega}_0^{(i)}(x)$ como a "melhor" aproximação de $\omega_0^{(i)}(x)$ nos subespaços de dimensão finita. Além disso, alguns termos serão obviamente nulos, como nos casos em que φ_i ou φ_j não têm domínio contidos no Ω_i em que se efetue a integração, ou como nas situações em que φ_i ou φ_j têm domínios que não tocam as fronteiras Γ_1^A e Γ_2^A .

O Problema Variacional (2.2) e (2.3) é uma aproximação do Problema parabólico não-linear original via um sistema de equações diferenciais ordinárias - também não-linear devido ao termo $a_i(u_h^{(i)}; \varphi_j, \varphi_k)$ - cuja solução é u_h (ou cujas soluções são as $u_j(t)$ para $j = 1, 2, \dots, N$).

Vamos a seguir reescrever o Problema de Valor Inicial (2.2) e (2.3) considerando as componentes u_j da função u_h , obtendo, em notação matricial,

$$(2.4) \quad u_h = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)) \in V_h \subset V$$

tal que

$$(2.5) \quad A \frac{\partial}{\partial t} u_h + B(t) u_h = d(t),$$

e, contanto que a "melhor" aproximação $\tilde{\omega}_0^{(i)}(x)$ possa ser expressa como

$$w_0 = \sum_{j=1}^N \omega_{0j} \varphi_j(x),$$

a condição inicial se torna simplesmente

$$(2.6) \quad u_h(0) = w_0.$$

Em (2.5), a matriz A é aquela cujos elementos são

$$(2.7) \quad a_{kj} = (\varphi_k(x), \varphi_j(x))_{0, \Omega_i},$$

IB é a matriz dada por

$$(2.8) \quad \left[\begin{aligned} b_{kj}(t) = a_i \left(\sum_{v=N_1^{(i)}}^{N_2^{(i)}} u_v(t) \varphi_v(x); \varphi_k(x), \varphi_j(x) \right) + \\ + \gamma \langle \varphi_k(x), \varphi_j(x) \rangle_{0, \Gamma_i^A}. \end{aligned} \right.$$

Em (2.7) a_{kj} poderá ser não-nulo se φ_k e φ_j tiverem domínios de intersecção não vazia no mesmo Ω_i e em (2.8) o mesmo ocorre: b_{kj} poderá ter a primeira parcela não nula se φ_k e φ_j tiverem domínios com intersecção não vazia no Ω_i em que ocorre a integração. A segunda parcela poderá ser não-nula se, além disso, os domínios de φ_k e φ_j tocarem suficiente e simultaneamente a fronteira Γ_i^A .

Finalmente, o vetor do segundo membro da equação (2.5) é dado por

$$(2.9) \quad d_j = (Q_h^{(i)}, \varphi_j)_{0, \Omega_i} + \gamma \langle \theta_h^A, \varphi_j \rangle_{0, \Gamma_i^A}$$

equações para as quais valem os comentários feitos para (2.7) e

(2.8) e onde se indicam por $Q_h^{(i)}$ e θ_h^A as "melhores" aproximações de $Q^{(i)}$ e de θ^A respectivamente em V_h e num conveniente subespaço escolhido de modo a caberem as funções geradas pelas φ_j restritas aos pedaços de fronteira Γ_1^A e Γ_2^A : $\theta^A \in L^2(\tilde{\Gamma}^A) \cap F$ sendo $F_1 = \{v(x,t) : v = \sum_{\ell=1}^{N_{\Gamma_1^A}} \theta_{\ell}(t) \varphi_{\ell}(x)\}$, F_2 análogo e $\theta_h^A|_{\Gamma_i^A} \in L^2(\Gamma_i^A) \cap F_i$.

1.3 APROXIMAÇÃO DO PROBLEMA COM DISCRETIZAÇÃO TAMBÉM DA VARIÁVEL TEMPORAL

Consideraremos agora uma aproximação de (2.2) e (2.3) na qual a variável temporal é também discretizada. Como usual, trabalharemos com $t_n = n \cdot \Delta t$ onde $\Delta t = T/N$ e usaremos as notações $f_n = f(t_n)$ e

$$f_{[n+1/2]} = \frac{1}{2} [f_n + f_{n+1}].$$

Vale enfatizar que $f_{[n+1/2]}$ difere, em geral, de $f_{n+1/2} = f(t_n + \frac{\Delta t}{2})$.

U_j^n será uma aproximação da $u_j(t_n)$ descrita no parágrafo anterior em (2.1). Nesta perspectiva, então, $u(x, t_n)$ com $(x, t_n) \in \Omega \times J$ será aproximada por

$$(3.1) \quad \sum_{j=1}^N U_j^n \varphi_j(x),$$

e trabalharemos com U^n dado por

$$(3.2) \quad \mathbf{U}^n = (U_1^n, U_2^n, U_3^n, \dots, U_N^n)^t,$$

onde o índice t indica um vetor transposto.

Nesta linguagem, a formulação variacional, em notação matricial, pode ser aproximada usando-se Crank-Nicolson:

$$(3.3) \quad \left[\begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2} + \mathbf{B}_{[n+1/2]} \left(\frac{\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2} \right) \cdot \frac{\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2} = \\ = \mathbf{d}_{[n+1/2]}, \end{array} \right.$$

com a condição inicial dada por

$$(3.4) \quad \left[\mathbf{U}^0 = \mathbf{W}_0, \right.$$

analogamente à condição inicial (2.6).

A equação (3.3) indica o sistema não linear que precisa ser resolvido a cada sucessivo passo no tempo. É possível simplificar esta resolução introduzindo uma aproximação do tipo Preditor-Corretor em que, no lugar da resolução de um sistema não-linear, resolvem-se dois sistemas lineares. Resumindo o esquema de aproximações, temos:

- (i) O fenômeno modelado por um sistema de *Equações a Derivadas Parciais*;
- (ii) este aproximado por um sistema não linear de *Equações Diferenciais Ordinárias* com o Método de Galerkin;
- (iii) o sistema resultante deste procedimento aproximado por sua vez por um *sistema não linear de equações algébricas* obtido com o recurso do Método de Crank-Nicolson; e, finalmente,
- (iv) *dois sistemas lineares algébricos* formados com a utilização do Método Preditor-Corretor com os quais se aproxima o anterior sistema não linear.

Aplicando-se, então, o Método Preditor-Corretor a (3.3) com (3.4), temos:

$$(3.5) \quad A \cdot \left(\frac{U^{n+1*} - U^n}{\Delta t} \right) + B_{[n+1/2]}(U^n) \cdot \frac{U^{n+1*} + U^n}{2} = d_{[n+1/2]},$$

um sistema linear de onde se obtêm os valores das componentes de U^{n+1*} . Os valores corrigidos do U^{n+1} são calculados com o sistema (também linear):

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cdot \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right) + B_{[n+1/2]} \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2} \right) \cdot \frac{U^{n+1} + U^n}{2} = \\ = d_{[n+1/2]} \end{array} \right.$$

Escreveremos abaixo novas formas de (3.5) e (3.6), já de modo mais adequado à resolução dos sistemas aí indicados:

$$(3.5') \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{\Delta t} A + \frac{1}{2} B_{[n+1/2]}(U^n) \right] U^{n+1*} = \\ = \left[\frac{1}{\Delta t} A - \frac{1}{2} B_{[n+1/2]}(U^n) \right] U^n + d_{[n+1/2]}, \end{array} \right.$$

e

$$(3.6') \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{\Delta t} A + \frac{1}{2} B_{[n+1/2]} \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2} \right) \right] \cdot U^{n+1} = \\ = \left[\frac{1}{\Delta t} A - \frac{1}{2} B_{[n+1/2]} \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2} \right) \right] U^n + d_{[n+1/2]} \end{array} \right.$$

É evidente que este processo pode ser repetido, e obteríamos um Método Preditor-Corretor-Corretor, ou iterando um número finito de vezes, minorando assim, possivelmente, o erro. Comentários pertinentes e esquemas podem ser vistos em Acton [1], Douglas e Dupont [13] e Moura, Raupp e Kritz [36].

A cada passo no tempo são 2 (ou mais, conforme indicado no comentário acima) sistemas lineares a se resolver para se obterem os valores aproximados do U^{n+1} , a partir dos dados iniciais fornecidos por

$$U_j^0 = W_{0j}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Há, evidentemente, outros modos de se aproximar o sistema não-linear por sistemas lineares a cada instante t_k da discretização do tempo. Douglas & Dupont [14] e Cannon & Ewing [7], citando apenas 2 exemplos, mencionam métodos de extrapolação para contornar a resolução de um sistema não-linear.

Além destes, cabe referência a Métodos do tipo Newton e quasi-Newton além de outros métodos ditos de otimização ou de minimização como os da família de métodos do gradiente e afins, que não foram aqui abordados. Podem ser apresentadas como referência as obras de Cea [9], Glowinski, Lions e Tremolières [21], Lions [29] entre tantas outras.

CAPÍTULO II

DA SOLUÇÃO E SUAS APROXIMAÇÕES

Neste capítulo estabeleceremos o quadro de suporte matemático para a resolução aproximada do sistema apresentado em (1.1) do capítulo anterior. Por "suporte matemático" queremos indicar que estudaremos aqui questões como a de existência e unicidade da solução a ser aproximada, a convergência das sucessivas aproximações, além da ordem dessa convergência.

A sequência seguida neste trabalho é semelhante àquela de diversos artigos básicos (alguns deles já considerados clássicos) no estudo da Análise Numérica tanto de situações surgidas no estudo de termoelasticidade quanto em situações afins ou análogas. A grande maioria destes trabalhos supõe garantidas tanto a existência quanto a unicidade da solução; alguns poucos indicam referências para que estas sejam verificadas. Estas posturas identificam o escopo destes trabalhos, os interesses de seus autores ou a aplicabilidade prática das diversas situações algorítmicas estudadas. Em geral os autores dirigem seus esforços para a resolução ou, se necessário, para aproximações da solução de problemas do tipo aqui apresentado.

Assim, Sgallari [43], Douglas [11] e [12], Douglas, Dupont e Ewing [15], Moura e Feijóo [34], em problemas correlatos,

trabalham geralmente com a apresentação do problema, a discretização do modelo matemático e o estudo da convergência ou estimativas a priori. Seguindo um roteiro semelhante, a menos de pequenas diferenças, e trabalhando com problemas afins, temos os trabalhos de Cannon e Ewing [7] e [8], Evans [18], Moura, Raupp e Barbetta [35], Zlamal [49] e [50], Douglas e Rachford [16], Peaceman e Rachford [39], Douglas e Dupont [14], Douglas e Cannon [6], além de Aronson [2] e Ladyzhenskaya e Ural'tseva [26].

Na questão específica do estudo de situações em que há fluxo de calor através de meios compostos, como neste trabalho, temos modelos análogos àquele aqui descrito estudados por Blandford e Tauchert [4], Lanchon e outros [27], Makaya [32], além do já citado em Jaworski [24].

O que pretendemos estabelecer nesta parte do trabalho é:

1º) a pertinência da solução desejada a um compacto do espaço escolhido para trabalhar;

2º) estimativas a priori para as aproximações propostas tanto no caso de aproximações pelo Método de Galerkin quanto na discretização das duas variáveis com o uso do Método Preditor-Corretor/Crank-Nicolson. Em ambos os casos estimativas da ordem de $(\Delta t)^{3/2}$ são obtidas; e

3º) a existência e unicidade da solução do sistema de Equações a Derivadas Parciais (1.1) com as condições (1.2) - (1.5) do Capítulo I.

Antes de iniciarmos o primeiro parágrafo deste capítulo indicaremos aqui a notação a ser usada no que se segue. Conforme já foi observado, a temperatura num ponto genérico (x,t) do maciço $\bar{\Omega} = \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$ será indicada por $u(x,t) = (u^{(1)}(x,t), u^{(2)}(x,t))$ onde

$$u^{(i)} : \Omega_i \times J \longrightarrow \mathbb{R}$$

é a "componente" que fornece a temperatura em pontos da fôrma Ω_i em algum instante de $J = (0,T]$. Ainda, além de produtos internos já introduzidos anteriormente que foram

$$(0.0) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u^{(i)}, v^{(i)})_{0, \Omega_i} = \int_{\Omega_i} u^{(i)} v^{(i)} dx \quad e \\ (u, v)_{0, \Gamma} = \int_{\Gamma} u \cdot v d\gamma , \end{array} \right.$$

necessitaremos de

$$(0.1) \quad \left\{ (u, v)_{0, \tilde{\Omega}} = (u(\cdot, t), v(\cdot, t))_{0, \tilde{\Omega}} = \sum_{i=1,2} (u^{(i)}, v^{(i)})_{0, \Omega_i} \right.$$

bem como das normas

$$(0.2) \left\{ \begin{aligned} \|u^{(i)}\|_{0, \Omega_i}^2 &= \|u^{(i)}(\cdot, t)\|_{0, \Omega_i}^2 = (u^{(i)}(\cdot, t), u^{(i)}(\cdot, t))_{0, \Omega_i}, \\ \|u\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 &= \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 = (u(\cdot, t), u(\cdot, t))_{0, \tilde{\Omega}}, \\ \|v^{(i)}\|_{\Omega_i T}^2 &= \int_0^T \|v^{(i)}(\cdot, \tau)\|_{0, \Omega_i}^2 d\tau, \\ \|v\|_{\tilde{\Omega} T}^2 &= \int_0^T \|v(\cdot, \tau)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau = \\ &= \|v^{(1)}\|_{\Omega_1 T}^2 + \|v^{(2)}\|_{\Omega_2 T}^2. \end{aligned} \right.$$

Além destas, usaremos também as normas seguintes, com $d \leq 3$:

$$(0.3) \left\{ \begin{aligned} \|(u^{(i)})_x\|_{0, \Omega_i}^2 &= \|\text{grad } u^{(i)}\|_{0, \Omega_i}^2 = \\ &= \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_j}, \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_j} \right)_{0, \Omega_i}, \\ \|(u)_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 &= \sum_{i=1,2} \|(u^{(i)})_x\|_{0, \Omega_i}^2, \\ \|(u)_x\|_{0, \tilde{\Omega} T}^2 &= \int_0^T \|(u(\cdot, \tau))_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau, \end{aligned} \right.$$

e ainda

$$(0.4) \left\{ \begin{array}{l} \|u\|_{x, \tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} = \sup_{(x,t) \in \Omega \times J} \sup_{i,j} \left| \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_j} (x,t) \right| \\ \|u^{(i)}\|_{\tilde{\Omega}_i, \infty} = \sup_{t \in J} \|u^{(i)}(\cdot, t)\|_{0, \Omega_i} \\ \|u\|_{\tilde{\Omega}, \infty} = \sup_{t \in J} \|u(\cdot, t)\|_{\tilde{\Omega}} \end{array} \right.$$

Nestas definições, quando não estiver explicitado, i assume ora o valor 1 ora 2, conforme o domínio em que se está trabalhando. As mesmas se estendem de modo natural às definições de normas sobre partes das fronteiras como, por exemplo

$$(0.5) \left\{ \begin{array}{l} \|u\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 = \sum_{i=1,2} \|u^{(i)}\|_{0, \Gamma_i^A}^2 \\ = \sum_{i=1,2} \langle u^{(i)}(\cdot, t), u^{(i)}(\cdot, t) \rangle_{0, \Gamma_i^A} \end{array} \right.$$

2.1. LIMITANTES DA SOLUÇÃO

Para obter limitantes da solução do sistema (1.1) - (1.5) do capítulo I, também aí em sua formulação variacional (1.7), reescrevemos esta formulação substituindo a função qualquer $v(x,t)$ do espaço V (também aí caracterizado) pela própria solução $u(x,t)$. Como é, aliás, usual. É talvez conveniente ressaltar que iremos aqui assumir tanto a existência quanto a unicidade da solução desejada, para, na parte final do

capítulo, verificar estes resultados.

Obteremos, então:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t}, u^{(i)} \right)_{0, \Omega_i} + a(u^{(i)}; u^{(i)}, u^{(i)}) + \\ & + \gamma \langle u^{(i)}, u^{(i)} \rangle_{0, \Gamma_i^A} = \sum_{i=1,2} \{ (Q^{(i)}, u^{(i)})_{0, \Omega_i} + \\ & + \gamma \langle \theta^A, u^{(i)} \rangle_{0, \Gamma_i^A} \} . \end{aligned}$$

Usando a notação do produto interno em \mathbf{V} que reúne as "partes" de $u(x,t)$, teremos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t}, u \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A(u; u, u) + \gamma \langle u, u \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = \\ & = (Q, u)_{0, \tilde{\Omega}} + \gamma \langle \theta^A, u \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} \end{aligned}$$

onde, obviamente, o operador $A(u; v, w)$ é bilinear nas variáveis v e w , visto que A é dado por

$$(1.1) \quad A(u; v, w) = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_i} \alpha(t, u^{(i)}(x,t)) \nabla v^{(i)}(x,t) \cdot \nabla w^{(i)}(x,t) dx .$$

A equação anterior pode ser reescrita como

$$(1.2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + A(u; u, u) + \gamma \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 = \\ = (Q, u)_{0, \tilde{\Omega}} + \gamma \langle \theta^A, u \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} . \end{array} \right.$$

A partir daqui, podemos introduzir algumas exigências de regularidade: vamos impor condições sobre $A(w; v, v)$ (ou sobre $\alpha(w)$) que parecem ser bastante razoáveis do ponto de vista físico, além de serem usuais na literatura sobre o assunto. Citando apenas alguns autores remetemos o leitor a Duvaut e Lions [17], Douglas, Dupont, Cannon e Ewing [14] e [15], Zlamal [50], Chavent e Lemonnier [10], Aronson [2] e Browder [5]. Assim respaldados, estabelecemos as condições a serem impostas - e que farão parte de nossas *Hipóteses de Regularidade*:

$$(1.3) \quad \left\{ \lambda \leq \alpha(t, w) \leq \mu, \quad \forall w \in \mathbf{V}, \right.$$

ou

$$(1.3') \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall w \in \mathbf{V}, \quad \lambda \| (v(\cdot, t))_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \leq \\ \leq A(w; v, v) \leq \mu \| (v(\cdot, t))_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2, \quad \forall t \in J, \\ \forall v \in \mathbf{V}, \end{array} \right.$$

e também

$$(1.4) \quad \begin{cases} |\alpha(w^{(i)}) - \alpha(v^{(i)})| \leq K_1 |w^{(i)} - v^{(i)}|, \quad i=1,2 \\ \forall w, v \in \mathbb{V}^{(*)} \end{cases}$$

Usando estas desigualdades, voltamos à equação (1.2) para obter

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \lambda \|(u(\cdot, t))_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \gamma \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq \\ & \leq \|Q\|_{0, \tilde{\Omega}} \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Omega}} + \gamma \|\theta^A\|_{0, \tilde{\Gamma}^A} \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + 2\lambda \|(u(\cdot, t))_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + 2\gamma \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq \\ & \leq \frac{2}{4\varepsilon_0} \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + 2\varepsilon_0 \|Q\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ & + 2\gamma\varepsilon_1 \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \frac{2\gamma}{4\varepsilon_1} \|\theta^A\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2, \end{aligned}$$

para ε_0 e ε_1 estritamente positivos.

