

DICOTOMIA PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES PARCIAIS  
HIPERBÓLICAS E UM TEOREMA GERAL DE  
BIFURCAÇÃO DE HOPF

*ALOISIO JOSÉ FREIRIA NEVES*

**Orientador:**

*Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes*

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,  
Estatística e Ciência da Computação, como  
requisito parcial para obtenção do título de  
Doutor em Matemática.

Setembro - 1982

BIBLIOTECA CENTRAL

Classif.	7
Autor	n 414d
V.	Ex.
Tombo BC/	438
BC	

CM-00030977-8

*Para Lourdiney e nossas filhas*

*Aline, Larissa e Letícia.*

## AGRADECIMENTOS

Ao orientador Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes, gostaria de externar minha gratidão pela amizade, estímulo, compreensão e pela oportunidade de uma convivência matemática proveitosa e gratificante, sem a qual este trabalho não estaria concluído.

Agradeço também aos Profs. Marco A. Teixeira e Hernano S. Ribeiro, aos colegas do IMECC e do ICMSC – USP, pelo incentivo e ajuda recebida.

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO .....	i
<b>CAPÍTULO I – SISTEMAS HIPERBÓLICOS</b>	
1. Introdução .....	1
2. O Espectro e o Operador Resolvente para o Operador $A$ , Originário do Sistema Hiperbólico .....	2
3. Semi-Grupo, Fortemente Contínuo, de Operadores Lineares Contínuos, Definidos sobre o espaço de Hilbert $H$ e Gerado pelo Operador $A$ .....	7
4. Expansão das Matrizes .....	13
5. Distribuição do Espectro do Operador $A$ e decomposição do Espaço de Hilbert $H$ em Soma Direta de Sub-Espaços Invariantes por $A$ .....	34
6. Expansão do Operador Resolvente e Estimativas Exponenciais para o Semi-Grupo Gerado por $A$ .....	42
<b>CAPÍTULO II – BIFURCAÇÃO DE HOPF EM ESPAÇOS DE DIMENSÃO INFINITA COM PERTURBAÇÃO NA PARTE ILIMITADA</b>	
1. Diferenciabilidade em Relação ao Parâmetro .....	54
2. Bifurcação de Hopf .....	74
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>98</b>

## INTRODUÇÃO

Em [19], H. S. Ribeiro estuda um sistema hiperbólico de duas equações diferenciais parciais, com condições de fronteira envolvendo derivadas, proveniente de um problema em linhas de transmissão com perdas, e dá uma versão do Teorema de Bifurcação de Hopf em espaços de dimensão infinita para equações da forma

$$(1) \quad \frac{dv}{ds} = Av(s) + f(r, v(s)) \quad (s > 0).$$

Motivados por este trabalho e por trabalhos anteriores, Brayton [1], [2], Crandall e Rabinowitz [3], Henry [7], [8], Lima [12], Lopes [13], Oliveira [15] e Sattinger [20] entre outros, procuramos generalizar alguns dos resultados. Com este objetivo estudamos no Capítulo I um sistema hiperbólico com  $n$  equações diferenciais parciais, com condições de fronteira mista, que aparece no livro de Godunov [4], e no Capítulo II demonstramos um Teorema de Bifurcação de Hopf, para equações do tipo acima onde o parâmetro  $r$  perturba também a parte ilimitada  $A(r)$ .

O procedimento adotado no nosso trabalho, para o estudo do Sistema Hiperbólico, é o de transformar o problema dado, em uma equação diferencial ordinária  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  ( $t > 0$ ) num espaço de Hilbert  $H$  onde  $A$  é um operador linear fechado definido num subespaço vetorial denso de  $H$ , que gera um Semi-Grupo fortemente contínuo  $\{T(t): t \geq 0\}$  de operadores lineares contínuos sobre  $H$ .

Estudamos aqui o espectro do operador  $A$  e obtemos uma expressão para o operador resolvente  $R(\lambda : A)$  do operador  $A$ , entretanto o objetivo principal é obter estimativas exponenciais para o Semi-Grupo  $T(t)$ .

Através da divisão do espectro do operador  $A$  por retas verticais no plano complexo, conseguimos decompor o espaço de Hilbert  $H$  em soma direta de sub-espacos  $X$  e  $Y$ , invariantes por  $A$ , com  $Y$  de dimensão finita. A estimativa exponencial para o Semi-Grupo restrito a  $X$  segue via Transformada Inversa de Laplace, com o operador resolvente  $R(\lambda : A)$  expandido de maneira conveniente. O resultado principal na obtenção dessa expansão, aparece no Teorema 4.1. Anteriormente Pazy [16] encontrou uma condição necessária e suficiente, (de difícil aplicação) para um Semi-Grupo  $T(t)$  satisfazer a estimativa exponencial  $\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}$ , onde  $M \geq 1$  e  $\mu > 0$ , num espaço de Hilbert, isto foi obtido através de funções de Lyapunov.

O Teorema de Bifurcação de Hopf, garante unicidade e existência de bifurcação de soluções periódicas de uma equação de evolução. Neste trabalho nós provamos uma versão deste teorema, num espaço de dimensão infinita para equações da forma

$$(2) \quad \frac{dv}{ds} = A(r)v(s) + f(r, v(s)) \quad (s > 0)$$

onde  $A(r)$ , para  $|r| < \eta$ ,  $\eta > 0$ , é um operador linear fechado, definido num sub-espaco vetorial  $\mathcal{D}$  (independente de  $r$ ),  $A(r)$  é o

gerador infinitesimal de um Semi-Grupo, fortemente contínuo,  $\{T(r,t) : t \geq 0\}$  de operadores lineares contínuos, não necessariamente analítico. Colocamos hipóteses de decomposição do espaço em soma direta de sub-espacos  $X_r$  e  $Y_r$  invariantes em relação a  $A(r)$ , com  $\dim Y_r = 2$  e  $\|T(r,t)\| \leq M_1 e^{-\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$ , em  $X_r$  e ainda hipóteses de regularidade de função  $f$ .

O problema de bifurcação de soluções periódicas, (existência, unicidade, estabilidade de soluções, etc.) tem atraído a atenção de muitos autores, desde 1942 com o trabalho pioneiro de Hopf. Desde então, generalizações e problemas relacionados tem sido desenvolvidos, e é difícil comparar tais trabalhos, devido às diferentes técnicas e às diferentes hipóteses utilizadas.

A motivação e o procedimento empregados aqui, aparecem nos trabalhos de Ribeiro [19], Oliveira [15] e Lima [12]. Consiste na introdução de um novo parâmetro na equação, relativo ao período, e utilizando as hipóteses de decomposição do espaço, de dicotomia exponencial para o Semi-Grupo, e o Teorema das Funções Implícitas obter soluções "mild", dependendo de parâmetros, mas com período conhecido. Trabalhamos portanto diretamente na classe das funções periódicas. A semelhança entre o nosso trabalho e os trabalhos citados acima é o desconhecimento a priori da diferenciabilidade dessas soluções "mild", e isto é o ponto crucial na obtenção da bifurcação. A dificuldade adicional encontrada, com relação a esses trabalhos, é devido à perturbação na parte ilimitada, pelo parâmetro  $r$ . Esta dificuldade é estudada no parágrafo 1 do Capítulo

II, onde obtemos resultados sobre a diferenciabilidade do Semi-Grupo  $T(r,t)u$ , em relação a  $r$ , para  $u \in \mathcal{D}$ , e sobre a diferenciabilidade das soluções da equação (2), com condições iniciais diferenciavelmente perturbadas. Tais resultados são obtidos utilizando-se o Teorema de diferenciabilidade de Ponto Fixo dependente de parâmetro. A partir dessas técnicas demonstra-se também o Teorema de Bifurcação de Hopf no parágrafo 2.

## CAPÍTULO 1

### SISTEMAS HIPERBÓLICOS

#### 1. INTRODUÇÃO

Consideremos um sistema hiperbólico na sua forma canônica

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + K \frac{\partial u}{\partial x} + Cu = 0$$

para  $0 \leq x \leq \ell$  e  $t \geq 0$ , onde  $K$  é uma matriz diagonal

$$K = K(x) = \text{diag}(k_i(x)); \quad i = 1, \dots, n$$

com  $k_i > 0$  para  $i = 1, \dots, N$ ,  $k_i < 0$  para  $i = N + 1, \dots, n$  e

$$C = C(x) = (c_{ij}(x)); \quad i, j = 1, \dots, n$$

e onde  $k_i$  e  $c_{ij}$  são funções de  $x$  suficientemente suaves (de classe  $C^2$  pelo menos).

Colocaremos

$$u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

com  $v \in \mathbb{R}^N$  e  $w \in \mathbb{R}^{n-N}$  e tomaremos o sistema hiperbólico acima com as seguintes condições de fronteira:

$$v(0) = Ew(0)$$

(C.F.)

$$w(\ell) = Dv(\ell)$$

onde  $E$  e  $D$  são matrizes constantes de tamanhos  $N \times (n - N)$  e  $(n - N) \times N$  respectivamente.

## 2. O ESPECTRO E O OPERADOR RESOLVENTE PARA O OPERADOR $A$ , ORIGINÁRIO DO SISTEMA HIPERBÓLICO

Consideremos o Espaço de Hilbert

$$H = (L^2 [0, \ell])^N \times (L^2 [0, \ell])^{n-N}$$

com o produto inteiro usual dado por:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell} f_i g_i$$

se  $f = (f_i)$  e  $g = (g_i)$  pertencem a  $H$  e definimos o operador  $A$

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$$

por

$$A \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} \varphi' \\ \psi \end{pmatrix} - C \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

onde

$$\mathcal{D}(A) = \{(\varphi, \psi) \in H / (\varphi, \psi) \in (AC [0, \ell])^n, (\varphi', \psi') \in H \text{ e} \\ \varphi(0) = E\psi(0), \quad \psi(\ell) = D\varphi(\ell)\}.$$

Temos que  $A$  é um operador linear fechado e  $\mathcal{D}(A)$  é um subespaço vetorial de  $H$ , denso em  $H$ .

Para determinar o conjunto resolvente  $\rho(A)$  e o operador resolvente  $R(\lambda; A)$  do operador  $A$ , dado  $(f, g) \in H$ , é preciso determinar os valores complexos de  $\lambda$  para os quais

$$(1.2) \quad (\lambda - A) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

admite solução  $(\varphi, \psi)$  pertencente a  $\mathcal{D}(A)$  e dependendo continuamente de  $(f, g)$ . Neste caso podemos escrever

$$\lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} \varphi' \\ \psi' \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi' \\ \psi' \end{pmatrix} = [-\lambda K^{-1} - K^{-1} C] \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + K^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

e colocando  $K_1 = -K^{-1}$ ,  $C_1 = -K^{-1}C$  e  $\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$  obtemos

$$(1.3) \quad \begin{pmatrix} \varphi' \\ \psi' \end{pmatrix} = (C_1 + \lambda K_1) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}$$

se

$$X(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} X^{11}(x, y, \lambda)_{N \times N} & X^{12}(x, y, \lambda)_{N \times (n-N)} \\ X^{21}(x, y, \lambda)_{(n-N) \times N} & X^{22}(x, y, \lambda)_{(n-N) \times (n-N)} \end{pmatrix}$$

é a matriz principal do sistema

$$(1.4) \quad \begin{pmatrix} \varphi' \\ \psi' \end{pmatrix} = (C_1 + \lambda K_1) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

temos que  $X(y, y, \lambda) = I$ , que as soluções desse sistema são funções inteiras de  $\lambda$  e que as soluções de (1.3) são dadas, usando a fórmula de variação das constantes, por

$$(1.5) \quad \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} = X(x, 0, \lambda) \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \psi(0) \end{pmatrix} + \int_0^x X(x, y, \lambda) \begin{pmatrix} f_1(y) \\ g_1(y) \end{pmatrix} dy.$$

Colocando  $\varphi(0) = E\psi(0)$ , temos, para  $x = \ell$ , que

$$\begin{aligned} \varphi(\ell) &= X^{11}(\ell, 0, \lambda)E\psi(0) + X^{12}(\ell, 0, \lambda)\psi(0) + \\ &+ \int_0^\ell (X^{11}(\ell, y, \lambda)f_1(y) + X^{12}(\ell, y, \lambda)g_1(y)) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(\ell) &= X^{21}(\ell, 0, \lambda)E\psi(0) + X^{22}(\ell, 0, \lambda)\psi(0) + \\ &+ \int_0^\ell (X^{21}(\ell, y, \lambda)f_1(y) + X^{22}(\ell, y, \lambda)g_1(y)) dy \end{aligned}$$

e para termos  $\psi(\ell) = D\varphi(\ell)$  é preciso que

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad & [X^{21}(\ell, 0, \lambda)E + X^{22}(\ell, 0, \lambda) - DX^{11}(\ell, 0, \lambda)E - DX^{12}(\ell, 0, \lambda)] \psi(0) = \\
 & = - \int_0^\ell (X^{21}(\ell, y, \lambda) f_1(y) + X^{22}(\ell, y, \lambda) g_1(y)) dy + \\
 & + D \int_0^\ell (X^{11}(\ell, y, \lambda) f_1(y) + X^{12}(\ell, y, \lambda) g_1(y)) dy.
 \end{aligned}$$

Portanto colocando

$$H(\lambda) = X^{21}(\ell, 0, \lambda)E + X^{22}(\ell, 0, \lambda) - DX^{11}(\ell, 0, \lambda)E - DX^{12}(\ell, 0, \lambda)$$

$$h(\lambda) = \det H(\lambda)$$

temos que,  $h(\lambda)$  é uma função inteira de  $\lambda$ , e:

1. Os zeros de  $h(\lambda)$  pertencem ao espectro pontual  $\sigma_p(A)$ , do operador  $A$ , pois

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} = X(x, 0, \lambda) \begin{pmatrix} Eb \\ b \end{pmatrix}$$

onde,  $b$  é uma solução não nula do sistema  $H(\lambda)b = 0$ , satisfaz

$$(\lambda - A) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0$$

2. Os valores complexos de  $\lambda$  tais que  $h(\lambda) \neq 0$  pertencem

ao conjunto resolvente  $\rho(A)$ , do operador  $A$ , pois (1.6) fornece

$$(1.7) \quad \psi(0) = H(\lambda)^{-1} \left[ - \int_0^{\ell} (X^{21}(\ell, y, \lambda) f_1(y) + X^{22}(\ell, y, \lambda) g_1(y)) dy + \right. \\ \left. + D \int_0^{\ell} (X^{11}(\ell, y, \lambda) f_1(y) + X^{12}(\ell, y, \lambda) g_1(y)) dy \right]$$

portanto, colocando  $\varphi(0) = E\psi(0)$  em (1.5) obtemos  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}(A)$  e  $(\varphi, \psi)$  dependem linearmente e continuamente de  $(f, g)$ .

Portanto, temos que:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda / h(\lambda) = 0\}$$

e se  $\lambda \notin \sigma(A)$ , então

$$R(\lambda : A) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x) = X(x, 0, \lambda) \begin{pmatrix} E\psi(0) \\ \psi(0) \end{pmatrix} + \int_0^x X(x, y, \lambda) \begin{pmatrix} f_1(y) \\ g_1(y) \end{pmatrix} dy$$

onde  $\psi(0)$  é dado por (1.7) e  $\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ .

3. SEMI-GRUPO, FORTEMENTE CONTÍNUO, DE OPERADORES LINEARES  
CONTÍNUOS, DEFINIDOS SOBRE O ESPAÇO DE HILBERT  $H$  E  
GERADO PELO OPERADOR  $A$

TEOREMA 3.1: O operador  $A$  definido sobre  $\mathcal{D}(A)$  com valores em  $H$  é o gerador infinitesimal de um Semi-Grupo, fortemente contínuo,

$$\{T(t) : t \geq 0\}$$

de operadores lineares contínuos definidos sobre  $H$ , satisfazendo

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}; \quad t \geq 0$$

para  $M > 0$  e  $w \in \mathbb{R}$  e, além disso, para  $u \in \mathcal{D}(A^2)$

$$T(t)u = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)u d\lambda$$

onde  $b > \max\{0, w\}$ .

