

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - IMECC
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O problema de Cauchy para a equação de Schrödinger não-linear não-local

Tese de Doutorado

Roger Peres de Moura

Orientador: Prof. Dr. Jaime Angulo Pava

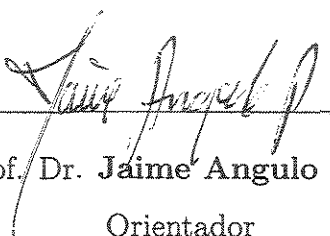
Campinas

Fevereiro, 2005

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO-LINEAR NÃO-LOCAL

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Roger Peres de Moura** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de fevereiro de 2005.


Prof. Dr. **Jaime Angulo Pava**
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. **Jaime Angulo Pava** IMECC - UNICAMP
2. Prof^a. Dra. **Marcia Assumpção Guimarães Scialom** IMECC - UNICAMP
3. Prof. Dr. **Aloisio José Freiria Neves** IMECC - UNICAMP
4. Prof. Dr. **José Felipe Linares Ramirez** IMPA
5. Prof. Dr. **Orlando Francisco Lopes** IMECC - UNICAMP

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção de Título de Doutor em Matemática.

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	+1/UNICAMP
	M865p
V	EX
TOMBO BC/	63397
PROC.	16-00086-05
C	☐
D	☒
PREÇO	11,00
DATA	26-04-05
Nº CPD	

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

BIB 1D-347732 Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues - CRB8a / 2116

Moura, Roger Peres de

M865p O problema de Cauchy para a equação de Schrödinger não-linear não-local / Roger Peres de Moura – Campinas, [S.P.:s.n.], 2005.

Orientador: Jaime Angulo Pava

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Schrödinger, Equações de. 2. Cauchy, Problemas de.
3. Equações Diferenciais Parciais. I. Angulo Pava, Jaime.
- II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: The Cauchy problem for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation.

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Schrödinger equation. 2. Cauchy problems. 3. Partial differential equations.

Área de concentração: Equações diferenciais parciais

Titulação: Doutor em matemática

- Banca examinadora:
1. Prof. Dr. Jaime Angulo Pava (UNICAMP)
 2. Profa. Dra. Márcia Assumpção Guimarães Scialon (UNICAMP)
 3. Prof. Dr. Aloísio José Freiria Neves (UNICAMP)
 4. Prof. Dr. José Felipe Linares Ramirez (IMPA-RJ)
 5. Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes (UNICAMP)

Data da defesa: 28/02/2005

Tese de Doutorado defendida em 28 de fevereiro de 2005 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



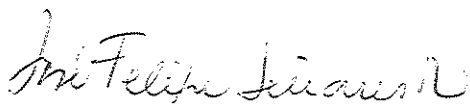
Prof. (a). Dr (a). JAIME ANGULO PAVA



Prof. (a). Dr (a). MARCIA ASSUMPTÃO GUIMARÃES SCIALOM



Prof. (a). Dr (a). ALOISIO JOSÉ FREIRIA NEVES



Prof. (a). Dr (a). JOSÉ FELIPE LINARES RAMIREZ



Prof. (a) Dr. (a) ORLANDO FRANCISCO LOPES

220508756

*À memória da Prof.^a
Hebe de Azevedo Biagioni
e de meus pais,
Cinéas Peres da Silva
e Maria dos Anjos Moura Campelo*

Agradecimentos

O presente trabalho só foi possível graças ao apoio de algumas instituições e ao estímulo de algumas pessoas a quem devo uma palavra de reconhecimento: Dentre todas elas, seja-me permitido revelar, antes de mais, meu orientador, Jaime Angulo Pava, cujos preciosos ensinamentos, incentivos, sugestões e críticas marcaram decisivamente estas páginas.

Aos professores Hebe A. Biagioni (em memória), José Felipe Linares Ramirez (também pelas inestimáveis sugestões) e Márcia A. G. Scialom, que juntamente com meu orientador, contribuíram na minha preparação para desenvolver esse trabalho.

Aos membros da banca examinadora, pelas críticas e sugestões após leitura detalhada e investigativa da primeira versão, que certamente enriqueceram esta versão final.

Aos professores responsáveis por minha formação básica, da UFV e da UNICAMP, em especial ao prof. Olimpio Hiroshi Miyagaki, meu orientador de iniciação científica, pelo constante incentivo, exemplo de vida e dedicação profissional a ser seguido.

Aos amigos prof. recém-doutores Xavier Carvajal, Mahendra Panthee, Borys Alvarez e Adán Corcho, pelas importantes sugestões e observações, além das muitas interações que esclareceram várias de minhas dúvidas.

Aos colegas Amauri Barros, Luciana Mendonça e Lynnyngs Kelly, pelo companheirismo acadêmico e sincera amizade. A Ricardo Menezes, Rogério Casagrande, Weber, Mercio Botelho e demais colegas que me ajudaram no preparo deste trabalho, instalando em meu computador os programas necessários e auxiliando-me na confecção das figuras e gráficos. Também aos muitos outros amigos que aqui fiz, pelos momentos de descontração, pela troca de idéias e saudável convívio.

Ao CNPq pelos quatro anos de generoso apoio financeiro, e ao IMECC-UNICAMP por ter-me incluindo entre seus discentes com todos os benefícios e estrutura possíveis. Gostaria também de registrar meu profundo agradecimento e homenagem a todos os idealizadores das teorias de que fiz uso aqui.

A todos aqueles que nos momentos mais difíceis de minha vida me ofereceram abrigo e/ou ajuda financeira, permitindo assim, que eu continuasse a estudar: os amigos Marcos Silva e Nídia Barros, Luiz Costa e Francisca Chagas, Luiz Carlos e Lúcia, Walter Eclache (e demais amigos de Viçosa); meus avós, meus tios Josimar, Assunção, Francisca e Maria de Jesus Campelo. Também agradeço ao Instituto Adventista de Ensino do Nordeste (IAENE) juntamente com os professores e funcionários da época em que lá estudei, pelos mesmos motivos acima.

Finalmente, gostaria de expressar minha gratidão a meus pais (em memória), pelo amor e educação que deles recebi, apesar do pouco tempo que tivemos.

Resumo

Neste trabalho estabelecemos algumas propriedades da equação de Schrödinger não-linear não-local (NLSNL), em especial as relacionadas ao problema de Cauchy. Primeiramente fizemos um capítulo preliminar de notações e teoria básica utilizada no estabelecimento dos resultados; essa parte também visa facilitar a leitura do trabalho. Em seguida apresentamos o principal resultado: boa colocação local para o problema de valor inicial (problema de Cauchy) associado à equação NLSNL para dados iniciais pequenos nos espaços de Sobolev reais usuais de ordem maior que três meios; o método permite estabelecer que a aplicação dado inicial-solução é suave. No capítulo seguinte provamos o mesmo resultado para a equação de Schrödinger não-linear não-local intermediária (INLSNL), a qual é mais geral que a outra. Depois estabelecemos boa colocação para a equação NLSNL em espaços de Sobolev com peso. Em outro capítulo apresentamos um resultado de má colocação: estabelecemos que não se pode obter boa colocação local, em espaços de Sobolev de índice negativo, para o PVI associado à equação NLSNL por meio de método iterativo de Picard; como consequência, a aplicação dado-solução não é suave nesses espaços. Provamos também, fazendo uso de uma identidade de Pohozaev, a não-existência de soluções standing waves para a equação NLS não-local. Finalizamos com um capítulo onde exibimos alguns problemas interessantes relacionados principalmente à equação NLSNL e algumas possíveis dificuldades a serem enfrentadas em uma eventual tentativa de solucioná-los.

Abstract

In this work we establish some properties of the *nonlocal nonlinear Schrödinger equation* (NLSNL). First of all, we present a preliminary chapter with notations and basic theory used to establish our results; that part also seeks to facilitate the reading of this work. Soon afterwards comes the main result: local well-posedness for the initial value problem (the Cauchy problem or IVP) for the NLSNL equation with initial data in real Sobolev spaces of index larger than three and a half; the method of proof allows to establish that the data-solution map is smooth. In the following chapter we proved that previous result for the intermediate nonlocal nonlinear Schrödinger (INLSNL), which is more general than the NLSNL equation. After that we establish local well-posedness for the NLSNL equation in weighted Sobolev spaces. In another chapter the ill-posedness issue is discussed: we established that one cannot obtain local well-posedness, in Sobolev spaces of negative index, for the IVP associated to NLSNL equation through a iterative Picard method; as a consequence, the data-solution map is not smooth in those spaces. We also proved, making use of a Pohozaev's identity, the no-existence of standing waves solutions for the NLSNL equation. We concluded with a chapter where we exhibited some interesting problems mainly related to the NLSNL equation and possible difficulties to be faced in an eventual attempt of solving them.

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1 PRELIMINARES	7
1.1 Principais Notações	7
1.2 Algumas estimativas e teoremas importantes	8
2 BOA COLOCAÇÃO LOCAL PARA A EQUAÇÃO NLS NÃO-LOCAL	12
2.1 Estimativas Lineares	13
2.2 Demonstração do Teorema 2.1	16
3 BOA COLOCAÇÃO LOCAL PARA A EQUAÇÃO INLS NÃO-LOCAL	32
4 O PROBLEMA LOCAL COM PESO PARA A EQUAÇÃO NLS NÃO-LOCAL	39
4.1 Resultados Preliminares.	40
4.2 Demonstração do Teorema 4.2.	46
5 MÁ COLOCAÇÃO	49
5.1 Má Colocação para o PVI associado à equação NLS não-local.	50
5.1.1 Prova do Teorema 5.1.	51
5.1.2 Prova da Proposição 5.2.	52
5.2 Má Colocação para o PVI associado à equação INLS não-local.	60
6 NÃO-EXISTÊNCIA DE STANDING WAVES	67

7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75

Introdução

Desde a década de 1960 muitos pesquisadores têm se dedicado ao estudo do problema de auto-modulação de ondas não-lineares de pequena amplitude. A equação de Schrödinger não linear cúbica (NLS cúbica)

$$\partial_t u = i\partial_x^2 u + i\gamma|u|^2 u, \quad (1)$$

$u = u(x, t)$ é função complexa, $x, t, \gamma \in \mathbb{R}$, é um modelo universal para a descrição da evolução de pacotes de ondas longas. Mas um importante caso, quando temos pacotes de ondas entre dois fluidos de densidades e profundidades diferentes, conhecido como limite *raso-fundo* (*shallow-deep*) (ou seja, quando a profundidade superior é rasa e a de baixo é grande se comparadas com o comprimento do pacote de ondas) não é modelado pela NLS cúbica. Dessa forma, surge o problema de deduzir um tipo de equação NLS mais universal, que modele pacotes de ondas quasi-harmônicas. D. Pelinovsky, em [28] deu o primeiro passo para resolvê-lo, obtendo a equação

$$i\partial_t u = \partial_x^2 u + iu(1 - iT_h)\partial_x(|u|^2), \quad x, t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

onde $u = u(x, t)$ é uma função complexa que representa o invólucro das ondas, T_h é um operador pseudo-diferencial definido por

$$T_h f(x) = \frac{1}{2h} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi(y-x)}{2h}\right) f(y) dy, \quad (3)$$

com *p.v.* a denotar o valor principal da integral e $h > 0$ denota um parâmetro proporcional à profundidade do fluido.

A equação (2) governa a evolução de ondas de primeira ordem no limite raso-fundo. Tal equação é não-local e é denominada equação intermediária NLS não-local (INLSNL). Intermediária porque quando a profundidade é pequena, i.e. $h \rightarrow 0$, a equação (2) reduz-se à seguinte equação NLS defocusing,

$$i\partial_t u = \partial_x^2 u - \tilde{u}(|\tilde{u}|^2 - \rho^2), \quad \tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}), \quad (4)$$

após redefinir x, t e u conforme a relação $x = \sqrt{h}\tilde{x}$, $t = h\tilde{t}$ e $u(x, t) = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})$, respectivamente, onde foi usado a expansão $\mathcal{T}\partial_x f = -h^{-1}f + O(h)$ juntamente com a condição de fronteira $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = \rho$; enquanto em grandes profundidades ($h \rightarrow \infty$) a equação (2) transforma-se na equação NLS não-local

$$i\partial_t u = \partial_x^2 u + u(i + \mathcal{H})\partial_x(|u|^2), \quad x, t \in \mathbb{R} \quad (5)$$

(consulte [22]) onde $\mathcal{H}$ é a transformada de Hilbert, i.e.,

$$\mathcal{H}u(x, t) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y, t)}{y - x} dy. \quad (6)$$

Também em [28] foi mostrado que a equação INLS é integrável. Sua teoria de espalhamento inverso foi construída em [30].

Mas a equação INLS não descreve efeitos de segunda ordem na expansão de ondas e esses têm influência na expansão de ondas internas. Mais tarde D. Pelinovsky e R. H. J. Grimshaw (veja [29]) resolveram de uma vez por todas esse problema: levando em conta tais efeitos de segunda ordem, eles deduziram uma equação de evolução universal do tipo NLS no limite shallow-deep de um fluido contínuo estratificado - ou seja, com pelo menos duas camadas de densidades diferentes). A equação obtida por eles é a seguinte:

$$i\partial_t u = \alpha \partial_x^2 u + \beta u(i + \mathcal{T}_h)\partial_x(|u|^2) - \gamma |u|^2 u, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

onde os coeficientes α , β e γ são positivos e são expressados pelo parâmetro de estratificação do fluido (para maiores esclarecimentos consulte Apêndice A de [29]). Note que para $\gamma \rightarrow 0$ a equação (7) transforma-se na equação INLS (2), enquanto para $\beta \rightarrow 0$, ela transforma-se na conhecida equação NLS cúbica (1).

Nosso objetivo principal é estabelecer algumas propriedades relacionadas a boa colocação local para o problema de valor inicial (PVI) associado à equação (7) tanto no limite $h \longrightarrow \infty$, a saber,

$$i\partial_t u = \alpha \partial_x^2 u + \beta u (i + \mathcal{H}) \partial_x (|u|^2) - \gamma |u|^2 u, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

como para $0 < h < \infty$. Além disso, investigamos a existência de soluções de tipo ondas viajantes, conhecidas como *stading waves*, quando $h \longrightarrow \infty$.

Antes de nossa abordagem na tese de doutorado, somente propriedades tais como, obtenção de soluções multi-periódicas e multi-soliton, estabilidade linear de soluções de tipo ondas solitárias dark, geração de dark soliton, o problema linear espectral, soluções assintóticas e o problema de Cauchy via espalhamento inverso, para a equação (8) (principalmente com $\gamma = 0$) tinham sido estudadas, especialmente por Y. Matsuno (veja [21, 22, 23] e referências relacionadas).

É importante registrarmos que a estrutura da equação (8) é similar à da equação

$$i\partial_t v = \partial_x^2 v - \frac{1}{4}|v|^4 v + v\mathcal{H}\partial_x(|v|^2) - \gamma|v|^2 v, \quad (9)$$

que é obtida por meio de uma mudança de variável, da seguinte maneira: Seja u uma solução de (8) suficiente suavidade em x e t , e integrabilidade em relação a x , e considere, sem perda de generalidade (veja [23], equação (2.32)), $\alpha = \beta = \gamma = 1$ (tomar $\gamma = 1$ ou $\gamma \neq 1$ não altera em nada os cálculos). Seja

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^x |u(y, t)|^2 dy \quad (10)$$

e defina (mudança gauge)

$$v = e^{\frac{i}{2}\rho} u. \quad (11)$$

Veja que $|v| = |u|$ e $e^{\frac{i}{2}\rho} \partial_x u = \partial_x v - \frac{i}{2}|v|^2 v$. Da equação (8) segue-se que,

$$\partial_t |u|^2 = -2\partial_x \text{Im}(u\partial_x \bar{u}) + \partial_x (|u|^4),$$

e assim,

$$i\partial_t \rho - \partial_x^2 \rho = -2v\partial_x \bar{v}; \quad (12)$$

daí, encontramos a equação (9) calculando $i\partial_t v - \partial_x^2 v$ por meio das expressões (12) e (11) aplicadas à equação (8), como segue:

$$\begin{aligned} i\partial_t v - \partial_x^2 v &= i\partial_t(e^{i\frac{1}{2}\rho}u) - \partial_x^2(e^{i\frac{1}{2}\rho}u) \\ &= iv\partial_x(|v|^2) + v\mathcal{H}\partial_x(|v|^2) - |v|^2v - iv^2\partial_x\bar{v} - i|v|^2\partial_x v - \frac{1}{4}|v|^4v \\ &= v\mathcal{H}\partial_x(|v|^2) - |v|^2v - \frac{1}{4}|v|^4v. \end{aligned}$$

Inversamente, se v satisfaz a equação (9) então

$$u = e^{-\frac{i}{2}\rho}v \quad (\text{com } \rho(x, t) = \int_{-\infty}^x |v(y, t)|^2 dy),$$

satisfaz a equação (8). Logo, as equações (8) e (9) são ditas *gauge* equivalentes. Para mais detalhes sobre equações gauge equivalentes consulte [4], [27] e referências aí contidas. Notemos que os cálculos acima não nos impedem de aplicar a mudança de variável (11) à equação intermediária (7) com $\alpha = \beta = 1$, ou seja, a equação (7), com $\alpha = \beta = 1$, é *gauge* equivalente à seguinte equação:

$$i\partial_t v = \partial_x^2 v - \frac{1}{4}|v|^4v + v\mathcal{T}_h\partial_x(|v|^2) - \gamma|v|^2v. \quad (13)$$

Mesmo ainda acompanhada da “incômoda” não-linearidade não-local, a equação (9) é interessante porque por meio dela fica mais fácil enxergar algumas propriedades do modelo original; por exemplo, ela nos possibilitou provar a não-existência de soluções de tipo *standing waves*; também foi possível encontrarmos a seguinte quantidade conservada,

$$E(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \{|\partial_x v|^2 + \frac{1}{12}|v|^6 + \gamma|v|^4 - \frac{1}{2}|v|^2\mathcal{H}\partial_x(|v|^2)\}dx$$

sugerindo que o problema pode ser globalmente bem posto em $H^1(\mathbb{R})$. Como, a exemplo do seu irmão $\mathcal{H}\partial_x$, o operador $\mathcal{T}_h\partial_x$ é simétrico sobre seu domínio em $L^2(\mathbb{R})$, podemos provar também que o funcional

$$\tilde{E}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \{|\partial_x v|^2 + \frac{1}{12}|v|^6 + \gamma|v|^4 - \frac{1}{2}|v|^2\mathcal{T}_h\partial_x(|v|^2)\}dx$$

é uma quantidade conservada para a equação (13).

O trabalho é organizado da seguinte forma: O primeiro capítulo é dedicado às notações usuais, definições dos espaços funcionais e operadores sobre esses espaços junto com suas propriedades, a serem utilizadas no decorrer do trabalho. No capítulo 2 provamos que o PVI associado à equação (8), com dado inicial suficientemente pequeno e em $H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$, é localmente bem posto, onde por boa postura (ou boa colocação) significamos existência, unicidade, persistência (a solução $u(t)$ descreve uma curva continua no mesmo espaço do dado inicial) e dependência contínua da solução em relação ao dado inicial. Nossas principais ferramentas serão os efeitos suavizantes, as estimativas para a função maximal nas normas $L_x^2 L_T^\infty$ e $L_x^4 L_T^\infty$ e uma estimativa de tipo Strichartz, para o grupo $\{e^{it\partial_x^2}\}_{t=-\infty}^\infty$ (consulte os artigos [13], [16], [17] e [36]). O resultado abrange o interessante caso $\gamma = 0$. Nosso procedimento é parecido (porém bem mais abrangente) ao adotado por C. Kenig, G. Ponce e L. Vega no artigo [13], onde eles provaram um resultado análogo para o PVI associado à equação

$$\partial_t u = i\Delta u + P(u, \nabla_x u, \bar{u}, \nabla_x \bar{u}), \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

com $P : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ polinomial, sem termos constantes nem lineares e $\nabla_x u = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u)$, parados iniciais pequenos em $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq \frac{7}{2}$. O principal obstáculo a ser superado é reverter a perda de derivadas acarretada pelos termos $u\partial_x(|u|^2)$ e $u\mathcal{H}\partial_x(|u|^2)$, já que o método depende exclusivamente de propriedades do grupo unitário e de estimativas de efeito suavizante (pois, como vê-se acima, não fomos bem sucedidos em eliminar a perda de regularidade no termo com transformada de Hilbert via *transformação gauge* ou outra maneira qualquer) aplicado diretamente sobre a equação integral

$$u(t) = e^{-it\partial_x^2} \phi + \int_0^t e^{-i(t-\tau)\partial_x^2} (\beta u(1 - i\mathcal{H})\partial_x(|u|^2) + i\gamma|u|^2 u)(\tau) d\tau. \quad (15)$$

Seguindo os mesmos passos da boa colocação do PVI para a equação (8), no Capítulo 3 logramos estender aquele resultado para o PVI associado à equação (7), ou seja, provamos que o PVI para a equação (7), com dado suficientemente pequeno, é também localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$. Além das ferramentas utilizadas no Capítulo 2, foi de suma importância a seguinte estimativa de comutadores em $L^2(\mathbb{R})$ para o operador $T_h \partial_x$:

$$\|[\mathcal{T}_h \partial_x, f]g\| \leq C|f'|_\infty \|g\|, \text{ para } f \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ (com } f' \in L^\infty(\mathbb{R})) \text{ e } g \in L^2(\mathbb{R}).$$

A equação (7) possui um termo não-linear com um operador integral singular mais complicado que a transformada de Hilbert, dificultando mais ainda a prova de boa colocação para dados em espaços de Sobolev de índice baixo. No capítulo 4 estudamos o comportamento assintótico em relação à variável espacial da solução garantida no Capítulo 2 para a equação (8). Tal estudo é inspirado nos trabalhos de T. Kato, R. Iorio e D. F. Rial (consulte [32] e referências). O capítulo seguinte é dedicado a mostrar que não se pode aplicar um método iterativo de Picard à equação integral associada (15) e também à equação integral associada ao PVI para a equação (7) (para os casos $\gamma > 0$ e $\gamma = 0$) para dados em espaços de Sobolev usuais $H^s(\mathbb{R})$, $s < 0$, o qual garante-nos que a aplicação dado-fluxo não é de classe C^3 em $H^s(\mathbb{R})$ se $s < 0$. A prova é por absurdo: o passo fundamental é exibir uma função em $H^s(\mathbb{R})$ que não satisfaz uma desigualdade indispensável na hora de fazer estimativas para provar que a aplicação dado-solução é C^3 -diferenciável. No Capítulo 6 provamos a não-existência de soluções de tipo *standing waves*, isto é, $u(x, t) = e^{i\omega t}\varphi(x)$ com φ suave satisfazendo propriedades de decaimento da forma $|x|\varphi^{(n)}(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$, para a equação (8), com $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma \geq 0$ arbitrário. Não há perda de generalidade em se considerar $\alpha = \beta = 1$ (veja [23] e referências relacionadas). A prova é feita por meio da equação gauge-equivalente (9). A idéia é obter uma identidade de Pohozaev e com ela chegarmos a uma contradição. Finalizamos com um capítulo onde apresentamos e comentamos fatos que julgamos relevantes para eventuais tentativas de melhora dos resultados aqui expostos e de obtenção de outros.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Esta parte tem como principal função apresentar as notações a serem utilizadas. Também exibiremos alguns resultados básicos (omitiremos as demonstrações) amplamente divulgados (e conseqüentemente amplamente conhecidos) para facilitar a leitura do nosso trabalho.