Agrupando convenientemente os termos da desigualdade e integrando de 0 a t , $t \in J$, teremos:

(*) Do ponto de vista físico, o significado de (1.3) ou de (1.3') é que: se a condutividade (a rigor, a difusibilidade) não estiver dentro de determinada faixa, o modelo não é adequado; (1.4) impõe que a condutividade varia Lipschitz continuamente com a temperatura.

$$\begin{aligned}
 & \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 - \|u(\cdot, 0)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + 2\lambda \int_0^t \|(u(\cdot, \tau))_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau \\
 & + (2\gamma - 2\gamma\epsilon_1) \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 d\tau \leq \\
 & \leq \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + \int_0^t \{2\epsilon_0 \|Q\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & \frac{\gamma}{2\epsilon_1} \|\theta^A\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2\} d\tau.
 \end{aligned}$$

Usaremos a seguinte relação (e a notação implicitamente definida)

$$\begin{aligned}
 C(t) = \int_0^t \{2\epsilon_0 \|Q\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{\gamma}{2\epsilon_1} \|\theta^A\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2\} d\tau + \\
 + \|w_0\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \leq C(T) = C, \quad \forall t \in J,
 \end{aligned}$$

e, então, teremos

$$\begin{aligned}
 & \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + 2\lambda \int_0^t \|(u(\cdot, \tau))_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + \\
 & + (2\gamma - 2\gamma\epsilon_1) \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 d\tau \leq \\
 & \leq \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + C.
 \end{aligned}$$

Do lado esquerdo desta desigualdade eliminamos alguns termos positivos (bastando escolher ϵ_1 convenientemente), para obter (do jeito certo a se poder usar o lema de Gronwall):

$$\|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \leq C + \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau.$$

Com o lema se obtêm, então, o resultado procurado que é

$$(1.5) \quad \|u(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \leq C \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon_0} T\right), \quad \forall t \in (0, T],$$

isto é, para qualquer $t \in J$, a solução do problema estudado é limitada por uma constante que depende dos dados.

2.2. ESTIMATIVA A PRIORI PARA O MÉTODO DE GALERKIN CONTÍNUO NO TEMPO.

A obtenção destas estimativas segue o mesmo caminho de provas análogas publicadas em diversos artigos citados no parágrafo anterior. A diferença que distingue a prova abaixo, bem como a do parágrafo seguinte, é a presença de termos não nulos em trechos da fronteira (são aqueles relativos à perda de calor por convecção). As dificuldades provenientes da não-linearidade do sistema serão contornadas pelo uso das hipóteses de regularidade.

Partiremos da formulação (1.7) do Capítulo anterior, a saber

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1,2} \left\{ \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t}, v^{(i)} \right)_{0, \Omega_i} + a_i(u^{(i)}; u^{(i)}, v^{(i)}) + \gamma \langle u^{(i)}, v^{(i)} \rangle_{0, \Gamma_i^A} \right\} \\ & = \sum_{i=1,2} \left\{ (Q^{(i)}, v^{(i)})_{0, \Omega_i} + \gamma \langle \theta^A, v^{(i)} \rangle_{0, \Gamma_i^A} \right\}, \quad \forall v^{(i)} \in V_i, \quad i=1,2. \end{aligned}$$

Reescrevemos esta equação usando a notação apresentada em (0.1):

$$(2.1) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A(u; u, v) + \gamma \langle u, v \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = \\ & = (Q, v)_{0, \tilde{\Omega}} + \gamma \langle \theta^A, v \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A}, \quad \forall v \in \mathbb{V}. \end{aligned} \right.$$

Ainda com a mesma notação, reescrevemos o sistema não-linear de equações diferenciais do capítulo I, (2.2)

$$(2.2) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \varphi \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A(u_h; u_h, \varphi) + \gamma \langle u_h, \varphi \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = \\ & = (Q, \varphi)_{0, \tilde{\Omega}} + \gamma \langle \theta^A, \varphi \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} \\ & \forall \varphi \text{ pertencente ao subespaço } \mathbb{V}_h, \text{ de dimensão finita } N. \end{aligned} \right.$$

Subtraindo agora esta equação daquela, obtemos:

$$(2.3) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_h}{\partial t}, \varphi \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A(u; u, \varphi) - A(u_h; u_h, \varphi) \\ & + \gamma \langle u - u_h, \varphi \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = 0 \\ & \forall \varphi \text{ do subespaço } \mathbb{V}_h. \end{aligned} \right.$$

No lugar desta "φ qualquer" de \mathbb{V}_h , usaremos $\varphi = (u - u_h) + (\phi - u)$, com ϕ arbitrário em \mathbb{V}_h . Como $\varphi = \phi - u_h$, então esta função é de \mathbb{V}_h , e podemos escrever a equação (2.3) para este caso, obtendo

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_h}{\partial t}, u - u_h \right)_{0, \tilde{\Omega}} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_h}{\partial t}, \phi - u \right)_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + A(u; u, u - u_h) + A(u; u, \phi - u) - \\
 & - A(u_h; u_h, u - u_h) - A(u_h; u_h, \phi - u) + \\
 & + \gamma \langle u - u_h, u - u_h \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} + \gamma \langle u - u_h, \phi - u \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = 0
 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_h}{\partial t}, \phi - u \right)_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + A(u; u, u - u_h) + A(u; u, \phi - u) - A(u_h; u_h, u - u_h) \\
 & - A(u_h; u_h, \phi - u) + \gamma \|u(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\
 & + \gamma \langle u - u_h, \phi - u \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = 0 .
 \end{aligned}$$

Integrando esta equação na variável temporal, teremos para $t \in J$:

$$(2.4) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \|u(\cdot, \tau) - u_h(\cdot, \tau)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_h}{\partial t}, \phi - u \right)_{0, \tilde{\Omega}} d\tau + \\ & + \int_0^t \{A(u; u, u - u_h) + A(u; u, \phi - u) - A(u_h; u_h, u - u_h) - \\ & - A(u_h; u_h, \phi - u)\} d\tau + \gamma \int_0^t \|u(\cdot, \tau) - u_h(\cdot, \tau)\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 d\tau + \\ & + \gamma \int_0^t \langle u - u_h, \phi - u \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} d\tau = 0 \end{aligned} \right.$$

Trabalharemos com esta equação por pedaços:

Inicialmente,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \|u(\cdot, \tau) - u_h(\cdot, \tau)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau = \\ & = \frac{1}{2} \|u(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 - \frac{1}{2} \|u(\cdot, 0) - u_h(\cdot, 0)\|_{0, \tilde{\Omega}}^2. \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} & A(u; u, u - u_h + \phi - u) - A(u_h; u_h, u - u_h + \phi - u) = \\ & = [A(u_h; u - u_h, u - u_h) + A(u_h; u - u_h, \phi - u)] + \\ & + [A(u; u, u - u_h) + A(u; u, \phi - u)] - \\ & - [A(u_h; u, u - u_h) + A(u_h; u, \phi - u)] \end{aligned}$$

Além destes, usando integração por partes:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} (u - u_h), \phi - u \right)_{0, \tilde{\Omega}} d\tau = \\
 & = \int_0^t \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial t} (u^{(i)} - u_h^{(i)}) \cdot (\phi^{(i)} - u^{(i)}) dx d\tau = \\
 & = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_i} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} (u^{(i)} - u_h^{(i)}) \cdot (\phi^{(i)} - u^{(i)}) d\tau dx = \\
 & = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_i} \left[(u^{(i)} - u_h^{(i)}) (\phi^{(i)} - u^{(i)}) \right]_0^t dx - \\
 & - \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_i} \int_0^t (u^{(i)} - u_h^{(i)}) \frac{\partial}{\partial t} (\phi^{(i)} - u^{(i)}) d\tau dx
 \end{aligned}$$

Usando estas três equações acima em (2.4) obteremos:

$$(2.5) \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \| (u - u_h) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \int_0^t A(u_h; u - u_h, u - u_h) d\tau + \\
 & + \gamma \int_0^t \| u(\cdot, \tau) - u_h(\cdot, \tau) \|_{0, \Gamma^A}^2 d\tau = \\
 & = \frac{1}{2} \| (u - u_h) (\cdot, 0) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_i} [u^{(i)} - u_h^{(i)}] [\phi^{(i)} - u^{(i)}]_t^0 dx \\
 & + \int_0^t \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_i} (u^{(i)} - u_h^{(i)}) \frac{\partial}{\partial t} (\phi^{(i)} - u^{(i)}) dx d\tau - \int_0^t \{ A(u_h; u - u_h, \phi - u) \\
 & + A(u; u, u - u_h) + A(u; u, \phi - u) - A(u_h; u, u - u_h) - \\
 & - A(u_h; u; \phi - u) \} d\tau - \gamma \int_0^t \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^A} (u^{(i)} - u_h^{(i)}) (\phi^{(i)} - u^{(i)}) d\tau d\gamma
 \end{aligned} \right.$$

A desigualdade procurada vai ser obtida a partir desta igualdade, trabalhando-se sucessivamente com suas parcelas. Começaremos com o fato de ser o operador A definido positivo, usando em (2.5) a desigualdade

$$\begin{aligned} & \lambda \int_0^t \| (u - u_h)_x(\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau \leq \\ & \leq \int_0^t A(u_h; u - u_h, u - u_h) d\tau, \quad \forall t \in J \end{aligned}$$

ou, tomando $t = T$,

$$(i) \quad \lambda \| (u - u_h)_x \|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 \leq \int_0^T A(u_h; u - u_h, u - u_h) d\tau.$$

Além desta, pela ordem

$$\begin{aligned} (ii) \quad & \left| \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_i} (u^{(i)} - u_h^{(i)}) (\phi^{(i)} - u^{(i)}) \Big|_t^0 dx \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=1,2} \| (\phi^{(i)} - u^{(i)}) (\cdot, t) \|_{0, \Omega_i} \| (u^{(i)} - u_h^{(i)}) (\cdot, t) \|_{0, \Omega_i} + \\ & + \sum_{i=1,2} \| (\phi^{(i)} - u^{(i)}) (\cdot, 0) \|_{0, \Omega_i} \| (u^{(i)} - u_h^{(i)}) (\cdot, 0) \|_{0, \Omega_i} \leq \\ & \leq \sum_{i=1,2} \left\{ \frac{1}{4\delta_0} \| (u^{(i)} - \phi^{(i)}) (\cdot, t) \|_{0, \Omega_i}^2 + \delta_0 \| (u^{(i)} - u_h^{(i)}) (\cdot, t) \|_{0, \Omega_i}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\delta_1} \| (u^{(i)} - \phi^{(i)}) (\cdot, 0) \|_{0, \Omega_i}^2 + \delta_1 \| (u^{(i)} - u_h^{(i)}) (\cdot, 0) \|_{0, \Omega_i}^2 \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{1}{4\delta_0} + \frac{1}{4\delta_1} \right) \|u - \phi\|_{\tilde{\Omega}, \infty}^2 + \delta_1 \| (u - u_h) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2$$

$$+ \frac{1}{2} \| (u - u_h) (\cdot, 0) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2, \quad \text{onde se fez } \delta_0 = \frac{1}{2};$$

$$(iii) \quad \left| \int_0^t \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_i} (u^{(i)} - u_h^{(i)}) \frac{\partial}{\partial t} (\phi^{(i)} - u^{(i)}) dx d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^t \sum_{i=1,2} \{ \| (u^{(i)} - u_h^{(i)}) (\cdot, \tau) \|_{0, \Omega_i} \| \frac{\partial}{\partial t} (\phi^{(i)} - u^{(i)}) (\cdot, \tau) \|_{0, \Omega_i} \} d\tau \right| \leq$$

$$\leq \int_0^t \sum_{i=1,2} \left\{ \frac{1}{4\delta_0} \| (u^{(i)} - u_h^{(i)}) (\cdot, \tau) \|_{0, \Omega_i}^2 + \delta_0 \| \frac{\partial}{\partial t} (\phi^{(i)} - u^{(i)}) (\cdot, \tau) \|_{0, \Omega_i}^2 \right\} d\tau$$

$$= \int_0^t \left[\frac{1}{4\delta_0} \| (u - u_h) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \delta_0 \| \frac{\partial}{\partial t} (\phi - u) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \right] d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^t \| (u - u_h) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + \frac{1}{2} \| \frac{\partial}{\partial t} (\phi - u) \|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2, \quad \text{onde}$$

também $\delta_0 = \frac{1}{2};$

$$(iv) \quad \left| \int_0^t A(u_h; u - u_h, \phi - u) d\tau \right| =$$

$$= \left| \int_0^t \sum_{i=1,2} \left\{ \int_{\Omega_i} \alpha(u_h^{(i)}) \nabla(u^{(i)} - u_h^{(i)}) \nabla(\phi^{(i)} - u^{(i)}) dx \right\} d\tau \right| \leq$$

$$\leq \mu \int_0^t \| (u - u_h) \|_{0, \tilde{\Omega}} \| (\phi - u) \|_{0, \tilde{\Omega}} d\tau \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \mu \{ \delta_2 \int_0^t \| (u - u_h)_x(\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + \frac{1}{4\delta_2} \int_0^t \| (\phi - u)_x(\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau \} \leq \\ &\leq \mu \delta_2 \int_0^t \| (u - u_h)(\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + \frac{\mu}{4\delta_2} \| (\phi - u)_x \|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 . \end{aligned}$$

Para majorar os fatores

$$A(u; u, u - u_h) - A(u_h; u, u - u_h) \quad e$$

$$A(u; u, \phi - u) - A(u_h; u, \phi - u)$$

serão usadas as definições de

$$\| (v)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} = \sup_{i=1,2} \sup_{(x,t) \in \Omega_i \times J} \sup_{j \leq d} \left| \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x_j}(x,t) \right| ,$$

e de

$$\| w^{(i)} \|_{\Omega_{i,T}, \infty} = \sup_{t \in J} \| u^{(i)}(\cdot, t) \|_{0, \Omega_i} ,$$

bem como a suposição em (1.4). Então,

$$\begin{aligned} (v) \quad & \left| \int_0^t [A(u; u, u - u_h) - A(u_h; u, u - u_h)] d\tau \right| = \\ & = \left| \int_0^t \sum_{i=1,2} \left\{ \int_{\Omega_i} [\alpha(u^{(i)}) - \alpha(u_h^{(i)})] \nabla u \cdot \nabla (u - u_h) dx \right\} d\tau \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=1,2} \{ K_i \sup_{(x,t) \in \Omega_i \times J} \sup_{j \leq d} \left| \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_j}(x,t) \right| \int_0^t \int_{\Omega_i} |u^{(i)} - u_h^{(i)}| | (u^{(i)} - u_h^{(i)})_x | dx d\tau \} \end{aligned}$$

$$\leq \mathfrak{C}_3 \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \int_0^t \sum_{i=1,2} \left\{ \frac{1}{4\delta_3} \| (u^{(i)} - u_h^{(i)}) (\cdot, \tau) \|_{0, \Omega_i}^2 + \delta_3 \| ((u^{(i)} - u_h^{(i)})_x) (\cdot, \tau) \|_{0, \Omega_i}^2 \right\} d\tau ,$$

onde $\mathfrak{C}_3 = \max\{K_1, K_2\}$. Esta última parcela - continuando a desenvolver a inequação, é inferior a

$$\mathfrak{C}_3 \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \left\{ \frac{1}{4\delta_3} \int_0^t \| (u - u_h) (\cdot, \tau) \|_{0, \Omega}^2 d\tau + \delta_3 \int_0^t \| ((u - u_h)_x) (\cdot, \tau) \|_{0, \Omega}^2 d\tau \right\} .$$

Em resumo, a desigualdade obtida é:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t [A(u; u, u - u_h) - A(u_h; u, u - u_h)] d\tau \right| \leq \\ & \leq \mathfrak{C}_3 \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \delta_3 \int_0^t \| ((u - u_h)_x) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + \\ & + \frac{\mathfrak{C}_3}{4\delta_3} \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \int_0^t \| (u - u_h) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau . \end{aligned}$$

Analogamente, obtêm-se

$$\begin{aligned} \text{(vi)} \quad & \left| \int_0^t [A(u; u, \phi - u) - A(u_h; u; \phi - u)] d\tau \right| \leq \\ & \leq \mathfrak{C}_4 \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \delta_4 \| (u - \phi)_x \|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\mathfrak{C}_4}{4\delta_4} \| \| (u)_x \| \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \int_0^t \| (u - u_h) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau .$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \text{(vii)} \quad & |\gamma| \int_0^t \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^A} (u^{(i)} - u_h^{(i)}) (\phi^{(i)} - u^{(i)}) d\gamma d\tau \leq \\ & \leq \gamma \int_0^t \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^A} [|u^{(i)} - u_h^{(i)}| \cdot |\phi^{(i)} - u^{(i)}|] d\gamma d\tau - \\ & \leq \gamma \int_0^t \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^A} \left\{ \delta_5 |u^{(i)} - u_h^{(i)}|^2 + \frac{1}{4\delta_5} |\phi^{(i)} - u^{(i)}|^2 \right\} d\gamma d\tau \\ & \leq \gamma \delta_5 \int_0^t \| (u - u_h) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 d\tau + \frac{\gamma}{4\delta_5} \| \phi - u \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 . \end{aligned}$$

Reunindo estas desigualdades (i)-(vii) ã de (2.5), obtêm-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \| (u - u_h) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \lambda \int_0^t \| ((u - u_h)_x) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + \\ & + \gamma \int_0^t \| (u - u_h) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 d\tau \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \| (u - u_h) (\cdot, 0) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ & + \delta_1 \| (u - u_h) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ & + \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{C}_3 \| (u)_x \| \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}}}{4\delta_3} + \frac{\mathfrak{C}_4 \| (u)_x \| \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}}}{4\delta_4} \right) \int_0^t \| (u - u_h) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + \\ & + (\mu \delta_2 + \mathfrak{C}_3 \| (u)_x \| \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \delta_3) \int_0^t \| ((u - u_h)_x) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \gamma \delta_5 \int_0^t \| (u - u_h) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\
 & + K_5 \| u - \phi \|_{\tilde{\Omega}, \infty}^2 + K_2 \left\| \frac{\partial}{\partial t} (u - \phi) \right\|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 + \\
 & + K_3 \| (u - \phi)_x \|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 + K_4 \| u - \phi \|_{0, \tilde{\Gamma}_T^A}^2 .
 \end{aligned}$$

Agrupando convenientemente parcelas afins, teremos:

$$(2.6) \left\{ \begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2} - \delta_1 \right) \| (u - u_h) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \left(\lambda - \mu \delta_2 - \frac{\mathfrak{C}_3 \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}, \infty}}{4 \delta_3} \right) \int_0^t \| (u - u_h)_x (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + \\
 & + \gamma (1 - \delta_5) \int_0^t \| (u - u_h) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 d\tau \leq \\
 & \leq K_0 \int_0^t \| (u - u_h) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + \\
 & + K_1 \| u - \phi \|_{\tilde{\Omega}, \infty}^2 + K_2 \left\| \frac{\partial}{\partial t} (u - \phi) \right\|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 + \\
 & + K_3 \| (u - \phi)_x \|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 + K_4 \| u - \phi \|_{0, \tilde{\Gamma}_T^A}^2
 \end{aligned} \right.$$

onde

$$K_0 = \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{C}_3 \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}, \infty}}{4 \delta_3} + \frac{\mathfrak{C}_4 \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}, \infty}}{4 \delta_4}$$

$$K_1 = 1 + K_5$$

$$K_2 = \frac{1}{2}$$

$$K_3 = \frac{\mu}{4\delta_2} + \mathbb{C}_4 \delta_4 \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}}$$

$$K_4 = \frac{\gamma}{4\delta_5}$$

$$K_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\delta_1}$$

e onde $\| (u - u_h)(\cdot, 0) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2$ foi majorado por $\| u - \phi \|_{\tilde{\Omega}, \infty}^2$.

