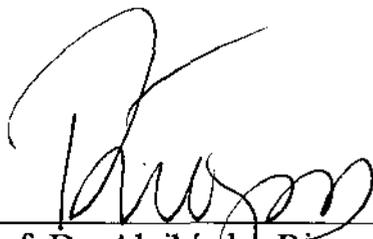


ASPECTOS MATEMÁTICOS E FÍSICOS
DA TEORIA DE CHERN-SIMONS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e aprovada pelo Sr. Marcos Benevenuto Jardim e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 10 de Junho de 1996



Prof. Dr. Alcibíades Rigas

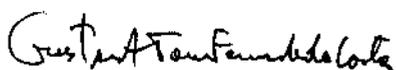
Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE em Matemática.

Tese defendida e aprovada em 10 de junho de 1996

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). MÁRCIO ANTONIO DE FARIA ROSA



Prof (a). Dr (a). GUSTAVO DA COSTA



Prof (a). Dr (a). ALCIBÍADES RIGAS

Aspectos Matemáticos e Físicos da Teoria de Chern-Simons

Marcos Benevenuto Jardim

27 de Maio de 1996

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, sem os quais nada disso seria possível;

À Anelyssa, pelo apoio e a motivação indispensáveis;

Aos professores Rigas, Renato e Franco, que me ensinaram tudo o que eu sei de Matemática;

Aos meus amigos, pela preciosa amizade que me dedicaram todos esses anos;

Ao CNPq, que financiou este trabalho.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é analisar a aplicação de conceitos geométricos e topológicos à teoria quântica de campos dentro do contexto da teoria de Chern-Simons. Podemos dividi-lo em duas partes.

Na primeira parte, revisamos brevemente os conceitos de fibrados com conexão e classes características para definirmos a classe característica secundária de Chern & Simons. Demonstramos que esta é um invariante da estrutura conforme de variedades riemannianas e representa uma obstrução topológica à existência de imersões conformes globais em espaços euclidianos.

A segunda parte é dedicada à interação entre geometria, topologia e física que surgiu com os trabalhos de E. Witten no período 1988-90. Começamos por analisar a abordagem de Witten ao polinômio de Jones através de uma teoria quântica de campos baseada apenas no termo de Chern-Simons. Ainda, esta abordagem permite a generalização do polinômio de Jones para 3-variedades compactas orientáveis. Demonstra-se que esta é uma teoria topológica, ou seja, as quantidades fisicamente relevantes são independentes da escolha de uma métrica.

Prosseguimos por observar que a ação de Chern-Simons permite a formulação da relatividade geral em dimensão 2+1 como uma teoria de calibre, possibilitando a quantização do campo gravitacional e transição de topologia do espaço.

Finalmente, analisamos o trabalho de Deser, Jackiw & Templeton no qual o termo de Chern-Simons foi primeiro introduzido em teoria de campos. A introdução deste termo na lagrangeana de Yang-Mills provoca o aparecimento de bósons vetoriais massivos e estatística fracionária, entre outros efeitos.

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Classes características	8
2.1	Fibrado e conexão universais	8
2.2	Homomorfismo de Weil	12
2.3	Classes características secundárias	15
3	Aplicações à geometria riemanniana	21
3.1	Invariância conforme e projetiva	21
3.2	Teorema de imersão conforme	23
4	Polinômio de Jones segundo Witten	33
4.1	Nós e seus invariantes	33
4.2	Polinômio de Jones via TQC	36
4.3	Um exemplo concreto	45
5	Aplicação à teoria de campos.	49
5.1	Chern-Simons como teoria topológica	49
5.2	Relatividade geral em dimensão 2+1	56
5.3	Teoria de calibre massiva	67
	Bibliografia	79

Capítulo 1

Introdução

É bem conhecido que a geometria possui um papel bastante importante em algumas teorias físicas, a saber a mecânica clássica e a relatividade geral (geometria riemanniana). Há apenas cerca vinte anos atrás, entretanto, se começou a perceber que também a *topologia* teria um papel igualmente fundamental, especialmente no que concerne à teoria quântica.

Tal conceito surgiu do encontro entre a teoria de calibre, do lado físico, com a teoria de fibrados, do lado matemático. A relação entre estes dois tópicos já era conhecida desde 1963, mas foi em 1975 que tal fato rendeu bons frutos. Neste ano, Belavin, Polyakov, Schwarz e Tyupkin [11] utilizaram-se de métodos topológicos e geométricos para encontrar uma solução exata (não perturbativa) da equação de campo de Yang-Mills. Deste trabalho surgiram não apenas uma série de outros artigos procurando generalizar a solução ali obtida, que culminaram em [6], mas também toda uma nova área de pesquisa em física matemática.

A teoria de calibre iniciou-se em 1918 com uma tentativa de Hermann Weyl em unificar o eletromagnetismo com a relatividade geral. A idéia original de inserir-se um parâmetro multiplicativo no campo unificado (por isso o nome calibre) provou-se errônea mais tarde. Foi no final da década de 20, após a formulação da mecânica quântica por Schrödinger em 1926, que

o próprio Weyl ([63], p.100) percebeu que a simetria das equações envolvidas apresentava uma liberdade de *fase* e não de *escala*; a unificação dava-se entre o eletromagnetismo e a matéria. Heisenberg & Pauli [31] procederam a quantização desta teoria. Em 1954, procurando um modelo clássico para a interação nuclear forte entre prótons e nêutrons, Yang e Mills [70] chegaram a uma generalização da teoria de Weyl e Heisenberg-Pauli para o campo eletromagnético: enquanto a última chegava a uma equação cujo grupo de simetria era abeliano ($U(1)$), a primeira introduzia um grupo de simetria não-abeliano ($SU(2)$). A formulação de Feynman da mecânica quântica via integrais de caminho, que mais tarde se tornou a base da teoria quântica de campos, surgiu em 1948 [24].

Do ponto de vista clássico, a teoria de fibrados e conexões já se fazia presente na teoria de Kaluza-Klein para unificação do eletromagnetismo com a gravitação. Um artigo de Einstein & Bergmann de 1938 [22] apresenta a teoria de Kaluza em um formato totalmente equivalente ao que mais tarde se tornaria a teoria de fibrados com conexão, que então nascia com o trabalho de Cartan, Ehresmann e Koszul.

Do lado matemático, a teoria de fibrados também era conhecida desde cedo. Generalização da geometria riemanniana utilizada por Einstein para modelar o campo gravitacional, foi a fonte para a solução de uma série de problemas em geometria e topologia nas décadas de 1930 e 1940. O livro de Steenrod [61] de 1953 e de Chern [15] de 1951 mostra que esta teoria já se encontrava em estágio bastante avançado tanto do ponto de vista topológico como do ponto de vista geométrico (respectivamente) antes mesmo do trabalho de Yang & Mills.

O encontro destas duas correntes deu-se na década de 70, quando físicos começaram a perceber a importância de técnicas e métodos topológicos para as suas teorias. Enquanto estes encontraram uma grande quantidade de trabalhos em topologia produzidos desde o início do século, matemáticos foram forçados a penetrar nas nem sempre claras e bem definidas teorias

físicas, especialmente a teoria quântica de campos. Uma série de teorias híbridas vêm surgindo e se desenvolvendo desde então: teoria quântica de campos topológica, grupos quânticos, cohomologia quântica etc.

A incessante interação se dá nos dois sentidos: assim como abordagens físicas estimularam o avanço matemático, teorias matemáticas prontas foram melhor entendidas e até generalizadas por argumentos físicos. Atiyah [5] aponta duas lições a serem extraídas de todo este processo. Primeiro, apesar da falta de uma fundamentação rigorosa para a teoria quântica de campos, seus sucessivos sucessos em reobter resultados matemáticos bem conhecidos aumentam bastante a sua credibilidade. Segundo, a matemática deve incorporar os métodos globais não-lineares introduzidos pela teoria quântica de campos ao seu tradicional arsenal de técnicas lineares.

Talvez o melhor exemplo dos resultados obtidos a partir deste encontro seja a teoria de Donaldson [21]. Aplicando a teoria de calibre à topologia de variedades 4-dimensionais, Donaldson ampliou resultados matemáticos clássicos sobre a existência de estruturas diferenciáveis associadas à variedades topológicas. Do outro lado, Witten utilizou-se de métodos e técnicas de teoria quântica de campos para reobter dentro deste contexto uma série de invariantes topológicos em dimensões 2, 3 e 4.

O presente trabalho, que lida com aplicações de conceitos geométricos na teoria de campos de calibre, tem por objetivo principal revisar os trabalhos mais importantes sobre a teoria de Chern-Simons e suas aplicações em física teórica, servindo de introdução ao assunto. Ele é dividido em duas partes: a primeira ocupa-se com os aspectos matemáticos da teoria de Chern-Simons de classes características e classes características secundárias e inclui os capítulos 2 e 3; a segunda lida com os aspectos físicos e inclui os capítulos 4 e 5.

No segundo capítulo vamos apresentar o aparato matemático a ser utilizado no restante do trabalho, seguindo o artigo de Shiing-Shen Chern e James Simons [16]. O teorema 2.3 é especialmente interessante para as aplicações em física que se seguirão. O capítulo seguinte busca aplicar a teoria desenvol-

vida à geometria riemanniana, demonstrando a existência de invariantes da estrutura conforme de variedades riemannianas e um teorema de obstrução à existência de imersão conforme em espaços euclidianos, de acordo com a proposta original de Chern & Simons. Apresentamos ainda a conexão com o invariante espectral η de Atiyah-Patodi-Singer.

O passo seguinte é estudar a abordagem de Witten ao polinômio de Jones elaborada em [67]. Os polinômios de Jones são invariantes da teoria de nós e foram originalmente definidos em [35] através do estudo de representações das álgebras de von Neumann. No trabalho aqui apresentado, Witten demonstra que as funções de correlação de certos observáveis físicos de uma teoria quântica de campos (TQC) baseado no termo de Chern-Simons, como é conhecido em física a segunda classe secundária de Chern $TC_2(\omega)$, satisfazem a mesma relação de recorrência que define o polinômio de Jones.

A grande vantagem desta nova abordagem é que o método de Witten fornece uma descrição intrínseca dos invariantes, o que não ocorre no método original de Jones. Ainda, a partir do novo método é possível generalizar o polinômio de Jones como invariante de nós em qualquer 3-variedade, enquanto que a definição original é válida apenas para nós em \mathbf{R}^3 e S^3 . Trata-se de um excelente exemplo do uso de técnicas de teoria de campos para se obter resultados topológicos.

O capítulo final é consagrado à teoria de campos e às propriedades do termo de Chern-Simons neste contexto. Primeiramente, vamos mostrar que a teoria de campos baseada somente no termo de Chern-Simons é uma teoria topológica no sentido de Witten, isto é, as funções de partição e correlação não dependem da escolha de uma métrica na variedade de base.

Em seguida veremos que a teoria de Chern-Simons é a chave para uma formulação da relatividade geral em dimensão 2+1 como uma teoria de calibre cujo grupo estrutural é o grupo de Poincaré $ISO(2,1)$. Analisamos em seguida a quantização desta teoria, calculando probabilidades de transição da topologia do espaço, tomado como sendo uma superfície de Riemann, e

regras de seleção para este processo.

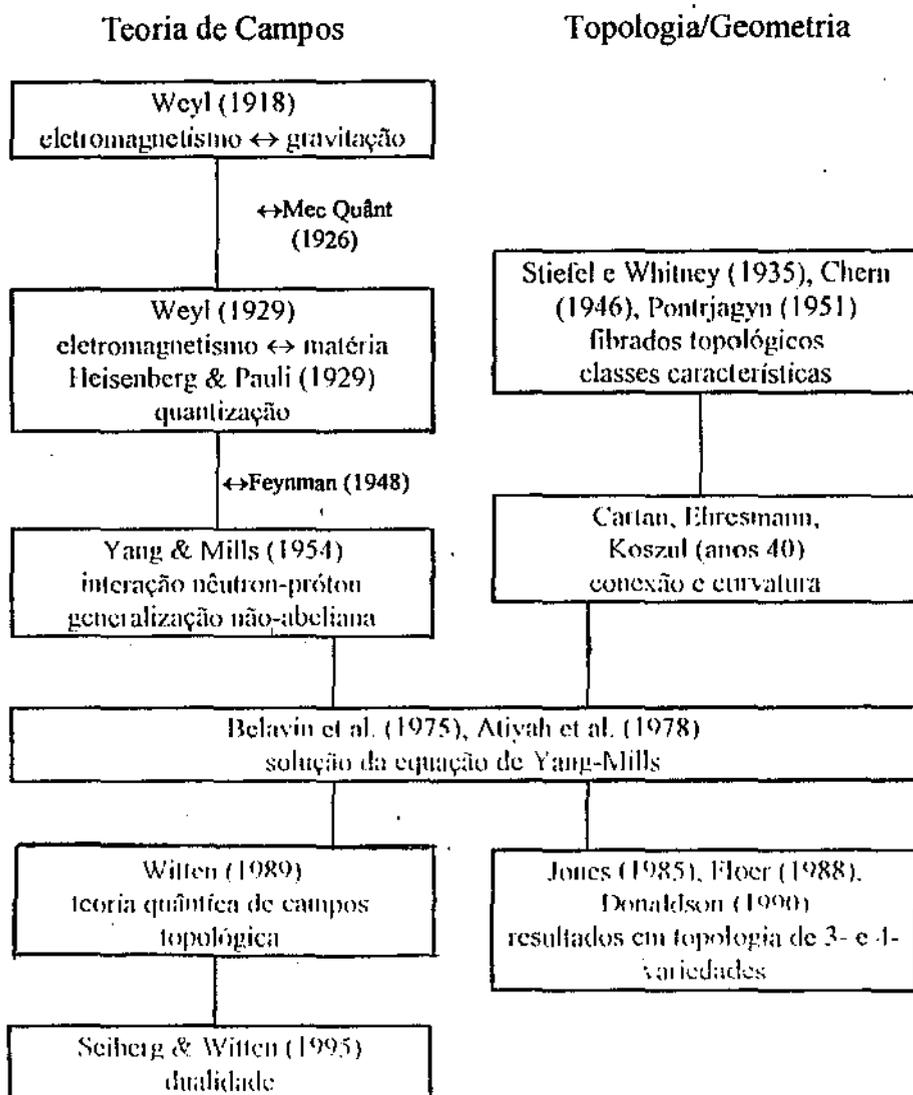
Finalmente, passamos a apresentação do trabalho de Deser, Jackiw e Templeton [20] sobre a teoria de campos em dimensão 2+1 obtida somando-se a lagrangeana de Yang-Mills usual com o termo de Chern-Simons. Uma série de novos fenômenos novos surgem desta teoria, entre eles o fato das partículas de calibre, que intermediam as interações eletromagnética e nuclear, adquirirem massa sem quebra espontânea de simetria de *gauge*. Como veremos, estas interações passam a ter alcance finito e o acoplamento com a matéria (campos spinorial e escalar) também produz resultados interessantes, inclusive o aparecimento de supersimetria. Este capítulo se encerra com uma breve secção com outras aplicações do acoplamento da teoria abeliana de Chern-Simons com elétrons.

Dada a grande quantidade de trabalhos nos mais diversos aspectos da teoria de Chern-Simons, a presente revisão é necessariamente incompleta. Alguns pontos relevantes ficaram de fora, a saber:

- Teoria de campos conforme, que, como apontado por Witten no seu trabalho sobre o polinômio de Jones, está bastante ligada à teoria de Chern-Simons em dimensão 2+1. Trata-se de um assunto por si só extenso e com vasta literatura, da qual utilizamos alguns resultados sem maiores discussões.
- Quantização canônica da teoria de Chern-Simons pura, que envolve uma série de questões alheias ao tema central deste trabalho, além de serem secundárias numa primeira leitura.
- Quantização via integrais de caminho da teoria de Yang-Mills-Chern-Simons e existência de estatística fracionária na teoria de abeliana, por se tratarem de discussões excessivamente técnicas e fora do escopo principal do presente trabalho, o que poderia prejudicar o seu carácter introdutório.

O autor procurou fornecer um grande número de referências cobrindo estes tópicos e todos os outros resultados matemáticos que são utilizados sem demonstração. Em particular, as secções 4.2, 5.1 e 5.2, utilizam uma boa quantidade destes resultados. A bibliografia tenciona ainda servir de ponto de partida para aqueles que desejarem se aprofundar nesta área e em áreas relacionadas.

HISTÓRICO



Capítulo 2

Classes características

2.1 Fibrado e conexão universais

Nós começamos por revisar o conceito de fibrado principal com conexão. Para uma exposição completa, veja [37] e [33]. Seja G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável orientável. Um *fibrado principal* $P(M, G)$ é uma variedade diferenciável satisfazendo as seguintes condições:

1. G age livre e diferenciavelmente à direita em P ;
2. o espaço quociente de P pela ação de G é difeomorfo a variedade M e a projeção $\pi : P \rightarrow M$ é infinitamente diferenciável;
3. P é localmente trivial, isto é, para cada $m \in M$ existe uma vizinhança U de m tal que $\pi^{-1}(U)$ é difeomorfo a $M \times G$.

O grupo G é chamado *grupo estrutural* do fibrado e M é a *variedade de base*. Uma *conexão* sobre $P(M, G)$ corresponde à escolha de uma distribuição horizontal \mathcal{H}_p , isto é, de um subespaço de $T_p P$ satisfazendo os seguintes axiomas, para todo $p \in P$:

1. $T_p P = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{V}_p$, onde \mathcal{V}_p é o subespaço de $T_p P$ tangente à fibra $\pi^{-1}(m)$, $m = \pi(p)$;

2. \mathcal{H}_p é invariante pela ação de G , isto é, $\mathcal{H}_{pg} = dR_g(\mathcal{H}_p)$ para todo $g \in G$, onde $R_g(p) = pg$ é o difeomorfismo de P induzido pela ação;
3. \mathcal{H}_p depende diferenciavelmente de p .

Esta escolha determina unicamente uma 1-forma ω com valores na álgebra de Lie \mathcal{G} do grupo estrutural, chamada *forma de conexão*, impondo-se que $\ker\omega(p) = \mathcal{H}_p$, $\forall p \in P$. É possível demonstrar que ω é ad-invariante, ou seja, $R_g^*\omega = ad_{g^{-1}}\omega$. A partir de agora nos referimos à forma de conexão simplesmente como conexão. Note-se ainda que a todo fibrado pode ser dada uma conexão; a demonstração deste fato é via partição da unidade.

A curvatura Ω associada à conexão ω é uma 2-forma com valores em \mathcal{G} definida como sendo a derivada exterior covariante de ω . A equação de estrutura fornece uma expressão explícita para a curvatura em termos da conexão:

$$\Omega = d\omega - \frac{1}{2}[\omega, \omega] = d\omega + \omega \wedge \omega \quad (2.1)$$

De (2.1) e da identidade de Jacobi segue a identidade de Bianchi $D\Omega = 0$. A conexão ω é dita *flat* quando $\Omega = D\omega = 0$; todo fibrado com conexão *flat* e variedade de base simplesmente conexa é trivial. Heuristicamente, a curvatura é uma medida da não trivialidade do fibrado.

Uma aplicação diferenciável $\tilde{f} : P \rightarrow Q$ entre dois fibrados $P(M, G)$ e $Q(N, H)$ é um mapa de fibrados se \tilde{f} preserva as fibras, ou seja, se $p_2 \in \pi_P^{-1}(p_1) \Rightarrow \tilde{f}(p_1) \in \pi_Q^{-1}(\tilde{f}(p_2))$. Equivalentemente, podemos dizer que \tilde{f} comuta com a ação dos grupos G e H nos respectivos fibrados. Esta aplicação induz de maneira natural uma aplicação diferenciável entre as variedades base $f : M \rightarrow N$ tal que $\pi_Q \circ \tilde{f} = f \circ \pi_P$. Dois fibrados sobre a mesma variedade base são ditos isomorfos se \tilde{f} for um difeomorfismo e induzir a aplicação identidade na base. Podemos, portanto, considerar classes de equivalência de fibrados módulo isomorfismo; denota-se por $[P(M, G)]$ a classe do fibrado P sobre M pela relação de equivalência acima.

Também é possível considerar classes de equivalência de fibrados com conexão. Duas conexões ω e ω' em P são ditas equivalentes se existir uma aplicação $g : M \rightarrow G$ tal que $\omega' = ad_{g^{-1}}\omega + gdg^{-1}$, onde ambos os lados são calculados em um mesmo ponto $p \in P$. Esta transformação é chamada *mudança de calibre*. Assim, dois fibrados $P(M, G)$ e $P'(M, G)$ providos de conexões ω e ω' , respectivamente, são isomorfos se existir um difeomorfismo $f : P \rightarrow P'$ que induz o mapa identidade na base e cujo pullback de ω' coincide com ω a menos de uma transformação de calibre. Denota-se por $[P(M, G); \omega]$ esta classe de equivalência módulo isomorfismo.

A partir do fibrado $Q(N, H)$ e uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é possível obter um outro fibrado sobre M com o mesmo grupo estrutural. Basta tomar o subespaço de $M \times Q$ dos pontos (m, q) tais que $f(m) = \pi_Q(q)$; o conjunto $f^*Q = \{(m, q) \in M \times Q \text{ tq. } f(m) = \pi_Q(q)\}$ é chamado *pullback* de $Q(N, H)$ por f . O fato essencial é que *se dois mapas $f, g : M \rightarrow N$ são homotópicos então os fibrados f^*Q e g^*Q são isomorfos*. Veja [61], parte 1, para a demonstração deste fato.

Note ainda que se ω_Q é uma conexão em $Q(N, H)$, então a 1-forma $f^*\omega_Q$ em M obtida pelo pull-back via f também é uma conexão em f^*Q . Da mesma forma, *dois mapas homotópicos $f, g : M \rightarrow N$ induzem fibrados com conexão $[f^*Q, f^*\omega]$ e $[g^*Q, g^*\omega]$ isomorfos*.

Um fibrado $E(BG, G)$ é dito universal se para cada fibrado $P(M, G)$ com grupo estrutural G existe uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow BG$ tal que $P(M, G)$ e $f^*(E)$ são isomorfos e se $g : M \rightarrow BG$ é homotópica à f então $f^*(E)$ e $g^*(E)$ são isomorfos. O problema de classificação de fibrados reduz-se, portanto, a um problema de classificação de homotopia.

O fibrado universal existe quando a base M é compacta e o subgrupo compacto maximal de G é um grupo de Lie conexo; a base do fibrado universal BG depende apenas do grupo estrutural e é chamada *espaço de classificação do grupo G* (veja [15], p. 47; o resultado pode ser refinado admitindo vari-

idades paracompactas). Equivalentemente, o espaço total E é universal até dimensão n se $\pi_j = 0$ para todo $j < n - 1$); uma demonstração deste fato encontra-se em [61].

