

UM MODELO GLOBAL PARA DINÂMICA
POPULACIONAL DE UMA ESPÉCIE ISOLADA

LOURIVAL COSTA PARAIBA

Orientador

Alejandro B. Engel

Dissertação apresentada ao Instituto
de Matemática, Estatística e Ciência
da Computação, como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre em
Matemática Aplicada.

- 1983 -

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

À Luiza e Carolina.

Meus agradecimentos à Universidade Estadual de Feira de Santana e a CAPES - PICO pelo apoio financeiro. E ao Prof. Alejandro B. Engel, pela orientação.

"Doravante, o espírito humano renuncia às pesquisas absolutas (metafísicas e teológicas) que só convinham à sua infância; ele circunscreve seus esforços ao domínio exclusivo da verdadeira observação, a única base possível dos conhecimentos verdadeiramente acessíveis, sabiamente adaptados às nossas necessidades reais. Numa palavra, a revolução fundamental que caracteriza a virilidade de nossa inteligência consiste essencialmente em substituir, em todos os domínios, a inacessível determinação das causas propriamente ditas, pela simples procura das leis, isto é, das relações constantes que existem entre os fenômenos observados".

Comte.

SÍNTESE

Apresenta-se um modelo global para dinâmica populacional de uma espécie isolada. Há menção ao Modelo de Malthus e ao Modelo de Verhulst.

Sugere-se como técnica para estimar os parâmetros, minimizar uma função sujeito a restrições de desigualdades. Transforma-se este problema de otimização restrito em irrestrito por penalização. Há um estudo sobre penalização externa.

Resolve-se o problema irrestrito usando-se o Método de Nelder-Mead. Há uma apresentação deste método.

Sugere-se uma sequência de problemas que têm o objetivo de determinar uma faixa de previsão para tempos não tabelados.

Finalmente, simula-se uma população fictícia por uma equação logística, a fim de ajustá-la ao modelo global. Há teste com a população da Índia e do Brasil.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - DOIS MODELOS CLÁSSICOS	1
1. Considerações Gerais	1
2. O Modelo de Malthus	2
3. O Modelo Logístico	5
3.1. Estabilidade das Soluções Constantes	9
CAPÍTULO II - UM MODELO GLOBAL PARA UMA ESPÉCIE ISOLADA	11
1. O Modelo Global	11
2. Estabilidade das Soluções Constantes	14
3. Soluções do Modelo Dentro do Intervalo $[X_j, X_{j+1}]$	15
CAPÍTULO III - ANÁLISE NUMÉRICA	20
1. Formulação do Problema Numérico	20
2. O Método de Penalização	24
2.1. Introdução e Comentários	24
2.2. O Método	25
2.3. Convergência	27
2.4. Aplicação ao Problema	31
3. O Método de Nelder-Mead	32
3.1. Introdução	32
3.2. O Método e o Algoritmo	33

3.3. Comentários	36
3.4. Fluxograma do Método Simplex	37
4. Extrapolação	38
CAPÍTULO IV - AJUSTE DE DADOS	44
1. BR/2000 Crescimento Populacional Zero	44
1.1. O Modelo Global e a População do Brasil	45
2. Ajuste do Modelo Global à População da Índia	48
3. A Logística e o Modelo Global	49
APÊNDICE	52
BIBLIOGRAFIA	68

INTRODUÇÃO

Do ponto de vista acadêmico e científico parece difícil justificar uma tese de Mestrado. Se, porém, deve existir, ela deve ser fruto de um trabalho de pesquisa e sobre tudo de aprendizagem de um aluno de Pós-Graduação.

Mais do que uma avaliação acadêmica, uma tese de Mestrado deve fornecer subsídios práticos e teóricos para resolver algum problema dentro da sociedade.

O objetivo mais importante deste trabalho é sugerir um modelo global para dinâmica populacional de uma espécie isolada.

Com o propósito de formular, identificar e ajustar tal modelo, apresentaremos dois modelos clássicos, descritos por equações diferenciais ordinárias, que são importantes por sua simplicidade teórica e pela simplicidade de aplicá-los, para fazer previsões sobre estágios da população no futuro.

Os fenômenos biológicos e sociológicos são bastantes aplicados, contendo um grande número de fatores importantes, o que torna difícil fazer um modelo simples que seja representado no caso real.

Por outro lado, nós achamos que nenhum modelo sobre dinâmica populacional está completo se não sugerir procedimentos para estimar seus parâmetros e como devemos proceder em caso de previsão.

Assim sendo, este trabalho apresenta um modelo global para dinâmica populacional de uma espécie isolada que tem como caso particular o modelo logístico. Sugere ainda técnicas numéricas de otimização, bem como procedimentos para avaliar o comportamento da população no futuro.

CAPÍTULO I

DOIS MODELOS CLÁSSICOS

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A primeira vista, parece impossível representar a dinâmica populacional de uma espécie isolada por uma equação diferencial, uma vez que uma população de qualquer espécie varia por acréscimos inteiros. Consequentemente, a população de qualquer espécie nunca pode ser uma função diferenciável do tempo. Entretanto, se uma dada população é muito grande e subitamente aumenta ou diminui de um indivíduo, então a variação é muito pequena comparada com a população dada. Assim, admitimos, aproximadamente, que grandes populações variam continuamente e mesmo diferencialmente com o tempo.

O isolamento de uma espécie, para seu estudo, em um sistema ecológico em que esta vive, é geralmente uma simplificação que se afasta drasticamente da realidade, já que toda espécie em um sistema ecológico, ou serve de alimento a outra espécie na cadeia de alimentos do sistema, ou se alimenta de alimentos comuns a várias espécies que vivem em lugares também comuns a outras espécies. Além disso, mais de uma destas situações podem ocorrer simultaneamente. O estudo da dinâmica populacional de uma espécie isolada se justifica, porque, assim, pode-se apresentar modelos que se ajustam razoavelmente bem na avaliação ou previsão de populações humana ou de

populações quase isolada, apesar das simplificações citadas. Sendo assim, suponhamos que no sistema ecológico em consideração, com exceção de uma espécie E , não existe outra espécie que se alimente dos produtos que E consome ou que vivam em lugares nos quais E vive. Suponhamos também, que a espécie E não serve de alimento a nenhuma das espécies que vivem no habitat em que E vive. Consideraremos também que não há migração, isto é, o sistema ecológico em consideração é simples e fechado.

Nós construiremos nosso modelo baseado na hipótese de que a taxa de variação dX/dt , num instante de tempo t , do número de indivíduos X , de qualquer espécie isolada E , sujeito as considerações anteriores, dependem exclusivamente e de alguma maneira indefinida do número de indivíduos desta espécie. Com isto, nós restringiremos nossa análise para um sistema dinâmico do tipo:

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \tag{1}$$

$$X(t_0) = X_0,$$

onde X_0 é a população de E no instante de tempo t_0 .

2. O MODELO DE MALTHUS

Seja X o número de indivíduos de uma espécie isolada que vivem num sistema ecológico simples e fechado, no instante de tempo t .

O modelo mais simples possível para descrever esta situação foi proposto pelo economista inglês T.R. Malthus (1766-1834) em 1798 no qual ele supõe que a taxa de variação dX/dt da população de E , num instante de tempo t , é somente proporcional ao número de indivíduos de E . Então,

$$\frac{dX}{dt} = aX \quad (2)$$

$$X(t_0) = X_0$$

onde $0 < a \in \mathbb{R}$.

Logo, a população $X(t)$ da espécie isolada E , de acordo com a solução da equação diferencial (2), é descrita por

$$X(t) = X_0 [\text{Exp } a(t - t_0)] \quad (3)$$

Note que (3) descreve um crescimento ilimitado quando $t \longrightarrow +\infty$.

A equação (3) como solução de (2), é conhecida como Lei de Malthus para crescimento populacional.

Malthus [9] formulou um modelo extremamente simples para o crescimento populacional. Tão simples, que somos capazes de resolvê-lo analiticamente em poucas linhas. Entretanto, é importante observar se este modelo com sua simplicidade tem alguma relação com a realidade. Com efeito, seja $X_0 = 3,06 \times 10^9$ a população da Terra, no ano de 1961, e $a = 2\%$ a taxa de crescimento

populacional estimada para o período 1960-1970. Portanto,

$$t_0 = 1961$$

$$X_0 = 3,06 \times 10^9$$

$$a = 0,02$$

$$\frac{dX}{dt} = 0,02 X$$

de modo que,

$$X(t) = 3,06 \times 10^9 \times \text{Exp}[0,02(t - 1961)] \quad (4)$$

Observou-se que a equação (4) reflete com surpreendente precisão a população da Terra estimada para o período 1700-1961. Porém, o mesmo não acontece para períodos de tempo suficientemente grandes. Com efeito, por volta do ano 2500, a população da Terra seria extremamente grande, se fosse predita pela equação (4). A equação (4) prediz que a população da Terra será de 3.600.000 bilhões de habitantes no ano de 2670. Tal número é extremamente absurdo se levarmos em conta que a superfície da Terra é de 510.001.000 quilômetros quadrados.

O mais importante inconveniente na lei de Malthus é que ela não leva em conta a competição inevitável por habitat e alimentos entre indivíduos, quando a densidade destes é suficientemente grande. Porém, o modelo de Malthus não é completamente inútil porque

ele se ajusta razoavelmente bem quando o habitat e os alimentos são abundantes, pois neste caso a taxa de crescimento é independente dos recursos. Por outro lado, note que em qualquer modelo, uma população inicial nula deve manter-se constantemente nula. O modelo de Malthus cumpre esta última condição, mas não cumpre a condição de limitar a população quando os recursos são escassos. O modelo mais simples no qual estas duas condições se cumprem é conhecido como Modelo Logístico ou Modelo de Verhulst (1804-1849).

Chamaremos de fase de crescimento exponencial ao período de tempo no qual a população de uma espécie isolada, pode ser descrita pelo modelo de Malthus.

3. O MODELO LOGÍSTICO

O modelo logístico [9] consiste em considerar a taxa de variação dX/dt do número de indivíduos X , no instante de tempo t , como uma função quadrática de X , isto é,

$$\frac{dX}{dt} = aX + bX^2 \quad (5)$$

$$X(t_0) = X_0$$

com $a > 0$, $b < 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Uma justificativa para se tomar a equação (5) como um modelo alternativo, sem contudo desprezar completamente o modelo de

Malthus, é a seguinte: Dado que o modelo de Malthus não reflete a competição de recursos por indivíduos, uma escolha conveniente de um termo corretivo, para englobar a disputa por recursos, é bX^2 , onde b é uma constante negativa, pois a média estatística do número de choques entre dois indivíduos por unidade de tempo é proporcional a X^2 .

Quando a densidade da população X for pequena, haverá recursos suficientes de modo que a taxa de crescimento será independente dos recursos e, portanto, aproximadamente proporcional a população. A constante b , em geral, será muito pequena se comparada com a constante a , de modo que se X não é bastante grande, então o termo bX^2 deve ser desprezível se comparado com aX , e neste caso, a população crescerá exponencialmente. Entretanto, a medida que a população aumenta, os recursos disponíveis por indivíduos produzirão um efeito inibitório no crescimento populacional. Neste caso, o termo bX^2 não é mais desprezível e portanto serve para diminuir a velocidade de crescimento da população. As constantes a e b são geralmente denominadas coeficientes vitais.

Com o objetivo de determinar que tipo de população o modelo de Verhulst prevê, examinaremos com detalhes a equação diferencial (5).

Suponhamos inicialmente que $X \neq 0$ e $X \neq -a/b$. Assim, podemos escrever a equação (5) como

$$\frac{dX}{X(a + bX)} = dt$$

(6)

$$X(t_0) = X_0$$

Se $a > 0$ e $b < 0$, então a solução de (6) é a família com respeito ao parâmetro X_0 de curvas logísticas, dadas por

$$X(t) = \frac{aX_0}{(a + bX_0)\text{Exp}[-a(t - t_0)] - bX_0} \quad (7)$$

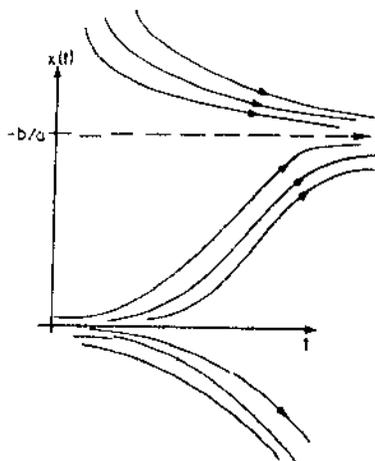


Fig. 1. Espaço de fase da equação (7).

É importante separar nosso estudo para os casos em que $0 < X_0 < -a/b$ e $X_0 > -a/b$, posto que a taxa de crescimento nestes intervalos muda de sinal.

Se $0 < X_0 < -a/b$ então a taxa de crescimento é positiva, o que acarreta $X = X(t)$ ser monótona crescente e $X(t) \rightarrow -a/b$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Se $X_0 > -a/b$ então a taxa de crescimento é negativa, o que acarreta $X = X(t)$ ser monótona decrescente e $X(t) \rightarrow -a/b$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Logo, independente de seu valor inicial X_0 , a população tende sempre ao valor limite $-a/b$, desde que $X_0 \neq 0$. Além disso, de

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = X(a + bX)(a + 2bX) \quad (8)$$

temos que dX/dt é crescente, se $X < -a/2b$ e que dX/dt é decrescente, se $X > -a/2b$.

Portanto, se $X_0 < -a/b$, o gráfico de $X = X(t)$ deve ser da forma da figura 2.