Uma escolha cuidadosa dos δ 's nos leva à existência de termos estritamente positivos à esquerda do sinal da desigualdade. Então, mantendo a inequação, poderemos eliminar ora este, ora aquele para obter:

$$\| (u - u_h)(\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \leq K_0 \int_0^t \| (u - u_h)(\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau + \tilde{K}_1, \quad \forall t \in J.$$

Pelo lema de Gronwall, teremos

$$(2.7) \quad \| (u - u_h)(\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \leq \tilde{K}_1 e^{\tilde{K}_0 T}, \quad \forall t \in J,$$

isto é

$$(2.7') \quad \| (u - u_h)(\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \leq \mathbb{C}_a \{ \| u - \phi \|_{\tilde{\Omega}, \infty}^2 + \\ + \| \frac{\partial}{\partial t} (u - \phi) \|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 + \| (u - \phi)_x \|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 \}, \quad \forall t \in J$$

onde \mathfrak{C}_a , \tilde{K}_0 e \tilde{K}_1 são:

$$\tilde{K}_0 = \frac{2K_0}{1-2\delta_1}, \quad \tilde{K}_1 = \frac{2}{1-2\delta_1} \{K_1 \|u - \phi\|_{\tilde{\Omega}, \infty}^2 + K_2 \left\| \frac{\partial}{\partial t} (u - \phi) \right\|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 + K_3 \| (u - \phi)_x \|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 + K_4 \|u - \phi\|_{0, \tilde{\Gamma}_T^A}^2 \}$$

$$\text{e } \mathfrak{C}_a = \max\{K_1, K_2, K_3, K_4\} \frac{2}{1-2\delta_1} .$$

Combinando (2.6) e (2.7), resultados do mesmo tipo são obtidos para $\| (u - u_h)_x \|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2$ e $\|u - u_h\|_{0, \tilde{\Gamma}_T^A}^2$, e chega-se a

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \| (u - u_h)_x \|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 \leq \mathfrak{C}_b \{ \|u - \phi\|_{\tilde{\Omega}, \infty}^2 + \\ + \left\| \frac{\partial}{\partial t} (u - \phi) \right\|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 + \| (u - \phi)_x \|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 \} \end{array} \right. ;$$

e

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|u - u_h\|_{0, \tilde{\Gamma}_T^A}^2 \leq \mathfrak{C}_c \{ \|u - \phi\|_{\tilde{\Omega}, \infty}^2 + \\ + \left\| \frac{\partial}{\partial t} (u - \phi) \right\|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 + \| (u - \phi)_x \|_{0, \tilde{\Omega}_T}^2 \} \end{array} \right.$$

As constantes \mathfrak{C}_a , \mathfrak{C}_b e \mathfrak{C}_c não dependem de h , embora dependam dos dados do problema e de $\| \| (u)_x \| \|_{\tilde{\Omega}, \infty}$. Assim, o resultado obtido indica que as aproximações obtidas por este esquema dependem de quão "bem" \mathbf{V}_h aproxima \mathbf{V} . Resumindo, o resultado aqui

obtido foi:

PROPOSIÇÃO. Para u e u_h respectivamente soluções de (1.7)-(1.8) e de (2.2), ambas referências do Cap. I, existem constantes \mathbb{C}_a , \mathbb{C}_b , \mathbb{C}_c independentes de $t \in J$, e dependentes dos dados do problema^(*) e de $\|u\|_{X_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}}}$ tais que valem (2.7), (2.8) e (2.9). Obviamente, ϕ não é mais uma "qualquer" de V_h e sim a melhor aproximação possível de $u \in V$ em V_h .

2.3. ESTIMATIVA A PRIORI PARA O MÉTODO PROPOSTO

CRANK-NICOLSON/PREDITOR-CORRETOR

Como no parágrafo anterior, vamos partir das formulações fracas do problema da temperatura e de suas aproximações via Crank-Nicolson/Preditor-Corretor. Copiaremos estas formulações do Cap. I, (1.7)-(1.8) e (3.4)-(3.6):

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in V \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A(u; u, v) + \gamma \langle u, v \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = \\ = (Q, v)_{0, \tilde{\Omega}} + \gamma \langle \theta^A, v \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A}, \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

com a condição inicial

(*) dados do problema: $d, N, \lambda, \mu, T, K_1, K_2$ e medidas de Ω_1 e Ω_2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} (u^{(i)}(x,0), v^{(i)}(x,0))_{0, \Omega_i} = (w_o^{(i)}(x), v^{(i)}(x,0))_{0, \Omega_i} \\ \forall v \in \mathbf{V} \end{array} \right.$$

que definiu o sistema de EDP. O esquema discretizado no espaço e no tempo obtido foi:

Para o valor *predito*:

$$(3.2) \left\{ \begin{array}{l} (\frac{U^{n+1*} - U^n}{\Delta t}, \varphi_k)_{0, \tilde{\Omega}} + A(U^n; \frac{U^{n+1*} + U^n}{2}, \varphi_k) \\ + \gamma \langle \frac{U^{n+1*} + U^n}{2}, \varphi_k \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = (Q_{[n+1/2]}, \varphi_k)_{0, \tilde{\Omega}} + \\ + \gamma \langle \theta_{[n+1/2]}^A, \varphi_k \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A}, \quad \forall \varphi_k \text{ das bases de } V_{1h} \text{ e } V_{2h} \end{array} \right.$$

com a condição inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N U_j^0 (\varphi_j(x), \varphi_k(x))_{0, \tilde{\Omega}} = (w_o^{(i)}(x), \varphi_k(x))_{0, \tilde{\Omega}}; \end{array} \right.$$

e para o valor *corrigido*:

$$(3.3) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{\Delta t}, \varphi_k \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A \left(\frac{\mathbf{U}^{n+1*} + \mathbf{U}^n}{2}; \frac{\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2}, \varphi_k \right) \\ + \gamma \left(\frac{\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2}, \varphi_k \right)_{0, \tilde{\Gamma}^A} = (Q_{[n+1/2]}, \varphi_k)_{0, \tilde{\Omega}} + \\ + \gamma \langle \theta_{n+1/2}^A, \varphi_k \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A}, \quad \forall \varphi_k \text{ da base de } \mathbb{V}_h, \\ \text{e para } n=1, 2, \dots, N_p. \end{array} \right.$$

Voltamos agora a (3.1) adaptando-a às formas de (3.2) e (3.3), escrevendo, num intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$ as diferenças dessas formas para o valor correto como e_n (onde $u_n = u(\cdot, t_n)$):

$$(3.4) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} + e_{n(1)}, \varphi \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A \left(u_n + e_{n(2)}; \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + e_{n(3)}, \varphi \right) \\ + \gamma \left(\frac{u_{n+1} + u_n}{2} + e_{n(4)}, \varphi \right)_{0, \tilde{\Gamma}^A} = (Q_{[n+1/2]}, \varphi)_{0, \tilde{\Omega}} + \\ + \gamma \langle \theta_{[n+1/2]}^A, \varphi \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A}. \end{array} \right.$$

Aqui temos $e_{n(1)} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t}$ e, portanto, $e_{n(1)}$ é da ordem de $(\Delta t)^2$ - considerando apenas a influência da discretização da variável tempo. Semelhantemente, temos $e_{n(2)}$ de $o(\Delta t)$ bem como $e_{n(3)}$ e $e_{n(4)}$ de $o(\Delta t)$.

Fazendo (3.4) menos (3.2) a igualdade resultante é:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \left(\frac{u_{n+1} - U^{n+1*}}{\Delta t} - (u_n - U^n) \right) + e_{n(1)}, \varphi_k \Big|_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + A(u_n + e_{n(2)}; \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + e_{n(3)}, \varphi_k \Big| - \\
 & - A(U^n; \frac{U^{n+1*} + U^n}{2}, \varphi_k \Big| + \\
 & + \gamma \left\langle \frac{(u_{n+1} - U^{n+1*}) + (u_n - U^n)}{2} + e_{n(4)}, \varphi_k \right\rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = 0
 \end{aligned} \right.$$

Para aliviar a notação, usaremos

$$\begin{aligned}
 z_n &= u(\cdot, t_n) - U^n = u_n - U^n, \\
 z_{*n} &= u(\cdot, t_n) - U^{n*} = u_n - U^{n*}, \\
 \tilde{z}_{*n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (z_{*n+1} + z_n).
 \end{aligned}$$

E ainda, mais adiante

$$z_{n+\frac{1}{2}} = z_{[n+\frac{1}{2}]}.$$

O sistema acima se torna, nesta notação:

$$(3.5) \left\{ \begin{aligned}
 & \left(\frac{z_{*n+1} - z_n}{\Delta t} + e_{n(1)}, \varphi \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A(u_n + e_{n(2)}; u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}, \varphi) \\
 & + A(U^n; \frac{U^{n+1*} + U^n}{2}, \varphi) + \gamma \left\langle \tilde{z}_{*n+1/2} + e_{n(4)}, \varphi \right\rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = \\
 & = 0, \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_h.
 \end{aligned} \right.$$

Para obtermos as estimativas a priori desejadas, vamos usar, no lugar da $\varphi \in \mathbf{V}_h$, a função também arbitrária

$$\begin{aligned} \varphi &= \tilde{z}_{*n+1/2} + (\tilde{u}-u)_{[n+1/2]} = \\ &= \frac{1}{2} [u_{n+1} - \mathbf{U}^{n+1*} + u_n - \mathbf{U}^n] + \frac{1}{2} [\tilde{u}_{n+1} - u_{n+1} + \tilde{u}_n - u_n] = \\ &= \frac{\tilde{u}_{n+1} - \mathbf{U}^{n+1*} + \tilde{u}_n - \mathbf{U}^n}{2} \in \mathbf{V}_h, \end{aligned}$$

onde \tilde{u} é, por enquanto, arbitrária, para vir a ser a melhor aproximação de u em \mathbf{W}_h . Antes de usar em (3.5) esta função φ , vamos "trabalhar" convenientemente os termos em que surge o operador A :

$$\begin{aligned} &A(u_n + e_{n(2)}; u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}; \varphi) - A(\mathbf{U}^n; \frac{\mathbf{U}^{n+1*} + \mathbf{U}^n}{2}, \varphi) = \\ &= A(\mathbf{U}^n; u_{[n+1/2]}, \varphi) - A(\mathbf{U}^n; u_{[n+1/2]}, \varphi) \\ &- A(\mathbf{U}^n; \frac{\mathbf{U}^{n+1*} + \mathbf{U}^n}{2}, \varphi) + A(u_n + e_{n(2)}; u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}, \varphi) = \\ &= A(\mathbf{U}^n; \tilde{z}_{*n+1/2}, \varphi) + A(u_n + e_{n(2)}; u_{[n+1/2]}, \varphi) + \\ &+ A(u_n + e_{n(2)}; e_{n(3)}, \varphi) - A(\mathbf{U}^n; u_{[n+1/2]}, \varphi) = \\ &= A(\mathbf{U}^n; \tilde{z}_{*n+1/2}, \tilde{z}_{*n+1/2}) + A(\mathbf{U}^n; \tilde{z}_{*n+1/2}, (\tilde{u}-u)_{[n+1/2]}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + A(u_n + e_{n(2)}; u_{[n+1/2]}, \varphi) + A(u_n + e_{n(2)}; e_{n(3)}, \varphi) - \\
 & - A(\mathbf{U}^n; u_{[n+1/2]}, \varphi).
 \end{aligned}$$

Esta relação, usada em (3.5) fornece, seguindo passo por passo:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{z_{*n+1} - z_n}{\Delta t}, \tilde{z}_{*n+1/2} \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A(\mathbf{U}^n; \tilde{z}_{*n+1/2}, \tilde{z}_{*n+1/2}) \\
 & + \gamma \langle \tilde{z}_{*n+1/2}, \tilde{z}_{*n+1/2} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = -(e_{n(1)}, \varphi)_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + \left(\frac{z_{*n+1} - z_n}{\Delta t}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A(\mathbf{U}^n; \tilde{z}_{*n+1/2}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]}) \\
 & - A(u_n + e_{n(2)}; u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}, \varphi) + A(\mathbf{U}^n; u_{[n+1/2]}, \varphi) \\
 & - \gamma \langle e_{n(4)}, \varphi \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} + \gamma \langle \tilde{z}_{*n+1/2}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} + \\
 & + A(\mathbf{U}^n; e_{n(3)}, \varphi) - A(\mathbf{U}^n; e_{n(3)}, \varphi).
 \end{aligned}$$

Dadas as características de $A(w; \varphi, \varphi)$ tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\Delta t} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 - \frac{1}{2\Delta t} \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \lambda \|(\tilde{z}_{*n+1/2})_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \frac{\gamma}{4} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \frac{\gamma}{4} \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \frac{\gamma}{2} \langle z_{*n+1}, z_n \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{\Delta t} (z_{*n+1} - z_n, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_{0, \tilde{\Omega}} + \gamma (\tilde{z}_{*n+1/2}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_{0, \tilde{\Gamma}^A} \\
 &- (e_{n(1)}, \varphi)_{0, \tilde{\Omega}} - \gamma (e_{n(4)}, \varphi)_{0, \tilde{\Gamma}^A} + \\
 &+ A(\mathbb{U}^n; \tilde{z}_{*n+1/2}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]}) + \\
 &+ A(\mathbb{U}^n; u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}, \varphi) - A(u_n + e_{n(2)}; u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}, \varphi) - \\
 &- A(\mathbb{U}^n; e_{n(3)}, \varphi)
 \end{aligned}$$

o que nos leva a

$$(3.6) \left\{ \begin{aligned}
 &\frac{1}{2\Delta t} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{\gamma}{4} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \lambda \|\tilde{z}_{*n+1/2}\|_{x, 0, \tilde{\Omega}}^2 \leq \\
 &\leq \frac{1}{2\Delta t} \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 - \frac{\gamma}{4} \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 - \frac{\gamma}{2} (\tilde{z}_{*n+1}, z_n)_{0, \tilde{\Gamma}^A} + \\
 &+ \frac{1}{\Delta t} (z_{*n+1} - z_n, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_{0, \tilde{\Omega}} + \gamma (\tilde{z}_{*n+1/2}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_{0, \tilde{\Gamma}^A} \\
 &- (e_{n(1)}, \varphi)_{0, \tilde{\Omega}} - \gamma (e_{n(4)}, \varphi)_{0, \tilde{\Gamma}^A} + A(\mathbb{U}^n; \tilde{z}_{*n+1/2}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]}) \\
 &+ A(\mathbb{U}^n; u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}, \varphi) - A(u_n + e_{n(2)}; u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}, \varphi) - \\
 &- A(\mathbb{U}^n; e_{n(3)}, \varphi) .
 \end{aligned} \right.$$

Para majorar os termos em z_{*n+1} procederemos com técnicas iguais às de outras majorações, neste trabalho para obter sucessivamente:

$$(i) \quad \left| -\frac{\gamma}{2} \langle z_{*n+1}, z_n \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} \right| \leq \frac{\gamma \varepsilon_0}{2} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \frac{\gamma}{8\varepsilon_0} \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2$$

$$(ii) \quad \left| \frac{1}{\Delta t} (z_{*n+1} - z_n, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_{0, \tilde{\Omega}} \right| \leq \frac{1}{\Delta t} \left| (z_{*n+1}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_{0, \tilde{\Omega}} \right| + \\ + \left| (z_n, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_{0, \tilde{\Omega}} \right| \leq \frac{1}{\Delta t} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}} \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}} + \\ + \frac{1}{\Delta t} \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}} \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}} \leq \frac{\varepsilon_1}{\Delta t} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{\varepsilon_1}{\Delta t} \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ + \frac{1}{2\varepsilon_1 \Delta t} \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 .$$

$$(iii) \quad \left| \gamma \langle \tilde{z}_{*n+1/2}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} \right| \leq \frac{\gamma}{2} \left| \langle z_{*n+1}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} \right| + \\ + \frac{\gamma}{2} \left| \langle z_n, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} \right| \leq \frac{\gamma \varepsilon_2}{2} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \frac{\gamma \varepsilon_2}{2} \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\ + \frac{\gamma}{4\varepsilon_2} \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 .$$

$$(iv) \quad \left| - (e_{n(1)}, \varphi)_{0, \tilde{\Omega}} \right| = \left| (e_{n(1)}, z_{*n+1/2})_{0, \tilde{\Omega}} + (e_{n(1)}, (\tilde{u}-u)_{[n+1/2]})_{0, \tilde{\Omega}} \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2} \left| (e_{n(1)}, z_{*n+1} + z_n)_{0, \tilde{\Omega}} \right| + \left| (e_{n(1)}, (\tilde{u}-u)_{[n+1/2]})_{0, \tilde{\Omega}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon_3}{2} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{\varepsilon_3}{2} \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_3} \|e_{n(1)}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 +$$

$$+ \frac{1}{4\varepsilon_3} \|e_{n(1)}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \varepsilon_3 \|(\tilde{u}-u)_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 .$$

$$(v) \quad |-\gamma \langle e_{n(4)}, \varphi \rangle| \leq \frac{\gamma \varepsilon_4}{2} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \frac{\gamma \varepsilon_4}{2} \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2$$

$$+ \frac{\gamma}{2\varepsilon_4} \|e_{n(4)}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \gamma \varepsilon_4 \|(\tilde{u}-u)_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 ,$$

onde se deixou de escrever um procedimento em tudo idêntico ao de (iv).

$$(vi) \quad |A(\mathbb{U}^n; \tilde{z}_{*n+1/2}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]})| \leq \mu \|z_{*n+1/2}\|_{x, 0, \tilde{\Omega}} \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}$$

$$\leq \mu \varepsilon_5 \|z_{*n+1/2}\|_{x, 0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{\mu}{4\varepsilon_5} \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 .$$

$$(vii) \quad |-A(u_n + e_{n(2)}; u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}, \varphi) + A(\mathbb{U}^n; u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}, \varphi)| \leq$$

$$\leq \int_{\tilde{\Omega}} |\alpha(u_n + e_{n(2)}) - \alpha(\mathbb{U}^n)| \cdot |\nabla(u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}) \cdot \nabla \varphi| dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=1,2} K_i \int_{\tilde{\Omega}_i} |u_n + e_{n(2)} - \mathbb{U}^n| \cdot |\nabla(u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}) \cdot \nabla \varphi| dx \leq$$

$$\leq \tilde{K} \int_{\tilde{\Omega}} |z_n + e_{n(2)}| |\nabla(u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}) \cdot \nabla \varphi| dx \leq$$

$$\leq \tilde{K} \int_{\tilde{\Omega}} (|z_n| + |e_{n(2)}|) |\nabla(u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}) \cdot \nabla \varphi| dx .$$

Como $u_{[n+1/2]} + e_{n(3)}$ corresponde a $u(\cdot, t_n + \frac{\Delta t}{2})$ este último termo será majorado por

$$\begin{aligned} & \tilde{K} \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \left\{ \int_{\tilde{\Omega}} (|z_n| + |e_{n(2)}|) (|\tilde{z}_{*n+1/2}| + |(\tilde{u}-u)_{[n+1/2]}|) dx \right\} \\ & \leq \tilde{K} \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \left\{ \frac{1}{4\varepsilon_6} \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \varepsilon_6 \|(\tilde{z}_{*n+1/2})_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \right. \\ & + \varepsilon_6 \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_6} \|((u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_6} \|e_{n(2)}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ & \left. + \varepsilon_6 \|(\tilde{z}_{*n+1/2})_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \varepsilon_6 \|e_{n(2)}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_6} \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \right\} \\ & = \tilde{K} \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \left\{ 2\varepsilon_6 \|(\tilde{z}_{*n+1/2})_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \left(\frac{1}{4\varepsilon_6} + \varepsilon_6\right) \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{4\varepsilon_6} + \varepsilon_6\right) \|e_{n(2)}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_6} \|((u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \right\} . \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \text{(viii)} \quad & | -A(\mathbf{U}^n; e_{n(3)}, \varphi) | \leq | A(\mathbf{U}^n; e_{n(3)}, \tilde{z}_{*n+1/2}) | + \\ & + | A(\mathbf{U}^n; e_{n(3)}, (\tilde{u}-u)_{[n+1/2]}) | \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \mu \varepsilon_7 \| (\tilde{z}_{*n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \mu \varepsilon_7 \| ((\tilde{u}-u)_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ &+ \frac{\mu}{2\varepsilon_7} \| (e_{n(3)})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 . \end{aligned}$$

