



RAQUEL VIEIRA LOPES

sk-SPLINES DE FUNÇÕES PERIÓDICAS

CAMPINAS
2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

RAQUEL VIEIRA LOPES

sk-SPLINES DE FUNÇÕES PERIÓDICAS

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para
obtenção do título de mestra em matemática aplicada.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELA ALUNA RAQUEL VIEIRA LOPES,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. SÉRGIO ANTONIO TOZONI

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in purple ink, which appears to read "Sérgio Tozoni", is written over a horizontal line. The signature is fluid and cursive.

CAMPINAS
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

L881s Lopes, Raquel Vieira, 1983-
 Sk-splines de funções periódicas / Raquel Vieira Lopes. –
 Campinas, SP : [s.n.], 2013.

 Orientador: Sérgio Antonio Tozoni.
 Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,
 Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

 1. Teoria da aproximação. 2. Spline, Teoria do. 3. Interpolação.
 I. Tozoni, Sérgio Antonio, 1953-. II. Universidade Estadual de
 Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
 Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Sk-splines of periodic functions

Palavras-chave em inglês:

Approximation theory

Spline theory

Interpolation

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestra em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Sérgio Antonio Tozoni [Orientador]

Benjamin Bordin

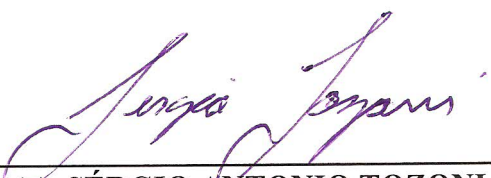
Mario Henrique de Castro

Data de defesa: 27-02-2013

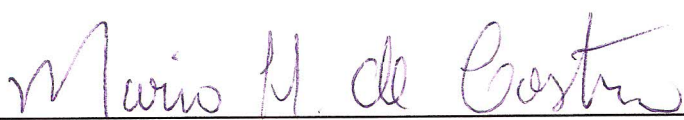
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 27 de fevereiro de 2013 e aprovada

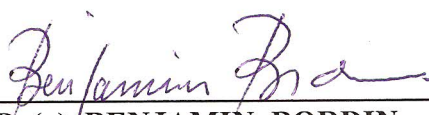
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). SÉRGIO ANTONIO TOZONI



Prof.(a). Dr(a). MARIO HENRIQUE DE CASTRO



Prof.(a). Dr(a). BENJAMIN BORDIN

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à minha mãe, Conceição, pelo exemplo de força e fé e por sempre confiar em minhas escolhas. Agradeço também ao meu pai, João, e aos meus irmãos, Rafael e Renata.

De um modo especial, agradeço ao Rodolfo, pelo amor, pela amizade, pelo companheirismo e por acreditar mais em mim do que eu mesma.

Agradeço ao professor Sergio Antonio Tozoni, pela confiança, paciência, disponibilidade e pelo competente trabalho de orientação.

Agradeço aos meus professores da UFJF, principalmente aos professores Fábio Rodrigues Pereira e Cristiane Andrade Mendes pela confiança e auxílio incondicionais.

Agradeço aos meus amigos de Campinas, Juiz de Fora, Viçosa e Ouro Branco, por simplesmente serem meus amigos.

Finalmente, agradeço à Capes e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Os sk -splines são uma generalização natural dos splines polinomiais, os quais foram introduzidos e tiveram sua teoria básica desenvolvida por Alexander Kushpel nos anos de 1983-1985. Estas funções são importantes em várias aplicações e seu espaço é gerado por translações discretas de uma única função núcleo.

Neste trabalho, estudamos condições necessárias e suficientes para a existência e unicidade de sk -splines interpolantes de funções periódicas. Além disso, estudamos a aproximação de funções de determinadas classes por sk -splines nos espaços L_p . Como aplicação estudamos a aproximação de funções infinitamente diferenciáveis e finitamente diferenciáveis por sk -splines.