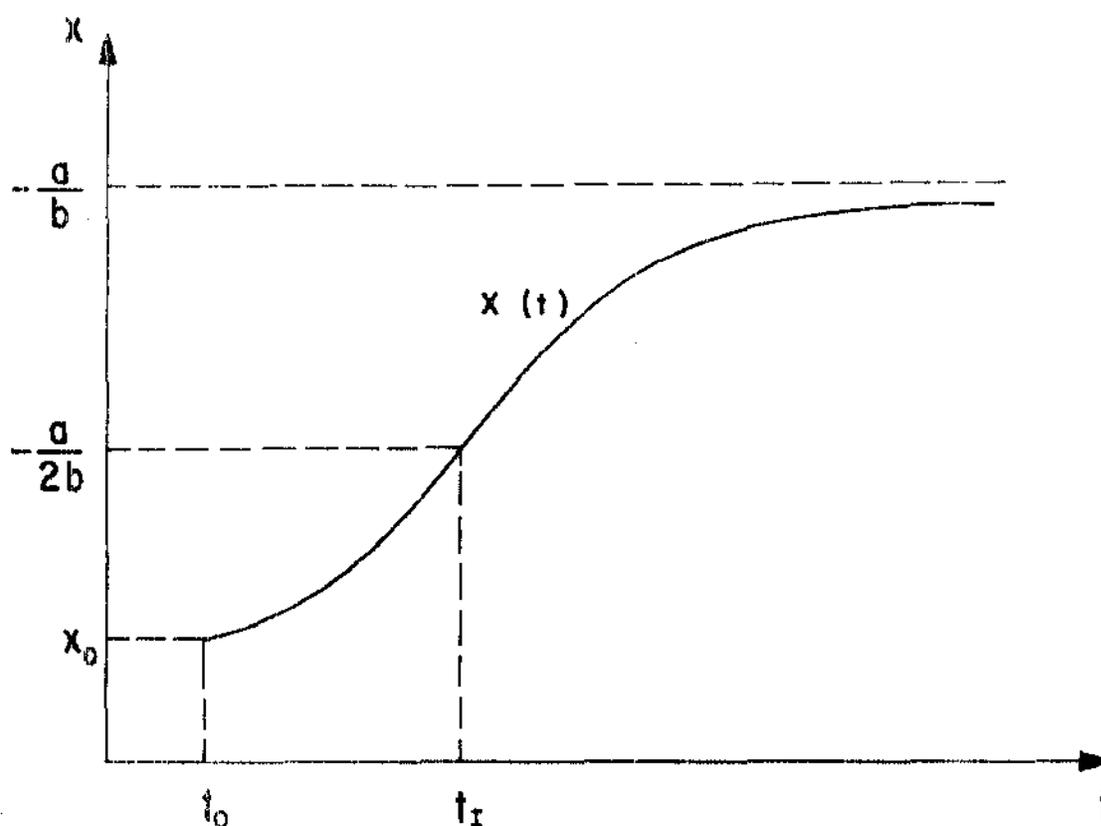


Fig. 2

3.1. ESTABILIDADE DAS SOLUÇÕES CONSTANTES

Seja $X(t) = 0$ uma solução constante de (6), isto é, se $X_0 = 0$ então $X(t) = 0$, para todo t . Isto significa que se começarmos com uma população inicial $X_0 = 0$, jamais teremos algum indivíduo desta população. Agora, suponhamos que se comece com um pequeno número de indivíduos $X_0 \neq 0$. A questão é saber se continuaremos com este pequeno número. Observando a equação (7) e/ou a figura 1, fica claro que a resposta é negativa. Isto deve-se ao fato de que, quando $X_0 \neq -a/b$ então $X(t) \rightarrow -a/b$ quando $t \rightarrow +\infty$.

É comum dizer que a solução $X(t) = 0$ é uma solução instável da equação (5).

Considere agora a solução $X(t) = -a/b$, isto é, se $X_0 = -a/b$ então $X(t) = -a/b$. Isto significa que se começarmos com uma população inicial $X_0 = -a/b$, jamais teremos um outro número de indivíduos desta população. Porém se perturbarmos ligeiramente este valor, isto é, se nossa população inicial é qualquer valor positivo diferente de zero e $-a/b$, então nossa população final será $-a/b$, como pode ser observado no plano de fase da figura 1. Neste caso, dizemos que $X(t) = -a/b$ é uma solução estável da equação (5).

COMENTÁRIOS.

É claro que desenvolvimentos tecnológicos, considerações físicas e sociológicas têm grande influência sobre os coeficientes vitais a e b . Portanto, eles devem ser reavaliados em pequenos períodos de tempo.

Uma outra crítica levantada à Lei Logística de crescimento populacional, é que se observou que algumas populações flutuam periodicamente entre dois valores, e nenhum tipo de flutuação aparece numa Lei Logística.

solução de (9) não tivesse a propriedade de trajetória única.

A propriedade de trajetória única pode ser assegurada se $F(X)$ em (9) cumpre a seguinte condição:

I - $F(X)$ deve ser contínua, limitada e Lipschitziana numa região R do plano TX .

Além disso, gostaríamos que $F = F(X)$ também cumprisse uma outra condição que chamaremos de II, que é:

II - Dentro de um certo intervalo $[0, X_L]$, onde X_L deve ser tão grande quanto desejamos, a função $F(X)$ tenha um número finito de raízes reais, todas elas de ordem finita.

Partindo das condições I e II nosso modelo propõe escrever

$$F(X) = \prod_{i=0}^n (X - X_i)^{v_i} W(X) \quad (10)$$

com

$$0 \leq X_0 \leq X_1 \leq \dots \leq X_L$$

$$W(X) \neq 0, \forall X \in [0, X_L], \text{ contínua,}$$

e v_i indica o grau de multiplicidade da raiz X_i .

Conseqüentemente, nossa dinâmica populacional global de uma espécie isolada é descrita por

$$\frac{dX}{dt} = \prod_{i=0}^n (X - X_i)^{v_i} W(X) \quad (11)$$

CAPÍTULO II

UM MODELO GLOBAL PARA UMA ESPÉCIE ISOLADA

1. O MODELO GLOBAL

Seja $X = X(t, t_0, X_0)$ ou simplesmente $X = X(t)$ o número de indivíduos de uma espécie isolada, que vivem no instante de tempo t .

Nós desejamos estabelecer algumas hipóteses a respeito de uma classe de funções $F = F(X)$, de tal forma que o sistema dinâmico

$$\frac{dX}{dt} = F(X)$$

(9)

$$X(t_0) = X_0$$

descreva com razoável precisão a dinâmica populacional de uma espécie isolada E .

As funções $F = F(X)$ podem ser as mais gerais possíveis contanto que $X = X(t, t_0, X_0)$ tenha a propriedade de trajetória única -PIU- como solução de (9). A propriedade de trajetória única simplesmente significa que, se em algum tempo t_1 , depois de t_0 , alguém mede X_1 indivíduos e em algum tempo t_2 , depois de t_0 , alguém mede X_2 indivíduos, então no tempo $t_2 - t_1$ depois de t_1 deve-se medir X_2 indivíduos. Esta é uma hipótese bastante realista, pois seria uma situação ecológica bastante estranha se a

Como ilustração, podemos tomar um caso particular do modelo (11), fazendo

$$F(X) = X(X - X_c)(X - X_m), \quad (12)$$

onde X_c é uma população crítica, isto é, dada uma população inicial X_0 inferior a X_c , a população $X(t)$ da espécie descrita por (12) tende a extinção e dada uma população inicial superior a X_c , a população descrita por (12) desencadeia um crescimento limitado pela população máxima X_m ; Note que,

$$\text{se } X \in [0, X_c], \text{ então } W(X) = (X - X_m),$$

$$\text{se } X \in [X_c, X_m], \text{ então } W(X) = X \text{ e}$$

$$\text{se } X \in [0, X_m], \text{ então } W(X) = 1.$$

Neste caso podemos tomar para X_c qualquer valor maior que X_m .

É possível demonstrar que o modelo logístico é um caso particular do modelo (11). Com efeito, podemos reescrever (5) fazendo $dX/dt = (X-0)(X+a/b)b$. Comparando com (11) temos que $X_1 = 0$, $X_2 = -a/b$, $v_1 = v_2 = 1$ e $W(X) = b \neq 0$. Logo, se uma dada população pode ser ajustada por uma logística. Então ela também pode ser ajustada por (11).

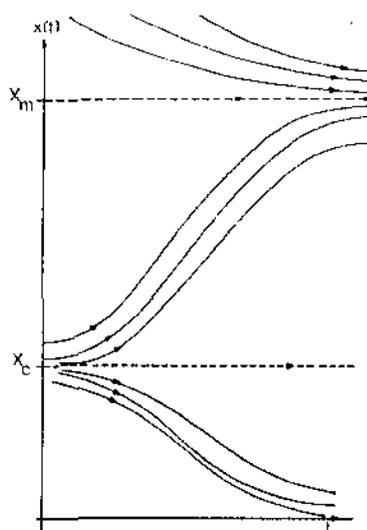


Fig. 3. Espaço de fase para o caso de uma espécie com população crítica e população máxima.

2. ESTABILIDADE DAS SOLUÇÕES CONSTANTES E PTU.

Observando que $F(X_i) = 0$, para todo $0 \leq i \leq n$, é fácil ver que funções do tipo $X(t, t_0, X_i) = X_i$ são as soluções constantes do sistema (11), não importando qual t_0 é tomado como tempo inicial. Como estes pontos ou soluções são imutáveis durante o passar do tempo, eles são ditos pontos de equilíbrio do modelo (11). Tais pontos podem ser estáveis ou instáveis, porém isto depende da função $F(X)$ em questão. No caso do exemplo descrito pela equação (12), X_c é ponto de equilíbrio instável e X_m é ponto de equilíbrio estável.

É importante termos em mente o que queremos dizer com ponto

de equilíbrio estável e instável.

Dizemos que X_i é ponto de equilíbrio de (11) se $F(X_i) = 0$.

Seja X_i , um ponto de equilíbrio de (11). Então dizemos que X_i é:

I - Estável se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $X \in [0, X_L]$ e $|X - X_i| < \delta$, então $|X(t, t_0, X_0) - X_i| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.

II - Instável se não é estável.

Na verdade X_i é ponto de equilíbrio assintoticamente estável, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |X(t, t_0, X_0) - X_i| = 0.$$

A hipótese I, imposta para $F(X)$, implica que as soluções de (11) têm a propriedade de trajetória única. Assim, se para o tempo t_0 , $X(t_0, t_0, X_0) = X_0$ está entre dois $X_{i,s}$ consecutivos, ditos X_j, X_{j+1} , então para todo tempo t , $X(t, t_0, X_0)$ se manterá dentro do intervalo (X_j, X_{j+1}) , tendo X_j como limite inferior e X_{j+1} como limite superior. Em virtude disto, podemos e devemos restringir o nosso estudo para soluções de (11) a limites de $X_{i,s}$ consecutivos.

3. SOLUÇÕES DO MODELO DENTRO DO INTERVALO (X_j, X_{j+1}) .

Sejam X_j e X_{j+1} duas raízes consecutivas da função $F(X)$.

Para $X \in (X_j, X_{j+1})$ a função $F(X)$ pode ser escrita como

$$F(X) = (X - X_j)^{v_j} (X - X_{j+1})^{v_{j+1}} W_j(X) , \quad (13)$$

onde v_j e v_{j+1} são respectivamente as multiplicidades das raízes X_j e X_{j+1} e $W_j(X) \neq 0$ para todo $X \in (X_j, X_{j+1})$

Logo, o sistema (11) pode ser escrito como

$$\frac{dX}{dt} = (X - X_j)^{v_j} (X - X_{j+1})^{v_{j+1}} W_j(X) \quad (14)$$

$$X(t_0) = X_0 .$$

Supor que $F(X)$ é contínua, limitada e Lipschitziana numa região R do plano TX , é necessário para garantir a existência e unicidade da solução $X = X(t, t_0, X_0)$. Além disso, se $W_j(X)$ é conhecida, o sistema (14) pode ser resolvido por separação de variáveis, obtendo-se assim uma solução implícita $t = t(X)$ e pelo teorema das funções implícitas é possível determinar uma representação local da solução $X = X(t, t_0, X_0)$. Contudo nem sempre a função $W_j(X)$ é conhecida, mas sabemos que $W_j(X) = W_j(X(t, t_0, X_0))$. Logo, é possível integrar por partes o sistema (14), o qual acarreta em

$$\int_{X_0}^X \frac{dX}{(X - X_j)^{v_j} (X - X_{j+1})^{v_{j+1}}} = \int_{t_0}^t W_j(X) dt. \quad (15)$$

Estudaremos cada uma das integrais de (15) separadamente.

A integral

$$\int_{X_0}^X \frac{dX}{(X-X_j)^{v_j} (X-X_{j+1})^{v_{j+1}}}, \quad (16)$$

para diferentes v_j, v_{j+1} , podemos resolver usando uma técnica conhecida como frações parciais.

Grafaremos por $S=S(X_0, X_j, X_{j+1}, X)$ as diferentes soluções de (16).

(a) Se $v_j = v_{j+1} = 1$, então

$$S_1(X_0, X_j, X_{j+1}, X) = A \cdot \ln \left[\frac{(X_{j+1}-X)(X_0-X_j)}{(X-X_j)(X_{j+1}-X_0)} \right] \quad (17)$$

onde

$$A = \frac{1}{X_{j+1} - X_j}.$$

(b) Se $v_j = 1$ e $v_{j+1} = m \neq 1$, então

$$S_2(X_0, X_j, X_{j+1}, X) = (-1)^{m+1} B^m \cdot \ln \frac{(X-X_j)}{(X_0-X_j)} + \frac{B}{(m-1)} \left\{ (X-X_{j+1})^{1-m} - (X_0-X_{j+1})^{1-m} \right\} \quad (18)$$

onde

$$B = \frac{1}{X_j - X_{j+1}}.$$

(c) Se $v_j = m \neq 1$ e $v_{j+1} = 1$, então

$$S_3(X_0, X_j, X_{j+1}, X) = (-1)^m B^m \cdot \ln \frac{(X_{j+1}-X)}{(X_{j+1}-X_0)} + \frac{B}{(1-m)} \left\{ (X-X_j)^{1-m} - (X_0-X_j)^{1-m} \right\} \quad (19)$$

onde

$$B = \frac{1}{X_j - X_{j+1}}$$

(d) Se $v_j = m \neq 1$ e $v_{j+1} = n \neq 1$, então

$$\begin{aligned}
 S_4(X_0, X_j, X_{j+1}, X) &= \\
 &= \frac{A}{1-m} \left((X - X_j)^{1-m} - (X_0 - X_j)^{1-m} \right) + \\
 &+ \frac{B}{n-1} \left((X_{j+1} - X)^{1-n} - (X_{j+1} - X_0)^{1-n} \right)
 \end{aligned} \tag{20}$$

onde $A = (X_j - X_{j+1})^{-n}$ e $B = (X_{j+1} - X_j)^{-m}$.