A *variedade de Stiefel* $V_{k,n}(\mathbf{C})$, definida como sendo o conjunto dos k -referenciais ortonormais orientados em \mathbf{C}^{n+k} , é difeomorfa ao espaço homogêneo dado por $V_{k,n}(\mathbf{C}) = SU(n+k)/SU(k)$; a *variedade de Grassmann* $G_{k,n}(\mathbf{C})$ é definida como sendo o conjunto dos k -planos em \mathbf{C}^{n+k} e representada por $G_{k,n}(\mathbf{C}) = SU(n+k)/SU(k) \times SU(n)$ ([33]). A projeção natural $\pi : V_{k,n}(\mathbf{C}) \rightarrow G_{k,n}(\mathbf{C})$ que leva um k -referencial no que k -plano por ele definido torna a variedade de Stiefel um $SU(n)$ -fibrado sobre a variedade de Grassmann. Como $\pi_j(V_{k,n}(\mathbf{C})) = 0 \forall j < k - 1$, então $V_{k,n}(\mathbf{C})$ é o fibrado universal até dimensão $k - 1$ dos grupos unitários $SU(n)$. Milnor [43] apresenta outra construção explícita, mais topológica, de fibrados universais. Os dois exemplos mais importantes para o presente trabalho seguem abaixo ($i = \{0, 1, 2, \dots\}$; para a demonstração veja [44], capítulo 7):

GRUPO	BG	HOMOLOGIA
$SO(2) \equiv U(1)$	CP^∞	$H^{2i}(BG, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$
$SO(3) \equiv SU(2)$	HP^∞	$H^{4i}(BG, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$

Mais geralmente, $H_{2i+1}(BG, \mathbf{Z}) = 0$ para qualquer grupo de Lie com finitas componentes conexas. Lembramos ainda que $BGL_n(\mathbf{R}) = BSO(n)$ e que $BGL_n(\mathbf{C}) = BSU(n)$; em geral, o espaço de classificação de um grupo não-compacto coincide com o espaço de classificação do seu subgrupo compacto maximal.

A um fibrado universal $E(BG, G)$ pode ser dada uma conexão σ , chamada *conexão universal ou canônica*, tal que *todo fibrado com conexão* $[P(M, G); \omega]$ *pode ser obtido por pullback do fibrado universal* $[E(BG, G); \sigma]$ *provido da conexão universal via aplicações* $f : M \rightarrow BG$ *e aplicações homotópicas induzem fibrados com conexão isomorfos*. Este resultado foi demonstrado originalmente por Narasimhan & Ramanan em [47]; Schläfli apresenta outra demonstração, mais simples, em [57].

2.2 Homomorfismo de Weil

Seja \mathcal{G} a álgebra de Lie do grupo G e $\mathcal{G}^k = \mathcal{G} \times \dots \times \mathcal{G}$. Aplicações multilineares, simétricas $F_k : \mathcal{G}^k \rightarrow \mathbb{R}$ são polinômios k -homogêneos na álgebra. G age pela adjunta em \mathcal{G} $ad_g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $ad_g(A) = gAg^{-1}$. Polinômios invariantes por esta ação, ou seja, tais que:

$$F_k(A_1, \dots, A_k) = F_k(ad_g(A_1), \dots, ad_g(A_k)) \quad (2.2)$$

são chamados *polinômios invariantes*; com a adição e a multiplicação usuais, estes polinômios formam um anel $I(G)$.

Seja Ω a curvatura associada a uma conexão ω de um fibrado principal $P(M, G)$. Note que $F_k(\Omega) = F_k(\Omega, \dots, \Omega)$ é uma $2k$ -forma horizontal (i.e. que pode ser definida na base) com valores na álgebra. Segue o seguinte teorema:

TEOREMA 2.1 (*Chern-Weil*) *Existe um homomorfismo entre o anel de polinômios invariantes $I(G)$ e $H^*(M, \mathbb{R})$, o anel de cohomologia real da variedade de base do fibrado $P(M, G)$.*

Demonstração: Considere a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \omega : I(G) &\rightarrow H^*(M, \mathbb{R}) \\ F_k &\rightarrow \{F_k(\Omega)\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $k \in \mathbb{Z}^+$ e Ω é a curvatura associada a uma conexão ω em P . O primeiro passo é mostrar que a $2k$ -forma $F_k(\Omega)$ é fechada e portanto define uma classe $\{F_k(\Omega)\} \in H^{2k}(M, \mathbb{R})$. Note que:

$$dF_k(\Omega) = \sum_{i=1}^k F_k(\Omega, \dots, d\Omega, \dots, \Omega) = kF_k(d\Omega, \Omega, \dots) \quad (2.4)$$

Temos porém da equação de estrutura (2.1) que:

$$\begin{aligned} d\Omega &= \frac{1}{2}d([\omega, \omega]) = \frac{1}{2}([d\omega, \omega] - [\omega, d\omega]) = \\ &= [d\omega, \omega] = [d\omega - \frac{1}{2}[\omega, \omega], \omega] = \\ &= [\Omega, \omega] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Portanto $dF_k(\Omega) = kF_k([\Omega, \omega], \Omega, \dots)$. Por outro lado, tome uma aplicação $g : M \rightarrow G$ e k elementos da álgebra fixos X_i e diferencie a condição de ad-invariância, obtendo:

$$\begin{aligned} 0 = dF_k(X_1, \dots, X_k) &= dF_k(ad_g X_1, \dots, ad_g X_k) = \\ &= \sum_{i=1}^k F_k(X_1, \dots, [dg, X_i], \dots, X_k) \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $dg : T_p M \rightarrow \mathcal{G}$, ou seja, dg é uma 1-forma em M com valores em \mathcal{G} ; então $dF_k(\Omega) = 0$ para qualquer conexão ω .

Resta mostrar que a classe $\{F_k(\Omega)\} \in H^{2k}(M, \mathbb{R})$ independe da escolha de conexão; isto é feito mostrando-se que dadas duas conexões ω e ω' então $F_k(\Omega)$ e $F_k(\Omega')$ diferem por uma forma exata. Tome $\omega_t = \omega + t\alpha$, onde α é uma 1-forma \mathcal{G} -evaluada tal que $\alpha = \omega' - \omega$, e $\Omega_t = d\omega_t - \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t] = \Omega + t(d\alpha - [\omega, \alpha]) - \frac{1}{2}t^2[\alpha, \alpha]$. Então:

$$\frac{d}{dt} F_k(\Omega_t) = kF_k(d\alpha - [\Omega_t, \alpha], \Omega_t, \dots) \quad (2.7)$$

por outro lado:

$$dF_k(\alpha, \Omega_t, \dots) = F_k(d\alpha, \Omega_t, \dots) - (k-1)F_k(\alpha, [\Omega_t, \omega_t], \Omega_t, \dots) \quad (2.8)$$

segue porém da derivação da condição de ad-invariância que:

$$F_k([\alpha, \omega_t], \Omega_t, \dots) - (k-1)F_k(\alpha, [\Omega_t, \omega_t], \Omega_t, \dots) = 0 \quad (2.9)$$

portanto:

$$\frac{d}{dt} F_k(\Omega_t) = d(kF_k(\alpha, \Omega_t, \dots)) \quad (2.10)$$

e integrando a última expressão obtemos finalmente que:

$$F_k(\Omega') - F_k(\Omega) = d \left(k \int_0^1 F_k(\alpha, \Omega_t, \dots) dt \right) \quad (2.11)$$

A aplicação w , chamada *homeomorfismo de Weil*, fica portanto bem definida; que w é um homeomorfismo de anéis segue de propriedades naturais

dos polinômios invariantes $I(G)$ quanto à soma e à multiplicação. \square

Considere agora $[E(BG, G), \sigma]$ o fibrado universal do grupo G provido da conexão universal de Narasimhan-Ramanan. A aplicação:

$$\begin{aligned} \tilde{w} : I(G) &\rightarrow H^*(BG, \mathbf{R}) \\ \tilde{w}(F_k) &= F_k(\Sigma), \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde Σ é a curvatura associada à σ , é um isomorfismo (para uma demonstração deste fato veja [15] p.59-64, omitimo-la pois envolve o estudo mais detalhado de espaços homogêneos, o que está fora do escopo do presente trabalho). Observe ainda que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} I(G) & \xrightarrow{w} & H^*(M, \mathbf{R}) \\ & \searrow \tilde{w} & \uparrow f^* \\ & & H^*(BG, \mathbf{R}) \end{array} \quad (2.13)$$

pois:

$$\begin{aligned} w(F_k) &= \{F_k(\Omega)\} = \{F_k(f^*(\Sigma))\} = \{f^*(F_k(\Sigma))\} = \\ &= f^*\{F_k(\Sigma)\} = f^* \circ \tilde{w}(F_k) \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde $f : M \rightarrow BG$ é tal que $f^*[E(BG, G), \sigma] = [P(M, G), \omega]$.

A classe $\{F_k(\Omega)\}$, é chamada *classe característica* da classe de isomorfismo do fibrado $P(M, G)$. Para fibrados vetoriais complexos e $U(n)$ -fibrados principais usamos as chamadas *classes de Chern*¹ $c_k(P)$, que são aquelas obtidas pelos polinômios invariantes $C_k(\Omega)$ que surgem como coeficientes do polinômio em t dado por:

$$\det \left(tI_n + \frac{i}{2\pi} \Omega \right) = t^n - C_1(\Omega)t^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n(\Omega) \quad (2.15)$$

Assim sendo, $c_k(P) = \{C^k(\Omega)\} \in H^{2k}(M, \mathbf{Z})$. Ainda, é possível demonstrar que tais polinômios geram todo o anel $I(U(n))$ (veja [38] p.300). Portanto,

¹Tais classes foram primeiramente definidas de maneira axiomática por Chern em *Ann. of Math.* 47, p.279 (1946).

qualquer outra classe característica de $U(n)$ -fibrados pode ser obtida por combinação (somadas e produtos) de classes de Chern.

Para fibrados vetoriais reais e $O(n)$ -fibrados principais usamos as *classes de Pontrjagin*², definidas por

$$p_k(P) = (-1)^k c_{2k}(P^c) \in H^{4k}(M, \mathbf{Z}) \quad (2.16)$$

onde P^c indica a complexificação do fibrado $P(M, O(n))$. Por outro lado, as classes de Pontrjagin podem ser calculadas via polinômios invariantes, a partir da expressão:

$$\det \left(tI_n - \frac{1}{2\pi} \Omega \right) = t^n - P_1(\Omega)t^{n-1} + \dots + (-1)^n P_n(\Omega) \quad (2.17)$$

As classes de Chern de uma variedade complexa M são as classes de Chern do seu fibrado tangente TM e são invariantes da estrutura complexa de M . Para variedades reais, as classes de Pontrjagin, isto é, as classes de Pontrjagin do fibrado tangente, são invariantes da estrutura diferencial da variedade.

Também de grande importância são as *classes de Stiefel-Whitney*, para fibrados topológicos, e a *classe de Euler*, para fibrados vetoriais reais orientáveis. Ambas, entretanto, não podem ser obtidas através de polinômios invariantes. Para uma abordagem topológica de classes características incluindo as classes de Stiefel-Whitney e de Euler remetemos a [44].

2.3 Classes características secundárias

Na demonstração do teorema de Chern-Weil obtivemos a seguinte expressão:

$$F_k(\Omega') - F_k(\Omega) = d \left(k \int_0^1 F_k(\alpha, \Omega_t, \dots) dt \right) \quad (2.18)$$

Denotemos por $TF_k(\omega)$ a $(2k - 1)$ -forma no interior do parêntese do lado direito de (2.18). O primeiro fato a ser observado é que, diferentemente

²Introduzidas por Pontrjagin em 1951.

de $F_k(\Omega)$, $TF_k(\omega)$ não é horizontal, ou seja, não pode ser definida sobre a base e depende da escolha de conexão em $P(M, G)$. Observe ainda que se $F_k(\Omega) = 0$, então $TF_k(\omega)$ é uma forma fechada e portanto define uma classe de cohomologia em $H^{2k-1}(P, \mathbb{R})$ (não mais na cohomologia da base!); tais classes são chamadas *classes características secundárias*.

TEOREMA 2.2 *Seja ω_t uma família a um parâmetro de conexões em P e Ω_t as respectivas curvaturas. Suponha que*

$$F_k \left(\frac{d}{dt} \omega_t, \Omega_t, \dots \right) = 0 \quad (2.19)$$

Então:

1. $\{F_k(\Omega_t)\}$ é independente de t ;
2. se ainda $F_k(\Omega_t) = 0$, então a classe $\{TF_k(\omega_t)\}$ é definida e independe de t .

Demonstração: Defina $\Omega_t(\tau) = d\omega_t - \frac{1}{2}\tau[\omega_t, \omega_t]$ e $\phi_t = \frac{d}{dt}\omega_t$. Então:

$$\begin{aligned} dF_k(\phi_t, \omega_t, \Omega_t(\tau), \dots) &= F_k(d\phi_t, \omega_t, \Omega_t(\tau), \dots) - \\ &- F_k(\phi_t, d\omega_t, \Omega_t(\tau), \dots) - (k-2)F^k(\phi_t, \omega_t, [\Omega_t(\tau), \omega_t], \Omega_t(\tau), \dots) = \\ &= F_k(d\phi_t - \tau[\omega_t, \phi_t], \omega_t, \Omega_t(\tau), \dots) - F_k(\phi_t, d\omega_t - \tau[\omega_t, \omega_t], \Omega_t(\tau), \dots) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}TF_k(\omega_t) &= \frac{d}{dt} \int_0^1 kF_k(\omega_t, \Omega_t(\tau), \dots) d\tau = \\ &= k \int_0^1 F_k(\phi_t, \Omega_t(\tau), \dots) \tau^{k-1} d\tau + \\ &\quad + (k-1) \int_0^1 F_k(\omega_t, d\phi_t - \frac{1}{2}\tau[\omega_t, \phi_t], \Omega_t(\tau), \dots) \tau^{k-1} d\tau \end{aligned} \quad (2.21)$$

Portanto, denotando $V_k(t) = \int_0^1 F^k(\phi_t, \omega_t, \Omega_t(\tau), \dots) \tau^{k-1} d\tau$ e inserindo-se (2.20) em (2.21):

$$\frac{1}{k} \frac{d}{dt}TF^k(\omega_t) - (k-1)dV_k(t) = k \int_0^1 F_k(\phi_t, d\omega_t - \frac{2k-1}{2k}[\omega_t, \omega_t], \Omega_t(\tau), \dots) \tau^{k-1} d\tau \quad (2.22)$$

O integrando do lado direito da equação acima pode ser expandido, a menos do fator τ^{k-1} , da seguinte maneira ($a = \frac{2k-1}{2k}$):

$$\begin{aligned} & F_k(\phi_t, d\omega_t - \frac{2k-1}{2k}[\omega_t, \omega_t], \Omega_t(\tau) \dots) = \\ & = F_k(\phi_t, \Omega_t + (1-a\tau)[\omega_t, \omega_t], \Omega_t + \frac{1-\tau}{2}[\omega_t, \omega_t] \dots) = \\ & = F_k(\phi_t, \Omega_t, \dots) + \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_r(\tau) F_k(\phi_t, [\omega_t, \omega_t], \Omega_t, \dots) \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde $\alpha_r(\tau) = \binom{k-2}{r} (1-\tau)^r + \binom{k-2}{r-1} (1-\tau)^{r-1} (1-a\tau)$. O primeiro termo é nulo por hipótese; observando-se ainda que:

$$\int_0^1 \tau^m (1-\tau)^n d\tau = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \Rightarrow \int_0^1 \alpha_r(\tau) \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad (2.24)$$

temos portanto que:

$$\frac{d}{dt} T F_k(\omega_t) = k(k-1) dV_k(t) \quad (2.25)$$

e segue por integração que:

$$T F_k(\omega_1) - T F_k(\omega_0) = d \left(k(k-1) \int_0^1 V_k(t) dt \right) \quad (2.26)$$

O resultado segue imediatamente da expressão acima, posto que, por definição, $F_k(\Omega) = d T F_k(\omega)$ e se $F_k(\Omega_t) = 0$, então a classe $\{T F_k(\omega_t)\}$ é definida e independe do parâmetro t . \square

As condições do teorema acima são trivialmente satisfeitas, por dimensão, quando $2k \geq \dim M + 1$: neste caso, a classe $\{T F^k(\omega)\} \in H^{2k-1}(P, \mathbf{R})$ independe da escolha de conexão em P . Outras situações em que o teorema 2.2 é válido serão vistas no capítulo seguinte.

Como preparação ao próximo resultado, recordemos que da sequência exata curta $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow 0$ segue para toda a teoria homológica a sequência de Bockstein:

$$\dots \rightarrow H^i(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^i(X, \mathbf{R}) \rightarrow H^i(X, \mathbf{R}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathbf{Z}) \rightarrow \dots \quad (2.27)$$

Se u é uma k -forma com coeficientes reais, \tilde{u} denota a sua redução módulo \mathbf{Z} . Ainda, se $\{u\}$ é uma classe real, então $\{u\}$ é também uma classe inteira se e só se $\{\tilde{u}\} = 0$.

TEOREMA 2.3 *Seja $[P(M, G), \omega]$ e $F_k \in I(G)$ tal que $F_k(\Omega) = 0$. Então existe $\{u\} \in H^{2k-1}(M, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ tal que*

$$\{T\tilde{F}_k(\omega)\} = \pi^*(\{\tilde{u}\}) \quad (2.28)$$

Demonstração: O primeiro passo é demonstrar a seguinte relação:

$$T\tilde{F}_k(\omega) = \pi^*(\tilde{u}) + d\alpha \quad (2.29)$$

sendo suficiente demonstrá-la no fibrado universal $[E(BG, G), \sigma]$, pois sua validade em geral segue por *pullback*. A $2k$ -forma exata $F_k(\Sigma)$ define uma classe inteira em $H^{2k}(BG, \mathbf{R})$, portanto $\tilde{F}_k(\Sigma)$ representa a classe trivial em $H^{2k}(BG, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$, então $\tilde{F}_k(\Sigma)$ é exata, i.e. existe $(2k-1)$ -forma \tilde{u} com coeficientes em \mathbf{R}/\mathbf{Z} sobre BG tal que $d\tilde{u} = \tilde{F}_k(\Sigma)$. Segue então que:

$$d\pi^*(\tilde{u}) = \pi^*(d\tilde{u}) = \pi^*(\tilde{F}_k(\Sigma)) = dT\tilde{F}_k(\sigma) // \Rightarrow T\tilde{F}_k(\sigma) = \pi^*(\tilde{u}) + d\alpha \quad (2.30)$$

como queríamos mostrar. Voltando a um fibrado qualquer, temos que existe $(2k-1)$ -forma \tilde{u} com coeficientes em \mathbf{R}/\mathbf{Z} sobre a base tal que $d\pi^*(\tilde{u}) = 0$ pois, por hipótese, $dTF_k(\omega) = F_k(\Omega) = 0$; segue que $d\tilde{u} = 0$, portanto \tilde{u} é fechada e conseqüentemente define uma classe $\{\tilde{u}\} \in H^{2k-1}(M, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ cujo *pullback* para o espaço total coincide com $\{T\tilde{F}_k(\omega)\}$ por (2.29):

$$\{T\tilde{F}_k(\omega)\} = \pi^*(\{\tilde{u}\}) \quad (2.31)$$

o que conclui a demonstração. □

A classe $\{\tilde{u}\} \in H^{2k-1}(M, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ é chamada *carácter de Simons* $SF_k(\omega)$. O resultado acima é o primeiro passo para um refinamento da teoria de classes características elaborado por Simons & Cheeger em [14].

Casos particulares

Porfim, passamos a examinar alguns casos particulares que são especialmente interessantes por suas aplicações em física: S^1 - e $SU(2)$ -fibrados sobre 3- e 4-variedades. Antes, porém, fornecemos algumas fórmulas explícitas para as primeiras classes de Chern e as respectivas classes secundárias, conforme definidas em (2.15) e (2.18) ($c_k = \{C_k(\Omega)\}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = 1 \\ C_1 = \frac{i}{2\pi} tr(\Omega) \\ TC_1 = \frac{i}{2\pi} tr(\omega) \\ C_2 = \frac{1}{8\pi^2} (tr(\Omega \wedge \Omega) - (tr\Omega) \wedge (tr\Omega)) \\ TC_2 = \frac{1}{8\pi^2} tr(\omega \wedge d\omega + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega) \\ C_3 = \frac{i}{48\pi^3} (-2tr(\Omega \wedge \Omega \wedge \Omega) + 3(tr\Omega \wedge \Omega) \wedge (tr\Omega) \\ \quad - (tr\Omega) \wedge (tr\Omega) \wedge (tr\Omega)) \\ TC_3 = \frac{1}{48\pi^3} tr(\omega \wedge d\omega \wedge d\omega + \frac{3}{2}\omega \wedge \omega \wedge \omega \wedge d\omega + \\ \quad + \frac{3}{5}\omega \wedge \omega \wedge \omega \wedge \omega \wedge \omega) \end{array} \right. \quad (2.32)$$

A álgebra de Lie de S^1 é simplesmente \mathbf{R} ; então a primeira classe de Chern c_1 é a única não-nula. Assim, os *fibrados lineares*, como são chamados os S^1 -fibrados, são classificados por c_1 , independentemente da dimensão da variedade de base do fibrado. O primeiro termo da segunda classe secundária TC_2 também é não nulo; o segundo $(\omega \wedge \omega \wedge \omega)$, porém, anula-se. Note ainda que $\{TC_2\}$ é definida (pois $c_2 = 0$) e depende da conexão em P se a variedade de base for 3- ou 4-dimensional.

A álgebra de Lie de $SU(2)$ é composta pelas matrizes complexas 2×2 anti-hermitianas, portanto têm traço nulo, o que simplifica bastante as fórmulas acima para c_2 e c_3 . Como já mencionamos anteriormente, $BSU(2) = \mathbf{H}P^\infty$ e $H^6(\mathbf{H}P^\infty, \mathbf{R}) = 0$, portanto c_3 é nula. Mais geralmente, $c_{2k} = tr(\Omega^{2k})$ são as únicas não triviais.

Em particular, se $\dim M = 4$, então c_2 é a única não-nula; ou seja, a segunda classe de Chern classifica $SU(2)$ -fibrados sobre 4-variedades³. Se

³Na teoria de Yang-Mills não-abeliana, a integral $\int_M c_2$ é conhecida como *instanton number*.

$\dim M = 3$, então $c_2 = 0$, portanto $SU(2)$ -fibrados sobre 3-variedades são sempre triviais. A segunda classe secundária é portanto definida e em geral não-nula.