Palavras-chave: spline, interpolação, aproximação, funções suaves, espaços de Sobolev.

Abstract

The sk -splines are a natural generalization of polynomial splines. They were introduced and their basic theory developed by Alexander Kushpel between 1983 and 1985. These functions are important in many applications and the space of sk -splines is the linear span of shifts of a single kernel K .

In this work, we study necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of sk -splines interpolants of periodic functions. Furthermore, we study the approximation in several classes of functions by sk -splines in the L_p spaces. As an application we study the approximation of infinitely and finitely differentiable functions by sk -splines.

Keywords: spline, interpolation, approximation, smooth functions, Sobolev spaces.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Símbolos	x
Introdução	1
1 sk-Splines Interpolantes com Nós Equidistantes	3
1.1 Existência e Unicidade	3
1.2 Condições Suficientes para Existência e Unicidade	8
1.3 Convergência de Algumas Séries Trigonômicas	18
2 Convergência de sk-Splines em L_q	34
2.1 sk -Spline Cardinal	34
2.2 Convergência de sk -Splines	37
3 Aplicações	47
3.1 Aproximação de Funções Infinitamente Diferenciáveis por sk -Splines	47
3.2 Aproximação de Funções Finitamente Diferenciáveis por sk -Splines	50
Índice Remissivo	55
Referências Bibliográficas	56