1.1 Principais Notações

Dada uma função complexa f , sua parte real será denotada por $\Re f$ e a imaginária por $\Im f$.

Denotamos a transformada de Fourier de uma função u com relação à variável espacial x por $\mathcal{F}\{u\}$ ou simplesmente por $\hat{u}$. Dado $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos a norma de $L^p(\mathbb{R})$ por $|\cdot|_p$; para a norma $L^2(\mathbb{R})$ usaremos a notação $\|\cdot\|$, ou então $\|\cdot\|_0$. Para $1 \leq p, q < \infty$ definimos o espaço de Banach

$$L_x^p L_T^q \equiv \{f : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L_x^p L_T^q} < \infty\} \quad (1.1)$$

onde

$$\|f\|_{L_x^p L_T^q} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^T |f(x, t)|^q dt \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}.$$

Quando a notação for $L_x^p L_t^q$ (observe que agora o t é minúsculo) significa que a integral em relação a t é de $-\infty$ a $+\infty$. $\|f\|_{L_t^q L_x^p}$ é definido de maneira similar, e quando $p = \infty$ ou $q = \infty$, $\|f\|_{L_x^p L_t^q}$ é definido da forma natural.

Dados X, Y espaços de Banach, $B(X, Y)$ representará o espaço dos operadores lineares limitados de X em Y , $B(X)$ será o espaço dos operadores lineares limitados de X em X . $C^k(X, Y)$ denotará o espaço das aplicações de X em Y com k derivadas contínuas, enquanto que $C_w^k(X, Y)$ será a notação para as aplicações com k derivadas fracamente contínuas.

Por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ significamos o espaço de Schwartz em $\mathbb{R}$, e $C_c^\infty(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f \text{ tem suporte compacto}\}$. J^s representará o potencial de Bessel, $J^s = (1 - \partial_x^2)^{s/2}$, e D_x^s representará o potencial de Riesz, $D_x^s = (-\partial_x^2)^{s/2}$.

Denotamos por $H^s(\mathbb{R})$ o espaço de Sobolev usual (de tipo $L^2(\mathbb{R})$) de ordem s , com norma

$$\|f\|_s := \|J^s f\|_0 = \|J^s f\|.$$

O comutador de um operador K será denotado por

$$[K, u]v := K(uv) - uK(v).$$

Sejam C, D constantes positivas arbitrárias. Por $C \lesssim D$ (resp. $C \gtrsim D$) significamos que existe uma constante $c > 0$ tal que $C \leq cD$ (resp. $C \geq cD$). Denotamos $C \lesssim D \lesssim C$ por $C \sim D$.

Dada uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sua medida será denotada por $|\Omega|$.

1.2 Algumas estimativas e teoremas importantes

Começamos listando a desigualdade de Minkowski para integrais, a qual estabelece que a norma L^p de uma “soma” é a “soma” das normas L^p :

LEMA 1.1 . Se $1 \leq p < \infty$ e $F(x, y)$ é mensurável no espaço produto de medida σ -finito

$X \times Y$, então

$$\left(\int_Y \left| \int_X f(x, y) dx \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_X \left(\int_Y |f(x, y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} dx,$$

ou seja,

$$\left\| \int_X f(x, \cdot) dx \right\|_{L^p(Y)} \leq \int_X \|f(x, \cdot)\|_{L^p(Y)} dx.$$

Demonstração. Veja o Teorema (6.19) de [9]. ■

Também é de suma importância para o desenvolvimento do nosso trabalho o seguinte lema de imersão de Sobolev:

LEMA 1.2 *Se $s > \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ com $p > 2$, então $H^s(\mathbb{R})$ está continuamente imerso em $L^p(\mathbb{R})$. Este resultado é ainda válido no caso extremo $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$, se $p < \infty$.*

Demonstração. Veja, por exemplo, Teorema 3.13 de [19]. ■

A seguir apresentamos uma importante versão vetorial do conhecido fato de que a transformada de Hilbert é um operador limitado nos espaços L^p , para $1 < p < \infty$.

LEMA 1.3 *Seja $\mathcal{H}$ a transformada de Hilbert na variável espacial x e sejam $1 < p, q < \infty$. Então $\mathcal{H} \in B(L^p(\mathbb{R}))$, além disso, para $f \in L_x^p L_T^q$ temos,*

$$\|\mathcal{H}f\|_{L_x^p L_T^q} \leq C(p, q) \|f\|_{L_x^p L_T^q}. \quad (1.2)$$

Demonstração. Como a prova deste fato é uma consequência de alguns resultados que se encontram dispersos pelo livro [35] (ou no livro [33], entre outros), optamos por executá-la aqui. A transformada de Hilbert é definida por

$$\mathcal{H}f(x, t) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y, t)}{y - x} dy \equiv \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|y-x|>\epsilon} \frac{f(y, t)}{y - x} dy. \quad (1.3)$$

Seja K_ϵ o operador integral singular definido por

$$K_\epsilon g(x) = \int_{|y-x|>\epsilon} \frac{g(y)}{|y-x|} dy.$$

Pelo teorema de Calderón-Zygmund (veja por exemplo, Teorema 4.3 de [33]) temos que, para qualquer $\epsilon > 0$,

$$\|K_\epsilon g\|_{L_x^p} \leq c_p \|g\|_{L_x^p}, \quad (1.4)$$

onde c_p não depende de ϵ .

Pela definição acima junto com a desigualdade de Minkowski (Lema 1.1) e a desigualdade (1.4) (com $g(x) = \left(\int_0^T |f(x, t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$) obtemos:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}f\|_{L_x^p L_T^q} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^T \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|y-x|>\epsilon} \frac{f(y, t)}{y-x} dy \right|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|y-x|>\epsilon} \frac{\left(\int_0^T |f(y, t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}}{|y-x|} dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^T |f(y, t)|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_x^p L_T^q} \quad (1.5)
\end{aligned}$$

onde, para chegarmos à última expressão aplicamos o teorema de Calderón-Zygmund (veja por exemplo, Teorema 4.3 de [33]). ■

A estimativa abaixo, deduzida em [34] é indispensável para a demonstração do Teorema 2.1.

LEMA 1.4 *Sejam $s > 1$, $\gamma > \frac{1}{2}$ números reais e $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então, existe $c = c(\gamma, s) > 0$ tal que,*

$$\|[D^s, u]v\|_0 \leq c \{ \|u\|_s \|v\|_\gamma + \|u\|_{\gamma+1} \|v\|_{s-1} \}.$$

Em [15] (Teorema A.12, Teorema A.8 e Teorema A.13, respectivamente) foram estabelecidas as seguintes estimativas para derivadas fracionárias:

LEMA 1.5 *Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \alpha]$ com $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Então:*

(i) *Dado $1 < p < \infty$, vale,*

$$\|D_x^\alpha(fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f\|_{L_x^p} \leq c \|g\|_{L_x^\infty} \|D_x^\alpha f\|_{L_x^p}.$$

(ii) *Para $p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \in (1, \infty)$, com $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, temos*

$$\|D_x^\alpha(fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f\|_{L_x^p L_T^q} \leq c \|D_x^{\alpha_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\alpha_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}.$$

Além disso, para $\alpha_1 = 0$ o valor $q_1 = \infty$ pode ser assumido.

(iii) Se $p_1, p_2, q_1, q_2 \in (1, \infty)$, com $1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ e $\frac{1}{2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, temos

$$\|D_x^\alpha(fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f\|_{L_x^1 L_T^2} \leq c \|D_x^{\alpha_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\alpha_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}.$$

Para a obtenção de um de nossos resultados vamos utilizar a seguinte versão do Teorema da Função Implícita retirada de [18]:

LEMA 1.6 *Sejam $U \subset E$, $V \subset F$ abertos (E e F espaços de Banach) e $f : U \times V \rightarrow G$ uma aplicação de classe C^k . Considere $(a, b) \in U \times V$ e assumamos que $D_2 f(a, b) : F \rightarrow G$ é um isomorfismo. Se $f(a, b) = 0$, então existe uma aplicação contínua $g : U_0 \rightarrow V$, onde $U_0 \subset U$ é uma vizinhança aberta de a , tal que, $g(a) = b$ e $f(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in U_0$. Além disso, se U_0 é uma bola suficientemente pequena, então g é determinada de maneira única e é de classe C^k .*

O resultado abaixo provado por G. Ponce em [31] (Proposição 2.3) será empregado no estudo do comportamento assintótico em relação à variável espacial da solução do problema de Cauchy associado à equação (8).

LEMA 1.7 *Seja $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ não-decrescente tal que, $\frac{d}{dx}\psi \equiv 1$ e $\text{supp} \frac{d}{dx}\psi \subseteq (-1, 2)$ e, para qualquer $j \in \mathbb{Z}$, $\psi_j(\cdot) = \psi(\cdot - j)$. Se $s \geq 0$, então existe $c = c(s) > 0$ tal que para qualquer $f \in H^s(\mathbb{R})$*

$$c^{-1} \|f\|_s \leq \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \|f \psi_j'\|_s^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \|f\|_s.$$

Essa desigualdade é ainda válida se trocamos ψ_j' por $\psi_j^{(k)}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$.

Capítulo 2

BOA COLOCAÇÃO LOCAL PARA A EQUAÇÃO NLS NÃO-LOCAL

Neste capítulo temos como objetivo provar um resultado de boa colocação local para o problema de valor inicial (PVI) associado à equação (8), com dado inicial suficientemente pequeno. Sem perda de generalidade, vamos considerar em todo o capítulo, $\alpha = \beta = \gamma = 1$; portanto, o PVI a ser estudado é o seguinte:

$$\begin{cases} i\partial_t u = \partial_x^2 u + iu(1 - i\mathcal{H})\partial_x(|u|^2) - |u|^2 u, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \phi(x). \end{cases} \quad (2.1)$$

O teorema é o seguinte:

TEOREMA 2.1. *Existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer $\phi \in H^s(\mathbb{R})$ com $s > \frac{3}{2}$ e $\|\phi\|_s < \delta$, existe uma única solução u para o PVI (2.1) no intervalo de tempo $[0, T]$, $T = T(\|\phi\|_s) > 0$ com $T(\theta) \rightarrow \infty$ quando $\theta \rightarrow 0$, satisfazendo*

$$u \in Z_{s,T} \equiv \{v \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) : \Lambda_T(v) < \infty\},$$

com

$$\Lambda_T(u) = \max\{\lambda_T^i(u) \equiv \lambda_i(u); i = 1, 2, 3, 4\}, \quad (2.2)$$

onde

$$\lambda_1(u) := \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_s,$$

$$\lambda_2(u) := \|D_x^{s+\frac{1}{2}}u\|_{L_x^\infty L_T^2},$$

$$\lambda_3(u) := (1+T)^{-1} \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty},$$

$$\lambda_4(u) := \|D_x^{\frac{1}{2}}u\|_{L_x^6 L_T^6} + \|D_x^s u\|_{L_x^6 L_T^6}.$$

Além disso, para qualquer $T' \in (0, T)$ existe $\epsilon > 0$ tal que a aplicação $\varphi \rightarrow w$ de $\{\varphi \in H^s(\mathbb{R}); \|\varphi - \phi\|_s < \epsilon\}$ em $Z_{s,T}$ é Lipschitz.

Observemos que $Z_{s,T}$ é um espaço métrico completo.

Para provar o Teorema 2.1 são necessárias algumas propriedades do problema linear associado, já largamente conhecidas, que foram deduzidas por C. Kenig, G. Ponce e L. Vega em [16] (consulte também as seções 2 e 3 de [13]).

2.1 Estimativas Lineares

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u = \partial_x^2 u, & u = u(x, t), \quad x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \phi(x). \end{cases} \quad (2.3)$$

Sua solução é descrita pelo grupo unitário $\{e^{-it\partial_x^2}\}_{t=-\infty}^\infty$, que a título de simplificação, vamos denotar por $\{U(t)\}_{t=-\infty}^\infty$, ou seja,

$$u(t) = U(t)\phi = \int_{-\infty}^\infty e^{i(t\xi^2 + x\xi)} \hat{\phi}(\xi) d\xi. \quad (2.4)$$

LEMA 2.2 (caso homogêneo). Se u satisfaz (2.4) então,

$$\left\| D_x^{\frac{1}{2}} U(t)\phi(x) \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c \|\phi\|. \quad (2.5)$$

Sua versão dual é,

$$\left\| D_x^{\frac{1}{2}} \int_0^T U(-\tau) f(\cdot, \tau) d\tau \right\| \leq c \|f\|_{L_x^1 L_T^2}. \quad (2.6)$$

Observemos que, para $t \in [0, T]$, (2.6) implica que

$$\left\| D_x^{\frac{1}{2}} \int_0^T U(t-\tau) f(\cdot, \tau) d\tau \right\| \leq c \|f\|_{L_x^1 L_T^2}. \quad (2.7)$$

Em [13] foi estabelecida uma versão não-homogênea para (2.5), que agora mencionamos.

LEMA 2.3 . *Considere o PVI*

$$\begin{cases} i\partial_t u = \partial_x^2 u + F(x, t), & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

com $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Se $u(x, t)$ é a solução do PVI (2.8), então

$$\|\partial_x u(x, t)\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c \|F\|_{L_x^1 L_t^2}. \quad (2.9)$$

Em [14] foi provado o seguinte resultado de L^2 -continuidade para a função maximal $\sup_{[0, T]} |U(t) \cdot|$:

LEMA 2.4 . *Para qualquer $r > 1/2$ e qualquer $\rho > 1/4$,*

$$\|U(t)\phi\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq c(1+T)^\rho \|\phi\|_r. \quad (2.10)$$

A seguinte estimativa *sharp*, que é uma versão de (2.10), foi estabelecida por Kenig e Ruiz em [17]:

LEMA 2.5

$$\|U(t)\phi\|_{L_x^4 L_T^\infty} \leq c \|D_x^{1/4} \phi\|. \quad (2.11)$$

Como consequência do Lema 2.2 (desigualdade (2.5)) e da estimativa (2.11) temos o seguinte resultado, que é indispensável para a demonstração do Teorema 2.1.

LEMA 2.6 *Se $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, então*

$$\|U(t)\phi\|_{L_x^6 L_t^6} \leq c \|\phi\|. \quad (2.12)$$

Demonstração. Considere a família analítica de operadores

$$A_z \phi = D_x^{\frac{1}{2}} D_x^{-\frac{3}{4}z} U(t) \phi, \quad \text{com } z \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1.$$

Para $z = i\theta$, temos

$$A_{i\theta} \phi = D_x^{\frac{1}{2}} U(t) D_x^{-\frac{3}{4}i\theta} \phi.$$

Então, do Lema 2.2 (estimativa (2.5)) segue-se que,

$$\|A_{i\theta} \phi\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c \|D_x^{-\frac{3}{4}i\theta} \phi\| = \|\phi\|.$$

Quando $z = 1 + i\theta$,

$$A_{1+i\theta} \phi = D_x^{-\frac{1}{4}} U(t) D_x^{-\frac{3}{4}i\theta} \phi,$$

logo, segue da estimativa (2.11) que,

$$\|A_{1+i\theta} \phi\|_{L_x^4 L_t^\infty} \leq c \|\phi\|.$$

Assim, usando o Teorema de interpolação analítica de Stein (veja [35]) chega-se à estimativa,

$$\|U(t) \phi\|_{L_x^p L_t^q} \leq c \|\phi\|,$$

com

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\rho}{\infty} + \frac{\rho}{4} = \frac{\rho}{4} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\rho}{2} + \frac{\rho}{\infty} = \frac{1-\rho}{2}, \quad \rho = \operatorname{Re} z.$$

Para chegarmos ao resultado esperado, devemos tomar $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z = 0$, ou seja, $z = \frac{2}{3} = \operatorname{Re} z = \rho$. Assim, $p = q = 6$. ■

OBSERVAÇÃO 1. Há uma versão mais abrangente do Lema 2.6 que foi estabelecida por R. S. Strichartz em [36] que é provada de modo diferente do apresentado acima: *O grupo $\{e^{it\Delta}\}_{t=-\infty}^{\infty}$ satisfaz,*

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L_t^q L_x^p} \leq c \|f\|,$$

com

$$2 \leq p < \frac{2n}{n-2} \quad \text{se } n \geq 3,$$

$$2 \leq p < \infty \quad \text{se } n = 2,$$

$$2 \leq p \leq \infty \quad \text{se } n = 1,$$

e

$$\frac{2}{q} = \frac{n}{2} - \frac{n}{p},$$

onde $c = c(p, n)$ é uma constante que depende de p e n .

2.2 Demonstração do Teorema 2.1

Dado $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, denotemos por $\Phi(v) = \Phi_\phi(v)$ a solução do problema linear não-homogêneo

$$\begin{cases} i\partial_t u = \partial_x^2 u + iv(1 - i\mathcal{H})\partial_x(|v|^2) - |v|^2 v, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \phi(x), \end{cases} \quad (2.13)$$

onde

$$v \in Z_T^a = \{v : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \mid \Lambda_T(v) \leq a\}.$$

Provaremos que para um determinado a e um T adequado, se $v \in Z_T^a$ então $u = \Phi_\phi(v) = \Phi(v)$ definido por

$$\Phi(v)(t) = U(t)\phi + \int_0^t U(t-\tau)[v\partial_x(|v|^2) - iv\mathcal{H}\partial_x(|v|^2) + i|v|^2 v](\tau)d\tau \quad (2.14)$$

pertence a Z_T^a e $\Phi : Z_T^a \rightarrow Z_T^a$ é uma contração.

Iniciamos estimando a norma H^s de $u = \Phi(v)$: Fazendo uso das propriedades do grupo $\{U(t)\}_{t=-\infty}^\infty$ e das desigualdades de Hölder e Minkowski sobre a equação integral (2.14) chegamos à seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_s &\lesssim \|\phi\|_s + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(i|v|^2 v + v\partial_x(|v|^2) - iv\mathcal{H}(v\partial_x \bar{v}))(\tau)d\tau \right\| \\ &\quad + \left\| D_x^s \int_0^t U(t-\tau)(i|v|^2 v + v\partial_x(|v|^2) - iv\mathcal{H}(v\partial_x \bar{v}))(\tau)d\tau \right\| \\ &\lesssim \|\phi\|_s + T \sup_{[0, T]} \|v(t)\|_s^3 + \left\| D_x^s \int_0^t U(t-\tau)(v\partial_x(|v|^2))(\tau)d\tau \right\| \\ &\quad + \left\| D_x^s \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{H}(v\partial_x \bar{v}))(\tau)d\tau \right\| + \left\| D_x^s \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{H}(\bar{v}\partial_x v))(\tau)d\tau \right\|. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Salientamos que é suficiente estimarmos o último termo do lado direito da desigualdade (2.15), porque os demais podem ser controlados exatamente do mesmo modo. Estimamo-lo por meio dos Lemas 1.3, 1.4, 2.2, 1.5 e das desigualdades de Hölder e Minkowski como segue:

Com o uso dos Lemas 1.2, 1.3, 1.4, 2.2 e da desigualdade de Minkowski (ver Lema 1.1) obtemos,

$$\begin{aligned}
& \left\| D_x^s \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{H}(\bar{v}\partial_x v))(\tau)d\tau \right\| \\
& \leq \left\| \int_0^t U(t-\tau)([D_x^s, v]\mathcal{H}(\bar{v}\partial_x v))(\tau)d\tau \right\| + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{H}D_x^s(\bar{v}\partial_x v))(\tau)d\tau \right\| \\
& \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{H}([D_x^s, \bar{v}]\partial_x v))(\tau)d\tau \right\| \\
& \quad + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s\partial_x v))(\tau)d\tau \right\| \\
& \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_2^3 + T \sup_{[0,T]} (\|v\|_{L_x^\infty} \|\mathcal{H}([D_x^s, \bar{v}]\partial_x v)\|) + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(v\partial_x \mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v))(\tau)d\tau \right\| \\
& \quad + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{H}(\partial_x \bar{v}D_x^s v))(\tau)d\tau \right\| \\
& \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 + T \sup_{[0,T]} (\|v\|_{L_x^\infty} \|[D_x^s, \bar{v}]\partial_x v\|) + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(v\partial_x \mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v))(\tau)d\tau \right\| \\
& \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(\partial_x v\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v))(\tau)d\tau \right\| \\
& \quad + \left\| \int_0^t U(t-\tau)\partial_x(v\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v))(\tau)d\tau \right\| \\
& \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 + \|D_x^{\frac{1}{2}}(v\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v))\|_{L_x^1 L_T^2}. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Para estimar o termo $\|D_x^{\frac{1}{2}}(v\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v))\|_{L_x^1 L_T^2}$, aplicamos primeiramente o Lema 1.5 (iii), tomando $p_1 = 4$, $p_2 = \frac{4}{3}$, $q_1 = q_2 = 4$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
\left\| D_x^{\frac{1}{2}}(v\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v)) \right\|_{L_x^1 L_T^2} & \lesssim \left\| D_x^{\frac{1}{2}}(v\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v)) - D_x^{\frac{1}{2}}v\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v) - vD_x^{\frac{1}{2}}\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v) \right\|_{L_x^1 L_T^2} \\
& \quad + \left\| D_x^{\frac{1}{2}}v\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v) \right\|_{L_x^1 L_T^2} + \left\| vD_x^{\frac{1}{2}}\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v) \right\|_{L_x^1 L_T^2} \\
& \lesssim \|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^4 L_T^4} \|\bar{v}D_x^s v\|_{L_x^{4/3} L_T^4} + \left\| D_x^{\frac{1}{2}}v\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v) \right\|_{L_x^1 L_T^2} + \left\| vD_x^{\frac{1}{2}}\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v) \right\|_{L_x^1 L_T^2}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Observemos que, pelas desigualdades de Cauchy-Schwartz e de Minkowski,

$$\begin{aligned}
\|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^4L_T^4} &\lesssim \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^T |D_x^{\frac{1}{2}}v|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |D_x^{\frac{1}{2}}v|^6 dt \right)^{\frac{1}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{4}} \\
&\lesssim \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T |D_x^{\frac{1}{2}}v|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{8}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T |D_x^{\frac{1}{2}}v|^6 dt \right)^{\frac{1}{8}} \\
&\lesssim T^{\frac{1}{8}} \|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^6L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder em relação à variável t (com $p = \infty$), depois a mesma desigualdade em relação à variável x (com $p = \frac{3}{2}$ e $q = 3$) e em seguida usando a estimativa (2.18) com o operador D_x^s no lugar de $D_x^{\frac{1}{2}}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|\bar{v}D_x^s v\|_{L_x^{\frac{4}{3}}L_T^4} &\leq \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \|v\|_{L_T^\infty}^{\frac{4}{3}} \left(\int_0^T |D_x^s v|^4 dt \right)^{\frac{1}{3}} dx \right\}^{\frac{3}{4}} \\
&\lesssim \|v\|_{L_x^2L_T^\infty} \|D_x^s v\|_{L_x^4L_T^4} \\
&\lesssim T^{\frac{1}{8}} \|v\|_{L_x^2L_T^\infty} \|D_x^s v\|_{L_x^6L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}};
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz em relação à variável t , em seguida aplicando a desigualdade de Hölder em relação à variável x (com $p = 4$ e $q = \frac{4}{3}$) e depois as estimativas (2.18) e (2.19), segue que

$$\begin{aligned}
\left\| D_x^{\frac{1}{2}}v \mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v) \right\|_{L_x^1L_T^2} &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |D_x^{\frac{1}{2}}v|^4 dt \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T |\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v)|^4 dt \right)^{\frac{1}{4}} dx \\
&\lesssim \|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^4L_T^4} \|\bar{v}D_x^s v\|_{L_x^{\frac{4}{3}}L_T^4} \\
&\lesssim T^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^6L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|v\|_{L_x^2L_T^\infty} \|D_x^s v\|_{L_x^6L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Para o termo que falta aplicamos primeiro a desigualdade de Hölder com relação a t , com $p = \infty$, depois a desigualdade de Cauchy-Schwartz em relação a x , para em seguida utilizarmos o Lema 1.5 (ii) com $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 4$ junto com a desigualdade de Hölder em relação a x (com $p = \infty$) e depois a estimativa (2.18):

$$\begin{aligned}
\left\| v D_x^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}(\bar{v} D_x^s v) \right\|_{L_x^1 L_T^2} &\leq \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}}(\bar{v} D_x^s v)\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\lesssim \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\{ \|D_x^{\frac{1}{2}}(\bar{v} D_x^s v) - D_x^{\frac{1}{2}} \bar{v} D_x^s v - \bar{v} D_x^{s+\frac{1}{2}} v\|_{L_x^2 L_T^2} \right\} \\
&\quad + \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\{ \|D_x^{\frac{1}{2}} \bar{v} D_x^s v\|_{L_x^2 L_T^2} + \|\bar{v} D_x^{s+\frac{1}{2}} v\|_{L_x^2 L_T^2} \right\} \\
&\lesssim \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\{ \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_x^4 L_T^4} \|D_x^s v\|_{L_x^4 L_T^4} + \|\bar{v} D_x^{s+\frac{1}{2}} v\|_{L_x^2 L_T^2} \right\} \\
&\lesssim T^{\frac{1}{4}} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_x^{\frac{3}{2}} L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{2}} + \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \|D_x^{s+\frac{1}{2}} v\|_{L_x^\infty L_T^2}. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Daí, aplicando (2.17)-(2.21) sobre a desigualdade (2.16), chega-se à seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\left\| D_x^s \int_0^t U(t-\tau) (v \mathcal{H}(\bar{v} \partial_x v))(\tau) d\tau \right\| &\lesssim T^{\frac{1}{4}} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_x^{\frac{3}{2}} L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 + \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \|D_x^{s+\frac{1}{2}} v\|_{L_x^\infty L_T^2} \equiv E_1 \quad (2.22)
\end{aligned}$$

e assim,

$$\left\| D_x^s \int_0^t U(t-\tau) (v \mathcal{H} \partial_x (|v|^2))(\tau) d\tau \right\| \lesssim E_1. \quad (2.23)$$