A integral

$$\int_{t_0}^t W_j(X) dt. \tag{21}$$

Dado $X_0 \in (X_j, X_{j+1})$ e $t_0 \in \mathbb{R}^+$ a solução do sistema dinâmico $X = X(t, t_0, X_0)$ fica dentro do intervalo (X_j, X_{j+1}) . Por outro lado, $W_j(X)$ é contínua e não se anula dentro do intervalo (X_j, X_{j+1}) . Então $W_j(X(t, t_0, X_0))$ também não se anula para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Isto acarreta que

$$\int_{t_0}^t W_j(X(t, t_0, X_0)) dt = \phi(t, t_0, X_0) \tag{22}$$

seja uma função contínua monotônica para $t \in \mathbb{R}^+$, com $\phi(t_0, t_0, X_0) = 0$.

A função $\phi(t, t_0, X_0)$ nem sempre é conhecida; Isto porque nem sempre conhecemos a função $W_j(X)$. Porém, dado que $\phi(t, t_0, X_0)$ é monotônica e contínua, então ela pode ser aproximada por um polinômio do tipo

$$\phi(t, t_0, X_0) \approx (t - t_0) \sum_{i=0}^m \alpha_i (t - t_0)^i . \quad (23)$$

Finalmente, as soluções do sistema (14) são aproximações da função $S = S(X_0, X_j, X_{j+1}, X)$ no intervalo (X_j, X_{j+1}) , isto é,

$$S(X_0, X_j, X_{j+1}, X) \approx (t - t_0) \sum_{i=1}^m \alpha_i (t - t_0)^i . \quad (24)$$

CAPÍTULO III

ANÁLISE NUMÉRICA

1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA NUMÉRICO

Dada uma determinada tabela de medidas experimentais (censos), de uma população isolada, com um conjunto de pontos (t_i, y_i) $i = 0, 1, \dots, n$, onde y_i é o número de indivíduos no tempo t_i , quer-se ajustar estas medidas ao modelo (14) com um erro não superior a $\epsilon\%$. Este $\epsilon\%$ sendo a soma dos erros percentuais que incidem em cada y_i e finalmente prever o seu comportamento ao longo do tempo (extrapolação).

A tarefa de ajustar os dados ao modelo consiste nos seguintes procedimentos:

I - Determinar entre as funções $S = S(X_0, X_j, X_{j+1}, X)$, do Capítulo II, a mais apropriada ao ajuste dos dados tabelados.

II - Estimar um intervalo (X_j, X_{j+1}) que melhor limita a dinâmica descrita pela função $S = S(X_0, X_j, X_{j+1}, X)$ escolhida no procedimento anterior.

III - Decidir o grau mínimo do polinômio $p(t)$ que melhor ajusta a função $S = S(X_0, X_j, X_{j+1}, X)$ escolhida.

IV - Calcular os coeficientes α_i que melhor aproxima o polinômio $p(t)$ à função $S = S(X_0, X_j, X_{j+1}, X)$.

Neste trabalho será tomado como ponto de partida a função S_1 e será fixado o grau do polinômio $p(t)$ em $n \leq 3$, restando assim, o cálculo dos coeficientes α_i e, o que é mais importante, a estimativa dos parâmetros X_j, X_{j+1} que determinam o intervalo (X_j, X_{j+1}) .

Assim se tem que a dinâmica populacional da espécie tabelada é descrita num intervalo (X_j, X_{j+1}) por

$$\frac{dX}{dt} = (X - X_j)(X - X_{j+1})W_j(X) \quad (25)$$

$$X(t_0) = y_0$$

com $W_j(X) \neq 0$ para todo $X \in (X_j, X_{j+1})$.

Como

$$\int_{y_0}^X \frac{dX}{(X - X_j)(X - X_{j+1})} = \frac{1}{X_{j+1} - X_j} \ln \frac{(X_{j+1} - X)(y_0 - X_j)}{(X - X_j)(X_{j+1} - y_0)} \quad (26)$$

e

$$\int_{t_0}^t W_j(X) dt = \phi(t, t_0) = p(t) \quad (27)$$

então,

$$\frac{1}{X_{j+1} - X_j} \ln \frac{(X_{j+1} - X)(y_0 - X_j)}{(X - X_j)(X_{j+1} - y_0)} = p(t) \quad (28)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = X_{j+1}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} X(t) = X_j \quad \text{e} \quad X(t_0) = y_0$$

o que demonstra ser $X = X(t)$ compatível com o modelo (25).

Como $X = X(t)$ representa uma classe de funções nos parâmetros X_j e X_{j+1} , então devemos estimar estes parâmetros de tal forma que, através de (30), seja possível prever medidas (censos) $\bar{y}_i = X(t_i)$ que devem ser comparados com os $y_{i,S}$ tabelados, afim de que a soma dos resíduos percentuais seja minimizada. Conseqüentemente, temos uma função erro nas variáveis X_j e X_{j+1} que deve ser minimizada sob a condição $y_i \in (X_j, X_{j+1})$. Grafaremos X_1, X_2 em substituição a X_j e X_{j+1} , respectivamente.

Então, o nosso problema é

Minimizar

$$E(X_1, X_2) = \sum_{i=0}^n \left| \frac{y_i - X(t_i)}{y_i} \right| \quad (31)$$

sujeito a

$$0 \leq X_1 < y_0$$

$$y_n < X_2 \leq y_{LS}$$

Calculamos o valor $E(X_1, X_2)$ de acordo com o seguinte fluxo de operações

$$(X_1, X_2) \longrightarrow S = p \longrightarrow X(t_i) \longrightarrow E(X_1, X_2),$$

para todo (X_1, X_2) no conjunto R de restrições do problema (31).

isto é, devemos aproximar (26) a um polinômio do tipo $p(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$, pois $p(t_0) = 0$.

Este problema será resolvido utilizando o Método dos Mínimos Quadrados Lineares.

O Método dos Mínimos Quadrados Lineares [7] diz que $p(t)$ é uma boa aproximação da função S se os coeficientes de $p(t)$ é uma solução do problema.

Minimizar

$$\xi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{i=0}^n (S(X_0, X_j, X_{j+1}, y_i) - p(t_i))^2. \quad (29)$$

É evidente que para se resolver este problema, é necessário que se estime os parâmetros X_j e X_{j+1} . Então, por razões ecológicas e para ficar de acordo com (25), nós temos que estes parâmetros são tais que $0 \leq X_j < y_0$ e $y_n < X_{j+1} \leq y_{LS}$ onde y_{LS} é tão grande quanto desejarmos.

Deste modo, é possível escrever uma expressão analítica que descreve a população $X = X(t)$ dependendo funcionalmente do tempo t .

Assim,

$$X(t) = \frac{X_{j+1}(y_0 - X_j) + X_j(X_{j+1} - y_0) \text{Exp}[(X_{j+1} - X_j)p(t)]}{(y_0 - X_j) + (X_{j+1} - y_0) \text{Exp}[(X_{j+1} - X_j)p(t)]} \quad (30)$$

Note que,

Nós resolvemos o problema (31) utilizando o Método de Penalização Externa [10] ou simplesmente penalização, o qual descreveremos na próxima seção.

2. O MÉTODO DE PENALIZAÇÃO.

2.1 INTRODUÇÃO E COMENTÁRIOS

Este método tem como objetivo transformar um problema de otimização restrito em um problema de otimização não restrito. A transformação é feita pela adição, à função objetivo, de um termo que impõe um alto "custo", para as restrições violadas. Daí o nome de penalização. Associado com este método, está um parâmetro μ que determina a severidade da penalização e conseqüentemente o grau de otimalidade entre o problema não restrito e o problema restrito. Esperamos que quando $\mu \rightarrow +\infty$ a aproximação torne-se gradualmente precisa.

Existem duas questões fundamentais associadas com este método; A primeira tem a ver como quão bem o problema não restrito aproxima o problema restrito. Isto é fundamental no exame se, quando o parâmetro μ é aumentado em direção ao infinito, a solução do problema não restrito converge para uma solução ao problema restrito. A outra questão, mais importante do ponto de vista prático, é a questão de como resolver um problema não restrito dado, quando a sua função objetivo contém um termo de penalização. Ocorre que, quando μ é aumentado para produzir um problema de boa aproximação,

a estrutura correspondente ao problema não restrito torna-se gradualmente desfavorável, retardando assim a velocidade de convergência de muitos algoritmos que podem ser aplicados para resolver o problema não restrito. É necessário, então, imaginar um método de aceleração que atenuie este fenômeno de convergência lenta. Para resolver este fenômeno, nós partimos inicialmente com valores razoavelmente grande de μ . Nós observamos que a otimalidade do problema não restrito, resolvido por um método direto, conhecido como Método de Nelder-Mead ou Método Simplex [12] não varia muito quando trabalhamos com μ grande. Isto deve-se, sem dúvida, a grande versatilidade do Método Simplex. Oportunamente descreveremos como funciona este método.

O Método de Penalização é de grande importância tanto para o prático como para o teórico. Para o prático, ele oferece um método simples para resolver problemas restritos que podem ser implementados em computadores não sofisticados.

Para o teórico porque, na tentativa de ter o controle desta aproximação prática pelo domínio de sua convergência inerentemente lenta, ele necessita recorrer a quase todos os aspectos da teoria da otimização.

2.2. O MÉTODO

Considere o problema

$$\text{Minimizar } f(X) \tag{32}$$

Sujeito a $X \in R$,

onde f é uma função contínua em \mathbb{R}^n e R é um conjunto de restrições de \mathbb{R}^n .

O objetivo de um método de penalização é substituir o problema (32) por um problema não restrito da forma

$$\text{Minimizar } f(X) + \mu P(X) \tag{33}$$

onde μ é uma constante positiva e P é uma função em \mathbb{R}^n satisfazendo:

- I - P é contínua
- II - $P(X) \geq 0$, para todo $X \in \mathbb{R}^n$ e
- III - $P(X) = 0$ se, e somente se $X \in R$.

Por exemplo, suponha que R é definido por um número de restrições de desigualdades

$$R = \{X : g_i(X) \leq 0, i = 1, 2, \dots, p\}.$$

Uma função de penalidade muito usada neste caso é

$$P(X) = \sum_{i=1}^p (\max[0, g_i(X)])^2. \tag{34}$$

Para μ grande, é claro que o ponto mínimo do problema (33)

estará na região onde P é pequeno. Assim, com o aumento de μ espera-se que a solução correspondente esteja próxima do fecho de R e conseqüentemente próximo da solução de (32). Idealmente, espera-se que a seqüência de soluções dos problemas penalizados convirja para uma solução do problema (32), quando $\mu \rightarrow +\infty$.

Os procedimentos para resolver o problema (32), pelo método de penalização, consiste em: Seja $\{\mu_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, uma seqüência tendendo para o infinito tal que para cada k , $\mu_k \geq 0$, $\mu_{k+1} > \mu_k$.

Define-se a função

$$q(\mu, X) = f(X) + \mu P(X). \quad (35)$$

Para cada k resolve-se o problema

$$\text{Minimizar } q(\mu_k, X) \quad (36)$$

obtendo-se uma solução X_k .

Nós assumimos que, para cada k , o problema (36) tem uma solução.

2.3. CONVERGÊNCIA

O lema seguinte dá um conjunto de desigualdades que se seguem diretamente da definição de X_k e a desigualdade $\mu_{k+1} > \mu_k$.

LEMA 1.

$$q(\mu_k, X_k) \leq q(\mu_{k+1}, X_{k+1}) \quad (37)$$

$$P(X_k) \geq P(X_{k+1}) \quad (38)$$

$$f(X_k) \leq f(X_{k+1}) \quad (39)$$

PROVA. $q(\mu_{k+1}, X_{k+1}) = f(X_{k+1}) + \mu_{k+1}P(X_{k+1}) \geq f(X_{k+1}) +$
 $+ \mu_k P(X_{k+1}) \geq f(X_k) + \mu_k P(X_k) =$
 $= q(\mu_k, X_k)$ que prova (37).

Nós temos também que

$$f(X_k) + \mu_k P(X_k) \leq f(X_{k+1}) + \mu_k P(X_{k+1}) \quad (40)$$

e

$$f(X_{k+1}) + \mu_{k+1} P(X_{k+1}) \leq f(X_k) + \mu_{k+1} P(X_k) \quad (41)$$

Somando (40) e (41) temos

$$(\mu_{k+1} - \mu_k)P(X_{k+1}) \leq (\mu_{k+1} - \mu_k)P(X_k),$$

que prova (38).

Também

$$f(X_{k+1}) + \mu_k P(X_{k+1}) \geq f(X_k) + \mu_k P(X_k),$$

e portanto usando (38) nós obtemos (39).

LEMA 2. Seja X^* uma solução para o problema (32). Então, para cada k

$$f(X^*) \geq q(\mu_k, X_k) \geq f(X_k).$$

PROVA.

$$f(X^*) = f(X^*) + \mu_k P(X^*) \geq f(X_k) +$$

$$+ \mu_k P(X_k) \geq f(X_k).$$

A convergência global do método de penalidade ou, mais precisamente, a demonstração de que qualquer ponto limite da sequência $\{X_k\}$ é uma solução do problema restrito, segue-se facilmente dos dois lemas acima.

TEOREMA. Seja $\{X_k\}$ uma sequência gerada pelo método de penalidade. Então, qualquer ponto limite desta sequência é uma solução para o problema restrito.