Lista de Símbolos

$C_{2\pi}$: espaço de funções reais contínuas e 2π -periódicas, página 3

Δ_n : partição do intervalo $[0, 2\pi]$, páginas 3 e 34

sk : sk -spline, páginas 3 e 34

c_k : coeficientes do sk -spline, página 3

c_k^* : coeficientes do sk -spline interpolante, página 4

$\overline{sk}$: sk -spline interpolante, página 4

x_s : nós do sk -spline, página 4

y_s : pontos de interpolação do sk -spline, página 4

$\mathbf{V} = \text{circ}\{\mathbf{v}\}$: matriz circulante, página 4

β_l : autovalor da matriz circulante, página 4

$\mathbf{x}_l$: autovetor da matriz circulante, página 4

$[n/2]$: parte inteira de $n/2$, página 5

$j \equiv k(n)$: j é congruente a k módulo n , página 8

λ_j : ver Definição 1.2.4, página 10

ρ_j : ver Definição 1.2.4, página 10

σ_j : ver Definição 1.2.4, página 10

K : núcleo do sk -spline, páginas 11, 30 e 34

β : ver Teorema 1.2.6, página 11

A_j : ver Corolário 1.2.7, página 14

B_j : ver Corolário 1.2.7, página 14

C_j : ver Corolário 1.2.7, página 14

D_j : ver Corolário 1.2.7, página 14

$A_j^{(1)}$: ver Teorema 1.2.8, página 17

$A_j^{(2)}$: ver Teorema 1.2.8, página 17

S_n^δ : soma de Cèsaro, página 21

C_k^δ : coeficiente da soma de Cèsaro, página 21

$\Delta^n \lambda_k$: ver Definição 1.3.5, página 21

B_n : polinômio de Bernoulli, página 32

B_k : números de Bernoulli, página 32

$\overline{B}_{2r}$: ver Observação 1.3.13, página 33

s : spline polinomial, página 33

$sk(f, \Delta_n)$: sk -spline interpolante de f sobre a partição Δ_n , página 35
 $\tilde{sk}$: sk -spline cardinal, página 35
 $\Theta_{n,l}$: ver Definição 2.2.3, página 40
 L_p : espaço de funções reais 2π -periódicas e mensuráveis, página 42
 $\|\cdot\|_p$: norma p , página 42
 $\|\cdot\|_\infty$: norma infinito, página 42
 U_p : bola unitária de L_p , página 42
 $K * f$: produto de convolução de K por f , página 42
 $K * U_p$: conjunto das funções $K * \phi$, com $\phi \in U_p$, página 42
 $b_k = b_k(f)$: coeficientes de Fourier da função f , página 43
 $\|T\|_{p,q}$: norma p, q de uma transformação linear $T : L_p \rightarrow L_q$, página 43
 $e_n(K * U_p, L_q)$: ver Definição 3.1.1, página 47
 $C_{2\pi}^{(m)}$: espaço de funções em $C_{2\pi}$ com derivadas contínuas até a ordem m , página 48
 $f^{(m)}$: m -ésima derivada de f , página 48
 W_p^r : espaço de Sobolev, página 51
 $\|\cdot\|_{W_p^r}$: norma do espaço de Sobolev, página 51
 $\overline{W}_p^r$: ver Observação 3.2.3, página 51

Introdução

No sentido clássico, um spline é uma função formada por pedaços de polinômios. Esse tipo de função possui propriedades extremas interessantes e fornece um razoável e útil aparato para aproximações. Os sk -splines, uma generalização natural dos splines polinomiais, foram introduzidos e tiveram sua teoria básica desenvolvida por Alexander Kushpel nos anos de 1983-1985 em [5, 6, 7, 8]. Os sk -splines são importantes em várias aplicações e seu espaço é gerado por translações discretas de uma única função núcleo.

Num primeiro estágio, foram descobertas várias propriedades extremas desses objetos gerais. Em seguida, o problema da existência e unicidade de interpolantes para sk -splines foi resolvido, além de representações explícitas para sk -splines cardinais terem sido encontradas. Estes resultados formaram a base da tese de doutorado de A. Kushpel defendida em 1984. O estudo das representações dos sk -splines permitiu, em 1984, a criação de uma teoria geral para computação exata de n -larguras de uma grande família de funções suaves.

A partir de 1987, A. Kushpel começou a estudar diferentes aplicações numéricas dos sk -splines. Em particular, ele desenvolveu um método de análise de erro para sk -splines com suavidade fracionária até analítica e inteira. Estes métodos constituíram a sua segunda tese de doutorado defendida na Academia Nacional de Ciências da Ucrânia, em 1992. A partir de 1994, a teoria de sk -splines avançou a um contexto multidimensional. Especificamente, foram encontradas as velocidades de convergência para interpolantes de sk -splines sobre redes retangulares com respeito a classes de Sobolev com derivadas mistas limitadas. Além disso, foram descobertas algumas propriedades extremas dos sk -splines sobre grupos abelianos compactos. Ver [3, 11].

Resultados recentes sobre convergência de sk -splines em L_q foram demonstrados em [9, 10].

Observamos que existe um número de razões para usar sk -splines:

1. Em aplicações, existem muitas equações cujas soluções possuem suavidade infinita. Neste caso, o uso de splines polinomiais não será eficiente devido ao fenômeno de saturação. Contudo, usando sk -splines apropriados, podemos aproximar bem tais funções soluções.

2. O uso de sk -splines na teoria de n -larguras (n -widths theory) nos permite calcular valores exatos de n -larguras em novas situações, nas quais a aplicação de métodos conhecidos

encontra dificuldades de natureza fundamental.

3. Os sk -splines parecem promissores em aproximação, pois eles têm boa ordem de convergência sobre conjuntos de funções com suavidade desde fracionária até analítica e inteira. Em muitas situações os sk -splines fornecem novos exemplos de subespaços ótimos no sentido de n -larguras.

Os resultados desta dissertação foram baseados em [5, 6, 7, 8, 12, 13]. Em [12] podemos encontrar mais informações sobre o desenvolvimento histórico dos sk -splines, suas aplicações e suas generalizações.