O quarto termo do lado direito de (2.15) pode ser estimado exatamente como o termo envolvendo transformada de Hilbert, portanto

$$\left\| D_x^s \int_0^t U(t-\tau) (v \partial_x (|v|^2))(\cdot, \tau) d\tau \right\| \lesssim E_1. \quad (2.24)$$

O terceiro termo do lado direito de (2.15) não oferece qualquer obstáculo: é imediato que

$$\left\| D_x^s \int_0^t U(t-\tau) (|v|^2 v)(\tau) d\tau \right\| \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_2^3. \quad (2.25)$$

Aplicando as estimativas (2.16)-(2.25) em (2.15) e tomando o supremo em $[0, T]$, segue-se que

$$\lambda_1(u) \lesssim \|\phi\|_s + E_1. \quad (2.26)$$

Combinando o efeito regularizante (2.5) com a equação integral (2.14), mais o Lema 1.3 e as estimativas (2.22)-(2.25), chegamos que

$$\begin{aligned}
\lambda_2(u) &\lesssim \|\phi\|_s + \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau) (|v|^2 v)(\tau) d\tau \right\| + \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau) (v \partial_x (|v|^2))(\tau) d\tau \right\| \\
&\quad + \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau) (v \mathcal{H} \partial_x (|v|^2))(\tau) d\tau \right\| \lesssim \|\phi\|_s + E_1. \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Para avaliar $\lambda_3(u)$ vamos aplicar a estimativa (2.10) para a função maximal $\sup_{[0,T]} |U(t) \cdot |$ (tomando, no Lema 2.4, $\rho = 1$ e $r = s - 1$) à equação integral (2.14) como segue:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\lesssim (1+T) \left\{ \|\phi\|_s + \left\| \int_0^t U(-\tau)(|v|^2 v)(\tau) d\tau \right\|_{s-1} \right. \\
&\quad \left. + \left\| \int_0^t U(-\tau)(v \partial_x(|v|^2))(\tau) d\tau \right\|_{s-1} + \left\| \int_0^t U(-\tau)(v \mathcal{H} \partial_x(|v|^2))(\tau) d\tau \right\|_{s-1} \right\} \\
&\lesssim (1+T) \{ \|\phi\|_s + T \sup_{[0,T]} (\| |v|^2 v \|_{s-1} + \| v \partial_x(|v|^2) \|_{s-1} + \| v \mathcal{H} \partial_x(|v|^2) \|_{s-1}) \} \\
&\lesssim (1+T) \{ \|\phi\|_s + T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 \}, \tag{2.28}
\end{aligned}$$

onde nos valem também do fato de $H^{s-1}(\mathbb{R})$ ser uma álgebra de Banach, pois $s-1 > \frac{1}{2}$. Assim, segue de (2.28) que,

$$\lambda_3(u) \lesssim \|\phi\|_s + T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3. \tag{2.29}$$

Finalmente, falta estimar somente $\lambda_4(u)$. A aplicação dos lemas 2.2 e 2.6 à equação integral (2.14) juntamente com as desigualdades envolvidas na estimativa de $\lambda_1(u)$, resulta na seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\lambda_4(u) &= \|D_x^{\frac{1}{2}} u\|_{L_x^6 L_T^6} + \|D_x^s u\|_{L_x^6 L_T^6} \\
&\lesssim \|\phi\|_s + \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \int_0^t U(-\tau)(i|v|^2 v + v \partial_x(|v|^2) - i v \mathcal{H} \partial_x(|v|^2))(\tau) d\tau \right\| \\
&\quad + \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau)(i|v|^2 v + v \partial_x(|v|^2) - i v \mathcal{H} \partial_x(|v|^2))(\tau) d\tau \right\| \\
&\lesssim \|\phi\|_s + E_1. \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Portanto, pelas desigualdades (2.26), (2.27), (2.29) e (2.30), vemos que $\Lambda_T(v)$ satisfaz,

$$\Lambda_T(u) \leq c \|\phi\|_s + c(1+T)^2 (\Lambda_T(v))^3, \tag{2.31}$$

onde $\|\phi\|_s < \delta$ (a ser determinado), e a constante $c > 1$ depende da estrutura da parte não-linear da equação e das estimativas lineares (2.5), (2.6), (2.9) e (2.10). Desejamos $\Lambda_T(u) \leq a$, o que nos motiva a escolher um $a = a(\|\phi\|_s) > 0$ de forma que

$$a \in (2c \|\phi\|_s, 4c \|\phi\|_s), \tag{2.32}$$

pois queremos $c \|\phi\|_s \leq a/2$. Agora, como devemos ter

$$c(1+T)^2 (\Lambda_T(v))^3 \leq \frac{a}{2},$$

e esta desigualdade, junto com os cálculos a serem efetuados para a obtenção da propriedade de contração, sugerem-nos escolher um T arbitrário de modo que

$$4c(1+T)^2(4c\|\phi\|_s)^2 \leq \frac{1}{2}. \quad (2.33)$$

Fixemos então um δ tal que

$$\sqrt{2}(4c)^{\frac{3}{2}}\delta = 1.$$

Logo, para $\|\phi\|_s < \delta$, fixando um a como em (2.32) e um T como em (2.33) segue que $u = \Phi_\phi(v) \in Z_T^a$ para $v \in Z_T^a$.

Para provar que Φ é uma contração, a idéia é seguir o mesmo raciocínio que nos levou a obtermos as estimativas acima, fazendo uso dos mesmos recursos. Consideremos a seguinte equação integral:

$$\begin{aligned} \Phi(v) - \Phi(v_1) &= u(t) - u_1(t) \\ &= \int_0^t U(t-\tau) [i|v|^2v - i|v_1|^2v_1 + |v|^2\partial_x v - |v_1|^2\partial_x v_1 + v^2\partial_x \bar{v} - v_1^2\partial_x \bar{v}_1] d\tau \\ &\quad - i \int_0^t U(t-\tau) [v\mathcal{H}(\partial_x v\bar{v}) - v_1\mathcal{H}(\partial_x v_1\bar{v}_1) + v\mathcal{H}(v\partial_x \bar{v}) - v_1\mathcal{H}(v_1\partial_x \bar{v}_1)] d\tau. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Necessitamos analisar um por um os $\lambda_i(u - u_1)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Começemos com $\lambda_2(u - u_1)$, e como anteriormente, pelo termo mais desafiador. Pelo Lema 2.2 temos:

$$\begin{aligned} &\left\| D_x^{s+\frac{1}{2}} \int_0^t U(t-\tau) (v\mathcal{H}(\partial_x v\bar{v}) - v_1\mathcal{H}(\partial_x v_1\bar{v}_1))(\tau) d\tau \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\lesssim \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau) (v\mathcal{H}(\partial_x v\bar{v}) - v_1\mathcal{H}(\partial_x v_1\bar{v}_1))(\tau) d\tau \right\| \\ &\lesssim \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau) ((v - v_1)\mathcal{H}(\bar{v}\partial_x v))(\tau) d\tau \right\| + \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau) (v_1\mathcal{H}((\bar{v} - \bar{v}_1)\partial_x v))(\tau) d\tau \right\| \\ &\quad + \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau) (v_1\mathcal{H}(\bar{v}_1\partial_x(v - v_1)))(\tau) d\tau \right\| \end{aligned} \quad (2.35)$$

Analisemos cada termo de (2.35) separadamente. Utilizaremos os mesmos recursos empregados na obtenção das estimativas (2.26)-(2.30).

$$\left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau)((v - v_1)\mathcal{H}(\bar{v}\partial_x v))(\tau) d\tau \right\| \lesssim T \sup_{[0,T]} (\|(v - v_1)(t)\|_s \|v(t)\|_s^2) + \|D_x^{\frac{1}{2}}((v - v_1)\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v))\|_{L_x^1 L_T^2}. \quad (2.36)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \|D_x^{\frac{1}{2}}((v - v_1)\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v))\|_{L_x^1 L_T^2} &\lesssim \|D_x^{\frac{1}{2}}(v - v_1)\|_{L_x^4 L_T^4} \|\bar{v}D_x^s v\|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_T^4} \\ &+ \|D_x^{\frac{1}{2}}(v - v_1)\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v)\|_{L_x^1 L_T^2} + \|(v - v_1)\mathcal{H}D_x^{\frac{1}{2}}(\bar{v}D_x^s v)\|_{L_x^1 L_T^2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Das estimativas (2.18)-(2.21) deduzimos imediatamente que,

$$\|D_x^{\frac{1}{2}}(v - v_1)\|_{L_x^4 L_T^4} \lesssim T^{\frac{1}{8}} \|D_x^{\frac{1}{2}}(v - v_1)\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|(v - v_1)(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \quad (2.38)$$

(onde usamos diretamente a estimativa (2.18)),

$$\begin{aligned} &\|D_x^{\frac{1}{2}}(v - v_1)\mathcal{H}(\bar{v}D_x^s v)\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}}(v - v_1)\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|(v - v_1)(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

(aqui recorreremos à estimativa (2.19)) e

$$\begin{aligned} \|(v - v_1)\mathcal{H}D_x^{\frac{1}{2}}(\bar{v}D_x^s v)\|_{L_x^1 L_T^2} &\lesssim \|v - v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{s+\frac{1}{2}} v\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &+ T^{\frac{1}{4}} \|v - v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Aplicando (2.37)-(2.40) juntamente com (2.19), em (2.35), segue-se que

$$\begin{aligned} \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau)((v - v_1)\mathcal{H}(\bar{v}\partial_x v))(\tau) d\tau \right\| &\lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^2 \sup_{[0,T]} \|(v - v_1)(t)\|_s \\ &+ T^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}}(v - v_1)\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|(v - v_1)(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \\ &+ T^{\frac{1}{4}} \|v - v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \\ &+ \|v - v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{s+\frac{1}{2}} v\|_{L_x^\infty L_T^2}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Procedendo-se do mesmo modo que para a obtenção da estimativa (2.41), chegamos às duas seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
& \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau) (v_1 \mathcal{H}((\bar{v} - \bar{v}_1) \partial_x v))(\tau) d\tau \right\| \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^2 \sup_{[0,T]} \|(v - v_1)(t)\|_s \\
& + T^{\frac{1}{4}} \|v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}}(v - v_1)\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|(v - v_1)(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \\
& + T^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}} v_1\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v_1(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \|v - v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\
& + \|v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{s+\frac{1}{2}} v\|_{L_x^\infty L_T^2} \|v - v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty}, \tag{2.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau) (v_1 \mathcal{H}(\bar{v}_1 \partial_x (v - v_1)))(\tau) d\tau \right\| \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^2 \sup_{[0,T]} \|(v - v_1)(t)\|_s \\
& + T^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}} v_1\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v_1(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \|v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s (v - v_1)\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|(v - v_1)(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \\
& + \|v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 + \|D_x^{s+\frac{1}{2}} (v - v_1)\|_{L_x^\infty L_T^2}. \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Assim, por (2.35) e (2.41) - (2.43) obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left\| D_x^{s+\frac{1}{2}} \int_0^t U(t - \tau) (v \mathcal{H}(\bar{v} \partial_x v) - v_1 \mathcal{H}(\bar{v}_1 \partial_x v_1))(\tau) d\tau \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
& \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^2 \sup_{[0,T]} \|(v - v_1)(t)\|_s + T^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \|v - v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\
& + T^{\frac{1}{4}} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}}(v - v_1)\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|(v - v_1)(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \\
& + T^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}} v_1\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v_1(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \|v - v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\
& + T^{\frac{1}{4}} \|v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}}(v - v_1)\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|(v - v_1)(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \\
& + T^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}} v_1\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v_1(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \|v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s (v - v_1)\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|(v - v_1)(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \\
& + \|v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \|D_x^{s+\frac{1}{2}} (v - v_1)\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{s+\frac{1}{2}} v\|_{L_x^\infty L_T^2} \|v - v_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \equiv E_2, \tag{2.44}
\end{aligned}$$

analogamente,

$$\left\| D_x^{s+\frac{1}{2}} \int_0^t U(t - \tau) (v \mathcal{H}(v \partial_x \bar{v}) - v_1 \mathcal{H}(v_1 \partial_x \bar{v}_1))(\tau) d\tau \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq c E_2. \tag{2.45}$$

O termo com derivada mas sem a transformada de Hilbert também pode ser limitado por E_2 ; para isso, é suficiente seguirmos os mesmos passos acima. Quanto ao termo sem derivadas temos:

$$\begin{aligned} \left\| D_x^{s+\frac{1}{2}} \int_0^t U(t-\tau)(|v|^2 v - |v_1|^2 v_1)(\tau) d\tau \right\|_{L_x^\infty L_T^2} &\lesssim \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau)(|v|^2 v - |v_1|^2 v_1)(\tau) d\tau \right\| \\ &\lesssim T \sup_{[0,T]} \{ \|(v - v_1)(t)\|_s (\|v(t)\|_s + \|v_1(t)\|_s)^2 \} \\ &\leq c E_2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Logo, por (2.44) - (2.46), surge a seguinte estimativa para $\lambda_2(u - u_1)$:

$$\lambda_2(u - u_1) \leq c E_2 \quad (2.47)$$

e conseqüentemente,

$$\lambda_1(u - u_1) \leq c E_2. \quad (2.48)$$

Pela estimativa para a função maximal (2.10) aplicada à equação integral (2.34) e seguindo o procedimento para a obtenção de (2.28), obtemos:

$$\|u - u_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim (1+T) T \sup_{[0,T]} \{ (\|v(t)\|_s + \|v_1(t)\|_s)^2 \|(v - v_1)(t)\|_s \} \quad (2.49)$$

e então,

$$\lambda_3(u - u_1) \leq c T \sup_{[0,T]} \{ (\|v(t)\|_2 + \|v_1(t)\|_2)^2 \|(v - v_1)(t)\|_2 \} \leq c E_2. \quad (2.50)$$

Finalmente, estimemos $\lambda_4(u - u_1)$. Aplicando o efeito regularizante do Lema 2.6 à equação integral (2.34), o fato de que $H^s(\mathbb{R})$ está imerso continuamente em $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ e aplicando em seguida as mesmas ferramentas usadas para estimar $\lambda_2(u - u_1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_4(u - u_1) &\lesssim \left\| \int_0^t U(-\tau)(|v|^2 v - |v_1|^2 v_1)(\tau) d\tau \right\|_s \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(-\tau)(v \partial_x(|v|^2) - v_1 \partial_x(|v_1|^2))(\tau) d\tau \right\|_s \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(-\tau)(v \mathcal{H} \partial_x(|v|^2) - v_1 \mathcal{H} \partial_x(|v_1|^2))(\tau) d\tau \right\|_s \leq c E_2. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Por conseguinte, vemos das estimativas (2.47), (2.48), (2.50) e (2.51) que $\Lambda_T(\Phi(v) - \Phi(v_1))$ satisfaz a seguinte desigualdade,

$$\begin{aligned}\Lambda_T(\Phi(v) - \Phi(v_1)) &\leq c(1+T)^2 [\Lambda_T(v) + \Lambda_T(v_1)]^2 \Lambda_T(v - v_1) \\ &\leq 4c(1+T)^2 a^2 \Lambda_T(v - v_1) \\ &\leq 4c(1+T)^2 (4c)^2 \|\phi\|_s^2 \Lambda_T(v - v_1).\end{aligned}\tag{2.52}$$

Agora é suficiente escolher T tal como em (2.33) e um a como em (2.32). Isso prova que Φ é contração.

A demonstração de persistência (isto é, que u , como função do tempo, descreve uma curva contínua no mesmo espaço do dado inicial) e de unicidade (em uma classe maior que Z_T^a , mais precisamente, em $Z_{s,T}$) segue um procedimento padrão, o qual pode ser encontrado, por exemplo, na prova do Teorema 4.1 do artigo [13]. A título de completude vamos reproduzi-la em nosso trabalho.

Para demonstrar a propriedade de persistência de $u(t)$ em $H^s(\mathbb{R})$, ou seja,

$$u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R})),\tag{2.53}$$

usa-se o seguinte argumento:

- (i) Basta que estabeleçamo-la em $t = 0$, porque a equação (8) é autônoma.
- (ii) Consideremos um T_0 *pequeno*. Combinando a equação integral

$$u(t) - \phi = U(t)\phi - \phi + \int_0^t U(t-\tau)(i|u|^2 u + u\partial_x(|u|^2) - iu\mathcal{H}\partial_x(|u|^2))(\tau)d\tau$$

com a estimativa (2.5) e as propriedades de grupo, e procedendo da mesma maneira que na obtenção das estimativas (2.15)-(2.30) junto com a informação de que $u \in Z_T^a$ obtemos, para $t \in (0, T_0)$,

$$\begin{aligned}\|u(t) - \phi\|_s &\lesssim \|U(t)\phi - \phi\|_s + T_0^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L_x^2 L_{T_0}^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}} u\|_{L_x^6 L_{T_0}^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s u\|_{L_x^6 L_{T_0}^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0, T_0]} \|u(t)\|_s^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + T_0 \sup_{[0, T_0]} \|u(t)\|_s^3 + (1+T_0)^2 \{\|\phi\|_s + T_0 \sup_{[0, T_0]} \|u(t)\|_s^3\}^2 \|D_x^{s+\frac{1}{2}} u\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \\ &\lesssim \|U(t)\phi - \phi\|_s + f(T_0, a) + \|\phi\|_s^2 \|D_x^{s+\frac{1}{2}} u\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2},\end{aligned}\tag{2.54}$$

onde

$$f(T_0, a) = \{T_0 + T_0^{\frac{1}{4}}(1 + T_0)\}a^3 + T_0a^3(1 + a^2T_0)(1 + a^2 + T_0).$$

Fazendo $t \rightarrow 0$, é imediato que $\|U(t)\phi - \phi\|_s \rightarrow 0$, mas não é imediato que o termo $\|D_x^{s+\frac{1}{2}}u\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2}$ se comporte do mesmo modo, ou seja, que esteja próximo de zero, para T_0 pequeno. Assim, visando provar tal fato, consideremos a equação integral $\Phi_\phi(u) = u$, i.e.,

$$u(t) = U(t)\phi + \int_0^t U(t-\tau)[i|u|^2u + u\partial_x(|u|^2) - iu\mathcal{H}\partial_x(|u|^2)](\tau)d\tau. \quad (2.55)$$

Aplicando sobre a equação (2.55) os mesmos recursos usados na obtenção das estimativas (2.27) e (2.28) chegamos que,

$$\begin{aligned} \|D_x^{s+\frac{1}{2}}u\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} &\lesssim \|D_x^{s+\frac{1}{2}}U(t)\phi\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} + T_0^{\frac{1}{4}}\|u\|_{L_x^2 L_{T_0}^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}}u\|_{L_x^6 L_{T_0}^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s u\|_{L_x^6 L_{T_0}^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0, T_0]} \|u(t)\|_s^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + T_0 \sup_{[0, T_0]} \|u(t)\|_s^3 + (1 + T_0)^2 \{\|\phi\|_s + T_0 \sup_{[0, T_0]} \|u(t)\|_s^3\}^2 \|D_x^{s+\frac{1}{2}}u\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \\ &\lesssim \|D_x^{s+\frac{1}{2}}U(t)\phi\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} + f(T_0, a) + a^2 \|D_x^{s+\frac{1}{2}}u\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

portanto,

$$\|D_x^{s+\frac{1}{2}}u\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \leq 2c \|D_x^{s+\frac{1}{2}}U(t)\phi\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} + cf(T_0, a) \quad (2.57)$$

e então, para T_0 suficientemente pequeno,

$$\left\|D_x^{s+\frac{1}{2}}u\right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \leq 2c \left\|D_x^{s+\frac{1}{2}}U(t)\phi\right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} + o(1). \quad (2.58)$$

(iii) Para $\epsilon > 0$, seja $\phi^\epsilon \in H^\infty(\mathbb{R})$ tal que, $\|\phi - \phi^\epsilon\|_s \leq \epsilon$. Então, segue do Lema 2.2 e do teorema de imersão de Sobolev que

$$\begin{aligned} \left\|D_x^{s+\frac{1}{2}}U(t)\phi\right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} &\leq \left\|D_x^{s+\frac{1}{2}}U(t)(\phi - \phi^\epsilon)\right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} + \left\|D_x^{s+\frac{1}{2}}U(t)\phi^\epsilon\right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \\ &\leq c\|\phi - \phi^\epsilon\|_s + c\left\|D_x^{s+\frac{1}{2}}U(t)\phi^\epsilon\right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \\ &\leq c\epsilon + c\left\|D_x^{s+\frac{1}{2}}U(t)\phi^\epsilon\right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} \\ &\leq c\epsilon + cT_0^{\frac{1}{2}}\|\phi^\epsilon\|_{s+2}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Portanto, de (2.57) e (2.59) segue que,

$$\left\| D_x^{s+\frac{1}{2}} u \right\|_{L_x^\infty L_{T_0}^2} = o(1) \quad (2.60)$$

se T_0 é suficientemente próximo de zero.