PROVA. Suponha que a sequência $\{X_k\}$, $k \in K$ é uma subsequência

convergente de X_k , tendo como limite \bar{X} . Então, pela continuidade de f , nós temos que

$$\lim_{k \in K} f(X_k) = f(\bar{X}) \quad (42)$$

Seja f^* o valor ótimo associado ao problema restrito (32). Então, de acordo com os lemas 1 e 2, a sequência de números reais $q(\mu_k, X_k)$ é decrescente e limitada acima de f^* . Assim,

$$\lim_{k \in K} q(\mu_k, X_k) = q^* \leq f^*. \quad (43)$$

Subtraindo (42) de (43)

$$\lim_{k \in K} \mu_k P(X_k) = q^* - f(\bar{X}). \quad (44)$$

Desde que $P(X_k) \geq 0$ e $\mu_k \rightarrow +\infty$, (44) implica que

$$\lim_{k \in K} P(X_k) = 0.$$

Usando-se a continuidade de P , isto implica que $P(\bar{X}) = 0$. Nós, por enquanto, temos mostrado que o ponto limite \bar{X} é um ponto factível para o problema restrito (32). Para mostrar que \bar{X} é ótimo, nós notamos que do lema 2,

$$f(X_k) \leq f^* \text{ e portanto}$$

$$f(\bar{X}) = \lim_{k \in K} f(X_k) \leq f^*.$$

2.4. APLICAÇÃO AO PROBLEMA

Para garantir a existência de uma solução para o problema (31), nós gostaríamos que o conjunto R de restrições fosse compacto. Para tanto, nós esperamos que, sem perda de generalidades, se R' é um subconjunto compacto de R definido por $(X_1, X_2) \in R'$ se, e somente se $0 \leq X_1 \leq y_0 - \delta$ e $y_0 - \delta \leq X_2 \leq y_{1S}$, onde δ é um número real positivo tão pequeno quanto se deseje. Então o problema de

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } E(X_1, X_2) \\ & \text{Sujeito a } (X_1, X_2) \in R' \end{aligned} \tag{45}$$

tem uma boa solução para o problema (31).

Na aplicação do método de penalidade ao problema (45) nós definimos

$$P(X_1, X_2) = \sum_{i=1}^4 [\max(0, g_i)]^2 \quad \text{onde } g_1 = -X_1,$$

$$g_2 = X_1 - y_0 + \delta, \quad g_3 = y_0 + \delta - X_2 \quad \text{e} \quad g_4 = X_2 - X_{1S}.$$

Logo,

(1) $P(X_1, X_2)$ é contínua em \mathbb{R}^2 .

(2) $P(X_1, X_2) \geq 0$ para todo $(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$(3) P(X_1, X_2) = 0 \text{ se, e somente se } (X_1, X_2) \in R'.$$

Agora, aplicar o método de penalização ao problema (45) é resolver, para cada μ , o problema não restrito

$$\text{Minimizar } E(X_1, X_2) + \mu P(X_1, X_2) \quad (46)$$

Para resolver o problema (46) nós utilizamos o método direto conhecido como método simplex ou também por método de Nelder-Mead, o qual descreveremos na próxima seção.

3. O MÉTODO DE NELDER-MEAD

3.1. INTRODUÇÃO.

Os métodos diretos para determinar o ponto de otimalidade de um problema irrestrito, tal como em (46), são geralmente iterativos, sendo necessário para iniciar o processo de busca, estimar um valor inicial para a solução. Desta forma é gerada uma sequência de aproximações sucessivas, até atingir o valor ótimo.

Os diferentes procedimentos são caracterizados pelas estratégias utilizadas para produzir esta série de aproximações. Os métodos diretos são aqueles em que a estratégia de busca é baseada na comparação dos valores que a função assume em cada ponto. Tais métodos não avaliam as derivadas da função. Entre estes métodos encontra-se o Método de Nelder - Mead ou Método Simplex que

passaremos a descrever em 3.2.

3.2. O MÉTODO E O ALGORÍTMO.

Um conjunto de $n+1$ pontos, num espaço n -dimensional, forma o que definimos por simplex. Quando os pontos são equidistantes, o simplex é denominado regular.

A idéia principal do método é formar, a partir do simplex original, uma sequência de simplexes com o objetivo de que estes "cerquem" o ponto de otimalidade.

Seja então o problema

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(X) && (47) \\ & X \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

onde f é uma função contínua.

Para descrever o processo, introduzimos as notações,

$$- I = \{1, 2, \dots, n+1\}$$

$$- X_k \text{ é o vértice correspondente para } f(X_h) = \max_{i \in I} f(X_i)$$

$$- X_s \text{ é o vértice correspondente para } f(X_s) = \max_{i \in I, i \neq h} f(X_i)$$

$$- X_\ell \text{ é o vértice correspondente para } f(X_\ell) = \min_{i \in I} f(X_i)$$

$$- X_o \text{ é centróide definido por}$$

$$X_o = \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^{n+1} X_i \quad . \quad (48)$$

A seguir definiremos três operações básicas usadas por este método.

Reflexão - X_h é substituído por

$$X_r = X_o + \alpha(X_o - X_h), \quad (49)$$

onde o coeficiente de reflexão $\alpha > 0$ é a razão entre a distância $[X_r, X_o]$ e $[X_h, X_o]$. Toma-se $\alpha > 0$ convenientemente.

Expansão - X_r é expandido na direção de $(X_r - X_o)$, tal que um melhor valor da função é esperado. Usa-se a relação

$$X_E = X_o + \gamma(X_r - X_o), \quad (50)$$

onde o coeficiente de expansão $\gamma > 1$ é expresso pela razão entre as distâncias de $[X_r, X_o]$ e $[X_E, X_o]$. Toma-se $\gamma > 1$ convenientemente.

Contração - É a operação através da qual o simplex é reduzido. Usa-se a relação

$$X_c = X_o + \beta(X_h - X_o), \quad (51)$$

onde o coeficiente de contração β é a razão entre as distâncias $[X_c, X_o]$ e $[X_h, X_o]$, satisfazendo $0 < \beta < 1$. Toma-se também β , convenientemente.

Podemos definir o processo como se segue:

- 1 - Um simplex original é formado e a função objetivo é avaliada em cada vértice para determinar X_h , X_s e X_o .
- 2 - Realiza-se a reflexão sobre X_h e avalia-se o ponto refletido X_r .
- 3 - Se $f(X_s) \geq f(X_r) \geq f(X_o)$, substitue-se X_h por X_r e reestrutura-se o processo com a formação de um novo simplex.
- 4 - Se $f(X_r) < f(X_o)$, é de se esperar que a direção $(X_r - X_o)$ possa indicar um valor melhor da função. Logo, expandimos o novo simplex nessa direção. A expansão terá sucesso se $f(X_o) > f(X_e)$. Nesse caso, X_h é substituído por X_e . Caso contrário, X_h é substituído por X_r . Em ambos os casos, o processo é reestruturado a partir de um novo simplex.
- 5 - Se no movimento de reflexão do procedimento 2, a avaliação de X_r é tal que $f(X_h) > f(X_r) > f(X_s)$, substitue-se X_h por X_r e realiza-se o movimento de contração. Depois de efetuarmos a contração, compara-se $f(X_h)$ e $f(X_c)$. Se $f(X_h) > f(X_c)$ a contração tem sucesso; X_h é substituído por X_c e reinicia-se o processo em um novo simplex. No caso de falha, $f(X_h) \leq f(X_c)$, então o último simplex é contraído em torno do ponto X_o , onde a função assume o menor valor pela relação

$$X_i = \frac{1}{2} (X_i - X_l) \quad (52)$$

recomeçando-se o processo a partir do procedimento 1.

O critério de parada do algoritmo sugerido por Nelder-Mead é dado por

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n+1} (f(X_i) - f(X_0))^2 \right\}^{1/2} < \epsilon, \quad (53)$$

onde ϵ é um número real, pré-fixado, suficientemente pequeno.

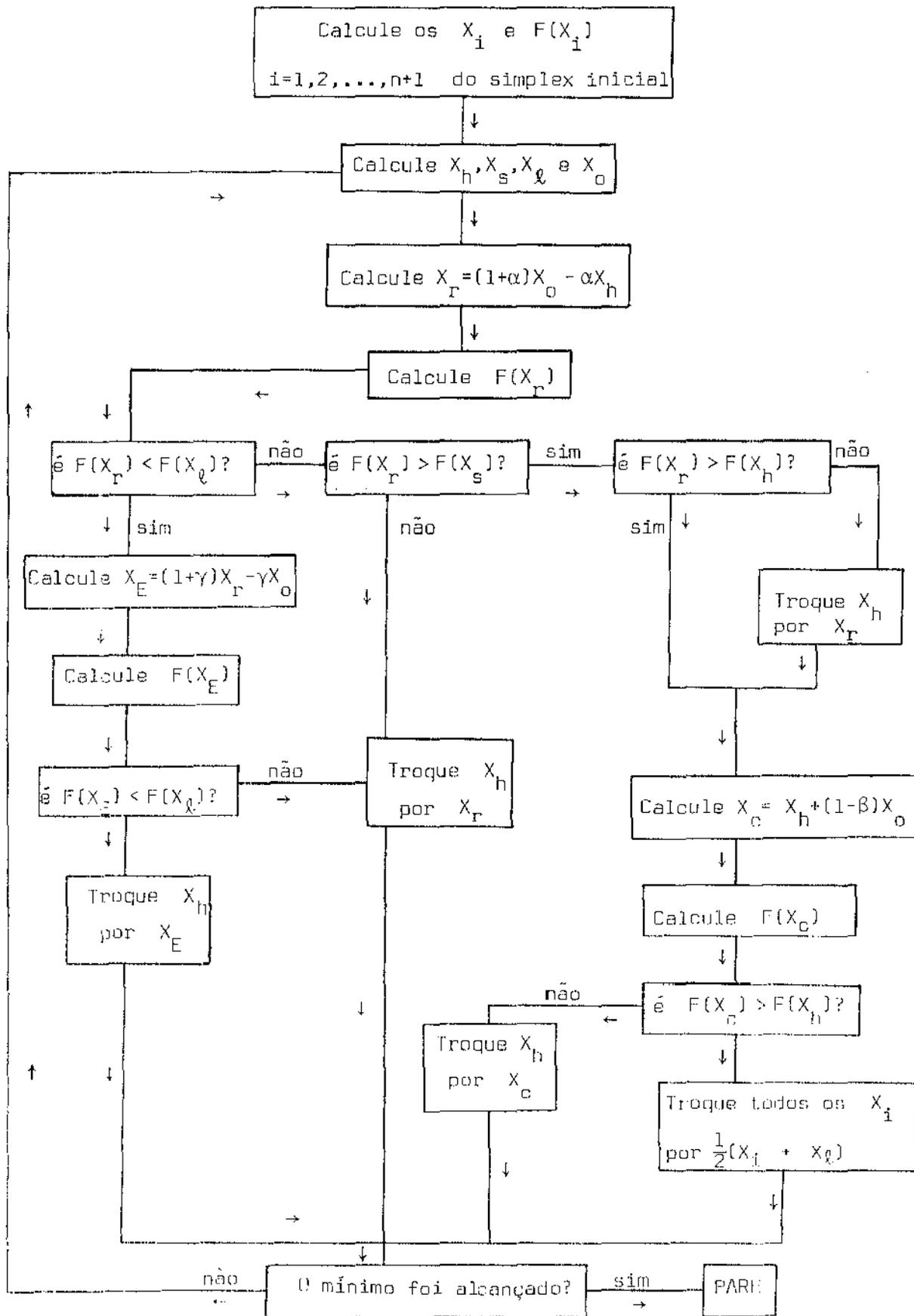
3.3. COMENTÁRIOS

O método de Nelder-Mead requer apenas a continuidade da função objetivo, sendo de grande utilidade prática nos casos onde a função objetivo é não diferenciável ou quando esta apresenta dificuldade na avaliação numérica de suas derivadas parciais.

A maior vantagem deste método é a facilidade de programação. No referente a convergência, esta em geral é lenta e a rapidez da mesma depende da estimativa dada ao ponto inicial.

Este método foi desenvolvido, assim como os demais métodos diretos, por processos heurísticos. Apesar disso, nenhuma prova sobre sua convergência foi realizada até hoje. Experiências computacionais realizadas por muitos autores [11] asseguram que este método é o melhor método direto disponível.

3.4. FLUXOGRAMA DO MÉTODO SIMPLEX.



4. EXTRAPOLAÇÃO

Até o momento nós estabelecemos um modelo global para dinâmica populacional de uma espécie isolada e procedimentos para avaliar os seus parâmetros. Nós gostaríamos também que tais parâmetros fossem utilizados na avaliação de populações não tabeladas, isto é, desejamos fazer previsões ou extrapolações. Nós achamos que um bom procedimento seria determinar, para cada tempo não tabelado t_p , um intervalo de previsão. Sendo assim, gostaríamos que, dentro de uma pequena margem de erro pré-estabelecida δ_ϵ , determinar duas funções $X = X(t)$; uma que subestime a população, a qual chamamos de envolvente mínima e outra que superestime, a qual chamamos de envolvente máxima.

O ponto (X_1^*, X_2^*) , como solução do problema (45), determina a melhor curva $X^* = X^*(t)$ que se ajusta a tabela (t_i, y_i) . Nós queremos encontrar duas outras curvas da classe de $X = X(t, t_0, X_0)$ dentro de uma vizinhança $V[(X_1^*, X_2^*), \delta_\epsilon]$ que se aproxime de $X^* = X^*(t)$. A figura seguinte ilustra melhor esta preocupação.

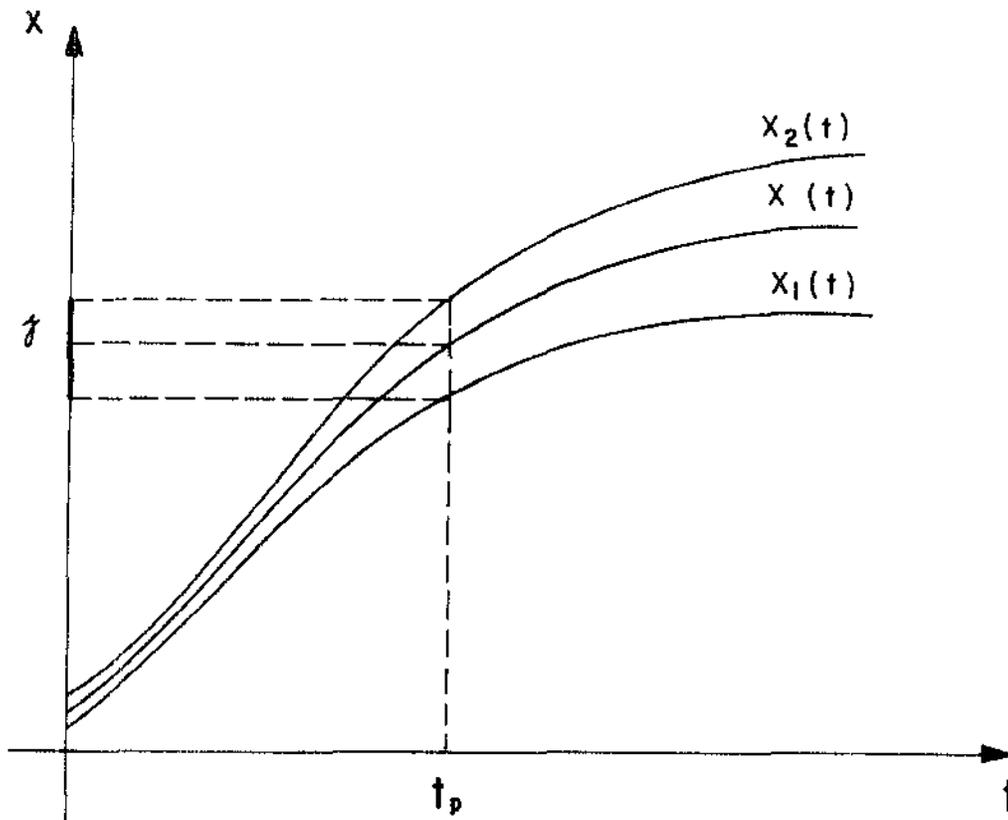


Fig. 4.