Iniciamos este trabalho definindo sk -splines e sk -splines interpolantes. O principal objetivo do primeiro capítulo é o estudo de condições para a existência e unicidade de sk -splines interpolantes de funções contínuas e periódicas de período 2π . Este primeiro resultado importante é válido para sk -splines interpolantes com nós e pontos de interpolação equidistantes. Em seguida, mostramos alguns resultados preliminares a fim de estudar algumas condições suficientes para a existência e unicidade de sk -splines interpolantes determinados por um núcleo específico do tipo $K(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos(lx + \beta\pi/2)$. As principais referências para este capítulo são [12] e [13].

No Capítulo 2, fixamos um núcleo do tipo $K(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos(lx)$ satisfazendo condições que garantem a existência e unicidade de sk -spline interpolantes. Primeiramente, definimos o sk -spline cardinal e estudamos algumas de suas propriedades. Em seguida, passamos a trabalhar na demonstração do teorema mais importante deste capítulo, o qual fornece uma ordem de aproximação para funções pertencentes à classe de convolução $K * U_p$, onde U_p é a bola unitária do espaço L_p , por sk -splines no espaço L_q , onde $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. Como aplicação deste resultado, no Capítulo 3, estudamos a aproximação de funções infinitamente diferenciáveis e finitamente diferenciáveis por sk -splines. As principais referências para este capítulo são [11] e [13].

Capítulo 1

sk -Splines Interpolantes com Nós Equidistantes

Na primeira seção deste capítulo, definimos sk -splines e sk -splines interpolantes e estudamos as condições para a existência e unicidade de sk -splines interpolantes de funções contínuas e periódicas de período 2π . Na segunda seção, definimos λ_j , ρ_j e σ_j , funções que auxiliam na obtenção de condições suficientes para garantir a existência e unicidade de sk -splines interpolantes determinados pelo núcleo $K(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos(lx + \beta\pi/2)$. Estas duas primeiras seções foram baseadas, principalmente, na referência [13].

Na terceira e última seção, utilizando como ferramenta a convergência de algumas séries trigonométricas, obtemos outras condições suficientes para a existência e unicidade de sk -splines interpolantes determinados por núcleo do mesmo tipo da seção anterior, considerando condições especiais sobre os coeficientes a_l . Esta seção foi baseada em [12].

1.1 Existência e Unicidade

Notação 1.1.1. Denotaremos por $C_{2\pi} = C_{2\pi}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real formado por todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que são contínuas e periódicas de período 2π .

Definição 1.1.2. Fixado um número inteiro positivo n , sejam

$$\Delta_n = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2\pi\}$$

uma partição arbitrária do intervalo $[0, 2\pi]$ e $K \in C_{2\pi}$. Definimos um sk -spline sobre a partição Δ_n como sendo uma função da forma

$$sk(x) = c_{n+1} + \sum_{k=1}^n c_k K(x - x_k), \quad \sum_{k=1}^n c_k = 0, \quad (1.1)$$

onde $c_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n+1$. Os pontos x_k , $1 \leq k \leq n$, são chamados nós do sk -spline $sk(x)$.

Definição 1.1.3. Consideremos n , Δ_n e K como na Definição 1.1.2. Seja $f \in C_{2\pi}$ e sejam $0 \leq y_0 < y_1 < \dots < y_n \leq 2\pi$. Se existirem c_k^* , $1 \leq k \leq n+1$ tais que

$$\overline{sk}(f, y_j) = \overline{sk}(y_j) = c_{n+1}^* + \sum_{k=1}^n c_k^* K(y_j + x_k) = f(y_j), \quad 0 \leq j \leq n, \quad (1.2)$$

dizemos que $\overline{sk}$ é um sk -spline interpolante de f com pontos de interpolação y_j , $0 \leq j \leq n$ e nós x_k , $1 \leq k \leq n$.

Observação 1.1.4. Neste trabalho, trataremos somente dos sk -splines com nós, x_k , e pontos de interpolação, y_k , equidistantes. Fixado um número inteiro positivo n , tomamos

$$\Delta_n = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2\pi\},$$

onde $x_s = 2\pi s/n$ e, fixado um número real y , tomamos $y_s = x_s + y$, $1 \leq s \leq n$. Consideraremos sempre sk -splines com nós x_k e pontos de interpolação y_k desses tipos.