Capítulo 3

Aplicações à geometria riemanniana

3.1 Invariância conforme e projetiva

Passamos a aplicação à geometria riemanniana da teoria de classes características e classes características secundárias desenvolvida no capítulo anterior. Começemos por considerar M uma variedade riemanniana de dimensão n e sejam g_{ij} e g'_{ij} duas métricas conformes entre si, ou seja, existe $\gamma : M \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $g'_{ij} = \exp(2\gamma)g_{ij}$. Inserindo-se esta última relação na definição dos símbolos de Christoffel [23], obtemos a seguinte identidade tensorial (adotando a convenção de Einstein):

$$\Gamma'^l_{ij} = \Gamma^l_{ij} + \delta^l_i \frac{\partial \gamma}{\partial x^j} + \delta^l_j \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} + g_{ij} g^{lm} \frac{\partial \gamma}{\partial x^m} \quad (3.1)$$

Denotando por ∇ a conexão riemanniana em M , lembramos que $\nabla^l_i = \Gamma^l_{ij} dx^j$; então (3.1) transforma-se na seguinte identidade matricial:

$$\nabla' - \nabla = d\gamma I_n + \alpha + \beta \quad (3.2)$$

onde $\alpha = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x^i} dx^j \right)$ e $\beta = \left(g_{ik} dx^k \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} g^{jl} \right)$. A família a um parâmetro de métricas conformes $g_t = \exp(2t\gamma)g$ conecta $g = (g_{ij})$ e $g' = (g'_{ij})$. De (3.2)

segue que:

$$\frac{1}{t}(\nabla_t - \nabla) = d\gamma I_n + \alpha + \beta \quad (3.3)$$

Seja $F_k \in I(GL_n(\mathbf{R}))$. Queremos mostrar que $F_k(\frac{d}{dt}\nabla_t, \Omega_t, \dots) = 0$, onde Ω é a curvatura riemanniana associada à métrica; esta relação torna aplicável o teorema 2.2. Se k é ímpar então $tr(\Omega^k) = 0$ pois Ω é anti-simétrica; como estes polinômios geram $I(G)$, segue que $F_k(\Omega) = 0$. Se k for par, do parágrafo anterior, temos:

$$F_k\left(\frac{d}{dt}\nabla_t, \Omega_t, \dots\right) = d\gamma F_k(I_n, \Omega_t, \dots) + F_k(\alpha, \Omega_t, \dots) + F_k(\beta, \Omega_t, \dots) \quad (3.4)$$

O primeiro termo do lado direito é claramente nulo. Observando-se que:

$$tr(\alpha \wedge \Omega^{k-1}) = tr\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x^i} \overbrace{dx^j \wedge \Omega \wedge \Omega^{k-2}}\right) = 0 \quad (3.5)$$

pois o termo sob a chave é identicamente nulo [23]; então, o segundo termo de (3.4) anula-se. Finalmente, o terceiro termo de (3.4) também é nulo [23], pois:

$$tr(\beta \wedge \Omega^{k-1}) = tr\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x^l} g^{jl} \overbrace{g_{ik} dx^k \wedge \Omega \wedge \Omega^{k-2}}\right) = 0 \quad (3.6)$$

Desta maneira, o resultado abaixo segue de imediato das considerações acima e do teorema 2.2:

TEOREMA 3.1 *Seja $[B(M, O(n)), \nabla]$ o fibrado das bases ortonormais de uma variedade riemanniana M^n e $F_k \in I(O(n))$ de grau par. Então a $2k$ -forma $F_k(\Omega)$ é invariante por transformações conformes da métrica. Ainda, se $F_k(\Omega) = 0$, então a classe secundária $\{TF_k(\nabla)\} \in H^{2k-1}(B, \mathbf{R})$ fica definida e depende apenas da estrutura conforme de M .*

Uma *transformação projetiva* da variedade riemanniana (M^n, g) é aquela que deixa invariantes as geodésicas de M [23]. Duas conexões ∇ e ∇' pertencem a mesma classe projetiva se existir uma 1-forma $\lambda = a_i(p)dx^i$ e uma matriz $\alpha = (a_i(p)dx^j)$ tal que:

$$\nabla' - \nabla = \lambda I_n + \alpha \quad (3.7)$$

As conexões ∇ e ∇' podem ser ligadas por uma família a um parâmetro da seguinte forma: $\nabla_t = t(\lambda I_n + \alpha) - \nabla$. Todo o argumento acima é novamente válido e podemos reescrever o teorema 3.1 trocando a palavra conforme por projetiva.

3.2 Teorema de imersão conforme

Nesta seção denotaremos por $E(M^n)$ o $GL(n, \mathbf{R})$ -fibrado de bases da variedade riemanniana M de dimensão n e por $F(M^n)$ o $O(n)$ -fibrado das bases ortonormais de M , ambos com a conexão riemanniana ∇ ; $F(M^n)$ é subfibrado de $E(M^n)$. Seja também $V_{n,k}(\mathbf{C})(G_{n,k}(\mathbf{C}), U(k))$ o $U(k)$ -fibrado de Stiefel sobre a variedade de Grassmann $G_{n,k}(\mathbf{C})$, como descritos no segundo capítulo, e σ a conexão canônica de Narasimhan-Ramanan.

Lembrando da definição dos polinômios invariantes que dão origem às classes de Chern (2.15), os polinômios inversos de Chern C_i^\perp são definidos pela seguinte relação:

$$(1 + C_1^\perp + \dots + C_i^\perp + \dots)(1 + C_1 + \dots + C_i + \dots) = 1 \quad (3.8)$$

e a classe de Chern inversa fica definida por $c_i^\perp = \{C_i^\perp(\Omega)\}$. Definição inteiramente análoga pode ser feita para as classes de Pontrjagin, usando-se (2.17).

Outra maneira de definir a classe de Chern inversa é a seguinte. Sejam W e V dois fibrados vetoriais de mesmo grupo estrutural e mesma base tais que a soma de Whitney $W \oplus V$ é trivial. Então $c_i(W) = c_i^\perp(V)$. Por exemplo, considere os fibrados de Stiefel $V_{n,k}(\mathbf{C})(G_{n,k}(\mathbf{C}), U(k))$ e $V_{k,n}(\mathbf{C})(G_{n,k}(\mathbf{C}), U(k))$ e note que $V_{n,k}(\mathbf{C}) \oplus V_{k,n}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^{n+k}$, portanto $c_i(V_{k,n}(\mathbf{C})) = c_i^\perp(V_{n,k}(\mathbf{C}))$.

Antes do teorema de imersão conforme de Chern & Simons, o resultado principal deste capítulo, demonstraremos três lemas preparatórios.

LEMA 3.1 Em $[V_{n,k}(\mathbf{C}), \sigma]$, para $i > k$, vale que:

1. $C_i^\perp(\Sigma) = 0$
2. $\{TC_i^\perp(\sigma)\} \in H^{2i-1}(V_{n,k}(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$

Demonstração: Da observação acima temos que, para $i > k$:

$$c_i^\perp(V_{n,k}(\mathbf{C})) = c_i(V_{k,n}(\mathbf{C})) = 0 \quad (3.9)$$

Portanto a $2i$ -forma $C_i^\perp(\Sigma)$ é exata em $G_{n,k}(\mathbf{C})$. Porém, $G_{n,k}(\mathbf{C})$ é uma variedade riemanniana compacta e simétrica e a forma $C_i^\perp(\Sigma)$ é invariante por isometrias (essencialmente porque a conexão o é; veja [15] p. 76). Portanto $C_i^\perp(\Sigma) = 0$, demonstrando o primeiro item.

A classe $\{TC_i^\perp(\sigma)\} \in H^{2i-1}(V_{n,k}(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ fica assim definida. Usando o teorema 2.3, podemos definir em uma classe $\{T\tilde{C}_i^\perp(\sigma)\} \in H^{2i-1}(G_{n,k}(\mathbf{C}), \mathbf{R}/\mathbf{Z})$. Mas os grupos de cohomologia de ordem ímpar de $G_{n,k}(\mathbf{C})$ são todos triviais ([15], p.72) portanto $\{T\tilde{C}_i^\perp(\sigma)\} = 0$ e o segundo item segue deste fato e da seqüência de Bockstein. \square

LEMA 3.2 Em $[V_{n,k}(\mathbf{R}), \sigma]$, para $i > \left[\frac{k}{2}\right]$, vale que:

1. $P_i^\perp(\Sigma) = 0$
2. $\{TP_i^\perp(\sigma)\} \in H^{4i-1}(V_{n,k}(\mathbf{R}), \mathbf{Z})$

Demonstração: A inclusão natural dos reais nos complexos $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ induz a seguinte aplicação entre fibrados:

$$\begin{array}{ccc} V_{n,k}(\mathbf{R}) & \xrightarrow{\hat{\psi}} & V_{n,k}(\mathbf{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_{n,k}(\mathbf{R}) & \xrightarrow{\psi} & G_{n,k}(\mathbf{C}) \end{array} \quad (3.10)$$

Segue do diagrama acima e da definição (2.16) que:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i^\perp(\Sigma) = (-1)^i \psi^*(C_{2i}^\perp(\Sigma)) \\ TP_i^\perp(\sigma) = (-1)^i \tilde{\psi}^*(TC_{2i}^\perp(\sigma)) \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

Como $i > \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \Rightarrow 2i > k$ o lema anterior se aplica, o que finaliza a presente demonstração. \square

O segundo item do lema acima pode ser ligeiramente refinado; é o que faremos no último e mais delicado lema.

LEMA 3.3 $\{\frac{1}{2}TP_i^\perp(\sigma)\} \in H^{4i-1}(V_{n,k}(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$

Demonstração: Da sequência exata curta $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ temos a seguinte sequência de Bockstein:

$$\dots \rightarrow H^i(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\hat{\tau}} H^i(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \quad (3.12)$$

Uma classe inteira $u \in H^i(V_{n,k}(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ é par se e somente se sua redução mod 2 é nula. Basta mostrar, portanto, que para todo $u \in H^*(V_{n,k}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_2)$ temos que $\hat{u} = 0$.

Seja $\Lambda = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ e $G = U(n), O(n)$. O primeiro passo é definir uma aplicação $\tau : H^i(BG; \Lambda) \rightarrow H^{i-1}(G; \Lambda)$. Tome $\{\alpha\} \in H^i(BG; \Lambda)$ e escolha um representante $\gamma \in \{\alpha\}$ tal que γ se anula nas fibras de $\pi : E \rightarrow BG$, ou seja $\pi^*(\gamma)|_{\pi^{-1}(m)} = 0$ para todo $m \in BG$. Como o anel de cohomologia de E é trivial, pois $\pi_k(E) = 0$ para todo k , então $\pi^*(\gamma) = \delta\beta$, onde δ é o operador de cobordo. Restrito às fibras β é exata, portanto define uma classe $\{\beta\} \in H^{i-1}(G; \Lambda)$ e definimos $\tau(\{\alpha\}) = \{\beta\}$. Segue da trivialidade de $H^*(E; \Lambda)$ que τ é bem definido, sendo independente das escolhas de γ e β . Note ainda que:

$$\tau(\{\alpha\} \cup \{\alpha\}) = \pi^*(\gamma \cup \gamma) = \delta(\beta \cup \pi^*(\gamma)) = 0 \quad (3.13)$$

pois $\pi^*(\gamma)|_{\pi^{-1}(m)=G} = 0$.

A inclusão natural $\varphi : O(n) \rightarrow U(n)$ induz o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^*(U(n); \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^*(O(n); \mathbf{Z}_2) \\ \uparrow \tau & & \tau \uparrow \\ H^*(BU(n); \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{\rho^*} & H^*(BO(n); \mathbf{Z}_2) \end{array} \quad (3.14)$$

Seja $\hat{c}_i \in H^{2i}(U(n); \mathbf{Z}_2)$ a redução mod2 da i -ésima classe de Chern c_i ; então vale que $\rho^*(\hat{c}_i) = w_i \cup w_i$, onde $w_i \in H^i(U(n); \mathbf{Z}_2)$ é a i -ésima classe de Stiefel-Whitney. Assim, segue do diagrama que:

$$\varphi^*(\tau(\hat{c}_i)) = \tau(\rho^*(\hat{c}_i)) = \tau(w_i \cup w_i) = 0 \quad (3.15)$$

por (3.13). Como \hat{c}_i são geradores de $H^*(BU(n); \mathbf{Z}_2)$, então $\tau(\hat{c}_i)$ geram $H^*(U(n); \mathbf{Z}_2)$, portanto $\varphi(\hat{u}) = 0$ para todo $\hat{u} \in H^*(U(n); \mathbf{Z}_2)$, onde \hat{u} é a redução mod2 de uma classe $u \in H^*(U(n); \mathbf{Z})$.

Para concluir a demonstração do lema, basta observar que no diagrama comutativo induzido por φ entre as cohomologias das variedades de Stiefel:

$$\begin{array}{ccc} H^*(V_{n,k}(\mathbf{C}); \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}^*} & H^*(V_{n,k}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \\ \downarrow \pi_1^* & & \pi_2^* \downarrow \\ H^*(U(n+k); \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^*(O(n+k); \mathbf{Z}_2) \end{array} \quad (3.16)$$

as aplicações $\pi_1 : U(n+k) \rightarrow U(n+k)/U(k) = V_{n,k}(\mathbf{C})$ e $\pi_2 : O(n+k) \rightarrow O(n+k)/O(k) = V_{n,k}(\mathbf{R})$ são injetoras. Como vimos acima, a imagem de φ^* é nula; segue portanto que a imagem de $\tilde{\varphi}^*$ também é nula, como queríamos demonstrar. \square

Estamos agora prontos para demonstrarmos o teorema de obstrução à existência de imersão conforme em espaços euclidianos de Chern & Simons:

TEOREMA 3.2 *Se (M^n, g) admite uma imersão conforme global em algum espaço euclidiano \mathbf{R}^{n+k} então, para $i > \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$, vale que $P_i^\perp(\Omega) = 0$ e $\{\frac{1}{2}TP_i^\perp(\nabla)\} \in H^{4i-1}(E(M^n), \mathbf{Z})$*

Demonstração: Seja $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ uma imersão conforme. Por definição, g é conforme à métrica induzida de \mathbb{R}^{n+k} ; portanto, pelo teorema 3.1, podemos assumir que ψ é uma imersão isométrica, tornando M^n sub-variedade de \mathbb{R}^{n+k} . Seja $F(M^n)$ o fibrado das bases ortonormais de M e considere a seguinte aplicação entre fibrados:

$$\begin{array}{ccc} F(M^n) & \xrightarrow{\Psi} & V_{n,k}(\mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^n & \xrightarrow{\Psi} & G_{n,k}(\mathbb{R}) \end{array} \quad (3.17)$$

onde Ψ é o mapa de Gauss, que leva $p \in M$ no seu espaço tangente. Se σ é a conexão canônica no fibrado de Stiefel então $\nabla = \Psi^*(\sigma)$ ¹. Portanto, pelos lemas 3.2 e 3.3, vale que $P_i^\perp(\Omega) = 0$ e $\{\frac{1}{2}TP_i^\perp(\nabla)\} \in H^{4i-1}(F(M^n), \mathbb{Z})$ para $i > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ no fibrado $F(M^n)$. Como $\{TP_i^\perp(\nabla)\} \in H^{4i-1}(E(M^n), \mathbb{R})$ então $\{TP_i^\perp(\nabla)\}$ é uma classe inteira posto que a sua restrição ao sub-fibrado $F(M^n) \subset E(M^n)$ define uma classe inteira. E, por invariância, $P_i^\perp(\Omega) = 0$ também em $E(M^n)$, o que conclui a demonstração. \square

De acordo com a secção anterior, um resultado idêntico para imersões projetivas também pode ser demonstrado. Resultados semelhantes sobre imersões conformes foram posteriormente obtidos por Cheeger & Simons [14] e por Atiyah, Patodi & Singer em [7] este último através da relação existente entre o invariante $\eta(0)$ definido por estes autores e o invariante diferencial de Chern & Simons aqui apresentado.

Relação entre $\eta(0)$ e $\{TP_i^\perp(\nabla)\}$

Seja D um operador elíptico auto-adjunto de primeira ordem definido em M . A função $\eta_D(s)$ associada ao operador D é definida como sendo:

$$\eta_D(s) = \sum_{\lambda} (\text{sign } \lambda) |\lambda|^{-s} \quad (3.18)$$

¹Para uma demonstração deste resultado de geometria riemanniana, veja a primeira proposição do artigo de Schlafly [57] ou [38], p. 7-8.

onde λ são os autovalores de D . Estamos particularmente interessados no caso em que $D = (d * - * d)$ que leva formas de grau ímpar em formas de grau ímpar e formas de grau par em formas de grau par.

Considere agora M uma $(4k-1)$ -variedade riemanniana tal que $M = \partial X$, onde X é uma $4k$ -variedade riemanniana; esta restrição não é de fato séria, pois sabemos da teoria de cobordismo que se $\dim M$ é ímpar, então $2M$ é sempre bordo de alguma X . Suponha ainda que em uma vizinhança do bordo vale que $X \cong M \times I$. Nesta condições vale a seguinte fórmula, ([7], teorema 4.14):

$$\sigma(X) = \int_X L(p) - \eta_D(0) \quad (3.19)$$

onde: (i) $\sigma(X)$ é a assinatura da forma quadrática $Q(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \wedge \beta$ em $H^{2k}(X, \mathbb{R})$; (ii) $L(p)$ é o polinômio L de Hirzebruch nas classes de Pontrjagin (veja [44] p. 224); (iii) $\eta_D(0)$ é a função eta do operador D agindo nas formas de grau par.

Seja \mathcal{C} o espaço das conexões riemannianas em M . Dadas duas conexões ∇_0 e ∇_1 escolha um caminho $\gamma : I \rightarrow \mathcal{C}$ ligando-as e levante o fibrado tangente TM para $T(M \times I)$, provendo-o de uma conexão $\tilde{\nabla}$ tal que $\tilde{\nabla}$ é trivial na direção I e restringe-se à ∇_0 em $T(M \times \{0\})$ e à ∇_1 em $T(M \times \{1\})$. Aplicando (3.19) a $X = M \times I$ temos:

$$\sigma(M \times I) = \int_{M \times I} L(p) - [\eta_{D_1}(0) - \eta_{D_0}(0)] \quad (3.20)$$

onde $D_{0,1}$ são os operadores D associados às métricas que definem as conexões $\nabla_{0,1}$ e as classes de Pontrjagin são calculadas a partir da conexão $\tilde{\nabla}$ em $M \times I$. Como $\sigma(M \times I) = 0$, temos:

$$\eta_{D_1}(0) - \eta_{D_0}(0) = \int_{M \times I} L(p) \quad (3.21)$$

Denotando por Ω a curvatura riemanniana da conexão ∇ , defina a seguinte aplicação em \mathcal{C} :

$$F(\nabla) = \int_M L(\Omega) \quad (3.22)$$

Assim:

$$F(\nabla_1) - F(\nabla_0) = \int_{M \times I} L(\tilde{\Omega}) \quad (3.23)$$

Lembrando que $\tilde{\Omega}$ também é função das classes de Pontrjagin e comparando as duas últimas expressões, concluímos que:

$$\eta_D(0) = F(\nabla) + \text{cte} \quad (3.24)$$

Note que $F(\nabla)$ assume valores em \mathbf{R}/\mathbf{Z} . Se X é variedade de dimensão $4k$ tal que $M = \partial X$, extenda ∇ para uma conexão $\tilde{\nabla}$ em X e defina:

$$F(\nabla) = \int_X L(\tilde{\Omega}) \quad (3.25)$$

se X' é outra $4k$ -variedade tal que $M = \partial X'$ com a conexão $\tilde{\nabla}'$, cole X e $-X'$ ao longo de M formando uma $4k$ -variedade orientável sem bordo Y com conexão ϕ obtida colando-se $\tilde{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}'$ ao longo de ∇ . Assim:

$$\int_X L(\tilde{\Omega}) - \int_{X'} L(\tilde{\Omega}') = \int_Y L(\Phi) \quad (3.26)$$

onde o lado direito é um inteiro pois é a assinatura de Y pelo teorema da assinatura de Hirzebruch. Portanto, $F(\nabla)$ é bem definida em $\mathbf{R} \bmod \mathbf{Z}$. Podemos, portanto, encarar $\eta(0)$ como sendo uma aplicação $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ que leva ∇ em $\eta_{D(\nabla)}(0) = F(\nabla)$.

Semelhantemente, a integral da k -ésima classe característica secundária também pode ser vista como uma aplicação $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, definida por:

$$H(\nabla) = \int_M TP_k(\nabla) \quad (3.27)$$

Ou seja, a aplicação H envolvendo a classe secundária de Chern-Simons e a função η de Atiyah-Patodi-Singer são o mesmo tipo de objeto, i.e. aplicações do espaço de conexões riemannianas em \mathbf{R}/\mathbf{Z} .

Caso 3-dimensional

Examinemos agora o caso particular em que (M, g) é uma 3-variedade riemanniana compacta orientável. Considere $F(M)$ o $SO(3)$ -fibrado das bases ortonormais orientadas de M provido da conexão riemanniana ∇ cujo tensor de curvatura é Ω . Recorde das observações feitas no fim do capítulo anterior que este fibrado é trivial (equivalentemente, toda 3-variedade é paralelizável). Como $P_1(\Omega)$ é uma 4-forma horizontal, temos que $P_1^1(\Omega) = P_1(\Omega) = 0$; então a 3-forma $TP_1(\nabla)$ é fechada e define uma classe que, pelo teorema 3.1, depende apenas da estrutura conforme de (M, g) :

$$\{TP_1(\nabla)\} \in H^3(F(M), \mathbf{R}) \tag{3.28}$$

Do teorema 2.3, podemos definir uma classe $\{T\tilde{P}_1(\nabla)\} \in H^3(M, \mathbf{R}/\mathbf{Z}) = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Se esta classe for nula então, pela sequência de Bockstein, $\{TP_1(\nabla)\} \in H^3(F(M), \mathbf{Z})$.

Defina:

$$\begin{aligned} \Phi(M) &= \int_M TP_1(\nabla) = \\ &= \int_M \frac{1}{4\pi^2} \text{tr}(\nabla \wedge d\nabla + \frac{2}{3} \nabla \wedge \nabla \wedge \nabla) = \\ &= \int_M \frac{1}{4\pi^2} \text{tr}(\nabla \wedge \Omega - \frac{1}{3} \nabla \wedge \nabla \wedge \nabla) = \\ &= \int_M \frac{1}{4\pi^2} (\nabla_{12} \wedge \Omega_{12} + \nabla_{13} \wedge \Omega_{13} + \nabla_{23} \wedge \Omega_{23} + \nabla_{12} \wedge \nabla_{23} \wedge \nabla_{13}) \end{aligned} \tag{3.29}$$

Note que, pelo teorema de de Rham, $\Phi(M) \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$; assim, se M' é a mesma 3-variedade com outra estrutura conforme então $\Phi(M') = \Phi(M) + n$, $n \in \mathbf{Z}$. Das considerações acima e dos teoremas 3.1 e 3.2 segue de imediato o seguinte resultado:

TEOREMA 3.3 $\Phi(M)$ é um invariante conforme (projetivo). Ainda, se M admite uma imersão conforme (projetiva) global em \mathbf{R}^4 , então $\Phi(M) = 0$.