Voltando com todas estas desigualdades parciais à inequação

(3.6), tem-se:

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\varepsilon_1}{2\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} - \frac{\varepsilon_3}{2} \right) \| z_{*n+1} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \left(\frac{\gamma}{4} - \frac{\gamma \varepsilon_0}{2} - \frac{\gamma \varepsilon_2}{2} - \frac{\gamma \varepsilon_4}{2} \right) \| z_{*n+1} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \\ & + (\lambda - \mu \varepsilon_5 - 2\tilde{K} \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \varepsilon_6 - \mu \varepsilon_7) \| (z_{*n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \leq \\ & \leq \left[\frac{1}{2\Delta t} + \frac{\varepsilon_1}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_3}{2} + \left(\frac{1}{4\varepsilon_6} + \varepsilon_6 \right) \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \tilde{K} \right] \| z_n \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ & + \left[\frac{\gamma}{4} \left(\frac{1}{2\varepsilon_0} - 1 \right) + \frac{\gamma \varepsilon_2}{2} + \frac{\gamma \varepsilon_4}{2} \right] \| z_n \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\ & + \left(\frac{1}{2\varepsilon_1 \Delta t} + \varepsilon_3 \right) \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ & + \left(\frac{\gamma}{4\varepsilon_2} + \gamma \varepsilon_4 \right) \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\ & + \left[\mu \left(\frac{1}{4\varepsilon_5} + \varepsilon_7 \right) + \frac{\tilde{K} \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}}}{2\varepsilon_6} \right] \| ((u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ & + \frac{1}{2\varepsilon_3} \| e_{n(1)} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \left(\frac{1}{4\varepsilon_6} + \varepsilon_6 \right) \tilde{K} \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \| e_{n(2)} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \\ & + \frac{\mu}{2\varepsilon_7} \| (e_{n(3)})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{\gamma}{2\varepsilon_4} \| e_{n(4)} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Multiplicando tudo por Δt e usando constantes escolhidas de acordo com a conveniência, (3.7) se torna

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{1}{2} - \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_3 \Delta t}{2} \right] \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \gamma \Delta t \left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\varepsilon_4}{2} \right) \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\
 & + \Delta t \left[\lambda - \mu(\varepsilon_5 + \varepsilon_7) - 2\tilde{K} \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \varepsilon_6 \right] \| (\tilde{z}_{*n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \leq \\
 & \leq \left[\frac{1}{2} + \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_3 \Delta t}{2} + \Delta t \left(\frac{1}{4\varepsilon_6} + \varepsilon_6 \right) \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \tilde{K} \right] \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \Delta t A_2 \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \left(\frac{1}{2\varepsilon_1} + \varepsilon_3 \Delta t \right) \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \Delta t A_4 \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A} + \Delta t A_5 \| ((u - \tilde{u})_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \Delta t A_6 \left[\|e_{n(1)}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \|e_{n(2)}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| (e_{n(3)})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \|e_{n(4)}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \right].
 \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon_1 = \frac{1}{4}$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = \frac{1}{8}$ e colocando $\varepsilon' = (\varepsilon_5 + \varepsilon_7)\mu + 2\tilde{K} \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \varepsilon_6$, teremos a desigualdade acima na forma

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{4} - \varepsilon_3 \frac{\Delta t}{2} \right) \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{\gamma \Delta t}{16} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\
 & + \Delta t (\lambda - \varepsilon') \| (z_{*n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \leq \left(\frac{3}{4} + A_1 \Delta t \right) \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + A_2 \Delta t \| z_n \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + (2 + \varepsilon_3 \Delta t) \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + A_4 \Delta t \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + A_5 \Delta t \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + A_6 \Delta t [\| e_{n(1)} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| e_{n(2)} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| (e_{n(3)})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| e_{n(4)} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2]
 \end{aligned}$$

Escolhendo agora ε_5 , ε_7 e ε_6 de modo a termos o coeficiente de $\| (\tilde{z}_{*n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2$ estritamente positivo, e assim habilitando este termo a ser dispensado, passaremos a ter, após tomar ε_3 tal que $\varepsilon_3 \Delta t < \frac{1}{8}$ e multiplicando toda a desigualdade por 8:

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & \| z_{*n+1} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{\gamma \Delta t}{2} \| z_{*n+1} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq \\
 & \leq C_1 [\| z_n \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| z_n \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \| ((u - \tilde{u})_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2] + \\
 & + C_2 \Delta t [\| e_{n(1)} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| e_{n(2)} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \| (e_{n(3)})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| e_{n(4)} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2] .
 \end{aligned} \right.$$

Desta desigualdade e da anterior tiramos, com constantes convenientes, as seguintes:

$$(3.9) \left\{ \begin{aligned} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 &\leq C_1 \{ \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \} + \|(u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \\ &+ \|(u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \|((u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + o(\Delta t^3) , \end{aligned} \right.$$

e

$$(3.10) \left\{ \begin{aligned} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 &\leq C_2 \{ \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \|(u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ &+ \|(u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \|((u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \} + o(\Delta t^2) \end{aligned} \right.$$

$$(3.11) \quad \|(z_{*n+1/2})_x\|_{0, \Omega}^2 \leq \text{expressão como em (3.10)}.$$

E quanto aos valores corrigidos, ou seja, para $z_{n+1} = u_{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}$?
Para obter estimativas globais, voltemos a (3.1) adaptando esta formulação para a de (3.3), subtraindo em seguida esta daquela adaptação:

$$(3.12) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} + e_{n(5)}, \varphi_k \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A(u_{[n+1/2]} + e_{n(6)}, u_{[n+1/2]} + e_{n(7)}, \varphi_k) \\ & + \gamma \langle u_{[n+1/2]} + e_{n(8)}, \varphi_k \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = (Q_{[n+1/2]}, \varphi_k)_{0, \tilde{\Omega}} + \\ & + \gamma \langle \theta_{[n+1/2]}^A, \varphi_k \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A}, \quad \forall \varphi_k \text{ da base de } \mathbf{V}_h \text{ e} \\ & \text{para } n = 1, 2, \dots, N_p, \end{aligned} \right.$$

onde $e_{n(5)}, e_{n(6)}, e_{n(7)}$ bem como $e_{n(8)}$ são $o(\Delta t^2)$.

Efetuada a diferença, e já na notação dos z 's temos:

$$(3.13) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t} + e_{n(5)}, \varphi_k \right)_{0, \tilde{\Omega}} + \\ + A \left(\frac{u_{n+1} + u_n}{2} + e_{n(6)} ; \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + e_{n(7)}, \varphi_k \right) - \\ - A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2} ; \frac{U^{n+1} + U^n}{2}, \varphi_k \right) + \gamma \left(\frac{z_{n+1} + z_n}{2}, \varphi_k \right)_{0, \tilde{\Gamma}^A} = 0. \end{array} \right.$$

Usaremos, no lugar da φ_k arbitrária da base de V_h , a função qualquer de V_h dada por $z_{n+1/2} + (\tilde{u} - u)_{[n+1/2]}$.

Observemos que

$$\varphi = z_{n+1/2} + (\tilde{u} - u)_{[n+1/2]} = (\tilde{u} - U)_{[n+1/2]} \in V_h,$$

visto ser a \tilde{u} "qualquer" de V_h destinada a ser a melhor aproximação de $u \in W$ no subespaço V_h . Então esta satisfaz (3.12) e (3.13), e podemos seguir de modo semelhante àquele usado na obtenção das estimativas de (3.9)-(3.13). Assim:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t}, z_{n+1/2} \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; z_{n+1/2}, z_{n+1/2} \right) + \\ & + \gamma \left(z_{n+1/2}, z_{n+1/2} \right)_{0, \tilde{\Gamma}^A} = -A \left(u_{[n+1/2]} + e_{n(6)} ; u_{[n+1/2]} + e_{n(7)}, \varphi \right) \\ & + A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; u_{[n+1/2]}, \varphi \right) + A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; e_{n(7)} - e_{n(7)}, \varphi \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (e_{n(5)}^{\varphi})_{0, \tilde{\Omega}} + \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right)_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; z_{n+1/2}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right) + \gamma \langle z_{n+1/2}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} - \\
 & - \gamma \langle e_{n(8)}^{\varphi} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; u_{[n+1/2]} + e_{n(7)}^{\varphi} \right) - \\
 & - A (u_{[n+1/2]} + e_{n(6)}; u_{[n+1/2]} + e_{n(7)}^{\varphi}) - A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; e_{n(7)}, z_{n+1/2} \right) + \\
 & + A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; e_{n(7)}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right) + A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; z_{n+1/2}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right) + \\
 & + \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right)_{0, \tilde{\Omega}} + \gamma \langle z_{n+1/2}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} - \\
 & - (e_{n(5)}^{\varphi})_{0, \tilde{\Omega}} - \gamma \langle e_{n(8)}^{\varphi} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} ,
 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
 (3.14) \quad & \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t}, \frac{z_{n+1} + z_n}{2} \right)_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; z_{n+1/2}, z_{n+1/2} \right) + \gamma \langle z_{n+1/2}, z_{n+1/2} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} \\
 & = A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; u_{[n+1/2]} + e_{n(7)}, \varphi \right) - A \left(u_{[n+1/2]} + e_{n(6)}; u_{[n+1/2]} + e_{n(7)}, \varphi \right) \\
 & + A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; z_{n+1/2}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \right) + A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; e_{n(7)}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \right) \\
 & - A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; e_{n(7)}, z_{n+1/2} \right) + \\
 & + \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \right)_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + \gamma \langle \frac{z_{n+1} + z_n}{2}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} - \\
 & - (e_{n(5)}, \varphi)_{0, \tilde{\Omega}} - \gamma \langle e_{n(8)}, \varphi \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} .
 \end{aligned}$$

Como antes, vamos trabalhar os sucessivos termos até voltar a uma desigualdade mais conveniente.

$$(i) \quad \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t}, \frac{z_{n+1} + z_n}{2} \right)_{0, \tilde{\Omega}} = \frac{1}{2\Delta t} [\|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 - \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2]$$

$$(ii) \quad \lambda \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \leq \left| A \left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; z_{n+1/2}, z_{n+1/2} \right) \right|$$

$$(iii) \quad \gamma \langle z_{n+1/2}, z_{n+1/2} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = \frac{\gamma}{4} \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \frac{\gamma}{4} \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\ + \frac{\gamma}{2} \langle z_{n+1}, z_n \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A}$$

$$(iv) \quad \left| A\left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}; u_{[n+1/2]}^{+e_{n(6)}}; \varphi\right) - A\left(u_{[n+1/2]}^{+e_{n(5)}}; u_{[n+1/2]}^{+e_{n(6)}}; \varphi\right) \right| \leq \\ \leq \int_{\tilde{\Omega}} \left| \alpha\left(\frac{U^{n+1*} + U^n}{2}\right) - \alpha\left(u_{[n+1/2]}^{+e_{n(5)}}\right) \right| \left| \nabla\left(u_{[n+1/2]}^{+e_{n(6)}}\right) \cdot \nabla \varphi \right| dx \leq \\ \leq \sup_{x,t} \sup_j \sup_i \left| \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_j}(x,t) \right| \int_{\tilde{\Omega}} K \left| \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + e_{n(6)} - \frac{U^{n+1*} + U^n}{2} \right| \left| (\varphi)_x \right| dx = \\ = \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} K \int_{\tilde{\Omega}} \left| \frac{z_{*n+1} + z_n}{2} + e_{n(6)} \right| \left| (\varphi)_x \right| dx \leq \\ \leq \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \left[K \left\| \frac{z_{*n+1} + z_n}{2} \right\|_{0, \tilde{\Omega}} + \| e_{n(6)} \|_{0, \tilde{\Omega}} \right] \left[\| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}} + \right. \\ \left. + \| ((\tilde{u} - u)_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}} \right] \leq \\ \leq K \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \left\{ \frac{1}{2} \| z_{*n+1} \|_{0, \tilde{\Omega}} \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}} + \frac{1}{2} \| z_{*n+1} \|_{0, \tilde{\Omega}} \| ((\tilde{u} - u)_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \| z_n \|_{0, \tilde{\Omega}} \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}} + \frac{1}{2} \| z_n \|_{0, \tilde{\Omega}} \| ((\tilde{u} - u)_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}} + \right. \\ \left. + \| e_{n(6)} \|_{0, \tilde{\Omega}} \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}} + \| e_{n(6)} \|_{0, \tilde{\Omega}} \| ((\tilde{u} - u)_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}} \right\} \leq$$

$$\begin{aligned}
 & K \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}}^2 \left\{ \frac{1}{4\epsilon_0} \| z_{n+1} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + 2\epsilon_0 \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \right. \\
 & + \left(\frac{1}{8\epsilon_0} + \frac{\epsilon_0}{2} \right) \| z_n \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \left(\frac{\epsilon_0}{2} + \frac{1}{8\epsilon_0} \right) \| ((\tilde{u} - u)_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & \left. + \left(\frac{1}{2\epsilon_0} \right) \| e_{n(6)} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(v)} \quad & \left| A \left(\frac{\mathbf{U}^{n+1*} + \mathbf{U}^n}{2}; z_{n+1/2}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right) \right| \leq \\
 & \leq \mu \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}} \| ((u - \tilde{u})_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}} \leq \\
 & \leq \mu \epsilon_1 \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{\mu}{4\epsilon_1} \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(vi)} \quad & \left| A \left(\frac{\mathbf{U}^{n+1*} + \mathbf{U}^n}{2}; e_{n(7)}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right) \right| \leq \text{(como acima)} \\
 & \leq \mu \epsilon_2 \| (e_{n(7)})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{\mu}{4\epsilon_2} \| ((u - \tilde{u})_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(vii)} \quad & \left| -A \left(\frac{\mathbf{U}^{n+1*} + \mathbf{U}^n}{2}; e_{n(7)}, z_{n+1/2} \right) \right| \leq \text{(também)} \\
 & \leq \mu \epsilon_3 \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{\mu}{4\epsilon_3} \| (e_{n(7)})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(viii)} \quad & \left| \gamma \left\langle \frac{z_{n+1} + z_n}{2}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right\rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} \right| \leq \frac{\gamma}{2} \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A} \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A} \\
 & + \frac{\gamma}{2} \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A} \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A} \leq \\
 & \leq \frac{\gamma \varepsilon_4}{2} \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \frac{\gamma \varepsilon_4}{2} \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \frac{\gamma}{4\varepsilon_4} \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ix)} \quad & \left| - (e_{n(5)}, \varphi)_{0, \tilde{\Omega}} \right| = \left| (e_{n(5)}, \frac{z_{n+1} + z_n}{2})_{0, \tilde{\Omega}} + (e_{n(5)}, (\tilde{u} - u)_{[n+1/2]})_{0, \tilde{\Omega}} \right| \leq \\
 & \leq \frac{1}{2} \|e_{n(5)}\|_{0, \tilde{\Omega}} \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}} + \frac{1}{2} \|e_{n(5)}\|_{0, \tilde{\Omega}} \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + \|e_{n(5)}\|_{0, \tilde{\Omega}} \|(\tilde{u} - u)_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}} \leq \\
 & \leq \frac{\varepsilon_5}{2} \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{\varepsilon_5}{2} \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \left(\frac{1}{4\varepsilon_5} + \frac{1}{4\varepsilon_5} \right) \|e_{n(5)}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \varepsilon_5 \|(\tilde{u} - u)_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(x)} \quad & \left| -\gamma \langle e_{n(8)}, \varphi \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} \right| \leq \gamma \left| \langle e_{n(8)}, \frac{z_{n+1} + z_n}{2} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} \right| + \\
 & + \left| \gamma \langle e_{n(8)}, (\tilde{u} - u)_{[n+1/2]} \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} \right| \leq \text{(como acima)...} \\
 & \leq \gamma \frac{\varepsilon_6}{2} \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \gamma \frac{\varepsilon_6}{2} \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \frac{\gamma}{2\varepsilon_6} \|e_{n(8)}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\
 & + \gamma \varepsilon_6 \|(\tilde{u} - u)_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 .
 \end{aligned}$$

Reunindo todas estas desigualdades parciais em (3.14) ob-
têm-se

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\Delta t} \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 - \frac{1}{2\Delta t} \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \lambda \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{\gamma}{4} \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\
 & + \frac{\gamma}{4} \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq \frac{\varepsilon_5}{2} \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + (2\varepsilon_0 \text{IK} + \varepsilon_1 \mu + \varepsilon_3 \mu) \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \left(\frac{\gamma \varepsilon_4}{2} + \frac{\gamma \varepsilon_6}{2} + \frac{\gamma \varepsilon_7}{2} \right) \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right)_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + \frac{\text{IK}}{4\varepsilon_0} \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \left(\frac{\text{IK}}{8\varepsilon_0} + \frac{\text{IK} \varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_5}{2} \right) \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \left(\frac{\gamma \varepsilon_4}{2} + \frac{\gamma \varepsilon_6}{2} + \frac{\gamma}{8\varepsilon_7} \right) \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\
 & + \mathfrak{C}_0 \{ \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \| ((u - \tilde{u})_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \} \\
 & + \mathfrak{C}_0 \{ \| e_{n(5)} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| e_{n(6)} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| (e_{n(7)})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| e_{n(8)} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \},
 \end{aligned}$$

onde $\text{IK} = K \| (u)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}}$ e $\mathfrak{C}_0 = \max \{ \gamma \left(\frac{1}{4\varepsilon_4} + \varepsilon_6 \right) ; \varepsilon_5 ;$

$$\text{IK} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{1}{8\varepsilon_0} \right) + \frac{\mu}{4\varepsilon_1} + \frac{\mu}{4\varepsilon_2} ; \frac{1}{2\varepsilon_5} ; \frac{\text{IK}}{2\varepsilon_0} ; \mu \left(\frac{1}{4\varepsilon_3} + \varepsilon_2 \right) ; \frac{\gamma}{2\varepsilon_6} \}.$$

Agrupando termos semelhantes, teremos:

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{\varepsilon_5}{2} \right) \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + (\lambda - 2\varepsilon_0 \text{IK} - \mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)) \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\gamma}{4} - \frac{\gamma}{2} (\varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7) \right) \| z_{n+1} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right)_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + \left[\frac{1}{2\Delta t} + \frac{\varepsilon_5}{2} + \frac{IK}{2} \left(\frac{1}{4\varepsilon_0} + \varepsilon_0 \right) \right] \| z_n \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \left[-\frac{\gamma}{4} + \frac{\gamma\varepsilon_4}{2} + \frac{\gamma\varepsilon_6}{2} + \frac{\gamma}{8\varepsilon_7} \right] \| z_n \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \frac{IK}{4\varepsilon_0} \| z_{*n+1} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \mathfrak{C}_0 \{ \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| ((u - \tilde{u})_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \} \\
 & + \mathfrak{C}_0 \{ \| e_{n(5)} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| e_{n(6)} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| (e_{n(7)})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| e_{n(8)} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \} .
 \end{aligned}$$

Com as modificações evidentes, temos:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \varepsilon_5 \Delta t) \| z_{n+1} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \lambda' \Delta t \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \gamma' \Delta t \| z_{n+1} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq 2\Delta t \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right)_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + (1 + C_2 \Delta t) \| z_n \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + C_3 \Delta t \| z_n \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\
 & + 2\Delta t \mathfrak{C}_0 \{ \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| ((u - \tilde{u})_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \} + 2\Delta t \mathfrak{C}_0 o(\Delta t^4) + \\
 & + \frac{2\Delta t IK}{4\varepsilon_0} \| z_{*n+1} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 ,
 \end{aligned}$$

onde fizemos

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda' = (\lambda - 2\varepsilon_0 \mathbb{K} - \mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)) \cdot 2 ; \\ \gamma' = \left(\frac{\gamma}{4} - \frac{\gamma}{2}(\varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7) \right) \cdot 2 = \\ \quad = \gamma \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_4 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 \right) ; \\ C_2 = \varepsilon_5 + \mathbb{K} \left(\frac{1}{4\varepsilon_0} + \varepsilon_0 \right) ; \\ C_3 = \gamma \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \frac{1}{4\varepsilon_7} \right) ; \end{array} \right.$$

e onde se usa o fato de serem $e_{n(5)}$, $e_{n(6)}$, $e_{n(7)}$, $e_{n(8)}$ de $o(\Delta t^2)$, e também onde se pretende usar a inequação (3.9) que majora $\|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2$. Assim:

$$\begin{aligned} & (1 - \varepsilon_5 \Delta t) \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \lambda' \Delta t \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \Omega}^2 + \\ & + \gamma' \Delta t \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq 2\Delta t \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right)_{0, \tilde{\Omega}} + \\ & + (1 + C_2 \Delta t) \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + C_3 \Delta t \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\ & + 2\Delta t C_0 \{ \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| ((u - \tilde{u})_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ & + \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \} + o(\Delta t^5) + \\ & + \frac{\Delta t \mathbb{K}}{2\varepsilon_0} C_1 \{ \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \end{aligned}$$

$$+ \| ((u-\tilde{u})_{[n+1/2]})'_{x_{0,\tilde{\Omega}}} \|^2 + \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0,\tilde{\Gamma}^A}^2 + o(\Delta t^4) ,$$

ou ainda (*):

$$\begin{aligned} & (1 - \varepsilon_5 \Delta t) \| z_{n+1} \|_{0,\tilde{\Omega}}^2 + \lambda' \Delta t \| (z_{n+1/2})'_{x_{0,\tilde{\Omega}}} \|^2 + \\ & + \gamma' \Delta t \| z_{n+1} \|_{0,\tilde{\Gamma}^A}^2 \leq 2\Delta t \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{t}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \right)_{0,\tilde{\Omega}} + \\ & + (1 + C_2 \Delta t + C_2' \Delta t) \| z_n \|_{0,\tilde{\Omega}}^2 + (C_3 \Delta t + C_3' \Delta t) \| z_n \|_{0,\tilde{\Gamma}^A}^2 + \\ & + \Delta t C_4 \{ \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0,\tilde{\Omega}}^2 + \| ((u-\tilde{u})_{[n+1/2]})'_{x_{0,\tilde{\Omega}}} \|^2 + \\ & + \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0,\tilde{\Gamma}^A}^2 \} + o(\Delta t^4) + \Delta t \| z_n \|_{0,\tilde{\Omega}}^2 - \Delta t \| z_n \|_{0,\tilde{\Omega}}^2 \end{aligned}$$

Aqui, usamos $C_2' = C_3' = \frac{C_1 \text{IK}}{2\varepsilon_0}$ e $C_4 = 2C_0 + \frac{\text{IK}C_1}{2\varepsilon_0}$.