Afirmamos que a sequência de problemas, a seguir, determina as envolventes desejadas.

Seja (X_1^*, X_2^*) uma solução do problema (45) e $\epsilon_p = E(X_1^*, X_2^*)$.

1 - Minimizar $(X_2 - X_1^*)$

Sujeito a $E(X_1, X_2) \leq \epsilon_p + \delta_\epsilon$.

$$X_1 = X_1$$

$$y_N \leq X_2 \leq y_{LS} \quad (54)$$

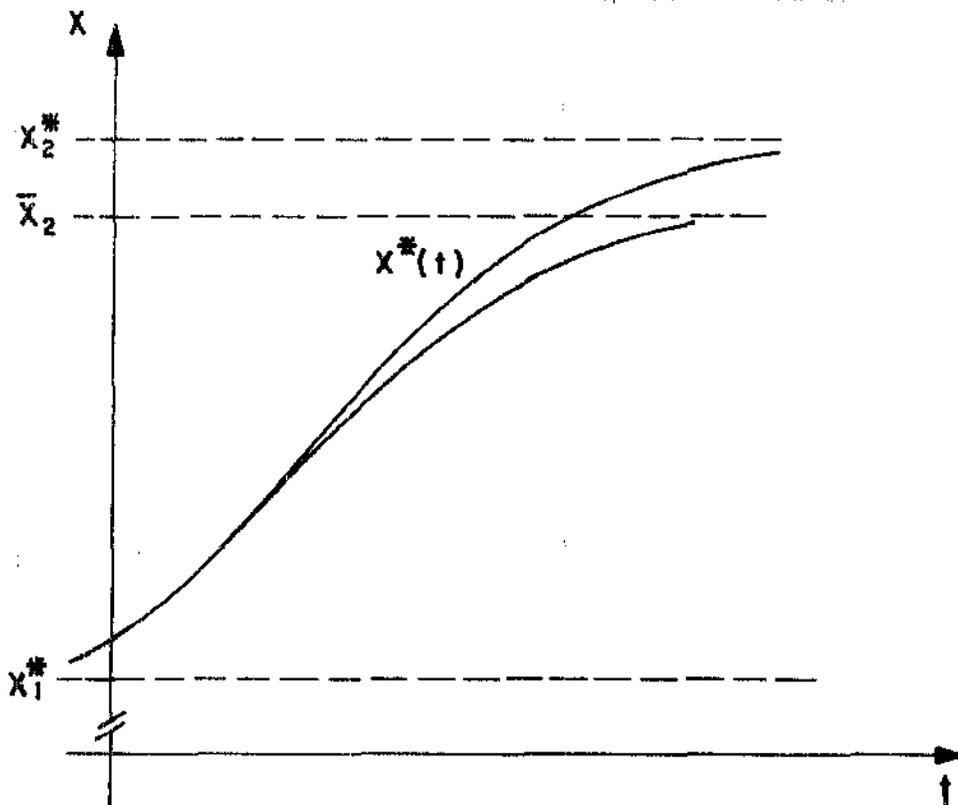


Fig. 5.

2 - Maximize $(X_2 - X_1^*)$

Sujeito a $E(X_1, X_2) \leq \epsilon_p + \delta_\epsilon$

$$X_1 = X_1^*$$

(55)

$$y_n < X_2 \leq y_{LS}$$

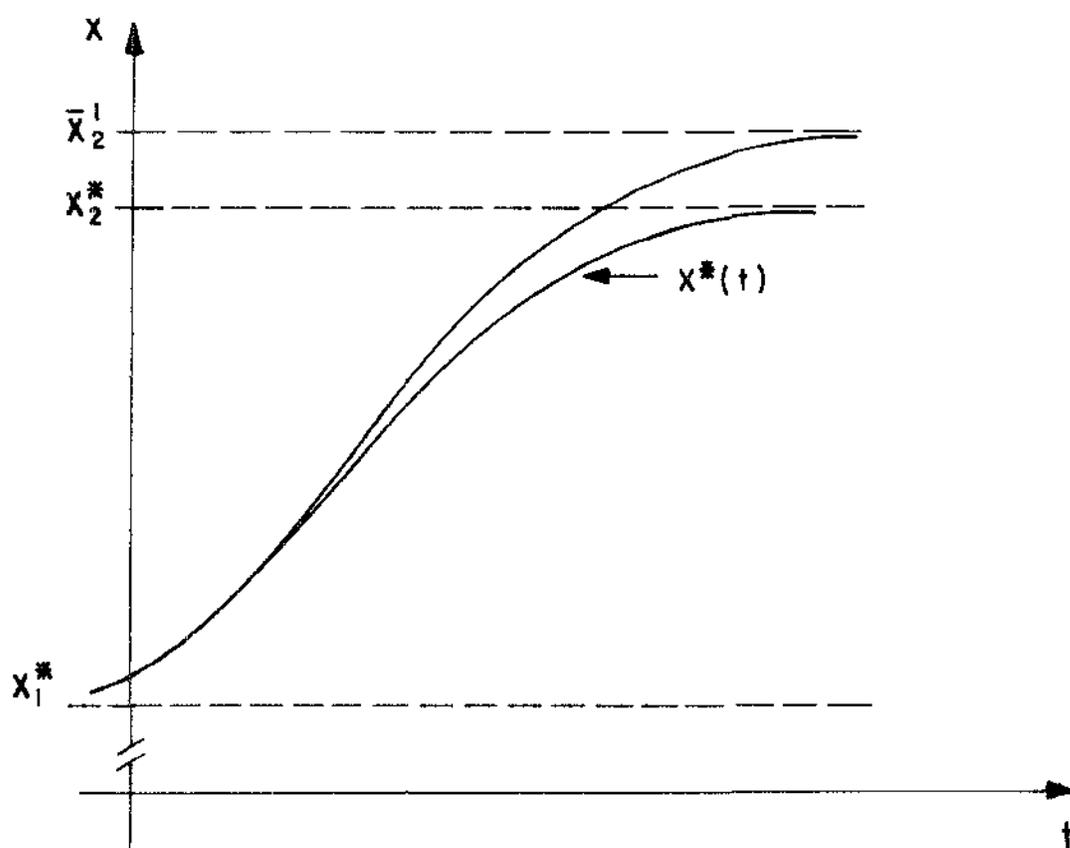


Fig. 6.

Seja (X_1^*, \bar{X}_2) e (X_1^*, \bar{X}_2^1) soluções de 1 e 2 respectivamente.

3 - Maximize $(\bar{X}_2 - X_1)$

Sujeito a $E(X_1, X_2) \leq \epsilon_p + \delta_\epsilon$

$$0 < X_1 \leq X_1^* \quad (56)$$

$$X_2 = \bar{X}_2 .$$

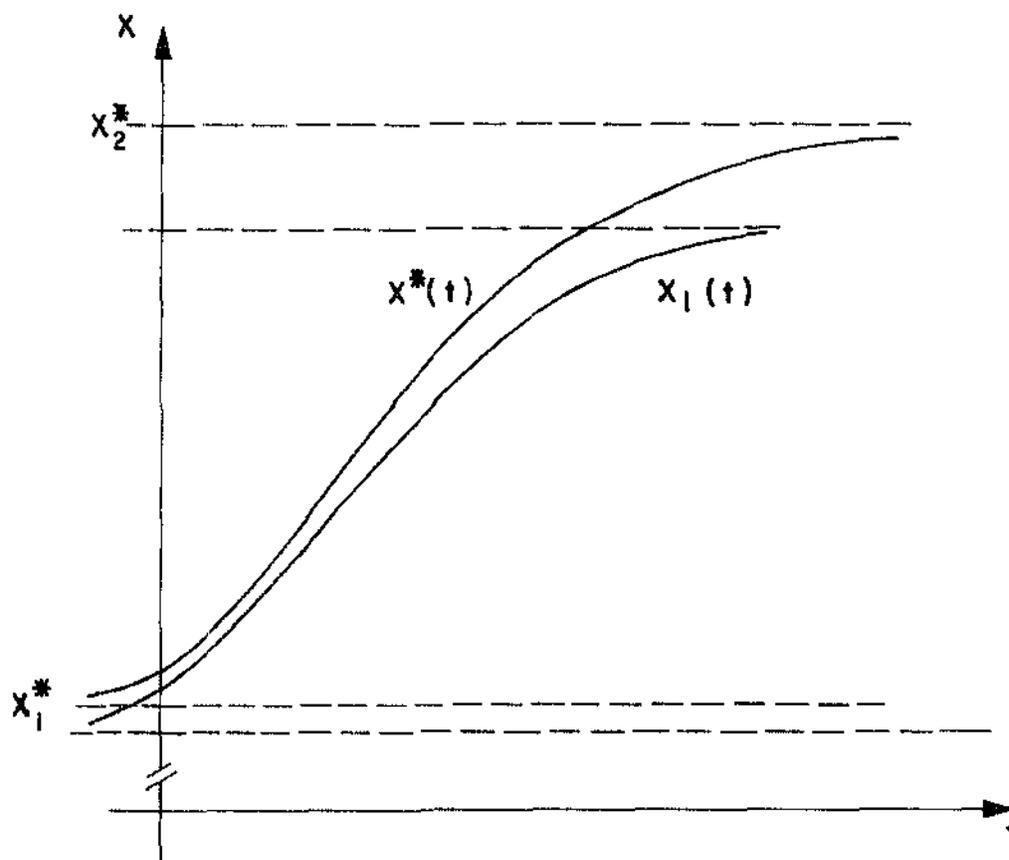


Fig. 7.

4 - Minimize $(\bar{X}'_2 - X_1)$

Sujeito a $E(X_1, X_2) \leq \epsilon_p + \delta_\epsilon$

$$X_1^* \leq X_1 < y_0$$

(57)

$$X_2 = \bar{X}'_2$$

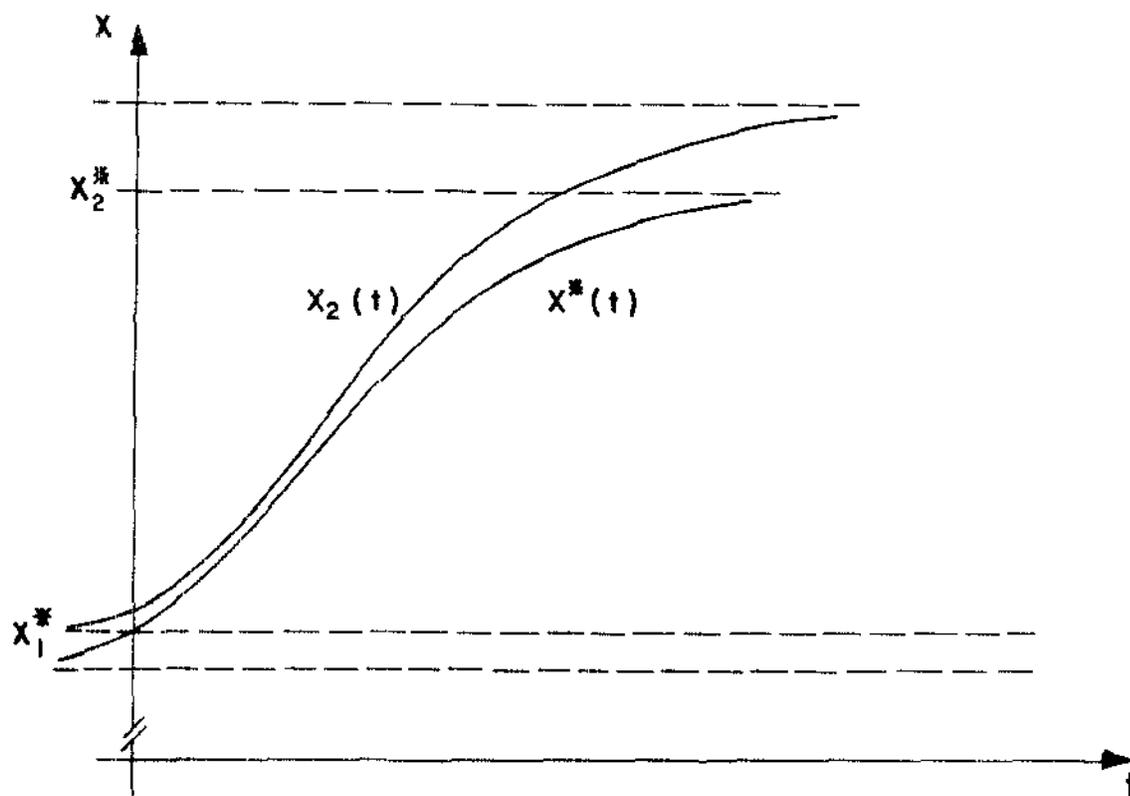


Fig. 8

O nosso procedimento para resolver estes quatro problemas foi o mesmo utilizado para resolver o problema (31), isto é, primeiro aplicamos o método de penalização aos problemas restritos e em seguida aplicamos o método simplex.

Seja $X_1(t)$ a envolvente mínima definida pela solução do problema (56) e $X_2(t)$ a envolvente máxima definida pela solução do problema (57). Definimos como faixa de previsão no tempo t_p , não tabelado, ao intervalo $I = [X_1(t_p), X_2(t_p)]$.