Logo, das estimativas (2.54) e (2.60) segue que,

$$\|u(t) - \phi\|_s \longrightarrow 0$$

quando $t \longrightarrow 0$, ou seja, $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}))$.

Agora, via um argumento padrão, estabeleceremos a unicidade. Seja w uma solução do PVI (2.13) no intervalo de tempo $[0, T_1]$ com $T_1 < T$. Além disso, considere que $w \in Z_{T_1}^{a_1}$ para algum $a_1 > a$, com $w \in C([0, T_1]; H^s(\mathbb{R}))$. Então w satisfaz a equação integral (2.14). Pela continuidade, existe um $T_2 \in (0, T_1)$ tal que

$$\sup_{[0, T_2]} \|w(t)\|_s \leq a.$$

Combinando esta desigualdade com (2.10) como em (2.29), vê-se que existe um $T_3 \in (0, T_2)$ de modo que

$$\lambda_3(w(t)) \leq c\|\phi\|_s + T_3 a^3 \leq a,$$

para $t \in [0, T_3]$. Também temos que existe $T_4 \in (0, T_3)$ tal que,

$$\lambda_4(w(t)) \leq a,$$

para $t \in [0, T_4]$.

Similarmente, mostra-se que existe $T_5 \in (0, T_4)$ tal que,

$$\|D_x^{s+\frac{1}{2}} w\|_{L_x^\infty L_{T_6}^2} \leq a.$$

Portanto $w \in Z_{T_5}^a$ e conseqüentemente, $u = w$ para $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T_5]$. Aplicando esse processo novamente ao PVI (2.13) com dado inicial $u(x, T_5)$ conseguimos estender um pouco, e procedendo deste modo, como $[0, T]$ é compacto, estendemos o resultado de unicidade ao intervalo $[0, T]$ com um número finito de iterações.

Salientamos que a seqüência $\{T_{5i}\}_{i=1}^{\infty}$ obtida acima não acumula em um tempo $\tilde{T} < T$, porque se isso fosse o caso, como os valores de T para se chegar a uma contração dependem inversamente do dado inicial, teríamos a seqüência $\|u(\cdot, T_{5i})\|_s \longrightarrow \infty$, o que caracteriza uma contradição.

Falta agora somente provar a dependência contínua. Sejam $u(t)$, $w(t)$ as soluções do PVI (2.13) com valores iniciais ϕ , ψ , respectivamente. Então

$$u(t) - w(t) = U(t)(\phi - \psi) + \int_0^t U(t - \tau) (F(u, \dots) - F(w, \dots))(\tau) d\tau,$$

onde $F(v, \dots)$ corresponde à parte não-linear da equação, ou seja,

$$F(v, \dots) = F(v, \bar{v}, \partial_x v, \partial_x \bar{v}) = i|v|^2 v + v \partial_x (|v|^2) - i v \mathcal{H} \partial_x (|v|^2).$$

Aplicando o argumento de contração desenvolvido acima, encontramos que

$$\Lambda_{T_0}(u - w) \leq c \|\phi - \psi\|_s + B \Lambda_{T_0}(u - w)$$

onde B depende somente de $F(\cdot)$, $\|\phi\|_s$, $\|\psi\|_s$ e $T_0 \in (0, T)$. De fato, tal argumento mostra que podemos tomar $B \leq \frac{1}{2}$ se

$$\|\phi - \psi\|_s < \delta$$

e então, para $B \leq \frac{1}{2}$ segue-se que

$$\Lambda_{T_0}(u - w) \leq 2c \|\phi - \psi\|_s.$$

Assim, tomando $\delta = \epsilon/2c$, obtemos o resultado de dependência contínua. Com isso, o Teorema 2.1 está provado. $\square$

OBSERVAÇÃO 2. Salientamos que o PVI (2.13) é reversível no tempo; daí, o Teorema 2.1 é válido no intervalo de tempo $[-T, T]$.

Fechamos o capítulo com o resultado de que a aplicação dado-fluxo, a qual o Teorema 2.1 assegura somente a continuidade Lipschitz, é na verdade C^∞ . No Capítulo 5 veremos que nem sempre tal propriedade é válida.

COROLÁRIO 2.7. *Sob as hipóteses do Teorema 2.1, existe uma vizinhança $\tilde{V}$ de $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$, tal que, a aplicação dado fluxo $\phi \mapsto u$ de $\tilde{V}$ em $Z_{s,T}$, é suave.*

Demonstração. A ferramenta fundamental será o Teorema da função implícita (veja Lema 1.6). Consideremos

$$F(u) = i|u|^2u + u\partial_x(|u|^2) - iu\mathcal{H}\partial_x(|u|^2)$$

e, para uma vizinhança V de ϕ , definamos $G : V \times Z_{s,T} \longrightarrow Z_{s,T}$ por

$$G(\psi, v)(t) = v(t) - \left(U(t)\psi + \int_0^t U(t-\tau)F(v)(\tau)d\tau \right).$$

Observemos que G está bem definida, e pelo Teorema 2.1, $G(\phi, u) \equiv 0$. A derivada de Frechét de G com relação a u é a seguinte:

$$\begin{aligned} D_u G(\phi, u)v(t) &= v(t) - \int_0^t U(t-\tau) \left(2i|u|^2v + iu^2\bar{v} + v\partial_x(|u|^2) + 2iu\mathcal{R}\partial_x(u\bar{v}) \right. \\ &\quad \left. - i v\mathcal{H}\partial_x(|u|^2) - 2iu\mathcal{H}\mathcal{R}\partial_x(u\bar{v}) \right) (\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Podemos calcular do mesmo modo derivadas de qualquer ordem de $G(\phi, \cdot)$ em relação a u , porque $F(\cdot)$ é constituída de uma parte polinomial mais uma envolvendo transformada de Hilbert (que comuta com derivadas, como feito acima) e portanto G é suave como função de u . Daí concluímos que G é suave.

Vejamos que $D_u G(\phi, u) : Z_{s,T} \longrightarrow Z_{s,T}$ é inversível. Seja $I : Z_{s,T} \longrightarrow Z_{s,T}$ o operador identidade. Escrevamos

$$\begin{aligned} (I - D_u G)v(t) &= \int_0^t U(t-\tau) \left(2i|u|^2v + iu^2\bar{v} + v\partial_x(|u|^2) + 2iu\mathcal{R}\partial_x(u\bar{v}) \right. \\ &\quad \left. - i v\mathcal{H}\partial_x(|u|^2) - 2iu\mathcal{H}\mathcal{R}\partial_x(u\bar{v}) \right) (\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Agora estimamos os $\lambda_T^i((I - D_u G)v)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Seguindo os mesmos procedimentos feitos para a obtenção da estimativa (2.22) e usando os efeitos suavizantes dos lemas 2.2 e 2.6, chegamos que

$$\begin{aligned}
\lambda_i((I - D_u G)v) &\lesssim T \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_s^2 \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s + \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{s+\frac{1}{2}} u\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\quad + T^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \|D_x^s u\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \\
&\quad + T^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}} u\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \|D_x^s u\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_s^{\frac{1}{4}} \\
&\quad + T^{\frac{1}{4}} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}} u\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s u\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_s^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \|D_x^{s+\frac{1}{2}} v\|_{L_x^\infty L_T^2},
\end{aligned} \tag{2.61}$$

para $i = 1, 2, 4$, e com os mesmos recursos usados para a obtenção da estimativa (2.29), encontramos,

$$\lambda_3((I - D_u G)v) \lesssim T \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_s^2 \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s. \tag{2.62}$$

Pelas estimativas (2.61), (2.62) e como $u \in Z_T^a$, chegamos que

$$\begin{aligned}
\Lambda_T((I - D_u G)v) &\leq c \left(T + T^{\frac{1}{4}}(1 + T) + (1 + T)^2 \right) \Lambda_T^2(u) \Lambda_T(v) \\
&\leq c(1 + T)^2 a^2 \Lambda_T(v),
\end{aligned} \tag{2.63}$$

onde $c > 1$ é como em (2.31). Então, escolhendo a como em (2.32) e T como em (2.33), concluímos que:

$$\Lambda_T((I - D_u G)v) < \frac{1}{2} \Lambda_T(v),$$

portanto, $I - (I - D_u G) = D_u G \in B(Z_{s,T}, Z_{s,T})$ é inversível. Logo, pelo Teorema da Função Implícita (veja Lema 1.6), existe uma vizinhança $\tilde{V} \subset V$ de $\phi \in H^s(\mathbb{R})$ e uma aplicação $g : \tilde{V} \longrightarrow Z_{s,T}$ tal que, $G(\psi, g(\psi)) = 0$ para qualquer $\psi \in \tilde{V}$, ou seja,

$$g(\psi) = U(t)\psi + \int_0^t U(t - \tau) F(g(\psi))(\tau) d\tau \equiv u(t)$$

é a solução do PVI (2.1) com valor inicial $\psi \in \tilde{V}$ e g , que é o fluxo dado-solução, é suave.

Isto finaliza a prova. $\square$

OBSERVAÇÃO 3. Notemos que o tempo T de $Z_{s,T}$ no Cor. 2.7 é o mesmo do Teor. 2.1.

OBSERVAÇÃO 4. A propriedade de suavidade da aplicação dado-solução é interessante, primeiro porque se ela não é válida para o PVI com dados iniciais em espaços de Sobolev de determinados índices, sabe-se que é impossível a aplicabilidade de um método iterativo de Picard para a solução do problema com dados iniciais em espaços de Sobolev com aqueles índices (veja o Capítulo 5); segundo porque podemos com ela provar a instabilidade não-linear de ondas viajantes de equações de evolução não-lineares por meio da instabilidade linear (que é menos difícil de ser obtida), isso porque instabilidade linear mais a propriedade de suavidade implicam em instabilidade não-linear (veja [20] e [10]).

Capítulo 3

BOA COLOCAÇÃO LOCAL PARA A EQUAÇÃO INLS NÃO-LOCAL

Neste capítulo vamos estender o resultado de boa colocação local do capítulo anterior para o PVI associado à equação de Schrödinger intermediária não-local (7). O procedimento será semelhante ao do Capítulo 2, mas é necessário o uso de algumas “ferramentas” a mais, como veremos. Sem perda de generalidade, vamos considerar em todo o capítulo, $\alpha = \beta = \gamma = 1$ e assim, o PVI a ser estudado é o seguinte:

$$\begin{cases} i\partial_t u = \partial_x^2 u + iu(1 - iT_h)\partial_x(|u|^2) - |u|^2 u, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \phi(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde T_h é o operador definido em (3).

O teorema que iremos provar é o seguinte:

TEOREMA 3.1. *Existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer $\phi \in H^s(\mathbb{R})$ com $s > \frac{3}{2}$ e $\|\phi\|_s < \delta$, existe uma única solução u para o PVI (3.1) no intervalo de tempo $[0, T]$, $T = T(\|\phi\|_s) > 0$ com $T(\theta) \rightarrow \infty$ quando $\theta \rightarrow 0$, satisfazendo*

$$u \in Z_{s,T} \equiv \{v \in C([0, T] : H^s(\mathbb{R})) : \Lambda_T(v) < \infty\},$$

com

$$\Lambda_T(u) = \max\{\lambda_T^i(u) \equiv \lambda_i(u); i = 1, 2, 3, 4\}, \quad (3.2)$$

onde

$$\lambda_1(u) := \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_s,$$

$$\lambda_2(u) := \|T_h D_x^{s+\frac{1}{2}} u\|_{L_x^\infty L_T^2},$$

$$\lambda_3(u) := (1+T)^{-1} \|u\|_{L_x^2 L_T^\infty},$$

$$\lambda_4(u) := \|D_x^{\frac{1}{2}} u\|_{L_x^6 L_T^6} + \|D_x^s T_h u\|_{L_x^6 L_T^6}.$$

Além disso, para qualquer $T' \in (0, T)$ existe $\epsilon > 0$ tal que a aplicação $\varphi \rightarrow w$ de $\{\varphi \in H^s(\mathbb{R}); \|\varphi - \phi\|_s < \epsilon\}$ em $Z_{s,T}$ é Lipschitz.

Demonstração. Assim como no Teorema 2.1, a prova do Teorema 3.1 é feita por meio do princípio de contração, utilizando-se propriedades do problema linear associado, deduzidas por C. Kenig, G. Ponce e L. Vega em [16], já listadas na Seção 2.1 do Capítulo 2 deste trabalho. Também serão imprescindíveis as seguintes propriedades do operador integral singular T_h listadas no lema abaixo:

LEMA 3.2. (i) O operador integral singular T_h , definido por

$$T_h u(x) = \frac{1}{2h} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi(y-x)}{2h}\right) u(y) dy,$$

é limitado de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Sejam f e g funções arbitrárias, onde $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ com $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$, e $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|[T_h \partial_x, f] g\| \leq C |f'|_\infty \|g\|.$$

Demonstração. Foi feita no Lemma 3.7 de [2]. No intuito de tornar mais agradável a leitura do nosso trabalho, vamos transcrevê-la. Por um argumento padrão de densidade, é suficiente provar o resultado para f arbitrária e $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

(i): $\mathcal{T}_h \partial_x$ pode ser visto como sendo o operador multiplicador de Fourier definido por

$$\widehat{\mathcal{T}_h \partial_x v}(\xi) = m(\xi) \widehat{v}(\xi),$$

onde

$$m(\xi) = \xi \coth(h\xi) - \frac{1}{h} \quad (h > 0).$$

Assim, $\mathcal{T}_h$ é definido como, $\widehat{\mathcal{T}_h v} = k(\xi) \widehat{v}(\xi)$, com $k(\xi) = m(\xi)/i\xi = i/h\xi - i \coth(h\xi)$. Um cálculo simples mostra que $k(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Então, pelo teorema de Plancherel, temos que $\mathcal{T}_h$ é limitado em $L^2(\mathbb{R})$.

(ii): Observemos que,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\xi|^n \left| \left(\frac{d}{d\xi} \right)^n k(\xi) \right| < \infty,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto, pelo Teorema 35 de [8] existe um $C_1 > 0$ tal que,

$$\|[\mathcal{T}_h, f] g'\| \leq C |f'|_\infty \|g\|,$$

para quaisquer funções $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Logo,

$$\begin{aligned} \|[\mathcal{T}_h \partial_x, f] g\| &= \left\| \mathcal{T}_h \frac{d}{dx} (fg) - f \mathcal{T}_h \frac{d}{dx} g \right\| \\ &= \|\mathcal{T}_h(f'g) + \mathcal{T}_h(fg') - f \mathcal{T}_h g'\| \\ &\leq \|\mathcal{T}_h(f'g)\| + \|[\mathcal{T}_h, f] g'\| \\ &\leq \|\mathcal{T}_h\|_{L^2} |f'|_\infty \|g\| + C_1 |f'|_\infty \|g\|, \end{aligned}$$

onde $\|\mathcal{T}_h\|_{L^2}$ denota a norma de $\mathcal{T}_h$ em $L^2(\mathbb{R})$. Portanto, o resultado segue com $C = \|\mathcal{T}_h\|_{L^2} + C_1$. ■

Agora temos em mãos todas as ferramentas para provar o teorema. Dado $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, denotemos por $\Phi(v) = \Phi_\phi(v)$ a solução do problema linear não-homogêneo

$$\begin{cases} \partial_t u = -i\partial_x^2 u + v\partial_x(|v|^2) - iv\mathcal{T}_h \partial_x(|v|^2) + i|v|^2 v, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \phi(x), \end{cases} \quad (3.3)$$

onde

$$v \in Z_T^a = \{v : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \mid \Lambda_T(v) \leq a\}.$$

A equação integral associada ao problema (3.3) é,

$$\Phi(v)(t) = U(t)\phi + \int_0^t U(t-\tau)[v\partial_x(|v|^2) - iv\mathcal{T}_h\partial_x(|v|^2) + i|v|^2v](\tau)d\tau \quad (3.4)$$

Vamos provar que existem a e T tal que, $u = \Phi(v) \in Z_T^a$ e $\Phi : Z_T^a \rightarrow Z_T^a$ é uma contração.

Como no capítulo anterior, é suficiente estimarmos o termo $v\mathcal{T}_h(\bar{v}\partial_x v)$. Das desigualdades de Hölder e de Minkowski segue que,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{T}_h(\bar{v}\partial_x v))(\tau)d\tau \right\|_s \\ & \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 + \left\| D_x^s \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{T}_h(\bar{v}\partial_x v))(\tau)d\tau \right\|. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Agora, aplicando ao segundo termo do lado direito da desigualdade (3.5) o efeito regularizante (2.5), os Lemas 1.2, 1.4 e 3.2, propriedades de grupo, as desigualdades de Hölder e Minkowski, chegamos à seguinte estimativa para ela:

$$\begin{aligned} & \left\| D_x^s \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{T}_h(\bar{v}\partial_x v))(\tau)d\tau \right\| \\ & \lesssim \left\| \int_0^t U(t-\tau)([D_x^s, v]\mathcal{T}_h(\bar{v}\partial_x v))(\tau)d\tau \right\| + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{T}_h D_x^s(\bar{v}\partial_x v))(\tau)d\tau \right\| \\ & \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{T}_h([D_x^s, \bar{v}]\partial_x v))(\tau)d\tau \right\| \\ & \quad + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{T}_h(\bar{v}\partial_x D_x^s v))(\tau)d\tau \right\| \\ & \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 + T \sup_{[0,T]} (\|v(t)\|_{L_x^\infty} \|\mathcal{T}_h([D_x^s, \bar{v}]\partial_x v)(t)\|) \\ & \quad + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(v\partial_x \mathcal{T}_h(\bar{v} D_x^s v))(\tau)d\tau \right\| + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(v\mathcal{T}_h(\partial_x \bar{v} D_x^s v))(\tau)d\tau \right\| \\ & \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(v[\mathcal{T}_h\partial_x, \bar{v}]D_x^s v)(\tau)d\tau \right\| \\ & \quad + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(|v|^2\partial_x \mathcal{T}_h D_x^s v)(\tau)d\tau \right\| \\ & \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 + T \sup_{[0,T]} (\|v(t)\|_{L_x^\infty} \|[\mathcal{T}_h\partial_x, \bar{v}]D_x^s v\|) \\ & \quad + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(\partial_x(|v|^2)\mathcal{T}_h D_x^s v)(\tau)d\tau \right\| + \left\| \int_0^t U(t-\tau)(\partial_x(|v|^2\mathcal{T}_h D_x^s v))(\tau)d\tau \right\| \\ & \lesssim T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 + \|D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^2\mathcal{T}_h D_x^s v)\|_{L_x^1 L_T^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Mas ainda falta avaliar o termo $\|D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^2\mathcal{T}_h D_x^s v)\|_{L_x^1 L_T^2}$ de (3.6). Pelo Lema 1.5 (i) com $\alpha = \frac{1}{2}$ e $p = 2$, junto com as desigualdades de Hölder e de Minkowski e Lema 3.2, temos:

$$\begin{aligned} \|D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^2\mathcal{T}_h D_x^s v)\|_{L_x^1 L_T^2} &\lesssim \|D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^2\mathcal{T}_h D_x^s v) - \bar{v}D_x^{\frac{1}{2}}v\mathcal{T}_h D_x^s v - vD_x^{\frac{1}{2}}(\bar{v}\mathcal{T}_h D_x^s v)\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\quad + \|\bar{v}D_x^{\frac{1}{2}}v\mathcal{T}_h D_x^s v\|_{L_x^1 L_T^2} + \|vD_x^{\frac{1}{2}}(\bar{v}\mathcal{T}_h D_x^s v)\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\lesssim \|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^4 L_T^4} \|\bar{v}\mathcal{T}_h D_x^s v\|_{L_x^4 L_T^4} + \|\bar{v}D_x^{\frac{1}{2}}v\mathcal{T}_h D_x^s v\|_{L_x^1 L_T^2} + \|vD_x^{\frac{1}{2}}(\bar{v}\mathcal{T}_h D_x^s v)\|_{L_x^1 L_T^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Agora, pelas desigualdades de Hölder e de Minkowski (veja (2.18)),

$$\|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^4 L_T^4} \lesssim T^{\frac{1}{8}} \|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}}. \quad (3.8)$$

Como $\mathcal{T}_h$ é limitado em $L^2(\mathbb{R})$ (veja Lema 3.2 (i)), segue das desigualdades de Hölder e de Minkowski aplicadas como em (2.19),

$$\begin{aligned} \|\bar{v}\mathcal{T}_h D_x^s v\|_{L_x^4 L_T^4} &\lesssim \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{T}_h D_x^s v|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{8}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T |\mathcal{T}_h D_x^s v|^6 dt dx \right)^{\frac{1}{8}} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{8}} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s \mathcal{T}_h v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Com os mesmos recursos usados na obtenção das desigualdades (2.20) e (2.21) junto com o Lema 3.2 (i), obtemos:

$$\begin{aligned} \left\| \bar{v}D_x^{\frac{1}{2}}v\mathcal{T}_h D_x^s v \right\|_{L_x^1 L_T^2} &\lesssim \|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^4 L_T^4} \|\bar{v}\mathcal{T}_h D_x^s v\|_{L_x^4 L_T^4} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{4}} \|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s \mathcal{T}_h v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \left\| vD_x^{\frac{1}{2}}(\bar{v}\mathcal{T}_h D_x^s v) \right\|_{L_x^1 L_T^2} &\leq \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}}(\bar{v}\mathcal{T}_h D_x^s v)\|_{L_x^2 L_T^2} \\ &\lesssim \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\{ \|D_x^{\frac{1}{2}}(\bar{v}\mathcal{T}_h D_x^s v) - D_x^{\frac{1}{2}}\bar{v}\mathcal{T}_h D_x^s v - \bar{v}\mathcal{T}_h D_x^{s+\frac{1}{2}}v\|_{L_x^2 L_T^2} \right\} \\ &\quad + \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\{ \|D_x^{\frac{1}{2}}\bar{v}\mathcal{T}_h D_x^s v\|_{L_x^2 L_T^2} + \|\bar{v}\mathcal{T}_h D_x^{s+\frac{1}{2}}v\|_{L_x^2 L_T^2} \right\} \\ &\lesssim \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\{ \|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^4 L_T^4} \|\mathcal{T}_h D_x^s v\|_{L_x^4 L_T^4} + \|\bar{v}\mathcal{T}_h D_x^{s+\frac{1}{2}}v\|_{L_x^2 L_T^2} \right\} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{4}} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s \mathcal{T}_h v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \|\mathcal{T}_h D_x^{s+\frac{1}{2}}v\|_{L_x^\infty L_T^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

As mesmas estimativas são válidas para os termos da equação integral (3.4) envolvendo $v\partial_x(|v|^2)$ e $i|v|^2v$. Daí, por (3.5) – (3.11) segue que,

$$\begin{aligned}\lambda_1(u) &\lesssim \|\phi\|_s + T^{\frac{1}{4}}\|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}} v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \|D_x^s \mathcal{T}_h v\|_{L_x^6 L_T^6}^{\frac{3}{4}} \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 + \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \|D_x^{s+\frac{1}{2}} \mathcal{T}_h v\|_{L_x^\infty L_T^2} \equiv \tilde{E}_1.\end{aligned}\quad (3.12)$$