DEMONSTRAÇÃO: Temos que, para  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}(A)$ ,

$$A \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - C \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

onde  $K = K(x) = \text{diag}(k_i(x))$  e  $C = C(x) = (C_{ij}(x))$ . Como o operador

$$f \mapsto Cf; \quad f = (f_1, \dots, f_n) \in H$$

é um operador linear limitado definido sobre  $H$  pois

$$\|Cf\|_H = \left\| \left( \sum_{j=1}^n C_{ij} f_j \right) \right\|_H \quad (i = 1, \dots, n)$$

logo, pela desigualdade de Schwarz, temos

$$\begin{aligned} \|Cf\|_H &= \left[ \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell} \left( \sum_{j=1}^n C_{ij}(x) f_j(x) \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left[ \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell} \left( \sum_{j=1}^n C_{ij}^2(x) \cdot \sum_{j=1}^n f_j^2(x) \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

portanto, tomando

$$M_1 = \max \left\{ \sup_{0 \leq x \leq \ell} \left( \sum_{j=1}^n C_{ij}^2(x) \right) : i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

temos que

$$\|Cf\|_H \leq [nM_1 \cdot \int_0^{\ell} \sum_{j=1}^n f_j^2(x) dx]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{nM_1} \|f\|_H$$

isto é

$$\|Cf\|_H \leq M \|f\|_H \quad \text{com} \quad M = \sqrt{nM_1}$$

portanto, basta mostrar que o operador linear

$$\tilde{A} : \mathcal{D}(A) \rightarrow H$$

dado por

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

gera Semi-Grupo fortemente contínuo, e para isto, (aplicando o Teorema de Lumer - Phillips em  $\tilde{A} - w_1 I$ ) temos de verificar que

$$p(\tilde{A}\phi, \phi) \leq w_1 \|\phi\|_p^2, \quad \phi \in \mathcal{D}(A)$$

onde  $p$  é o produto inteiro sobre  $H$ , equivalente ao produto original de  $H$ , dado por

$$p(f, g) = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell} \mu_i(x) f_i(x) g_i(x) dx; \quad f = (f_i) \text{ e } g = (g_i) \text{ em } H$$

onde os pesos  $\mu_i(x)$  são funções positivas de classe  $C^1[0, \ell]$  que serão escolhidas convenientemente de modo a obter a seguinte condição de dissipatividade:

$$i) \quad \sum_{i=1}^n \mu_i(0) k_i(0) \phi_i^2(0) \leq 0$$

(1.8)

$$ii) \quad \sum_{i=1}^n \mu_i(\ell) k_i(\ell) \phi_i^2(\ell) \geq 0 \quad \text{com} \quad \phi = (\phi_i) \in \mathcal{D}(A)$$

e  $\| \cdot \|_p$  é a norma em  $H$ , proveniente do produto interno  $p$ . Justificaremos a existência dos pesos  $\mu_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , observando que, se  $\phi = (\phi_i) \in \mathcal{D}(A)$ , temos

$$\phi_i(0) = \sum_{j=N+1}^n e_{ij} \phi_j(0) \quad \text{para } i = 1, \dots, N$$

$$\phi_i(\ell) = \sum_{j=1}^N d_{ij} \phi_j(\ell) \quad \text{para } i = N+1, \dots, n$$

se  $E = (e_{ij})_{N \times (n-N)}$  e  $D = (d_{ij})_{(n-N) \times N}$

portanto, substituindo em i) de (1.8) e usando a desigualdade de Schwarz podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu_i(0) k_i(0) \phi_i^2(0) &= \sum_{i=1}^N \mu_i(0) k_i(0) \left( \sum_{j=N+1}^n e_{ij} \phi_j(0) \right)^2 + \\ &+ \sum_{j=N+1}^n \mu_j(0) k_j(0) \phi_j^2(0) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \mu_i(0) k_i(0) \left( \sum_{j=N+1}^n e_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j=N+1}^n \phi_j^2(0) \right) + \sum_{j=N+1}^n \mu_j(0) k_j(0) \phi_j^2(0) \end{aligned}$$

pois  $k_i$  para  $i = 1, \dots, N$  e  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são funções positivas, logo temos

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(0) k_i(0) \phi_i^2(0) \leq \sum_{j=N+1}^n \left[ \sum_{i=1}^N \mu_i(0) k_i(0) (\sum e_{ij}^2) + \mu_j(0) k_j(0) \right] \phi_j^2(0)$$

que para obter a desigualdade i) de (1.8) basta tomar funções  $\mu_i(x)$ ,  $i=1, \dots, N$ , com  $\mu_i(0)$  suficientemente pequenos, pois  $k_j(0) < 0$  para  $j = N+1, \dots, n$ . De modo análogo, para obter o item ii) de (1.8), devemos escolher funções  $\mu_i(x)$ ,  $i = N+1, \dots, n$  com  $\mu_i(\ell)$  suficientemente pequenos.

Nessas condições temos, para  $\phi \in \mathcal{D}(A)$ , que

$$\begin{aligned} p(\tilde{A}\phi, \phi) &= \sum_{i=1}^n - \int_0^{\ell} \mu_i(x) k_i(x) \phi_i'(x) \phi_i(x) dx = \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell} \mu_i(x) k_i(x) \frac{d}{dx} (\phi_i^2(x)) dx = \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\mu_i(x) k_i(x) \phi_i^2(x)]_0^{\ell} - \int_0^{\ell} \frac{d}{dx} (\mu_i(x) k_i(x)) \phi_i^2(x) dx \end{aligned}$$

portanto, usando i) e ii) de (1.8), podemos escrever que

$$\begin{aligned} p(\tilde{A}\phi, \phi) &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell} \frac{d}{dx} (\mu_i(x) k_i(x)) \phi_i^2(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell} \mu_i(x) \left[ \frac{\mu_i'(x) k_i(x)}{\mu_i(x)} + k_i'(x) \right] \phi_i^2(x) dx \end{aligned}$$

logo, tomando

$$w_1 = \max \left\{ \sup_{0 \leq x \leq \ell} \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_i'(x) k_i(x)}{\mu_i(x)} + k_i'(x) \right] : i = 1, \dots, n \right\}$$

obtemos

$$p(\tilde{A}\phi, \phi) \leq w_1 \|\phi\|_p^2 \quad \text{se } \phi \in \mathcal{D}(A).$$

Como  $\mathcal{D}(A)$  é denso em  $H$  e o espectro de  $\tilde{A}$  são zeros de uma função analítica não nula, portanto pontos isolados, podemos afirmar que operador  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow H$  gera um Semi-Grupo, fortemente contínuo, de operadores lineares contínuos, definidos sobre  $H$ ,  $T(t)$ ,  $t \geq 0$ , satisfazendo

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \quad M \geq 1, \quad w \in \mathbb{R}$$

e pelo Corolário 7.5, pg. 31 de (Pazy, [17]) temos, para  $u \in \mathcal{D}(A^2)$ , que

$$T(t)u = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)u d\lambda$$

onde  $b > \max\{0, w\}$  completando a prova do teorema.  $\square$

#### 4. EXPANSÃO DAS MATRIZES

O teorema seguinte nos dará uma expansão da matriz principal de soluções do sistema (1.4) para  $\lambda \neq 0$ , que exercerá um papel fundamental nos resultados que se seguirão neste capítulo, que são: Uma análise mais detalhada do espectro do operador  $A$  e a obtenção de uma dicotomia exponencial para o Semi-Grupo gerado por  $A$ , a partir da divisão do espectro de  $A$  no plano complexo, por uma reta vertical. Para isto colocaremos

$$C_1 = C_1(x) = -K(x)^{-1}C(x) = (a_{ij}(x)); \quad i, j = 1, \dots, n$$

e

$$K_1 = K_1(x) = -K(x)^{-1} = \text{diag}(\lambda_i(x))$$

onde

$$\lambda_i(x) = \frac{-1}{k_i(x)}$$

portanto  $\lambda_i < 0$  para  $i = 1, \dots, N$  e  $\lambda_i > 0$  para  $i = N + 1, \dots, n$

**TEOREMA 4.1:** A matriz principal de soluções  $X(x, \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $X(0, \lambda) = I$ , do sistema

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}' = (C_1 + \lambda K_1) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

é dada, para  $\lambda \neq 0$ , por

$$X(x, \lambda) = X_0(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} X_1(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2(x, \lambda)$$

onde:

$$i) \quad X_0(x, \lambda) = \text{diag} \left( e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds + \int_0^x a_{ii}(s) ds} \right)$$

$$ii) \quad X_1(x, \lambda) = (d_{ij}) \quad \text{onde}$$

$$d_{ij} = \frac{e^{\lambda \int_0^x \lambda_j(s) ds} a_{ij}(x) e^{\int_0^x a_{jj}(s) ds} - e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} a_{ij}(0) e^{\int_0^x a_{ii}(s) ds}}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x) - \lambda_j(0) + \lambda_i(0)}$$

para  $i \neq j$ , e

$$d_{ii} = e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds + \int_0^x a_{ii}(s) ds} \int_0^x \left( \sum_{k \neq i} \frac{a_{ik}(y) a_{ki}(y)}{\lambda_i(y) - \lambda_k(y)} \right) dy$$

iii) Para  $0 \leq x \leq \ell$  e  $|\lambda| \leq \sigma$  ( $\sigma > 0$ ) existe uma constante  $K = K(\ell, \sigma) > 0$  tal que, se

$$X_2(x, \lambda) = (e_{ij}(x, \lambda))$$

então

$$|X_2(x, \lambda)| \leq \mathbb{K}$$

para  $0 \leq x \leq \ell$ ,  $|\operatorname{Re} \lambda| \leq \sigma$ , onde

$$|X_2(x, \lambda)| = \max |e_{ij}(x, \lambda)|; \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

DEMONSTRAÇÃO: Mostraremos primeiramente que, se  $f$  é de classe  $C^2$ , então para  $i \neq j$  e  $\lambda$  complexo não nulo, temos:

$$\begin{aligned} (1.9) \quad & \int_0^x e^{\lambda \int_Y^x \lambda_i(s) ds} + \lambda \int_0^Y \lambda_j(s) ds f(y) dy = \\ & = \frac{1}{\lambda} \left[ e^{\lambda \int_0^x \lambda_j(s) ds} \frac{f(x)}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} - e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \frac{f(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} \right] + \\ & + \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{K}_{ij}(f, x, \lambda) \end{aligned}$$

com

$$(1.10) \quad |\mathbb{K}_{ij}(f, x, \lambda)| \leq e^{\sigma M x} \mathbb{K}_1 \quad \text{se } 0 \leq x \leq \ell, \text{ e } |\operatorname{Re} \lambda| \leq \sigma \quad \sigma > 0,$$

onde  $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_1(f, \ell, \sigma) > 0$ ,  $|\lambda_i(x)| \leq M$  para  $0 \leq x \leq \ell$  e  $i = 1, \dots, n$ . De fato, como

$$\begin{aligned} & \int_0^x e^{\lambda \int_y^x \lambda_i(s) ds} + \lambda \int_0^y \lambda_j(s) ds \quad f(y) dy = \\ & = e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \int_0^x e^{\lambda \int_0^y (\lambda_j(s) - \lambda_i(s)) ds} f(y) dy = \\ & = e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \int_0^x \frac{d}{dy} \left( e^{\lambda \int_0^y (\lambda_j(s) - \lambda_i(s)) ds} \right) \frac{f(y)}{\lambda (\lambda_j(y) - \lambda_i(y))} dy \end{aligned}$$

temos integrando por partes que

(1.11)

$$\begin{aligned} & \int_0^x e^{\lambda \int_y^x \lambda_i(s) ds} + \lambda \int_0^y \lambda_j(s) ds \quad f(y) dy = \\ & = \frac{1}{\lambda} \left[ e^{\lambda \int_0^x \lambda_j(s) ds} \frac{f(x)}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} - e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \frac{f(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} \right] - \\ & - \frac{1}{\lambda} e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \int_0^x e^{\lambda \int_0^y (\lambda_j(s) - \lambda_i(s)) ds} h(y) dy \end{aligned}$$

onde

$$h(y) = \frac{d}{dy} \left( \frac{f(y)}{\lambda_j(y) - \lambda_i(y)} \right) .$$

Integrando novamente por partes o último termo, obtemos que

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\lambda} e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \int_0^x e^{\lambda \int_0^y (\lambda_j(s) - \lambda_i(s)) ds} h(y) dy = \\ & = \frac{1}{\lambda^2} \left[ - e^{\lambda \int_0^x \lambda_j(s) ds} \frac{h(x)}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} + e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \frac{h(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} + \right. \\ & \left. + \int_0^x e^{\lambda \int_0^y \lambda_j(s) ds} + \lambda \int_y^x \lambda_i(s) ds \right] g(y) dy \end{aligned}$$

onde

$$g(y) = \frac{d}{dy} \left( \frac{h(y)}{\lambda_j(y) - \lambda_i(y)} \right) ,$$

portanto chamando o termo entre colchetes acima de  $K_{ij}(f, x, \lambda)$  justificamos a igualdade (1.9), e para  $0 \leq x \leq \ell$  e  $|\operatorname{Re} \lambda| \leq \sigma$  temos que

$$\left| K_{ij}(f, x, \lambda) \right| \leq e^{\sigma Mx} \left[ 2 \sup_{0 \leq x \leq \ell} \left| \frac{h(x)}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} \right| + e^{\sigma M\ell} \sup_{0 \leq x \leq \ell} |g(x)| \ell \right]$$

portanto para obter (1.10) basta tomar

$$K_1 = \max_{i \neq j} \left( 2 \sup_{0 \leq x \leq l} \left| \frac{h(x)}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} \right| \right) + e^{\sigma M l} \sup_{0 \leq x < l} |g(x)| \cdot l.$$

Começaremos a demonstração do teorema tomando

$$X(x, \lambda) = X_0(x, \lambda) + Y_1(x, \lambda),$$

isto é,

$$Y_1(x, \lambda) = X(x, \lambda) - X_0(x, \lambda).$$

Temos que

$$X' = (C_1 + \lambda K_1)X,$$

portanto multiplicando esta igualdade por  $e^{-\lambda \int_0^x K_1(s) ds}$  chegamos a

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} e^{-\lambda \int_0^x K_1(s) ds} \\ X \end{pmatrix} = e^{-\lambda \int_0^x K_1(s) ds} \begin{pmatrix} -\lambda K_1(x) \\ C_1(x) \end{pmatrix} X(x, \lambda)$$

logo

$$e^{-\lambda \int_0^x K_1(s) ds} X(x, \lambda) = I + \int_0^x e^{-\lambda \int_0^y K_1(s) ds} C_1(y) X(y, \lambda) dy$$

ou melhor

$$X(x, \lambda) = e^{\lambda \int_0^x K_1(s) ds} + \int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s) ds} C_1(y) X(y, \lambda) dy$$

segue daí, que

$$(1.12) \quad Y_1(x, \lambda) = e^{\lambda \int_0^x K_1(s) ds} - X_0(x, \lambda) + \\ + \int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s) ds} C_1(y) \left( Y_1(x, \lambda) + X_0(x, \lambda) \right) dy.$$

Analisaremos primeiramente a matriz

$$(1.13) \quad \int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s) ds} C_1(y) X_0(x, \lambda) dy$$

que possui na posição  $ij$  o termo

$$\int_0^x e^{\lambda \int_y^x \lambda_i(s) ds} a_{ij}(y) e^{\lambda \int_0^y \lambda_j(s) ds} + \int_0^y a_{jj}(s) ds \quad dy = \\ = \int_0^x e^{\lambda \int_y^x \lambda_i(s) ds} + \lambda \int_0^y \lambda_j(s) ds \quad a_{ij}(y) e^{\int_0^y a_{jj}(s) ds}$$

para  $i = j$  temos

$$\int_0^x e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} a_{ii}(y) e^{\int_0^y a_{ii}(s) ds} = e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \int_0^x \frac{d}{dy} \left( e^{\int_0^y a_{ii}(s) ds} \right) dy = \\ = e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} + \int_0^x a_{ii}(s) ds - e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds}$$

isto é, a diagonal da matriz (1.13) é igual a diagonal de

$$X_0(x, \lambda) = e^{\lambda \int_0^x K_1(s) ds},$$

para  $i \neq j$ , usamos a igualdade dada em (1.9) com

$$f(y) = a_{ij}(y) e^{\int_0^y a_{jj}(s) ds}$$

de modo que a igualdade (1.12) fica

$$Y_1(x, \lambda) = \left( \frac{1}{\lambda} \left[ e^{\lambda \int_0^x \lambda_j(s) ds} \frac{a_{ij}(x) e^{\int_0^x a_{jj}(s) ds}}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} - e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \frac{a_{ij}(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{K}_{ij} (a_{ij}(\cdot) e^{\int_0^\cdot a_{jj}(s) ds}, x, \lambda) \right)_{i \neq j} + \\ + \int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s) ds} C_1(y) Y_1(y, \lambda) dy$$

onde a primeira matriz dessa soma possui a diagonal nula.

Colocando  $Y_1 = \frac{Z_1}{\lambda}$  obtemos

$$X(x, \lambda) = X_0(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} Z_1(x, \lambda)$$

onde  $Z_1$  deve satisfazer

$$(1.14) \quad Z_1(x, \lambda) = \left( e^{\lambda \int_0^x \lambda_j(s) ds} \frac{a_{ij}(x) e^{\int_0^x a_{jj}(s) ds}}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} - e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \frac{a_{ij}(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda} K_{ij}(a_{ij}(\cdot) e^{\int_0^{\cdot} a_{jj}(s) ds}, x, \lambda) \right)_{i \neq j} + \\ + \int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s) ds} C_1(y) Z_1(y, \lambda) dy.$$

Procuraremos então determinar numa matriz  $X_1(x, \lambda)$  tal que, para  $\lambda \neq 0$ , deve satisfazer

$$(1.15) \quad X_1(x, \lambda) = \left( e^{\lambda \int_0^x \lambda_j(s) ds} \frac{a_{ij}(x) e^{\int_0^x a_{jj}(s) ds}}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} - e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \frac{a_{ij}(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} \right)_{i \neq j} + \\ + \int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s) ds} C_1(y) X_1(y, \lambda) dy + \frac{1}{\lambda} (\gamma_{ij}(x, \lambda))_{n \times n}$$

onde

$$(1.16) \quad |Y_{ij}(x, \lambda)| \leq e^{\sigma Mx} K_2 \text{ se } 0 \leq x \leq l \text{ e } |\operatorname{Re} \lambda| < \sigma, \quad \sigma > 0$$

com

$$K_2 = K_2(l, \sigma) > 0.$$

Procuraremos  $X_1(x, \lambda)$  na forma de uma soma

$$X_1(x, \lambda) = X_1^1(x, \lambda) + X_1^2(x, \lambda)$$

onde

$$X_1^1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda \int_0^x \lambda_j(s) ds} & \\ & \alpha_{ij}(x) \end{pmatrix}_{n \times n}$$

e

$$X_1^2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} & \\ & \beta_{ij}(x) \end{pmatrix}_{n \times n}$$

temos então que

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s) ds} C_1(y) X_1(y, \lambda) dy &= \\ &= \int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s) ds} C_1(y) X_1^1(y, \lambda) dy + \\ &+ \int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s) ds} C_1(y) X_1^2(y, \lambda) dy \end{aligned}$$

e o problema pode ser dividido em duas partes:

1.<sup>a</sup> PARTE: A matriz

$$\int_0^x e^{\lambda \int_Y^x K_1(s) ds} C_1(y) X_1^1(y, \lambda) dy$$

possui na posição  $ij$  o termo

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \int_0^x e^{\lambda \int_Y^x \lambda_i(s) ds} a_{ik}(y) e^{\lambda \int_0^Y \lambda_j(s) ds} \alpha_{kj}(y) dy = \\ & = \sum_{k=1}^n \int_0^x e^{\lambda \int_Y^x \lambda_i(s) ds} + \lambda \int_0^Y \lambda_j(s) ds a_{ik}(y) \alpha_{kj}(y) dy \end{aligned}$$

que para  $i \neq j$ , através da igualdade (1.11) com

$$f(y) = a_{ik}(y) \alpha_{kj}(y),$$

pode ser transformado numa expressão em  $\frac{1}{\lambda}$  do tipo  $\frac{1}{\lambda} \gamma_{ij}(x, \lambda)$  satisfazendo (1.16), qualquer que seja  $\alpha_{kj}(y)$  continuamente diferenciável considerada, logo podemos tomar

$$(1.17) \quad \alpha_{ij}(x) = \frac{a_{ij}(x) e^{\int_0^x a_{jj}(s) ds}}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)}, \quad i \neq j$$

que os termos  $i \neq j$  de

$$\int_0^x e^{\lambda \int_Y^x K_1(s) ds} c_1(y) x_1^1(y, \lambda) dy$$

serão eliminados pelos termos da matriz  $\frac{1}{\lambda} (Y_{ij}(x, \lambda))$  e estaremos de acordo com a igualdade (1.15). Na posição  $ii$  temos o termo

$$\sum_{k=1}^n \int_0^x e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} a_{ik}(y) \alpha_{ki}(y) dy$$

portanto para  $x_1^1(x, \lambda)$  satisfazer (1.15) procuraremos  $\alpha_{ii}(x)$  que satisfaça

$$e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \alpha_{ii}(x) = \sum_{k=1}^n e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \int_0^x a_{ik}(y) \alpha_{ki}(y) dy$$

isto é

$$\begin{aligned} \alpha_{ii}(x) &= \sum_{k=1}^n \int_0^x a_{ik}(y) \alpha_{ki}(y) dy = \\ &= \int_0^x a_{ii}(y) \alpha_{ii}(y) dy + \sum_{k \neq i} \int_0^x a_{ik}(y) \alpha_{ki}(y) dy \end{aligned}$$

logo, resolvendo achamos

$$\alpha_{ii}(x) = \left[ \int_0^x \sum_{k \neq i} a_{ik}(y) \alpha_{ki}(y) e^{-\int_0^y a_{ii}(s) ds} dy \right] e^{\int_0^x a_{ii}(s) ds}$$

como  $\alpha_{ki}(y)$ , para  $k \neq i$ , é dada por (1.17) obtemos

$$(1.18) \quad \alpha_{ii}(x) = e^{\int_0^x a_{ii}(s) ds} \int_0^x \sum_{k \neq i} \frac{a_{ik}(y) a_{ki}(y)}{\lambda_i(y) - \lambda_k(y)} dy$$

2.<sup>a</sup> PARTE: A matriz

$$\int_0^x e^{\lambda \int_Y^x K_1(s) ds} C_1(y) X_1^2(y) dy$$

possui na posição  $ij$  o termo

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \int_0^x e^{\lambda \int_Y^x \lambda_i(s) ds} a_{ik}(y) e^{\lambda \int_0^y \lambda_k(s) ds} \beta_{kj}(y) dy = \\ & = \sum_{k=1}^n \int_0^x e^{\lambda \int_Y^x \lambda_i(s) ds + \lambda \int_0^y \lambda_k(s) ds} a_{ik}(y) \beta_{kj}(y) dy \end{aligned}$$

aqui, como na 1.<sup>a</sup> parte, podemos eliminar os termos para os quais  $k \neq i$ , usando a igualdade (1.11), portanto temos que considerar na posição  $ij$  somente a expressão

$$\int_0^x e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} a_{ii}(y) \beta_{ij}(y) dy \quad (k = i)$$

logo para  $X_1^2(x, \lambda)$  satisfazer (1.15) procuraremos  $\beta_{ij}(x)$  que

satisfaça, para  $i \neq j$

$$e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \beta_{ij}(x) = - e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \frac{a_{ij}(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} + \\ + \int_0^x e^{\lambda \int_0^y \lambda_i(s) ds} a_{ii}(y) \beta_{ij}(y) dy$$

isto é,

$$\beta_{ij}(x) = \int_0^x a_{ii}(y) \beta_{ij}(y) dy - \frac{a_{ij}(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} ; \quad (i \neq j)$$

portanto, resolvendo achamos

$$(1.19) \quad \beta_{ij}(x) = \frac{-a_{ij}(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} e^{\int_0^x a_{ii}(s) ds} ; \quad (i \neq j)$$

e para  $i = j$

$$e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s) ds} \beta_{ii}(x) = \int_0^x e^{\lambda \int_0^y \lambda_i(s) ds} a_{ii}(y) \beta_{ii}(y) dy$$

logo

$$(1.20) \quad \beta_{ii}(x) = 0.$$

Determinamos dessa maneira, itens (1.17) a (1.20), a matriz  $X_1(x, \lambda)$  satisfazendo o item ii) do teorema.

Temos que

$$X(x, \lambda) = X_0(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} Z_1(x, \lambda)$$

onde  $Z_1(x, \lambda)$  satisfaz (1.14), logo fazendo

$$Z_1(x, \lambda) = X_1(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} X_2(x, \lambda)$$

obtemos

$$X(x, \lambda) = X_0(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} X_1(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2(x, \lambda)$$

onde

$$X_2(x, \lambda) = \lambda (Z_1(x, \lambda) - X_1(x, \lambda)).$$

Por (1.14) e (1.15) obtemos que

$$\begin{aligned} Z_1(x, \lambda) - X_1(x, \lambda) &= \int_0^x e^{\lambda \int_Y^x K_1(s) ds} C_1(Y) \left( Z_1(Y, \lambda) - X_1(Y, \lambda) \right) dy \\ &+ \frac{1}{\lambda} \left( \gamma_{ij}(x, \lambda) \right)_{n \times n} \end{aligned}$$

onde

$$|\gamma_{ij}(x, \lambda)| \leq e^{\sigma Mx} \mathbb{K}_3 \text{ se } |\operatorname{Re} \lambda| \leq \sigma, \quad \sigma > 0$$

e  $\mathbb{K}_3 > 0$ , portanto

$$x_2(x, \lambda) = \int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s) ds} C_1(y) x_2(y, \lambda) dy + R(x, \lambda)$$

onde

$$|R(x, \lambda)| \leq e^{\sigma Mx} \mathbb{K}_3 \text{ se } |\operatorname{Re} \lambda| \leq \sigma$$

portanto para os valores complexos de  $\lambda$  com  $|\operatorname{Re} \lambda| \leq \sigma$  temos

$$\begin{aligned} |x_2(x, \lambda)| &\leq \int_0^x e^{\sigma M(x-y)} |C_1(y)| |x_2(y, \lambda)| dy + e^{\sigma Mx} \mathbb{K}_3 = \\ &= e^{\sigma Mx} \left[ \int_0^x |C_1(y)| e^{-\sigma My} |x_2(y, \lambda)| dy + \mathbb{K}_3 \right] \end{aligned}$$

logo

$$e^{-\sigma Mx} |x_2(x, \lambda)| \leq \mathbb{K}_3 + \int_0^x |C_1(y)| e^{-\sigma My} |x_2(y, \lambda)| dy$$

e aplicando a desigualdade de Gronwall obtemos:

$$e^{-\sigma Mx} |x_2(x, \lambda)| \leq \mathbb{K}_3 e^{\int_0^x |C_1(y)| dy}$$

portanto

$$|X_2(x, \lambda)| \leq e^{\sigma M \ell} K_3 e^{\int_0^\ell |C_1(y)| dy} = K$$

onde  $K = K(\ell, \sigma) > 0$  satisfaz o item iii) do teorema.  $\square$

Como

$$X(x, \lambda) = X(x, 0, \lambda) = \begin{pmatrix} X^{11}(x, \lambda)_{N \times N} & X^{12}(x, \lambda)_{N \times (n-N)} \\ X^{21}(x, \lambda)_{(n-N) \times N} & X^{22}(x, \lambda)_{(n-N) \times (n-N)} \end{pmatrix}.$$

podemos escrever, usando o teorema 4.1, que:

$$\begin{aligned} X^{11}(x, \lambda) &= X_0^{11}(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} X_1^{11}(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2^{11}(x, \lambda) \\ X^{12}(x, \lambda) &= \quad \quad \quad + \frac{1}{\lambda} X_1^{12}(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2^{12}(x, \lambda) \\ (1.21) \quad X^{21}(x, \lambda) &= \quad \quad \quad + \frac{1}{\lambda} X_1^{21}(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2^{21}(x, \lambda) \\ X^{22}(x, \lambda) &= X_0^{22}(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} X_1^{22}(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2^{22}(x, \lambda) \end{aligned}$$

onde  $|X_2^{ij}(x, \lambda)|$  é limitado para  $0 \leq x \leq \ell$ ,  $|\operatorname{Re} \lambda|$  limitado,  $i, j = 1, 2$  e daí enunciar o seguinte corolário.

COROLÁRIO 4.1: A matriz principal de soluções  $X(x, y, \lambda)$  do sistema (1.4),  $X(y, y, \lambda) = I$ , para  $\lambda \neq 0$ , é dada por

$$X(x, y, \lambda) = X_0(x, y, \lambda) + \frac{1}{\lambda} X_1(x, y, \lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2(x, y, \lambda)$$

onde

$$X_0(x, y, \lambda) = X_0(x, \lambda) X_0(y, \lambda)^{-1}$$

$$X_1(x, y, \lambda) = [X_1(x, \lambda) - X_0(x, \lambda) X_0(y, \lambda)^{-1} X_1(y, \lambda)] X_0(y, \lambda)^{-1}$$

e  $|X_2(x, y, \lambda)|$  é limitado para  $0 \leq x, y \leq l$  e  $|\operatorname{Re} \lambda|$  limitado, e ainda mais, como

$$X(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} X^{11}(x, y, \lambda)_{N \times N} & X^{12}(x, y, \lambda)_{N \times (n-N)} \\ X^{21}(x, y, \lambda)_{(n-N) \times N} & X^{22}(x, y, \lambda)_{(n-N) \times (n-N)} \end{pmatrix}$$

obtemos que

$$X^{11}(x, y, \lambda) = X_0^{11}(x, \lambda) X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda} [X_1^{11}(x, \lambda) -$$

$$- X_0^{11}(x, \lambda) X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} X_1^{11}(y, \lambda)] X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} + \text{ termo em } \lambda^{-2}$$

$$X^{12}(x, y, \lambda) = + \frac{1}{\lambda} [ X_1^{12}(x, \lambda) - \\ - X_0^{11}(x, \lambda) X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} X_1^{12}(y, \lambda) ] X_0^{22}(y, \lambda)^{-1} + \text{ termo em } \lambda^{-2}$$

$$X^{21}(x, y, \lambda) = + \frac{1}{\lambda} [ X_1^{21}(x, \lambda) - \\ - X_0^{22}(x, \lambda) X_0^{22}(y, \lambda)^{-1} X_1^{21}(y, \lambda) ] X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} + \text{ termo em } \lambda^{-2}$$

$$X^{22}(x, y, \lambda) = X_0^{22}(x, \lambda) X_0^{22}(y, \lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda} [ X_1^{22}(x, \lambda) - \\ - X_0^{22}(x, \lambda) X_0^{22}(y, \lambda)^{-1} X_1^{22}(y, \lambda) ] X_0^{22}(y, \lambda)^{-1} + \text{ termo em } \lambda^{-2}$$

com as matrizes nos termos em  $\lambda^{-2}$  também limitadas para  $0 \leq x, y \leq \ell$  e  $|\operatorname{Re} \lambda|$  limitado.

DEMONSTRAÇÃO: Temos, pelo teorema 4.1, que

$$X(y, \lambda) = X_0(y, \lambda) + \frac{1}{\lambda} X_1(y, \lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2(y, \lambda)$$

com

$$X_0(y, \lambda) = \operatorname{diag} \left( e^{\lambda \int_0^y \lambda_i(s) ds + \int_0^y a_{ii}(s) ds} \right)$$

portanto podemos escrever que

$$\begin{aligned}
X(y, \lambda)^{-1} &= \left[ \left( I + \frac{1}{\lambda} X_1(y, \lambda) X_0(y, \lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda^2} X_2(y, \lambda) X_0(y, \lambda)^{-1} \right) X_0(y, \lambda) \right]^{-1} \\
&= X_0(y, \lambda)^{-1} \left( I + \frac{1}{\lambda} X_1(y, \lambda) X_0(y, \lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda^2} X_2(y, \lambda) X_0(y, \lambda)^{-1} \right)^{-1} \\
&= X_0(y, \lambda)^{-1} \left( I - \frac{1}{\lambda} X_1(y, \lambda) X_0(y, \lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda^2} R(y, \lambda) \right)
\end{aligned}$$

pois, para  $|\lambda|$  grande com  $|\operatorname{Re} \lambda|$  limitado, a inversa

$$\left( I + \frac{1}{\lambda} X_1(y, \lambda) X_0(y, \lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda^2} X_2(y, \lambda) X_0(y, \lambda)^{-1} \right)^{-1}$$

é dada pela série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{\lambda} X_1(y, \lambda) X_0(y, \lambda)^{-1} - \frac{1}{\lambda^2} X_2(y, \lambda) X_0(y, \lambda)^{-1} \right)^n$$

e ainda mais, a matriz  $R(y, \lambda)$  é inteira em  $\lambda$  com  $|R(y, \lambda)|$  limitado para  $0 \leq y \leq \ell$  e  $|\operatorname{Re} \lambda|$  limitado. Obtemos dessa maneira uma expansão para a matriz  $X(y, \lambda)^{-1}$ ,  $\lambda \neq 0$ , dada por

$$X(y, \lambda)^{-1} = X_0(y, \lambda)^{-1} - \frac{1}{\lambda} X_0(y, \lambda)^{-1} X_1(y, \lambda) X_0(y, \lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda^2} \bar{X}_2(y, \lambda)$$

onde

$$\bar{X}_2(y, \lambda) = X_0(y, \lambda)^{-1} R(y, \lambda).$$

Como

$$X(x, y, \lambda) = X(x, \lambda) X(y, \lambda)^{-1}$$

temos, multiplicando as expansões já obtidas, a expansão de  $X(x, y, \lambda)$  dada no corolário. Para obter a segunda parte, observamos que

$$X_0(x, \lambda) = \begin{pmatrix} X_0^{11}(x, \lambda) & 0 \\ 0 & X_0^{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}; \quad X_0(y, \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & X_0^{22}(y, \lambda)^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$X_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} X_1^{11}(x, \lambda) & X_1^{12}(x, \lambda) \\ X_1^{21}(x, \lambda) & X_1^{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

e daí substituindo na expansão de  $X(x, y, \lambda)$  e efetuando as operações indicadas obtemos as expressões de  $X^{ij}(x, y, \lambda)$ ;  $i, j = 1, 2$ , colocadas no corolário.  $\square$

5. DISTRIBUIÇÃO DO ESPECTRO DO OPERADOR A E DECOMPOSIÇÃO DO  
 ESPAÇO DE HILBERT H EM SOMA DIRETA DE SUB-ESPAÇOS  
 INVARIANTES POR A

Sabemos, pelo parágrafo 2, que o espectro  $\sigma(A)$ , do operador A é formado pelos zeros da função inteira  $h(\lambda)$  onde

$$h(\lambda) = \det H(\lambda)$$

com

$$H(\lambda) = X^{21}(\ell, \lambda)E + X^{22}(\ell, \lambda) - DX^{11}(\ell, \lambda)E - DX^{12}(\ell, \lambda)$$

que pode ser expandida, usando (1.21), para  $\lambda \neq 0$ , na forma

$$(1.22) \quad H(\lambda) = H_0(\lambda) + \frac{1}{\lambda} H_1(\lambda) + \frac{1}{\lambda^2} H_2(\lambda)$$

onde

$$H_0(\lambda) = X_0^{22}(\ell, \lambda) - DX_0^{11}(\ell, \lambda)E$$

$$H_1(\lambda) = X_1^{21}(\ell, \lambda)E + X_1^{22}(\ell, \lambda) - DX_1^{11}(\ell, \lambda)E - DX_1^{12}(\ell, \lambda)$$

e  $H_2(\lambda)$  é inteira com  $|H_2(\lambda)|$  limitado para  $|\operatorname{Re} \lambda|$  limitado.

Como

$$X_{0}^{11}(\ell, \lambda) = \text{diag} \left( e^{\lambda \int_{0}^{\ell} \lambda_i(s) ds + \int_{0}^{\ell} a_{ii}(s) ds} \right)$$

$$\lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$X_{0}^{22}(\ell, \lambda) = \text{diag} \left( e^{\lambda \int_{0}^{\ell} \lambda_i(s) ds + \int_{0}^{\ell} a_{ii}(s) ds} \right)$$

$$\lambda_i > 0, \quad i = N + 1, \dots, n$$

e D e E são matrizes constantes, podemos escrever que

$$h_0(\lambda) = \det H_0(\lambda) = \sum_{k=1}^{n_0} b_k e^{\lambda w_k}$$

com  $b_k$  e  $w_k$  reais, e ainda mais, usando a expansão (1.22), obtemos que

$$(1.23) \quad h(\lambda) = h_0(\lambda) + \frac{1}{\lambda} h_1(\lambda)$$

com  $h_1$  inteira e limitada em faixas verticais do plano complexo.

LEMA 5.1: Se  $Z = \{\lambda / h_0(\lambda) = 0\}$  e  $\alpha < \beta$ , então:

- i) Os elementos de Z possuem parte real limitada.
- ii) Existe  $N_0$ , tal que  $h_0(\lambda)$  tem no máximo  $N_0$  zeros em

$$\{ \lambda / \alpha \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \beta \quad e \quad t \leq \operatorname{Im} \lambda \leq t + 1 \}$$

qualquer que seja  $t \in \mathbb{R}$ .

iii) Para todo  $\delta > 0$ , existe  $m(\delta) > 0$  tal que, se

$$\alpha \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \beta \quad e \quad \operatorname{dist}(\lambda, Z) \geq \delta,$$

então  $|h_0(\lambda)| \geq m(\delta)$ .