Esta desigualdade vai ser reescrita de modo a ficar "no jeito" para a passagem à somatória em n . Deste modo, temos:

(*) Podemos, para efeito de cálculos, considerar $\varepsilon_0 = \frac{\lambda}{8\text{IK}}$;

$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \frac{\lambda}{8\mu}$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_6 = \varepsilon_7 = \frac{1}{8}$. É só fazer as contas.

$$(3.16) \left\{ \begin{aligned} & (1 - \varepsilon_5 \Delta t) \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 - (1 + \varepsilon' \Delta t) \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ & + \lambda' \Delta t \| (z_{n+1/2})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \gamma' \Delta t \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 - \\ & - \gamma' \Delta t \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq 2\Delta t \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t}, (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \right)_{0, \tilde{\Omega}} + \\ & + \Delta t C_4 \{ \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| ((u - \tilde{u})_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ & + \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \} + o(\Delta t^4) - \Delta t \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 . \end{aligned} \right.$$

Novamente foi necessário trocar os nomes das constantes , da seguinte maneira:

$(1 + C_2 \Delta t + C_2' \Delta t + \Delta t)$ foi substituída por $(1 + \varepsilon' \Delta t)$,

e

$(C_3 \Delta t + C_3' \Delta t)$ por $\gamma' \Delta t$.

O próximo passo será o de passar-se à somatória em n , e, assim, de uma majoração local do erro, obtida em (3.9), (3.10) e (3.11), passar a uma majoração global.

O resultado obtido é, então, da forma:

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|z_{N_p}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \Delta t \|z_{N_p}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\ + \Delta t \sum_{n=1}^{N_p-1} \|(z_{n+1/2})_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \leq \\ \leq \Delta t \text{ (termos da aproximação na variável } x) + o(\Delta t^3). \end{array} \right.$$

Na realidade o que se deseja (sempre) é obter uma aproximação de ordem cada vez mais elevada - aqui, melhor que $o(\Delta t^3)$. Neste caso o que se conseguiu foi isto. Melhorar esta aproximação não é impossível, obviamente, e depende do que se pode pagar analítica e computacionalmente. Um caminho possível para melhorar esta aproximação é o uso de métodos "... -corretor-corretor" anteriormente comentados, e indicados, por exemplo, em Acton [1], Cannon e Ewing [7] e Douglas e Dupont [13].

Enfim, voltamos a (3.16) e, preparando sua passagem à somatória, estabelecemos:

Seja

$$g(\Delta t) = \frac{1 - \varepsilon_5 \Delta t}{1 + \varepsilon' \Delta t} \quad \text{onde } \varepsilon' > \varepsilon_5 > 0 \quad (\text{ver 3.15});$$

claramente $0 \leq g(\Delta t) \leq 1$ e $0 \leq \eta \leq g(\Delta t)^n \leq 1$, $\forall n$, desde que Δt seja suficientemente pequeno.

Em (3.16) vamos usar $\frac{g(\Delta t)^n}{1+\varepsilon'\Delta t}$, $h(C_5)^{n+1}$, $h(C_5)^n$, η e ξ conforme a conveniência:

$$\begin{aligned}
 & g(\Delta t)^n \frac{1-\varepsilon_5\Delta t}{1+\varepsilon'\Delta t} \|z_{n+1}\|_{0,\tilde{\Omega}}^2 - g(\Delta t)^n \frac{1+\varepsilon'\Delta t}{1+\varepsilon'\Delta t} \|z_n\|_{0,\tilde{\Omega}}^2 \\
 & + \eta \lambda'\Delta t \| (z_{n+1/2})_x \|_{0,\tilde{\Omega}}^2 + \gamma' g(\Delta t)^{n+1} \|z_{n+1}\|_{0,\tilde{\Gamma}^A}^2 - \\
 & - \gamma'\Delta t g(\Delta t)^n \|z_n\|_{0,\tilde{\Gamma}^A}^2 \leq 2\Delta t \frac{g(\Delta t)^{n+1}}{1+\varepsilon'\Delta t} \left(\frac{z_{n+1}-z_n}{\Delta t}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \right)_{0,\tilde{\Omega}} \\
 & + \Delta t \bar{C} \{ \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0,\tilde{\Omega}}^2 + \| ((u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_x \|_{0,\tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \|_{0,\tilde{\Gamma}^A}^2 \} + o(\Delta t^4) - \eta \Delta t \|z_n\|_{0,\tilde{\Omega}}^2.
 \end{aligned}$$

Então,

$$(3.18) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{N_p-1} \{ g(\Delta t)^{n+1} \|z_{n+1}\|_{0,\tilde{\Omega}}^2 - g(\Delta t)^n \|z_n\|_{0,\tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \eta \lambda'\Delta t \sum_{n=0}^{N_p-1} \| (z_{n+1/2})_x \|_{0,\tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \gamma'\Delta t \sum_{n=0}^{N_p-1} \{ g(\Delta t)^{n+1} \|z_{n+1}\|_{0,\tilde{\Gamma}^A}^2 - g(\Delta t)^n \|z_n\|_{0,\tilde{\Gamma}^A}^2 \} \leq \\
 & \leq \sum_{n=0}^{N_p-1} \frac{2\Delta t}{1+\varepsilon'\Delta t} g(\Delta t)^n \left(\frac{z_{n+1}-z_n}{\Delta t}, (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \right)_{0,\tilde{\Omega}} + \\
 & + \sum_{n=0}^{N_p-1} o(\Delta t^4) + \sum_{n=0}^{N_p-1} 2\Delta t \bar{C} \{ \text{termos em } (u-\tilde{u})_{[n+1/2]} \} - \eta \sum_{n=0}^{N_p-1} \Delta t \|z_n\|_{0,\tilde{\Omega}}^2.
 \end{aligned} \right.$$

Desta formulação se obterá uma nova usando os seguintes resultados intermediários:

$$(i) \sum_{n=0}^{N_p-1} \{g(\Delta t)^{n+1} \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 - g(\Delta t)^n \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2\} =$$

$$= \eta \|z_{N_p}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 - \|z_0\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 ;$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{N_p-1} \{g(\Delta t)^{n+1} \|z_{n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 - g(\Delta t)^n \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2\} =$$

$$= \|z_{N_p}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 - \|z_0\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 ;$$

e

$$(iii) \sum_{n=0}^{N_p-1} \frac{2\Delta t}{1+\epsilon'\Delta t} (z_{n+1} - z_n, \frac{g(\Delta t)^n}{\Delta t} (u - \tilde{u})_{[n+1/2]})_{0, \tilde{\Omega}} \leq$$

$$\leq \frac{2\Delta t}{1+\epsilon'\Delta t} \sum_{n=1}^{N_p-1} (z_n, \frac{g(\Delta t)^{n+1} (u - \tilde{u})_{[n-1/2]} - g(\Delta t)^n (u - \tilde{u})_{[n+1/2]}}{\Delta t})_{0, \tilde{\Omega}}$$

$$+ \frac{2}{1+\epsilon'\Delta t} (z_{N_p}, (u - \tilde{u})_{[N_p-1/2]})_{0, \tilde{\Omega}} +$$

$$+ \frac{2}{1+\epsilon'\Delta t} (z_0, (u - \tilde{u})_{[1/2]})_{0, \tilde{\Omega}} \leq$$

$$\leq \frac{2}{1+\epsilon'\Delta t} \{\epsilon_A \|z_{N_p}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{1}{4\epsilon_A} \|(u - \tilde{u})_{[N_p-1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon_A \|z_0\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_A} \|(u-\tilde{u})_{[1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \} + \\
 & + \frac{2\Delta t}{1+\varepsilon'\Delta t} \sum_{n=1}^{N_p-1} \{ \varepsilon_A \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \frac{1}{4\varepsilon_A} \left\| \frac{(u-\tilde{u})_{[n+1/2]} - (u-\tilde{u})_{[n-1/2]}}{\Delta t} \right\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \} = \\
 & = \varepsilon'_A \|z_{N_p}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \varepsilon'_A \|z_0\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \frac{1}{2\varepsilon_A(1+\varepsilon'\Delta t)} \{ \|(u-\tilde{u})_{[1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \|(u-\tilde{u})_{[N_p-1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \} + \\
 & + \varepsilon'_A \Delta t \sum_{n=1}^{N_p-1} \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \frac{1}{2\varepsilon_A(1+\varepsilon'\Delta t)} \sum_{n=1}^{N_p-1} \left\| \frac{(u-\tilde{u})_{[n+1/2]} - (u-\tilde{u})_{[n-1/2]}}{\Delta t} \right\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 ,
 \end{aligned}$$

onde $\varepsilon'_A = \frac{2\varepsilon_A}{1+\varepsilon'\Delta t}$.

Usando (i)-(iii) em (3.18), teremos:

$$\eta \|z_{N_p}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 - \|z_0\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \eta \lambda' \Delta t \sum_{n=0}^{N_p-1} \|(z_{n+1/2})_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \eta \gamma' \Delta t \| z_{N_p, 0, \tilde{\Gamma}^A} \|^2 - \eta \gamma' \Delta t \| z_{0, 0, \tilde{\Gamma}^A} \|^2 \leq \epsilon'_A \| z_{N_p, 0, \tilde{\Omega}} \|^2 + \\
 & + \epsilon'_A \| z_{0, 0, \tilde{\Omega}} \|^2 - \Delta t \| z_{0, 0, \tilde{\Omega}} \|^2 + \frac{1}{2\epsilon'_A (1 + \epsilon' \Delta t)} \{ \| (u - \tilde{u})_{[1/2]} \|^2_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + \| (u - \tilde{u})_{[N_p - 1/2]} \|^2_{0, \tilde{\Omega}} \} + \epsilon'_A \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \| z_n \|^2_{0, \tilde{\Omega}} - \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \| z_n \|^2_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + \frac{\Delta t}{2\epsilon'_A (1 + \epsilon' \Delta t)} \sum_{n=1}^{N-1} \left\| \frac{(u - \tilde{u})_{[n+1/2]} - (u - \tilde{u})_{[n-1/2]}}{\Delta t} \right\|^2_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + 2\Delta t \bar{C} \sum_{n=0}^{N-1} \{ \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|^2_{0, \tilde{\Omega}} + \| ((u - \tilde{u})_{[n+1/2]})_x \|^2_{0, \tilde{\Omega}} + \\
 & + \| (u - \tilde{u})_{[n+1/2]} \|^2_{0, \tilde{\Gamma}^A} \} + o(\Delta t^3) .
 \end{aligned}$$

Nesta igualdade, além da denominação

$D_0 = \eta - \epsilon'_A$, $D_1 = \eta \lambda'$, $D_2 = \eta \lambda'$, $D_3 = \eta \gamma'$ e D_4 e D_5 convenientes, escolheremos ϵ'_A de modo a cancelar ambas as somatórias.

$$\epsilon'_A \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \| z_n \|^2_{0, \tilde{\Omega}} - \eta \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \| z_n \|^2_{0, \tilde{\Omega}} ,$$

que figuram do lado direito da desigualdade. Teremos, então:

$$\begin{aligned}
 & D_0 \|z_{N_p}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + D_1 \Delta t \sum_{n=0}^{N_p-1} \|(z_{n+1/2})_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + D_2 \Delta t \|z_{N_p}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq \\
 & \leq (\varepsilon'_A - \Delta t + 1) \|z_0\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + D_3 \Delta t \|z_0\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\
 & + D_4 \{ \|(u-\tilde{u})_{[1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \|(u-\tilde{u})_{[N_p-1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & D_4 \Delta t \sum_{n=1}^{N_p-1} \left\| \frac{(u-\tilde{u})_{[n+1/2]} - (u-\tilde{u})_{[n-1/2]}}{\Delta t} \right\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & D_5 \Delta t \sum_{n=0}^{N_p-1} \{ \|(u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \|(u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \}_x \\
 & + \|(u - \tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \} + o(\Delta t^3) .
 \end{aligned}$$

Ora, lembrando que

$$\|z_0\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 = \|u(\cdot, 0) - \mathbb{U}^0\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \leq \|(u-\tilde{u})_0\|_{0, \tilde{\Omega}}^2$$

e que, semelhantemente,

$$\|z_0\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq \|(u-\tilde{u})_0\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 ,$$

transformamos a desigualdade acima em:

$$\begin{aligned}
 (3.19) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & D_0 \|z_{N_p}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + D_1 \Delta t \sum_{n=0}^{N_p-1} \|(z_{n+1/2})_x\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + D_2 \Delta t \|z_{N_p}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq o(\Delta t^3) + \bar{D} \Delta t \{ \| (u-\tilde{u})_0 \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \\
 & + \sum_{n=1}^{N_p-1} [\|\frac{(u-\tilde{u})_{[n+1/2]} - (u-\tilde{u})_{[n-1/2]}}{\Delta t}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\
 & + \| ((u-\tilde{u})_{[n+1/2]})_x \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| (u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2] \} + \\
 & + \bar{D} \{ \| (u-\tilde{u})_0 \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| (u-\tilde{u})_{[1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \| (u-\tilde{u})_{[N_p-1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}} \}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Assim como em resultado anterior, para enunciá-lo formalmente, será necessário "descobrir" as hipóteses no sentido de verificar o que é preciso exigir dos dados e da solução (respectivamente $\Omega_i, \Gamma_i^A, Q^{(i)}, i=1,2,d, \theta^A, \gamma, \alpha, N, N_p, \Delta t, \mathbf{v}_h$ e u) para que obtenhamos o resultado acima, que indica ser o Método de Preditor-Corretor da ordem de $\Delta t^{3/2}$.

Em primeiro lugar, como precisamos de uma proposição intermediária — (3.8) — necessitaremos de condições de certa regularidade da solução $u(x,t)$: $\| \| (u) \| \|_{x \Omega_{\infty, \infty}}$ limitada.

Além disso, para afirmar que os $e_{n(j)}$ são desta ou daquela ordem em Δt , exigiremos que as derivadas parciais de 2ª ordem

de $u^{(1)}(x,t)$ e de $u^{(2)}(x,t)$ sejam continuamente diferenciáveis e que $\frac{\partial^3 u^{(i)}}{\partial t^3}$ e $\frac{\partial^3 u^{(i)}}{\partial t^2 \partial x_k}$ (para $i = 2$ e $k \leq d$) sejam contínuas e limitadas por uma constante.

Com este elenco \mathcal{H} de hipóteses, podemos enunciar

LEMA. Sejam as notações deste capítulo e as hipóteses \mathcal{H} . Então, valem:

$$\begin{aligned} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 &\leq C_1 \{ \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \|(u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ &+ \|(u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \|(u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{x, 0, \tilde{\Omega}}^2 \} + o(\Delta t^3) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|z_{*n+1}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 &\leq C_2 \{ \|z_n\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \|z_n\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \|(u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ &+ \|(u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 + \|(u-\tilde{u})_{[n+1/2]}\|_{x, 0, \tilde{\Omega}}^2 \} + o(\Delta t^2) ; \end{aligned}$$

$\|(z_{*n+1/2})_x\|_{0, \Omega}^2 \leq$ a expressão do lado direito da desigualdade imediatamente acima, com $o(\Delta t^2)$, portanto.

Além deste, o

TEOREMA. Nas mesmas condições, vale a majoração (3.19).

§2.4. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO PROCURADA

É evidente que a ordem deste segundo capítulo poderia ter sido invertida para que se começasse com a demonstração da existência e com a verificação da unicidade da solução, passando depois à ordem das aproximações. A opção pela estrutura apresentada se deveu mais à ordem cronológica em que o trabalho foi desenvolvido do que a considerações de estilo.