A estimativa (2.6) aplicada à equação integral (3.4) junto com o Lema 3.2 (i) e o procedimento para a obtenção da desigualdade (3.12) fornece-nos a seguinte estimativa para $\lambda_2(u)$:

$$\begin{aligned}\lambda_2(u) &\lesssim \|\phi\|_s + \left\| D_x^s \mathcal{T}_h \int_0^t U(-\tau)(i|v|^2v + v\partial_x(|v|^2) - iv\mathcal{T}_h\partial_x(|v|^2))(\tau)d\tau \right\| \\ &\lesssim \|\phi\|_s + \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau)(i|v|^2v + v\partial_x(|v|^2) - iv\mathcal{T}_h\partial_x(|v|^2))(\tau)d\tau \right\| \lesssim \tilde{E}_1.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Estimamos $\lambda_3(u)$ aplicando a estimativa (2.10) para a função maximal $\sup_{[0,T]} |U(t) \cdot |$ (tomando, no Lema 2.4, $\rho = 1$ e $r = s - 1$) à equação integral (3.3) como segue:

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\lesssim (1+T) \left\{ \|\phi\|_s + \left\| \int_0^t U(-\tau)(|v|^2v)(\tau)d\tau \right\|_{s-1} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \int_0^t U(-\tau)(v\partial_x(|v|^2))(\tau)d\tau \right\|_{s-1} + \left\| \int_0^t U(-\tau)(v\mathcal{T}_h\partial_x(|v|^2))(\tau)d\tau \right\|_{s-1} \right\} \\ &\lesssim (1+T) \{ \|\phi\|_s + T \sup_{[0,T]} (\| |v|^2v \|_{s-1} + \|v\partial_x(|v|^2)\|_{s-1} + \|v\mathcal{T}_h\partial_x(|v|^2)\|_{s-1}) \} \\ &\lesssim (1+T) \{ \|\phi\|_s + T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 \},\end{aligned}\quad (3.14)$$

onde nos valem também do fato de $H^{s-1}(\mathbb{R})$ ser uma álgebra de Banach, pois $s-1 > \frac{1}{2}$. Logo, segue de (3.14) que,

$$\lambda_3(u) \lesssim \|\phi\|_s + T \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s^3 \lesssim \tilde{E}_1. \quad (3.15)$$

Para finalizar, vamos avaliar $\lambda_4(u)$. A aplicação dos lemas 2.2, 2.6 e 3.2 (i) à equação integral (3.3) juntamente com as desigualdades envolvidas na estimativa de $\lambda_1(u)$, resulta

na seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\lambda_4(u) &= \|D_x^{\frac{1}{2}}u\|_{L_x^6 L_T^6} + \|D_x^s \mathcal{T}_h u\|_{L_x^6 L_T^6} \\
&\lesssim \|\phi\|_s + \left\| D_x^{\frac{1}{2}} \int_0^t U(-\tau) (i|v|^2 v + v \partial_x(|v|^2) - i v \mathcal{T}_h \partial_x(|v|^2))(\tau) d\tau \right\| \\
&\quad + \left\| D_x^s \int_0^t U(-\tau) (i|v|^2 v + v \partial_x(|v|^2) - i v \mathcal{T}_h \partial_x(|v|^2))(\tau) d\tau \right\| \\
&\lesssim \tilde{E}_1.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Agora, as etapas seguintes podem ser omitidas sem perda de generalidade, porque basta seguir os mesmos passos da demonstração do Teorema 2.1 no capítulo anterior. $\square$

Para encerrar, ressaltamos que assim como o PVI 2.1, o PVI 3.1 também possui a propriedade de que a aplicação dado-solução é de classe C^∞ .

COROLÁRIO 3.3. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1, existe uma vizinhança $\tilde{V}$ de $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$, tal que, a aplicação dado fluxo $\phi \mapsto u$ de $\tilde{V}$ em $Z_{s,T}$, é suave.*

Demonstração. A prova pode ser omitida, pois segue repetindo exatamente o mesmo argumento da demonstração do Corolário 2.7, sem diferenças significativas. $\square$

Capítulo 4

O PROBLEMA LOCAL COM PESO PARA A EQUAÇÃO NLS NÃO-LOCAL

Nosso propósito neste capítulo é estudar o comportamento assintótico em relação à variável espacial das soluções obtidas no Capítulo 2. Como anteriormente, vamos considerar $\alpha = \beta = \gamma = 1$, sem perda de generalidade. O capítulo é organizado da seguinte forma: primeiramente vamos definir os espaços de Sobolev com peso adequados ao problema e enunciar o teorema a ser provado, em seguida enunciamos e exibimos a demonstração dos resultados básicos a serem utilizados na demonstração do teorema principal, demonstração essa, que por ser longa, será feita através de uma seqüência de lemas.

Começamos definindo os espaços de Hilbert

$$L^2_\omega(\mathbb{R}) := \left\{ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável} \mid \langle u, v \rangle_{L^2_\omega} := \langle \omega u, \omega v \rangle < \infty \right\}, \quad (4.1)$$

onde

$$\langle f, g \rangle := \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f \bar{g} \, dx.$$

DEFINIÇÃO 4.1 . *Seja $s \in \mathbb{R}$ e seja ω um peso arbitrário. Definimos o seguinte espaço*

de Hilbert

$$H_{s,\omega}(\mathbb{R}) \equiv H^s(\mathbb{R}) \cap L_\omega^2(\mathbb{R})$$

munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{s,\omega} = \langle u, v \rangle_s + \langle u, v \rangle_{L_\omega^2}. \quad (4.2)$$

Vamos fazer uso do seguinte conjunto de pesos:

$$\mathcal{P} := \left\{ \sigma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \inf_{x \in \mathbb{R}} \sigma(x) > 0, \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma'(x)| < \infty \right\} \quad (4.3)$$

O resultado a ser provado é o seguinte:

TEOREMA 4.2. *Sejam $s > \frac{3}{2}$ e $\omega = \sigma^s$, com $\sigma \in \mathcal{P}$. Se $\phi \in H_{s,\omega}(\mathbb{R})$ e*

$$u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-2}(\mathbb{R}))$$

é a solução do PVI (2.1) com $u(0) = \phi$, então

$$u \in C([0, T]; H_{s,\omega}(\mathbb{R})). \quad (4.4)$$

Além disso, a aplicação $\phi \mapsto u$ é contínua.

Desse teorema e dos resultados da seção a seguir temos que, para $k \leq s$,

$$\omega^{1-k/s} \partial_x^k u \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \quad (4.5)$$

e

$$\omega^{1-2/s} \partial_t u \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R})). \quad (4.6)$$

4.1 Resultados Preliminares.

A proposição abaixo exibe uma relação entre diferenciabilidade e decaimento de funções de $H_{s,\omega}(\mathbb{R})$ (versões semelhantes para outros problemas podem ser encontradas em [32], [12] Teorema A.7 e [11] Teorema A.2).

PROPOSIÇÃO 4.3. Para cada $s \geq 0$ e $V \geq 1$ existe $C = C(s, V) \geq 0$ tal que, dado qualquer peso satisfazendo

$$\omega(y) \leq V\omega(x), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \leq 1 \quad (4.7)$$

valem, para $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq s$, as seguintes estimativas:

$$\|\omega^{1-k/s} \partial_x^k u\| \leq c \|u\|_{L_w^2}^{1-k/s} \|u\|_s^{k/s}. \quad (4.8)$$

Demonstração. Seja $\theta = \frac{k}{s}$, $0 \leq k \leq s$; então

$$\|\omega^{1-\theta} \partial_x^k u\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2(1-\theta)}(x) |\partial_x^k u|^2 dx = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_j^{j+1} \omega(x)^{2(1-\theta)} |\partial_x^k u|^2 dx. \quad (4.9)$$

Observe que $|x - j| \leq 1$ para $x \in [j, j+1]$, e assim, (4.7) implica que $\omega(x) \leq V\omega(j)$, portanto de (4.9) segue que

$$\|\omega^{1-\theta} \partial_x^k u\|^2 \leq V^{2(1-\theta)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \omega(j)^{2(1-\theta)} \int_j^{j+1} |\partial_x^k u|^2 dx. \quad (4.10)$$

Consideremos um $\psi \in C^\infty$, $0 \leq \psi \leq 1$, com $\text{supp}(\psi) \subset (-1, 2)$ e $\psi \equiv 1$ em $[0, 1]$.

Para $j \in \mathbb{Z}$, definindo $\psi_j(\cdot) = \psi(\cdot - j)$, como $\psi_j \equiv 1$ em $[j, j+1]$, segue-se que

$$\|\omega^{1-\theta} \partial_x^k u\|^2 \leq V^{2(1-\theta)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \omega(j)^{2(1-\theta)} \int_j^{j+1} |\partial_x^k (\psi_j u)|^2 dx. \quad (4.11)$$

Sabemos que (veja Cap. 3 de [19], por exemplo)

$$\|\psi_j(u)\|_k \leq \|\psi_j(u)\|^{1-\theta} \|\psi_j(u)\|_s^\theta. \quad (4.12)$$

A desigualdade (4.11) junto com (4.12) implicam

$$\begin{aligned} \|\omega^{1-\theta} \partial_x^k u\|^2 &\leq V^{2(1-\theta)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \omega(j)^{2(1-\theta)} \|\psi_j u\|_k^2 \\ &\leq V^{2(1-\theta)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \omega(j)^{2(1-\theta)} \|\psi_j u\|^{2(1-\theta)} \|\psi_j u\|_s^{2\theta}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Usando o Lema de Hölder obtemos:

$$\|\omega^{1-\theta} \partial_x^k u\|^2 \leq V^{2(1-\theta)} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \omega(j)^2 \|\psi_j u\|^2 \right)^{1-\theta} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\psi_j u\|_s^2 \right)^\theta. \quad (4.14)$$

Pelo Lema 1.7 temos que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\psi_j u\|_s^2 \leq c(s) \|u\|_s^2. \quad (4.15)$$

Por (4.7) sabemos que $\omega(j) \leq V\omega(x)$, portanto

$$\omega(j)^2 \leq V^4 \omega(x)^2$$

quando $x \in [j-1, j+1]$. Para $x \in [j+1, j+2]$ temos que

$$\omega(j) \leq V\omega(j+1) \leq V^2\omega(x),$$

e assim,

$$\omega(j)^2 \leq V^4 \omega(x)^2.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \omega(j)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_j u|^2 dx &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(j)^2 |\psi_j u|^2 dx \\ &\leq V^4 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)^2 |\psi_j u|^2 dx \\ &= V^4 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{j-1}^j \omega(x)^2 |\psi_j u|^2 dx \\ &\leq V^4 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^2 \int_{j+l-1}^{j+l} \omega(x)^2 |\psi_j u|^2 dx \\ &= 3V^4 \|u\|_{L_\omega^2}^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

De (4.14), (4.15) e (4.16) segue o resultado. ■

Se $\sigma \in P$, $\sigma \geq \sigma_0$ e $|\sigma'| \leq M$, então, pelo Teorema do Valor Médio ($\sigma(y) - \sigma(x) = \sigma'(c)(y-x) \leq M|x-y|$), dado $|x-y| \leq 1$ temos que

$$\begin{aligned} \sigma(y) \leq \sigma(x) + M &\leq (1 + (\sigma(x))^{-1}M) \sigma(x) \\ &\leq (1 + M\sigma_0^{-1})\sigma(x), \end{aligned} \quad (4.17)$$

e assim, se $\omega = \sigma^s$ vale

$$\omega(y) \leq e^{\frac{sM}{\sigma_0}} \omega(x) \quad (4.18)$$

(porque $(4.17) \Rightarrow \sigma(y)^s \leq (1 + M\sigma_0^{-1})^s \sigma(x)^s \Rightarrow \omega(y) \leq (1 + M\sigma_0^{-1})^s \omega(x)$). Logo, os pesos no Teorema 4.2 satisfazem (4.7).

Os próximos dois lemas são fundamentais para controlar os termos não-locais da equação.

LEMA 4.4 . *Dado $\sigma \in P$, existe $c = c(\sigma) > 0$ tal que*

$$|\sigma \mathcal{H}(u)|_\infty \leq c(|\sigma u|_1 + \|\sigma \partial_x u\| + \|u\|). \quad (4.19)$$

Demonstração. Podemos tomar, sem perda de generalidade, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pela definição de $\mathcal{H}$ (veja (6)), podemos escrever

$$(-\mathcal{H}u)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(x-y) - u(x+y)}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{u(x-y) - u(x+y)}{y} dy. \quad (4.20)$$

Fazendo uso da desigualdade

$$|u(x-y) - u(x+y)| \leq \int_{-y}^y |\partial_x u(x+\varsigma)| d\varsigma \quad (4.21)$$

obtemos

$$\left| \frac{u(x-y) - u(x+y)}{y} \right| \leq \frac{1}{y} \int_{-y}^y |\partial_x u(x+\varsigma)| d\varsigma \leq \sqrt{2} \|\partial_x u\| y^{-1/2}. \quad (4.22)$$

De (4.20) e (4.22) segue que

$$\begin{aligned} |(\mathcal{H}u)(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \|\partial_x u\| y^{-1/2} dy + \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{|u(x-y)| + |u(x+y)|}{y} dy \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|\partial_x u\| + \frac{2}{\pi} |u|_1 |y^{-1}|_{L^\infty(1,\infty)} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|\partial_x u\| + \frac{2}{\pi} |u|_1 \leq c(\|\partial_x u\| + |u|_1). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Agora,

$$\sigma \mathcal{H}(u) = \mathcal{H}(\sigma u) - [\mathcal{H}, \sigma]u. \quad (4.24)$$

O operador comutador $[\mathcal{H}, \sigma]$ pode ser definido como

$$([\mathcal{H}, \sigma]u)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) u(y) dy, \quad (4.25)$$

com

$$K(x, y) = \frac{\sigma(x) - \sigma(y)}{x - y}.$$

Já que $K \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, então

$$|[\mathcal{H}, \sigma]u|_\infty \leq \|K\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} |u|_1. \quad (4.26)$$

Portanto, por (4.23), (4.24) e (4.26), com $\sigma' \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $1/\sigma \leq \tilde{c}$ (onde $\tilde{c}$ é uma constante) temos,

$$\begin{aligned} |\sigma \mathcal{H}(u)|_\infty &\leq |\mathcal{H}(\sigma u)|_\infty + |[\mathcal{H}, \sigma]u|_\infty \\ &\leq c(\|\partial_x(\sigma u)\| + |\sigma u|_1) + \|K\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} |u|_1 \\ &\leq c(\|\sigma' u\| + \|\sigma \partial_x u\| + |\sigma u|_1) + \|K\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} |u|_1 \\ &\leq c(|\sigma u|_1 + \|\sigma \partial_x u\| + \|u\|). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

LEMA 4.5 *Dados $s > \frac{3}{2}$ e $\sigma \in \mathcal{P}$, existe $c = c(s, \sigma) > 0$ tal que*

$$|\sigma \mathcal{H}(uv)|_\infty \leq c(\|u\|_s \|v\|_{L^2_\sigma} + \|v\|_s \|u\|_{L^2_\sigma}) \quad (4.27)$$

Demonstração. Observe que

$$|\sigma uv|_1 \leq \|\sigma u\| \|v\|, \quad (4.28)$$

$$\|\sigma \partial_x(uv)\| \leq |\partial_x u|_\infty \|\sigma v\| + |\partial_x v|_\infty \|\sigma u\|, \quad (4.29)$$

$$\|\sigma uv\| \leq \|u\|_\infty \|\sigma v\|. \quad (4.30)$$

De (4.19), (4.28)-(4.30) obtemos:

$$\begin{aligned} |\sigma \mathcal{H}(uv)|_\infty &\leq c(|\sigma uv|_1 + \|\sigma \partial_x(uv)\| + \|uv\|) \\ &\leq c(\|\sigma u\| \|v\| + |\partial_x u|_\infty \|\sigma v\| + |\partial_x v|_\infty \|\sigma u\| + \|uv\|) \\ &\leq c(\|u\|_s \|v\|_{L^2_\sigma} + \|v\|_s \|u\|_{L^2_\sigma}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O lema a seguir será empregado para a demonstração da propriedade de dependência contínua da solução em relação ao dado inicial. Primeiramente carecemos definir alguns operadores em L^2_σ , a saber:

$$\Gamma_1(u)v = |u|^2 \partial_x v, \quad \Gamma_2(u)v = u^2 \partial_x \bar{v}, \quad \Gamma_3(u)v = -2iu \mathcal{H} \mathcal{R}(\bar{u} \partial_x v), \quad \Gamma_4(u)v = i|u|^2 v.$$

LEMA 4.6 . Sejam $s > \frac{3}{2}$, $\omega = \sigma^s$ com $\sigma \in \mathcal{P}$, e seja $R > 0$. Existe $c = c(s, \sigma, R) > 0$ tal que, se $u, v \in B_{s,\omega}(0, R)$ então,

$$\| \Gamma_j(u)\nu - \Gamma_j(v)\nu \|_{L_\omega^2} \leq c \| u - v \|_{s,\omega} \| \nu \|_{s,\omega} \quad (4.31)$$

Demonstração. De fato, temos

$$\begin{aligned} \| \Gamma_1(u)\nu - \Gamma_1(v)\nu \|_{L_\omega^2} &= \| \omega(|u|^2 \partial_x \nu - |v|^2 \partial_x \nu) \| \\ &= \| \omega[(u-v)\bar{u} + (\bar{u}-\bar{v})v] \partial_x \nu \| \\ &\leq \| \omega(u-v)\bar{u} \partial_x \nu \| + \| \omega(\bar{u}-\bar{v})v \partial_x \nu \| \\ &\leq c \| u - v \|_{L_\omega^2} \| \nu \|_s, \end{aligned} \quad (4.32)$$

analogamente,

$$\| \Gamma_2(u)\nu - \Gamma_2(v)\nu \|_{L_\omega^2} = \| \omega(u-v)(u+v) \partial_x \nu \| \leq c \| u - v \|_{L_\omega^2} \| \nu \|_s, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \| \Gamma_3(u)\nu - \Gamma_3(v)\nu \|_{L_\omega^2} &= 2 \| u\mathcal{H}\mathcal{R}(\bar{u}\partial_x \nu) - v\mathcal{H}\mathcal{R}(\bar{v}\partial_x \nu) \|_{L_\omega^2} \\ &\leq 2 \left(\| u\mathcal{H}\mathcal{R}(\bar{u}\partial_x \nu) - v\mathcal{H}\mathcal{R}(\bar{u}\partial_x \nu) \|_{L_\omega^2} + \| v\mathcal{H}\mathcal{R}(\bar{u}\partial_x \nu) - v\mathcal{H}\mathcal{R}(\bar{v}\partial_x \nu) \|_{L_\omega^2} \right) \\ &\leq c \left(\| u - v \|_{L_\omega^2} \| u \|_s \| \nu \|_{s,\omega} + \| v \|_{L_\omega^2} \| u - v \|_{s,\omega} \| \nu \|_s \right) \\ &\leq c \| u - v \|_{s,\omega} \| \nu \|_{s,\omega}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \| \Gamma_4(u)\nu - \Gamma_4(v)\nu \|_{L_\omega^2} &= \| \omega(|u|^2 - |v|^2)\nu \| \\ &\leq c \| u - v \|_{s,\omega} \| \nu \|_{s,\omega}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

logo o lema segue de (4.32)-(4.35). ■

Sejam $\sigma \in \mathcal{P}$, $\sigma_o = \inf\{\sigma(x) : x \in \mathbb{R}\}$ e $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma'(x)|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\sigma_n := \frac{n\sigma}{n + \sigma} \in \mathcal{P} \quad (4.36)$$

e satisfaz

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \sigma_n(x) \geq \frac{\sigma_o}{1 + \sigma_o}, \quad (4.37)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|\partial_x \sigma_n(x)\| \leq M. \quad (4.38)$$

Portanto de (4.18) deduzimos que existe um $V = V(s, \sigma_o, M) > 0$ tal que se $|x - y| \leq 1$ então

$$\omega_n(y) \leq V\omega_n(x) \quad (4.39)$$

onde $\omega_n = \sigma_n^s$. Observemos que $\omega_n \uparrow \omega$ quando $n \rightarrow \infty$.