CAPÍTULO IV

AJUSTE DE DADOS

1. BR/2000 CRESCIMENTO POPULACIONAL ZERO

Uma estimativa razoável do crescimento populacional de uma nação, é de vital importância no planejamento econômico e social. Novos empregos a serem gerados, produção agrícola, consumo energético, escolas, habitações etc., tudo deve ser planejado com base no crescimento populacional.

Em tempos de crise, a pressão por novos empregos, maior disponibilidade de produtos agrícolas, maior número de escolas e habitações podem ser consequência de um crescimento populacional, que não é concordante com o crescimento econômico de uma nação.

No caso do Brasil, o aumento, ano a ano, do produto interno bruto, requer um esforço considerável da sociedade. Por este motivo, cabe se perguntar se esta defasagem entre o crescimento populacional e o aumento do PIB irão levar o Brasil, mais e mais, em continuadas crises econômicas e sociais.

Baseado em dados demográficos do IBGE e da UNFSCO e aplicação do modelo global de uma espécie isolada, proposto no capítulo II, com os procedimentos numéricos propostos no capítulo III, a previsão do crescimento populacional do Brasil é bastante otimista. No fim do próximo século, o Brasil deverá atingir o patamar de crescimento populacional zero. Isto pode significar o fim das pressões

demográficas na economia e sugere um futuro econômico social estável e provavelmente próspero.

1.1. O MODELO GLOBAL E A POPULAÇÃO DO BRASIL.

Os dados segundo as fontes:

TABELA I

Dados censitários segundo as fontes

ANO	IBGE	UNESCO	(*)
1872	10.112	-	-
1890	14.334	-	-
1900	17.438	-	-
1920	30.636	27.404	10.549
1940	41.253	41.233	0.048
1950	51.976	52.872	1.723
1960	70.070'	71.513	2.059
1970	93.139	95.322	2.343

Fontes: IBGE - Anuário Estatístico - 1980

UNESCO - Boletim Demográfico - 1980.

(*) Diferença Percentual.

(') Valor obtido por Amostragem.

Devido a grande diferença entre os dados do IBGE e da UNESCO,

no ano de 1920, este dado não foi considerado num primeiro ajuste numérico do modelo global. Ainda o dado de 1960, por ser dado de amostragem, também não foi considerado. O modelo global ajustou os outros dados da Tabela I, com erro inferior a 0.9% em cada ponto (ver Tabela II). A interpolação para o ano de 1920 estima uma população de 26.115 milhões de habitantes, confirmando o dado da UNESCO. Para o ano de 1960, a interpolação estimou 69.003 milhões de habitantes confirmando o dado obtido por amostragem do IBGE.

Os dados previstos no modelo, entre os anos de 1872 e 1970, estão na Tabela III.

A extrapolação do modelo, prevê uma população máxima para o Brasil entre 363 milhões e 466 milhões de habitantes, a qual deverá ser atingida por volta de 2050, ficando estável após o começo do século XXI, como mostra a Tabela IV.

Resultados em milhões de habitantes

TABELA II

Ajuste Numérico de dados censitários

ANO	IBGE	Modelo Global	Erro %
1872	10.112	10.112	0.000
1890	14.334	14.334	0.000
1900	17.439	17.461	0.126
1940	41.253	40.940	0.758
1950	51.976	52.393	0.802
1970	93.139	93.010	0.138

TABELA III

Interpolação numérica de anos censitários

ANO	MODELO GLOBAL
1872	10.112
1890	14.334
1900	17.461
1920	26.115
1940	40.940
1950	52.393
1960	69.002
1970	93.010

TABELA IV

Extrapolação numérica da população brasileira

ANO	PREV. MÍNIMA	PREV. MÁXIMA
1975	108.027	109.700
1980	125.941	130.507
1985	146.618	156.000
1990	169.923	186.622
1995	195.361	222.246
2000	222.031	261.820
2005	248.675	303.171
2010	273.876	343.257
2015	296.346	378.946
2020	315.206	407.996
2050	362.947	465.695

2. AJUSTE DO MODELO GLOBAL À POPULAÇÃO DA INDIA

TABELA V

Dados censitários segundo a fonte

ANO	CENSO
1931	278.321
1941	318.135
1951	361.088
1961	439.235
1971	548.168
1981	683.810

Em milhões de habitantes

Fonte: Demographic Yearbook, United. New York, 1982.

Resultado Numérico

TABELA VI

Ajuste numérico de dados censitários

ANO	CENSO	MODELO GLOBAL	ERRO %
1931	278.321	278.321	0.000
1941	318.135	316.356	0.559
1951	361.088	363.880	0.773
1961	439.235	437.332	0.433
1971	548.168	548.605	0.080
1981	683.810	683.810	0.000

Os parâmetros da função $X = X(t)$ definidos pela solução do programa (45), através do método simplex são

$$X_j = 0.000 \quad , \quad X_{j+1} = 852.915,$$

$$\alpha_1 = -0.2044 \times 10^{-1} \quad , \quad \alpha_2 = 0.2083 \times 10^{-3} \quad \text{e} \quad \alpha_3 = -0.1296 \times 10^{-4}$$

TABELA VII

Extrapolação Numérica

ANO	PREVISÃO	PREV. MÍNIMA	PREV. MÁXIMA
1991	791.272	764.667	805.711
2001	839.448	787.456	873.323
2011	851.214	790.311	895.719
2021	852.796	790.467	900.203
2031	852.911	790.471	900.746

Observa-se que a população da Índia, segundo o modelo global, deve estabilizar-se por volta do ano 2011, se controles populacionais não forem adotados.

3. A LOGÍSTICA E O MODELO GLOBAL.

Já mostramos analiticamente, que o modelo logístico é um caso particular do modelo global, logo, é procedente observar como se comportam os resultados numéricos através dos algoritmos propostos no capítulo III, quando os dados vêm de uma equação logística. Seja

então a

TABELA VIII

Dados fictícios segundo uma logística

ANO	LOGÍSTICA
1900	10.000
1910	24.359
1920	58.526
1930	136.195
1940	295.786
1950	564.920
1960	896.608
1970	1177.755
1980	1349.842
1990	1435.095
2000	1472.916

A tabela VIII contém uma população fictícia, definida pela equação (7), com $a = 0.09$, $b = -0.6 \times 10^{-4}$, $X_0 = 10.$, $t_0 = 1900$, isto é

$$X(t) = \frac{0.9}{0.9006 \text{ Exp}(-0.09T) - 0.6 \times 10^{-3}} \quad (58)$$

onde $T = t - 1900$.

Teoricamente, espera-se que $X_j = 0$, $X_{j+1} = 1500$ e que os coeficientes do polinômio $p(t)$ na equação (30) seja $\alpha_1 = 0.09$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

O ajuste numérico desta população do modelo descrito por (30), como aplicação dos algoritmos propostos no capítulo III, têm como solução a

TABELA IX

Ajuste numérico de dados logísticos

ANO	LOGÍSTICA	MODELO GLOBAL	ERRO %
1900	10.000	10.000	0.000
1910	24.359	24.349	0.042
1920	58.526	58.503	0.039
1930	136.195	136.178	0.012
1940	295.736	295.833	0.016
1950	564.921	565.073	0.027
1960	896.609	896.761	0.017
1970	1177.755	1177.779	0.002
1980	1348.842	1349.779	0.005
1990	1435.095	1435.047	0.003
2000	1472.916	1472.933	0.001

Neste caso os parâmetros de $X = X(t)$ em (30), definidos pela solução do problema (31), são:

$$X_j = 0.001, \quad X_{j+1} = 1500.217, \quad X_0 = 10.000, \quad t_0 = 1900$$

$$\alpha_1 = -0.8993 \times 10^{-1}, \quad \alpha_2 = 0.2977 \times 10^{-5} \quad \text{e} \quad \alpha_3 = -0.3051 \times 10^{-7}.$$

O que demonstra serem estes parâmetros uma boa aproximação do esperado.

APENDICE

SUBROTINA PARA UM AJUSTE LOGISTICO NAO-LINEAR.

SUBROUTINE ALNL(D, M, N, TOL, EPS, ITMAX, VP, NP, SD, SVP, PL, IER)
 OBJETIVO: AJUSTAR UMA POPULACAO DE UMA ESPECIE ISOLADA A
 UM MODELO LOGISTICO NAO LINEAR - MODELO GLOBAL.
 PARAMETROS DE ENTRADA:
 D: MATRIZ REAL D(M,2) QUE DEVE CONTER NA PRIMEIRA COLUNA
 OS ANOS CENSITARIOS E NA SEGUNDA AS POPULACOES CORRESPON-
 DENTES EM ORDEM CRESCENTES DOS ANOS.
 M: NUMERO DE LINHAS DA MATRIZ D, M DEVE SER MENOR OU IGUAL
 A 100.
 N: GRAU DO POLINOMIO DA LOGISTICA NAO LINEAR, N DEVE SER
 MENOR OU IGUAL A DEZ.
 TOL: NUMERO PEQUENO DA ORDEM DE PRECISAO DA MAQUINA.
 EPS: TOLERANCIA NO CRITERIO DE PARADA NO METODO DE NELDER-
 HEAD. QUANDO A CONVERGENCIA OCORRE "EPS" E UMA ESTIMATIVA
 ENTRE (XJ, XJ1) E A SOLUCAO. SUGERE-SE TOMAR EPS=1.E-02.
 ITMAX: NUMERO MAXIMO DE AVALIACOES PERMITIDO AO METODO DE
 NELDER-HEAD PARA AVALIAR A FUNCAO ERRO. SUGERE-SE ITMAX=500
 VP: VETOR REAL DE NP POSICOES DIMENSIONADO NO PROGRAMA
 PRINCIPAL, ARMazenado POR COLUNA. VP DEVE CONTER OS NP
 ANOS NAO-CENSITARIOS PARA INTERPOLACAO OU EXTRAPOLACAO.
 NP: NUMERO DE LINHAS DO VETOR VP.
 PARAMETROS DE SAIDA.
 SD: MATRIZ REAL SD(M,4) ARMazenado POR COLUNA NA
 PRIMEIRA COLUNA SD CONTEM OS ANOS CENSITARIOS, NA SE-
 GUNDA COLUNA AS POPULACOES CENSITARIAS CORRESPONDENTES ,
 NA TERCEIRA COLUNA A INTERPOLACAO PREVISTA PELO MODELO
 GLOBAL E NA QUARTA COLUNA O ERRO PERCENTUAL TOMADO COMO
 BASE OS DADOS CENSITARIOS.
 SVP: MATRIZ REAL SVP(NP,4) DIMENSIONADO NO PROGRAMA
 PRINCIPAL ARMazenada POR COLUNA. SVP CONTEM NA PRIMEIRA
 COLUNA OS ANOS REQUERIDOS POR VP, NA SEGUNDA COLUNA A
 PREVISAO CORRESPONDENTE A ESTE ANO, DADA POR X=X(T),
 NA TERCEIRA COLUNA A PREVISAO MINIMA, NA QUARTA A PREVISAO
 MAXIMA . QUANDO O ANO CORRESPONDENTE NAO FOR INTERPOLADOR.
 PL: VETOR REAL DE N+2 POSICOES. PL CONTEM NESTA ORDEM, OS
 PARAMETROS XJ E XJ+1 E OS COEFICIENTES DE P=P(T) EM X=X(T)
 QUE MELHOR AJUSTA OS DADOS CENSITARIOS.
 IER: DECLARA AS CONDICAOES DE SAIDA NO METODO DE NELDER-HEAD.
 SE IER=1, ENTAO O NUMERO MAXIMO DE AVALIACOES (ITMAX) FOI
 ATINGIDO. IER=0 INDICA CONVERGENCIA.

DIMENSION A(100,10), B(100), IPIV(10), AUX(10), P(6), Z(10)
 DIMENSION XV(2), XE(2), EX(2), STEP(2), XT(100), X(10), Y(10)
 DIMENSION OS(2), OI(2), SD(100,4), SVP(100,4), D(100,2), PL(10)
 COMMON/DAD1/XP(100), TX(100)
 COMMON/DAD2/XLS, PER, XMI, XJ1F
 COMMON/DAD3/XJF, XJ1FMI, XJ1FMA
 EXTERNAL ERRO

```

EXTERNAL FMIN
EXTERNAL FMAX
EXTERNAL COVERI
EXTERNAL COVERS
DO 10 I=1, M
  XT(I)=D(I, 1)
  XP(I)=D(I, 2)
  TX(I)=KT(I)-XT(I)
  SD(I, 1)=XT(I)
  SD(I, 2)=XP(I)
10 CONTINUE
  X0=XP(1)
  XN=XP(M)
  T0=XT(1)
  TN=XT(M)
  XLS=2. *XLS
  XHI=1. E20
  XY(1)=0. 5*X0
  XY(2)=0. 5*(XLS+XN)
  NR=N+2
  STEP(1)=0. 1*XY(1)
  STEP(2)=0. 1*XY(2)
  CALL HELDER(CERRO, XY, FE, STEP, EPS, K, ITMAX, IER, P, M, N, TOL)
  XJF=XY(1)
  XJ1F=XY(2)
  DO 20 I=1, 2
    PL(I)=XY(I)
    KE(I)=XY(I)
    EK(I)=XY(I)
20 CONTINUE
  PER=FE*1. 10
  PER=1. +INT(PER*10.)
  PER=0. 1*PER
  CALL AJUSTE(M, N, XP, TX, X0, XE, B, A)
  CALL MINOR(B, B, K, M, N, IE, RES, TOL, IPIV, AUX)
  DO 25 J=3, NR
    PL(J)=K(J-2)
25 CONTINUE
  DO 30 I=1, M
    T=TX(I)
    CALL RPOP(N, X0, XE, N, T, NA)
    SD(I, 3)=NA
    SD(I, 4)=(ABS(XP(I)-X0))*100. /XP(I)
30 CONTINUE
  STEP(1)=0.
  STEP(2)=0. 5*(XN-XJ1F)
  CALL HELDER(FMIN, XE, FMI, STEP, EPS, K, ITMAX, I1, P, M, N, TOL)
  DO 50 I=1, 2
    CS(I)=XE(I)