Podemos mostrar explicitamente a relação entre $\Phi(M)$ e o invariante η de Atiyah-Patodi-Singer no caso de 3-variedades. Neste caso, a única classe

de Pontrjagin de $X = M \times I$ não-nula é a primeira e o polinômio L de Hirzebruch reduz-se a $L(p) = \frac{1}{3}P_1(\tilde{\nabla})$. Segue então que:

$$\eta_D(0) = \frac{1}{3} \int_{M \times I} P_1(\tilde{\nabla}) \quad (3.30)$$

O lado direito é o número de autovalores positivos menos o número de autovalores negativos de D , portanto um inteiro. Por outro lado:

$$\Phi(M) = \frac{1}{2} \int_M TP_1(\nabla) = \frac{1}{2} \int_{M \times I} P_1(\tilde{\nabla}) \quad (3.31)$$

Estabelecemos desta maneira a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 3.1 $2\Phi(M) = 3\eta_D(0)$

O teorema 3.3 pode ser portanto reformulado em termos da função η do operador $D = (*d - d*)$ associado a métrica definida pela conexão riemanniana ∇ agindo nas formas de grau par:

TEOREMA 3.4 $\eta_D(0) = 0$ é um invariante conforme (projetivo). Ainda, se M admite uma imersão conforme (projetiva) global em \mathbf{R}^4 , então $\eta_D(0) = 0$.

Outros resultados

Para aplicação dos resultados desta secção em exemplos concretos, veja os trabalhos de J. Millson [42] e K. Tsuboi [62]. Citamos agora, sem demonstração, os principais teoremas destes trabalhos, simplesmente como exemplo do tipo de resultados que podem ser obtidos. O primeiro deles nos fornece um critério para decidirmos se quocientes da n -esfera por grupos finitos são ou não conformemente imersíveis em baixa codimensão:

TEOREMA 3.5 (Millson [42]) *Seja $\rho : G \rightarrow O(n+1)$ uma representação de um grupo finito G e considere o espaço quociente $M = S^n / (G, \rho)$. Então $\{TP_k^\perp(\nabla)\} \in H^{4k-1}(M, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ se anula se e somente se $\rho^* P_k^\perp \in H^{4k}(BG, \mathbf{Z})$ também se anula para $4k - 1 \leq n$.*

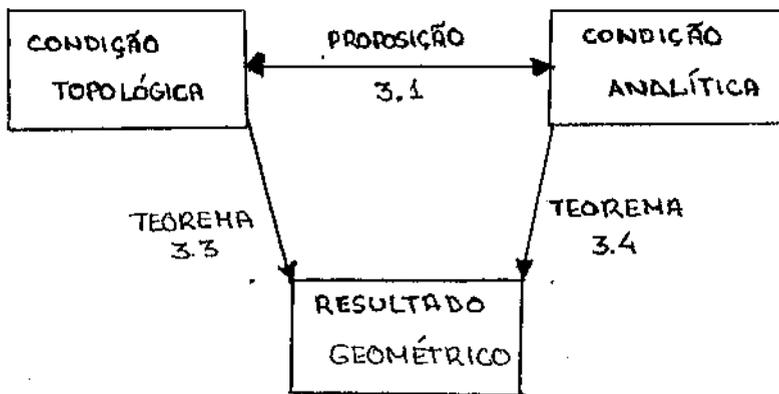
O segundo resultado é mais direto; como acima, $M = S^n/(G, \rho)$:

TEOREMA 3.6 (Tsuboi [62]) *Seja $n = 3$ (resp. $n = 7$) tal que $G \cong \pi_1(M)$ não é isomorfo à \mathbf{Z}_{2m+1} ($m \geq 1$). Então $\{\frac{1}{2}TP_1^\perp(\nabla)\} \in H^3(O(M), \mathbf{R})$ (resp. $\{TP_2^\perp(\nabla)\} \in H^7(O(M), \mathbf{R})$) não é um inteiro para qualquer representação ρ . Em particular, M não é conformemente imersível em \mathbf{R}^4 (resp. \mathbf{R}^7).*

Por exemplo, $SO(3) = \mathbf{RP}^3 = S^3/\mathbf{Z}_2$ com a métrica de curvatura constante unitária não é conformemente imersível em \mathbf{R}^4 . Ainda, $\mathbf{RP}^7 = S^7/\mathbf{Z}_2$ não conformemente imersível em \mathbf{R}^{10} , apesar de ser diferenciavelmente imersível em \mathbf{R}^8 (pelo teorema de Whitney).

Conclusão

O aspecto mais interessante da teoria desenvolvida nesta secção é o casamento entre geometria, topologia e análise. Assim a existência de imersão conforme, que é um resultado geométrico, depende, pelo teorema 3.3, do anulamento de uma certa classe de cohomologia, uma condição topológica, ou, equivalentemente pela proposição 3.1, do comportamento dos autovalores de um operador diferencial (teorema 3.4), uma condição analítica.



Capítulo 4

Polinômio de Jones segundo Witten

4.1 Nós e seus invariantes

Um nó é um mergulho $K : S^1 \rightarrow M$ do S^1 em uma variedade 3-dimensional M , usualmente \mathbb{R}^3 ou S^3 . Dois nós $K_1, K_2 \subset M$ são ditos isotópicos se existir uma família a um parâmetro de homeomorfismos da variedade ambiente $h_t : M \rightarrow M$ tal que h_0 é o homeomorfismo identidade e h_1 leva K_1 em K_2 , ou seja, tal que $K_2 = h_1 \circ K_1$. Isotopia de nós é claramente uma relação de equivalência. Um nó é dito trivial se for isotópico a $S^1 \subset \mathbb{R}^3$. A união disjunta de p -nós distintos é chamada de elo. Trataremos apenas o caso de nós; todos os resultados, entretanto, são válidos também para elos.

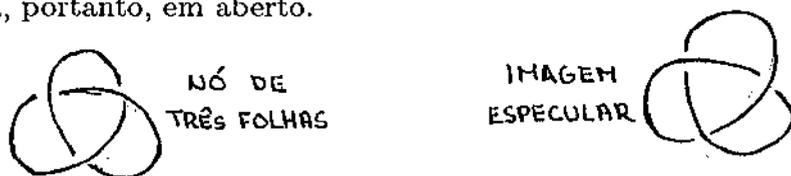
A teoria de nós surgiu no final do século passado com a teoria atômica de Lord Kelvin, segundo a qual os átomos eram vórtices de éter e a classificação de nós implicaria na classificação dos elementos, e preocupa-se em classificar nós módulo isotopia. Tal problema pode parecer bastante específico; o esforço em resolvê-lo, entretanto, exige uma série de técnicas algébricas, topológicas e geométricas de grande interesse. No presente trabalho, estamos interessando apenas em aspectos bastante especiais do problema. Para uma boa introdução, veja [2] (capítulo 10) e [29]; [17] é o texto introdutório clássico usualmente

citado.

A forma natural de classificar nós é procurar invariantes de isotopia, ou seja, objetos algébricos que se igualam quando dois nós são isotópicos. Alguns dos invariantes descritos na literatura são os seguintes, em ordem crescente de força:

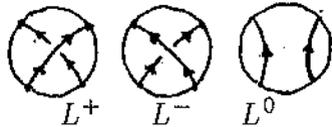
1. determinante do nó;
2. polinômio de Alexander;
3. grupo do nó, dado por $\pi_1(M - K)$;
4. índice da matriz de auto-intersecção da superfície de Seifert associado a um nó;
5. polinômio de Jones, primeiramente introduzido em [35];
6. polinômio HOMFLY, generalização tanto do polinômio de Jones como do polinômio de Alexander introduzida em [26].

Os quatro primeiros são invariantes clássicos e podem ser encontrados nas referências já citadas. Nosso interesse está nos dois últimos invariantes, em especial no polinômio de Jones. Nenhum dos invariantes listados, entretanto, é definitivo: se dois nós são isotópicos então o invariante é igual, mas a recíproca pode não ser verdadeira. Por exemplo, o polinômio de Alexander do nó de três folhas é igual ao polinômio de Alexander da sua imagem especular, apesar destas não serem isotópicas. O problema da completa classificação dos nós continua, portanto, em aberto.



Seja K um nó; o polinômio de Jones $V_K(t)$ de K é um polinômio de Laurent em uma variável com coeficientes inteiros calculado a partir da sua

projeção 2-dimensional. Neste sentido, a definição usual do polinômio de Jones é extrínseca, sendo necessário ainda demonstrar que $V_K(t)$ não depende da projeção. Assim como os outros dois invariantes polinomiais citados na lista acima ¹, $V_K(t)$ pode ser definido através de uma relação de recorrência, chamada relação de *skein*, que relaciona o polinômio de Jones de um nó cuja projeção possui n -cruzamentos com o de outro nó cuja projeção tem $(n - 1)$ -cruzamentos, sendo necessário portanto dizer qual é o polinômio de Jones do nó trivial que não contém nenhum cruzamento (normalização). Considere três nós L^+ , L^- , L^0 idênticos a menos do interior de um pequeno disco, no qual temos:


(4.1)

então os polinômios de Jones para L^+ , L^- e L^0 se relacionam da seguinte maneira:

$$tV_{L^+}(t) + t^{-1}V_{L^-}(t) + (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L^0}(t) = 0 \quad (4.2)$$

e o polinômio do nó trivial é dado por:

$$V_0(t) = \left(-\frac{t - t^{-1}}{t^{1/2} - t^{-1/2}} \right) \quad (4.3)$$

O polinômio de Jones goza ainda de uma série de outras propriedades interessantes (veja [35]). A mais importante vem do fato do polinômio de Jones ser capaz de diferenciar um nó da sua imagem especular não-isotópica (o exemplo mais conhecido é o chamado *nó de três folhas*), ao contrário dos invariantes 1-3 da lista. Se \tilde{K} denota a imagem especular do nó K então $V_{\tilde{K}}(t) = V_K(1/t)$ (para uma demonstração deste fato veja o artigo original de Jones [35]).

¹Os polinômios de Alexander e de Jones são primeiramente definidos por topologia e por representações das álgebras de von Neumann, respectivamente, e depois mostra-se que a definição via relação de *skein* é equivalente. O polinômio HOMFLY é definido diretamente via relação de *skein*, ou através da álgebra de Hecke.

O argumento de Witten a ser detalhado na próxima secção usa de maneira essencial a possibilidade de se definir o polinômio de Jones a partir das relações (4.2) e (4.3). A estratégia é a seguinte: dentro do contexto de uma teoria quântica de campos baseada puramente no termo de Chern-Simons (a segunda classe secundária), Witten define *funções de correlação* de observáveis físicos que são essencialmente a holonomia da conexão (agora interpretada como potencial de *gauge*) de um fibrado principal sobre M a medida que se percorre o nó. Verificando que tais funções satisfazem relações análogas a (4.2) e (4.3) temos uma analogia formal destas funções com o polinômio de Jones. Como mencionamos anteriormente, este método é intrínseco, não sendo necessário projetar o nó em um plano para se calcular a função de correlação associada.

4.2 Polinômio de Jones via TQC

Seja $[P(M^3, SU(2)), A]$ um $SU(2)$ -fibrado principal sobre uma 3-variedade riemanniana compacta, semi bordo e orientável M provido de uma conexão A ², que fisicamente é interpretada como sendo o potencial de *gauge*. Tais fibrados são sempre triviais, ou seja, $c_1 = c_2 = \dots = 0$. Neste contexto, considere o seguinte funcional sobre o espaço de conexões \mathcal{A} em P :

$$\mathcal{S} = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \quad (4.4)$$

que generaliza, a menos da constante multiplicativa, o invariante Φ definido no final da secção 3.2 dado pela integral da segunda classe secundária de Chern $TC_2(\nabla)$; k é a *constante de auto-acoplamento*, assim chamada porque o termo de Chern-Simons apresenta auto-acoplamento dos campos de calibre. Note que para calcularmos o traço é necessário escolher uma representação irredutível do $SU(2)$; utilizaremos sempre a representação matricial

²Passamos a denotar conexão pela letra A e curvatura pela letra F ao invés de ω e Ω utilizados no capítulo anterior, pois esta notação é usual em física devido à analogia com o potencial e o campo eletromagnéticos.

2-dimensional usual ³. Tomaremos S como sendo a ação de uma teoria quântica de campos topológica ⁴.

O primeiro fato a ser observado é que S não é invariante de calibre. Entretanto, vimos que quando a classe $TC_2(A) \in H^3(P, \mathbf{R})$ é definida então é possível definir uma classe com coeficientes em \mathbf{R}/\mathbf{Z} na base; portanto, quando realizamos uma mudança de calibre $A \rightarrow A' = gAg^{-1} + gdg^{-1}$ então $S' = S + n(g)$, isto é, a ação muda pela adição de um inteiro que depende de $g \in SU(2)$. Assim sendo, $\exp(iS)$ torna-se invariante de calibre desde que k assuma apenas valores inteiros (assumindo uma normalização conveniente do traço), o que é a chamada condição de quantização da constante de auto-acoplamento. Definimos, então, a função de partição de M^3 como sendo o funcional integral de Feynman dado por:

$$Z(M) = \int \mathcal{D}A \exp(iS) \quad (4.5)$$

onde $\mathcal{D}A$ é uma medida no espaço de conexões, que pode não ser matematicamente bem definida; existem técnicas em física, entretanto, capazes de contornar este problema e efetivamente computar (4.5).

O próximo ingrediente a ser introduzido são os chamados *loops* de Wilson sobre o nó K , que são essencialmente o cálculo da holonomia da conexão A a medida que se percorre K e fazem o papel de observáveis físicos da teoria:

$$W(K) = \text{tr} P \exp \left(\int_K A \right) \quad (4.6)$$

onde $P \exp \int A := \Pi(1 - A(x_j)\delta x_j)$, onde x_j é uma partição de K , é a integral de caminho ordenada, usual em teoria de campos (veja [52], p.276). $W(K)$ também é invariante de calibre. Conforme observamos anteriormente,

³As representações irredutíveis do $SU(2)$ são parametrizadas por $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, onde $\frac{i}{2}$ é fisicamente interpretado como o *spin* de uma partícula quântica; a representação trivial corresponde a $i = 0$ e a representação matricial 2-dimensional corresponde a $i = 1$. Para demonstração deste fato, veja [50], p.109-112.

⁴Witten utiliza a palavra 'topológica' para designar covariância geral, ou seja, independência da escolha de uma métrica na base.

tomamos o traço como sendo o traço matricial usual. Fisicamente, um *loop* de Wilson representa a trajetória de uma partícula sem massa e com carga $SU(2)$ dada pela representação escolhida. Definimos agora a *função de correlação* não-normalizada do nó K :

$$Z(M, K) = \int \mathcal{D}\mathcal{A} \exp(i\mathcal{S}) W(K) \quad (4.7)$$

e a função de correlação normalizada é dada por $\tilde{Z}(M, K) = \frac{Z(M, K)}{Z(M)}$. Trata-se de um objeto invariante de calibre e, em princípio, topológico, no sentido que não depende da escolha de uma métrica em M . Witten demonstra que este é de fato o caso no limite em que o acoplamento dos campos de calibre é pequeno (limite semi-clássico), que corresponde a grandes valores do inteiro k . Trata-se de um argumento físico e que será apresentado na segunda parte deste trabalho, referente às propriedades físicas do termo de Chern-Simons (veja secção 5.1).

Deixando todos esses detalhes técnicos de lado, admitimos por enquanto que a teoria de campos cuja ação é dada por (4.4) é bem definida como uma teoria topológica em que as funções de partição e correlação são de fato objetos topológicos, no sentido de Witten. Como afirmamos no fim da secção anterior, estas funções são os análogos do polinômio de Jones; mostraremos este fato verificando que elas satisfazem uma relação de *skein* idêntica àquela que define o polinômio de Jones (4.2).

Outro ponto de grande importância, que aqui abordaremos apenas brevemente, é a quantização canônica desta teoria; para um tratamento completo deste problema, veja [8]. Tome $M = \Sigma \times \mathbf{R}$, onde Σ é uma superfície de Riemann; isto corresponde à separação de espaço (Σ) e tempo (\mathbf{R}). Quantizar canonicamente uma teoria de campos em $M = \Sigma \times \mathbf{R}$ significa produzir um espaço de Hilbert \mathcal{H}_Σ , o espaço de estados quânticos da teoria de Chern-Simons em Σ . Passamos a descrever brevemente como este espaço é construído.

O espaço de fase clássico a ser quantizado é o espaço de conexões *flat* em Σ módulo transformações de gauge $\mathcal{M} = \mathcal{A}_f/\mathcal{G}$; este espaço é uma variedade compacta e de dimensão finita, possivelmente contendo singularidades, dependendo da topologia de Σ . Tomando uma estrutura complexa J em Σ , \mathcal{M} torna-se uma variedade Kähler, cuja forma simplética representa a primeira classe de Chern de um certo fibrado linear. O espaço de Hilbert de estados quânticos \mathcal{H}_Σ é o espaço de seções holomorfas globais deste fibrado; observe que este é um espaço de dimensão finita. É importante mostrar ainda que \mathcal{H}_Σ não depende da escolha de J em Σ ; este fato está ligado à existência conexão projetivamente *flat* natural no espaço de módulos das estruturas complexas em Σ ; a construção desta conexão é feita explicitamente em [8]; veja também [4].

Obtenção da relação de recorrência

Considere que $M = M_1 \# M_2$ é a soma conexa de duas outras 3-variedades compactas orientáveis M_1 e M_2 tal que $\partial M_1 = \partial M_2 = S^2$. De acordo com os princípios da teoria quântica de campos, o cálculo das funções de partição $Z(M_1)$ e $Z(M_2)$ depende do valor do campo (neste caso, a conexão) nos respectivos bordos, resultando em um objeto que é um funcional deste dado. Este funcional do dado de fronteira pode ser heurísticamente interpretado como uma *função de onda* sobre o bordo, ou seja, um vetor em um espaço de Hilbert, que denotaremos por \mathcal{H}_{S^2} . Devido à troca de orientação, os espaços $\mathcal{H}_{S^2}(M_1)$ e $\mathcal{H}_{S^2}(M_2)$ são duais entre si. Se $V_1 \in \mathcal{H}_{S^2}(M_1)$ e $V_2 \in \mathcal{H}_{S^2}(M_2)$ são tais vetores, temos que $Z(M) = \langle V_1 | V_2 \rangle$ ⁵.

Passamos agora a um breve exercício visual. Seja $M = S^3$ e considere três nós L^+ , L^- , L^0 , cada um mergulhado em uma cópia de S^3 , idênticos

⁵Veja também a formulação axiomática de um teoria quântica de campos topológica de Atiyah em [4].

a menos do interior de uma pequena bola 2-dimensional, no interior da qual eles diferem como em (4.1). Cortando-se ao longo desta 2-bola, dividimos cada S^3 em dois pedaços: o exterior B_E , que contém todo o nó menos o trecho no qual ele difere, e o interior B_I , que contém o pequeno trecho que difere. Os bordos ∂B_I e ∂B_E consistem de 2-esferas com quatro pontos marcados com representações do $SU(2)$, correspondentes aos pontos em que o nó cruza os bordos, que estão conectados dois a dois em B_I ; denotamos esta esfera com pontos marcados por $S_{(4)}^2$. Observe que $S^3 = B_I \cup_{S_{(4)}^2} B_E$. Procedendo como no parágrafo anterior, a integração das funções de correlação $Z(B_E, K)$ e $Z(B_I, L^{(+,-,0)})$ resulta em vetores no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{S_{(4)}^2}$, que denotaremos por ϕ , ψ^+ , ψ^- , ψ^0 , respectivamente. Lembre ainda que $Z(S^3, L^{(+,-,0)}) = \langle \phi | \psi^{(+,-,0)} \rangle$ (veja figura 1, pág. 48).

O procedimento de quantização canônica apresentado acima e a teoria de campos conforme ⁶, nos fornece que \mathcal{H}_{S^2} é 1-dimensional e $\mathcal{H}_{S_{(4)}^2}$ é 2-dimensional (veja [48], capítulo XI). Agora, quaisquer três vetores em um espaço vetorial de dimensão 2 são linearmente dependentes entre si; desta maneira, existem coeficientes $\alpha^{(+,-,0)}$ tais que $\alpha^+ \psi^+ + \alpha^- \psi^- + \alpha^0 \psi^0 = 0$. Fazendo o produto interno desta última expressão com ϕ obtemos que:

$$\alpha^+ Z(S^3, L^+) + \alpha^- Z(S^3, L^-) + \alpha^0 Z(S^3, L^0) = 0 \quad (4.8)$$

restando determinar os coeficientes $\alpha^{(+,-,0)}$, o que é feito recorrendo-se novamente à teoria de campos conforme. Tais coeficientes dependem de dois parâmetros: da constante de acoplamento dos campos de calibre k e da representação do grupo estrutural, que no nosso caso está fixado como sendo $SU(2)$ com a representação natural. Neste ponto, é possível generalizar no

⁶Neste ponto torna-se essencial o fato da ação (segunda classe de Chern secundária) ser invariante da estrutura conforme de M , como mostramos no capítulo 2. A completa ligação entre a teoria de Chern-Simons em dimensão 2+1 e uma certa classe de teorias de campo conformes em dimensão 1+1 é feita em [46]; Witten aponta que esta relação reside no fato de que o espaço de blocos conformes é exatamente o espaço de Hilbert obtido quantizando-se canonicamente a teoria de Chern-Simons.

sentido de tomarmos $SU(n)$ (sempre com a representação natural), obtendo, assim, o análogo do polinômio HOMFLY de 2 variáveis; o polinômio de Jones torna-se o caso particular em que $n = 2$. Outra possibilidade é tomar $SO(n)$ como grupo estrutural, obtendo assim o chamado polinômio de Kauffman [36], também em duas variáveis; o polinômio de Jones é novamente um caso particular, em que $n = 3$. Em cada caso, a determinação dos coeficientes acima fornece a relação de *sklein* desejada.

Retornemos entretanto ao polinômio de Jones. A única variável é a constante de acoplamento dos campo de calibre k (na verdade uma reparametrização de k). Os quatro pontos marcados da esfera $S^2_{(4)} = \partial B_I$ podem ser conectados de três formas distintas no interior de B_I : L^+ , L^- , L^0 . Um difeomorfismo adequado de S^2 leva a configuração L^+ em L^0 e esta em L^- . Ao nível do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{S^2_{(4)}}$, existe uma transformação linear B associada a este difeomorfismo tal que $\psi^- = B\psi^0 = B^2\psi^+$ (figura 2, pág. 48). A matriz de B , chamada matriz de trançamento, satisfaz a equação característica:

$$B^2 - (tr B).B + (det B) = 0 \Rightarrow \psi^- - (tr B)\psi^0 + (det B)\psi^+ = 0 \quad (4.9)$$

donde vemos que os coeficientes $\alpha^{(+,-,0)}$ estão ligados aos autovalores da matriz B . Tal matriz é estudada no contexto da teoria de campos conforme por Moore & Seiberg em [45]; este trabalho nos fornece que:

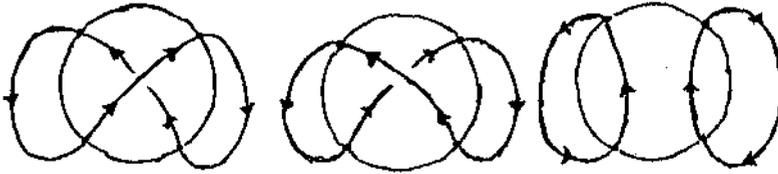
$$\begin{cases} \alpha^+ = -\exp\left(\frac{2\pi i}{k+2}\right) \\ \alpha^- = \exp\left(\frac{-2\pi i}{k+2}\right) \\ \alpha^0 = \exp\left(\frac{\pi i}{k+2}\right) - \exp\left(\frac{-\pi i}{k+2}\right) \end{cases} \quad (4.10)$$

e introduzindo-se a reparametrização $t = \exp\left(\frac{-2\pi i}{k+2}\right)$ temos finalmente que:

$$t.Z(S^3, L^+) - t^{-1}Z(S^3, L^-) + (t^{1/2} - t^{-1/2})Z(S^3, L^0) = 0 \quad (4.11)$$

reobtendo (4.2). Dividindo-se pela função de partição $Z(S^3)$, vemos que a relação de *sklein* também é satisfeita pela função de correlação normalizada.