4.2 Demonstração do Teorema 4.2.

Seja $R > 0$ tal que

$$\sup_{[0, T]} \|u(t)\|_s < R. \quad (4.40)$$

Consideremos uma seqüência $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $H^\infty(\mathbb{R}) \cap L_\omega^2(\mathbb{R})$ com $\phi_k \rightarrow \phi$. Pelo Teorema 2.1 podemos supor que para $k \in \mathbb{N}$, existe $u_k \in C^1([0, T]; H^\infty(\mathbb{R}))$ solução de (8) com $u_k(0) = \phi_k$, tal que

$$\sup_{[0, T]} \|u_k(t)\|_s < R. \quad (4.41)$$

Já que $\omega_n \leq n^s$, temos que $\omega_n u_k \in C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$ e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\omega_n u_k\|^2 &= 2 \left\{ \langle -i\omega_n \partial_x^2 u_k, \omega_n u_k \rangle + \langle \omega_n |u_k|^2 \partial_x u_k, \omega_n u_k \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \omega_n u_k^2 \partial_x \bar{u}_k, \omega_n u_k \rangle - 2 \langle i\omega_n u_k \mathcal{H} \text{Re}(\bar{u}_k \partial_x u_k), \omega_n u_k \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Integração por partes mostra que

$$\langle -i\omega_n \partial_x^2 u_k, \omega_n u_k \rangle = \langle 2i\partial_x \omega_n \partial_x u_k, \omega_n u_k \rangle. \quad (4.43)$$

Como $|\partial_x \omega_n| \leq s |\partial_x \sigma_n| \omega_n^{1-\frac{1}{s}}$ (porque $\partial_x \omega_n = s \left(\frac{n\sigma}{n+\sigma}\right)^{s-1} \partial_x \left(\frac{n\sigma}{n+\sigma}\right) = \omega^{1-\frac{1}{s}} \partial_x \sigma_n$), de (4.38) obtemos,

$$|\partial_x \omega_n| \leq c(s, M) \omega_n^{1-\frac{1}{s}}. \quad (4.44)$$

Pelas expressões (4.42), (4.43) e (4.44) temos:

$$\begin{aligned}
\langle -i\omega_n \partial_x^2 u_k, \omega_n u_k \rangle &= \langle 2i\partial_x \omega_n \partial_x u_k, \omega_n u_k \rangle \\
&\leq |\partial_x \omega_n|_\infty^2 \|\partial_x u_k\|^2 + \|\omega_n u_k\|^2 \\
&\leq c(\|u_k\|_s^2 + \|\omega_n u_k\|^2),
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
|\langle \omega_n |u_k|^2 \partial_x u_k, \omega_n u_k \rangle| &\leq c(|\omega_n|_\infty^2 \| |u_k|^2 \partial_x u_k \|^2 + \|\omega_n u_k\|^2) \\
&\leq c(\|u_k\|_s^6 + \|\omega_n u_k\|^2),
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$|\langle \omega_n u_k^2 \partial_x \bar{u}_k, \omega_n u_k \rangle| \leq c(\|u_k\|_s^6 + \|\omega_n u_k\|^2) \tag{4.47}$$

e

$$\begin{aligned}
|2\langle i\omega_n u_k \mathcal{H}Re(\bar{u}_k \partial_x u_k), \omega_n u_k \rangle| &\leq c(|\omega_n|_\infty^2 |u_k|_\infty^2 \|\mathcal{H}Re(\bar{u}_k \partial_x u_k)\|^2 + \|\omega_n u_k\|^2) \\
&\leq c(\|u_k\|_s^2 + \|\omega_n u_k\|^2).
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Logo, substituindo (4.45)-(4.48) em (4.42) obtemos,

$$\frac{d}{dt} \|\omega_n u_k\|^2 \leq c(\|u_k\|_s^6 + \|u_k\|_s^2 + \|\omega_n u_k\|^2). \tag{4.49}$$

Integrando (4.49) de t_0 a t_1 ($0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T$) obtemos,

$$|\|\omega_n u_k(t_1)\|^2 - \|\omega_n u_k(t_0)\|^2| \leq c \int_{t_0}^{t_1} (\|u_k\|_s^6 + \|u_k\|_s^2 + \|\omega_n u_k\|^2) d\tau. \tag{4.50}$$

Tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$ e por (4.40) segue que

$$|\|\omega_n u(t_1)\|^2 - \|\omega_n u(t_0)\|^2| \leq cR^2(1 + R^4)(t_1 - t_0) + c \int_{t_0}^{t_1} \|\omega_n u(t)\|^2 dt, \tag{4.51}$$

na qual aplicando a desigualdade de Gronwall concluímos que as funções $\|\omega_n u\|^2$ são uniformemente limitadas. Então, pelo Teorema da Convergência monótona, $\|\omega_n u\|^2 \rightarrow \|\omega u\|^2$ e assim, $\|u\|_{L_\omega^2}^2 \in C([0, T]; \mathbb{R}_+)$. Como

$$u \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^\infty([0, T]; L_\omega^2(\mathbb{R})),$$

temos que $u \in C_w([0, T]; L_\omega^2(\mathbb{R}))$. Logo,

$$u \in C([0, T]; L_\omega^2(\mathbb{R})).$$

Agora provaremos a dependência contínua da solução em relação ao dado inicial. Já temos a dependência contínua em $H^s(\mathbb{R})$ ($s > \frac{3}{2}$), portanto falta analisarmos a norma de $L^2_\omega(\mathbb{R})$. Sejam $u(t)$, $v(t)$ as correspondentes soluções do PVI (2.1) com dados iniciais ϕ e ψ , respectivamente. Então $\mathbf{w} = u - v$ satisfaz

$$\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2_\omega}^2 \leq \|\phi - \psi\|_{L^2_\omega}^2 + c \sum_{j=1}^3 \int_0^t (\langle \omega \Gamma_j(u) \mathbf{w}, \omega \mathbf{w} \rangle + \langle \omega (\Gamma_j(u) \mathbf{w} - \Gamma_j(v) \mathbf{w}), \omega \mathbf{w} \rangle)(\tau) d\tau. \quad (4.52)$$

Tomando um $\tilde{R} > \max\{\sup_{[0,T]} \|u(t)\|_{s,\omega}, \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_{s,\omega}\}$, temos por (4.31) no Lema 4.6 que existe um $c = c(s, \sigma, \tilde{R}) > 0$ tal que

$$\langle \omega (\Gamma_j(u) \mathbf{w} - \Gamma_j(v) \mathbf{w}), \omega \mathbf{w} \rangle \leq c \|\mathbf{w}\|_{s,\omega}^2 \quad (4.53)$$

e pelo mesmo lema,

$$\langle \omega \Gamma_j(u) \mathbf{w}, \omega \mathbf{w} \rangle \leq c \|\mathbf{w}\|_{s,\omega}^2. \quad (4.54)$$

Substituindo (4.53), (4.54) em (4.52) obtemos,

$$\|\mathbf{w}(t)\|_{L^2_\omega}^2 \leq \|\phi - \psi\|_{L^2_\omega}^2 + c \int_0^t \|\mathbf{w}(\tau)\|_{s,\omega}^2 d\tau. \quad (4.55)$$

Agora, combinando a dependência contínua em $H^s(\mathbb{R})$ (com dado inicial pequeno) com o Lema de Gronwall, a dependência contínua em $H_{s,\omega}(\mathbb{R})$ segue de (4.55). $\square$

Capítulo 5

MÁ COLOCAÇÃO

Nos Capítulos 2 e 3 respectivamente, vimos que os PVI's (2.1) e (3.1) são localmente bem postos para dados iniciais *pequenos* em $H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$; tal resultado foi obtido por meio de um método iterativo sobre a equação integral associada ao problema, fazendo uso principalmente do ganho de regularidade proporcionado pela parte linear da equação, conhecidos como efeitos regularizantes. Vimos que uma das consequências disso é que a aplicação dado-solução é C^∞ -diferenciável (Corolários 2.7 e 3.3). A pergunta que surge é: até que ponto um método dessa natureza poderia funcionar em nosso problema? Argumentos de *escala* (veja Capítulo 7) sugerem que o problema é mal posto em $H^s(\mathbb{R})$ com $s < 0$; neste capítulo vamos reforçar esse fato, no sentido de que não é possível aplicar um método iterativo de Picard à equação integral associada a cada problema em questão, nos casos $\gamma > 0$ e $\gamma = 0$. O método foi idealizado por J. Bourgain ([5]), aperfeiçoado por H. Takaoka ([38]) e L. Molinet J. Saut e N. Tzvetkov (veja [25, 26]), e aplicado a muitos problemas (por exemplo, veja [39], [7]). Dentre esses trabalhos, a abordagem que mais nos inspirou e ajudou é a feita por X. Carvajal e F. Linares ([7]).

5.1 Má Colocação para o PVI associado à equação NLS não-local.

Consideremos o PVI para a equação (8) (com $\beta = 1$, sem perda de generalidade):

$$\begin{cases} \partial_t u = -i\partial_x^2 u + u\partial_x(|u|^2) - iu\mathcal{H}\partial_x(|u|^2) + i\gamma|u|^2 u, & x, t, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x). \end{cases} \quad (5.1)$$

A fórmula de Duhamel para o PVI (5.1) é

$$u(t) = U(t)\phi + \int_0^t U(t-\tau)(u\partial_x(|u|^2) - iu\mathcal{H}\partial_x(|u|^2) + i\gamma|u|^2 u)(\tau)d\tau. \quad (5.2)$$

Vamos estabelecer que não existe um $T > 0$ tal que o PVI (5.1) admita uma única solução local no intervalo $[0, T]$ e tal que a aplicação dado-solução seja C^3 -diferenciável de $H^s(\mathbb{R})$ a $C([0, t]; H^s(\mathbb{R}))$, se $s < 0$. É suficiente então que provemos tal propriedade na origem, mais precisamente, o seguinte teorema:

TEOREMA 5.1 *Se $s \in \mathbb{R}$ é tal que $s < 0$, então não existe $T > 0$ tal que o PVI (5.1) admita uma única solução local definida no intervalo $[0, T]$ e tal que a aplicação dado-solução*

$$\phi \longmapsto u(t), \quad t \in [0, T]$$

para (5.1) é C^3 -diferenciável em zero de $H^s(\mathbb{R})$ a $C([0, t]; H^s(\mathbb{R}))$.

OBSERVAÇÃO 5. Sempre que considerarmos $u(t) = U(t)\phi$, a título de economia de espaço, a parte não-linear da equação será denotada como:

$$i\gamma|U(t)\phi|^2 U(t)\phi + \beta U(t)\phi\partial_x(|U(t)\phi|^2) - iU(t)\phi\mathcal{H}\partial_x(|U(t)\phi|^2) := F_\gamma(U(t)\phi).$$

Uma condição *a priori* para a aplicação dado-solução ser C^3 -diferenciável de $H^s(\mathbb{R})$ a $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$, é que exista um espaço métrico Z_T continuamente imerso em $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ tal que, para

$$\|U(t)\phi\|_{Z_T} \leq C \|\phi\|_s, \quad \phi \in H^s(\mathbb{R}) \quad (5.3)$$

tenhamos

$$\left\| \int_0^t U(t-\tau) (i\gamma|u|^2u + u\partial_x(|u|^2) - iu\mathcal{H}\partial_x(|u|^2)(\tau)d\tau) \right\|_{Z_T} \leq C \|u\|_{Z_T}^3, \quad u \in Z_T. \quad (5.4)$$

Afirmamos que para $s < 0$, a desigualdade (5.4) é falsa. Para provar essa afirmação vamos supor que exista Z_T tal que as desigualdades (5.3) e (5.4) sejam válidas. Tomamos $u = U(t)\phi$ em (5.4); então usando (5.3) e o fato de que Z_T é continuamente imerso em $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$, segue que, para todo $t \in [0, T]$,

$$\left\| \int_0^t U(t-\tau) F_\gamma(U(\tau)\phi) d\tau \right\|_s \leq C \|\phi\|_s^3. \quad (5.5)$$

Em suma necessitamos de demonstrar a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 5.2 *Se $s < 0$, existe uma $\phi \in H^s(\mathbb{R})$ tal que (5.5) falha.*

5.1.1 Prova do Teorema 5.1.

Vamos considerar já provado o resultado da Proposição 5.2, portanto, que a desigualdade (5.5) falha para alguma $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, $s < 0$. Consideremos o seguinte PVI

$$\begin{cases} \partial_t u = -i\partial_x^2 u + u\partial_x(|u|^2) - iu\mathcal{H}\partial_x(|u|^2) + i\gamma|u|^2u, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \mu\phi(x) \end{cases} \quad (5.6)$$

onde ϕ é escolhida no ato da demonstração da Proposição 5.2. Suponhamos que $u = u(\mu, x, t)$ é uma solução local de (5.6) e que a aplicação dado-solução seja C^3 -diferenciável em zero de $H^s(\mathbb{R})$ a $H^s(\mathbb{R})$. A fórmula de Duhamel para (5.6) é,

$$u(t) = \mu U(t)\phi + \int_0^t U(t-\tau) (u\partial_x(|u|^2) - iu\mathcal{H}\partial_x(|u|^2) + i\gamma|u|^2u)(\tau) d\tau$$

Diferenciando u temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} &= U(t)\phi + \int_0^t U(t-\tau) (\partial_\mu u \partial_x(|u|^2) + u \partial_x \partial_\mu(|u|^2) - i \partial_\mu u \mathcal{H} \partial_x(|u|^2)) \\ &\quad - i u \partial_\mu \mathcal{H} \partial_x(|u|^2) + i \gamma \partial_\mu(|u|^2) u + i \gamma |u|^2 \partial_\mu u)(\tau) d\tau \Big|_{\mu=0} \\ &= U(t)\phi, \end{aligned} \quad (5.7)$$

pois $\mu = 0$ anula o dado inicial de (5.6) e portanto, pela unicidade da solução, $u(0, x, t) = 0$; conseqüentemente, também temos $\partial_x u(0, x, t) = 0$. Diferenciando (5.7) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} \Big|_{\mu=0} &= \int_0^t U(t-\tau) (\partial_\mu^2 u \partial_x (|u|^2) + 2\partial_\mu u \partial_x \partial_\mu (|u|^2) + u \partial_x \partial_\mu^2 (|u|^2) \\ &\quad - i\partial_\mu^2 u \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) - 2i\partial_\mu u \mathcal{H} \partial_x \partial_\mu (|u|^2) - iu \partial_\mu^2 \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) \\ &\quad + i\gamma \partial_\mu^2 (|u|^2) u + 2i\gamma \partial_\mu (|u|^2) \partial_\mu u + i\gamma |u|^2 \partial_\mu^2 u) (\tau) d\tau \Big|_{\mu=0} = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

pois $\partial_x u(0, x, t) = 0$. Agora, diferenciando mais uma vez e fazendo uso de (5.7) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial \mu^3} \Big|_{\mu=0} &= \int_0^t U(t-\tau) (\partial_\mu^3 u \partial_x (|u|^2) + 3\partial_\mu^2 u \partial_x \partial_\mu (|u|^2) + 3\partial_\mu u \partial_x \partial_\mu^2 (|u|^2) \\ &\quad + u \partial_x \partial_\mu^3 (|u|^2) - i\partial_\mu^3 u \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) - 3i\partial_\mu^2 u \mathcal{H} \partial_x \partial_\mu (|u|^2) \\ &\quad - 3i\partial_\mu u \mathcal{H} \partial_x \partial_\mu^2 (|u|^2) - iu \partial_\mu^3 \mathcal{H} \partial_x (|u|^2) + i\gamma \partial_\mu^3 (|u|^2) u \\ &\quad + 3i\gamma \partial_\mu^2 (|u|^2) \partial_\mu u + 3i\gamma \partial_\mu (|u|^2) \partial_\mu^2 u + i\gamma |u|^2 \partial_\mu^3 u) (\tau) d\tau \Big|_{\mu=0} \\ &= 6 \int_0^t U(t-\tau) (\partial_\mu u \partial_x (|\partial_\mu u|^2) - i\partial_\mu u \mathcal{H} \partial_x (|\partial_\mu u|^2) + i|\partial_\mu u|^2 \partial_\mu u) (\tau) d\tau \Big|_{\mu=0} \\ &= 6 \int_0^t U(t-\tau) F_\gamma(U(\tau)\phi) d\tau. \end{aligned}$$

Pela hipótese de C^3 -diferenciabilidade obtemos,

$$\left\| \int_0^t U(t-\tau) F_\gamma(U(\tau)\phi) d\tau \right\|_s \lesssim \|\phi\|_s^3,$$

mas esta estimativa é (5.5) e falha se $s < 0$ e ϕ é escolhido como em (5.9) abaixo. $\square$

5.1.2 Prova da Proposição 5.2.

Propriedades tais como boa colocação local e comportamento assintótico provadas nos capítulos 2 e 3, respectivamente, para o PVI (8) são imediatamente herdadas por um eventual PVI para a equação (5) (isto é, para $\gamma = 0$) porque naqueles casos o termo $i|u|^2 u$ não oferece qualquer obstáculo, mas para se obter o resultado de má colocação estabelecido neste capítulo necessitamos de calcular algumas expressões que são ligeiramente diferentes

daquelas obtidas para o caso $\gamma > 0$. Assim, somos obrigados a dividir a demonstração da Proposição 5.2 nos casos: $\gamma > 0$ e $\gamma = 0$.

Vamos tomar a seguinte função ϕ definida por sua transformada de Fourier,

$$\hat{\phi}(\xi) = \eta^{-\frac{1}{2}} N^{-s} \chi_I(\xi), \quad N \gg 1, \text{ and } 0 < \eta \ll 1, \quad (5.9)$$

onde $I = [N, N + \eta]$, ou seja,

$$\phi(x) = \eta^{-\frac{1}{2}} N^{-s} \int_N^{N+\eta} e^{ix\xi} d\xi.$$

Note que $\|\phi\|_s \sim 1$.

A demonstração da proposição será feita por meio de uma seqüência de lemas. A divisão nos casos $\gamma > 0$ e $\gamma = 0$ necessita ser feita apenas na conclusão da demonstração.

Lemas Preliminares.

O lema abaixo traz uma importante identidade. Os passos para prová-lo são parecidos aos do Lemma 1 de [26].

LEMA 5.3 *Temos as seguintes identidades:*

(i) Para $\gamma > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_0^t U(t-\tau) F_\gamma(U(\tau)\phi) d\tau \\ &= \frac{-1}{\eta^{3/2} N^{3s}} \int_\Omega \frac{e^{-2it(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} - 1}{2(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} e^{ix\xi+it\xi^2} (\gamma + \xi - \xi_1 + |\xi - \xi_1|) d\xi d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

e então,

$$\begin{aligned} & \mathcal{F} \left\{ \int_0^t U(t-\tau) F_\gamma(U(\tau)\phi) d\tau \right\} \\ &= \frac{-e^{it\xi^2}}{\eta^{3/2} N^{3s}} \int_{\Omega(\xi)} \frac{e^{-2it(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} - 1}{2(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (\gamma + \xi - \xi_1 + |\xi - \xi_1|) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (5.11)$$

com

$$\Omega(\xi) = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \in I, -\xi_2 \in I, \xi - \xi_1 - \xi_2 \in I\}$$

e

$$\Omega = \{(\xi_1, \xi_2, \xi) \in \mathbb{R}^3 : (\xi_1, \xi_2) \in \Omega(\xi)\}.$$

(ii) Para $\gamma = 0$ temos,

$$\int_0^t U(t-\tau)F_0(U(\tau)\phi)d\tau = \frac{-2}{\eta^{3/2}N^{3s}} \int_A \frac{e^{-2it(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} - 1}{\xi_1 + \xi_2} e^{ix\xi + it\xi^2} d\xi d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.12)$$

e assim,

$$\mathcal{F} \left\{ \int_0^t U(t-\tau)F_0(U(\tau)\phi)d\tau \right\} = \frac{-2e^{it\xi^2}}{\eta^{3/2}N^{3s}} \int_{A(\xi)} \frac{e^{-2it(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} - 1}{\xi_1 + \xi_2} d\xi_1 d\xi_2, \quad (5.13)$$

com

$$A(\xi) = \{(\xi_1, \xi_2) \in \Omega(\xi) : \xi > \xi_1\},$$

$$A = \{(\xi_1, \xi_2, \xi) \in \mathbb{R}^3 : (\xi_1, \xi_2) \in A(\xi)\}$$

e, $\Omega(\xi)$ e Ω foram definidos acima.

Demonstração. Para chegar à identidade (5.10) devemos tomar a transformada inversa de Fourier com relação a x na expressão do lado esquerdo de (5.10) e efetuar a integração com relação a t , da seguinte maneira:

$$\int_0^t U(t-\tau)F_\gamma(U(\tau)\phi)d\tau = G_1 + G_2 + G_3, \quad (5.14)$$

onde

$$\begin{aligned} G_1 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + i(t-\tau)\xi^2} \mathcal{F} \{ i\gamma |U(\tau)\phi|^2 U(\tau)\phi \} (\xi) d\xi \\ &= i\gamma \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi + i(t-\tau)\xi^2} \widehat{U(\tau)\phi}(\xi - \xi_1 - \xi_2) \widehat{U(\tau)\phi}(\xi_2) \widehat{U(\tau)\phi}(\xi_1) d\xi d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \gamma \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi + it\xi^2} i e^{-2i\tau(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} \widehat{\phi}(\xi - \xi_1 - \xi_2) \widehat{\phi}(\xi_1) \widehat{\phi}(-\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 d\xi d\tau \\ &= \frac{\gamma}{\eta^{\frac{3}{2}}N^{3s}} \int_{\Omega} e^{ix\xi + it\xi^2} \int_0^t i e^{-2i\tau(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} d\tau d\xi_1 d\xi_2 d\xi \\ &= -\frac{\gamma}{\eta^{\frac{3}{2}}N^{3s}} \int_{\Omega} \frac{e^{-2it(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} - 1}{2(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} e^{ix\xi + it\xi^2} d\xi_1 d\xi_2 d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + i(t-\tau)\xi^2} \mathcal{F} \{ U(\tau) \phi \partial_x (|U(\tau) \phi|^2) \} (\xi) d\xi \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi + it\xi^2} i(\xi - \xi_1) e^{-2i\tau(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} \widehat{\phi}(\xi - \xi_1 - \xi_2) \widehat{\phi}(\xi_1) \widehat{\phi}(-\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 d\xi d\tau \\
&= -\frac{1}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \int_{\Omega} \frac{e^{-2it(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} - 1}{2(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} (\xi - \xi_1) e^{ix\xi + it\xi^2} d\xi d\xi_1 d\xi_2,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
G_3 &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + i(t-\tau)\xi^2} \mathcal{F} \{ iU(\tau) \phi \mathcal{H} \partial_x (|U(\tau) \phi|^2) \} (\xi) d\xi \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi + it\xi^2} |\xi - \xi_1| e^{-2i\tau(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} \widehat{\phi}(\xi - \xi_1 - \xi_2) \widehat{\phi}(\xi_1) \widehat{\phi}(-\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 d\xi d\tau \\
&= -\frac{1}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \int_{\Omega} \frac{e^{-2i\tau(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} - 1}{2(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} |\xi - \xi_1| e^{ix\xi + it\xi^2} d\xi d\xi_1 d\xi_2;
\end{aligned}$$

portanto, somando-se os termos G_i acima chega-se à identidade (5.10). A expressão (5.11) é obtida tomando-se a transformada de Fourier de (5.10) com relação a ξ . Para se chegar à identidade (5.12) procede-se exatamente como na obtenção de (5.10):

$$\begin{aligned}
&\int_0^t U(t - \tau) (U(\tau) \phi \partial_x (|U(\tau) \phi|^2) - iU(\tau) \phi \mathcal{H} \partial_x (|U(\tau) \phi|^2)) (\tau) d\tau \\
&= \frac{-1}{\eta^{3/2} N^{3s}} \int_{\Omega} \frac{e^{-2it(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} - 1}{2(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} e^{ix\xi + it\xi^2} (\xi - \xi_1 + |\xi - \xi_1|) d\xi d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \frac{-1}{\eta^{3/2} N^{3s}} \int_{\Omega} \frac{e^{-2it(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} - 1}{2(\xi_1 + \xi_2)} e^{ix\xi + it\xi^2} (1 + \operatorname{sgn}(\xi - \xi_1)) d\xi d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \frac{-2}{\eta^{3/2} N^{3s}} \int_A \frac{e^{-2it(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} - 1}{\xi_1 + \xi_2} e^{ix\xi + it\xi^2} d\xi d\xi_1 d\xi_2. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Agora, tomando a transformada de Fourier em ambos os lados de (5.12) chegamos a (5.13). ■

LEMA 5.4 *Fixe $\xi \in \mathbb{R}$. Então:*

(a) *Dados $\gamma > 0$ fixo e $(\xi_1, \xi_2) \in \Omega(\xi)$ (ou em $A(\xi)$) temos,*

$$|2(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)| \leq \eta^2 \tag{5.16}$$

e

$$|\gamma + \xi - \xi_1 + |\xi - \xi_1|| \gtrsim 1. \tag{5.17}$$

(b) Se $\xi \in (N, N + \eta)$, então

$$|\Omega(\xi)| \gtrsim \eta^2. \quad (5.18)$$

Seja $B(\xi) = \{(\xi_1, \xi_2) \in A(\xi) : \xi - \xi_1 \geq \frac{\eta}{10}\}$. Se $\xi \in (N + \frac{\eta}{2}, N + \eta)$, então

$$|A(\xi)| \geq |B(\xi)| \gtrsim \eta^2. \quad (5.19)$$

(c) Para qualquer $\gamma \geq 0$ temos,

$$\text{supp } \mathcal{F} \left\{ \int_0^t U(t - \tau) F_\gamma(U(\tau)\phi) d\tau \right\} \subseteq [N - \eta, N + 2\eta]. \quad (5.20)$$

Demonstração. (a) Observe que

$$-\eta = N - N - \eta \leq \xi_1 + \xi_2 \leq N + \eta - N = \eta$$

e que

$$-\eta \leq \xi - \xi_1 = \xi - \xi_1 - \xi_2 + \xi_2 \leq N + \eta - N = \eta$$

implicam em (5.16). Agora, (5.17) segue imediatamente:

$$|\gamma + \xi - \xi_1 - |\xi - \xi_1|| \geq 1 - 2|\xi - \xi_1| \geq 1 - 2\eta \gtrsim 1,$$

pois η é suficientemente *pequeno* ($< \frac{\gamma}{2}$) e $\gamma > 0$ é fixo.