A unicidade é obtida da maneira usual: Supõe-se que u e w sejam duas soluções distintas do sistema originalmente proposto e que satisfaçam ambas a condição inicial. Reescrito o sistema duas vezes, uma vez para cada uma das soluções, subtrai-se um do outro, obtendo

$$(4.1) \quad \left[\begin{array}{l} (u_t - w_t, v)_{0, \tilde{\Omega}} + A(t, u; u, v) - A(t, w; w, v) + \\ + \gamma \langle u - w, v \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = 0, \quad \forall v \in \mathbb{V}. \end{array} \right.$$

Somando e subtraindo desta equação um termo conveniente (o que nos convém, neste caso, é $A(t, u; w, v)$), teremos:

$$(4.2) \quad \left[\begin{array}{l} (u_t - w_t, v)_{0, \tilde{\Omega}} + A(t, u; u - w, v) + \\ + \gamma \langle u - w, v \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = A(t, w; w, v) - \\ - A(t, u; w, v) , \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

No lugar da função arbitrária v de V , escolhamos $u - w$. Usando em (4.2) esta substituição, além da coercividade do operador A , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| (u - w) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \lambda \| (u - w)_x (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ + \gamma \| (u - w) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq \\ \leq \int_{\tilde{\Omega}} |\alpha(t, w) - \alpha(t, u)| |\nabla w \cdot \nabla (u - w)| dx . \end{aligned}$$

Usando aqui a Lipschitz continuidade de α e a pertinência da solução a um conjunto limitado, chegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| (u - w) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \lambda \| (u - w)_x (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ + \gamma \| (u - w) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq \\ \leq K \| \| (w)_x \| \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \int_{\tilde{\Omega}} |u - w| |\nabla (u - w)| dx . \end{aligned}$$

Procedendo de modo usual, obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| (u - w) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \lambda \| (u - w)_x (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ & + \gamma \| (u - w) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Gamma}^A}^2 \leq K \| (w)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} \{ \\ & \frac{1}{4\epsilon} \| (u - w) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \epsilon \| (u - w)_x (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 \} . \end{aligned}$$

Escolhendo convenientemente o ϵ , pode-se eliminar a norma do gradiente de $u - w$ de ambos os lados da inequação, e integrar a desigualdade resultante de 0 a t , $t \in J$:

$$(4.3) \quad \left[\begin{aligned} & \| (u - w) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 - \| (u - w) (\cdot, 0) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 + \\ & + 2 \gamma \| u - w \|_{0, \tilde{\Gamma}_t^A}^2 \leq \frac{\mathfrak{C}}{2\epsilon} \int_0^t \| (u - w) (\cdot, \tau) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 d\tau , \\ & \text{onde } \mathfrak{C} = K \| (w)_x \|_{\tilde{\Omega}_{\infty, \infty}} . \end{aligned} \right.$$

Do primeiro membro da desigualdade podem ser eliminados o 2º e o 3º termos: o 2º por ser nulo, o 3º por ser positivo. A desigualdade se mantém e ao que restou podemos aplicar o Lema de Gronwall. O resultado é:

$$(4.4) \quad \left[\forall t \in J, \| (u - w) (\cdot, t) \|_{0, \tilde{\Omega}}^2 = 0 . \right.$$

Isto é: em $L^2(J, L^2(\tilde{\Omega}))$, u e w , soluções do problema proposto, coincidem.

Resta, então, tratar da existência dessa solução única. Há verã no Apêndice 1, mais detalhes de uma verificação que será aqui apenas esboçada:

Começamos definindo espaços que irão se constituir em nossa área de trabalho:

$$(4.5) \quad \left[\begin{array}{l} W_i = L^2(\Omega_i) \quad , \quad \text{para } i = 1, 2, \\ V_1 = \{v^{(1)}(x, t) \in H^1(\Omega_1) : v|_{\Gamma^k} = 0\} \quad , \\ V_2 = H^1(\Omega_2) \quad , \quad \text{e} \\ \mathcal{H}_\gamma(J, \mathbb{V}; L^2(\tilde{\Omega})) = \{u \in L^2(\tilde{\Omega}) \quad \text{tais que} \\ |\tau|^\gamma \hat{u}(\tau) \in L^2(J, L^2(\tilde{\Omega})) \quad . \end{array} \right.$$

Este último espaço está munido da norma

$$\|u\|_{\gamma(J, \mathbb{V}; H)} = \inf \|v\|_{\gamma((-\infty, \infty), \mathbb{V}; H)} \quad \text{para}$$

$$w = v \quad \text{quase sempre sobre } J,$$

sendo

$$\|v\|_{\gamma((-\infty, \infty), \mathbf{V}; H)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \|v(\cdot, t)\|_{\mathbf{V}}^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\hat{v}(\cdot, \tau)|^2 d\tau$$

onde \hat{v} é a Transformada de Fourier em t da função v .

Para estes espaços valem

$$H_0^1(\Omega_i) \subset V_i \subset H^1(\Omega_i) \text{ , para } i=1,2 \text{ .}$$

A demonstração aqui delineada segue um procedimento análogo àquele de Lions em [], para cada uma das componentes $u^{(i)}(x, t)$ da solução procurada $u(x, t) = (u^{(1)}(x, t), u^{(2)}(x, t))$. Nesse mencionado trabalho, o operador estudado é da forma

$$(4.6) \quad \left[\begin{array}{l} \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D_x^p (\alpha_{pq}(x, t, D_x^{m-1} u(x, t))) D_x^q u(x, t) \\ + \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \text{ ,} \end{array} \right.$$

claramente uma generalização — em cada componente — do operador aqui estudado, onde, para $m = 1$ e α_{pq} sendo a difusibilidade $\alpha(t, u^{(i)}(x, t))$ quando não for nulo:

$$(4.7) \quad \left[\begin{aligned} & \sum_{i=1,2} \left\{ \sum_{j=1}^d (-1) \frac{\partial}{\partial x_j} [\alpha(t, u^{(i)}(x,t)) \frac{\partial}{\partial x_j} u^{(i)}(x,t)] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial t} u^{(i)}(x,t) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hã duas etapas a serem cumpridas: na primeira delas verifica-m-se as condições do teorema citado para cada uma das compo-nentes do operador; na segunda a demonstraçãõ é indicada.

Além de termos, por força das características de Ω_1 , de Ω_2 e de suas respectivas fronteiras, as injeções de $H^1(\Omega_i)$ em $L^2(\Omega_i)$ completamente contínuas, a caracterizaçãõ do operador $(A, t; u, v)$, herdadas, por assim dizer, da difusibilidade $\alpha(t, w^{(i)}(x, t))$ podem garantir que, para $i = 1, 2$:

$$(4.8) \quad \left[\begin{aligned} & \text{Para } u^{(i)}(., t), v^{(i)}(., t) \in L^2(\Omega_i) \text{ e} \\ & w^{(i)} \in L^2(J, H^1(\Omega_i)) \text{ , a aplicaçãõ} \\ & t \longrightarrow A(t, w; u, v) \text{ é mensurãvel;} \end{aligned} \right.$$

$$(4.9) \left\{ \begin{array}{l} a_i(t, w^{(i)}; u^{(i)}, v^{(i)}) \leq M_i \|u^{(i)}\|_{1, \Omega_i} \|v^{(i)}\|_{1, \Omega_i} \\ v^{(i)}, v^{(i)} \in V_i, \text{ com } M_i \text{ independente de } w^{(i)} \text{ e de } t; \end{array} \right.$$

$$(4.10) \left\{ \begin{array}{l} a_i(t, w^{(i)}; v^{(i)}, v^{(i)}) \geq \lambda \|v^{(i)}\|_{1, \Omega_i}^2, \\ v^{(i)} \in V_i, \lambda \text{ independente de } w^{(i)} \text{ e de } t. \end{array} \right.$$

É necessário — o que será abordado no Apêndice 1 — que se tenha:

$$(4.11) \left\{ \begin{array}{l} \text{se } w_n^{(i)} \longrightarrow w^{(i)} \text{ para } i=1,2 \text{ em } L^2(J, V_i) \text{ quando} \\ n \longrightarrow \infty, \text{ então, para } i = 1,2 : \\ \int_0^T |a_i(t, w_n^{(i)}; u^{(i)}, v^{(i)}) - a_i(t, w^{(i)}; u^{(i)}, v^{(i)})| dt \longrightarrow 0 \\ \text{para } u^{(i)} \text{ fixado em } V_i \text{ e uniformemente} \\ \text{para } v^{(i)} \text{ num subconjunto limitado de } V_i. \end{array} \right.$$

Satisfeitas as condições exigidas, pode-se passar à prova da existência da solução $u(x,t) = (u^{(1)}(x,t), u^{(2)}(x,t))$ do sistema que descreve o problema:

Determinar $u \in \mathbb{V}$ tal que

$$(4.12) \quad \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A(t, u; u, v) + \\ + \gamma \langle u, v \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = (Q, v)_{0, \tilde{\Omega}} + \\ + \gamma \langle \theta^A, v \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} , \\ \\ \text{com } (u(\cdot, 0), v)_{0, \tilde{\Omega}} = (w_0, v)_{0, \tilde{\Omega}} \\ \\ \text{para } \forall v \in \mathbb{V} . \end{array} \right.$$

Esta demonstração segue o seguinte roteiro:

Fixa-se uma função $w(x, t)$ com $w^{(i)}(x, t) \in L^2(J, L^2(\Omega_i))$ que será justamente aquela a figurar na parte não-linear do operador A . Este novo problema (P_w) , com w fixo, é conhecido, e é parabólico e linear. Para ele, temos garantida a existência de uma única solução em $L^2(-\infty, T; L^2(\tilde{\Omega}))$. A restrição de tal solução a $L^2(J; L^2(\tilde{\Omega}))$ daremos o nome de u_w . Esta função está em $\mathcal{H}_\gamma(J, \mathbb{V}; L^2(\tilde{\Omega}))$. Definimos em seguida uma aplicação X que, a cada $w \in L^2(J, W)$, associa a solução u_w do problema (P_w) . Estas soluções permanecem num subconjunto limitado de $\mathcal{H}_\gamma(J, \mathbb{V}; L^2(\tilde{\Omega}))$.

Escolhendo uma seqüência $w_n \longrightarrow w$ em $L^2(J, W)$, teremos, em consequência, $u_n = X(w_n) \longrightarrow u_w = X(w)$ em $L^2(J, \mathbf{V})$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff, existe um ponto fixo da aplicação X , i.e.:

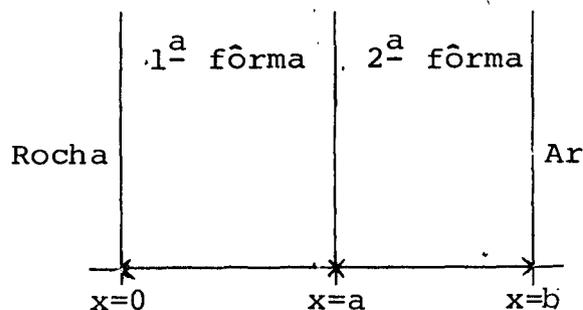
existe $u(x, t) \in L^2(J, W)$ tal que $X(u) = u$. Ora esta equação caracteriza precisamente a $u(x, t)$ que é a solução de (4.12).

CAPÍTULO III
ENSAIOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados alguns resultados de ensaios computacionais obtidos com o esquema numérico estudado neste trabalho. Tais ensaios foram executados com equipamento Digital (VAX) disponível no CPD da UNICAMP através dos terminais disponíveis no LABMA (Laboratório de Matemática Aplicada do Departamento de Matemática Aplicada - IMECC, UNICAMP).

Foi considerado como domínio uma fatia muito mais longa que larga, composta por dois meios: 2 fôrmas de concreto sucessivamente lançadas, a primeira em contato com a rocha, de um lado e com a nossa fôrma, do outro. A segunda fôrma está em contato com esta primeira, de um lado e, do outro, com o ar.

O problema pode ser, nestas condições reduzido a apenas uma dimensão espacial, conforme indica a figura:



Nesta situação, teremos

$$\Omega_1 = (0, a) - 1^\circ \text{ dom\u00ednio}$$

$$\Omega_2 = (a, b) - 2^\circ \text{ dom\u00ednio sendo } a = 2,0 \text{ e } b = 4,0$$

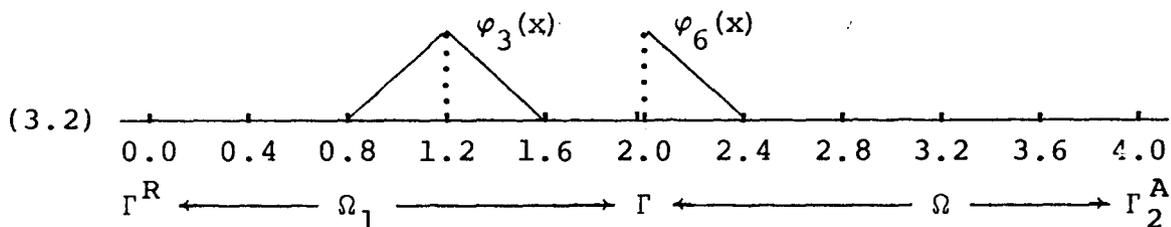
$$(3.1) \quad \Gamma^R = \{0\} - \text{fronteira com a rocha}$$

$$\Gamma_1^A = \phi - \text{fronteira do } 1^\circ \text{ dom\u00ednio com o ar}$$

$$\Gamma_2^A = \{b\} - \text{fronteira do } 2^\circ \text{ dom\u00ednio com o ar}$$

$$\Gamma = \{a\} - \text{interface entre os dom\u00ednios, com } a \text{ e } b \text{ dados acima.}$$

Indicamos, de modo esquem\u00e1tico, os elementos finitos utilizados, destacando que em Γ , a interface, consideramos, na realidade, dois n\u00f3s correspondentes \u00e0 abscissa $x = 2$. O primeiro n\u00f3 \u00e9 aquele em que, pelo modelo, se calcula a temperatura correspondente ao primeiro dom\u00ednio, no segundo tem-se a temperatura aproximada pelo lado do segundo dom\u00ednio. Na not\u00e7\u00e3o usual as temperaturas $u(2^-, t_n)$ e $u(2^+, t_n)$ s\u00e3o aproximadas por $U_5^{(n)}$ e $U_6^{(n)}$ respectivamente:



Na tabela a seguir, apresentamos os resultados de alguns ensaios num\u00e9ricos. Consideramos, nesta simula\u00e7\u00e3o num\u00e9rica, para um intervalo de tempo normalizado, i.e.: $T = 1.0$,

$\alpha(t, u^{(i)}) = \frac{1}{8} u^{(i)}(x, t)$, a difusibilidade no meio i , $i=1,2$;

(3.3) $\gamma(t) = \sqrt{6} \left(1 - \frac{t}{T+1}\right)$, o coeficiente de convecção e

$\theta^A(t) = 2\sqrt{6} \left(1 - \frac{t}{T+1}\right)$, a temperatura ambiente.

Ainda,

$$Q^{(1)}(x, t) = \frac{x(x-6)}{T+1} - \frac{3}{4}(x^2 - 6x + 6) \left(1 - \frac{t}{T+1}\right)^2 \quad e$$

(3.4)

$$Q^{(2)}(x, t) = \frac{2\sqrt{6}}{3} \frac{x(x-5)}{T+1} - \frac{1}{3}(6x^2 - 30x + 25) \left(1 - \frac{t}{T+1}\right)^2$$

respectivamente a geração de calor nos meios indicados pelo índice superior. Estas escolhas se devem a uma tentativa acadêmica de testar o esquema numérico, o que explica o aspecto da difusibilidade, do coeficiente de convecção da temperatura ambiente, além da geração de uma solução $(u^{(1)}(x, t), u^{(2)}(x, t))$, da aplicação do operador diferencial a esta solução para obter $Q^{(1)}$ e $Q^{(2)}$, e da adaptação de α , γ e θ^A para o sistema ter, de fato, a solução proposta. Este processo de simples descrição consistiu-se, na realidade em uma questão funcional trabalhosa...

A tabela a seguir refere-se a cálculos em que a malha de elementos finitos tinha 10 elementos.

Nº de passos no tempo	$\ u - U\ $	$\frac{\ u - U\ }{\ u\ }$	Tempo de CPU
50	3.2×10^{-2}	4.5×10^{-3}	0.55×10^2
100	1.6×10^{-2}	2.2×10^{-3}	1.04×10^2
200	7.0×10^{-3}	9.8×10^{-4}	1.94×10^2
400	2.7×10^{-3}	3.8×10^{-4}	3.87×10^2
800	5.0×10^{-4}	7.0×10^{-5}	7.89×10^2

Nesta esquematização, $\|u - U\|$ indica a norma da diferença entre os vetores $u(x_i, T)$ e $U_i^{(NT)}$, $i=1, \dots, NN$. A norma de $\frac{\|u - U\|}{\|u\|}$ corresponde ao equivalente erro relativo.

Para outra malha de Elementos Finitos (com 16 elementos) foram obtidos os resultados

Nº de passos no tempo	$\ u - U\ $	$\frac{\ u - U\ }{\ u\ }$	Tempo de CPU
25	8.4×10^{-2}	9.3×10^{-3}	0.64×10^2
50	4.1×10^{-2}	4.5×10^{-3}	1.04×10^2
100	1.9×10^{-2}	2.1×10^{-4}	1.93×10^2
200	7.0×10^{-3}	7.8×10^{-4}	3.74×10^2
400	1.2×10^{-3}	1.3×10^{-4}	7.49×10^2

As figuras a seguir permitem visualizar o tipo de transiente térmico calculado, bem como a evolução da temperatura na interface.

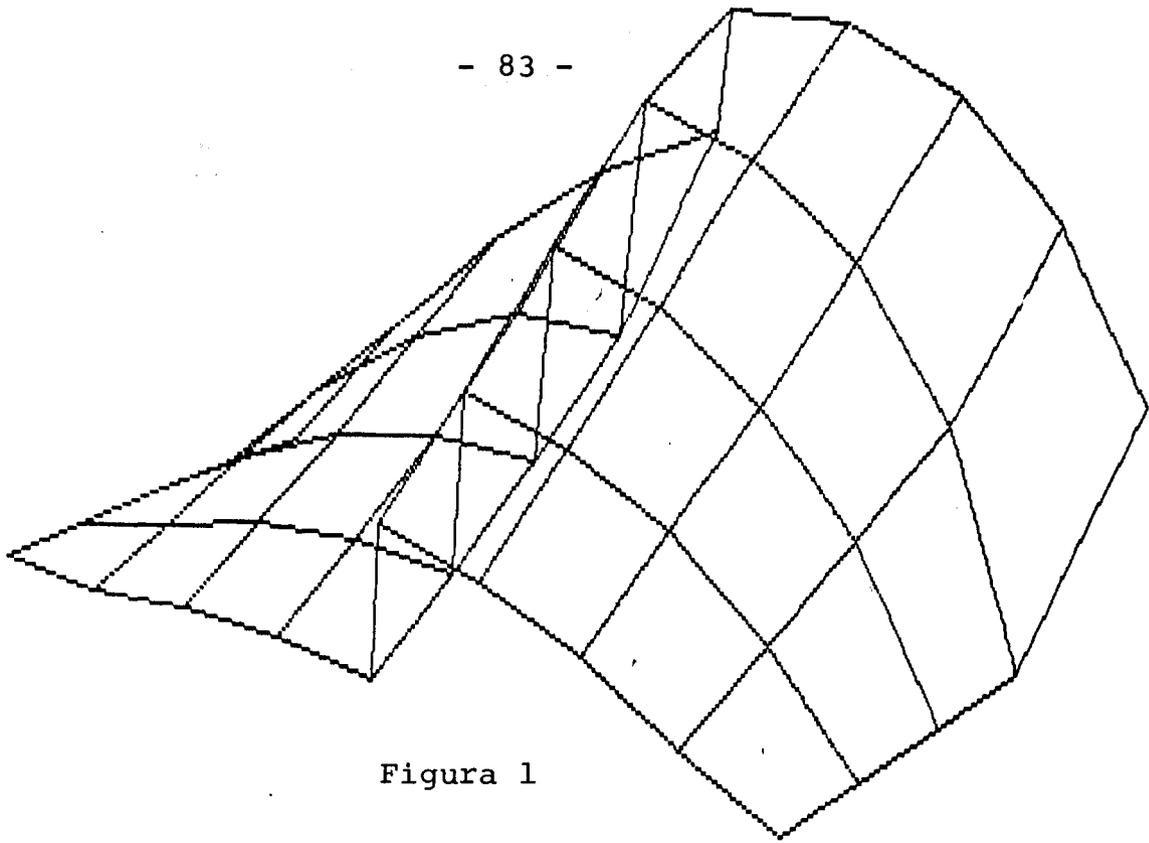


Figura 1

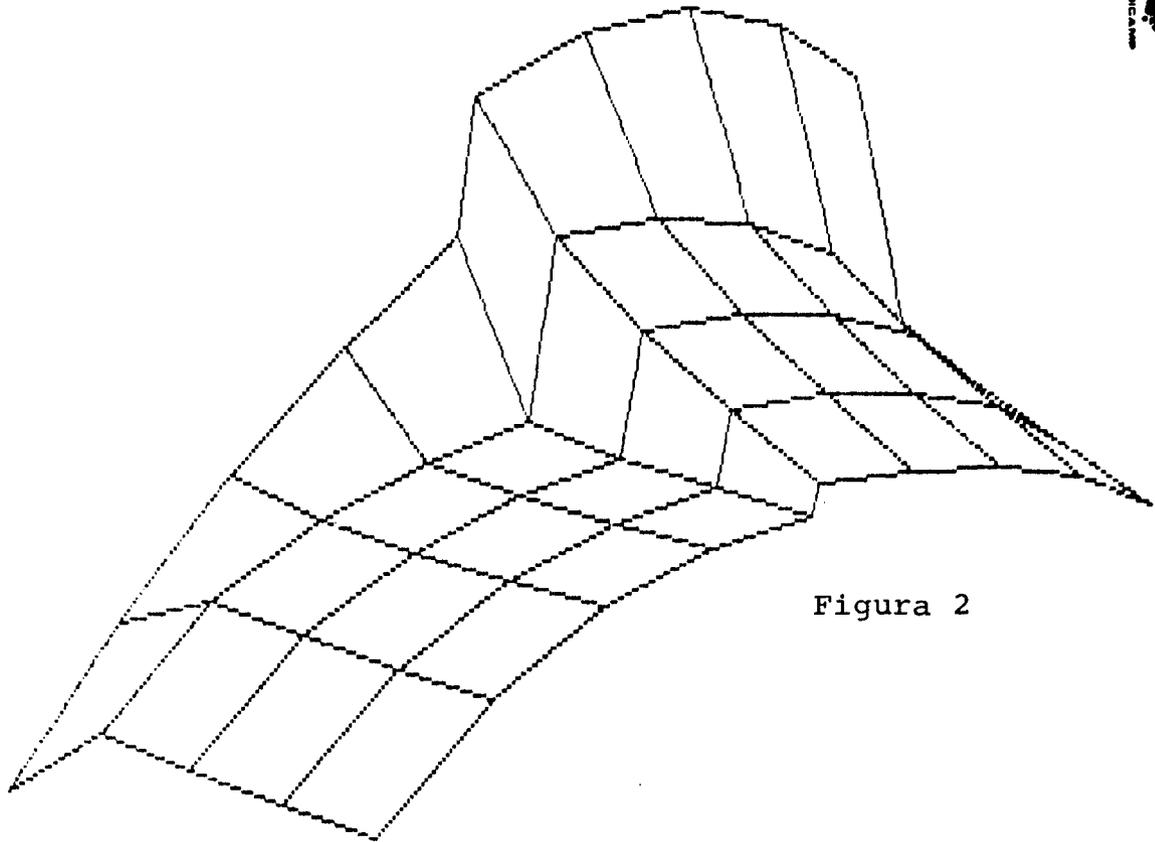


Figura 2



APÊNDICE, 1

Sejam V, W e H os seguintes espaços de Hilbert:

$H = W = L^2(\tilde{\Omega})^{(*)}$ e V tal que $H_0^1(\tilde{\Omega}) \subset V \subset H^1(\tilde{\Omega})$. Teremos, então

$$(A.1) \quad V \subset W \subset H,$$

inclusões estas tanto no sentido algébrico quanto no topológico.

Consideremos uma família de formas bilineares e contínuas sobre V , parametrizadas por $t \in J = [0, T)$ e $w \in W$:

$A(t, w; u, v)$. As dependências em v e t não são necessariamente lineares. Estas formas deverão satisfazer às seguintes condições:

$$(A.2) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Para } u(\cdot, t), v(\cdot, t) \in L^2(J; V) \text{ e} \\ w(\cdot, t) \in L^2(J; W), \text{ a aplicação} \\ t \longrightarrow A(t, w; u, v) \text{ é mensurável.} \end{array} \right.$$

No problema por nós estudado, o operador $A(t, w; u, v)$ tem a forma

$$A(t, w; u, v) + \gamma \langle u, v \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A},$$

sendo A o operador definido anteriormente satisfazendo (A.2).

(*) A escolha de 2 nomes para um mesmo espaço visa tão somente deixar o problema em condições de aplicar diretamente os resultados de Lions, em [30].

Exigimos que, além de (2.3) do capítulo II, isto é, que $\lambda \leq |\alpha(t, w(x, t))| \leq \mu$ para t, x e w arbitrários em seus respectivos domínios, u e v sejam tais que

$$\int_0^T \|u\|_{0, \tilde{\Gamma}^A} \|v\|_{0, \tilde{\Gamma}^A} d\tau \leq M ,$$

isto é, as funções de nosso espaço de trabalho satisfazem $u^{(i)} \in L^2(J, L^2(\tilde{\Gamma}_i^A))$.

Além de (A.2) necessitaremos de

$$(A.3) \left\{ \begin{array}{l} |A(t, w; u, v)| \leq M \|u\| \cdot \|v\| \\ \text{com } M \text{ independente de } t \text{ e de } w. \end{array} \right.$$

Tanto para verificar (A.3) quanto para a seguinte (A.4) , basta recordar (1.3') do Capítulo II.

$$(A.4) \left\{ \begin{array}{l} |A(t, w; v, v)| \geq \lambda \|v\|^2 , \quad \lambda > 0 \\ \text{e } \forall v \in V , \text{ com } w \text{ arbitrário em } W \\ \text{e } \lambda \text{ independente de } w. \end{array} \right.$$

E, finalmente:

$$(A.5) \left\{ \begin{array}{l} \text{se } w_n(t) \longrightarrow w(t) \text{ fortemente de } L^2(J,W), \text{ então} \\ \int_0^t |A(t, w_n(t); u(t), v(t)) - A(t, w(t); u(t), v(t))| dt \rightarrow 0 \\ \text{quando } n \longrightarrow \infty, \\ \text{para } u \text{ fixo em } L^2(J,V) \text{ e uniformemente} \\ \text{para } v \text{ num subconjunto limitado de } L^2(J,V). \end{array} \right.$$

As referências para a verificação desta última hipótese, fornecidas por Lions em [30], são Gagliardo [20], Scorza-Dragoni [41] e Stampacchia [45].

Nestas condições temos então o:

TEOREMA. Supondo válidas as hipóteses (A.1) - (A.5), e supondo também que a inclusão de V em W é compacta, então, para $\gamma \in (0, 1/4)$, existe $u \in L^2((-\infty, T); V)$ com $D_t^\gamma u \in L^2(J; H)$ que é a solução de

$$(A.6) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A(t, u; u, v) + \gamma \langle u, v \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = \\ = (Q, v)_{0, \tilde{\Omega}} + \gamma \langle \theta^A, v \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A}, \\ \text{com } (u, (\cdot, 0), v)_{0, \tilde{\Omega}} = (w_0, v)_{0, \tilde{\Omega}}, \quad \forall v \in V, \end{array} \right.$$

para Q , θ^A e w_0 suficientemente regulares, i.e.:

$Q \in L^2((-\infty, T); H)$ sendo nula para $t < 0$,

$w_0 \in H$ e $\theta^A \in L^2((-\infty, T); L^2(\Gamma^A))$ também nula para

$t < 0$.

A demonstração deste resultado depende de dois outros, intermediários, para os quais fornecemos a referência já citada de Lions [30]:

PROPOSIÇÃO 1. Sejam $V \subset W \subset H$ espaços de Banach com as inclusões algébricas e topológicas. Supondo que a inclusão de V em W é compacta (completamente contínua), então, para todo $\varepsilon > 0$ existe C_ε tal que, para todo $v \in V$, vale:

$$(A.7) \quad \|v\|_W \leq \varepsilon \|v\|_V + C_\varepsilon \|v\|_H$$

PROPOSIÇÃO 2. Ainda nas mesmas hipóteses da Proposição 1, para qualquer $\gamma > 0$, a inclusão de $\mathcal{H}_\gamma((0, T); V, H)$ em $L^2((0, T); W)$ também é compacta contínua.

Com o uso destes resultados temos a demonstração do teorema de existência do final do Capítulo II, seguindo o roteiro ali formulado.

Seja w fixo em $L^2(J;W)$. A função $t \longrightarrow A(t,w;u,v)$ para u e v fixas quaisquer em V é mensurável e verifica as hipóteses de resultados de existência e unicidade de sistemas com operadores lineares (os resultados valem, em geral para operadores sesquilineares), garantindo assim a existência de uma e uma só função $u \in L^2((-\infty, T); V)$, nula para $t < 0$ com

$$(P_w) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{0, \tilde{\Omega}} + A(t, w; u, v) + \gamma \langle u, v \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A} = \\ = (Q, v)_{0, \tilde{\Omega}} + \gamma \langle \theta^A, v \rangle_{0, \tilde{\Gamma}^A}, \\ \text{com } (u(\cdot, 0), v)_{0, \tilde{\Omega}} + (w_0, v)_{0, \tilde{\Omega}}. \end{array} \right.$$

Denotamos por u a restrição desta solução ao intervalo J e temos a pertinência:

$$u \in \mathcal{H}_{\gamma'}(J; V, H) \quad \text{para } 0 < \gamma < 1/4.$$

Fixando $\gamma < 1/4$, definimos uma aplicação X que, a cada w associa a solução u do problema (P_w) , aplicação essa de $L^2(J;W)$ em $\mathcal{H}_{\gamma}(J;V,H)$.

À medida que w percorre o espaço $L^2(J;W)$, as soluções identificadas com $X(w)$ — por força das imposições (A.3) e (A.4) — permanecem num conjunto limitado de

$\mathcal{H}_\gamma(J;V,H)$ e, então, num conjunto limitado de $L^2(J;W)$.

Se $w_n \rightarrow w$ em $L^2(J;W)$, então $w_n = X(w_n) \rightarrow u = X(u)$ em $L^2(J;W)$ porque, de fato, colocando:

$$E_n(n, \varphi) = \int_0^T \{A(t, w_n(\cdot, t); u(\cdot, t), \varphi(\cdot, t)) - (u(\cdot, t), \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t))\} dt ,$$

$$E(u, \varphi) = \int_0^T \{A(t, w(\cdot, t); u(\cdot, t), \varphi(\cdot, t)) - (u(\cdot, t), \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\cdot, t))\} dt ,$$

e

$$L(\varphi) = \int_0^T \{(Q, \varphi(\cdot, t)) + \gamma \langle \theta^A, \varphi(\cdot, t) \rangle\} dt + (w_0, \varphi(\cdot, t)) ,$$

então u_n e u são respectivamente soluções em $F = L^2(J;V)$ de $E_n(u, \varphi) = L(\varphi)$ e $E(u, \varphi) = L(\varphi)$, para φ satisfazendo todo um elenco de condições relacionadas por Lions em [30] ((1.9) e (1.15), cap. IV, §3, além de (1.4), cap. IV, §1).

Teremos então $u_n \rightarrow u$ em $L^2(J;V)$ se pudermos verificar que sendo

$$\begin{aligned} R_n[\varphi] &= E_n(u, \varphi) - E(u, \varphi) = \\ &= \int_0^T \{A(t, w_n(t); u(t), \varphi(t)) - A(t, w(t); u(t), \varphi(t))\} dt, \end{aligned}$$

e se $\frac{|R_n(\varphi)|}{\|\varphi\|} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ então

$$\|R_n\| = \sup \frac{|R_n(\varphi)|}{\|\varphi\|} \longrightarrow 0$$

Ora isto segue da hipótese (A.5) e podemos aplicar à transformação $w \longrightarrow X(w)$ o teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff: existe $w \in L^2(0, T; w)$ tal que $w = X(w)$. Basta chamar esta função de u e temos a solução procurada de (A.6).

APÊNDICE 2

Anexamos o programa utilizado nas simulações numéricas.

Este programa foi executado em FORTRAN 77, estruturado, portanto. Esta é uma das primeiras versões na qual constam, ainda, módulos de impressão de resultados parciais para acompanhamento da execução.

O sistema utilizado foi o VAX-11 do CAPD - UNICAMP.

```
001 C
002 C
003 C          SOB DENOM.: T R Y 0 3 .FOR/ PARA GRANDES NT, P
004 C
005 C          NESTE PROGRAMA, APENAS SAO CONSIDERADAS AS FUNCOES TESTE
006 C          DO SUB-ESPACO DE SOLUCOES, DEIXANDO DE FORA, PORTANTO, A
007 C          FUNCAO TESTE FI-0, DEFINIDA NA ORIGEM. ESTA FIGURA NUM
008 C          PROGRAMA ALTERNATIVO DENOMINADO T R Y 0 2 . FOR
009 C
010 C          PROGRAMA EXECUTADO PARA MALHA DIFERENCIADA: NN=17
011 C
012 C
013 C          PROGRAMA PRINCIPAL
014 C
015 C          IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
016 C          COMMON/DIMEN/TF, TM1, IBW
017 C          COMMON/DISCR/DT, H, RZ6, N1(2), N2(2), NN
018 C          COMMON/TRABA/B(17,17),D(17),X(17),U(17),UNM1(17),TB(17)
019 C          COMMON/RESUL/GRID(501,17)
020 C
021 C
022 C
023 C          DIMENSION ZOPR(17,17), ZSER(17,17), VET(17), A(17,17)
024 C          DIMENSION ZAUX(17,17), V(17), XC(17)
025 C
026 C
027 C
028 C
029 C          NESTE CASO, TF - EXTR. DIREITO DO INTERVALO EM T: 1.000
030 C          TM1 = TF + 1
031 C          YR = 2.*DSQRT(6.0)/3.
032 C          RZ6 = DSQRT(6.0)
033 C
034 C
035 C
036 C          ALF(XE,XU) = XU/8.000
037 C
038 C
039 C          N1(I) & N2(I) - DETERMINAM TERMINANTES DA DISCRETIZACAO DO DOM.
040 C
041 C
042 C          DATA A,B/578*0.000/
043 C          DATA ZOPR,ZSER,ZAUX/867*0.000/
044 C          DATA X0,T0,NN,TF,ND1/2*0.000,17,4.000,8/
045 C
046 C
047 C          TYPE 440
048 C          ACCEPT 450, NT
049 C          440 FORMAT(4X,'ENTRE COM C VALOR DO NO. DE PASSOS NO TEMPO:')
050 C          450 FORMAT(I4)
051 C
052 C
053 C          INTRODUZINDO CONTADOR DE TEMPO, NA VAR. ITA\ITEMP\XTPO
054 C          CALL LIB$INIT_TIMER(ITA)
055 C
056 C
057 C          H = ( 4.000 )/DFLOAT(NN-1)
```

LD3\$MAIN

```
58 C
59 C
60 WRITE(31,1040)
61 WRITE(31,1010)H,T0,TF,NN,NT
62 C
63 C
64 C
65 IBW = 1
66 N1(1) = 1
67 N2(1) = ND1
68 N1(2) = ND1 + 1
69 N2(2) = NN
70 C
71 C
72 RZ6 = DSQRT(6.000)
73 DT = (TF - T0)/DFLOAT(NT)
74 TM1 = TF + 1.000
75 YR = RZ6*2.000/3.000
76 YF = RZ6*H/3.000
77 C
78 WRITE(31,1030)RZ6,DT,TM1,YR,YF
79 C
80 C
81 DO 10 I = N1(1),N2(1)
82 X(I) = I*H
83 U(I) = X(I)*(6.000 - X(I))
84 10 GRID(1,I) = U(I)
85 C
86 DO 20 I = N1(2),N2(2)
87 X(I) = (I-1)*H
88 U(I) = YR*X(I)*(5.000 - X(I))
89 20 GRID(1,I) = U(I)
90 C
91 C
92 WRITE(31,1020)(U(I),I=1,NN)
93 C
94 C
95 MONTAGEM DA PRIMEIRA MATRIZ DE RIGIDEZ: A
96 C
97 C
98 S = H/6.000
99 DO 30 K=1,2
00 DO 30 I=N1(K)+1,N2(K)-1
01 A(I-1,I)=S
02 A(I,I-1)=S
03 30 A(I,I)=4.000*S
04 DO 40 I=1,2
05 A(N2(I)-1,N2(I))=S
06 40 A(N2(I),N2(I)-1)=S
07 S=2.000*S
08 DO 50 I=1,2
09 A(N1(I),N1(I))=S
10 50 A(N2(I),N2(I))=S
11 A(N1(1),N1(1)) = 2.000*S
12 C
13 680 WRITE(31,680)((A(I,J),J=1,NN),I=1,NN)
14 680 FORMAT(/,1X,'MATRIZ A:',(1X,10D12.2,/1X,7D12.2))
15 C
```

Y03\$MAIN

```
15 C
16 C      INICIO DA PARTE A SER ITERADA
17 C
18 C
19 C      TN = T0
20 C      NNT = NT + 1
21 C      DO 1000 LI=1,NT
22 C      TN = T0 + (LI - 1)*DT
23 C      TN1 = TN + DT
24 C      DO 110 I=N1(1),N2(2)
25 C      110 V(I) = U(I)
26 C
27 C
28 C
29 C      CALL MONTAB(V,TN)
30 C      S = RZ6*U(N2(2))*(1.000-(TN+TN1)/(2.000*TM1))
31 C      B(N2(2),N2(2)) = B(N2(2),N2(2)) + S
32 C      DO 120 I=1,NN
33 C      DO 120 J=1,NN
34 C      TS1 = A(I,J)/DT
35 C      TS2 = B(I,J)/2.000
36 C      ZSER(I,J) = TS1 - TS2
37 C      120 ZOPR(I,J) = TS1 + TS2
38 C
39 C
40 C      WRITE(31,681)((ZSER(I,J),J=1,NN),I=1,NN)
41 C      WRITE(31,681)((ZOPR(I,J),J=1,NN),I=1,NN)
42 C      681 FORMAT(//2X,'TESTE IN MAIN:',(//1X,11D11.2))
43 C
44 C
45 C
46 C      CALL MONTAD(TN)
47 C      DO 150 I=1,NN
48 C      S = 0.000
49 C      DO 140 K=1,NN
50 C      140 S = S + ZSER(I,K)*U(K)
51 C      150 TB(I) = S + D(I)
52 C
53 C
54 C      WRITE(31,682)LI,(TB(I),I=1,NN)
55 C      682 FORMAT(///2X,'TERM INDEP. IN MAIN LI:',I4,(//1X,6D14.4))
56 C
57 C
58 C      CALL RESOLU(ZOPR,TB,UNM1)
59 C      DO 160 I=1,NN
60 C      160 V(I) = (U(I) + UNM1(I))/2.000
61 C
62 C
63 C
64 C      CALL MONTAB(V,TN)
65 C      S1 = 1.000 - (TN+TN1)/(2.000*TM1)
66 C      S = RZ6*S1*V(NN)
67 C      B(N2(2),N2(2)) = B(N2(2),N2(2)) + S
68 C
69 C
70 C      WRITE(31,696)((B(I,J),J=1,NN),I=1,NN)
71 C
```