Resta ainda reobter a relação (4.3). Seja $Z(S^3, K)$ a função de correlação da 3-esfera com um nó trivial e $Z(S^3, K^2)$ a função de correlação da 3-esfera com dois nós triviais disjuntos. Do desenho abaixo, obtemos da relação de skein que:



$$t \cdot Z(S^3, K) - t^{-1} Z(S^3, K) + (t^{1/2} - t^{-1/2}) Z(S^3, K^2) = 0 \quad (4.12)$$

Considere agora uma 3-esfera com um elo trivial de duas componentes mergulhados; como anteriormente, a função de correlação é dada por $Z(S^3, K^2)$. Corte esta esfera ao longo de uma 2-esfera em dois 3-hemisférios S^3_+ e S^3_- de maneira que cada componente do elo fique em um 3-hemisfério diferente, ficando o bordo sem pontos marcados. As funções de correlação $Z(S^3_N, K)$ e $Z(S^3_S, K)$ são vetores ψ_N e ψ_S do espaço de Hilbert \mathcal{H}_{S^2} e $Z(S^3, K^2) = \langle \psi_N | \psi_S \rangle$. Realizando o mesmo procedimento para esfera sem qualquer nó, temos que $Z(S^3) = \langle \phi_N | \phi_S \rangle$ onde $\phi_{(N,S)} = Z(S^3_{(N,S)}) \in \mathcal{H}_{S^2}$. Mas \mathcal{H}_{S^2} é 1-dimensional, portanto vale que:

$$\langle \phi_N | \phi_S \rangle \langle \psi_N | \psi_S \rangle = \langle \phi_N | \psi_S \rangle \langle \psi_N | \phi_S \rangle \quad (4.13)$$

é note que $\langle \phi_N | \psi_S \rangle = Z(S^3, K)$. Portanto:

$$Z(S^3) Z(S^3, K^2) = [Z(S^3, K)]^2 \quad (4.14)$$

Inserindo-se na relação de *skein*, obtemos para a função de correlação normalizada:

$$\tilde{Z}(S^3, K) = \left(-\frac{t - t^{-1}}{t^{1/2} - t^{-1/2}} \right) \quad (4.15)$$

reproduzindo (4.3).

Deduzimos portanto que funções de correlação de *loops* de Wilson fazem papel análogo ao polinômio de Jones em S^3 . Neste ponto, mais uma generalização é possível. O polinômio de Jones foi originalmente definido para nós em S^3 (ou \mathbb{R}^3). O método de Witten permite generalizá-lo para qualquer 3-variedade como veremos em seguida.

Cirurgia

Em topologia, chamamos de *cirurgia* o seguinte procedimento. Seja M uma 3-variedade e K um nó mergulhado em M . Tome uma vizinhança tubular centrada em K homeomorfa a um toro sólido. Remova este toro sólido, partido M em duas novas 3-variedades: o toro sólido M_T e seu complemento M_C . Note que $\partial M_T = \partial M_C = T^2 = S^1 \times S^1$. Agindo em ∂M_T por um difeomorfismo S e recolando as duas partes obtemos uma nova 3-variedade, que denotamos por $M^S = M_C \cup_{T^2} S(M_T)$. O resultado fundamental é que *para qualquer 3-variedade compacta, conexa e orientável M existe um nó K sobre a 3-esfera tal que M é homeomorfa a 3-variedade obtida por cirurgia em S^3 ao longo de K (demonstração em [41])*⁷.

O cálculo das funções de partição em M_C e M_T resulta em vetores ψ_C e ψ_T do espaço de Hilbert \mathcal{H}_{T^2} , de maneira que $Z(M, K) = \langle \psi_C | \psi_T \rangle$. Ao nível do espaço de Hilbert, o difeomorfismo S age como uma transformação linear, que também denotaremos por S , de \mathcal{H}_{T^2} , portanto $Z(M^S, K) = \langle \psi_C | S\psi_T \rangle$. Fixando uma base em \mathcal{H}_{T^2} , S pode ser representada por uma matriz, chamada de matriz de cirurgia.

A teoria de campos conforme entra novamente em cena para se estudar as propriedades da matriz de cirurgia. Esta teoria fornece uma escolha canônica de base $\{\eta_j\}_{j=0}^n$ para \mathcal{H}_{T^2} de maneira que a cada elemento da base η_j está

⁷Para um apresentação simples sobre cirurgia e um resultado análogo em superfícies, veja [2] p.161.

associada uma representação irredutível R_j do grupo estrutural $SU(2)$. Uma destas representações é necessariamente a representação trivial, que ajustamos como sendo η_0 . Na representação trivial o *loop* de Wilson anula-se, portanto calcular a função de correlação do *loop* de Wilson de um nó com a representação trivial é o mesmo que calcular a função de partição, ou seja, $\eta_0 = \psi_T$. Nesta base a matriz de cirurgia é dada por (S_{ij}) e $S\psi_T = \sum S_{0j}\eta_j$.

Seja agora $M = (S^3)^S$ uma 3-variedade qualquer, que se obtém por uma cirurgia S a partir de S^3 ao longo do nó K . A função de partição de M é portanto dada por:

$$Z(M) = \sum S_{0j} Z(S^3; K, R_j) \quad (4.16)$$

onde R_j é a representação que associamos ao nó $K \subset S^3$.

Seja agora L um nó em M ao qual associamos uma representação P_j e seja K o nó sobre S^3 cuja cirurgia resulta em M ; considere L e K disjuntos. Sabemos calcular a função de correlação do *loop* de Wilson do nó L sobre 3-esfera $Z(S^3; L, P_j)$. As repetidas cirurgias que transformam S^3 em M transportam o nó L e a representação associada para a nova variedade ambiente. Assim, a função de correlação de $W(L, P_j)$ em M fica dada por:

$$Z(M; L, P_i) = \sum S_{0j} Z(S^3; K, R_j; L, P_i) \quad (4.17)$$

Da última expressão é fácil de observar que as funções de correlação generalizadas $Z(M; K, R_i)$ também obedecem a relação de *skein*. O cálculo de exemplos concretos depende da teoria de campos conforme e da teoria de representações de $SU(2)$ para se conhecer a matriz de cirurgia. Um caso particular é mostrado na secção seguinte: calculamos a função de partição de $S^2 \times S^1$ e, por cirurgia, obtemos $Z(S^3)$.

Concluimos, assim, a apresentação da abordagem de Witten ao polinômio de Jones. Outra apresentação seguindo a mesma linha mas matematicamente mais rigorosa pode ser encontrada no longo artigo de Reshetikhin & Turaev [55]; este trabalho é o primeiro de uma série de artigos que busca formalizar matematicamente as idéias acima expostas.

4.3 Um exemplo concreto

Nosso objetivo é calcular a função de partição da 3-esfera através de cirurgia de $S^2 \times S^1$. Começamos com algumas considerações gerais sobre a função de partição de 3-variedades da forma $\Sigma \times S^1$, onde Σ é uma superfície de Riemann.

Seja \mathcal{H}_Σ o espaço de Hilbert associado à Σ ; a teoria de campos conforme nos fornece a dimensão (neste caso finita) deste espaço. Introduza uma *direção temporal* tomando o produto $\Sigma \times [0, 1]$ e propague, usando o hamiltoniano da teoria de Chern-Simons, o espaço \mathcal{H}_Σ do tempo $t = 0$ ao tempo $t = 1$. Esta operação é, em geral, uma transformação linear de \mathcal{H}_Σ , o hamiltoniano H da teoria. Finalmente, identificando $\Sigma \times \{0\}$ com $\Sigma \times \{1\}$, obtemos $\Sigma \times S^1$. De princípios da teoria quântica de campos:

$$Z(\Sigma \times S^1) = \text{tr} [\exp(iHt)] \quad (4.18)$$

Entretanto, o hamiltoniano da teoria de Chern-Simons é nulo⁸. Então, sendo Id a transformação identidade:

$$Z(\Sigma \times S^1) = \text{tr}[Id] = \dim \mathcal{H}_\Sigma \quad (4.19)$$

Para conhecer o lado direito da expressão acima novamente recorremos para teoria de campos conforme. Apenas um caso particular é de interesse para o nosso presente objetivo:

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}_{S^2} &= 1 \\ \dim \mathcal{H}_{S^2_{(1)}} &= \begin{cases} 1, & \text{se } R = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ \dim \mathcal{H}_{S^2_{(2)}} &= \begin{cases} 1, & \text{se } R_1 = \overline{R_2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.20)$$

⁸O hamiltoniano é dado pela componente 00 do tensor de energia-momento, que corresponde a derivada funcional da lagrangeana em relação a métrica; portanto toda teoria topológica, isto é, covariante geral, possui hamiltoniano nulo.

onde $S^2_{(1,2)}$ denota a 2-esfera com um e dois pontos marcados com representações $R_{(1,2)}$ e 0 é a representação trivial. Temos portanto que $Z(S^2 \times S^1) = 1$.

Conhecida $Z(S^2 \times S^1)$, passamos a cirurgia de $S^2 \times S^1$ que resulta na 3-esfera.

Para facilitar a visualização, veja primeiro este exemplo 2-dimensional. Comece imaginando um disco D^2 centrado na origem do plano \mathbf{R}^2 . A operação de inversão do plano ($f(x) = \frac{x}{|x|^2}$) leva o disco no seu complementar $\mathbf{R}^2 - D^2$ deixando invariante o círculo $S^1 = \partial D^2$. Compactificando-se $\mathbf{R}^2 - D^2$ com um ponto no infinito obtemos um outro disco \tilde{D}^2 , que pode ser visto como sendo a imagem homeomorfa de D^2 pela inversão $f(x)$. Colando-se os dois discos, cujos bordos são identificados, obtemos uma 2-esfera $S^2 = D^2 \cup_f \tilde{D}^2$.

Agora tome um disco D sobre a 2-esfera. Em $S^2 \times S^1$ temos o toro sólido $D \times S^1$, no centro do qual podemos imaginar um círculo, ou seja, um nó que chamamos de K . Note ainda que $(S^2 - D) \times S^1$ também é um toro sólido. Portanto $S^2 \times S^1$ pode ser obtido colando-se dois toros sólidos com o homeomorfismo identidade ao longo do bordo $T^2 = \partial(S^2 \times S^1)$.

Por outro lado, tome um toro sólido T mergulhado no \mathbf{R}^3 , visto como sendo a 3-esfera menos um ponto. A inversão deste toro leva-o no seu complemento $\mathbf{R}^3 - T$ deixando fixo o seu bordo; acrescentando-se o ponto no infinito ficamos com $S^3 - T$. Portanto, a 3-esfera também pode ser obtida a partir de dois toros sólidos, colando-se-os pelo homeomorfismo inversão.

Portanto, para obtermos a 3-esfera a partir de $S^2 \times S^1$, corte um toro sólido T_1 de $S^2 \times S^1$ no centro do qual está um nó trivial K , obtendo um segundo toro $T_2 = (S^2 - D) \times S^1$. Aja com o homeomorfismo inversão no bordo ∂T_1 e cole-o no segundo toro T_2 , obtendo assim a 3-esfera.

A matriz correspondente a esta cirurgia é estudada por Gepner & Witten em [28] usando teoria de representações de álgebras de Lie, sendo dada por

(lembrando que o grupo estrutural é $SU(2)$):

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \operatorname{sen} \left(\frac{(i+1)(j+1)\pi}{k+2} \right) \quad (4.21)$$

onde k é a constante de acoplamento dos campos de calibre e $i, j = 0, 1, \dots, k$. De (4.16) e (4.20) e sendo K um *loop* de Wilson ao longo do nó que utilizamos para fazer a cirurgia descrita no parágrafo anterior marcado com uma representação R_j temos portanto que:

$$\begin{aligned} Z(S^3) &= \sum_j S_{0j} Z(S^2 \times S^1; R_j) = S_{00} \\ \Rightarrow Z(S^3) &= \sqrt{\frac{2}{k+2}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{k+2} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

e para a 3-esfera com um *loop* de Wilson do nó trivial associada à representação R_j :

$$\begin{aligned} Z(S^3; R_i) &= \sum_j S_{0j} Z(S^2 \times S^1; R_i, R_j) = S_{i0} \\ \Rightarrow Z(S^3; R_i) &= \sqrt{\frac{2}{k+2}} \operatorname{sen} \left(\frac{(i+1)\pi}{k+2} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Estes resultados juntamente com (4.12) e (4.15) e com o fato de que toda 3-variedade compacta pode ser obtida por repetidas cirurgias a partir da 3-esfera nos fornece, em princípio, toda a informação necessária para calcularmos funções de partição e correlação em qualquer 3-variedade compacta M . Restam entretanto, dois grandes obstáculos: conhecer a cirurgia que transforma S^3 em M e a respectiva matriz de cirurgia.

Existe uma boa quantidade de trabalhos que se preocupam em computar os invariantes propostos por Witten em certas classes especiais de 3-variedades. No mais importante deles, Freed & Gompf [25] calcularam outros exemplos (variedades de Seifert), seguindo dois métodos, sendo o primeiro este que acabamos de apresentar, via cirurgia, e o segundo via integrais de Feynman, que apresentaremos em seguida (secção 4.4). Os resultados obtidos por um e outro batem; os autores interpretam este fato como uma evidência da validade, em algum sentido, das técnicas de teoria quântica de campos, em especial da integral de Feynman, cujo pleno significado matemático permanece obscuro.

FIGURAS

FIGURA 1: (a) mostra um nó genérico C em uma 3-esfera M ; uma pequena esfera S envolve um cruzamento tipo L^+ . Em (b), M foi cortada ao longo de S , produzindo o interior (B_I) e o exterior (B_E) de S . A relação de recorrência é obtida considerando-se a troca de B_E como em (c). (ref. [67])

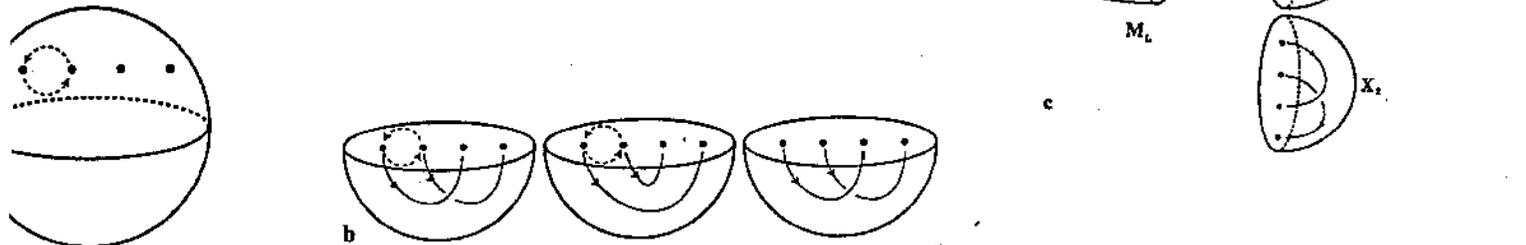


FIGURA 2: (a) e (b) mostram como os pontos marcados sobre a 2-
 esfera $S^2_{(4)}$ podem ser permutados entre si com um difeomorfismo, de
 onde surge a matriz de trançamento B . (ref. [67])

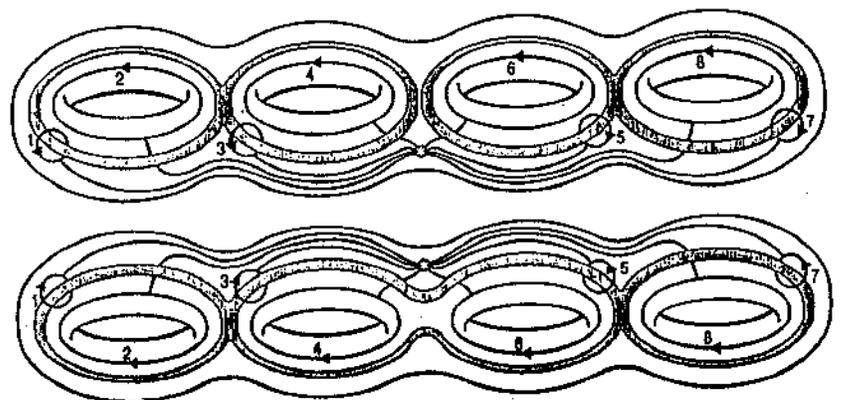
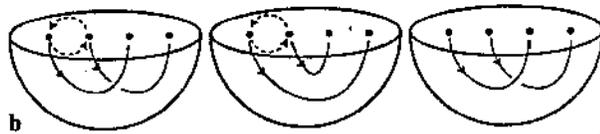


FIGURA 3: A variedade de transição entre um tri-toro e dois bi-toros
 pode ser obtida da seguinte maneira. Tome dois quadri-toros sólidos V_1
 e V_2 . Do interior de V_1 , extraia dois bi-toros sólidos como na ilustração
 acima, obtendo W_1 tal que $\partial W_1 = \partial V_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_2'$. Agora do interior de V_2
 extraia um tri-toro sólido, obtendo W_2 tal que $\partial W_2 = \partial V_2 \cup \Sigma_3$. A
 variedade de transição é obtida colando-se W_1 e W_2 ao longo do bordo
 comum $\partial V_1 = \partial V_2$. (ref. [13])

Capítulo 5

Aplicação à teoria de campos

5.1 Chern-Simons como teoria topológica

Para iniciar o estudo das propriedades físicas do termo de Chern-Simons, vamos mostrar que a teoria de campos cuja ação é dada por (4.4) é uma teoria topológica, no sentido que as funções de partição e correlação associadas a observáveis físicos (*loops* de Wilson) não dependem da métrica na variedade de base. Isto será feito, seguindo Witten [67], no limite semi-clássico em que o auto-acoplamento dos campos de calibre é pequeno; esta condição também é essencial para que se possa fazer os cálculos perturbativos usuais em teoria de campos.

Antes, porém, apresentamos apenas um breve esboço do argumento aqui exposto com o objetivo de torná-lo mais claro. A maneira usual de se calcular a função de partição de uma teoria de calibre não-abeliana envolve a escolha de um *gauge* e a introdução de termos compensantes na lagrangeana, os chamados campos fantasmas de Faddeev-Popov. Tal escolha de *gauge* envolve neste caso a escolha de uma métrica na base. A resposta final fica independente dos campos compensantes, mas dependente da métrica. Tal dependência é levantada verificando-se que a resposta final é proporcional a

um invariante topológico ¹ conhecido como torção de Ray-Singer. O primeiro a notar a conexão entre o invariante de Ray-Singer e funções de partição em uma certa de teoria de campos foi Schwarz no interessante artigo [59].

A função de partição da teoria de Chern-Simons é dada por:

$$Z(M) = \int \mathcal{D}A \exp \left(\frac{ik}{4\pi} \int_M \text{tr} (A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \right) \quad (5.1)$$

No limite em que k é grande, a exponencial torna-se fortemente oscilatória e os pontos críticos da ação (soluções clássicas) são os que contribuem mais fortemente para a integral. Aproximamos então A por uma perturbação em torno do ponto crítico $A = A_f + a$. Entretanto, sabemos de (2.18) que os pontos críticos do termo de Chern-Simons são as conexões de curvatura nula, chamadas conexões *flat*; para uma demonstração explícita deste fato veja a dedução da equação de movimento da lagrangeana de Yang-Mills-Chern-Simons na secção 5.3. Classes de equivalência de calibre de tais conexões correspondem a classes de equivalência de homomorfismos $h : \pi_1(M) \rightarrow SU(2)$, isto é, representações do grupo fundamental em $SU(2)$. Como $P(M^3, SU(2))$ é trivial, cada homomorfismo h corresponde a uma conexão A tal que, se $\{\gamma\} \in \pi_1(M)$, então $h(\{\gamma\})$ é igual a holonomia da conexão A quando se percorre o caminho γ .

Entramos agora com uma hipótese adicional: para que a nossa aproximação seja válida é necessário que a topologia de M seja tal que exista apenas um número finito de tais representações ²; conseqüentemente, a ação de Chern-Simons terá apenas um número finito de pontos críticos; para tanto é necessário que $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$. Tal condição é satisfeita, por exemplo, por uma classe especialmente interessante de 3-variedades: as esferas de homologia, que são 3-variedades com a mesma homologia da esfera.

¹Na verdade, um invariante diferencial, pois sua definição baseia-se na cohomologia de de Rham; é a generalização de um invariante puramente topológico, a torção de Reidemeister.

²Equivalentemente, o espaço quociente \mathcal{A}/\mathcal{G} , onde \mathcal{A} é o espaço de conexões flat e \mathcal{G} é o grupo de transformações de calibre, tem dimensão zero.

Assim sendo, podemos reescrever a ação $\mathcal{S}(A)$ da seguinte maneira (excluindo-se o fator multiplicativo) em torno de um ponto crítico A_f :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(A) &= \mathcal{S}(A_f + a) = \int_M \text{tr}[(A_f + a) \wedge d(A_f + a) + \\ &\quad + \frac{2}{3}(A_f + a) \wedge (A_f + a) \wedge (A_f + a)] \\ &= \mathcal{S}(A_f) + 2 \int_M \text{tr}[a \wedge (dA_f + A_f \wedge A_f)] + \\ &\quad + \int_M [a \wedge (da + 2a \wedge A_f)] + O(a^3) \\ &= \mathcal{S}(A_f) + \int_M \text{tr}(a \wedge d_{A_f} a) + O(a^3) \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde d_{A_f} denota a derivada covariante em relação a conexão *flat* A_f ; também desprezamos os termos de ordem três no campo perturbativo a . Nesta aproximação, (5.1) fica reescrita como sendo:

$$Z(M) = \sum_p \exp\left(\frac{ik}{4\pi} \mathcal{S}(A_f^p)\right) \int \mathcal{D}a \exp\left(\frac{ik}{4\pi} \int_M \text{tr}(a \wedge d_{A_f} a)\right) \quad (5.3)$$

onde p indexa os pontos críticos da ação. Por simplicidade, passamos a denotar por $\mu(A_p)$ a soma das contribuições das conexões *flat*, que já é puramente topológica.

Para efetuar a integração remanescente recorreremos ao método de Faddeev-Popov (sobre esta técnica, veja [56] p. 250; veja também o apêndice de [59]), que consiste em substituir a ação \mathcal{S} por uma ação efetiva incluindo um termo de escolha de *gauge*³ e um termo cinético dos chamados campos fantasmas para compensar esta escolha. Para fixar um *gauge* conveniente para o presente caso é necessária a escolha de uma métrica em M , o que aparentemente estraga a covariância geral da teoria. Veremos, entretanto, que o resultado final fica independente desta métrica.