(b) Fixado $\xi \in (N, N + \eta)$, como $N \leq \xi - \xi_1 - \xi_2 \leq N + \eta$, segue que,

$$-\xi_1 + \xi - N - \eta =: f_1(\xi_1) \leq \xi_2 \leq f_2(\xi_1) := -\xi_1 + \xi - N,$$

logo, $\Omega(\xi)$ situa-se na região entre as duas retas f_1 e f_2 ; mas como $N \leq \xi_1 \leq N + \eta$ e $N \leq -\xi_2 \leq N + \eta$, segue que $\Omega(\xi)$ é um hexágono formado pela intersecção da região entre as retas f_1 e f_2 com o quadrado $I \times -I$ (veja Figura 5.1); assim,

$$|\Omega(\xi)| = \eta^2 - \frac{(\xi - N - \eta)^2 + (\xi - N)^2}{2} \gtrsim \eta^2.$$

Para provar (5.19), observemos que $B(\xi)$ é o quadrilátero de vértices $V_1(\xi + \frac{\eta}{10}; -N - \frac{\eta}{10})$, $V_2(\xi + \frac{\eta}{10}; -N - \eta)$, $V_3(N + \eta; -N - \eta)$, $V_4(N + \eta; -2N - \eta + \xi)$ (veja Figura 5.2) e portanto,

$$|B(\xi)| = (\xi - N) \cdot (N + \frac{9\eta}{10} - \xi) + \frac{(N + \frac{9\eta}{10} - \xi)^2}{2} \gtrsim \eta^2.$$

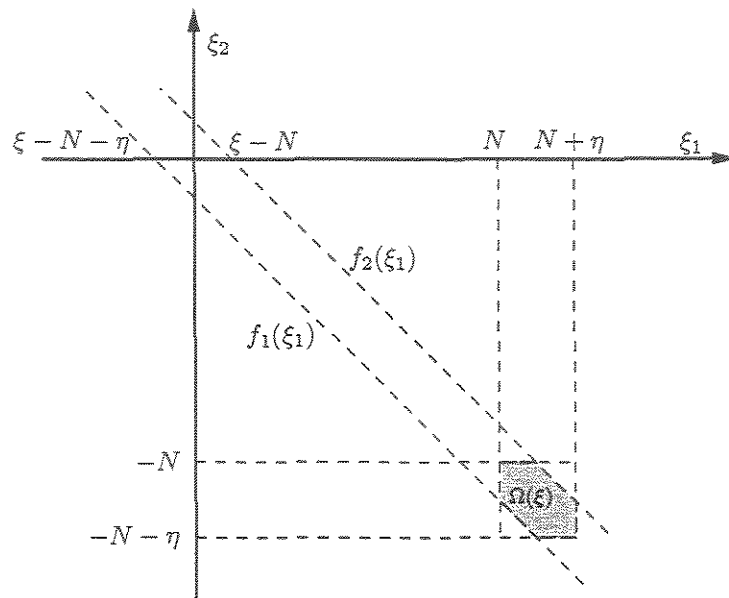


Figura 5.1: Região $\Omega(\xi)$.

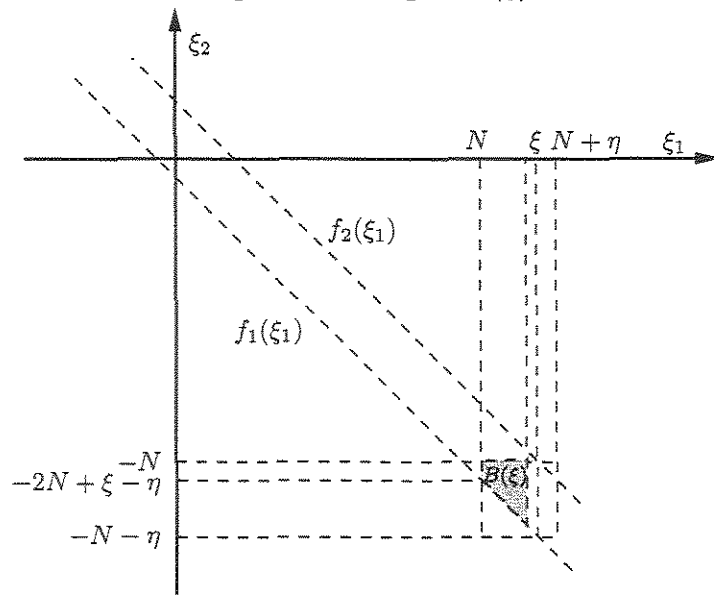


Figura 5.2: Região $B(\xi)$.

(c) Se $\Omega(\xi)$ é não vazio temos,

$$N - \eta = 2N - N - \eta \leq N + \xi_1 + \xi_2 \leq \xi \leq \xi - \xi_1 - \xi_2 + \xi_1 + \xi_2 \leq 2N + 2\eta + \xi_2 \leq N + 2\eta,$$

e então $\xi \in [n - \eta, N + 2\eta]$. A prova para o caso $\gamma = 0$ é exatamente a mesma que para o caso $\gamma > 0$. ■

OBSERVAÇÃO 6. Se $N + \eta < \xi < N + 2\eta$, então $\Omega(\xi)$ é um triângulo retângulo isósceles sobre a diagonal do quadrado $I \times -I$; e $\Omega(\xi)$ é um triângulo retângulo isósceles sob a diagonal do quadrado $I \times -I$ se $N - \eta < \xi < N$. Se $N + \eta < \xi < N + 2\eta$, então $A(\xi)$ é um triângulo retângulo isósceles sobre a diagonal do quadrado $I \times -I$; se $N - \eta < \xi < N$, nesse caso $A(\xi)$ é o conjunto vazio.

Agora estamos aptos a concluir a demonstração da Proposição 5.2. Primeiro consideremos o caso $\gamma > 0$. Seja $k \in (1, \frac{3}{2})$. Um elementar mas importante resultado diz que, dada uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, um conjunto de medida finita $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que, $|f(x)| \geq c_0$ para algum $c_0 > 0$ e para todo $x \in \Omega$, então

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \geq c_0 |\Omega|. \quad (5.21)$$

Vamos fazer uso, sempre que necessário, das seguintes notações:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\xi, \xi_1, \xi_2) = 2(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2) \text{ e } \mathcal{N} = \mathcal{N}(\xi, \xi_1, \xi_2) = \gamma + \xi - \xi_1 + |\xi - \xi_1| \quad (5.22)$$

Então, usando as notações acima, o Lema 5.3 (i) dá-nos a seguinte identidade:

$$\left\| \int_0^t U(t - \tau) F_{\gamma}(U(\tau)\phi) d\tau \right\|_s = \frac{\eta^{-\frac{3}{2}}}{N^{3s}} \left(\int_{N-\eta}^{N+2\eta} (1 + \xi^2)^s \left| \int_{\Omega(\xi)} \frac{e^{-it\mathcal{M}} - 1}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.23)$$

Observemos que,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega(\xi)} \frac{e^{-it\mathcal{M}} - 1}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 &= \left| \int_{\Omega(\xi)} \frac{\cos(t\mathcal{M}) - 1}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 - i \int_{\Omega(\xi)} \frac{\text{sen}(t\mathcal{M})}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 \\ &= \left(\int_{\Omega(\xi)} \frac{\cos(t\mathcal{M}) - 1}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right)^2 + \left(\int_{\Omega(\xi)} \frac{\text{sen}(t\mathcal{M})}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right)^2 \\ &\geq \left(\int_{\Omega(\xi)} \frac{\text{sen}(t\mathcal{M})}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right)^2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Logo, pelo Lema 5.4 junto com (5.21) e (5.24) segue que,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t U(t-\tau) F_\gamma(U(\tau)\phi) d\tau \right\|_s &\gtrsim \frac{\eta^{-\frac{3}{2}}}{N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{\Omega(\xi)} \frac{\text{sen}(t\mathcal{M})}{\mathcal{M}} \mathcal{N} d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\gtrsim \frac{\gamma}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s |\Omega(\xi)|^2 |t|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\gtrsim \frac{\gamma \eta^2 |t|}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} \xi^{2s} d\xi \right)^{1/2} \\
&\gtrsim \frac{\gamma \eta^2 |t|}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} N^{2s} d\xi \right)^{1/2} \\
&\gtrsim \frac{\gamma \eta^{\frac{1}{2}} |t|}{N^{2s}} (N + (2-k)\eta - N - (k-1)\eta)^{1/2} \gtrsim \frac{\gamma \eta |t|}{N^{2s}} \quad (5.25)
\end{aligned}$$

e assim, escolhendo $s < 0$, $\eta = N^s$, obtemos:

$$1 \sim \|\phi\|_s^3 \geq C|t|N^{-s},$$

que é uma contradição para $N \gg 1$. Portanto, a proposição está provada para o caso $\gamma > 0$.

Agora passemos ao caso $\gamma = 0$. Utilizando o Lema 5.3 (ii), o Lema 5.4 juntamente com as desigualdades (5.24) e (5.21), respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t U(t-\tau) (U(\tau)\phi \partial_x (|U(\tau)\phi|^2) - iU(\tau)\phi \mathcal{H} \partial_x (|U(\tau)\phi|^2)) (\tau) d\tau \right\|_s \\
&= \frac{2}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N-\eta}^{N+2\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{A(\xi)} \frac{e^{-2it(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} - 1}{2(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (\xi-\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\gtrsim \frac{|t|}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{A(\xi)} \frac{\text{sen} 2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)}{2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (\xi-\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\gtrsim \frac{|t|}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{B(\xi)} \frac{\text{sen} 2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)}{2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (\xi-\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\gtrsim \frac{|t|}{\eta^{\frac{1}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s |B(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \gtrsim \frac{|t|\eta^2}{N^{2s}}. \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Agora, escolhendo $s < 0$ e $\eta = N^{s/2}$ obtemos,

$$1 \sim \|\phi\|_s^3 \geq C|t|N^{-s},$$

que caracteriza uma contradição se $N \gg 1$. Assim, o Teorema 5.1 está provado. $\square$

5.2 Má Colocação para o PVI associado à equação INLS não-local.

Consideremos o PVI para a equação (7) (com $\alpha = \beta = 1$, sem perda de generalidade):

$$\begin{cases} \partial_t u = -i\partial_x^2 u + u\partial_x(|u|^2) - iu\mathcal{T}_h\partial_x(|u|^2) + i\gamma|u|^2u, & x, t, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x). \end{cases} \quad (5.27)$$

A fórmula de Duhamel para o PVI (5.27) é

$$u(t) = U(t)\phi + \int_0^t U(t-\tau)(u\partial_x(|u|^2) - iu\mathcal{T}_h\partial_x(|u|^2) + i\gamma|u|^2u)(\tau)d\tau. \quad (5.28)$$

A exemplo da seção anterior, vamos estabelecer que não existe um $T > 0$ tal que o PVI (5.27) admita uma única solução local no intervalo $[0, T]$ e tal que a aplicação dado-solução seja C^3 -diferenciável de $H^s(\mathbb{R})$ a $C([0, t]; H^s(\mathbb{R}))$ na origem, se $s < 0$. O teorema é o seguinte:

TEOREMA 5.5 *Se $s \in \mathbb{R}$ é tal que $s < 0$, então não existe $T > 0$ de modo que o PVI (5.27) com $\gamma > 0$, admita uma única solução local definida no intervalo $[0, T]$ e tal que a aplicação dado-solução*

$$\phi \longmapsto u(t), \quad t \in [0, T]$$

para (7) é C^3 -diferenciável em zero de $H^s(\mathbb{R})$ a $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$. O mesmo resultado é válido para o PVI com $\gamma = 0$, tomando-se $h > 0$ suficientemente grande (veja definição do operador $\mathcal{T}_h$ em (3) na Introdução).

Demonstração. Como a equação do PVI (5.1) é um caso particular da equação do PVI (5.27) (elas diferem “apenas” no termo não-local), será possível aproveitar grande parte dos cálculos da seção anterior. Como anteriormente, sempre que $u(t) = U(t)\phi$, a título de economia de espaço, a parte não-linear da equação será denotada como:

$$i\gamma|U(t)\phi|^2U(t)\phi + \beta U(t)\phi\partial_x(|U(t)\phi|^2) - iU(t)\phi\mathcal{T}_h\partial_x(|U(t)\phi|^2) := \tilde{F}_\gamma(U(t)\phi).$$

Vamos evitar repetir alguns argumentos, para que a leitura não fique muito cansativa. Consideremos o PVI

$$\begin{cases} \partial_t u = -i\partial_x^2 u + u\partial_x(|u|^2) - iu\mathcal{T}_h\partial_x(|u|^2) + i\gamma|u|^2u, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \mu\phi(x) \end{cases} \quad (5.29)$$

onde ϕ foi definida em (5.9) e $\gamma \geq 0$. Suponhamos que $u = u(\mu, x, t)$ é uma solução local de (5.29) e que a aplicação dado-solução seja C^3 -diferenciável em zero de $H^s(\mathbb{R})$ a $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$. A fórmula de Duhamel para (5.29) é,

$$u(t) = \mu U(t)\phi + \int_0^t U(t-\tau)(u\partial_x(|u|^2) - iu\mathcal{T}_h\partial_x(|u|^2) + i\gamma|u|^2u)(\tau)d\tau$$

Diferenciando u temos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} &= U(t)\phi + \int_0^t U(t-\tau)(\partial_\mu u\partial_x(|u|^2) + u\partial_x\partial_\mu(|u|^2) - i\partial_\mu u\mathcal{T}_h\partial_x(|u|^2)) \\ &\quad - iu\partial_\mu\mathcal{T}_h\partial_x(|u|^2) + i\gamma\partial_\mu(|u|^2)u + i\gamma|u|^2\partial_\mu u)(\tau)d\tau \Big|_{\mu=0} \\ &= U(t)\phi, \end{aligned} \quad (5.30)$$

Diferenciando (5.30) obtemos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} \right|_{\mu=0} &= \int_0^t U(t-\tau)(\partial_\mu^2 u\partial_x(|u|^2) + 2\partial_\mu u\partial_x\partial_\mu(|u|^2) + u\partial_x\partial_\mu^2(|u|^2) \\ &\quad - i\partial_\mu^2 u\mathcal{T}_h\partial_x(|u|^2) - 2i\partial_\mu u\mathcal{T}_h\partial_x\partial_\mu(|u|^2) - iu\partial_\mu^2\mathcal{T}_h\partial_x(|u|^2) \\ &\quad + i\gamma\partial_\mu^2(|u|^2)u + 2i\gamma\partial_\mu(|u|^2)\partial_\mu u + i\gamma|u|^2\partial_\mu^2 u)(\tau)d\tau \Big|_{\mu=0} = 0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

pois $\partial_x u(0, x, t) = 0$.

Agora, diferenciando mais uma vez e fazendo uso de (5.30) obtemos:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^3 u}{\partial \mu^3} \right|_{\mu=0} &= \int_0^t U(t-\tau) (\partial_\mu^3 u \partial_x (|u|^2) + 3\partial_\mu^2 u \partial_x \partial_\mu (|u|^2) + 3\partial_\mu u \partial_x \partial_\mu^2 (|u|^2) \\
&\quad + u \partial_x \partial_\mu^3 (|u|^2) - i\partial_\mu^3 u \mathcal{T}_h \partial_x (|u|^2)) - 3i\partial_\mu^2 u \mathcal{T}_h \partial_x \partial_\mu (|u|^2) \\
&\quad - 3i\partial_\mu u \mathcal{T}_h \partial_x \partial_\mu^2 (|u|^2) - iu \partial_\mu^3 \mathcal{T}_h \partial_x (|u|^2) + i\gamma \partial_\mu^3 (|u|^2) u \\
&\quad + 3i\gamma \partial_\mu^2 (|u|^2) \partial_\mu u + 3i\gamma \partial_\mu (|u|^2) \partial_\mu^2 u + i\gamma |u|^2 \partial_\mu^3 u)(\tau) d\tau \Big|_{\mu=0} \\
&= 6 \int_0^t U(t-\tau) (\partial_\mu u \partial_x (|\partial_\mu u|^2) - i\partial_\mu u \mathcal{T}_h \partial_x (|\partial_\mu u|^2) + i|\partial_\mu u|^2 \partial_\mu u)(\tau) d\tau \Big|_{\mu=0} \\
&= 6 \int_0^t U(t-\tau) \tilde{F}_\gamma(U(\tau)\phi) d\tau.
\end{aligned}$$

Pela hipótese de C^3 -diferenciabilidade obtemos,

$$\left\| \int_0^t U(t-\tau) \tilde{F}_\gamma(U(\tau)\phi) d\tau \right\|_s \lesssim \|\phi\|_s^3. \quad (5.32)$$

Provemos então que esta estimativa falha se $s < 0$, escolhendo por exemplo, a função ϕ definida em (5.9).

LEMA 5.6. *Para $\gamma \geq 0$, são válidas as seguintes identidades:*

$$\begin{aligned}
&\int_0^t U(t-\tau) \tilde{F}_\gamma(U(\tau)\phi) d\tau \\
&= \frac{-1}{\eta^{3/2} N^{3s}} \int_\Omega \frac{e^{-2it(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} - 1}{2(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} e^{ix\xi+it\xi^2} (\gamma + f_h(\xi-\xi_1)) d\xi d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned} \quad (5.33)$$

e então,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F} \left\{ \int_0^t U(t-\tau) \tilde{F}_\gamma(U(\tau)\phi) d\tau \right\} \\
&= \frac{-e^{it\xi^2}}{\eta^{3/2} N^{3s}} \int_{\Omega(\xi)} \frac{e^{-2it(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} - 1}{2(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (\gamma + f_h(\xi-\xi_1)) d\xi_1 d\xi_2,
\end{aligned} \quad (5.34)$$

onde

$$f_h(x) = x + x(\coth(hx) - \frac{1}{hx}).$$

$\Omega(\xi)$ e Ω , são como no Lema 5.3.

Demonstração. A parte polinomial da equação já foi tratada no Lema 5.3. Vejamos então o termo não-local. Seja

$$\tilde{G}_3 = - \int_0^t U(t-\tau) i U(\tau) \phi \mathcal{T}_h \partial_x (|U(\tau) \phi|^2) d\tau.$$

Como antes, vamos tomar a transformada de Fourier inversa com relação a x e depois integrar com relação a t , como segue:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_3 &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + i(t-\tau)\xi^2} \mathcal{F} \{ i U(\tau) \phi \mathcal{T}_h \partial_x (|U(\tau) \phi|^2) \} (\xi) d\xi \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi + it\xi^2} i(\xi - \xi_1) \left(\coth(h(\xi - \xi_1)) - \frac{1}{h(\xi - \xi_1)} \right) \\ &\quad \times e^{-2i\tau(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} \widehat{\phi}(\xi - \xi_1 - \xi_2) \widehat{\phi}(\xi_1) \widehat{\phi}(-\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 d\xi d\tau \\ &= \frac{-\eta^{-\frac{3}{2}}}{N^{3s}} \int_{\Omega} \frac{e^{-2i\tau(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} - 1}{2(\xi - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2)} (\xi - \xi_1) \left(\coth(h(\xi - \xi_1)) - \frac{1}{h(\xi - \xi_1)} \right) e^{ix\xi + it\xi^2} d\xi d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Agora, basta somar $\tilde{G}_3$ a $G_1 + G_2$ para chegarmos à expressão (5.33). (5.34) é obtida tomando-se a transformada de Fourier da expressão (5.33). O restante do lema segue de modo análogo. ■

No lema a seguir exibimos as estimativas centrais em nossa análise.

LEMA 5.7 . *Fixe $\xi \in \mathbb{R}$. Então,*

(i) *para $h, \gamma > 0$ fixados e $(\xi_1, \xi_2) \in \Omega(\xi)$ temos,*

$$|\gamma + f_h(\xi - \xi_1)| \gtrsim 1;$$

(ii) *para $h > 0$ fixado e $(\xi_1, \xi_2) \in B(\xi)$ vale que,*

$$f_h(\xi - \xi_1) \gtrsim \eta,$$

onde $B(\xi)$ foi definido no Lema 5.4;

(iii) *para qualquer $\gamma \geq 0$ temos,*

$$\text{supp } \mathcal{F} \left\{ \int_0^t U(t-\tau) \tilde{F}_\gamma(U(\tau)\phi) d\tau \right\} \subseteq [N - \eta, N + 2\eta];$$

(iv) *para quaisquer $h > 0$ e $x \in \mathbb{R}$,*

$$-\frac{1}{h} + |x| \lesssim x \coth(hx) \lesssim \frac{1}{h} + |x|.$$

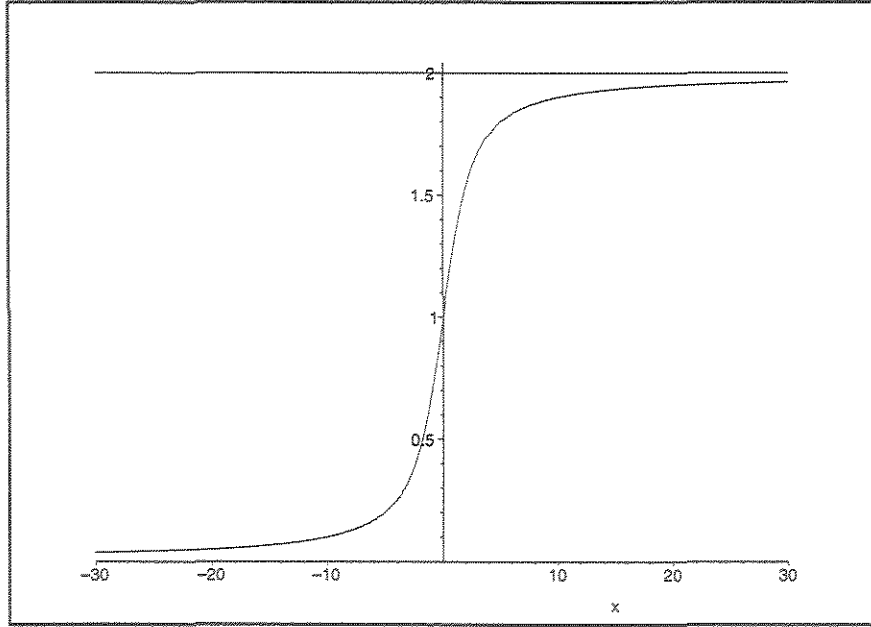


Figura 5.3: Gráfico das funções $1 + \coth(x) - \frac{1}{x}$ (linha mais forte) e $1 + \text{sign}(x)$.

Demonstração. (i): Um cálculo simples mostra que a função $\coth(x) - \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R}$) é crescente e que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\coth(x) - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

Então,

$$\begin{aligned} |\gamma + f_h(\xi - \xi_1)| &= |\gamma + \xi - \xi_1 + (\xi - \xi_1)\{\coth[h(\xi - \xi_1)] - 1/h(\xi - \xi_1)\}| \\ &\geq \gamma - |\xi - \xi_1|\{1 + \coth[h(\xi - \xi_1)] - 1/h(\xi - \xi_1)\} \\ &\geq \gamma - 2|\xi - \xi_1| \\ &\geq \gamma - 2\eta \gtrsim \gamma, \end{aligned}$$

porque $1 + \coth(x) - \frac{1}{x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (veja Figura 5.3), $\gamma > 0$ é fixo e podemos tomar (por exemplo) $\eta \leq \frac{\gamma}{4}$.