DEMONSTRAÇÃO: Veja Levin [11].

TEOREMA 5.1: Os pontos do espectro de  $A$ ,  $\sigma(A) = \{ \lambda \mid h(\lambda) = 0 \}$ , possuem parte real menor ou igual a  $w$ , e se

$$\sigma > \sigma_0 = \sup \{ \operatorname{Re} \lambda \mid h_0(\lambda) = 0 \}$$

então, o número de elementos  $\lambda \in \sigma(A)$ , com  $\sigma \leq \operatorname{Re} \lambda$ , é finito.

DEMONSTRAÇÃO: Que os pontos do espectro de  $A$  possuem parte real menor ou igual a  $w$  segue do fato de que  $A$  é o gerador infinitesimal do  $C_0$ -Semi-Grupo  $T(t)$  satisfazendo  $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ . Para completar a demonstração, suponha que a quantidade de zeros de  $h(\lambda)$  com  $\sigma \leq \operatorname{Re} \lambda \leq w$  é infinita, então se  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  é uma sequência desses zeros, temos que  $|\lambda_j| \rightarrow +\infty$ , pois os zeros da função inteira  $h$  são pontos isolados, e de (1.23), que

$$h_0(\lambda_j) = \frac{-1}{\lambda_j} h_1(\lambda_j)$$

logo, como  $|h_1(\lambda_j)|$  é limitado, obtemos que  $|h_0(\lambda_j)| \rightarrow 0$  que contraria o item iii) do Lema 5.1.

**TEOREMA 5.2 (Divisão do Espectro):** *Seja  $\Gamma$  uma curva fechada, simples, diferenciável por partes do plano complexo, tal que  $h \neq 0$  em  $\Gamma$ . Definimos o operador linear  $P_\Gamma$ , definido sobre o espaço de Hilbert  $H$ , por:*

$$P_\Gamma u = \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\lambda : A) u d\lambda, \quad u \in H$$

$\Gamma$  orientada no sentido anti-horário. Então:

- i)  $P_\Gamma$  é uma projeção linear contínua definida sobre  $H$ .
- ii) Se  $X = \text{Núcleo de } P_\Gamma$  e  $Y = \text{Imagem de } P_\Gamma$ , temos que

$$H = X \oplus Y$$

com  $X$  e  $Y$  sub-espaços de  $H$  invariantes em relação ao operador  $A$  de tal maneira que a restrição de  $A$  a  $X$ , que é um operador linear fechado definido num sub-espaço vetorial denso de  $X$ , possui espectro formado pelos pontos do espectro de  $A$  (zeros de  $h$ ) que estão fora da curva  $\Gamma$ , e a restrição de  $A$  a  $Y$ , é um operador

linear limitado definido sobre  $Y$ , cujo espectro  $\bar{\sigma}$  é formado pelos pontos do espectro de  $A$  que estão no interior da curva  $\Gamma$ .

iii) Se  $u_0 \in X$  e  $t > 0$ , temos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) u_0 d\lambda = 0.$$

iv) Se  $\lambda_0$  é um zero simples de  $h$  e  $\bar{\sigma}$  é o único zero do interior da curva  $\Gamma$ , temos que

$$\dim Y = 1.$$

DEMONSTRAÇÃO: Para os itens i) e ii) veja (Kato [9]), para o item iii) veja (Ribeiro [19]) e para iv), temos por hipótese que

$$h(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) h^*(\lambda)$$

com  $h^* \neq 0$  no interior de  $\Gamma$ , portanto podemos afirmar que  $h(\lambda_0)$  é uma matriz com núcleo de dimensão 1. Por outro lado como, para  $\lambda \in \mathbb{C}$  com  $h(\lambda) \neq 0$  temos que

$$R(\lambda : A) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x) = X(x, \lambda) \begin{pmatrix} E\psi(0) \\ \psi(0) \end{pmatrix} + \int_0^x X(x, y, \lambda) \begin{pmatrix} f_1(y) \\ g_1(y) \end{pmatrix} dy$$

onde

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$\psi(0) = H(\lambda)^{-1} \cdot \beta(f, g, \lambda)$$

com

$$\begin{aligned} \beta(f, g, \lambda)_{(n-N) \times 1} &= \int_0^{\ell} \left[ \left( -X^{21}(\ell, y, \lambda) + DX^{11}(\ell, y, \lambda) \right) f_1(y) + \right. \\ &\quad \left. + \left( -X^{22}(\ell, y, \lambda) + DX^{12}(\ell, y, \lambda) \right) g_1(y) \right] dy \end{aligned}$$

e a última parcela do operador resolvente é analítica no interior de  $\Gamma$ , vem, para  $(f, g) \in H$ , que

$$\begin{aligned} P_{\Gamma} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x) &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda : A) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x) d\lambda = \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} X(x, \lambda) \begin{pmatrix} EH(\lambda)^{-1} \cdot \beta(f, g, \lambda) \\ H(\lambda)^{-1} \cdot \beta(f, g, \lambda) \end{pmatrix} d\lambda \end{aligned}$$

Fazendo

$$G(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \cdot H(\lambda)^{-1}$$

temos que  $G(\lambda)$  é analítica num domínio contendo  $\Gamma$  e seu interior,

e

$$G(\lambda_0) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (\lambda - \lambda_0) H(\lambda)^{-1}.$$

Observe que a matriz  $G(\lambda)$  também pode ser olhada como

$$G(\lambda) = \frac{1}{h^*(\lambda)} \text{adj } H(\lambda)$$

onde  $\text{adj } H(\lambda)$  é a transposta da matriz dos cofatores de  $H(\lambda)$ , portanto temos que

$$\begin{aligned} P_{\Gamma} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x) &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} X(x, \lambda) \begin{pmatrix} EG(\lambda) \cdot \beta(f, g, \lambda) \\ G(\lambda) \cdot \beta(f, g, \lambda) \end{pmatrix} d\lambda \\ &= - \text{resíduo} \left[ \frac{1}{\lambda - \lambda_0} X(x, \lambda) \begin{pmatrix} EG(\lambda) \cdot \beta(f, g, \lambda) \\ G(\lambda) \cdot \beta(f, g, \lambda) \end{pmatrix} \right]_{\lambda=\lambda_0} = \\ &= - X(x, \lambda_0) \begin{pmatrix} EG(\lambda_0) \cdot \beta(f, g, \lambda_0) \\ G(\lambda_0) \cdot \beta(f, g, \lambda_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} H(\lambda_0) \cdot G(\lambda_0) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} H(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_0) H(\lambda)^{-1} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (\lambda - \lambda_0) I = 0 \end{aligned}$$

vem que a imagem de  $G(\lambda_0)$  está contida no núcleo de  $H(\lambda_0)$ , portanto

$$\dim(\operatorname{Im} G(\lambda_0)) = 1$$

logo existe  $\alpha(\lambda_0) \in \mathbb{C}^{n-N}$ , gerador da imagem de  $G(\lambda_0)$ , de tal modo que

$$G(\lambda_0) \cdot \beta(f, g, \lambda_0) = k(f, g, \lambda_0) \cdot \alpha(\lambda_0)$$

onde  $k(f, g, \lambda_0) \in \mathbb{C}$ , portanto

$$P_{\Gamma} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x) = -k(f, g, \lambda_0) \cdot \left[ X(x, \lambda_0) \begin{pmatrix} E \alpha(\lambda_0) \\ \alpha(\lambda_0) \end{pmatrix} \right]$$

donde podemos concluir que  $Y = P_{\Gamma}(H)$  tem dimensão 1 e é gerado por

$$X(x, \lambda_0) \begin{pmatrix} E \alpha(\lambda_0) \\ \alpha(\lambda_0) \end{pmatrix}$$

□

6. EXPANSÃO DO OPERADOR RESOLVENTE  $R(\lambda : A)$  E ESTIMATIVAS  
EXPONENCIAIS PARA O SEMI-GRUPO GERADO POR A

LEMA 6.1: Seja  $\sigma_0$  como no teorema 5.1 e  $\sigma_0 < \alpha < \beta$ , então para os valores complexos de  $\lambda$  tais que

$$\alpha \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \beta, \quad h(\lambda) \neq 0 \quad \text{e} \quad \lambda \neq 0$$

temos que:

$$\text{i)} \quad \frac{1}{h_0(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda \gamma_k} \quad \text{com} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| e^{\operatorname{Re} \lambda \gamma_k} < \infty$$

$$\text{ii)} \quad |H_0(\lambda)^{-1}| \text{ é limitado}$$

$$\text{iii)} \quad H(\lambda)^{-1} = H_0(\lambda)^{-1} - \frac{1}{\lambda} [H_0(\lambda)^{-1} H_1(\lambda) H_0(\lambda)^{-1}] + \frac{1}{\lambda^2} F(\lambda)$$

com  $|F(\lambda)|$  limitado.

DEMONSTRAÇÃO: Os itens i) e ii) seguem do resultado de Pitt, veja [18]. A expansão dada em iii) é obtida pelo mesmo processo usado na demonstração do Corolário 4.1.  $\square$

Daremos no próximo teorema uma expansão para o operador resolvente  $R(\lambda : A)$  do operador A, onde colocaremos somente as expressões da primeira componente desse operador, isto devido ao tamanho das expressões envolvidas e do fato que a segunda

componente, tem o mesmo tipo da primeira, não necessitando portanto de uma análise especial.

**TEOREMA 6.1:** *Seja  $\sigma_0$  como no teorema 5.1. Para os valores  $\lambda \in \mathbb{C}$  tais que*

$$h(\lambda) = \det H(\lambda) \neq 0 \quad \text{e} \quad \sigma_0 < \operatorname{Re} \lambda$$

*temos, para  $(f, g) \in H$  e  $\lambda \neq 0$ , que*

$$\begin{aligned} R(\lambda : A) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &= R_0(\lambda : A) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{\lambda} R_1(\lambda : A) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda^2} R_2(\lambda : A) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$\|R_2(\lambda : A) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\|$$

*é limitado para  $\sigma_0 < \alpha \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \beta$  e ainda se:*

$$R_0(\lambda : A) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix}$$

$$R_1(\lambda : A) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$$

então

$$\varphi_0(x) = X_0^{11}(x, \lambda) E H_0(\lambda)^{-1} \int_0^{\ell} \left[ DX_0^{11}(\ell, \lambda) X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} f_1(y) - \right. \\ \left. - X_0^{22}(\ell, \lambda) X_0^{22}(y, \lambda)^{-1} g_1(y) \right] dy + \int_0^x X_0^{11}(x, \lambda) X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} f_1(y) dy$$

$$\varphi_1(x) = X_0^{11}(x, \lambda) E H_0(\lambda)^{-1} \int_0^{\ell} \left\{ \left[ -X_1^{21}(\ell, \lambda) + DX_1^{11}(\ell, \lambda) + \right. \right. \\ \left. \left. + X_0^{22}(\ell, \lambda) X_0^{22}(y, \lambda)^{-1} X_1^{21}(y, \lambda) - DX_0^{11}(\ell, \lambda) X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} X_1^{11}(y, \lambda) \right] X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} f_1(y) + \right. \\ \left. + \left[ -X_1^{22}(\ell, \lambda) + DX_1^{12}(\ell, \lambda) + X_0^{22}(\ell, \lambda) X_0^{22}(y, \lambda)^{-1} X_1^{22}(y, \lambda) - \right. \right. \\ \left. \left. - DX_0^{11}(\ell, \lambda) X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} X_1^{12}(y, \lambda) \right] X_0^{22}(y, \lambda)^{-1} g_1(y) \right\} dy + \\ + \left[ \left( X_1^{11}(x, \lambda) E + X_1^{12}(x, \lambda) \right) H_0(\lambda)^{-1} - X_0^{11}(x, \lambda) E H_0(\lambda)^{-1} H_1(\lambda) H_0^{-1}(\lambda) \right] \cdot \int_0^{\ell} \left[ DX_0^{11}(\ell, \lambda) \cdot \right. \\ \left. \cdot X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} f_1(y) - X_0^{22}(\ell, \lambda) X_0^{22}(y, \lambda)^{-1} g_1(y) \right] dy + \\ + \int_0^x \left\{ \left[ X_1^{11}(x, \lambda) - X_0^{11}(x, \lambda) X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} \cdot X_1^{11}(y, \lambda) \right] X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} f_1(y) + \right. \\ \left. + \left[ X_1^{12}(x, \lambda) - X_0^{11}(x, \lambda) X_0^{11}(y, \lambda)^{-1} X_1^{12}(y, \lambda) \right] X_0^{22}(y, \lambda)^{-1} g_1(y) \right\} dy$$

e

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

DEMONSTRAÇÃO: Temos, pelo parágrafo 2, que a primeira componente do operador resolvente é

$$\begin{aligned} & \left[ X^{11}(x, \lambda)E + X^{12}(x, \lambda) \right] \psi(0) + \\ & + \int_0^x \left[ X^{11}(x, y, \lambda) f_1(y) + X^{12}(x, y, \lambda) g_1(y) \right] dy \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \psi(0) = H(\lambda)^{-1} \int_0^l & \left\{ \left( -X^{21}(l, y, \lambda) + DX^{11}(l, y, \lambda) \right) f_1(y) + \right. \\ & \left. + \left( -X^{22}(l, y, \lambda) + DX^{12}(l, y, \lambda) \right) g_1(y) \right\} dy \end{aligned}$$

logo para obter a expansão dada neste teorema, basta substituir nas expressões acima, as expansões colocadas em (1.21), no Colário 4.1 e no Lema 6.1.  $\square$

TEOREMA 6.2: (Translação) Seja

$$\Gamma = [\alpha, b] \times [-r, r]$$

o retângulo do plano complexo, onde  $\sigma_0 < \alpha$ ,  $h(\lambda)$  não se anula em  $\text{Re}(\lambda) = \alpha$ ,  $b > \max\{0, w\}$  e  $r \geq r_0$ , de modo que  $\Gamma$  contenha em seu interior todos os zeros de  $h$  com parte real maior que  $\alpha$ . Então, se  $X = \text{Núcleo de } P_\Gamma$  dado pelo teorema 5.2, temos que

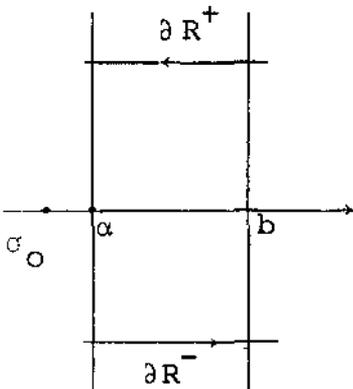
$$T(t)u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)u d\lambda$$

para  $u \in \mathcal{D}(A^2) \cap X$  e  $t > 0$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Se  $\alpha > \max\{0, w\}$  o teorema é imediato. Caso contrário, usando os teoremas 5.2 e 3.1, temos para obter que

$$T(t)u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)u d\lambda$$

se  $u \in \mathcal{D}(A^2) \cap X$  e  $t > 0$ , basta mostrar que



$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial R^\pm} e^{\lambda t} R(\lambda : A)u d\lambda = 0$$

onde  $\partial R^\pm$  indica os segmentos do plano complexo com extremidades  $\alpha \pm ir$  e  $b \pm ir$  respectivamente, e para isto é suficiente verificar o termo em  $\lambda^0$  do operador resolvente,  $R_0(\lambda : A)u$ , dado no teorema 6.1, que envolve expressões do tipo

$R_0(\lambda : A)u$ , dado no teorema 6.1, que envolve expressões do tipo

$$a(x) e^{\lambda \left( \int_0^x \mu + \int_0^\ell \mu \right)} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda \gamma_k} \right) \int_0^\ell b(y) e^{-\lambda \int_0^y \mu} h(y) dy$$

que pode ser simplificada para a forma

$$\beta(x, \lambda) \int_0^{\ell} e^{-\lambda \int_0^y \mu} f(y) dy$$

onde  $|\beta(x, \lambda)|$  é limitado se  $0 \leq x \leq \ell$  e  $\alpha \leq \operatorname{Re} \lambda \leq b$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $f$  é continuamente diferenciável e daí, como  $\mu \neq 0$ , através de uma integração por partes, podemos mostrar que

$$\left| \int_{\partial R^{\pm}} e^{\lambda t} \left( \beta(x, \lambda) \int_0^{\ell} e^{-\lambda \int_0^y \mu} f(y) dy \right) d\lambda \right| \leq K(t) \frac{1}{r}$$

completando a demonstração.  $\square$

**TEOREMA 6.3:** (Estimativa exponencial): Seja  $\alpha$  tal que  $\sigma_0 < \alpha$  e  $h(\lambda)$  não se anula em  $\operatorname{Re} \lambda = \alpha$ . Escolhemos  $r_0$  tal que

$$\Gamma = [\alpha, b] \times [-r_0, r_0]$$

contenha em seu interior todos os zeros de  $h$  com parte real maior que  $\alpha$ . Então existe  $K$  (que depende de  $\alpha$ ) tal que

$$\|T(t)u\|_H \leq K e^{\alpha t} \|u\|_H, \quad t \geq 0$$

se  $u \in \mathcal{D}(A^2) \cap X$ , onde  $X = \text{Núcleo de } P_{\Gamma}$

**DEMONSTRAÇÃO:** Pelo Teorema 6.2, temos para  $\alpha$  e  $u$  nas condições acima, que

$$T(t)u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)u d\lambda, \quad t \geq 0.$$

Usaremos a expansão do operador resolvente, dada no Teorema 6.1, para obter a estimativa exponencial colocada no enunciado. Aqui, como no Teorema 6.1, trabalharemos somente com a primeira componente do resolvente. A estimativa para o termo em  $\lambda^{-2}$  é imediata, para os termos em  $\lambda^0$  e  $\lambda^{-1}$  veja os cálculos abaixo:

1.<sup>a</sup> PARTE: O termo em  $\lambda^0$  envolve expressões do tipo:

$$a(x) e^{\lambda \left( \int_0^x \mu + \int_0^\ell \mu \right)} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda \gamma_k} \right) \int_0^\ell b(y) e^{-\lambda \int_0^y \mu} h(y) dy$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $\mu$  são funções contínuas definidas em  $[0, \ell]$ ,  $\gamma_k \in \mathbb{R}$  e  $\mu \neq 0$ , logo a estimativa exponencial para este termo pode ser justificada usando a integral *protótipo* seguinte:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} \left( a(x) e^{\lambda \left( \int_0^x \mu + \int_0^\ell \mu \right)} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda \gamma_k} \right) \int_0^\ell b(y) e^{-\lambda \int_0^y \mu} h(y) dy \right) d\lambda$$

e fazendo  $\lambda = \alpha + is$  e  $\int_0^x \mu + \int_0^\ell \mu = c(x)$ , temos que esta integral pode ser colocada na forma

$$(1.24) \quad \frac{1}{2\pi} a(x) e^{\alpha t} e^{\alpha c(x)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\alpha \gamma_k}.$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\ell} \left[ b(y) e^{-\alpha \int_0^y \mu} h(y) \int_{-r}^r e^{is(t + c(x) + \gamma_k - \int_0^y \mu)} ds \right] dy$$

resolvendo a integral em  $s$ , obtemos que a segunda linha de (1.24) é igual a

$$(1.25) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\ell} b(y) e^{-\alpha \int_0^y \mu} h(y) \frac{2 \operatorname{sen} r(t + c(x) + \gamma_k - \int_0^y \mu)}{t + c(x) + \gamma_k - \int_0^y \mu} dy$$

fazendo  $h = 0$  fora do intervalo  $[0, \ell]$  e colocando  $z = \int_0^y \mu$ , temos que  $y = \xi(z)$  com  $\xi$  continuamente diferenciável de modo que (1.25) é igual a

$$(1.26) \quad 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi(z)) e^{-\alpha z} h(\xi(z)) \frac{\operatorname{sen} r(t + c(x) + \gamma_k - z)}{t + c(x) + \gamma_k - z} \xi'(z) dz$$

como, vale a fórmula

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \frac{\operatorname{sen} r(\theta - z)}{\theta - z} dz = \frac{\pi}{2} [f(\theta + 0) + f(\theta - 0)]$$

se  $f$  é de variação limitada, veja [21] pg. 25, temos que (1.26) é igual a

$$b(\xi(t + c(x) + \gamma_k)) e^{-\alpha(t+c(x)+\gamma_k)} \xi'(t + c(x) + \gamma_k) \cdot$$

$$\left[ h(\xi(t + c(x) + \gamma_k + 0)) + h(\xi(t + c(x) + \gamma_k - 0)) \right]$$

e esta expressão é não nula somente se  $0 \leq \xi(t + c(x) + \gamma_k) \leq \ell$  portanto  $t + c(x) + \gamma_k$  também é limitado e levando em conta que  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| e^{\alpha \gamma_k} < \infty$  podemos escrever que (1.24) em módulo é menor ou igual a

$$K_1 e^{\alpha t} |h(\xi(t + c(x) + \gamma_k + 0)) + h(\xi(t + c(x) + \gamma_k - 0))|$$

e daí obter finalmente que

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} \left[ a(x) e^{\lambda c(x)} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda \gamma_k} \right) \int_0^{\ell} b(y) e^{-\lambda \int_0^y \mu} h(y) dy \right] d\lambda \right\|_{L^2} \leq$$

$$\leq K e^{\alpha t} \|h\|_{L^2} .$$

2.<sup>a</sup> PARTE: As matrizes que entram no termo em  $\lambda^{-1}$  do operador resolvente dado no Teorema 6.1 possuem em cada posição expressões do tipo

$$a(x) e^{\lambda \gamma(x)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda \gamma_k}, \quad b(y) e^{\lambda \beta(y)}$$

logo após efetuarmos as operações indicadas no referido teorema, vamos obter uma matriz que em cada posição possui uma soma finita de termos do tipo

$$\frac{1}{\lambda} a(x) e^{\lambda\gamma(x)} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda\gamma_k} \right) \int_0^{\ell} b(y) e^{\lambda\beta(y)} h(y) dy$$

logo uma integral *protótipo*, para este caso, terá a forma

$$(1.27) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \left[ \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} a(x) e^{\lambda\gamma(x)} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda\gamma_k} \right) \int_0^{\ell} b(y) e^{\lambda\beta(y)} h(y) dy \right] d\lambda$$

onde  $a$ ,  $\gamma$ ,  $b$  e  $\beta$  são contínuas em  $[0, \ell]$ . Fazendo  $\lambda = \alpha + is$  em (1.27) obtemos

$$(1.28) \quad a(x) e^{\alpha t} e^{\alpha\gamma(x)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\alpha\gamma_k} .$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\ell} \left[ b(y) e^{\alpha\beta(y)} h(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{e^{is(t + \gamma_k + \gamma(x) + \beta(y))}}{\alpha + is} ds \right] dy .$$

Não é difícil calcular e obter que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{e^{is(t + \gamma_k + \gamma(x) + \beta(y))}}{\alpha + is} ds =$$

$$= \begin{cases} ie^{-\alpha(t + \gamma_k + \gamma(x) + \beta(y))} & \text{se } \alpha(t + \gamma_k + \gamma(x) + \beta(y)) > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } (t + \gamma_k + \gamma(x) + \beta(y)) = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha(t + \gamma_k + \gamma(x) + \beta(y)) < 0 \end{cases}$$

logo

$$\left| \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{e^{is(t + \gamma_k + \gamma(x) + \beta(y))}}{\alpha + is} ds \right| \leq 1$$

e daí segue que (1.27) em módulo é menor ou igual a

$$|a(x)| e^{\alpha t} e^{\alpha \gamma(x)} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| e^{\alpha \gamma_k} \int_0^{\ell} |b(y)| e^{\alpha \beta(y)} |h(y)| dy$$

logo existe  $K_1$  tal que este termo é menor ou igual a

$$K_1 e^{\alpha t} \int_0^{\ell} |h(y)| dy$$

portanto

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \left[ \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} a(x) e^{\lambda \gamma(x)} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda \gamma_k} \right) \int_0^{\ell} b(y) e^{\lambda \beta(y)} h(y) dy \right] d\lambda \right\|_{L^2}$$

$$\leq K e^{\alpha t} \|h\|_{L^2}; \quad t > 0. \quad \square$$

**COROLÁRIO 6.1:** Com as mesmas hipóteses do Teorema 6.3, temos que existe  $K$  tal que

$$\|T(t)u\|_H \leq K e^{\alpha t} \|u\|_H \quad t \geq 0$$

para  $u \in X = \text{Núcleo de } P_{\Gamma}$ .

## CAPÍTULO II

### BIFURCAÇÃO DE HOPF EM ESPAÇOS DE DIMENSÃO INFINITA COM PERTURBAÇÃO NA PARTE ILIMITADA

#### 1. DIFERENCIABILIDADE EM RELAÇÃO AO PARÂMETRO

Seja  $(W, \| \cdot \|)$  um espaço de Banach e  $[-\eta, \eta]$ ,  $\eta > 0$ , um intervalo real. Suponhamos que para cada  $r \in [-\eta, \eta]$ , temos um operador linear fechado  $A(r)$ , definido num sub-espaço vetorial  $\mathcal{D}(A(r)) = \mathcal{D}$  (independente de  $r$ ), denso em  $W$ , e com valores em  $W$  tal que:

(HA-1) O operador  $A(r)$ ,  $r \in [-\eta, \eta]$ , é fortemente continuamente diferenciável em  $\mathcal{D}$ , isto é, a função  $u(r) = A(r)u$  para  $u \in \mathcal{D}$  é continuamente diferenciável em  $[-\eta, \eta]$  com

$$u'(r) = A'(r)u.$$

Temos portanto, que  $A'(r)$  é um operador linear definido em  $\mathcal{D}$ , fortemente contínuo em  $\mathcal{D}$ . Indicaremos por  $\rho$  o conjunto formado pelos valores complexos  $\lambda$  tais que  $\lambda - A(r)$  possui inversa limitada  $R(\lambda : A(r)) = (\lambda - A(r))^{-1}$  para  $r \in [-\eta, \eta]$ .

**TEOREMA 1.1:** Nas condições acima, se  $\lambda \in \rho$ , temos que:

i)  $A(r)R(\lambda : A(s))$  é um operador linear limitado definido

em  $W$ , contínuo na norma do espaço  $\mathcal{L}(W,W)$  dos operadores lineares limitados, em relação a  $r$  e  $s$ ,  $-\eta \leq r$ ,  $s \leq \eta$ .

ii)  $A(r)R(\lambda : A(s))$  e  $R(\lambda : A(r))$  são fortemente diferenciáveis em relação a  $r$  com

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( A(r)R(\lambda : A(s)) \right) = A'(r)R(\lambda : A(s))$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( R(\lambda : A(r)) \right) = R(\lambda : A(r))A'(r)R(\lambda : A(r))$$

e ainda mais  $A'(r)R(\lambda : A(s))$  é um operador linear limitado fortemente contínuo com função das duas variáveis  $r$  e  $s$ .

DEMONSTRAÇÃO: Para a demonstração veja Krein [10], páginas 176 - 180.

Em particular, segue desse lema e do Teorema de Banach-Steinhaus, que  $A'(r)R(\lambda : A(r))$  é uniformemente limitado,

$$\|A'(r)R(\lambda : A(r))\|_{\mathcal{L}(W,W)} \leq c \quad r \in [-\eta, \eta].$$

Suponhamos ainda que:

(HA-2) O operador  $A(r)$  é o gerador infinitesimal de um Semi-Grupo, fortemente contínuo, de operadores lineares limitados

$$T(r,t); \quad t \geq 0$$

tal que

$$\|T(r,t)\|_{\mathcal{L}(W,W)} \leq Me^{\beta t}, \quad t \geq 0$$

onde  $M$  e  $\beta$  são constantes positivas que independem de  $r$ .

**OBSERVAÇÃO 1.1:** Para simplificar as expressões deste parágrafo, vamos supor, sem perda de generalidade, que  $0 \in \rho$ , de modo que

$$A^{-1}(r); \quad r \in [-\eta, \eta]$$

é um operador limitado.

**TEOREMA 1.2:** Nas condições anteriores, temos que:

i) Se  $r_n \rightarrow r$  em  $[-\eta, \eta]$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , então

$$T(r_n, t)w \rightarrow T(r, t)w, \quad t \geq 0, \quad w \in W$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , uniformemente em  $t$  e  $w$  para  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ , e  $w \in \mathbb{K}$  onde  $\mathbb{K}$  é um sub-conjunto compacto de  $W$ .

ii)  $T(r, t)$  é fortemente diferenciável em relação a  $r$  em  $\mathcal{D}$  com

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( T(r, t)u \right) = \int_0^t T(r, t-s)A'(r)T(r, s)uds, \quad u \in \mathcal{D}.$$

DEMONSTRAÇÃO: i) Como  $A(\cdot)u$  é contínuo se  $u \in \mathcal{D}$ , segue do teorema de aproximação de Trotter, veja 3.4 de Pazy [17] que

$$T(r_n, t)w \rightarrow T(r, t)w$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , uniformemente para  $t$  em intervalos limitados e  $w \in W$ . Logo para  $w \in K$  existe  $n_w$  tal que

$$\|T(r_n, t)w - T(r, t)w\| < \varepsilon/3$$

se  $n \geq n_w$  qualquer que seja  $t \in [0, T]$ . Para  $w' \in B_\delta(w)$  onde  $B_\delta(w)$  é a bola aberta com centro em  $w$  e raio  $\delta = \frac{\varepsilon}{3Me^{\beta T}}$ , temos que

$$\begin{aligned} \|T(r_n, t)w' - T(r, t)w'\| &\leq \|T(r_n, t)w' - T(r_n, t)w\| + \\ &+ \|T(r_n, t)w - T(r, t)w\| + \|T(r, t)w - T(r, t)w'\| \leq \\ &\leq 2Me^{\beta T} \|w' - w\| + \|T(r_n, t)w - T(r, t)w\| < \varepsilon \end{aligned}$$

se  $n \geq n_w$ .

As bolas  $B_\delta(w)$  cobrem o compacto  $K$ , logo tomando a subcobertura finita  $B_\delta(w_1), \dots, B_\delta(w_k)$  e

$$n_0 = \max \{n_{w_1}, \dots, n_{w_k}\}$$

temos, para  $n \geq n_0$ , que

$$\|T(r_n, t)w - T(r, t)w\| < \varepsilon$$

para todo  $t$  em  $[0, T]$  e todo  $w \in \mathbb{K}$ .

Para o item ii) temos de mostrar que

$$(1.1) \quad T(r+h, t)u - T(r, t)u - h \int_0^t T(r, t-s)A'(r)T(r, s)uds$$

é  $o(h)$  quando  $h \rightarrow 0$ , para  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ . Usando o Lema 4.1, pg. 87 de Pazy [17] temos que

$$\begin{aligned} A^{-1}(r+h) \left[ T(r+h, t) - T(r, t) \right] A^{-1}(r)w &= \\ &= \int_0^t T(r+h, t-s) \left[ A^{-1}(r) - A^{-1}(r+h) \right] T(r, s)w ds \end{aligned}$$

vale para  $w \in W$  e  $t \geq 0$ , portanto tomando  $w \in W$  tal que

$$u = A^{-1}(r)w$$

podemos escrever que

$$\begin{aligned} T(r+h, t)u - T(r, t)u &= \\ &= A(r+h) \int_0^t T(r+h, t-s) \left[ A^{-1}(r) - A^{-1}(r+h) \right] T(r, s)w ds \end{aligned}$$

e usando que  $A(r)$  é um operador fechado e comuta com  $T(r,t)$  em  $\mathcal{D}$ , para  $r \in [-\eta, \eta]$  e  $t \geq 0$ , obtemos que

$$\begin{aligned} T(r+h,t)u - T(r,t)u &= \\ &= \int_0^t T(r+h,t-s) \left[ A(r+h) - A(r) \right] A^{-1}(r) T(r,s) w ds \end{aligned}$$

portanto, como  $A^{-1}(r)$  também comuta com  $T(r,t)$ , temos que (1.1) é igual a

$$\begin{aligned} &\int_0^t T(r+h,t-s) \left[ A(r+h)A^{-1}(r) - A(r)A^{-1}(r) - hA'(r)A^{-1}(r) \right] T(r,s) w ds \\ &+ h \int_0^t \left[ T(r+h,t-s)A'(r)A^{-1}(r) - T(r,t-s)A'(r)A^{-1}(r) \right] T(r,s) w ds \end{aligned}$$

a segunda parcela da soma acima é  $o(h)$  pelo item i) desse teorema e pelo Teorema 1.1, para a primeira parcela, observamos que

$$\begin{aligned} &\left[ A(r+h)A^{-1}(r) - A(r)A^{-1}(r) \right] T(r,s) w = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{d\theta} A(r+\theta h)A^{-1}(r) T(r,s) w d\theta = \\ &= h \int_0^1 A'(r+\theta h)A^{-1}(r) T(r,s) w d\theta \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} & \left[ A(r+h)A^{-1}(r) - A(r)A^{-1}(r) - hA'(r)A^{-1}(r) \right] T(r,s)w = \\ & = h \int_0^1 \left[ A'(r+\theta h)A^{-1}(r) - A'(r)A^{-1}(r) \right] T(r,s)w d\theta \end{aligned}$$

como  $\{T(r,s)w : 0 \leq s \leq T\}$  é compacto em  $W$  temos que este termo é  $o(h)$  quando  $h \rightarrow 0$ , uniformemente em  $s$ , para  $0 \leq s \leq T$ , logo a primeira parcela da soma acima também é  $o(h)$ , quando  $h \rightarrow 0$ , completando a demonstração do teorema.  $\square$

Segue dos Teoremas 1.1 e 1.2 o seguinte corolário:

**COROLÁRIO 1.1:** Se  $f(r,t)$  é continuamente diferenciável em  $r$  e  $t$ , para  $r \in [-\eta, \eta]$  e  $t \geq 0$ , e  $\lambda \in \rho$ , então

$$T(r,t)R(\lambda : A(r))f(r,t)$$

é continuamente diferenciável em relação a  $r$  e a  $t$ .

Consideremos o problema de evolução a valores iniciais não linear em  $W$ .

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dt} = Aw + f(t,w) \\ w(0) = w_0 \end{array} \right.$$

onde  $A$  é o gerador infinitesimal de um Semi-Grupo,  $\lambda$  fortemente

contínuo  $T(t)$  e  $f$  é uma função contínua de  $[0, T] \times W$  em  $W$ .

DEFINIÇÃO 1.1: Uma função contínua  $w(t)$ ,  $0 \leq t < t_1$  é chamada de solução "mild" do problema a valores iniciais (1.2) se  $w(t)$  satisfaz a equação integral

$$w(t) = T(t)w_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, w(s))ds.$$

Nessas condições podemos enunciar o seguinte resultado.

TEOREMA 1.3: Se  $w : [0, t_1) \rightarrow W$  é uma solução "mild" de (1.2),  $w_0 \in \mathcal{D}(A)$  e  $f$  é continuamente diferenciável, então  $w$  é continuamente diferenciável.