O *gauge* que escolhemos é $d_{A_f}^* a = 0$; a escolha de uma métrica está implícita na definição da coderivada covariante $d_{A_f}^*$. O resultado do procedimento de Faddeev-Popov é modificar a função de partição para a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} Z(M) &= \mu(A_p) \int \mathcal{D}a \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \\ &\quad \exp\left(\frac{ik}{4\pi} \int_M \text{tr} \left\{ a \wedge d_{A_f} a + 2\phi \wedge d_{A_f}^* a + d_{A_f} \bar{\eta} \wedge d_{A_f} \eta \right\}\right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

³Tal escolha é necessária para não somar conexões *gauge*-equivalentes.

onde ϕ é uma 3-forma que age como um multiplicador de Lagrange que assegura a escolha de calibre e $\bar{\eta}$ e η são os campos fantasmas (escalares complexos).

Definindo convenientemente uma métrica e um operador tipo Dirac no espaço de formas \mathcal{G} -valuadas $\Lambda^j(M, \mathcal{G})$ transformamos a integral acima numa integral Gaussiana ⁴. Se ψ_1 e ψ_2 são k -formas, definimos o produto interno:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_M \text{tr}(\psi_1 \wedge * \psi_2) \quad (5.5)$$

onde $*$ é o operador estrela de Hodge e o seguinte operador definido sobre as formas de grau ímpar:

$$\begin{aligned} D : \Lambda^1(M, \mathcal{G}) \oplus \Lambda^3(M, \mathcal{G}) &\rightarrow \Lambda^1(M, \mathcal{G}) \oplus \Lambda^3(M, \mathcal{G}) \\ (a, \phi) &\rightarrow (*d_{A_f} + d_{A_f}*)(a, \phi) \end{aligned} \quad (5.6)$$

ou, em formato matricial:

$$D(a, \phi) = \begin{pmatrix} *d_{A_f} & d_{A_f} * \\ d_{A_f} * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \phi \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Note que D é auto-adjunto. Feitas as definições, podemos reescrever os dois termos do integrando em (5.5) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \langle (a, \phi) | D(a, \phi) \rangle &= \int_M \text{tr} \{ a \wedge d_{A_f} a + 2\phi \wedge d_{A_f}^* a \} \\ \langle \eta | d_{A_f}^* d_{A_f} \eta \rangle &= \int_M \text{tr} \{ d_{A_f} \bar{\eta} \wedge d_{A_f} \eta \} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Note que $\Delta_0 = d_{A_f}^* d_{A_f}$ é o laplaciano usual em 0-formas. A função de partição fica então reescrita como sendo, em termos de integrais gaussianas nos campos:

$$Z(M) = \mu(A_p) \int \mathcal{D}a \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left(\frac{ik}{4\pi} (\langle (a, \phi) | D(a, \phi) \rangle + \langle \eta | \Delta_0 \eta \rangle) \right) \quad (5.9)$$

$$\Rightarrow Z(M) = \mu(A_i) \frac{\det(\Delta_0)}{\sqrt{\det(D)}} \quad (5.10)$$

⁴Sobre este tipo de integrais muito importantes em teoria de campos, veja [56], p. 191-194.

onde é importante notar que a métrica está escondida no laplaciano e no operador de Dirac D e que

$$D^2 = \begin{pmatrix} *d_{A_f} & d_{A_f}^* \\ d_{A_f}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} *d_{A_f} & d_{A_f}^* \\ d_{A_f}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_3 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$$\Rightarrow [\det(D)]^2 = [\det(\Delta_1)][\det(\Delta_3)]$$

Independência da métrica e problema da fase

Chegamos agora a um ponto delicado. A escolha de calibre feita para calcularmos a função de partição $Z(M)$ fez com esta ficasse dependente da escolha de uma métrica em M . O espectro laplaciano Δ_0 é positivo definido, o que nos garante que $\det(\Delta_0)$ é um real positivo. Entretanto, o operador de Dirac D , sendo de primeira ordem, não necessariamente possui apenas autovalores reais; de fato, como mostra Witten em [67], $\sqrt{\det(D)}$ apresenta uma fase não trivial:

$$\det(D)^{-\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\eta_D(0)\right) |\det(D)|^{-\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

onde $\eta_D(0)$ é a função eta do operador D descrito em (5.7), definida a partir dos seus autovalores como em (3.18) ⁵.

Para levantarmos a dependência na métrica em (5.10) analisamos separadamente o valor absoluto e a fase do lado direito de (5.10).

O valor absoluto da razão de determinantes em (5.10) pode ser identificada com a torção de Ray-Singer, definida em [54] como sendo:

$$\log T(M, E_p) = \sum_{j=0}^n (-1)^j j \log[\det(\Delta_j)] \quad (5.13)$$

onde E_p é o fibrado trivial com conexão A_f associados a uma representação $h : \pi_1(M) \rightarrow SU(2)$ e Δ_j denota o laplaciano em j -formas com valores na

⁵Na secção 3.2 mencionamos que a segunda classe secundária está relacionada com o invariante η ; é interessante notar que esta relação ressurge no contexto de teoria quântica de campos.

álgebra $su(2)$. Lembrando que $*\Delta_j = \Delta_{n-j}*$ \Rightarrow $\det(\Delta_j) = \det(\Delta_{n-j})$, pois $*$ é um isomorfismo, e especializando para $n = 3$, temos que:

$$\begin{aligned} T(M, E) &= [\det(\Delta_1)]^{-1}[\det(\Delta_2)]^2[\det(\Delta_3)]^{-3} \\ &= [\det(\Delta_0)]^{-3}[\det(\Delta_1)] = \left(\frac{\det(\Delta_0)}{|\sqrt{\det(D)}|} \right)^{-4} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Para que a torção de Ray-Singer seja de fato independente da métrica em M é necessária mais uma restrição sobre a topologia de M : os grupos de cohomologia de de Rham das formas com valores na álgebra de Lie $su(2)$ devem ser todos triviais (veja teorema 2.1 de [54]). Esta restrição surge porque se os grupos de cohomologia forem não-nulos então pelo teorema de Hodge o laplaciano Δ_j possui autovalores nulos e, portanto, $\det(\Delta_j) = 0$. Esta dificuldade técnica pode ser superada tomando-se o determinante $\det(\Delta_j)$ como sendo o produto apenas dos autovalores não-nulos (portanto positivos) do laplaciano. Assim, a demonstração do teorema de invariância de Ray-Singer funciona sem a forte restrição de trivialidade do anel de cohomologia de M .

Retornando ao problema da fase de $\det(D)^{-\frac{1}{2}}$, podemos proceder de maneira semelhante ao que foi feito na secção 3.2 para expressar $\eta_D(0)$ em termos de $\mathcal{S}(A_f)$. Seja $B = \begin{pmatrix} *d & d* \\ d* & 0 \end{pmatrix}$, isto é, o operador D associado à conexão nula, acoplado apenas à métrica embutida em $*$. Sendo I um caminho ligando a conexão nula à A_f , podemos aplicar (3.21), obtendo:

$$\frac{1}{2}(\eta_D(0) - \eta_B(0)) = \frac{c_2(G)}{2\pi} \mathcal{S}(A_f) \quad (5.15)$$

onde $c_2(G)$ é o valor do operador de Casimir do grupo de calibre G na representação adjunta, sendo $c_2(SU(2)) = 4$.

Desta maneira, temos finalmente que:

$$\begin{aligned} Z(M) &= \sum_p \exp \left(\frac{i}{2}(\pi \eta_B(0) + c_2(G) \mathcal{S}(A_p)) \right) \mu(A_p) T(M, E_p)^{-\frac{1}{4}} \\ &= \exp \left(\frac{i\pi}{2} \eta_B(0) \right) \sum_p \exp \left[i \left(k + \frac{1}{2} c_2(G) \right) \mathcal{S}(A_p) \right] T(M, E_p)^{-\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde a soma é sobre todos os pontos críticos da ação de Chern-Simons, isto é, sobre todas as classes de calibre de conexões *flat*. O primeiro efeito provocado pela fase de $\sqrt{\det(D)}$ é um *shift* da constante de acoplamento k pelo operador de Casimir $c_2(G)$. A dependência na métrica está agora apenas na fase $\frac{i\pi}{2}\eta(0)$, embutida na função η . Nosso objetivo agora é levantar esta última dependência.

Para tanto devemos aplicar o teorema 4.2 de [7] (lembrando que estamos trabalhando com esferas de homologia $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$). Este resultado nos diz que:

$$\frac{1}{2}\eta_B(0) + \frac{1}{24\pi}S(\nabla) \quad (5.17)$$

onde ∇ é a conexão riemanniana associada à métrica embutida em $*$, é um invariante topológico, o índice do operador B agindo nas formas de grau par. Podemos multiplicar a função de partição (5.16) por $\exp\left(\frac{i}{24}S(\nabla)\right)$, pois a adição de uma fase global na função de partição é fisicamente irrelevante, obtendo:

$$Z(M) = \frac{\exp\left[i\pi\left(\frac{1}{2}\eta_B(0) + \frac{1}{24\pi}S(\nabla)\right)\right]}{\sum_p \exp\left[i\left(k + \frac{1}{2}c_2(G)\right)S(A_p)\right]} T(M, E_p)^{-\frac{1}{4}} \quad (5.18)$$

tornando-a finalmente independente da métrica, ou seja um invariante da estrutura diferenciável da 3-variedade M .

No caso de $H^1(M, \mathbf{R}) \neq 0$, o espaço módulo \mathcal{A}/\mathcal{G} é uma variedade diferenciável pois \mathcal{A} é um espaço afin portanto uma variedade diferenciável na qual \mathcal{G} age livremente. Witten argumenta em [68] que o procedimento acima pode ser reproduzido, o resultado final sendo a troca da somatória de (5.18) por uma integral sobre toda variedade \mathcal{A}/\mathcal{G} .

Concluimos, assim, que a teoria de Chern-Simons é de fato uma teoria topológica, no sentido de ser independente da escolha de uma métrica, pelo menos no limite semi-clássico de pequeno acoplamento entre os campos de calibre e em variedades como 3-esferas de homologia.

Teoria quântica de campos topológica

Outros dois trabalhos que lidam com a quantização da teoria de Chern-Simons são [8] (quantização geométrica quando $M = \Sigma \times \mathbf{R}$) e [9] (teoria de perturbação). Para uma extensa revisão de teorias de campo topológicas, veja [12]; igualmente interessante é a abordagem axiomática de Atiyah em [4]. Em trabalhos anteriores ([65] e [66]) ao apresentado no capítulo anterior sobre o polinômio de Jones, Witten utilizou-se deste tipo de teoria para construir análogos em teoria quântica de campos dos polinômios de Donaldson (invariantes da estrutura diferenciável de 4-variedades compactas, simplesmente conexas e orientáveis), da homologia de Floer (invariante topológico de 3-esferas de homologia) e do invariante de Gromov de curvas pseudo-holomorfas em variedades complexas. Estes trabalhos são talvez os melhores exemplos do grau de interação existente entre a topologia e a teoria quântica.

5.2 Relatividade geral em dimensão 2+1

Nosso objetivo nesta secção é mostrar como a relatividade geral em dimensão 2+1 pode ser feita equivalente a uma teoria de calibre cujo potencial de calibre é construído a partir do *dreibein* e da conexão de Levi-Civita associada. O grupo de calibre é o grupo de Poincaré $ISO(2, 1)$ e a ação envolve apenas o termo de Chern-Simons (4.4). Esta apresentação segue os trabalhos de Witten [64] e [68] ⁶.

Seja M uma 3-variedade compacta com ou sem bordo modelando o espaço-tempo (2+1)-dimensional, com uma métrica g_{ab} de assinatura lorentziana. Na formulação usual da relatividade geral, a métrica g_{ab} é a única variável dinâmica. Faremos uso de uma formulação ligeiramente diferente usando como variáveis dinâmicas os seguintes objetos associados à métrica:

⁶Nestes trabalhos, Witten também trata o caso de constante cosmológica não nula, que não abordaremos aqui.

1. a conexão de Levi-Civita ω , que também pode ser vista como uma conexão no fibrado $P(M, SO(2, 1))$, i.e. uma 1-forma com valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz; a respectiva curvatura riemanniana é a 2-forma dada por $R = d\omega + \omega \wedge \omega$;
2. o *dreibein* e , i.e. um referencial móvel sobre M ; os espaços tangentes a M podem ser vistos como álgebras comutativas, sendo cada vetor um operador de translação; esta relação resulta numa 1-forma em M com valores na álgebra das translações.

Incluindo o grupo de Lorentz e o grupo das translações no grupo de Poincaré a curvatura R e o *dreibein* e passam a ser uma 2- e uma 1-forma com valores na álgebra de $ISO(2, 1)$, respectivamente. O escalar de curvatura associado a g_{ab} fica dado por $e \wedge R$ (lembre que estamos em dimensão 2+1) e a lagrangeana de Einstein-Hilbert assume a forma:

$$\mathcal{L}_{EH} = \int_M e \wedge R = \int_M \epsilon^{ijk} e_i^a \left(\partial_j \omega_k^a - \partial_k \omega_j^a + \epsilon_{abc} \omega_j^b \omega_k^c \right) \quad (5.19)$$

onde i, j, k são índices espaciais-temporais e a, b, c são índices na álgebra de $ISO(2, 1)$. Impondo variações de primeira ordem no *dreibein* $e_s = e_0 + s\beta$ e na conexão de Levi-Civita $\omega_t = \omega_0 + t\alpha \Rightarrow R_t = R_0 + tD\alpha$, onde D denota a derivada covariante em relação à ω , e aplicando o método variacional em (5.19), obtemos:

$$\mathcal{L}_{EH}(e_s, \omega_t) = \int_M \left(e_0 \wedge R_0 + t(e_0 \wedge D\alpha) + s(\beta \wedge R_0) + O(t^2) \right) \quad (5.20)$$

donde segue que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{EH} \right|_{s,t=0} &= \langle e_0, *D\alpha \rangle = \langle *De_0, \alpha \rangle = 0 \Rightarrow De_0 = 0 \\ \left. \frac{d}{ds} \mathcal{L}_{EH} \right|_{s,t=0} &= \langle R_0, \beta \rangle = 0 \Rightarrow R_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

A primeira equação simplesmente nos diz que a métrica é livre de torção, i.e. que a conexão associada ao *dreibein* é de fato a conexão de Levi-Civita. A

segunda equação é o análogo da equação de Einstein para o campo gravitacional livre, pois em dimensão 3 o tensor de Ricci é nulo se e só se a curvatura escalar for nula. O procedimento acima é conhecido com método de Palatini para dedução da equação de Einstein via método variacional.

Antes de produzirmos o campo de calibre A a partir de e e ω precisaremos estudar algumas propriedades do grupo de Poincaré. $ISO(2, 1)$ é um grupo de Lie não-compacto de dimensão 6. Sua álgebra de Lie é gerada pelos 3 geradores infinitesimais das transformações de Lorentz J^a mais os 3 geradores das translações P^a , sendo definida pelas seguintes relações de comutação:

$$[J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J^c \quad [J_a, P_b] = \epsilon_{abc} P^c \quad [P_a, P_b] = 0 \quad (5.22)$$

Note que os geradores das transformações de Lorentz J_a formam uma subálgebra, portanto $SO(2, 1)$ é um subgrupo de Lie de $ISO(2, 1)$; por outro lado, os geradores das translações formam uma subálgebra comutativa, portanto as translações formam um subgrupo abeliano de $ISO(2, 1)$, que denotamos por T ; note que T também possui uma estrutura vetorial natural.

O fato de que J_a e P_b não comutam implica que $ISO(2, 1) \neq SO(2, 1) \times T$. De fato, lembramos que existe um homeomorfismo de $ISO(2, 1)$ para $SO(2, 1)$ cujo núcleo é o subgrupo das translações T . Desta forma, o grupo de Lorentz pode ser visto como sendo um espaço homogêneo $SO(2, 1) = ISO(2, 1)/T$, i.e. $ISO(2, 1)$ é o espaço total de um T -fibrado sobre $SO(2, 1)$. Como T pode ser naturalmente identificado com o \mathbf{R}^3 , $ISO(2, 1)$ pode ser identificado com o espaço tangente do grupo de Lorentz $TSO(2, 1)$; como vimos, este fibrado é não-trivial, mas necessariamente paralelizável pois $SO(2, 1)$ é uma 3-variedade. A escolha de um *dreibein* corresponde a escolha de um paralelismo de $SO(2, 1)$. Esta fibração é fundamental, pois simplifica muito o procedimento de quantização canônica da teoria.

Outro ponto relevante é o seguinte: para que uma teoria de calibre com grupo $ISO(2, 1)$ fique bem definida é necessário que exista uma forma bilinear invariante não-degenerada na álgebra de Lie de $ISO(2, 1)$. No caso de grupos

compactos usamos a forma de Cartan-Killing $K(T_a, T_b) = \text{tr}\{T_a T_b\}$. Tal forma existe em $ISO(2,1)$ e é dada por $W = \text{tr}\{J_a P^b\}$.

O potencial de calibre, i.e. a conexão no fibrado $\hat{P}(M, ISO(2,1))$, é a 1-forma com valores na álgebra de Lie de $ISO(2,1)$ dada por:

$$A_i \doteq e_i^a P_a + \omega_i^a J_a \quad (5.23)$$

Observe ainda que o objeto acima de fato se transforma como uma conexão. Verifica-se que a ação de Chern-Simons (4.4) é equivalente à ação de Einstein-Hilbert (5.19). O método de Palatini é imediatamente reproduzido. Como observamos na secção anterior, a equação de movimento associada à lagrangeana de Chern-Simons é simplesmente o anulamento da curvatura associada à conexão: $F = DA = 0$. Assim, o anulamento da parte translacional da curvatura fornece a primeira das equações de movimento de (5.21) e o anulamento da parte lorentziana nos fornece a segunda. Esta é uma primeira indicação que a lagrangeana de Chern-Simons descreve corretamente a relatividade geral em dimensão 2+1. Como evidência definitiva deste fato basta substituir (5.23) na ação de Chern-Simons; este cálculo pode ser feito usando-se coordenadas e não apresenta dificuldade, sendo importante notar que $\text{tr} J^a = 0$ e que em dado momento usa-se a primeira equação de movimento.

Quantização canônica e função de partição

Passamos ao problema de quantizar esta teoria, cujo ponto principal é calcular a sua função de partição, semelhantemente ao que foi feito na secção anterior. Como veremos, há uma pequena sutileza que simplifica o resultado final: especificadamente, a problemática fase dependente do invariante η é cancelada.

Primeiro trataremos brevemente da quantização canônica da teoria, que apresenta algumas particularidades em relação àquela apresentada na secção

4.2. Novamente o espaço de fase clássico a ser quantizado é o espaço de conexões *flat* em \hat{P} módulo transformações de calibre $\mathcal{M} = \mathcal{A}_f/\mathcal{G}$. A fibração de $ISO(2, 1)$ sobre $SO(2, 1)$ e o fato de que $DA = 0 \Rightarrow De = 0$, $D\omega = 0$ faz como que \mathcal{M} seja uma fibração sobre \mathcal{N} , o espaço de conexões *flat* sobre $P(M, SO(2, 1))$ módulo transformações de calibre: de fato, \mathcal{M} é o fibrado cotangente de \mathcal{N} .

Quanticamente, impomos que o *dreibein* e a conexão de Levi-Civita são variáveis canonicamente conjugadas (pois $\mathcal{M} = T^*\mathcal{N}$), ω fazendo o papel de 'coordenada' e e fazendo o papel de 'momento'. Assim, o espaço de Hilbert \mathcal{H} de estados quânticos é o espaço de funções de quadrado integrável em \mathcal{N} . Veja que este espaço é de dimensão infinita, ao contrário do que ocorre no caso tratado na secção 4.2; isto deve-se ao fato do grupo de calibre $ISO(2, 1)$ ser não-compacto. Seria também possível construir \mathcal{H} de maneira análoga a da secção 4.2, mas a construção apresentada acima é melhor por ser mais explícita.

O espaço \mathcal{N} não é conexo, sendo que cada componente está associada a um valor diferente da classe de Euler de $P'(\Sigma, SO(2, 1))$. Se Σ tem gênero g , a classe de Euler $e(P')$ pode assumir os valores $2g - 2$, $2g - 3$, ..., $-(2g - 2)$, sendo que os valores negativos diferem dos positivos devido a inversão da orientação. Como inversão da orientação apenas transforma o espaço de Hilbert associado no seu dual, temos essencialmente $2g - 1$ espaços de Hilbert, um para cada componente de \mathcal{N} a menos de orientação.

Existe entretanto uma maneira de escolher canonicamente um destes espaços. Cada ponto de \mathcal{N} pode ser visto como um homomorfismo $\psi : \pi_1(\Sigma) \rightarrow SO(2, 1)$, via holonomia. Lembrando que $H_1(\Sigma, \mathbf{Z}) = \pi_1(\Sigma)$, pois o grupo fundamental é abeliano, tome a_i , b_j como sendo os geradores deste grupo, onde $i, j = 1, \dots, g$, submetidos à relação

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \quad (5.24)$$

A imagem destes geradores em $SO(2, 1)$ via ψ são elementos U_i , V_j satisfa-

zendo a relação

$$U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} \dots U_g V_g U_g^{-1} V_g^{-1} = Id \quad (5.25)$$

A invariância de calibre da teoria exige que esta representação seja invariante por conjugação, i.e. dois homomorfismos ψ e ψ' são equivalentes se existir $E \in SO(2, 1)$ tal que $U_i = E^{-1} U'_i E$ e $V_j = E^{-1} V'_j E$. ψ é um mergulho discreto se cada $U_i, V_j \neq Id$; apenas os homomorfismos que são mergulhos discretos são fisicamente aceitáveis.

Entretanto, existe um resultado em teoria de superfícies de Riemann dizendo que ψ é um mergulho discreto de $\pi_1(\Sigma)$ em $SO(2, 1)$ se corresponder à holonomia de conexões *flat* de um fibrado $P'(\Sigma, SO(2, 1))$ tal que $e(P') = 2g - 2$. Assim, o espaço de Hilbert fisicamente relevante é aquele associado a classe de Euler $2g - 2$, ou seja, o espaço das funções complexas de quadrado integrável $\Psi(U_i, V_j)$ tais que: (i) são invariantes por conjugação; (ii) U_i, V_j definem uma conexão *flat* em $P'(\Sigma, SO(2, 1))$.

Passamos a tratar agora do cálculo da função de partição. Inicialmente, considere M uma 3-variedade compacta sem bordo; o caso com bordo será tratado em seguida. O procedimento é análogo ao da secção 5.1, utilizando o método de Fadeev-Popov e o resultado final sendo novamente identificado com a torção de Ray-Singer, i.e. um invariante topológico. Há entretanto algumas sutilezas. É importante lembrar que se $H^1(M, \mathbf{Z}) = 0$ então o espaço de módulos \mathcal{N} tem dimensão nula, ou seja, consiste de um número finito de pontos isolados, o que transforma a integral da função de partição numa soma finita. O caso geral é bastante complicado, pois o espaço \mathcal{M} , sendo o espaço total de um fibrado vetorial, é necessariamente não-compacto, levando à divergência da função de partição, o que é interpretando fisicamente por Witten como sendo o cerne de uma teoria quântica da gravitação ([68], secção 4.1). Entretanto, não abordaremos aqui este fato matematicamente pouco consistente.