(ii): A prova de (ii) é muito simples: como $\coth(x) - \frac{1}{x} \geq 0$, se $x \geq 0$, e $\xi - \xi_1 \geq \frac{\eta}{10}$, segue que,

$$(\xi - \xi_1)\{1 + \coth[h(\xi - \xi_1)] - 1/h(\xi - \xi_1)\} \geq \frac{\eta}{10}.$$

(iii): Veja a demonstração de (c) do Lema 5.4.

(iv) foi provado em [1] (Lemma 4.1). Com isso, o lema está demonstrado. ■

Com os lemas acima estamos prontos para concluir a demonstração. Seja ϕ a função definida em (5.9). Então, pelos lemas 5.4 (b), 5.6, 5.7 ((i) e (iii)) e pelas desigualdades (5.21) e (5.24) segue que,

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t U(t-\tau) \tilde{F}_\gamma(U(\tau)\phi) d\tau \right\|_s \\
&= \frac{1}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N-\eta}^{N+2\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{\Omega(\xi)} \frac{e^{-2it(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} - 1}{2(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (\gamma + f_h(\xi-\xi_1)) d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\gtrsim \frac{t\eta^{-\frac{3}{2}}}{N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{\Omega(\xi)} \frac{\sin 2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)}{2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (\gamma + f_h(\xi-\xi_1)) d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\gtrsim \frac{\gamma}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s |\Omega(\xi)|^2 |t|^2 d\xi \right)^{1/2} \gtrsim \frac{\gamma\eta|t|}{N^{2s}}, \tag{5.35}
\end{aligned}$$

que é uma contradição, se consideramos $s < 0$ e $\eta = N^s$, com $N \gg 1$.

Vamos agora considerar o caso $\gamma = 0$. Pelo Lema 5.7 (iv)), temos que para todo $x < 0$,

$$-\frac{2}{h} \leq f_h(x) < 0. \tag{5.36}$$

Usando os lemas 5.4 (b), 5.6, 5.7 ((ii), (iii) junto com as desigualdades (5.21), (5.24), (5.36) e tomando $s < 0$, temos que

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t U(t-\tau) \tilde{F}_0(U(\tau)\phi) d\tau \right\|_s \\
&= \frac{1}{\eta^{\frac{3}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N-\eta}^{N+2\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{\Omega(\xi)} \frac{e^{-2it(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} - 1}{2(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (f_h(\xi-\xi_1)) d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\gtrsim \frac{t\eta^{-\frac{3}{2}}}{N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{\Omega(\xi)} \frac{\sin 2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)}{2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (f_h(\xi-\xi_1)) d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\gtrsim \frac{t\eta^{-\frac{3}{2}}}{N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{A(\xi)} \frac{\sin 2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)}{2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (f_h(\xi-\xi_1)) d\xi_1 d\xi_2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{\Omega(\xi) \setminus A(\xi)} \frac{\sin 2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)}{2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (f_h(\xi-\xi_1)) d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\gtrsim \frac{t\eta^{-\frac{3}{2}}}{N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{A(\xi)} \frac{\sin 2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)}{2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (f_h(\xi-\xi_1)) d\xi_1 d\xi_2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{h} \int_{\Omega(\xi) \setminus A(\xi)} \frac{\sin 2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)}{2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\gtrsim \frac{t\eta^{-\frac{3}{2}}}{N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s \left| \int_{B(\xi)} \frac{\sin 2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)}{2t(\xi-\xi_1)(\xi_1+\xi_2)} (f_h(\xi-\xi_1)) d\xi_1 d\xi_2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{h} |\Omega(\xi) \setminus A(\xi)|^2 d\xi \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\gtrsim \frac{t}{\eta^{\frac{1}{2}} N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s |B(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\quad - \frac{t\eta^{-\frac{3}{2}}}{h N^{3s}} \left(\int_{N+(k-1)\eta}^{N+(2-k)\eta} (1+\xi^2)^s |\Omega(\xi) \setminus A(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\gtrsim \frac{t\eta}{N^{2s}} \left(\eta - \frac{1}{h} \right), \tag{5.37}
\end{aligned}$$

que é absurdo, se consideramos $N \gg 1$, $\eta = N^{s/2}$ e (por exemplo) $h \geq 2N^{-s/2}$. Com isso concluimos a prova do teorema. $\square$

Capítulo 6

NÃO-EXISTÊNCIA DE STANDING WAVES

Neste capítulo temos como objetivo provar a não-existência de soluções conhecidas como *standing waves*, para a equação (8), com $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma \geq 0$ arbitrário. Observamos que a restrição $\alpha = \beta = 1$ não tira a generalidade do modelo (para maiores detalhes veja [23] e referências relacionadas). Isso será feito por meio da equação gauge-equivalente (9), a saber,

$$\partial_t v = -i\partial_x^2 v + \frac{i}{4}|v|^4 v - iv\mathcal{H}\partial_x(|v|^2) + i\gamma|v|^2 v. \quad (6.1)$$

A estratégia é proceder como no caso da equação de Schrödinger defocusing unidimensional com expoente crítico, pois tal equação está inserida na equação (6.1). Vamos fazer uso de uma identidade de Pohozaev e por meio dela provar (por contradição) que a equação (6.1) não possui *standing waves*.

Soluções de tipo *standing waves* para a equação (6.1) são soluções da forma

$$v(x, t) = e^{i\omega t} \varphi(x), \quad (6.2)$$

onde $x, t \in \mathbb{R}$, ω é uma constante real e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real suave.

Enunciamos abaixo uma importante propriedade da transformada de Hilbert:

LEMA 6.1. Dada qualquer função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f' \mathcal{H}(f') dx = 0.$$

Demonstração. Como $\mathcal{H}$ é um operador antissimétrico, segue que,

$$-\int_{-\infty}^{\infty} x f' \mathcal{H}(f') dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x f') f' dx. \quad (6.3)$$

Pela definição da transformada de Hilbert, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x f') &= p.v. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f'(y)}{y - x} dy \\ &= p.v. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y - x) f'(y)}{y - x} dy + x p.v. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(y)}{y - x} dy \\ &= x \mathcal{H} f'(x). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Agora basta substituir a identidade (6.4) em (6.3) para obtermos o resultado. ■

O teorema que vamos provar é o seguinte:

TEOREMA 6.2 Não existem soluções da forma $v(x, t) = e^{i\omega t} \varphi(x)$ para a equação (6.1), quando $\omega \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 0$, φ é suave e satisfaz propriedades de decaimento da forma

$$x \varphi^{(n)}(x) \longrightarrow 0 \text{ quando } |x| \longrightarrow \infty.$$

Demonstração. A prova é feita por contradição. Substituindo (6.2) na equação (6.1) vemos que φ satisfaz a seguinte equação pseudo-diferencial:

$$-\varphi'' - \omega \varphi + \frac{1}{4} \varphi^5 + \gamma \varphi^3 - \varphi \mathcal{H}(\varphi^2)' = 0. \quad (6.5)$$

Multiplicando a equação (6.5) por φ e integrando por partes, chegamos à identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi')^2 dx = \omega \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^6 dx - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^4 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 \mathcal{H}(\varphi^2)' dx. \quad (6.6)$$

Multiplicando a equação (6.5) por $x \varphi'$ e integrando apropriadamente por partes obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi')^2 dx + \omega \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx - \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^6 dx - \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^4 dx - \int_{-\infty}^{\infty} x (\varphi^2)' \mathcal{H}(\varphi^2)' dx = 0. \quad (6.7)$$

Do Lema 6.1 e da identidade (6.7) segue que,

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi')^2 dx = -\omega \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx + \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^6 dx + \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^4 dx. \quad (6.8)$$

Substituindo (6.8) em (6.6), obtemos:

$$\omega \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 \mathcal{H}(\varphi^2)' dx = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^6 dx + \frac{3\gamma}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^4 dx. \quad (6.9)$$

Caso $\omega \leq 0$: Observemos que através da identidade de Parseval e da definição de $\mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 \mathcal{H}(\varphi^2)' dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi^2}(\xi) \overline{i\xi i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{\varphi^2}(\xi)} d\xi \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| |\widehat{\varphi^2}(\xi)|^2 d\xi < 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Segue então de (6.10) aplicado a (6.9) com $\omega \leq 0$ e $\gamma \geq 0$ que, o lado esquerdo de (6.9) é estritamente negativo enquanto o lado direito é estritamente positivo, o que caracteriza uma contradição.

Caso $\omega > 0$: Pela identidade (6.8) temos que,

$$\omega \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx < \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^6 dx + \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^4 dx \quad (6.11)$$

De (6.9) e (6.11) segue que:

$$\begin{aligned} \omega \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 \mathcal{H}(\varphi^2)' dx &= \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^6 dx + \frac{3\gamma}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^4 dx \\ &= \left(\frac{1}{12} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^6 dx + \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^4 dx \right) + \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^6 dx + \frac{\gamma}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^4 dx \\ &> \omega \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx + \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^6 dx + \frac{\gamma}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^4 dx. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Então, aplicando (6.10) em (6.12), chegamos a uma contradição:

$$0 > \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 \mathcal{H}(\varphi^2)' dx > \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^6 dx + \frac{\gamma}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^4 dx > 0,$$

isso porque $\gamma \geq 0$. Notemos que a última desigualdade é uma contradição independentemente do sinal de ω . Portanto está provado o teorema. $\square$

OBSERVAÇÃO 7. Ainda não sabemos como estender o resultado do Teorema 6.2 para a equação INLS (13); isso porque não conseguimos até o momento provar uma propriedade para o operador $\mathcal{T}_h$ semelhante àquela estabelecida no Lema 6.1 para a transformada de Hilbert.

Capítulo 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Temos fortes razões para conjecturar que o resultado de boa colocação estabelecido no Capítulo 2 não é ótimo. Argumento de scaling não funciona para a equação com perturbação ($\gamma > 0$), mas quando $\gamma = 0$ temos a equação (5), que preserva o desafiador termo não local; nesse caso, se u é solução do PVI associado a ela com dado inicial ϕ , então

$$u_\lambda(x, t) = \lambda^{\frac{1}{2}} u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (7.1)$$

com dado

$$u_\lambda(0) = u_\lambda(x, 0) = \lambda^{\frac{1}{2}} \phi(\lambda x)$$

também é solução. Temos que,

$$\|D_x^s u_\lambda(0)\| = \lambda^s \|D_x^s \phi\|.$$

Portanto o termo com derivada de maior ordem na norma de $H^s(\mathbb{R})$ é invariante pela transformação (7.1) para $s = 0$. Tal argumento sugere que o valor crítico de boa colocação para o PVI associado à equação (5) pode ser $s = 0$. Como a equação (5) possui o termo problemático do modelo, a saber, $iu\mathcal{H}\partial_x(|u|^2)$, e em se tratando de boa colocação o termo $i\gamma|u|^2u$ não atrapalha, é de se esperar que qualquer resultado de boa colocação local para a equação (5) é automaticamente herdada pela equação (8). O mesmo comentário é válido

em relação à equação (7). Surge naturalmente a pergunta: Como provar boa (ou má) colocação para as equações citadas, em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, $0 \leq s \leq \frac{3}{2}$?

Salientamos que os diversos problemas que surgem para as equações NLS (7) e (8) não são de fácil abordagem pelos métodos conhecidos, devido suas não-linearidades não-locais. Entre eles, a boa colocação local (e global) em $H^1(\mathbb{R})$ (ou em qualquer $H^s(\mathbb{R})$, $0 \leq s \leq \frac{3}{2}$) com o uso somente de estimativas tipo Strichartz e efeitos regularizantes para a equação de Schrödinger obtidos por C. Kenig, G. Ponce e L. Vega ([13, 16]) ou mesmo pelo método de J. Bourgain (como o fez H. Takaoka [37]); outro é a existência e estabilidade (ou instabilidade) de onda periódicas aplicando-se diretamente as técnicas desenvolvidas por J. Angulo e J. Bona (veja [3]), por exemplo. Portanto, a equação acima fornece uma boa motivação para o aperfeiçoamento e conseqüente ampliação da aplicabilidade dos métodos acima citados. Eis alguns problemas relacionados às equações em questão, que julgamos serem solucionáveis:

(P1) Boa colocação local para os PVI's associados às equações (7) e (8), respectivamente, para dados iniciais pequenos em $H^s(\mathbb{R})$, com $s \geq \frac{1}{2}$. Pensamos ser possível fazê-lo seguindo a idéia do trabalho [37] de H. Takaoka, onde ele provou um resultado semelhante para o PVI associado à seguinte equação de Schrödinger:

$$i\partial_t u = -\partial_x^2 u + i\lambda \partial_x(|u|^2 u), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $u = u(x, t)$ é complexa e $\lambda \in \mathbb{R}$. Sua prova foi baseada no método introduzido por J. Bourgain em [6]. Caso consigamos provar esse resultado, como conhecemos leis de conservação que controlam a norma H^1 da solução para ambas as equações (veja Proposições 7.1) e 7.2), poderíamos estender o resultado globalmente pelo menos em $H^1(\mathbb{R})$.

(P2) Uma abordagem da equação NLS não-local do ponto de vista periódico: Boa colocação, existência e estabilidade de ondas periódicas. Os problemas de tipo periódico relacionados a equações de evolução não-lineares, tais como o problema de Cauchy, existência e estabilidade de ondas viajantes periódicas, formam um campo muito fértil e ainda pouco explorado atualmente; assim, seria muito interessante poder

obter novos métodos e resultados associados a estes problemas no caso da equação (8) (ou (6.1)). Como tal equação está relacionada com a equação de Scrödinger não-linear (caso defocusing)

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u - \gamma|u|^2 u - \frac{1}{4}|u|^4 u = 0,$$

acreditamos que obtendo inicialmente similares resultados para esta importante equação, eles poderão dar uma pista de como abordar a outra.

Leis de conservação

Via a equação (9) conseguimos exibir as duas seguintes leis de conservação:

PROPOSIÇÃO 7.1 *Seja $\phi \in H^1$ e suponha que existe uma única solução v do PVI associado à equação (9) com $v(0) = \phi$ e com regularidade suficiente. Então*

$$\|v(t)\| = \|\phi\|, \quad (7.2)$$

$$E(v(t)) = E(\phi), \quad (7.3)$$

no intervalo de existência, onde

$$E(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |\partial_x v|^2 + \frac{1}{12}|v|^6 + \frac{\gamma}{2}|v|^4 - \frac{1}{2}|v|^2 \mathcal{H} \partial_x (|v|^2) \right\} dx.$$

Demonstração. Multiplicando a equação (9) por $\bar{v}$ e integrando com relação a x obtém-se:

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t v \bar{v} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|\partial_x v|^2 - \frac{1}{4}|v|^6 + |v|^2 \mathcal{H} \partial_x (|v|^2) - \gamma|v|^4 \right) dx. \quad (7.4)$$

(7.2) é obtida tomando-se a parte imaginária em ambos os lados de (7.4).

Multiplicando a equação (9) por $\partial_t \bar{v}$ e integrando em relação a x obtém-se:

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_t v|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \partial_x v \partial_t \partial_x \bar{v} - \frac{1}{4}|v|^4 v \partial_t \bar{v} + u \mathcal{H} \partial_x (|v|^2) - \gamma|v|^2 v \partial_t \bar{v} \right\} dx, \quad (7.5)$$

agora tomando a parte real em ambos os lados de (7.5) chega-se a (7.3). De fato, chamando $v = v_1 + iv_2$, onde $v_1 = \operatorname{Re} v$ e $v_2 = \operatorname{Im} v$, tem-se que

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \partial_x v \partial_t \partial_x \bar{v} - \frac{1}{4} |v|^4 v \partial_t \bar{v} + u \mathcal{H} \partial_x (|v|^2) - \gamma |v|^2 v \partial_t \bar{v} \right\} dx \\
&= -\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x v|^2 dx - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} |v|^4 \partial_t (|v|^2) dx - \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} |v|^2 \partial_t (|v|^2) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} \partial_x (|v|^2) \partial_t (|v|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} \partial_x (|v|^2) \partial_t (|v|^2) dx \\
&= -\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x v|^2 dx - \frac{1}{12} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |v|^6 dx - \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |v|^4 dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} \partial_x (|v|^2) \partial_t (|v|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (|v|^2) \partial_t \mathcal{H} \partial_x (|v|^2) dx \\
&= \frac{d}{dt} E(v).
\end{aligned}$$

□

A equação (13) também possui leis de conservação semelhantes:

PROPOSIÇÃO 7.2 *Seja $\phi \in H^1$ e suponha que existe uma única solução v do PVI associado à equação (13) com $v(0) = \phi$ e com regularidade suficiente. Então*

$$\|v(t)\| = \|\phi\|, \quad (7.6)$$

$$\tilde{E}(v(t)) = \tilde{E}(\phi), \quad (7.7)$$

no intervalo de existência, onde

$$\tilde{E}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |\partial_x v|^2 + \frac{1}{12} |v|^6 + \frac{\gamma}{2} |v|^4 - \frac{1}{2} |v|^2 \mathcal{T}_h \partial_x (|v|^2) \right\} dx.$$

Demonstração. A prova é igual à da Proposição 7.1, porque assim como $\mathcal{H} \partial_x$, o operador $\mathcal{T}_h \partial_x$ é auto-adjunto no seu domínio em $L^2(\mathbb{R})$. □

Referências Bibliográficas

- [1] L. Abdelouhab, J. L. Bona, M. Felland and J. C. Saut, *Nonlocal models for nonlinear, dispersive waves*, Physica D **40**, (1989), pp. 360-392.
- [2] J. P. Albert, *Concentration Compactness and the Stability of Solitary-Wave Solutions to Nonlocal Equations*, Contemp. Math., **221**, (1999), pp. 1-29.
- [3] J. Angulo and J. Bona, *Non-linear Stability of Periodic Travelling Waves Solutions to the Korteweg-de Vries Equation*, preprint/2002.
- [4] J. Bourgain, *Global solutions of nonlinear Schrödinger equations*, AMS, Colloquium Publications Vol. **46**, 1999.
- [5] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, part I: Schrödinger equation, part II: The KdV equation*, Geom. Funct. Anal. **3**, (1993), 107-156, 209-262.
- [6] J. Bourgain, *Periodic Korteweg de Vries equation with measures as initial data*, Selecta Math. (N.S.), **3**, (1997), 107-156, pp. 209-262.
- [7] X. Carvajal and F. Linares, *Well-posedness results for a higher order Schrödinger equation*, preprint.
- [8] R. R. Coifman and Y. Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Asterisque **57**, Société Mathématique de France, Paris, 1978.
- [9] G. B. Folland, *Real Analysis, modern techniques and their applications*, John Wiley and Sons, New York, 1976.

- [10] D. B. Henry, J. F. Perez and W. R. Wreszinski, *Stability theory for solitary-wave solutions of scalar field equations*, Commun. Math. Phys. **85**, (1982), pp. 351-361.
- [11] R. J. Iório Jr., *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation*, Comm. Part. Diff. Eqs. **11(10)**, (1986), pp. 1031-1081.
- [12] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Studies in Applied Mathematics, Advances in Mathematics Supplementary Studies **8**, (1983), pp. 93-128.
- [13] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Ann. l'Inst. Henri Poincaré Vol. **10**, N^o **03** (1993), pp. 255-288.
- [14] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation*, J. Amer. Math. Soc., Vol. **4**, (1991), pp. 323-347.
- [15] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Well-Posedness and Scatering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation via the Contraction Principle*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. **46**, (1993), pp. 527-620.
- [16] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana University Math. J., Vol. **40**, (1991), pp. 33-69.
- [17] C. E. Kenig and A. Ruiz, *A strong type (2,2) estimate for the maximal finction associated to the Schrdinger equation*, Trans. Amer.Math Soc., Vol. **280**, (1983), pp. 239-246.
- [18] S. Lang, *Analysis II*, Columbia University, 1969.
- [19] F. Linares and G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.
- [20] O. Lopes, *A linearized instability result for solitary waves*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **8**, No. 1, (2002), pp. 115-119.

- [21] Y. Matsuno, *A Cauchy problem of the nonlocal nonlinear Schrödinger equation*, Inverse Problems 20 (2004), pp. 437-445.
- [22] Y. Matsuno, *Dark soliton generation for the intermediate nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phys. **43**, No. 2, 2002, pp.984-1007.
- [23] Y. Matsuno, *Exactly solvable eigenvalue problem for a nonlocal nonlinear Schrödinger equation*, Inverse Problems **18** (2002), pp. 1101-1125.
- [24] L. Molinet, F. Ribaud, *Well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with small initial data*, J. Math. Pures Appl. **83**, (2004), pp. 277-311.
- [25] L. Molinet, J. C. Saut and N. Tzvetkov, *Well-posedness and ill-posedness results for the Kadomtsev-Petviashvili-I equation*, Duke Math. J., Vol. **115**, No. 2, (2002), pp. 353-384.
- [26] L. Molinet, J. C. Saut and N. Tzvetkov, *ill-posedness issues for the Benjamin-Ono and related equations*, SIAM J. Math. Anal., Vol. **33**, No. 4, (2001), pp. 982-988.
- [27] T. Ozawa, *On the nonlinear Schrödinger equations of derivative type*, Ind. Univ. Math. Journal **45**, No. 1, (1996), pp. 137-163.
- [28] D. E. Pelinovsky, *Intermediate nonlinear Schrödinger equation for internal waves in a fluid of finite depth*, Phys. Lett. A **197**, (1995), pp. 401-406.
- [29] D. E. Pelinovsky and R. H. J. Grimshaw, *Nonlocal Models for Envelope Waves in a Stratified Fluid*, **43**, (1996), pp. 87-99.
- [30] D. E. Pelinovsky and R. H. J. Grimshaw, *A spectral transform for the intermediate nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phys. **36**(8), (1995), pp. 4203-4219.
- [31] G. Ponce, *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation*, Differential Integral Equations, Vol. **4**, No. 3, (1991), pp. 527-542.

- [32] D. F. Rial, *O problema de Cauchy para equações de Schrödinger quase-lineares*, Tese de Doutorado, IMPA, Rio de Janeiro - Brasil, 1992.
- [33] C. Sadosky, *Interpolation of operators and singular integrals: An introduction to harmonic analysis*, Pure and Applied Mathematics **53**, Marcel Dekker Inc., New York, 1979.
- [34] J. C. Saut and R. Teman, *Remarks on the Korteweg-de Vries Equation*, Israel J. Math., Vol. **24**, No. 1, (1976), pp. 78-87.
- [35] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.
- [36] R. S. Strichartz, *Restriction of Fourier Transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J. **44** (1977), 705-714.
- [37] H. Takaoka, *Well-posedness for the one dimensional Nonlinear Schrödinger equation with the derivative nonlinearity*, Advances in Differential Equations, Vol. **4**, No. 4, (1999), pp. 561-580.
- [38] H. Takaoka, *Global well-posedness for Schrödinger equations with derivative in a nonlinear term and data in low-order Sobolev spaces*, Electron. J. Differential Equations **42**, (2001), pp. 1-23.
- [39] N. Tzvetkov, *Remark on the local ill-posedness for KdV equation*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **329**, (1999), pp. 1043-1047.

moura

Resumo da Impressao

Usuario: moura

Data: 28/03/2005

Hora: 14:09:30

Computador: rhodes.ime.unicamp.br

Impressora: hpnp

Nome do Trabalho: tese_doutorado.ps

Quota ja Utilizada: 123

Quota Disponivel: 400