```

```

50 CONTINUE
   XJ1FMI=XE(2)
   STEP(1)=0.
   STEP(2)=(XLS-XJ1F)*0.5
   CALL NELDER(FMAX, XY, FMA, STEP, EPS, K, ITMAX, 12, P, M, N, TOL)
   DO 70 I=1,2
   CI(I)=XY(I)
70 CONTINUE
   XJ1FMA=XY(2)
   STEP(1)=0.5*(X0-XJF)
   STEP(2)=0.
   CALL NELDER(COVERI, CI, FCI, STEP, EPS, K, ITMAX, L, P, M, N, TOL)
   CALL AJUSTE(M, N, XP, TX, X0, CI, B, A)
   CALL MINOR(A, B, Y, M, N, ICI, RES, TOL, IPIV, AUX)
   STEP(1)=-0.5*XJF
   STEP(2)=0.
   CALL NELDER(COVERS, CS, FCS, STEP, EPS, K, ITMAX, J, P, M, N, TOL)
   CALL AJUSTE(M, N, XP, TX, X0, CS, B, A)
   CALL MINOR(A, B, Z, M, N, ICS, RES, TOL, IPIV, AUX)
   DO 101 I=1, NP
   TT=VP(I)
   T=TT-T0
   SVP(I, 1)=TT
   IF(TE, GT, T0, AND, TT, LT, TN) GO TO 102
   CALL RPOP(N, X0, EX, W, T, XA)
   SVP(I, 2)=XA
   CALL RPOP(N, X0, CI, V, T, XA2)
   SVP(I, 3)=XA2
   CALL RPOP(N, X0, CS, Z, T, XA1)
   SVP(I, 4)=XA1
   GO TO 101
102 CALL RPOP(N, X0, EX, W, T, XA)
   SVP(I, 2)=XA
   SVP(I, 3)=1-1
   SVP(I, 4)=1-1
101 CONTINUE
   RETURN
   END

```

```

C
C
FUNCTION ERRO(XY, M, N, TOL)
DIMENSION G(5), IPIV(10), XY(2), X(10)
DIMENSION A(100, 10), B(100), AUX(10)
COMMON/DAD1/XP(100), TX(100)
COMMON/DAD2/XLS, PER, XHI, XJ1F
COMMON/DAD3/XJF, XJ1FMI, XJ1FMA
X0=XP(1)
YN=XP(M)
XJ=XY(1)

```

```

XJ1=XJ(2)
G(1)=XJ-X0+1.
G(2)=-XJ
G(3)=XJ1-XLS
G(4)=XN+1.-XJ1
CALL AJUST2(M,N,XP, TX, X0, XY, B, A)
CALL MINOR(A, B, X, M, N, IP, RES, TOL, IPIV, AUX)
SE=0
DO 40 I=1, M
  T=TX(I)
  CALL RPOP(N, X0, XY, X, T, XA)
  SE=SE+((ABS(XP(I)-XA))*100./XP(I)
40 CONTINUE
SGI=0.
DO 50 I=1, 4
  IF(G(I).LT.0.) G(I)=0.
  SGI=SGI+G(I)**2
50 CONTINUE
FE=SE+XMI*SGI
ERRO=FE
RETURN
END

```

40

50

C
C

```

FUNCTION FMIN(XE, M, N, TOL)
DIMENSION XE(2), G(5), X(100), IPIV(10)
DIMENSION A(100, 100), B(100), AUX(100)
COMMON/DAD1/XP(100), TX(100)
COMMON/DAD2/XLS, PER, XMI, XJ1F
COMMON/DAD3/XJF, XJ1FMI, XJ1FMA
XB=XP(1)
XN=XP(M)
XJ=XE(1)
XJ1=XE(2)
G(1)=XJ-X0+1.
G(2)=-XJ
G(3)=XJ1-XJ1F
G(4)=XN+1.-XJ1
CALL AJUST2(M, N, XP, TX, X0, XE, B, A)
CALL MINOR(A, B, X, M, N, IP, RES, TOL, IPIV, AUX)
SE=0.
DO 40 I=1, M
  T=TX(I)
  CALL RPOP(N, X0, XE, X, T, XA)
  SE=SE+((ABS(XP(I)-XA))*100./XP(I)
40 CONTINUE
G(5)=SE-PER
SGI=0.
DO 50 I=1, 5

```

40

```

C
C
IF(G(I).LT.0.) G(I)=0.
SGI=SGI+G(I)**2
50 CONTINUE
FMI=XJ1-XJF+XMI*SGI
FMIN=FMI
RETURN
END

```

```

C
C
FUNCTION FMAX(XY, M, N, TOL)
DIMENSION XY(2), G(5), X(10), IPIV(10)
DIMENSION A(100,10), B(100), AUX(10)
COMMON/DAD1/XP(100), TX(100)
COMMON/DAD2/XLS, PER, XMI, XJ1F
COMMON/DAD3/XJF, XJ1FMI, XJ1FMA
X0=XP(1)
XN=XP(M)
XJ=XY(1)
XJ1=XY(2)
G(1)=XJ-X0+1.
G(2)=-XJ
G(3)=XJ1-XLS
G(4)=XJ1F-XJ1
CALL AJUST2(M, N, XP, TX, X0, XY, B, A)
CALL MINOR(A, B, X, M, N, IP, RES, TOL, IPIV, AUX)
SE=0.
DO 40 I=1, M
T=TX(I)
CALL RPOP(N, X0, XY, X, T, XA)
SE=SE+((ABS(XP(I)-XA))*100.)/XP(I)
40 CONTINUE
G(5)=SE-PER
SGI=0.
DO 50 I=1, 5
IF(G(I).LT.0.) G(I)=0.
SGI=SGI+G(I)**2
50 CONTINUE
FMA=XJF-XJ1+XMI*SGI
FMAX=FMA
RETURN
END

```

```

C
C
FUNCTION COVERI(CI, M, N, TOL)
DIMENSION CI(2), G(5), X(10), IPIV(10)
DIMENSION A(100,10), B(100), AUX(10)
COMMON/DAD1/XP(100), TX(100)
COMMON/DAD2/XLS, PER, XMI, XJ1F
COMMON/DAD3/XJF, XJ1FMI, XJ1FMA

```

```

C
C
X0=XP(1)
XN=XP(M)
XJ=CI(1)
XJ1=CI(2)
G(1)=XJF-XJ
G(2)=XJ-X0+1.
G(3)=XJ1-XLS
G(4)=XN+1. -XJ1
CALL AJUST2(M, N, XP, TX, X0, CI, B, A)
CALL MINOR(A, B, X, M, N, IP, RES, TOL, IPIV, AUX)
SE=0.
DO 40 I=1, M
T=TX(I)
CALL RPOP(N, X0, CI, X, T, XA)
SE=SE+((ABS(XP(I)-XA))*100.)/XP(I)
40 CONTINUE
G(5)=SE-PER
SGI=0.
DO 50 I=1, 5
IF(G(I).LT.0.) G(I)=0.
SGI=SGI+G(I)**2
50 CONTINUE
FCI=XJ1FMA-XJ+XMI*SGI
COVERI=FCI
RETURN
END

```

```

C
C
FUNCTION COVERS(CS, M, N, TOL)
DIMENSION CS(2), G(5), X(10), IPIV(10)
DIMENSION A(100, 10), B(100), AUX(10)
COMMON/DAD1/XP(100), TX(100)
COMMON/DAD2/XLS, PER, XMI, XJ1F
COMMON/DAD3/XJF, XJ1FMI, XJ1FMA
X0=XP(1)
XN=XP(M)
XJ=CS(1)
XJ1=CS(2)
G(1)=-XJ
G(2)=XJ-XJF
G(3)=XJ1-XLS
G(4)=XN+1. -XJ1
CALL AJUST2(M, N, XP, TX, X0, CS, B, A)
CALL MINOR(A, B, X, M, N, IP, RES, TOL, IPIV, AUX)
SE=0.
DO 40 I=1, M
T=TX(I)
CALL RPOP(N, X0, CS, X, T, XA)
SE=SE+((ABS(XP(I)-XA))*100.)/XP(I)

```

C

```

40 CONTINUE
   G(5)=SE-PER
   SGI=0.
   DO 50 I=1,5
   IF(G(I).LT.0.) G(I)=0.
   SGI=SGI+G(I)**2
50 CONTINUE
   FCS=XJ-KJ1FHI+XMI*SGI
   COVERS=FCS
   RETURN
   END

```

C
C

10

```

SUBROUTINE RPOP(N, X0, XY, X, T, XA)
DIMENSION XC(N), XY(2)
XJ=XY(1)
KJ1=XY(2)
P=1.
S=0.
DO 10 I=1, N
P=P*T
S=S+P*X(I)
P1=XJ1-X0
P2=X0-XJ
X1=EXP(S)
X2=XJ1*P2
X3=XJ*P1
X4=X0*X1+X2
X5=P1*X1+P2
XA=X4/X5
RETURN
END

```

C
C10
20

```

SUBROUTINE RJUSTE(M, N, XD, XT, X0, XY, B, A)
DIMENSION A(M, N), B(M), XD(M), XT(M), XY(2)
XJ=XY(1)
KJ1=XY(2)
DO 20 J=1, N
DO 10 I=1, M
XC=XD(I)
T=XT(I)
A(I, J)=T**FLOOR(T)
IF(J.EQ.N) B(I)=S(XC, X0, XJ, XJ1)
CONTINUE
CONTINUE
RETURN
END
FUNCTION S(X, Y, N, Z)

```

```

A1=Z-X
A2=Y-U
A3=X-U
A4=Z-Y
A5=A1*A2
A6=A3*A4
A7=A5/A6
S=ALOG(A7)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE AJUST2(M, N, XD, XT, X0, XY, B, A)
DIMENSION A(M, N), B(M), XD(M), XT(M), XY(2)
XJ=XY(1)
XJ1=XY(2)
DO 20 J=1, N
DO 10 I=1, M
XC=XD(I)
T=XT(I)
A(I, J)=T**FLOAT(J)
IF(J.EQ.N) B(I)=SS(XC, X0, XJ, XJ1)
CONTINUE
CONTINUE
RETURN
END
FUNCTION SS(X, Y, M, Z)
A1=Z-X
A2=Y-U
A3=X-U
A4=Z-Y
A5=A1*A2
A6=A3*A4
A7=A5/A6
SS=ALOG(ABS(A7))
RETURN
END

```

LABORATORIO DE MATEMATICA APLICADA - UNICAMP -

```

SUBROUTINE NELDER(FUN, X, F, STEP, EPS, KON, ITMAX, IER, P
1 , N, N, TOL)

```

```

PARA MINIMIZAR UMA FUNCAO DE "N" VARIAVEIS SEM RESTRICOES
E SEM DERIVADAS. "N" DEVE SER <=50.

```

```

PARAMETROS:

```

```

(FUN, N, X, F, STEP, EPS, KON, ITMAX, IER, P)

```

```

FUN: E' A FUNCAO QUE CALCULA O VALOR DE "F". DEVE SER DECLARA-
DO "EXTERNAL" NO PROGRAMA PRINCIPAL. SEU UNICO ARGUMEN-

```

```

TO E' "X", O PONTO ONDE O VALOR DE "F" VAI SER CALCULADO

```

```

X: AO ENTRAR NA SUBROUTINA NELDER E' O VETOR INICIAL FOR-
NECIDO. NA SAIDA CONTEM A MELHOR APROXIMACAO A SOLUCAO OBTI-
DA NO PROCESSO.

```

```

F: CONTERA O VALOR DA FUNCAO OBJETIVO.

```

```

STEP(I): E' A VARIACAO INICIAL NA COORDENADA "I" DE X.

```

```

OS N PRIMEIROS PONTOS QUE A SUBROUTINA AVALIARA SERAO

```

```

"X+STEP(I)*E(I)", ONDE E(I) E' O I-ESIMO VETOR DA BASE

```

```

CANONICA. E' ACONSELHAVEL COLOCAR STEP(I)=(1/10)*(A DIFEREN-

```

```

CA ESTIMADA ENTRE A COORDENADA I DE X E A COORDENADA I DA

```

```

SOLUCAO) SE O PONTO INICIAL PARECE ESTAR LONGE DA SOLUCAO

```

```

E' RAZOAVEL DAR VALORES GRANDES PARA "STEP".

```

```

DEVE SER DIMENSIONADO COM PELO MENOS "N" POSICOES NO PRO-

```

```

GRAMA PRINCIPAL.

```

```

EPS: TOLERANCIA NO CRITERIO DE PARADA. QUANDO A CONVERGENCIA OCO-

```

```

RE "EPS" E' UMA ESTIMATIVA DA DISTANCIA ENTRE "X" E A SOLUCAO.

```

```

KON: NUMERO DE AVALIACOES.

```

```

ITMAX: NUMERO MAXIMO DE AVALIACOES PERMITIDO

```

```

IER: DECLARA AS CONDICICOES DE SAIDA

```

```

SE IER=0, INDICA CONVERGENCIA.

```

```

SE IER=1, O NUMERO MAXIMO DE AVALIACOES DA FUN-

```

```

CAO FOI USADO.

```

```

P: VETOR AUXILIAR QUE DEVE SER DIMENSIONADO NO PROGRAMA

```

```

PRINCIPAL COM PELO MENOS N*(N+1) POSICOES.

```

```

DIMENSION X(2), STEP(2), P(2, 1), XL(50), XH(50)
*, XR(50), XB(50), XE(50), XHL(50), XC(50), EFE(51)

```

```

N=2

```

```

F=1.530

```

```

N1=N+1

```

```

ALFA=1.

```

```

BETA=0.5

```

```

GAMA=2.