Começamos com a expressão:

$$Z(M) = \int \mathcal{D}e \mathcal{D}\omega \exp \left(i \int_M e \wedge R \right) \quad (5.26)$$

O passo seguinte é introduzir uma escolha de calibre para os campos e e ω e os termos cinéticos para os respectivos campos fantasmas f , \bar{f} e g , \bar{g} . A presença de dois campos fantasmas é a primeira diferença importante em relação ao caso anterior.

O calibre é fixado de maneira idêntica:

$$d_A^* e = 0 \quad d_A^* \omega = 0 \quad (5.27)$$

onde d_A^* é a coderivada covariante em relação à conexão A ; note que a escolha de uma métrica auxiliar está embutida no operador d_A^* . Introduzindo multiplicadores de Lagrange u e v , a lagrangeana efetiva total, incluindo os termos de fixação de calibre e de campos fantasmas é a seguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} &= e \wedge R + u \wedge d_A^* e + v \wedge d_A^* \omega + * \bar{f} \wedge \Delta_0 f + * \bar{g} \wedge \Delta_0 g \\ &= e \wedge (R + * d_A u) + v \wedge d_A^* \omega + * \bar{f} \wedge \Delta_0 f + * \bar{g} \wedge \Delta_0 g \end{aligned} \quad (5.28)$$

Veja que \mathcal{L}_{ef} é linear em e e em v . A partir da integral elementar ($e \neq 0$):

$$\int \frac{de}{2\pi} \exp(ixe) = \delta(x) \quad (5.29)$$

integramos primeiramente em $\mathcal{D}e$ e em $\mathcal{D}v$, obtendo:

$$\begin{aligned} Z(M) &= \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}u \delta(R + * d_A u) \delta(d_A^* \omega) \times \\ &\quad \int \mathcal{D}f \mathcal{D}g \exp \left\{ -i \int_M * \bar{f} \wedge \Delta_0 f + * \bar{g} \wedge \Delta_0 g \right\} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Como anteriormente, a segunda integral é gaussiana e resulta no quadrado do determinante do laplaciano covariante Δ_0 em 0-formas. Assim, lembrando ainda que $R = d_A \omega$ e observando que $\delta(\eta) = \delta(*\eta)$ pois $*$ é um isomorfismo:

$$Z(M) = \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}u \delta(*d_A \omega + d_A u) \delta(d_A * \omega) [\det(\Delta_0)]^2 \quad (5.31)$$

O argumento das funções δ são a imagem do operador D definido em (5.7) agindo no par $(\omega, *u)$, pois $D(\omega, *u) = (*d_A\omega + d_A *u, d_A * \omega)$. Devido a presença das funções δ , a última integração resulta simplesmente no determinante deste operador, sem a problemática fase (5.12) que aparecia anteriormente. Lembrando que estamos trabalhando com a hipótese de que o espaço de módulos \mathcal{M} tem dimensão nula, o resultado final fica sendo:

$$Z(M) = \sum_{\alpha} T(M, E)^{-1/2} \quad (5.32)$$

onde $T(M, E)$ é a torção de Ray-Singer, definida em (5.13) e a soma é sobre os pontos críticos da ação. Witten aponta que no caso em que $\dim \mathcal{M} \neq 0$ a função de partição pode ser obtida simplesmente trocando-se a somatória pela integral de $T(M, E)^{-1/2}$, que passa a ser uma função em \mathcal{M} ; entretanto \mathcal{M} é não compacto e a função de partição diverge, conforme mencionamos anteriormente.

É possível ainda introduzir os *loops* de Wilson (4.6) como observáveis da teoria, como na seção 4.2. Aqui, estes observáveis também possuem uma interpretação física interessante. Segundo um teorema clássico de Wigner, as representações unitárias de dimensão infinita do grupo de Poincaré são parametrizadas por m e j , a massa e o spin de uma partícula pontual. Um *loop* de Wilson descreve portanto um partícula pontual de massa m e spin j se propagando ao longo de um caminho C .

Mudança de topologia

Considere agora Σ_1 e Σ_2 duas superfícies compactas sem bordo não necessariamente conexas e tome M uma 3-variedade tal que $\partial M = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$; por cobordismo, tal M sempre existe⁷. Seja ainda ω_1 e ω_2 $SO(2, 1)$ -conexões

⁷Suporemos ainda que M satisfaz a condição topológica necessária para que o espaço de módulos tenha dimensão nula e a função de partição não divirja, a saber $H_1(M, \partial M) = 0$.

nos fibrados $P'_{1,2}(\Sigma_{1,2}, SO(2,1))$ e ω uma conexão em $P(M, SO(2,1))$ tal que $\omega|_{\Sigma_1} = \omega_1$ e $\omega|_{\Sigma_2} = \omega_2$. Assim (Σ_1, ω_1) é interpretado como sendo o *estado espacial inicial* e (Σ_2, ω_2) o *estado espacial final*, sendo o par (M, ω) o caminho usado para a transição.

Fisicamente, conhecendo o estado inicial da função de onda $\Psi(\omega_1) \in \mathcal{H}_{\Sigma_1}$, o estado final $\Psi(\omega_2) \in \mathcal{H}_{\Sigma_2}$ pode ser obtido pela integral:

$$\Psi(\omega_2) = \int \mathcal{D}\omega_1 K(\Sigma_2, \Sigma_1) \Psi(\omega_1) \quad (5.33)$$

O núcleo $K(\Sigma_2, \Sigma_1)$ é chamado *propagador*, sendo dado por:

$$K(\Sigma_2, \Sigma_1) = \int \mathcal{D}e \mathcal{D}\omega \exp \left\{ i \int_M e \wedge R \right\} \quad (5.34)$$

onde a integração é feita sobre todas as conexões ω tais que $\omega|_{\Sigma_1} = \omega_1$ e $\omega|_{\Sigma_2} = \omega_2$. Assim, $K(\Sigma_2, \Sigma_1) \in Z(M)$, i.e. o propagador é a função de partição da variedade responsável pela transição entre os estados Σ_1 e Σ_2 , cuja probabilidade de transição é dada por $|K(\Sigma_2, \Sigma_1)|^2$. Para integrar 5.34 repetimos o procedimento do parágrafo anterior, resultando na soma (ou integral, no caso mais geral) das torções de Ray-Singer associadas às conexões *flat* ω que estendem ω_1 e ω_2 .

Para que estas probabilidades de transição sejam bem definidas do ponto de vista físico é necessário que uma certa condição de fatorização elementar seja satisfeita. Seja M uma 3-variedade tal que $\partial M = \Sigma_1 \cup \Sigma_3$. Podemos partir o processo de transição de (Σ_1, ω_1) para (Σ_3, ω_3) em duas etapas observando um estado intermediário (Σ_2, ω_2) ; isto pode ser feito cortando-se M ao longo de uma superfície Σ_2 com a conexão $\omega_2 = \omega|_{\Sigma_2}$. Os propagadores $K(\Sigma_3, \Sigma_1)$, $K(\Sigma_3, \Sigma_2)$ e $K(\Sigma_2, \Sigma_1)$ devem satisfazer a seguinte condição de compatibilidade:

$$K(\Sigma_3, \Sigma_1) = \int \mathcal{D}\omega_2 K(\Sigma_3, \Sigma_2) K(\Sigma_2, \Sigma_1) \quad (5.35)$$

ou seja, a probabilidade de transição de Σ_1 para Σ_3 é a soma sobre todos os estados intermediários Σ_2 possíveis. Witten não demonstra a validade desta

fórmula, citando um trabalho não publicado no qual um resultado análogo para a torção de Reidemeister é provado. O autor desta monografia não teve acesso a este trabalho.

Carlip & Cosgrove [13] calculam explicitamente a probabilidade de transição de uma superfície de gênero $g = 3$ para duas superfícies de gêneros $g = 2$ (figura 3, pág. 48). O problema aqui é o cálculo da torção de Ray-Singer; Carlip & Cosgrove contornam este problema usando a relação entre a torção de Ray-Singer e a torção de Reidemeister, que é um objeto puramente combinatório, calculado a partir dos geradores da homologia das superfícies em questão. Apesar de observarem que a probabilidade de transição de topologia não é necessariamente nula, os autores afirmam que, devido às já mencionadas divergências, ainda não é possível tirar uma conclusão definitiva sobre este tipo de processo.

Regra de seleção

Nas considerações acima não é feita nenhuma restrição quanto às superfícies de Riemann que suposemos representar a parte espacial do espaço-tempo M . Entretanto, para que esta interpretação seja correta é necessário que $\Sigma = \partial M$ seja uma superfície tipo espaço, i.e. que a restrição do *dreibein* e à Σ induza uma métrica euclídeana (positiva definida) em Σ . Equivalentemente, devemos exigir que o fibrado $P'(\Sigma, SO(2, 1)) = P|_{\Sigma}$ seja redutível a um fibrado $P''(\Sigma, SO(2))$. Partindo desta observação, Amano & Higuchi [1] deduzem uma regra de seleção⁸ para os processos de transição de topologia descritos acima.

Mess demonstrou, em trabalho não publicado citado por Amano & Higuchi, que se uma variedade compacta orientável com métrica de Lorentz

⁸Em teoria quântica, uma regra de seleção é uma relação entre os estados inicial e final que deve ser satisfeita; transições que violem esta relação são automaticamente proibidas.

desprovida de curvatura. M (exatamente o caso de interesse aqui) tem como bordo uma superfície tipo espaço então M tem necessariamente a topologia $M = \partial M \times \mathbb{R}$. Claramente, este resultado proíbe mudanças de topologia em uma teoria clássica da gravitação. Entretanto, como é apontado por Witten [64], a teoria quântica permite métricas degeneradas, saindo do escopo do resultado acima e abrindo a possibilidade de mudança de topologia; i.e. tais processos são essencialmente quânticos.

A classe de Euler $e(P'') \in H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$ coincide com a primeira classe de Chern deste e classifica P'' completamente. Explicitamente, seja θ uma $SO(2)$ -conexão em P'' , então a classe de Euler fica dada por (lembre que a curvatura é dada por $\Theta = d\theta$):

$$e(P'') = \frac{i}{2\pi} \int_{\Sigma} d\theta \quad (5.36)$$

A característica de Euler de uma variedade é definida como sendo a classe de Euler do seu fibrado tangente: $\chi(\Sigma) = e(T\Sigma)$; para uma superfície de Riemann de gênero g vale que $\chi(\Sigma) = 2g - 2$.

Queremos mostrar o seguinte resultado: *se Σ é uma superfície tipo espaço mergulhada em $P(M, ISO(2, 1))$, então $e(P|_{\Sigma}) = e(P'') = \chi(\Sigma)$, ou seja, o $SO(2)$ -fibrado induzido P'' é isomorfo ao fibrado tangente $T\Sigma$, a menos de orientação.* De fato, seja Σ uma superfície tipo espaço mergulhada em M e escolha um referencial ortonormal (na métrica de Minkowski) $\{f_0, f_1, f_2\}$ sobre Σ , ou seja $\langle f_a, f_b \rangle = \eta_{ab}$. Como Σ é tipo espaço, podemos tomar f_0 como sendo um campo normal à Σ . Assim $P|_{\Sigma} = P' = P'' \oplus \varepsilon^1$, onde P , P' e P'' são vistos como os respectivos fibrados vetoriais associados. Segue então que $\{f_1, f_2\}$ formam um referencial ortonormal (agora na métrica euclidiana usual) tangente à Σ , ou seja $P'' = T\Sigma$, donde $e(P'') = \chi(\Sigma)$, como queríamos demonstrar.

É interessante notar que a presente condição é mais natural que aquela apontada por Witten ao escolher a componente de \mathcal{N} correspondente às conexões com classe de Euler $\pm(2g - 2)$ como fisicamente relevantes. Passamos

agora à regra de seleção propriamente dita.

Seja M 3-variedade tal que $\partial M = \Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_j$, onde $\Sigma_i = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_k$ é o estado espacial inicial e $\Sigma_f = \Sigma_{k+1} \cup \dots \cup \Sigma_j$ é o estado espacial final. Seja ainda $P(\Sigma, SO(2))$ um $SO(2)$ -fibrado sobre Σ , de maneira que Σ é um superfície tipo espaço de M . Para que esta transição seja permitida é necessário que exista uma extensão de $P(\Sigma, SO(2))$ para um $ISO(2, 1)$ -fibrado sobre M $\hat{P}(M, ISO(2, 1))$. Seja $Q(M, SO(2))$ um sub-fibrado de \hat{P} e tome uma conexão ν em Q . Se Σ tem a orientação induzida de M , então, pelo teorema de Stokes, vale que:

$$e(P) = \sum_{k=1}^j e(P|_{\Sigma_k}) = \frac{i}{2\pi} \int_{\partial M} d\nu = 0 \quad (5.37)$$

Como $e(P|_{\Sigma_k}) = \pm \chi(\Sigma_k)$, temos que uma condição necessária para que a transição de Σ_i para Σ_f seja permitida é que:

$$\sum_{k=1}^j \epsilon_k \chi(\Sigma_k) = 0 \quad (5.38)$$

onde ϵ_k é um sinal que dá conta da orientação de M induzida em Σ_k . Obtemos assim a prometida regra de seleção. É interessante notar que Sorkin [60] deduziu uma regra de seleção para processos de mudança de topologia do espaço-tempo análoga à (5.38), usando entretanto argumentos completamente diferentes.

5.3 Teoria de calibre massiva

Prosseguindo o estudo de teorias de calibre em dimensão 2+1, passamos a analisar um modelo primeiramente introduzido por Schonfeld em [58] e Deser, Jackiw & Templeton em [20] e [19]. Estes autores observaram que se adicionarmos o termo de Chern-Simons à lagrangeana da teoria de Yang-Mills usual obtendo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{tr} \left\{ F \wedge *F - \mu \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \right\} \quad (5.39)$$

o campo de calibre (aqui representado pela curvatura F) torna-se massivo, sem quebrar a simetria de calibre e sem introduzir campos auxiliares ⁹, e outros fenômenos físicos interessantes surgem. Em (5.39), g é a constante de acoplamento dos campos de calibre e μ é uma constante com unidade de massa, chamada *massa topológica*; na nossa notação anterior $k = \frac{\mu}{g^2}$ (portanto k grande corresponde a pequeno acoplamento).

Conforme observamos anteriormente (secção 4.2), o termo de Chern-Simons não é invariante de calibre, mas se transforma de uma maneira bastante especial sob mudanças de calibre. De fato, a ação $S = \int_M \mathcal{L}$ altera-se pela adição de um inteiro, de maneira que a quantidade fisicamente relevante $\exp(iS)$ fica invariante de calibre. Supondo fixada a constante de acoplamento g , a condição de quantização da constante k observada na secção 4.2 torna-se uma condição de quantização sobre a massa topológica μ .

Esta situação é simplificada se o grupo de calibre for $U(1)$; no caso abeliano a segunda classe secundária é identicamente nula, portanto independente da conexão. Assim a lagrangeana (5.39) é invariante de calibre, o que implica que a constante μ não é quantizada.

Deser, Jackiw & Templeton demonstram a condição de quantização acima de maneira diferente, sem recorrer ao teorema 2.3, mas restringindo-se ao grupo de calibre $SU(2)$ e $M = \mathbf{R}^3$. O argumento é bastante interessante. Sob a mudança de calibre dada por $A \rightarrow U^{-1}AU + U^{-1}dU$, sendo $U : M \rightarrow G$, a lagrangeana (5.39) transforma-se da seguinte maneira:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{\mu}{g^2} \text{tr} \left\{ d(A \wedge U^{-1}dU) + \frac{1}{3} U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \right\} \quad (5.40)$$

Exigindo-se que a transformação de calibre anule-se no infinito espaço-temporal, ou seja, $U(x) \rightarrow Id$ quando $x \rightarrow \infty$ ¹⁰, o primeiro termo dentro do traço

⁹Na teoria de Yang-Mills usual, campos de calibre são necessariamente não massivos, podendo adquirir massas por meio do chamado mecanismo de Higgs de quebra espontânea de simetria, cujo subproduto é o surgimento de uma partícula de spin 0, o bóson de Higgs (veja [56], capítulo 8).

¹⁰Esta exigência é bastante usual em teoria de campos e reflete a hipótese de que o

anula-se após a integração, via teorema de Stokes; alternativamente, para o caso de M ser uma variedade compacta sem bordo, este termo é uma 3-forma exata e também anula-se após a integração.

Resta o segundo termo do traço; note que ele independe da conexão, sendo dependente apenas da transformação de calibre U . Na hipótese de espaço-tempo assintoticamente uniforme, \mathbf{R}^3 pode ser continuamente compactificado na 3-esfera. Como $SU(2) \cong S^3$, temos que $U : S^3 \rightarrow S^3$ e o segundo termo é interpretado como sendo o *winding number* da aplicação U , ou seja, quantas vezes U recobre S^3 ; fica claro que, sob mudança de calibre, lagrangeana (5.39) altera-se apenas pela adição de um inteiro, levando a quantização de μ como no início da secção 4.2. No caso geral, este segundo termo estaria ligado à ao grupo das classes de homotopia de aplicações $U : M \rightarrow S^3$, denotado por $[M, S^3]$.

No caso abeliano, o problemático termo $\frac{1}{3}U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU$ não aparece; ou seja, a lagrangeana altera-se, sob mudança de calibre, apenas por uma divergência total $d(A \wedge U^{-1}dU)$, que anula-se após a integração como observamos assim. Concluimos novamente que no caso eletromagnético a constante μ não é quantizada.

Outro fato interessante a ser observado é que a adição do termo de Chern-Simons na lagrangeana não altera o tensor de energia-momento da teoria de Yang-Mills usual, dado por $T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ (aqui $g^{\mu\nu}$ denota uma métrica riemanianna em M), pois é um termo topológico, ou seja, independente da métrica. Isto significa que a dinâmica fica inalterada; a estática, entretanto, é dramaticamente alterada, como veremos em seguida. Note ainda que $\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$, ou seja, o tensor de energia-momento da teoria dada pela lagrangeana (5.39) é conservado.

espaço-tempo é assintoticamente uniforme e isotrópico.

Dedução da equação de movimento

Passamos agora a dedução da equação de movimento via princípio variacional. Introduzimos primeiramente uma variação de primeira ordem no potencial de *gauge* $A_\tau = A + \tau a$, o campo sendo dado por $F_\tau = F + \tau Da + \tau^2 a \wedge a$, onde D denota a derivada exterior covariante; desta maneira (temporariamente deixando de lado o traço e a constante de acoplamento por simplicidade):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\tau &= (F + \tau Da + \tau^2 a \wedge a) \wedge *(F + \tau Da + \tau^2 a \wedge a) + \\ &\quad \mu \left((A + \tau a) \wedge (dA + \tau da) + \frac{2}{3} (A + \tau a) \wedge (A + \tau a) \wedge (A + \tau a) \right) \\ &= \mathcal{L} + \tau \left\{ F \wedge *Da + Da \wedge *F + \mu (a \wedge dA + A \wedge da + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{3} (a \wedge A \wedge A + A \wedge a \wedge A + A \wedge A \wedge a)) \right\} + O(\tau^2) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Exigindo agora que $\frac{d}{d\tau} \mathcal{L}_\tau|_{\tau=0} = 0$ (pontos críticos da ação) obtemos:

$$\begin{aligned} &F \wedge *Da + Da \wedge *F + \\ &+ \mu \left[a \wedge dA + A \wedge da + \frac{2}{3} (a \wedge A \wedge A + A \wedge a \wedge A + A \wedge A \wedge a) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

Relembrando o produto interno de formas introduzido em (5.5) e observando que $** = 1$ para 1- e 2-formas em 3-variedades podemos reescrever a expressão acima como sendo:

$$\begin{aligned} &2 \langle Da, F \rangle - \mu \left[\langle a, *dA \rangle + \langle A, *da \rangle + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{3} (\langle A \wedge A, *a \rangle + \langle A \wedge a, *A \rangle + \langle a, *(A \wedge A) \rangle) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

denotando agora por $D^* = *D*$ e $\delta = *d*$ os adjuntos de D e d respectivamente e lembrando que $*$ é auto-adjunto, obtemos:

$$\begin{aligned} &2 \langle Da, F \rangle - \mu \left[\langle a, *dA + \delta *A \rangle + \frac{2}{3} (2 \langle a, *(A \wedge A) \rangle + \langle *(A \wedge a), A \rangle) \right] = \\ &= 2 \langle a, D^*F \rangle - \mu [2 \langle a, *dA \rangle + 2 \langle a, *(A \wedge A) \rangle] = 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

pois $\delta *A = (*d*) *A = *d(**A) = *dA$ e $\langle *(A \wedge a), A \rangle = A \wedge ** (A \wedge a) = ** (A \wedge A) \wedge a = \langle a, *(A \wedge A) \rangle$; desta maneira:

$$\langle a, D^*F \rangle - \mu \left[\langle a, *(dA + A \wedge A) \rangle \right] = \langle a, D^*F - \mu(*F) \rangle = 0 \quad (5.45)$$

qualquer que seja a perturbação a . A equação de movimento da teoria é portanto dada por:

$$D^*F - \mu(*F) = 0 \quad {}^{11} \quad (5.46)$$

É interessante observar que apesar da lagrangeana (5.39) não ser invariante de calibre, a equação de movimento a partir dela obtida o é. De fato, sob mudanças de calibre a campo F sofre a transformação $F \rightarrow gFg^{-1}$, onde $g : M^3 \rightarrow SU(n)$; assim, lembrando que g pode ser encarado com uma 0-forma, temos que:

$$D^*(gFg^{-1}) = g(D^*F)g^{-1} \quad *(gFg^{-1}) = g(*F)g^{-1} \quad (5.47)$$

donde segue de imediato a invariância de (5.46).

A equação de movimento é a chave para interpretarmos a constante μ como sendo a massa do campo de calibre. Seja $B = *F$ o campo de calibre dual e note que $D^*B = *D**F = *DF = 0$ pela identidade de Bianchi. De (5.46) temos que:

$$\begin{aligned} D^*F - \mu(*F) &= *DB - \mu B = (*D - \mu)B = 0 \Rightarrow (*D - \mu)^2 B = 0 \\ (*D - \mu)^2 B &= (D^*D - 2\mu *D + \mu^2)B = [(D^*D + DD^*) - \mu^2]B = 0 \end{aligned} \quad (5.48)$$

pois $*DB = \mu B$; da expressão acima resulta a equação:

$$(\Delta - \mu^2)B = 0 \quad (5.49)$$

onde Δ é o laplaciano covariante; (5.49) indica que o campo dual B se propaga como uma partícula livre de massa μ e spin 1, portanto é correto interpretar a constante μ como sendo a massa do campo de calibre ¹². Assim, o termo de Chern-Simons é entendido como um termo de massa e μ é o análogo do ângulo θ que surge no mecanismo de Higgs.