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $t_0$  um ponto de  $(0, t_1)$ , mostraremos que  $w$  é continuamente diferenciável em  $[0, t_0]$ . O problema a valores iniciais

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = Av + f_t(t, w(t)) + f_w(t, w(t))v \\ v(0) = Aw_0 + f(0, w_0) \end{array} \right.$$

possui uma solução "mild"  $v(t)$  contínua em  $[0, t_0]$ . A idéia é mostrar que  $w(t)$  é diferenciável com  $\dot{w}(t) = v(t)$ , para isto, consideremos

$$R_h(t) = w(t+h) - w(t) - hv(t)$$

logo

$$(1.3) \quad w(t+h) - w(t) = R_h(t) + hv(t)$$

e temos de mostrar que  $\|R_h(t)\|$  é  $o(h)$  quando  $h \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} R_h(t) &= T(t+h)w_0 + \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s,w(s)) ds - \\ &- T(t)w_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,w(s)) ds - \\ &- hT(t) (Aw_0 + f(0,w_0)) - \\ &- h \int_0^t T(t-s) \left[ f_t(s,w(s)) + f_w(s,w(s)) v(s) \right] ds. \end{aligned}$$

Notando que

$$\int_0^t T(t-s)f(s+h,w(s+h)) ds = \int_h^{t+h} T(t+h-s)f(s,w(s)) ds$$

podemos escrever que

$$\begin{aligned}
R_h(t) &= T(t) \left[ (T(h) - I)w_0 - hAw_0 \right] + \\
&+ \int_0^h \left[ T(t+h-s)f(s,w(s)) - T(t)f(0,w_0) \right] ds + \\
(1.4) \\
&+ \int_0^t T(t-s) \left[ f(s+h,w(s+h)) - f(s,w(s+h)) - hf_t(s,w(s)) \right] ds \\
&+ \int_0^t T(t-s) \left[ f(s,w(s+h)) - f(s,w(s)) - hf_w(s,w(s))v(s) \right] ds
\end{aligned}$$

as três primeiras parcelas são  $o(h)$  quando  $h \rightarrow 0$ , com relação à última parcela, observamos que

$$\begin{aligned}
f(s,w(s+h)) - f(s,w(s)) &= \int_0^1 \frac{d}{d\theta} (f(s,\theta w(s+h) + (1-\theta)w(s))) d\theta = \\
&= \int_0^1 f_w(s,\theta w(s+h) + (1-\theta)w(s)) \cdot (w(s+h) - w(s)) d\theta
\end{aligned}$$

colocando

$$S(s,h) = \int_0^1 f_w(s,\theta w(s+h) + (1-\theta)w(s)) d\theta$$

temos, pela continuidade de  $f_w(s,w)$  e pela compacidade de  $\{w(s) : 0 \leq s \leq t_0\}$  que  $f_w(s,w)$  é limitado para  $w$  numa vizinhança de  $\{w(s) : 0 \leq s \leq t_0\}$  de modo que, para  $h$  suficientemente pequeno, o operador  $S(s,h)$  é uniformemente limitado,  $0 \leq s \leq t_0$ , e  $S(s,h)$  é fortemente convergente para  $f_w(s,w(s))$ ,

portanto usando (1.3) podemos escrever que

$$f(s, w(s+h)) - f(s, w(s)) = S(s, h)R_h(s) + hS(s, h) \cdot v(s)$$

por (1.4) que

$$R_h(t) = \int_0^t T(t-s) \left[ S(s, h)R_h(s) + h(S(s, h)) - f_w(s, w(s))v(s) \right] ds + o(h)$$

portanto

$$\|R_h(t)\| \leq K \int_0^t \|R_h(s)\| ds + o(h)$$

logo, obtemos que

$$\|R_h(t)\| \leq e^{Kt} o(h)$$

completando a demonstração.  $\square$

Consideremos agora o problema a valores iniciais perturbado em  $W$

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dt} = A(r)w + f(r, w) \\ w(r, 0) = w_0(r) \end{array} \right.$$

onde  $A(r)$  satisfaz as hipóteses (HA-1, 2) anteriores e  $f(r,w)$  é uma função contínua de  $[-\eta, \eta] \times W$  em  $W$ .

**TEOREMA 1.4:** Se  $w_0(r) \in \mathcal{D}$  e  $A(r)w_0(r)$  é contínua para  $r \in [-\eta, \eta]$ ,  $f(r,w)$  é continuamente diferenciável e  $w(r,t)$  é uma solução "mild" de (1.5) contínua em  $r$  e  $t$  para  $r \in [-\eta, \eta]$  e  $t \in [0, t_0]$ , então  $w(r,t)$  é continuamente diferenciável em relação a  $t$  com  $\dot{w}(r,t) \rightarrow \dot{w}(\bar{r},t)$ , quando  $r \rightarrow \bar{r}$ , uniformemente em  $t$  para  $t \in [0, t_0]$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Temos pelo teorema anterior que, para cada  $r \in [-\eta, \eta]$ ,  $w(r,t)$  é diferenciável em relação a  $t$  e se  $\dot{w}(r,t) = v(r,t)$ , então

$$v(r,t) = T(r,t)v_0(r) + \int_0^t T(r,t-s)f_w(r,w(r,s)) \cdot v(r,s)ds$$

onde  $v_0(r) = A(r)w_0(r) + f(r,w_0(r))$  é contínua e  $v(r,t)$  é contínua em  $t$  para  $r$  fixo. Para  $r$  e  $\bar{r}$  em  $[-\eta, \eta]$  temos que

$$\begin{aligned} v(r,t) - v(\bar{r},t) &= T(r,t)v_0(r) - T(\bar{r},t)v_0(\bar{r}) + \\ (1.6) \quad &+ \int_0^t T(r,t-s)f_w(r,w(r,s)) [v(r,s) - v(\bar{r},s)] ds + \\ &+ \int_0^t [T(r,t-s)f_w(r,w(r,s)) - T(\bar{r},t-s)f_w(\bar{r},w(\bar{r},s))] v(\bar{r},s) ds \end{aligned}$$

chamando de  $S_r$  o operador, dado por

$$S_r u(t) = \int_0^t T(r, t-s) f_w(r, w(r, s)) u(s) ds$$

definido sobre o espaço  $C([0, t_0])$ , das funções contínuas de  $[0, t_0]$  em  $W$  com a norma usual do supremo, temos que  $(I - S_r)$  é inversível com inversa  $(I - S_r)^{-1}$  uniformemente limitada por uma constante  $k$ , para  $r \in [-\eta, \eta]$ , de modo que da igualdade (1.6) podemos escrever

$$\begin{aligned} \|v(r, t) - v(\bar{r}, t)\| &\leq \| (I - S_r)^{-1} \cdot (T(r, t) - T(\bar{r}, t)) v_0(r) \| + \\ &+ \| (I - S_r)^{-1} (T(\bar{r}, t) v_0(r) - T(\bar{r}, t) v_0(\bar{r})) \| + \\ &+ \| (I - S_r)^{-1} \int_0^t [T(r, t-s) f_w(r, w(r, s)) - T(\bar{r}, t-s) f_w(\bar{r}, w(\bar{r}, s))] v(\bar{r}, s) ds \| \end{aligned}$$

usando agora a continuidade de  $v_0(r)$  e a compacidade dos conjuntos  $\{v_0(r) : -\eta \leq r \leq \eta\}$  e  $\{v(\bar{r}, s) : 0 \leq s \leq t_0\}$  temos que o lado direito da desigualdade anterior tende a zero uniformemente em  $t$  para  $t \in [0, t_0]$  quando  $r \rightarrow \bar{r}$ , completando a demonstração.  $\square$

**TEOREMA 1.5:** (Diferenciabilidade de Ponto Fixo, Dependendo de Parâmetro).

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach,  $A \subset Y$  aberto e

$$F : \Lambda \times X \rightarrow X$$

satisfazendo:

- i)  $F(\cdot, x) : \Lambda \rightarrow X$  contínua,  $x \in X$ .
- ii)  $F(y, \cdot) : X \rightarrow X$  contínua,  $y \in \Lambda$ .
- iii) Para cada  $y \in \Lambda$ ,  $F(y, \cdot)$  tem um ponto fixo  $x^*(y)$  que depende continuamente de  $y$ .
- iv) Se  $F = \{x^*(y) : y \in \Lambda\}$  então  $F$  é diferenciável em relação a  $y$ , para  $(y, x) \in \Lambda \times F$  com

$$\frac{\partial F}{\partial Y} (\cdot, x^*(\cdot)) : \Lambda \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$$

contínua.

- v)  $F$  é diferenciável em relação a  $x$ , com

$$\left( I - \frac{\partial F}{\partial X} (y_1, x^*(y_2)) \right)$$

invertível, e com a inversa  $\left( I - \frac{\partial F}{\partial X} (y_1, x^*(y_2)) \right)^{-1}$  uniformemente limitada e fortemente contínua em  $y_1$  e  $y_2$ ;  $y_1, y_2 \in \Lambda$ . Então  $y \rightarrow x^*(y)$  é continuamente diferenciável em relação a  $y$  com

$$\frac{dx^*(y)}{dy} = \left( I - \frac{\partial F}{\partial X} (y, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial Y} (y, x^*(y)).$$

DEMONSTRAÇÃO: Para  $y \in \Lambda$  e  $h \in Y$  temos, para  $t$  suficientemente pequeno, que

$$\begin{aligned} x^*(y + th) - x^*(y) &= F(y + th, x^*(y + th)) - F(y, x^*(y)) = \\ &= F(y + th, x^*(y + th)) - F(y + th, x^*(y)) + F(y + th, x^*(y)) - \\ &\quad - F(y, x^*(y)) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(y + th, x^*(y)) \cdot [x^*(y + th) - x^*(y)] + o(\|x^*(y + th) - x^*(y)\|) \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial y}(y, x^*(y)) \cdot th + o(\|th\|) \end{aligned}$$

e daí podemos escrever que

$$\begin{aligned} x^*(y + th) - x^*(y) &= \left( I - \frac{\partial F}{\partial x}(y + th, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot o(\|x^*(y + th) - x^*(y)\|) + \left( I - \frac{\partial F}{\partial x}(y + th, x^*(y)) \right)^{-1} \\ &\quad \cdot \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(y, x^*(y)) \cdot th + o(\|th\|) \right] \end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned} \left( I - \frac{\partial F}{\partial x}(y + th, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot o(\|x^*(y + th) - x^*(y)\|) &= \\ &= o(\|x^*(y + th) - x^*(y)\|) \end{aligned}$$

vem que

$$\begin{aligned}
 & x^*(y + th) - x^*(y) - o(\|x^*(y + th) - x^*(y)\|) = \\
 (1.7) \quad & = \left( I - \frac{\partial F}{\partial x}(y + th, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(y, x^*(y)) \cdot th + o(\|th\|) \right]
 \end{aligned}$$

Mostraremos agora que

$$\frac{o(\|x^*(y + th) - x^*(y)\|)}{t} \rightarrow 0$$

quando  $t \rightarrow 0$ , para isto, basta mostrar que

$$\left\| \frac{x^*(y + th) - x^*(y)}{t} \right\|$$

é limitado, quando  $t \rightarrow 0$ . Temos que

$$\begin{aligned}
 \|x^*(y + th) - x^*(y)\| & \leq \|x^*(y + th) - x^*(y) - o(\|x^*(y + th) - x^*(y)\|)\| + \\
 & + \|o(\|x^*(y + th) - x^*(y)\|)\|
 \end{aligned}$$

logo

$$\|x^*(y + th) - x^*(y)\| \leq 2 \|x^*(y + th) - x^*(y) - o(\|x^*(y + th) - x^*(y)\|)\|$$

para  $|t| < t_0$ ,  $t_0$  suficientemente pequeno, pois

$$o(\|x^*(y + th) - x^*(y)\|) \leq \frac{1}{2} \|x^*(y + th) - x^*(y)\|$$

para  $|t| < t_0$ . Portanto usando a igualdade (1.7) obtemos que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{x^*(y + th) - x^*(y)}{t} \right\| \leq \\ & \leq 2 \left\| \left( I - \frac{\partial F}{\partial x}(y + th, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(y, x^*(y)) \cdot h + \frac{o(\|th\|)}{|t|} \right] \right\| \end{aligned}$$

que é limitado, quando  $t \rightarrow 0$ . Temos portanto da igualdade (1.7) que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^*(y + th) - x^*(y)}{t} &= \\ &= \left( I - \frac{\partial F}{\partial x}(y, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(y, x^*(y)) \cdot h \end{aligned}$$

e ainda mais, como

$$y \mapsto \left( I - \frac{\partial F}{\partial x}(y, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(y, x^*(y)) \in \mathcal{L}(Y, X)$$

é contínua, podemos afirmar que  $x^*(y)$  é continuamente diferenciável com

$$\frac{dx^*(y)}{dy} = \left( I - \frac{\partial F}{\partial x}(y, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(y, x^*(y))$$

completando a demonstração.  $\square$

**TEOREMA 1.6:** Se  $w_0(r) \in \mathcal{D}$ ,  $A(r)w_0(r)$  é contínua e  $w_0(r)$  é continuamente diferenciável para  $r \in [-\eta, \eta]$ ;  $f(r, w)$  é continuamente diferenciável e possui derivadas mistas contínuas; e  $w^*(r, t)$  é uma solução "mild" de (1.5), contínua em  $r$  e  $t$  para  $r \in [-\eta, \eta]$  e  $t \in [0, t_0]$ , então  $w^*(r, t)$  é continuamente diferenciável nas duas variáveis  $r$  e  $t$  com

$$\frac{\partial w^*(r, t)}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial w^*(\bar{r}, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w^*(r, t)}{\partial r} \longrightarrow \frac{\partial w^*(\bar{r}, t)}{\partial r}$$

quando  $r \rightarrow \bar{r}$ , uniformemente em  $t$ , para  $t \in [0, t_0]$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** O Teorema 1.4 garante a diferenciabilidade e a continuidade da derivada de  $w^*(r, t)$  em relação a  $t$ . Para a diferenciabilidade em relação ao parâmetro  $r$ , consideremos o operador

$$F : [-\eta, \eta] \times C([0, t_0]) \rightarrow C([0, t_0])$$

dado por

$$F(r, w)(t) = T(r, t)w_0(r) + \int_0^t T(r, t - s)f(r, w(s))ds$$

temos que  $F$  é contínua em cada variável,  $w^*(r, \cdot)$  é ponto fixo de  $F(r, \cdot)$ ,  $F$  é diferenciável em relação a  $w$  com

$$\frac{\partial F}{\partial w}(r, w) \cdot u(t) = \int_0^t T(r, t - s)f_w(r, w(s))u(s)ds$$

logo

$$\frac{\partial F}{\partial w}(r_1, w^*(r_2, \cdot))u(t) = \int_0^t T(r_1, t - s)f_w(r_1, w^*(r_2, s)) \cdot u(s)ds$$

e o núcleo  $T(r_1, t)f_w(r_1, w^*(r_2, s))$  é uniformemente limitado para  $-\eta \leq r_1, r_2 \leq \eta$  e  $0 \leq t, s \leq t_0$ . Portanto a inversa

$$\left( I - \frac{\partial F}{\partial w}(r_1, w^*(r_2, \cdot)) \right)^{-1}$$

existe e é fortemente contínua em  $r_1$  e  $r_2$ . Daí para aplicarmos o Teorema 1.5, temos que analisar a diferenciabilidade de  $F$  em relação ao parâmetro  $r$ , para  $(r, w) \in [-\eta, \eta] \times F$ , onde

$$F = \{w^*(r, \cdot) : r \in [-\eta, \eta]\}$$

para isto temos que,  $w$  é continuamente diferenciável, e podemos escrever que

$$\begin{aligned}
F(r,w)(t) &= T(r,t)w_0(r) + \int_0^t T(r,t-s)f(r,w(s))ds = \\
&= T(r,t)w_0(r) + \int_0^t T(r,t-s)A(r)A^{-1}(r)f(r,w(s))ds = \\
&= T(r,t)w_0(r) - \int_0^t \frac{dT(r,t-s)}{ds} \cdot A^{-1}(r)f(r,w(s))ds = \\
&= T(r,t)w_0(r) + T(r,t)A^{-1}(r)f(r,w(0)) - A^{-1}(r)f(r,w(t)) \\
&\quad + \int_0^t T(r,t-s)A^{-1}(r)f_w(r,w(s)) \cdot \dot{w}(s)ds
\end{aligned}$$

logo  $F(r,w)$  é diferenciável em relação a  $r$  para  $(r,w) \in [-\eta,\eta] \times F$ , pelo Corolário 1.1, e ainda mais

$$\frac{\partial F}{\partial r} \left( r, w^*(r, \cdot) \right)$$

é contínua em  $r$ , portanto, pelo Teorema 1.5, temos que

$$r \longmapsto w^*(r, \cdot)$$

é continuamente diferenciável em relação ao parâmetro  $r$ , completando a demonstração.  $\square$

## 2. BIFURCAÇÃO DE HOPF

Nosso objetivo neste parágrafo é obter uma versão do teorema de Bifurcação de Hopf para a equação diferencial ordinária perturbada em  $W$

$$(2.1) \quad \frac{dv}{ds} = A(r)v(s) + f(r, v(s)) \quad (s > 0)$$

onde  $W$  é um Espaço de Banach real,  $A(r)$  satisfaz as hipóteses HA-1, 2, mais a seguinte hipótese de decomposição do espaço:

(HA-3) Para cada  $r \in [-\eta, \eta]$  o espaço  $W$  pode ser decomposto com soma direta de  $X_r$  com  $Y_r$

$$W = X_r \oplus Y_r$$

com projeções sobre  $X_r$  e  $Y_r$ , fortemente continuamente diferenciáveis em relação a  $r$ , com  $X_r$  e  $Y_r$  invariantes em relação a  $A(r)$  e ainda mais

$$\|T(r, t)x\| \leq M_1 e^{-\alpha t} \|x\|$$

para todo  $x \in X_r$  e  $t \geq 0$ , onde  $M_1 \geq 1$  e  $\alpha > 0$  são constantes que independem de  $r$ .  $Y_r$  é um sub-espaço de dimensão 2 de  $W$ , com uma base  $\{e_1(r), e_2(r)\}$ , em relação a qual a matriz da restrição de  $A(r)$  a  $Y_r$  é

$$[A(r)] = \begin{bmatrix} \alpha(r) & \beta(r) \\ -\beta(r) & \alpha(r) \end{bmatrix}$$

com  $\alpha(r)$  e  $\beta(r)$  continuamente diferenciáveis e satisfazendo:

- i)  $\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) = v_0$
- ii)  $\beta(r) \neq 0, \quad r \in [-\eta, \eta]$
- iii)  $\alpha'(0) \neq 0$  (Hipótese de Hopf).