```

```

KON=0

```

```

ARRMAR O SIMPLEX INICIAL

```

```

DO 1 I=1, N

```

```

P(I, N1)=X(I)

```

```

DO 2 J=1, N

```

```

C
DO 3 I=1,N
3 P(I, J)=X(I)
2 P(J, J)=P(J, J)+STEP(J)
C AVALIAR A FUNCAO NOS VERTICES DO SIMPLEX INICIAL
DO 4 I=1, N1
KON=KON+1
IF(KON. GE. ITMAX)GOTO36
EFE(I)=FUN(P(I, I), M, N, TOL)
IF(EFE(I) GT. F)GOTO4
F=EFE(I)
DO 37 KI=1, N
37 X(KI)=P(KI, I)
4 CONTINUE
C CALCULAR XL E XH
100 FMENOR=1. E30
FMAIOR=-1. E30
DO 5 I=1, N1
IF(EFE(I). GT. FMENOR)GO TO 6
IL=I
FXL=EFE(I)
FMENOR=FXL
DO 7 J=1, N
7 XL(J)=P(J, IL)
6 IF(EFE(I). LT. FMAIOR)GO TO 5
IH=I
FXH=EFE(I)
FMAIOR=FXH
DO 8 J=1, N
8 XH(J)=P(J, IH)
5 CONTINUE
C TESTAR CRITERIO DE PARADA
A1=0.
DO 9 J=1, N
DO 9 I=1, N
9 A1=AMAX1(A1, ABS(P(I, J)-P(I, N1)))
IF(A1. GT. EPS)GO TO10
IER=0
RETURN
10 IF(KON. LT. ITMAX)GO TO 12
36 IER=1
RETURN
C CALCULAR O CENTROIDE
12 DO 13 I=1, N
15 XB(I)=0
DO 14 J=1, N1
IF(J. EQ. IH)GO TO 14
DO 15 I=1, N
16 XB(I)=XB(I)+P(I, J)
14 CONTINUE

```

```

C
DO 17 I=1,N
17 XB(I)=XB(I)/FLORAT(N)
C
CALCULAR XR
DO 18 I=1,N
16 XR(I)=XB(I)+ALFA*(CB(I)-XB(I))
FXR=FUNC(XR, M, N, TOL)
IF(FXR.GT.F)GOTO39
F=FXR
DO 38 KI=1,N
38 X(KI)=XR(KI)
39 KON=KON+1
IF(KON.GE.ITMAX)GOTO36
IF(FXL.LE.FXR)GO TO 19
C
CALCULAR XE
DO 20 I=1,N
20 XE(I)=XB(I)+GAMA*(XR(I)-XB(I))
FXE=FUNC(XE, M, N, TOL)
IF(FXE.GT.F)GOTO40
F=FXE
DO 41 KI=1,N
41 X(KI)=XR(KI)
40 KON=KON+1
IF(KON.GE.ITMAX)GOTO36
IF(FXR.LE.FXE)GO TO 21
DO 22 I=1,N
22 P(I,1H)=XE(I)
EFE(1H)=FXE
GO TO 100
21 DO 23 I=1,N
23 P(I,1H)=XR(I)
EFE(1H)=FXR
GO TO 100
19 AM=-L E30
DO 24 J=1,N1
IF(J.EQ.1H)GO TO 24
AM=AMANI(AM,EFE(J))
24 CONTINUE
IF(AM.LT.FXR)GO TO25
DO 26 I=1,N
26 P(I,1H)=XR(I)
EFE(1H)=FXR
GO TO 100
C
CALCULAR XHL
25 IF(FXH.LE.FXR)GO TO27
DO 28 I=1,N
28 XHL(I)=XR(I)
FXHL=FXR
GO TO 29
27 DO 30 I=1,N

```

```

C
30 XHL(I)=XH(I)
   FXHL=FXH
C   CONTRACAO
29 DO 31 I=1, N
31 XC(I)=XB(I)+BETA*(XHL(I)-XB(I))
   FXC=FUN(XC, M, N, TOL)
   IF(FXC. GT. F)GOTO42
   F=FXC
   DO 43 KI=1, N
43 X(KI)=XC(KI)
42 KON=KON+1
   IF(KON. GE. ITMAX)GOTO36
   IF(FXC. GT. FXHL)GO TO 32
   DO 33 I=1, N
33 P(I, IH)=XC(I)
   EFE(IH)=FXC
   GO TO 100
32 DO 34 J=1, N1
   IF(J. EQ. IL)GO TO 34
   DO 35 I=1, N
35 P(I, J)=P(I, J)+0.5*(XL(I)-P(I, J))
   EFE(J)=FUN(P(I, J), M, N, TOL)
   IF(EFE(J). GT. F)GOTO44
   F=EFE(J)
   DO 45 KI=1, N
45 X(KI)=P(KI, J)
44 KON=KON+1
   IF(KON. GE. ITMAX)GOTO36
34 CONTINUE
   GO TO 100
END

```

LABORATORIO DE MATEMATICA APLICADA - UNICAMP -

```

SUBROUTINE MINOR(A, B, X, M, N, P, RES2, TOL, IPIV, AUX)
OBJETIVO: DADAS A MATRIZ A(MXN) E A MATRIZ B(NXNCB),
ARMAZENADAS POR COLUNAS (VER DECLARACAO DIMENSION). MINOR CALCULA
 $X=A(-)+B$ , ONDE A(+) E A PSEUDOINVERSA DE MOORE-PENROSE DE A.
VER A DOCUMENTACAO DE MINOR PARA CASOS PARTICULARES DESTA
SITUACAO.
PARAMETROS.
A (ENTRADA): UM VETOR DE MXN POSICOES QUE DEVE CONTER A
MATRIZ A, ARMAZENADA POR COLUNAS. E DESTRUIDA NO PROCESSO.
M: NUMERO DE LINHAS DE A
N: NUMERO DE COLUNAS DE A
B (ENTRADA): UM VETOR DE MXNCB POSICOES QUE DEVE CONTER A
MATRIZ B ARMAZENADA POR COLUNAS. DESTRUIDA NO PROCESSO.
NCB: NUMERO DE COLUNAS DE B
X (SAIDA): MATRIZ A(+) * B, CALCULADA POR MINOR (NXNCB POSI-
COES, ARMAZENADA POR COLUNAS)
P (SAIDA): NUMERO INTEIRO, POSTO DE A.
RES2 (SAIDA): VETOR DE NCB POSICOES QUE CONTEM, EXCETO ERROS
DE ARREDONDAMENTO, OS QUADRADOS DOS RESIDUOS DE CADA UM DOS
NCB PROBLEMAS DE QUADRADOS MINIMOS RESOLVIDOS POR MINOR
TOL (ENTRADA): NUMERO PEQUENO, DA ORDEM DA PRECISAO DA
MAQUINA, QUE SERVE PARA DECLARAR SE UMA COLUNA DE
A ESTA NO SUBESPACO GERADO POR OUTRAS
IPIV: VETOR AUXILIAR INTEIRO DE PELO MENOS N POSICOES
AUX: VETOR AUXILIAR REAL DE PELO MENOS N*NCB POSICOES
METODO: NA CLASSIFICACAO DE N. SHINOZAKI, M. SIBUYA E K. TANABE
("NUMERICAL ALGORITHMS FOR THE MOORE-PENROSE INVERSE OF A MATRIX
DIRECT METHODS", ANNALS OF THE INST. OF STAT. MATH., VOL 24,
NRD. 1, 1972) TRATA-SE DE UM METODO DO TIPO 1.2.6.
PROGRAMADO POR J. M. MARTINEZ, FEVEREIRO DE 1982.
DIMENSION A(100,10), B(100,1), IPIV(10), AUX(10,1), X(10,1)
1  , RES2(1)
INTEGER P
NCB=1
MN=MIN0(M, N)
DO 10 J=1, N
10  IPIV(J)=0
DO 100 J=1, MN
J1=J+1
C  BUSCA DA MELHOR COLUNA PARA PIVOTAR
SENHAK=0.
DO 50 K=J, N
Z=0.
DO 20 I=J, M
20  Z=Z+A(I, K)**2
Z2=Z
Z2=SQRT(Z2)
IF (J. EQ. 1) GOTO 40
DO 30 I=1, J-1

```

```

C
30      Z=Z+B(I, K)**2
      Z1=SQRT(Z)
      IF(Z1. LT. 1. E-20)GOTO50
      SEN0=Z2/Z1
      IF(SEN0. LT. SENMAX)GOTO50
      KMAX=K
      SENMAX=SEN0
      RNDMAX=Z3
      RND=Z2
      GOTO50
40      IF(Z2. LT. 1. E-20)GOTO50
      IF(Z2. LT. SENMAX)GOTO50
      KMAX=K
      RNDMAX=Z
      RND=Z2
      SENMAX=Z2
50      CONTINUE
      IF(SENMAX. GE. TOL)GOTO60
      P=J-1
      GOTO170
C      PERMUTAR COLUNAS J E KMAX
60      IF(KMAX. EQ. J)GOTO80
      LL=IPIV(KMAX)
      IPIV(KMAX)=IPIV(J)
      IPIV(J)=LL
      DO 70 I=1, M
      Z=A(I, KMAX)
      A(I, KMAX)=A(I, J)
      A(I, J)=Z
70      C      CALCULA A TRANSFORMACAO DE HOUSEHOLDER
      IF(J. EQ. N)GOTO100
      IF(A(J, J). LT. 0)RND=-RND
      HTVP=(A(J, J)+RND+RNDMAX)*0.5
      A(J, J)=A(J, J)+RND
      C      APLICAR A TRANSFORMACAO AS OUTRAS COLUNAS
      IF(J. EQ. N)GOTO120
      DO 110 K=J+1, N
      HTVP=0
      DO 90 I=J, M
      HTVP=HTVP+A(I, J)*A(I, K)
      HTVP=HTVP/(2. *HTVP)
      DO 100 I=J, N
      A(I, K)=A(I, K)-HTVP*A(I, J)
100      CONTINUE
      C      APLICAR A TRANSFORMACAO B E
120      DO 130 K=1, NCB
      HTVP=0
      DO 110 I=J, M
130      HTVP=HTVP+A(I, J)*B(I, K)

```

```

NTVP=NTVP/(2.*NTV)
DO 140 I=J,N
140 B(CI,K)=B(CI,K)-NTVP*A(CI,J)
150 CONTINUE
A(CJ,J)=-RND
160 CONTINUE
P=MN
170 DO 180 K=1,NCB
180 RES2(K)=0.
IF(P.EQ. 8)GOTO190
DO 185 K=1,NCB
DO 185 I=P+1,N
185 RES2(K)=RES2(K)+B(CI,K)**2
C RESOLVE O SISTEMA TRIANGULAR
190 IF(P.EQ. 8)GOTO430
DO 200 K=1,NCB
AUX(K,K)=B(K,K)/A(K,P)
IF(P.EQ. 1)GOTO220
DO 210 I=P-1,1,-1
AC=0.
DO 205 J=I+1,P
200 AC=AC+A(CI,J)*AUX(J,K)
210 AUX(I,K)=(B(CI,K)-AC)/A(CI,I)
220 CONTINUE
IF(P.EQ. 8)GOTO410
DO 215 K=1,NCB
DO 220 I=1,P
240 B(CI,I)=AUX(K,I)
C RESOLVER OS OUTROS SISTEMAS TRIANGULARES(ACHAR G)
C PARA INFINITAS SOLUCOES DE QUADRADOS MINIMOS E TEMOS DE ACHAR
C A DE NORMA MINIMA
DO 235 J=P+1,N
AUX(J,1)=A(K,J)/A(K,P)
IF(P.EQ. 1)GOTO270
DO 240 I=P-1,1,-1
AC=0.
DO 250 L=I+1,P
250 AC=AC+A(CI,L)*AUX(L,1)
260 AUX(I,1)=(A(CI,J)-AC)/A(CI,I)
270 DO 280 I=1,P
280 A(CI,1)=AUX(I,1)
290 CONTINUE
C ORTONORMALIZAR AS LINHAS DE (C,D) FAZENDO AS MESMAS OPERACOES EM B
DO 310 J=1,P
DO 310 I=1,P
300 A(CI,J)=0.
310 A(CJ,J)=1.
DO 320 I=1,P
Z=0.

```

C

```

DO 320 J=1,N
320 T=Z+A(I,J)*E
Z=1./SQRT(Z)
DO 330 J=1,N
330 B(I,J)=A(I,J)*Z
DO 340 K=1,NCB
340 B(I,K)=B(I,K)*Z
IF(I.EQ.P)GOTO390
DO 350 L=I+1,P
PE=B.
DO 350 J=1,N
PE=PE+A(I,J)*A(L,J)
DO 360 J=1,N
360 A(L,J)=A(L,J)-PE*A(I,J)
DO 370 K=1,NCB
370 B(L,K)=B(L,K)-PE*B(I,K)
380 CONTINUE
390 CONTINUE
C MULTIPLICAR B PELA TRANSPOSTA DA ORTONORMALIZADA
DO 400 K=1,NCB
DO 400 J=1,N
AUX(J,K)=B.
DO 400 I=1,P
400 AUX(J,K)=AUX(J,K)+A(I,J)*B(I,K)
C DESPERMUTAR PARA QUE A SOLUCAO FINAL FIQUE EM X
410 DO 420 K=1,NCB
DO 420 I=1,N
420 X(I,F(K))=AUX(I,K)
RETURN
430 DO 440 K=1,NCB
DO 440 I=1,N
440 X(I,F)=B.
RETURN
END

```

BIBLIOGRAFIA

- [1] BELTRÃO, PEDRO, C.: Demografia, Ciência da População, Análise e Teoria, Editora Suzina. Porto Alegre, 1972.
- [2] BOYCE, WILLIAM, E. e DIPRIMA, R.C.: Equações Diferenciais e Problemas de Valores de Contorno, Editora Guanabara Dois. Rio de Janeiro, 1979.
- [3] BRAUN, M.: Equações Diferenciais e suas Aplicações, Editora Campus. Rio de Janeiro, 1979.
- [4] CELADE: Boletim Demográfico. Santiago do Chile, 1981.
- [5] ENGEL, ALEJANDRO B.: Elementos de Biomatemática, OEA. Washington, D.C., 1978.
- [6] FIGUEIREDO, DJAIRO G.: Equações Diferenciais Aplicadas, 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Poços de Caldas, 1979.
- [7] FORSYTHE, G.E.: Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice-Hall. Woods Cliffs, 1977.

- [8] Laboratório de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, Subrotinas FORTRAN MINOR e MFO2A Implementadas por J.M. Martinez. Campinas, 1981.
- [9] LOKTA, A.J.: Elements of Mathematical Biology, Dover Publications. New York, 1956.
- [10] LUENBERGER, D.G.: Introduction Linear and Non Linear Programming, Addison Wesley. New York, 1973.
- [11] MURRAY, W.: Numerical Methods for Unconstrained Optimization, London Academic, London, 1972.
- [12] NELDER, J.A. and MEAD, R.: A Simplex Method for Function Minimization, Computer Journal, 7. 1965.