¹¹Notando que na notação com coordenadas explícitas usual em física temos que $*F = *F_\alpha = \epsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu}$ e que $D^*F = -2D_\mu F^{\mu\nu}$, obtemos $D_\nu F^{\nu\alpha} + \frac{\mu}{2}\epsilon^{\beta\nu\alpha} F_{\beta\nu} = 0$ como em [20].

¹²O sinal, aparentemente trocado, deve-se ao fato de que, em coordenadas, $\Delta B = -[\partial_\nu(\partial^\nu B_\mu) + \partial_\mu(\partial^\nu B_\nu)]$.

Note ainda que μ^2 são os autovalores do laplaciano covariante em M , que por hipótese é uma 3-variedade compacta e orientável; assim, os valores possíveis de μ^2 formam um conjunto discreto, o que é mais uma indicação da quantização da massa topológica μ . Soluções para equação de campo (5.46) estão portanto ligadas às autofunções de Δ ; para o caso de geometria riemanniana (campo gravitacional), veja [27]. Isto é bastante sugestivo, pois sabe-se que o espectro do laplaciano está intimamente ligado à topologia de M (via teorema de Hodge); veja por exemplo [34].

Acoplamento com a matéria

A introdução de acoplamento entre o campo de calibre A e um campo spinorial massivo de 2 componentes ψ , representando um elétron ou um quark, é feita adicionando-se à lagrangeana (5.39) termos de propagação livre do férmion massivo \mathcal{L}_f mais um termo de interação mínima \mathcal{L}_i , dados por:

$$\mathcal{L}_f = i(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi \quad \mathcal{L}_i = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (5.50)$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac ¹³, na representação 2-dimensional:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

m é a massa e e a carga do férmion ψ e $A = A_\mu dx^\mu$. As novas equações de campo da lagrangeana de interação $\mathcal{L} + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_i$:

$$\begin{cases} D^*F - \mu(*F) = J \\ \gamma^\mu(\partial_\mu + eA_\mu)\psi - m\psi = 0 \end{cases} \quad (5.52)$$

onde $J = -(e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)dx_\mu$ é a corrente associada ao campo ψ , obtida pela variação da conexão A no termo cinético do campo spinorial. Estas equações são novamente invariantes de calibre.

¹³Geometricamente, $\gamma^\mu\partial_\mu$ é o operador de Dirac no fibrado spinorial sobre M .

Esta nova lagrangeana apresenta algumas propriedades interessantes. A primeira delas diz respeito à quebra de certas simetrias discretas: conjugação de carga (denotada por C), transformação de paridade (P) e inversão temporal (T). O efeito destas transformações nos campos de calibre e spinorial é descrito na tabela abaixo:

conj. carga (C)	paridade (P)
$A^0(t, x, y) \rightarrow -A^0(t, x, y)$	$A^0(t, x, y) \rightarrow A^0(t, -x, y)$
$A^1(t, x, y) \rightarrow -A^1(t, x, y)$	$A^1(t, x, y) \rightarrow -A^1(t, -x, y)$
$A^2(t, x, y) \rightarrow -A^2(t, x, y)$	$A^2(t, x, y) \rightarrow A^2(t, -x, y)$
$\psi(t, x, y) \rightarrow -i\gamma^1\psi^\dagger(t, x, y)$	$\psi(t, x, y) \rightarrow -i\gamma^1\psi(t, -x, y)$
inv. temporal (T)	
$A^0(t, x, y) \rightarrow A^0(-t, x, y)$	
$A^1(t, x, y) \rightarrow -A^1(-t, x, y)$	
$A^2(t, x, y) \rightarrow -A^2(-t, x, y)$	
$\psi(t, x, y) \rightarrow -i\gamma^2\psi(-t, x, y)$	

Conjugação de carga deixa a lagrangeana invariante; as outras duas transformações, entretanto, alteram o sinal dos termos de massa do campo spinorial ($m\bar{\psi}\psi$) e o termo de massa topológica (Chern-Simons), deixando os demais termos invariantes. Dizemos então que as simetrias P e T são quebradas. As transformações P e T combinadas deixam inalterada a lagrangeana de interação; então, a lagrangeana também fica invariante pela combinação das três transformações, que denota-se CPT . Este fato é bastante relevante, pois permite a ligação da teoria de Chern-Simons acoplada com a matéria com o estudo de anomalias dos campos de calibre em dimensão 3+1 (veja [10]).

Se a massa fermiônica for igual à massa topológica do campo de calibre ($m = \mu$) a transformação supersimétrica dada por (aqui ϵ é um parâmetro spinorial constante, chamado parâmetro de Grassmann):

$$\delta A_\mu = i\bar{\epsilon}\gamma_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma_\mu\epsilon \quad \delta\psi = -iB_\mu\gamma^\mu\epsilon \quad (5.53)$$

altera lagrangeana $\mathcal{L} + \mathcal{L}_f$ apenas por uma divergência total, que pode ser desprezada se trabalhamos com 3-variedades sem bordo (teorema de Stokes) ou com uma variedade do tipo $\Sigma \times \mathbb{R}$ em que os campos tendem a zero no infinito temporal. Note que é o termo de massa fermiônico que se transforma no termo de massa topológica e vice-versa; os termos cinéticos também se transformam entre si. O termo de acoplamento mínimo com o campo spinorial \mathcal{L}_i não é supersimétrico ¹⁴ (veja também o apêndice A de [58]).

É natural supor que a interação de calibre passe a ter alcance finito, pois os seus intermediadores são agora massivos. De fato, segue da equação de campo (5.46) que a parte elétrica $E^\alpha = F^{0\alpha}$ decai exponencialmente como $e^{-\mu r}$. Restringindo-se agora ao caso eletromagnético (abeliano) no espaço-tempo plano tridimensional de Minkowski, considere uma carga elétrica pontual q parada no ponto $x \in \mathbb{R}^2$, gerando um campo estático. A equação de movimento fica então dada por, em coordenadas:

$$\partial_\nu F^{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\mu\epsilon^{\alpha\nu\lambda}F_{\nu\lambda} = -eg^{0\alpha}\delta^2(x) \quad (5.54)$$

onde $\delta^2(x)$ denota a função delta de Dirac na componente espacial e $g^{\mu\nu}$ é a métrica. Integrando-se a componente temporal ($\alpha = 0$) de (5.54) em todo espaço:

$$\int \left(-\text{div}(\mathbf{E}) + \mu\mathbf{B} + e\delta^2(x) \right) d^2x \quad (5.55)$$

onde $E_j = F^{0j}$ é a parte elétrica e $B = \epsilon^{jk}\partial_j A_k = F^{12}$ a parte magnética do campo eletromagnético $F^{\nu\alpha}$ (aqui $j, k = 1, 2$). Observe que o primeiro termo é uma divergência total e sob hipótese de que o campo elétrico é nulo no infinito espacial vale que $\int \text{div}(\mathbf{E})d^2x = 0$; de fato, segue de (5.46) que o campo elétrico decai exponencialmente devido ao termo de massa. Assim, a

¹⁴Teorias de campo supersimétricas têm profunda relação com a topologia de 4-variedades, conforme é mostrado por Witten em [65] e [69]. A teoria de Chern-Simons pura apresentado na secção 5.1 também pode ser feita supersimétrica, veja [12] secção (8.4.6).

expressão acima reduz-se para:

$$\int B d^2x = \frac{e}{\mu} \quad (5.56)$$

O lado esquerdo da equação acima é simplesmente o fluxo do campo magnético passando pelo plano espacial; segue então que o fluxo do campo magnético gerado por uma carga é proporcional a esta, ao contrário da eletrodinâmica usual de Maxwell, em que cargas elétricas estáticas não geram campo magnético.

Outra possibilidade é acoplar minimamente o campo de calibre com um ou mais campos escalares (que descrevem partículas de *spin* 0, como píons), que denotaremos por ϕ_j . Os campos escalares podem ser auto-acoplados ou acoplados entre si; a constante de acoplamento destes campos com o campo de calibre é simplesmente a carga elétrica e . O modelo, chamado de modelo de Chern-Simons-Higgs, tem lagrangeana dada por:

$$\mathcal{L}_{CSH} = \frac{1}{2g^2} \text{tr} \left\{ F \wedge *F - \mu \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \right\} - \sum_j \frac{1}{2} D\phi_j^* \wedge *D\phi_j + V(\phi_j) \quad (5.57)$$

onde $D = \partial_\mu - ieA_\mu$ denota a derivada covariante do campo escalar e $V(\phi_j)$ é um potencial inicialmente não especificado. Note ainda que ϕ_j^* é complexo conjugado de ϕ_j . As equações de movimento desta nova lagrangeana são:

$$\begin{cases} D^*F - \mu(*F) = ie \sum_j [\phi_j^*(D\phi_j) - (D\phi_j^*)\phi_j] \\ \tilde{\Delta}\phi_j = -\frac{\partial V}{\partial \phi_j^*}, \text{ para cada } j \end{cases} \quad (5.58)$$

onde $\tilde{\Delta} = (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu)$ é o laplaciano covariante em 0-formas. O lado direito da primeira equação é a corrente associada ao campo escalar, também obtida pela variação da conexão no termo cinético destes campos. Observe que (5.58) são invariantes de calibre.

Sem o termo de Chern-Simons (portanto sem o segundo termo do lado esquerdo da primeira equação em (5.58)), as soluções de energia finita de (5.58), chamadas vórtices, possuem fluxo magnético não-nulo mas não têm

carga elétrica. Entretanto, H. de Vega & F. Schaposnik observaram em [18] que, no caso do grupo de calibre ser $SU(2)$, a introdução do termo de Chern-Simons faz com que os vórtices de (5.58) adquiram carga elétrica mantendo a energia finita. Para tanto, os autores utilizaram dois campos escalares e um potencial de Higgs da forma:

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{8}g^2(|\phi_1|^2 - \eta_1)^2 + \frac{1}{8}h^2(|\phi_2|^2 - \eta_2)^2 + \frac{1}{2}l^2|\phi_1\phi_2|^2 \quad (5.59)$$

onde $\eta_{1,2}$, g , h e l são parâmetros. Ainda, devido à quantização da massa topológica μ , as cargas elétrica e magnética da solução de vórtice também são quantizadas.

No caso abeliano, Hong, Kim & Pac [32] notaram posteriormente que o termo cinético de Maxwell (primeiro termo em (5.57)) não é necessário para existência deste tipo de solução. Mesmo sem o primeiro termo do lado esquerdo na primeira equação, (5.58) ainda possui soluções de vórtices com carga elétrica e fluxo magnético não-nulos e quantizados. Apenas um campo escalar é necessário e o potencial de Higgs é dado por:

$$V(\phi) = \frac{e^4}{8\mu^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - v^2)^2 \quad (5.60)$$

onde v é um parâmetro ligado à energia. Curiosamente, C. Lee, K. Lee & S. Weinberg mostraram em [39] que este mesmo sistema, ou seja, a lagrangiana (5.57) com campo de calibre abeliano sem o termo de Maxwell, um campo escalar e o potencial dado acima, apresenta um certo tipo de supersimetria.

Quantização

Até o momento lidamos apenas com os aspectos clássicos da teoria. A quantização do termo de Chern-Simons puro foi feita na secção 5.1, quando mostramos que a função de partição é independente da métrica do espaço-tempo. Entretanto, o termo cinético $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ não é topológico. Pisarski &

Rao [51] trataram a quantização de (5.39) do ponto de vista perturbativo, calculando propagadores e correções até segunda ordem. Este trabalho está, entretanto, fora do escopo da presente abordagem.

Um caso de especial interesse é o abeliano minimamente acoplado com campo spinorial, ou seja, a eletrodinâmica quântica (QED) em dimensão 2+1. Neste caso, Niemi & Semenoff [49] mostraram que partindo-se da lagrangeana clássica com fótons não-massivos:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F \wedge *F + \mathcal{L}_f \quad (5.61)$$

e supondo-se que o potencial A é estático e satisfaz a condição de calibre dada por $A_0 = 0$, então o termo de Chern-Simons (massa topológica) é induzido radiativamente, ou seja, surge como correção quântica à lagrangeana clássica. Isto significa que o mecanismo para geração de massa dos campos de calibre é intrínseco à dimensionalidade, e a massa depende da topologia do espaço-tempo considerado, pois, como observamos acima, ela está ligada ao espectro do laplaciano. Os mesmos autores conjecturam que argumento idêntico seja válido para qualquer espaço-tempo de dimensão ímpar além de 3, sendo que o termo induzido radiativamente é a classe secundária de Chern-Simons pertinente. Este argumento torna a introdução do termo de Chern-Simons na teoria de calibre usual bastante natural.

Outras aplicações

Além das propriedades analisadas na secção anterior, a teoria de calibre massiva em dimensão 2+1 minimamente acoplada com a matéria apresenta ainda outro fenômeno de grande interesse em física. Trata-se do aparecimento de partículas com estatística fracionária.

A teoria quântica usual estabelece que existem apenas dois tipos de partículas elementares na natureza: *bósons*, que possuem spin inteiro, e

férmions, que possuem spin semi-inteiro. O spin está ligado a estatística obedecida pela partícula: quando permutamos dois bósons de posição, a função de onda que os descreve ganha uma fase múltipla de 2π , ou seja, permanece inalterada; a permutação de dois férmions, entretanto, faz com que a função de onda que os descreve ganhe uma fase múltipla da forma $(2n + 1)\pi$, ou seja, troque de sinal.

Porém, Leinaas e Myrheim [40] notaram que quando restritas ao plano (dimensão 2+1), partículas quânticas idênticas podem não ser nem bósons nem férmions, podendo ter spin $\frac{1}{n}$ para qualquer inteiro n . Isto quer dizer que permutações destas partículas, usualmente chamadas *anyons*, alteram a função de onda pelo ganho de uma fase múltipla de $\frac{2\pi}{n}$, podendo ter estatística fracionária.

Hansson *et al.* [30] mostraram que campos de matéria minimamente acoplados com um campo de calibre auto-acoplado via termo de Chern-Simons também apresentam estatística fracionária, pelo menos no caso abeliano (eletromagnetismo, U(1) como grupo de calibre). Este resultado torna a teoria apresentada acima aplicável ao estudo de dois fenômenos em matéria condensada que apresentam relação com o surgimento de estatística fracionária sob a ação de um campo eletromagnético: o efeito Hall quântico [3] e a supercondutividade em alta temperatura crítica [53].

Bibliografia

- [1] K. Amano and S. Higuchi. Topology change in ISO(2,1) Chern-Simons gravity. *Nuclear Physics B*, 377(1-2):218–235, 1992.
- [2] M. Armstrong. *Basic topology*. Springer-Verlag, 1983.
- [3] D. Arovas, J. Schrieffer, and F. Wilczek. Fractional statistics and quantum Hall effect. *Physics Review Letters B*, 53(7):722–723, 1983.
- [4] M. Atiyah. *Geometry and physics of knots*. Cambridge University Press, 1990.
- [5] M. Atiyah. Quantum theory and geometry. *Journal of Mathematical Physics*, 36(11):6069–6072, 1996.
- [6] M. Atiyah, N. Hitchin, and I. Singer. Self-duality in four-dimensional riemannian geometry. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 362(2):425–461, 1978.
- [7] M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer. Spectral asymmetry and riemannian geometry I. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 77(1):43–70, 1975.
- [8] S. Axelrod, S. Della Pietra, and E. Witten. Geometric quantization of Chern-Simons gauge theory. *Journal of Differential Geometry*, 33(3):787–902, 1991.

- [9] S. Axelrod and I. Singer. Chern-Simons perturbation theory II. *Journal of Differential Geometry*, 39(1):173–213, 1994.
- [10] R. Banerjee. Chern-Simons terms and anomalies in gauge theories. *Modern Physics Letters A*, 6(21):1915–1921, 1991.
- [11] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwarz, and Yu. Tyupkin. Pseudo-particle solutions to the Yang-Mills equations. *Physics Letters B*, 59(1):85–87, 1975.
- [12] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski, and G. Thompson. Topological field theory. *Physics Reports*, 209(4,5):129–340, 1991.
- [13] S. Carlip and R. Cosgrove. Topology change in (2+1)-dimensional gravity. *Journal of Mathematical Physics*, 35(10):5477–5493, 1994.
- [14] J. Cheeger and J. Simons. Differential characters and geometric invariants. *Lecture Notes in Mathematics*, 1167:59–65, 1979.
- [15] S. S. Chern. *Topics in differential geometry*. Princeton University Press, 1951.
- [16] S. S. Chern and J. Simons. Characteristic forms and geometric invariants. *Annals of Mathematics*, 99(1):48–69, 1974.
- [17] R. H. Crowell and R. H. Fox. *Introduction to knot theory*. Springer-Verlag, 1977.
- [18] H. de Vega and F. Schaposnik. Electrically charged non-abelian gauge theories with Chern-Simons terms. *Physical Review Letters*, 56(24):2564–2566, 1986.
- [19] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton. Three-dimensional massive gauge theories. *Physical Review Letters*, 48(15):975–978, 1982.

- [20] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton. Topologically massive gauge theories. *Annals of Physics*, 140(2):372–411, 1982.
- [21] S. K. Donaldson and P. Kronheimer. *Geometry of four-manifolds*. Clarendon Press, 1990.
- [22] A. Einstein and P. Bergmann. On a generalization of Kaluza's theory of electricity. *Annals of Mathematics*, 39(2):683–701, 1938. Reproduzido em *Modern Kaluza-Klein Theories* eds. T. Appelquist, A. Chodos & P. Freund, p.89-107.
- [23] L. Eisenhart. *Riemannian Geometry*. Princeton University Press, 1949.
- [24] R. Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 20(2):367–387, 1948.
- [25] D. Freed and R. Gompf. Computer calculations of Witten's 3-manifold invariant. *Communications in Mathematical Physics*, 141(1):79–119, 1991.
- [26] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. Lickorish, K. Millet, and A. Ocneanu. A new polynomial invariant for knots and links. *Bull. Am. Math. Soc.*, 12(2):9–28, 1985.
- [27] S. Galot and D. Meyer. Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 54(3):259–284, 1975.
- [28] D. Gepner and E. Witten. String theory on group manifolds. *Nuclear Physics B*, 278(3):493–549, 1986.
- [29] D. Hacon. *Introdução à teoria dos nós em \mathbf{R}^3* . IMPA, 1985.

- [30] T. Hansson, M. Rocek, I. Zahed, and S. Zhang. Spin and statistics in massive (2+1)-dimensional QED. *Physics Letters B*, 214(3):475–479, 1988.
- [31] W. Heisenberg and W. Pauli. Zur Quantendynamik der Wellenfelder. *Zeitschrift für Physik*, 56(1-2):1–61, 1929.
- [32] J. Hong, Y. Kim, and P. Pac. Multivortex solutions of the abelian Chern-Simons higgs theory. *Physical Review Letters*, 64(19):2230–2234, 1986.
- [33] D. Husemoller. *Fiber Bundles*. Springer-Verlag, 1966.
- [34] M. Jardim. Mass spectrum of (2+1)-dimensional topologically massive gauge theory. Preprint HEP-TH/9604095.
- [35] V. F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Am. Math. Soc.*, 12(1):103–111, 1985.
- [36] L. H. Kaufmann. *Knots and physics*. World Scientific, 1991.
- [37] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*, volume 1. Interscience Publishers, 1963.
- [38] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*, volume 2. Interscience Publishers, 1969.
- [39] C. Lee, K. Lee, and S. Weinberg. Supersymmetry and self-dual Chern-Simons systems. *Physics Letters B*, 243(1-2):105–108, 1990.
- [40] J. Leinaas and J. Myrheim. On the theory of identical particles. *Nuovo Cimento B*, 137(1):1–23, 1977.
- [41] W. Lickorish. A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. *Annals of Mathematics*, 76(3):531–540, 1962.

- [42] J. Millson. Examples of nonvanishing Chern-Simons invariants. *Journal of Differential Geometry*, 10(4):589–600, 1975.
- [43] J. Milnor. Construction of universal bundles I. *Annals of Mathematics*, 63(2):272–284, 1956.
- [44] J. Milnor and J. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, 1974.
- [45] G. Moore and N. Seiberg. Polynomial equations for rational conformal field theories. *Physics Letters B*, 212(3):451–460, 1988.
- [46] G. Moore and N. Seiberg. Taming the conformal zoo. *Physics Letters B*, 220(3):422–430, 1989.
- [47] M. S. Narasimhan and S. Ramanan. Existence of universal connection. *American Journal of Mathematics*, 83(4):563–572, 1961.
- [48] C. Nash. *Differential topology and quantum field theory*. Academic Press, 1993.
- [49] A. Niemi and G. Semenoff. Axial-anomaly-induced fermion fractionization and effective gauge theory actions in odd-dimensional space-times. *Physical Review Letters*, 51(23):2077–2080, 1983.
- [50] G. Pichon. *Groupes de Lie: représentations linéaires et applications*. Hermann, 1973.
- [51] R. Pisarski and S. Rao. Topologically massive chromodynamics in the perturbative regime. *Physical Review D*, 23(8):2081–2096, 1985.
- [52] P. Ramond. *Field Theory - A modern primer*. Benjamin/Cummings Publishing Co., 1981.

- [53] S. Randjbar-Daemi, A. Salam, and J. Strathdee. Chern-Simons superconductivity at finite temperature. *Nuclear Physics B*, 340(3):403–447, 1990.
- [54] D. Ray and I. Singer. R-torsion and the laplacian in riemannian manifolds. *Advances in Mathematics*, 7(1):145–201, 1971.
- [55] N. Reshetikhin and V. Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Inventiones Mathematicae*, 103(3):547–597, 1991.
- [56] L. H. Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 1985.
- [57] R. Schlaflly. Universal connections. *Inventiones Mathematicae*, 59(1):59–65, 1980.
- [58] J. Schonfeld. A mass term for three dimensional gauge fields. *Nuclear Physics B*, 185(1):157–171, 1981.
- [59] A. Schwarz. The partition function of degenerate quadratic functional. *Communications in Mathematical Physics*, 67(1):1–16, 1979.
- [60] R. Sorkin. Topology change and monopole creation. *Physical Review D*, 33(4):978–982, 1986.
- [61] N. Steenrod. *The topology of fibre bundles*. Princeton University Press, 1951.
- [62] K. Tsuboi. On Chern-Simons invariants of spherical space forms. *Japanese Journal of Mathematics*, 10(1):9–28, 1984.
- [63] H. Weyl. *The theory of groups and quantum mechanics*. Dover, 1950. Tradução inglesa de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 2^aed., 1930.

- [64] E. Witten. 2+1 dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nuclear Physics B*, 311(1):46–78, 1988.
- [65] E. Witten. Topological quantum field theory. *Communications in Mathematical Physics*, 117(3):353–386, 1988.
- [66] E. Witten. Topological sigma model. *Communications in Mathematical Physics*, 118(3):411–466, 1988.
- [67] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, 121(3):351–399, 1989.
- [68] E. Witten. Topology-changing amplitudes in 2+1 dimensional gravity. *Nuclear Physics B*, 323(1):113–140, 1989.
- [69] E. Witten. Supersymmetric Yang-Mills theory on a four-manifold. *Journal of Mathematical Physics*, 35(10):5101–5135, 1994.
- [70] C. Yang and R. Mills. Isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical Review*, 96(1):191–195, 1954.