RYD3\$MAIN

```
172 C
173 DO 170 I=1,NN
174 DO 170 J=1,NN
175 TS1 = A(I,J)/DT
176 TS2 = B(I,J)/2.000
177 ZOPR(I,J) = TS1 + TS2
178 170 ZSER(I,J) = TS1 - TS2
179 C
180 C
181 C
182 DO 190 I=1,NN
183 S = 0.000
184 DO 180 K=1,NN
185 180 S = S + ZSER(I,K)*V(K)
186 190 TB(I) = S + D(I)
187 C
188 C
189 C WRITE(31,681)((ZOPR(I,J),J=1,NN),I=1,NN)
190 C WRITE(31,682)(TB(I),I=1,NN)
191 C
192 C
193 C
194 CALL RESOLU(ZOPR,TB,XC)
195 S1 = 0.000
196 S2 = 0.000
197 DO 200 K=1,NN
198 S1 = S1 + (UNM1(K) - XC(K))**2
199 200 S2 = S2 + XC(K)*XC(K)
200 S = DSQRT(S1/S2)
201 IR = LI - (LI/20)*20
202 IF (IR.EQ.0) THEN
203 WRITE(31,690)LI,TN1,S
204 ENDIF
205 690 FORMAT(6X,'PASSO -',I4,' :',D12.5,9X,'NORM.:',D15.6)
206 C WRITE(31,691)(UNM1(K),XC(K),K=1,NN)
207 691 FORMAT(/6X,'PRED.-CORR./COMP.:',(/3X,8D15.5))
208 696 FORMAT(/6X,'VERIF. B:',/, (11D11.3))
209 C
210 C
211 DO 210 I=1,NN
212 GRID(LI+1,I) = XC(I)
213 210 U(I) = XC(I)
214 C
215 C
216 C
217 1000 CONTINUE
218 C
219 C
220 C
221 C
222 C AVALIANDO TEMPO DE CPU, CENTESIMOS DE SEGUNDO: VAR. XTPO
223 CALL LIB$STAT_TIMER(2,ITEMP,ITA)
224 XTPO = DFLOAT(ITEMP)
225 C
226 C
227 WRITE(31,1005)
228 WRITE(31,1050)(UNM1(L),XC(L),L=1,NN)
```

```

29      DO 1003 LI=1,NNT
30      LX = LI - 1
31      IX = LX - (LX/20)*20
32      IF(IX.EQ.0) THEN
33      WRITE(31,1060)LX,(GRID(LI,K),K=1,NN)
34      ENDIF
35      1003  CONTINUE
36      WRITE(31,1080)XTPD
37      1005  FORMAT(////23X,'DENOM.: T R Y 03 - SAIDA ',///1X)
38      1010  FORMAT(///21X,'VERIF. ENTRADA DE DAQOS:',//9X,3D18.6,2I8)
39      1060  FORMAT(/1X,'PAS. - ',I4,5X,5D18.5,/1X,6D18.5,/1X,6D18.5)
40      1020  FORMAT(///1X'TESTE DACOS:',(/5X,6D14.4))
41      1030  FORMAT(/9X,5D15.5)
42      1040  FORMAT(//12X,'TENTATIVAS - T R Y 0 3',30('# '))
43      1050  FORMAT(//5X,'COMP. PRED-CORR:',/(1X,8D15.5))
44      1080  FORMAT(///5X,'TEMPO DE CPU, CENTESIM. DE SEG.:',D13.3,///)
45      C
46      C
47      C
48      CALL EXIT
49      END

```

PROGRAM SECTIONS

NAME	BYTES	ATTRIBUTES							
0) \$CODE	1906	PIC	CON	REL	LCL	SHR	EXE	RD	NOW
1) \$PDATA	374	PIC	CON	REL	LCL	SHR	NOEXE	RD	NOW
2) \$LOCAL	9800	PIC	CON	REL	LCL	NOSHR	NOEXE	RD	W
3) DIMEN	20	PIC	OVR	REL	GBL	SHR	NOEXE	RD	W
4) DISCR	44	PIC	OVR	REL	GBL	SHR	NOEXE	RD	W
5) TRABA	2992	PIC	OVR	REL	GBL	SHR	NOEXE	RD	W
6) RESULT	68136	PIC	OVR	REL	GBL	SHR	NOEXE	RD	W
TOTAL SPACE ALLOCATED		83272							

TRY POINTS

ADDRESS	TYPE	NAME
0-00000000		TRY03\$MAIN

STATEMENT FUNCTIONS

ADDRESS	TYPE	NAME
**	R*8	ALF

01 C
02 C
03 C
04
05 C
06 C
07 C
08 C
09 C
10 C
11 C
12 C
13 C
14 C
15 C
16
17 C
18 C
19
20
21
22
23 C
24 C
25
26
27 C
28
29
30 C
31 C
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

SUBROUTINE MONTAD(TN)

ESTA SUBROTINA EXECUTA O TRABALHO DE "MONTAR", VIA CRANK-NICOLSON (1/2), A PARTE DO VETOR DO TERMO INDEPENDENTE RELATIVA A GERACAO DE CALOR NO DOMINIO. O TERMO INDEPENDENTE DOS SISTEMAS LINEARES A SEREM RESOLVIDOS SERA CONSTRUINDO NO PROGRAMA PRINCIPAL SOMANDO-SE O VETOR CONSTRUIDO NESTE PROCEDIMENTO COM O PRODUTO DE MATRIZES DE TRABALHO DEFINIDAS E OPERADAS NO PROPRIO PROGRAMA PRINCIPAL.

IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

COMMON/DIMEN/TF, TM1, IEW
COMMON/DISCR/DT, H, RZ6, N1(2), N2(2), NN
COMMON/TRABA/B(17,17), D(17), X(17), U(17), UNM1(17), TB(17)
COMMON/RESUL/GRID(501,17)

A Q1(ZX, ZT, ZD) = (ZX*(ZX-6.000)/ZD) - (7.50-1*(ZX*(ZX-6.000)+6.000)*((1.000-ZT/ZD)**2))

B Q2(ZX, ZT, ZD) = (2.000*RZ6*(ZX*(ZX-5.000)/ZD) - (6.000*ZX*(ZX-5.000)+2.50+1)*((1.000-ZT/ZD)**2))/3.000

YF = H/1.20+1
TN1 = TN + DT
NN1 = N1(1)
NN2 = NN1 + 1
X0=0.000
S1=0.0
S2=Q1(X(NN1), TN, TM1)+Q1(X(NN1), TN1, TM1)
S3=Q1(X(NN2), TN, TM1)+Q1(X(NN2), TN1, TM1)
D(NN1) = YF*(S1 + 4.000*S2 + S3)
DO 10 I = NN2, N2(1)-1
X0 = X(I-1)
X1 = X(I)
X2 = X(I+1)
S1 = Q1(X0, TN, TM1) + Q1(X0, TN1, TM1)
S2 = Q1(X1, TN, TM1) + Q1(X1, TN1, TM1)
S3 = Q1(X2, TN, TM1) + Q1(X2, TN1, TM1)
D(I) = YF*(S1 + 4.000*S2 + S3)
NN1 = N2(1) - 1
NN2 = N2(1)
S1 = Q1(X(NN1), TN, TM1) + Q1(X(NN1), TN1, TM1)
S2 = Q1(X(NN2), TN, TM1) + Q1(X(NN2), TN1, TM1)
D(NN2) = YF*(S1 + 2.000*S2)

NN1 = N1(2)
NN2 = NN1 + 1
S1 = Q2(X(NN1), TN, TM1) + Q2(X(NN1), TN1, TM1)

```

0058      S2 = Q2(X(NN2),TN,TM1) + Q2(X(NN2),TN1,TM1)
0059      D(NN1) = YF*( 2.000*S1 +S2 )
0060      C
0061      C
0062      DO 20 I=NN2,N2(2)-1
0063      X0 = X(I-1)
0064      X1 = X(I)
0065      X2 = X(I+1)
0066      S1 = Q2(X0,TN,TM1) + Q2(X0,TN1,TM1)
0067      S2 = Q2(X1,TN,TM1) + Q2(X1,TN1,TM1)
0068      S3 = Q2(X2,TN,TM1) + Q2(X2,TN1,TM1)
0069      20  D(I) = YF*(S1 + 4.000*S2 + S3)
0070      C
0071      NN1 = N2(2) - 1
0072      NN2 = N2(2)
0073      XA = X(NN1)
0074      XB = X(NN2)
0075      S1 = Q2(XA,TN,TM1) + Q2(XA,TN1,TM1)
0076      S2 = Q2(XB,TN,TM1) + Q2(XB,TN1,TM1)
0077      D(NN2) = YF*(S1 + 2.000*S2)
0078      GAM = RZ6*(1.000 - (TN+TN1)/(2.000*TM1))
0079      TET = RZ6*(2.000 - (TN+TN1)/TM1)
0080      D(NN2) = D(NN2) + GAM*TET
0081      C
0082      C
0083      C
0084      C      WRITE(31,230)(D(I),I=1,NN)
0085      230  FORMAT(/1X,'NA S-RTN MONTAD',(/20X,6D14.6))
0086      RETURN
0087      END

```

```
01 C
02 C
03 C
04 C      SUBROUTINE RESOLU(XA,XB,XC)
05 C
06 C
07 C      ESTA SUBROTINA RESOLVE UM SISTEMA AX=B PARA MATRIZES TRIDIA-
08 C      GONAIS COM A DIAGONAL PRINCIPAL DOMINANTE, USANDO, O METODO
09 C      DE GAUSS. ESTA ESCOLHA SE DEVE AO FATO DE SE USAR CADA CADA
10 C      FATORACAO APENAS UMA VEZ: OPTOU-SE PELO METODO DE PROGRAMA-
11 C      CAD MAIS SIMPLES.
12 C
13 C
14 C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
15 C
16 C
17 C      COMMON/DIMEN/TF, TM1, IEW
18 C      COMMON/DISCR/DT, H, RZ6, N1(2), N2(2), NN
19 C      COMMON/TRABA/B(17,17), D(17), X(17), U(17), UNM1(17), TB(17)
20 C      COMMON/RESUL/GRID(501,17)
21 C
22 C      DIMENSION XA(17,17), XB(17), XC(17)
23 C      DO 10 I=1, N2(2)-1
24 C      L = I+1
25 C      S = -XA(L,I)/XA(I,I)
26 C      XA(L,L) = XA(L,L) + S*XA(I,L)
27 C      XB(L) = XB(L) + S*XB(I)
28 C
29 C      TESTE DE SING.
30 C
31 C      P = 1.000
32 C      DO 20 K=1, N2(2)
33 C      P = P*XA(K,K)
34 C      IF(DABS(P).GE.(1.00+10)) P=1.000
35 C      WRITE(31,210)P
36 C
37 C      RESOLU
38 C
39 C      NN = N2(2)
40 C      XC(NN) = XB(NN)/XA(NN,NN)
41 C      DO 30 I=NN-1,1,-1
42 C      XC(I) = (XB(I) - XA(I,I+1)*XC(I+1))/XA(I,I)
43 C
44 C
45 C      210 FORMAT(/17X,'NA S-RTN RESOLU - TESTE DE SINGUL.:',D17.6)
46 C      RETURN
47 C      END
```

REFERÊNCIAS

- [1] ACTON F.S., Numerical Methods that (usually) work. Harper & Row, N. York, 1970.

- [2] ARONSON, D.G., Local Behavior of Solutions of Nonlinear Parabolic Problems Studies in Appl. Math., Nº 5, Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia, pp. 3-8, 1969.

- [3] ARONSON, D.G., Local Behavior of Solutions of Quasilinear Parabolic Systems. Arch. Rational Mech. Anal., 25 (1967), 81-122.

- [4] BLANDFORD, G.E. e TAUCHERT, T.R., Thermoelastic Analysis of Layered Structures with Imperfect Layer Contact. Computers & Structures, Vol. 21, Nº 6, 1283-1291, 1985.

- [5] BROWDER, F.E., Strongly Nonlinear Parabolic Boundary Value Problems. Amer. J. Math., 86 (1964), 339-357.

- [6] CANNON, J.R. e DOUGLAS, J., Jr., The Cauchy Problem for the Heat Equation. SIAM J. Numer. Anal. Vol. 4, Nº 3, September 1967, 317-336.

- [7] CANNON, J.R. e EWING, R.E., A Galerkin Procedure for Systems of Partial Differential Equations. CALCOLO, Vol. 17, fasc. 1 (1980), 1-23.

- [8] CANNON, J.R. e EWING, R.E., Galerkin Procedures for Systems of Parabolic Partial Differential Equations related to the Transmission of Nerve Impulses. Research Notes in Mathematics # 14, ed. por Fitzgibbon e Walker, Pitman, 1977, pp. 24-52.
- [9] CÉA, J., Optimization: Théorie et Algorithmes. DUNOD-Bordas, Paris, 1972.
- [10] CHAVENT, G. e LEMONNIER, P., Identification de la Non-linéarité d'une Équation Parabolique Quasilinéaire. Appl. Math. & Optim., Vol. 1, N^o 2 (1974), 121-162.
- [11] DOUGLAS, J., Jr., Effective Time-Stepping Methods for the Numerical Solution of Nonlinear Parabolic Problems. The Mathematics of Finite Elements and Applications, III MAFELAP, Ac. Press 1979, ed. por J.R. Whiteman.
- [12] DOUGLAS, J., Jr., On the Numerical Integration of $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ by Implicit Methods. J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 3, N^o 1, March 1955, 42-65.
- [13] DOUGLAS, J., Jr., e DUPONT, T., Galerkin Methods for Parabolic Equations. SIAM J. Numer. Anal., Vol. 7, N^o 4, December 1970, 575-626.

- [14] DOUGLAS, J., Jr. e DUPONT, T., Galerkin Methods for Parabolic Equations with Nonlinear Boundary Conditions. Numer. Math. 20 (1973), 213-237.

- [15] DOUGLAS, J., Jr., DUPONT, T. e EWING, R.E., Incomplete Iteration for Time-Stepping a Galerkin Method for a Quasi-linear Parabolic Problem. SIAM J. Numer. Anal., Vol. 16, Nº 3, June 1979, 503-522.

- [16] DOUGLAS, J., Jr., e RACHFORD, H.H., Jr., On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in two and three space variables. Trans. Amer. Math. Soc., 82 (1956), 421-439.

- [17] DUVAUT, G. e LIONS, J.L., Les Inéquations en Mécanique et en Physique. DUNOD, Paris, 1972.

- [18] EVANS, D.J., Alternating Group Explicit Method for the Diffusion Equation. J. Appl. Math. Modelling, 1985, Vol. 9, June, 201-206.

- [19] EWING, R.E., Time-Stepping Galerkin Methods for Nonlinear Sobolev Partial Differential Equation. SIAM J. Numer. Anal., Vol. 15 (1978), Nº 6: 1125-1150.

- [20] GAGLIARDO, E., Teoremi di Esistenza e di Unicità per Problemi al Contorno Relativi ad Equazioni Paraboliche Lineari e Quasi Lineari in n Variabili (citato em [30]). Ric. Mat. 5, 239-257 (1956).
- [21] GLOWINSKI, R., LIONS, J.L. e TREMOLIÈRES, R., Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles. DUNOD-Bordas, Paris, 1976 (2 volumes).
- [22] GLOWINSKI, R., Numerical Methods for Non-linear Variational Problems. Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, N. York, 1984.
- [23] GURTIN, M. e MACCAMY, R.C., On the Diffusion of Biological Populations. Mathematical Biosciences 33, 35-49 (1977).
- [24] JAWORSKI, A.R., Boundary Elements for Heat Conduction in Composite Media. J. Appl. Math. Modelling, Vol. 5 (1981), 45-48.
- [25] JOHN, F., Lectures on Advanced Numerical Analysis. Gordon & Breach, N. York, 1967.
- [26] LADYZHENSKAYA, O.A. e URAL'TSEVA, N.N., Local Estimates for Gradients of Solutions on Non-Uniformly Elliptic and Parabolic Equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 23, 677-703 (1970).

- [27] LANCHON, H., MAKAYA, B., MIRGAUX, A. e SAINT-JEAN PAULIN, J., A Mathematical Study to obtain Quantitative Effects of Roughness in Technical Problem. WEAR, 109 (1986), 99-111.
- [28] LI, Y.Y. e CHEN, Y., An Addendum to "A Numerical Method in Solving a Coupled Thermoelasticity Equation and some Results". Journal of Thermal Stresses, 7: 175-182, 1984.
- [29] LIONS, J.L., Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles. DUNOD/Gauthiers - Villars, Paris, 1968.
- [30] LIONS, J.L., Équations Différentielles Operationelles et Problèmes aux Limites. Springer-Verlag, Berlin, 1961.
- [31] LIONS, J.L., Quelques Méthodes de Résolution de Problèmes aux Limites Non Linéaires. DUNOD-Gauthiers-Villars, Paris, 1969.
- [32] MAKAYA, E., Influence de l'État de Rugosité une Interface Solide-Solide sur la Transmission de la Chaleur d'un Milieu a un autre Thèse: Docteur 3^{ième} Cycle. Institut Nationale Polytechnique de Lorraine, Nancy, 1983.

- [33] MEYER, J.F.C.A., Estimativas a priori na Aproximação de um Problema Não Linear. Anais do X CNMAC, Brasília, 1986, pp. 145-150.
- [34] MOURA, C.A. e FEIJÃO, R.A., An Uncoupling Strategy for Numerically solving the Dynamic Thermoelasticity Equation. Rev. Bras. Ciências Mecânicas, vol. 3, 41-47, 1981.
- [35] MOURA, C.A., RAUPP, M.A. e BARBETTA, J.C., Numerical Study of an Equation related to Wave Propagation. Bol.Soc. Bras. Mat., Vol. 10, Nº 1 (1979), pp.57-69.
- [36] MOURA, C.A., RAUPP, M.A. e KRITZ, M., Tópicos em Matemática Aplicada. 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, M.G., 1979.
- [37] NODA, N., Transient Thermoelastic Contact Problem in a Cylinder with a Position-Dependent Heat Transfer Coefficient. Journal of Thermal Stresses, 10: 57-69, 1987.
- [38] PARDO, E., SARMIENTO, G.S., LAURA, P.A.A. e GUTIERREZ, R. H., Analytic Solution for Unsteady Thermal Stresses in an Infinite Cylinder Composed of two Materials. Journal of Thermal Stresses, 10: 29-43, 1987.

- [39] PEACEMAN, D.W. e RACHFORD, H.H., Jr., The Numerical Solutions of Parabolic and Elliptic Differential Equations. J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 3, N° 1, 1955: 28-41.
- [40] RACHFORD, H.H., Jr., Two-Level Discrete-Time Galerkin Approximations for Second Order Non-Linear Parabolic Partial Differential Equations. SIAM J. Numer. Anal., Vol. 10, N° 6, December 1973, 1010-1026.
- [41] SCORZA-DRAGONI, G., Un Teorema sulle Funzioni Continue Rispetto ad una e Misurabile ad un'altra Variabile (citando em [30]). Rend. Sem. Mat. Padova 17, 102-106, 1948.
- [42] SINGH, M.P. e HELLER, R.A., Random Thermal Stress in Concrete Containments. Journal of the Structural Division Proc. ASCE, Vol. 106, 1481-1489, 1980.
- [43] SGALLIARI, F., A Weak Formulation of Boundary Integral Equations for Time Dependent Parabolic Problems. J. Appl. Math. Modelling, 1985, Vol. 9 August 295-301.
- [44] SIVAKUMERAN, K.S. e DILGER, W.H., Analysis of Concrete Structures Subjected to Sustained Temperature Gradients. Can. J. Civ. Eng., Vol. 11, 1984: 404-410.

- [45] STAMPACCHIA, G. (citado em [30]), Sopra una Classe di Funzioni in n Variabili. Ric. Mat. 1, 27-54 (1952).
- [46] TAGLIATELLA, E.P. e ECKSCHMIDT, H.R., O Controle das Tensões Térmicas em Concreto Massa de Grandes Barragens pelo Método de Elementos Finitos e suas Repercussões sobre as Modernas Tecnologias de Construção. Colóquio Paraguayo-Brasileiro sobre Tecnologia de Concreto Massa, Asunción, Paraguay, 1974.
-
- [47] WILSON, E.L., The Determination of Temperatures within Mass Concrete Structures. Report N^o 68-17, Structural Engineering Laboratory, University of California, Stanford, Dec. 1968.
- [48] WINGET, J.M. e HUGHES, T.J.R., Solution Algorithms for Nonlinear Transient Heat Conduction Analysis Employing Element-by-Element Iterative Strategies. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 52 (1985), 711-815.
- [49] ZLAMAL, M., Finite Element Methods in Heat Conduction. The Mathematics of Finite Elements and Applications, II (Proc. Second Brunel Univ. Conf. Inst. Math. Appl., Uxbridge, (1975), pp. 85-104, Academic Press, London, 1976.
- [50] ZLAMAL, M., Finite Elements for Parabolic Equations. Math. Comp. 28 (1974) 126, 393-404.