A função  $f : [-\eta, \eta] \times W \rightarrow W$ , com componentes  $f_{X_r}$  e  $f_{Y_r}$  em relação à decomposição em soma direta citada em (HA-3)

$$f(r, w) = f_{X_r}(r, w) + f_{Y_r}(r, w) \in X_r \oplus Y_r$$

satisfaz:

(Hf-1)  $f$  possui derivadas contínuas até a segunda ordem em relação a  $r$  e  $w$ .

(Hf-2)  $f(r, 0) = 0, \quad r \in [-\eta, \eta]$

(Hf-3)  $\frac{\partial f}{\partial w}(0, 0) = 0$  e  $\frac{\partial f_{Y_r}}{\partial w}(r, 0) \Big|_{Y_r} = 0, \quad r \in [-\eta, \eta]$

(Hf-4) Existem  $L > 0$  e  $\delta_0 > 0$ , tais que

$$\left\| \frac{\partial f_{X_r}}{\partial w}(r, w_1)w - \frac{\partial f_{X_r}}{\partial w}(r, w_2)w \right\| \leq L \|w_1 - w_2\| \|w\|$$

onde  $w \in W$  e  $|r| \leq n$ ,  $\|w_i\| \leq 2\delta_0$ ,  $i = 1, 2$ .

Dentro dessas hipóteses estamos interessados nas possíveis soluções periódicas da equação (2.1), como esta equação é autônoma, não conhecemos a priori o período de tais soluções, introduziremos então um novo parâmetro  $p$  na equação, relativo ao período, colocando

$$s = (1 + p)t, \quad p > -1$$

(2.2)

$$w(t) = v((1 + p)t)$$

com essa mudança de variável (2.1) fica equivalente a

$$(2.3) \quad \dot{w}(t) = (1 + p)A(r)w(t) + (1 + p)f(r, w(t))$$

onde o ponto indica derivação em relação a  $t$ .

Observe que a cada solução  $w$ -periódica de (2.3) temos em correspondência, através da mudança de variável (2.2), uma solução

$(1 + p)w$ -periódica de (2.3). Nosso procedimento então será o de buscar soluções de (2.3)  $w_0$ -periódicas para um  $w_0$  conveniente.

Com relação à decomposição em soma direta e à base  $\{e_1(r), e_2(r)\}$  dadas em (HA-3), fixaremos algumas notações:

1.  $x(r,t)$  e  $y(r,t)$  para indicar as projeções de  $w(t) \in W$  em  $X_r$  e  $Y_r$  respectivamente, de modo que

$$w(t) = x(r,t) + y(r,t) \in X_r \oplus Y_r .$$

2. 
$$\begin{pmatrix} y_1(r,t) \\ y_2(r,t) \end{pmatrix}$$

para indicar as coordenadas de  $y(r,t)$  em relação à base  $\{e_1(r), e_2(r)\}$ , identificando portanto  $y(r,t)$  com

$$\begin{pmatrix} y_1(r,t) \\ y_2(r,t) \end{pmatrix} ,$$

identificação esta que será usada até o final deste capítulo.

3. Da mesma maneira que em 2.,

$$\begin{pmatrix} f_{Y_r}^1(r, w(t)) \\ f_{Y_r}^2(r, w(t)) \end{pmatrix}$$

indica as coordenadas de  $f_{Y_r}(r, w(t))$  em relação à base  $\{e_1(r), e_2(r)\}$ .

Nessas condições a equação (2.3) é equivalente às equações abaixo em  $X_r$  e  $Y_r$

$$(2.4) \quad \dot{x}(r, t) = (1 + p)A(r)x(r, t) + (1 + p)f_{X_r}(r, w(t))$$

$$\dot{y}(r, t) = (1 + p)A(r)y(r, t) + (1 + p)f_{Y_r}(r, w(t))$$

em coordenadas a segunda equação de (2.4) fica

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(r, t) \\ \dot{y}_2(r, t) \end{pmatrix} = (1 + p)[A(r)] \begin{pmatrix} y_1(r, t) \\ y_2(r, t) \end{pmatrix} + (1 + p) \begin{pmatrix} f_{Y_r}^1(r, w(t)) \\ f_{Y_r}^2(r, w(t)) \end{pmatrix}$$

Trabalharemos com essa equação na seguinte forma

$$(2.5) \quad \begin{pmatrix} \dot{y}_1(r, t) \\ \dot{y}_2(r, t) \end{pmatrix} = [A(0)] \begin{pmatrix} y_1(r, t) \\ y_2(r, t) \end{pmatrix} + g(r, p, w(t))$$

onde

$$g(r, \cdot, \cdot) : (-1, \infty) \times W \rightarrow Y_r; \quad |r| \leq \eta$$

é dada, em coordenadas, por

$$g(r,p,w) = \begin{pmatrix} g_1(r,p,w) \\ g_2(r,p,w) \end{pmatrix} =$$

$$= (1+p) \left\{ [A(r)] \begin{pmatrix} y_1(r) \\ y_2(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{Y_r}^1(r,w) \\ f_{Y_r}^2(r,w) \end{pmatrix} \right\} - [A(0)] \begin{pmatrix} y_1(r) \\ y_2(r) \end{pmatrix}$$

onde  $w = x(r) + y(r) \in X_r \oplus Y_r$  e  $\begin{matrix} y_1(r) \\ y_2(r) \end{matrix}$  são as coordenadas de  $y(r)$  em relação à base  $\{e_1(r), e_2(r)\}$ . Temos que  $g$  possui as seguintes propriedades:

a)  $g(r,p,0) = 0; \quad |r| \leq \eta \quad e \quad p > -1.$

b)  $g$  é continuamente diferenciável em todas as variáveis, com

(2.6)  $\frac{\partial g}{\partial w}(r,p,w)$  também continuamente diferenciável em todas as variáveis, e  $\frac{\partial g}{\partial w}(0,0,0) = 0.$

Dado um espaço de Banach  $\mathbb{E}$ , denotaremos por  $P_{w_0}(\mathbb{E})$  o espaço das funções contínuas,  $w_0$ -periódicas, definidas em  $\mathbb{R}_+$  e com valores em  $\mathbb{E}$ , equipado com a norma do supremo.

Usaremos as notações e os resultados dados em Hale [5] pag. 263, no nosso caso, obtendo que:

i) a matriz  $\phi(t)$  cujas colunas formam uma base para as soluções  $w_0 = \frac{2\pi}{v_0}$  - periódicas de

$$(2.7) \quad \dot{x} = [A(0)]x$$

é a matriz principal do sistema, isto é,

$$\phi(t) = e^{[A(0)]t} = \begin{bmatrix} \cos(v_0 t) & \text{sen}(v_0 t) \\ -\text{sen}(v_0 t) & \cos(v_0 t) \end{bmatrix}$$

ii) a matriz  $\psi(t)$  cujas linhas formam uma base para as soluções  $w_0$  - periódicas da equação adjunta

$$(2.8) \quad \dot{x} = -x[A(0)]$$

é

$$\psi(t) = e^{-[A(0)]t} = \phi'(t) \quad (' \text{ denota transposta})$$

logo, temos que  $C = D = w_0 I$  ( $I =$  matriz identidade), e finalmente que as projeções  $P$  e  $Q$  que projetam  $P_{w_0}(\mathbb{R}^2)$  respectivamente sobre o sub-espço de  $P_{w_0}(\mathbb{R}^2)$  gerado pelas soluções de (2.7) e sobre o sub-espço de  $P_{w_0}(\mathbb{R}^2)$  gerado pela transposta das soluções de equação adjunta (2.8) também são iguais e dadas por:

$$Ph = Qh = \phi(\cdot)b$$

onde

$$b = \frac{1}{w_0} \int_0^{w_0} \psi(t)h(t)dt$$

iii) se  $h \in P_{w_0}(\mathbb{R}^2)$  e  $Qh = 0$ , então existe uma única solução da equação

$$\dot{x} = [A(0)]x + h(t)$$

$w_0$ -periódica  $Kh$ , tal que  $PKh = 0$  e ainda mais  $K(I-Q)$  é um operador linear contínuo de  $P_{w_0}(\mathbb{R}^2)$  em  $P_{w_0}(\mathbb{R}^2)$ .

Nessas condições se o sistema (2.4) tiver uma solução  $w(t)$ ,  $w_0$ -periódica, devemos ter, usando a forma (2.5), que

$$\begin{cases} (I - Q)(\dot{y}(r, \cdot) - [A(0)]y(r, \cdot)) = (I - Q)(g(r, p, w(\cdot))) \\ (Q(\dot{y}(r, \cdot) - [A(0)]y(r, \cdot))) = Q(g(r, p, w(\cdot))) \end{cases}$$

mas

$$Q(\dot{y}(r, \cdot) - [A(0)]y(r, \cdot)) = \phi \frac{1}{w_0} \int_0^{w_0} (\psi(t)\dot{y}(r, t) - \psi(t)[A(0)]y(r, t))dt =$$

$$= \phi \frac{1}{w_0} \int_0^{w_0} (\psi(t)\dot{y}(r, t) + \dot{\psi}(t)y(r, t))dt = \phi \frac{1}{w_0} \left[ \psi(t)y(r, t) \right]_0^{w_0} = 0$$

logo

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(r, \cdot) = [A(0)]y(r, \cdot) + (I - Q) \cdot g(r, p, w(\cdot)) \\ Q(g(r, p, w(\cdot))) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{Equação de bifurcação})$$

Como o sistema é autônomo, existe  $a$ , tal que

$$(2.9) \quad y(r, t) = \phi(t) \binom{a}{0} + K(I - Q) \cdot g(r, p, w(t)).$$

Por outro lado, usando a primeira equação de (2.4), podemos escrever que

$$(2.10) \quad x(r, t) = T(r, (1 + p)t)x_0 + \int_0^t T(r, (1 + p)(t - s)) \cdot (1 + p) f_{X_r}(r, w(s)) ds$$

onde  $x_0$  deve satisfazer

$$x_0 = T(r, (1 + p)w_0)x_0 + \int_0^{w_0} T(r, (1 + p)(w_0 - s)) \cdot (1 + p) f_{X_r}(r, w(s)) ds.$$

Como em  $X_r$  temos a estimativa de decaimento exponencial para o Semi-Grupo

$$\|T(r, t)x\| \leq M_1 e^{-\alpha t} \|x\|, \quad x \in X_r$$

obtemos que

$$(2.11) \quad x_0 = x_0(r, p, w(\cdot)) = \\ = (I - T(r, (1+p)w_0))^{-1} \int_0^{w_0} T(r, (1+p)(w_0 - s)) \cdot (1+p) f_{X_r}(r, w(s)) ds$$

daí, com base nas igualdades (2.9) e (2.10), definimos o seguinte operador:

$$F : \mathbb{R} \times [-\eta, \eta] \times (-1, \infty) \times P_{w_0}(W) \rightarrow P_{w_0}(W)$$

por

$$F(a, r, p, w)(t) = w(t) - T(r, (1+p)t) x_0(r, p, w) - \\ - \int_0^t T(r, (1+p)(t-s)) \cdot (1+p) f_{X_r}(r, w(s)) ds - \\ - \phi(t) \binom{a}{0} - K(I - Q)g(r, p, w(t))$$

onde  $x_0(r, p, w)$  é dado por (2.11). Observe que o operador  $F$  está bem definido, isto é,  $F(a, r, p, \cdot)$  aplica  $P_{w_0}(W)$  em  $P_{w_0}(W)$ .

**LEMA 2.1:** Com as hipóteses (HA-1, 2, 3) e (Hf-1, 2, 3, 4) existem constantes positivas  $a_0$ ,  $r_0$  e  $p_0$  e uma função  $w^*(a, r, p)$  definida para  $|a| \leq a_0$ ,  $|r| \leq r_0$  e  $|p| \leq p_0$  e com valores em

$P_{w_0}(W)$  tais que:

i)  $F(a, r, p, w^*(a, r, p)) = 0$

ii)  $w^*$  é contínua

iii)  $w^*$  é continuamente diferenciável em relação a  $a$

iv)  $w^*(0, r, p) = 0$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Temos que  $F$  é contínua, continuamente diferenciável nas variáveis  $a$  e  $w$ ,  $F(0, 0, 0, 0) = 0$  e  $\frac{\partial F}{\partial w}(0, 0, 0, 0) = I_{P_{w_0}(W)}$ , portanto o Teorema das Funções Implícitas garante a existência das constantes  $a_0, r_0, p_0$  e da função  $w^*$  satisfazendo as condições do lema, sendo que o item iv) decorre da unicidade do Teorema das Funções Implícitas e do fato que  $F(0, r, p, 0) = 0$ .

**LEMA 2.2:** Com as hipóteses (HA-1, 2, 3), (HF-1, 2, 3, 4) e diminuindo se necessário as constantes  $a_0, r_0$  e  $p_0$  dados no Lema 2.1, temos que  $w^*(a, r, p)(t)$  é continuamente diferenciável em relação a  $t$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Temos que

$$w^*(a, r, p)(t) = x^*(a, r, p)(t) + y^*(a, r, p)(t) \in X_r \oplus Y_r$$

onde

$$x^*(a,r,p)(t) = T(r, (1 + p)t) x_0(r,p,w^*(a,r,p)) +$$

$$(1 + p) \int_0^t T(r, (1 + p)(t - s)) f_{X_r}(r,w^*(a,r,p)(s)) ds$$

e

$$y^*(a,r,p)(t) = \phi(t) \binom{a}{0} + K(I - Q) \cdot g(r,p,w^*(a,r,p)(t))$$

logo  $y^*(a,r,p)(t)$  é continuamente diferenciável em relação a  $t$ , temos portanto que analisar a diferenciabilidade de  $x^*(a,r,p)(t)$  em relação a  $t$  e faremos isto aproximando  $x^*(a,r,p)(t)$  por uma seqüência  $x_n^*(a,r,p)(t)$  de funções continuamente diferenciáveis em relação a  $t$ . Começaremos definindo o operador

$$S_{a,r,p} : P_{w_0}(X_r) \rightarrow P_{w_0}(X_r)$$

por

$$S_{a,r,p}(x)(t) = T(r, (1 + p)t) x_0(r,p,x + y^*(a,r,p)) +$$

$$+ (1 + p) \int_0^t T(r, (1 + p)(t - s)) f_{X_r}(r,x(s) + y^*(a,r,p)(s)) ds$$

temos que  $S_{a,r,p}$  está bem definido e como  $\frac{\partial f_{X_r}}{\partial w}(r,w)$ ,  $y^*(a,r,p)$

são contínuas e  $f_{X_r}(r,0) = 0$ ,  $\frac{\partial f_{X_r}}{\partial w}(0,0) = 0$ ,  $y^*(0,0,0) = 0$ , então

existem constantes positivas  $a_0$ ,  $r_0$ ,  $p_0$  e  $\epsilon_0$ , onde tomamos  $0 < \epsilon_0 < \delta_0$  ( $\delta_0$  é dado na hipótese Hf-4) tais que:

$$\left\| \frac{\partial f_{X_r}}{\partial w} (r, w_1) \cdot w \right\| \leq \frac{\alpha}{4 M_1^3} \|w\|$$

$$(2.12) \quad \|f_{X_r}(r, w_1)\| \leq \frac{\alpha}{4 M_1^3} \|w_1\|$$

$$\|y^*(a, r, p)\|_{P_{w_0}(W)} \leq \epsilon_0$$

se  $|a| \leq a_0$ ,  $|r| \leq r_0$ ,  $|p| \leq p_0$ ,  $\|w_1\| \leq 2\epsilon_0$  e  $w \in W$ . Nessas condições, podemos afirmar que a restrição de  $S_{a,r,p}$ , para  $|a| \leq a_0$ ,  $|r| \leq r_0$  e  $|p| \leq p_0$ , à bola fechada  $\overline{B_{\epsilon_0}}$ , de centro na origem e raio  $\epsilon_0$ , é um operador de  $\overline{B_{\epsilon_0}}$  em  $\overline{B_{\epsilon_0}}$ , que satisfaz

$$(2.13) \quad \|S_{a,r,p}(x_1) - S_{a,r,p}(x_2)\|_{P_{w_0}(W)} \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_{P_{w_0}(W)}$$

para  $x_1$  e  $x_2$  em  $\overline{B_{\epsilon_0}}$ . Para a justificativa veja os cálculos abaixo. Se  $x \in \overline{B_{\epsilon_0}}$  temos que

$$\begin{aligned}
& \|x_0(r, p, x + y^*(a, r, p))\| \leq \\
& \leq \frac{M_1(1+p)}{1-e^{-\alpha(1+p)w_0}} \int_0^{w_0} M_1 e^{-\alpha(1+p)(w_0-s)} \|f_{X_r}(r, x(s) + y^*(a, r, p))\| ds \\
& \leq \frac{M_1^2(1+p)}{1-e^{-\alpha(1+p)w_0}} \cdot \frac{\alpha}{4M_1^3} \|x + y^*(a, r, p)\|_{P_{w_0}(W)} \left[ \frac{1-e^{-\alpha(1+p)w_0}}{\alpha(1+p)} \right] \leq \\
& \leq \frac{1}{2M_1} \epsilon_0
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
& \|S_{a,r,p}(x)(t)\| \leq \|T(r, (1+p)t)x_0(r, p, x + y^*(a, r, p))\| + \\
& + (1+p) \int_0^t \|T(r, (1+p)(t-s))f_{X_r}(r, x(s) + y^*(a, r, p)(s))\| ds \leq \\
& \leq M_1 e^{-\alpha(1+p)t} \frac{\epsilon_0}{2M_1} + \frac{1-e^{-\alpha(1+p)t}}{4M_1^2} 2\epsilon_0 \leq \epsilon_0.
\end{aligned}$$

A desigualdade (2.13) segue através de cálculos semelhantes. Temos portanto, que  $S_{a,r,p}$  para  $|a| \leq a_0$ ,  $|r| \leq r_0$  e  $|p| \leq p_0$ , é uma contração de  $\overline{B_{\epsilon_0}}$  em  $\overline{B_{\epsilon_0}}$  cujo único ponto fixo é  $x^*(a, r, p)$ , logo

$$\|x^*(a,r,p)\|_{P_{w_0}(W)} \leq \varepsilon_0; \quad |a| \leq a_0, \quad |r| \leq r_0, \quad |p| \leq p_0$$

e  $x^*(a,r,p)$  é aproximada pela sequência  $(x_n^*(a,r,p))$  onde

$$x_0^*(a,r,p) = 0$$

$$x_{n+1}^*(a,r,p) = S_{a,r,p}(x_n^*(a,r,p)) \quad n=0,1,2,\dots$$

portanto, temos por recorrência que  $x_n^*(a,r,p)(t)$  é contínua em todas as variáveis e continuamente diferenciável em relação a  $t$  com

$$\dot{x}_{n+1}^*(a,r,p)(t) =$$

$$= T(r, (1+p)(t)) \left( I - T(r, (1+p)w_0) \right)^{-1} (1+p) \int_0^{w_0} T(r, (1+p)(w_0-s)) \cdot \\ \cdot \frac{\partial f_{X_r}}{\partial w} \left( r, x_n^*(a,r,p)(s) + y^*(a,r,p)(s) \right) \cdot$$

$$(2.14) \cdot \left( \dot{x}_n^*(a,r,p)(s) + \dot{y}^*(a,r,p)(s) \right) ds + (1+p) \int_0^t T(r, (1+p)(t-s)) \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial f_{X_r}}{\partial w} \left( r, x_n^*(a,r,p)(s) + y^*(a,r,p)(s) \right) \cdot$$

$$\cdot \left( \dot{x}_n^*(a,r,p)(s) + \dot{y}^*(a,r,p)(s) \right) ds.$$

segue daí que

$$\|\dot{x}_{n+1}^*(a, r, p)\|_{P_{W_0}(W)} \leq \frac{1}{2} \|\dot{x}_n^*(a, r, p)\|_{P_{W_0}(W)} + \frac{1}{2} \|\dot{y}^*(a, r, p)\|_{P_{W_0}(W)}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ , portanto

$$\|\dot{x}_{n+1}^*(a, r, p)\|_{P_{W_0}(W)} \leq \left( \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2} \right) \|\dot{y}^*(a, r, p)\|_{P_{W_0}(W)}$$

logo

$$\|x_{n+1}^*(a, r, p)\|_{P_{W_0}(W)} \leq \|y^*(a, r, p)\|_{P_{W_0}(W)} ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e ainda mais, usando a hipótese (Hf-4), podemos mostrar, para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , que

$$\begin{aligned} & \|\dot{x}_{n+1}^*(a, r, p)(t) - \dot{x}_n^*(a, r, p)(t)\| \leq \\ & \leq L_1 \|x_n^*(a, r, p) - x_{n-1}^*(a, r, p)\|_{P_{W_0}(W)} + \frac{1}{2} \|\dot{x}_n^*(a, r, p) - \dot{x}_{n+1}^*(a, r, p)\|_{P_{W_0}(W)} \\ & \leq \frac{L_1}{2^{n-1}} \|x_1^*(a, r, p)\|_{P_{W_0}(W)} + \frac{1}{2} \|\dot{x}_n^*(a, r, p) - \dot{x}_{n-1}^*(a, r, p)\|_{P_{W_0}(W)} \end{aligned}$$

onde  $L_1$  é uma constante que independe de  $a, r, p$  e  $t$  se  $|a| \leq a_0$ ,  $|r| \leq r_0$ ,  $|p| \leq p_0$  e  $t \geq 0$ , temos portanto que

$$\begin{aligned} & \| \dot{x}_{n+1}^*(a, r, p)(t) - \dot{x}_n^*(a, r, p)(t) \| \leq \\ & \leq \frac{n}{2^{n-1}} L_1 \| x_1^*(a, r, p) \|_{P_{W_0}(W)} + \frac{1}{2^n} \| \dot{x}_1^*(a, r, p) \|_{P_{W_0}(W)} \end{aligned}$$

logo  $\dot{x}_n^*(a, r, p)(t)$  converge, quando  $n \rightarrow \infty$ , uniformemente em relação a  $a, r, p$  e  $t$ , se  $|a| \leq a_0$ ,  $|r| \leq r_0$ ,  $|p| \leq p_0$  e  $t \geq 0$ , então

$$x^*(a, r, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(a, r, p) \quad \text{em} \quad P_{W_0}(W)$$

é continuamente diferenciável em relação a  $t$  com

$$\dot{x}^*(a, r, p)(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{x}_n^*(a, r, p)(t)$$

completando a demonstração.  $\square$

**LEMA 2.3:** Com as hipóteses (HA-1, 2, 3) e (Hf-1, 2, 3, 4) temos que  $w^*(a, r, p)(t)$  é continuamente diferenciável em todas as variáveis, para  $|a| \leq a_0$ ,  $|r| \leq r_0$ ,  $|p| \leq p_0$  e  $t \geq 0$ , onde  $a_0$ ,  $r_0$  e  $p_0$  são constante positivas convenientes.

**DEMONSTRAÇÃO:** A diferenciabilidade em relação a  $a$  e a  $t$  decorrem respectivamente dos Lemas 2.1 e 2.2. A diferenciabilidade em relação a  $r$  e  $p$  será feita via Teorema 1.5 (Diferenciabilidade de ponto fixo dependendo de parâmetro). Temos que  $w^*(a, r, p)$

é ponto fixo do operador dado por

$$\begin{aligned} E(a, r, p, w)(t) &= w(t) - F(a, r, p, w)(t) = \\ &= T(r, (1+p)t)x_0(r, p, w) + \int_0^t T(r, (1+p)(t-s)) \cdot (1+p) f_{X_r}(r, w(s)) ds + \\ &\quad + \phi(t) \binom{a}{0} + K(I - Q) \cdot g(r, p, w(t)). \end{aligned}$$

onde  $x_0(r, p, w)$  é dado por (2.11), isto é,

$$\begin{aligned} x_0(r, p, w) &= \\ &= \left( I - T(r, (1+p)w_0) \right)^{-1} \int_0^{w_0} T(r, (1+p)(w_0-s)) \cdot (1+p) f_{X_r}(r, w(s)) ds. \end{aligned}$$

Seja

$$F = \{w^*(a, r, p) / |a| \leq a_0, |r| \leq r_0 \text{ e } |p| \leq p_0\}$$

para  $w^* \in F$ , temos que  $w^*(t)$  é continuamente diferenciável, logo colocando

$$\begin{aligned} \varphi(r, p, t) &= \int_0^t T(r, (1+p)(t-s)) \cdot (1+p) f_{X_r}(r, w^*(s)) ds = \\ &= \int_0^{(1+p)t} T(r, s) f_{X_r}(r, w^*(t - \frac{s}{1+p})) ds \end{aligned}$$

temos que  $\varphi(r, p, t)$  também é continuamente diferenciável em relação a  $t$ , pertence a  $\mathcal{D}$  e satisfaz

$$\dot{\varphi}(r, p, t) = (1 + p)A(r)\varphi(r, p, t) + (1 + p)f_{X_r}(r, w^*(t))$$

portanto, segue daí que

$$x_0(r, p, w^*) = \left( I - T(r, (1 + p)w_0) \right)^{-1} \varphi(r, p, w_0)$$

também pertence a  $\mathcal{D}$ , pois  $(I - T(r, (1 + p)w_0))^{-1}$  preserva o domínio  $\mathcal{D}$  e ainda mais, como

$$\begin{aligned} \varphi(r, p, t) &= \int_0^t T(r, (1 + p)(t - s)) \cdot (1 + p)A(r)A^{-1}(r)f_{X_r}(r, w^*(s)) ds = \\ &= - \int_0^t \frac{dT(r, (1 + p)(t - s))}{ds} A^{-1}(r)f_{X_r}(r, w^*(s)) ds \end{aligned}$$

temos, integrando por partes, que

$$\begin{aligned} \varphi(r, p, t) &= \\ &= T(r, (1 + p)t)A^{-1}(r)f_{X_r}(r, w^*(0)) - A^{-1}(r)f_{X_r}(r, w^*(t)) \\ &+ \int_0^t T(r, (1 + p)(t - s))A^{-1}(r) \frac{\partial f_{X_r}}{\partial w}(r, w^*(s)) \cdot \dot{w}^*(s) ds \end{aligned}$$

logo  $\varphi(r,p,t)$  também é continuamente diferenciável em relação a  $r$  e  $p$ , portanto o operador  $E$  é diferenciável em relação aos parâmetros  $r$  e  $p$  e satisfaz as condições do Teorema 1.5, completando assim a demonstração.  $\square$

Estamos agora preparados para justificar a seguinte versão do Teorema de Bifurcação de Hopf.

**TEOREMA 2.1** (Bifurcação de Hopf): Se  $A(r)$  e  $f(r,w)$  satisfazem as hipóteses (HA-1, 2, 3) e (HF-1, 2, 3, 4) respectivamente, então existem constantes positivas  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ , uma função  $r^*(a)$ ,  $|a| < \alpha_0$  e uma família

$$\{v^*(a) : |a| < \alpha_0\}$$

de soluções periódicas da equação

$$\frac{dv^*(a)}{ds}(s) = A(r^*(a)) v^*(a)(s) + f(r^*(a), v^*(a)(s)); \quad s > 0$$

com período  $P(a)$  onde:

- i)  $v^*(a), r^*(a)$  e  $P(a)$  são continuamente diferenciáveis para  $|a| < \alpha_0$
- ii)  $\frac{dr^*}{da}(0) = \frac{dx^*}{da}(0) = 0$ , onde  $x^*(a)$  é a componente de  $v^*(a)$  segundo  $X_{r^*(a)}$  da decomposição em soma direta de  $W$ .

$$\text{iii) } P(0) = w_0 = \frac{2\pi}{v_0} \quad \text{e} \quad |P(a) - w_0| \leq \gamma_0, \quad |a| < \alpha_0$$

$$\text{iv) } v^*(0) = 0, \quad v^*(a) \neq 0 \quad \text{se} \quad 0 < |a| < \alpha_0 \quad \text{e}$$

$$\|v^*(a)\|_{P(a)}(w) \leq \beta_0$$

v) A menos de translação no tempo, toda solução  $v(s)$ ,  $w$ -periódica de  $v'(s) = A(r)v(s) + f(r, v(s))$ ,  $s > 0$  com  $|w - w_0| \leq \gamma_0$  e  $\|v\|_{P_w}(w) \leq \beta_0$  pertence à família acima.

DEMONSTRAÇÃO: Temos que  $w^*(a, r, p)$  dada no Lema 2.3 satisfaz

$$\begin{aligned} \dot{w}(a, r, p)(t) &= (1 + p)A(r)w(a, r, p)(t) + (1 + p)f(r, w^*(a, r, p)(t)) \\ &\quad - Q \cdot g(r, p, w^*(a, r, p)(t)) \end{aligned}$$

portanto basta resolver

$$Q \cdot g(r, p, w^*(a, r, p)(t)) = 0$$

para  $p$  e  $r$  como função de  $a$ . Como isto não pode ser feito diretamente via Teorema das Funções Implícitas, pois

$$Q \cdot g(r, p, w^*(0, r, p)) = 0 \quad r < |r_0| \quad \text{e} \quad |p| < p_0$$

visto que  $g(r, p, 0) = 0$  e  $w^*(0, r, p) = 0$ , resolveremos então

$$G(a, r, p) = 0$$

onde

$$G(a, r, p) = \begin{cases} Q \cdot \frac{\partial g}{\partial w}(r, p, 0) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial a}(0, r, p); & |r| < r_0 \text{ e } |p| < p_0 \\ \frac{1}{a} Q \cdot g(r, p, w^*(a, r, p)); & 0 < |a| < a_0, |r| < r_0 \text{ e } |p| < p_0 \end{cases}$$

temos que  $G$  é continuamente diferenciável e como

$$w^*(a, r, p) = x^*(a, r, p) + y^*(a, r, p) \in X_r \oplus Y_r$$

com

$$y^*(a, r, p) = \begin{pmatrix} y_1^*(a, r, p) \\ y_2^*(a, r, p) \end{pmatrix}$$

em relação à base  $\{e_1(r), e_2(r)\}$ , não é difícil verificar que:

$$G(0, 0, p) = p Q[A(0)] \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1^*}{\partial a}(0, 0, p) \\ \frac{\partial y_2^*}{\partial a}(0, 0, p) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial G}{\partial p} (0,0,0) (t) = \phi(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \end{pmatrix}$$

$$G(0,r,0) = Q \left\{ [A(r)] \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1^*}{\partial a} (0,r,0) \\ \frac{\partial y_2^*}{\partial a} (0,r,0) \end{pmatrix} + \frac{\partial f_{Y_r}}{\partial w} (r,0) \cdot \frac{\partial w^*}{\partial a} (0,r,0) - \right.$$

$$\left. - [A(0)] \begin{pmatrix} y_1^*(0,r,0) \\ y_2^*(0,r,0) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} (0,0,0) (t) = \phi(t) \begin{pmatrix} \alpha'(0) \\ -\beta'(0) \end{pmatrix}$$

sendo que na última igualdade usamos que

$$\frac{\partial f_{Y_r}}{\partial w} (r,0) \Big/ Y_r = 0$$

dado pela hipótese (Hf-3), portanto

$$\det \left[ \frac{\partial G(0,0,0)}{\partial (r,p)} \right] = \det \begin{bmatrix} 0 & \alpha'(0) \\ -v_0 & -\beta'(0) \end{bmatrix} = v_0 \alpha'(0) \neq 0$$

pela hipótese de Hopf dada em (HA-3) e daí pelo Teorema das Funções Implícitas existe  $\alpha_0$  e funções  $r^*(a)$  e  $p^*(a)$  definidas para  $|a| < \alpha_0$  tais que:

$$G(a, r^*(a), p^*(a)) = 0$$

$$r^*(0) = 0$$

$$p^*(0) = 0$$

$r^*$  e  $p^*$  são continuamente diferenciáveis

$$\frac{dr^*}{da}(0) = \frac{dp^*}{da}(0) = 0, \text{ pois } \frac{\partial G}{\partial a}(0,0,0) = 0.$$

Finalmente colocando

$$v^*(a)(s) = w^*(a, r^*(a), p^*(a)) \left( \frac{s}{1 + p^*(a)} \right); \quad |a| < \alpha_0$$

temos que  $v^*(a)$  é solução periódica da equação dada com período  $P(a) = (1 + p^*(a))w_0$ , completando a demonstração do teorema.  $\square$

## BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] BRAYTON, R. K.; Bifurcation of periodic solutions in a non-linear difference - differential equation of neutral type. *Quart. J. Appl. Math.*, 24(1966), 215 - 224.
- [ 2 ] BRAYTON, R. K.; Non-linear oscillations in a distributed network, *Quart. J. Appl. Math.*, 24(1967), 289 - 301.
- [ 3 ] CRANDALL, M. G. & RABINOWITZ, P. H.; The Hopf Bifurcation Theorem in Infinite Dimensions, *Arch. Rat. Mech. and An.* (1977), 53 - 72.
- [ 4 ] GODUNOV, S.; *Équations de la Physique Mathématique*, Editions Mir, Moscou, 1973.
- [ 5 ] HALE, J. K.; *Ordinary Differential Equations*, Wiley - Interscience, 1969.
- [ 6 ] HALE, J. K.; *Theory of Functional Differential Equations* - Springer-Verlag, 1977.
- [ 7 ] HENRY, D.; Linear Autonomous Neutral Functional Differential Equations, *J. Diff. Eq.*, 15(1974), 106 - 128.
- [ 8 ] HENRY, D.; Geometric theory of semi-linear parabolic equations, *University of Kentucky Lecture Notes*, 1974.
- [ 9 ] KATO, T.; *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag, 1966.

- [10] KREĬN, S. G.; Linear Differential Equations in Banach Space, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 29; American Math. Soc., Providence, R. I., 1971.
- [11] LEVIN, B. J<sub>A</sub>.; Distribution of Zeros of Entire Functions, Translations of Math. Monographs, Vol. 5, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1964.
- [12] LIMA, P.; Hopf Bifurcation in Equations with Infinite Delays, PhD. Thesis, Brown University (1977).
- [13] LOPES, O. F.; Existência e Estabilidade de Oscilações Forçadas de Equações Diferenciais Funcionais. Tese de Livre-Docência, ICMSC - USP, São Carlos, SP., Brasil (1975).
- [14] MARSDEN, J. E. & McCRACKEN; The Hopf Bifurcation and its Applications, Springer-Verlag, 1976.
- [15] OLIVEIRA, J. C. F.; Hopf Bifurcation for Functional Differential Equations - Non-Linear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. 4, Nº 2, (1980), 217-229.
- [16] PAZY, A.; On The Applicability of Lyapunov's Theorem in Hilbert Space, Siam Journal of Math. Analysis, Vol. 3, Nº 2, (1972), 291 - 294.
- [17] PAZY, A.; Semi-Groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, University of Maryland Lecture Notes, Vol. 10, (1974).
- [18] PITTT, H. R.; A Theorem on Absolutely Convergent Trigonometrical Series, J. Math. Phys. 16(1937), 191 - 195.

- [19] RIBEIRO, H. S.; Teoria Espectral para um Sistema Hiperbólico e Bifurcação de Hopf. Tese de Doutorado, ICMSC-USP, São Carlos, SP., Brasil, (1980).
- [20] SATTINGER, D. H.; Topics in Stability and Bifurcation Theory, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Nº 309, 1973.
- [21] TITCHMARSH, E. C.; Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford University Press, 1937.

Index BC  
1719/82