Dizemos que a função $K \in C_{2\pi}$ na Definição 1.1.2 é o núcleo do sk -spline (1.1) e, para cada $1 \leq j \leq n$ e $y \in \mathbb{R}$, escrevemos

$$\lambda_j = \lambda_j(y) = \sum_{l=1}^n e^{2\pi i j(l-1)/n} K(y - x_{l-1}). \quad (1.3)$$

Definição 1.1.5. Seja $\mathbf{V} = (v_{i,j})_{n \times n}$ uma matriz quadrada de ordem n e o vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ a primeira linha da matriz V . Dizemos que $\mathbf{V}$ é uma matriz circulante determinada pelo vetor $\mathbf{v}$ se as linhas subsequentes são obtidas pela translação cíclica do último elemento da linha anterior para a posição do primeiro, sucessivamente, até formar uma matriz quadrada, ou seja, $v_{i+1,1} = v_{i,n}$ e $v_{i+1,j+1} = v_{i,j}$, para $1 \leq i, j \leq n-1$. Assim, a matriz $\mathbf{V}$ tem a forma

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ v_n & v_1 & \dots & v_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_2 & v_3 & \dots & v_1 \end{pmatrix}.$$

Usaremos a notação $\mathbf{V} = \text{circ}\{\mathbf{v}\}$.

Observação 1.1.6. Considere o vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e a matriz $\mathbf{V} = \text{circ}\{\mathbf{v}\}$. Seja ε uma raiz n -ésima da unidade e, para cada inteiro l , $1 \leq l \leq n$, sejam

$$\beta_l = v_1 + \varepsilon^l v_2 + \dots + \varepsilon^{(n-1)l} v_n = \sum_{j=1}^n v_j \varepsilon^{l(j-1)}$$

e

$$\mathbf{x}_l = (1, \varepsilon^l, \dots, \varepsilon^{(n-1)l}).$$

Então a matriz $\mathbf{V}$ é diagonalizável, β_l , $1 \leq l \leq n$, são os autovalores de $\mathbf{V}$ e $\mathbf{x}_l$ é autovetor de $\mathbf{V}$ associado a β_l , $1 \leq l \leq n$ (ver [14]).

Teorema 1.1.7. Dados $y \in \mathbb{R}$ e $f \in C_{2\pi}$, existe um único sk -spline interpolante $sk(f, \cdot)$ com nós $x_s = 2\pi s/n$ e pontos de interpolação $y_s = x_s + y$, $1 \leq s \leq n$, se, e somente se,

$$|\lambda_j(y)| > 0, \quad 1 \leq j \leq [n/2], \quad (1.4)$$

onde $[n/2]$ é a parte inteira de $n/2$.

Demonstração. Queremos encontrar c_k , $1 \leq k \leq n+1$, tais que

$$sk(y_j) = f(y_j), \quad 1 \leq j \leq n,$$

isto é, tais que

$$f(y_s) = c_{n+1} + \sum_{k=1}^n c_k K(y_s - x_k), \quad 1 \leq s \leq n,$$

$$\sum_{k=1}^n c_k = 0.$$

Podemos escrever esse sistema na forma matricial como $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{C}$, onde

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} K(y_1 - x_1) & \dots & K(y_1 - x_n) & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ K(y_n - x_1) & \dots & K(y_n - x_n) & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f(y_1) \\ \vdots \\ f(y_n) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que $\tilde{\mathbf{K}}$ pode ser escrita como

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^t & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K(y_1 - x_1) & \dots & K(y_1 - x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ K(y_n - x_1) & \dots & K(y_n - x_n) \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar que $\mathbf{K}$ é uma matriz circulante. Para isso, devemos mostrar que

(i) $K(y_i - x_k) = K(y_{i+1} - x_{k+1})$, para $i, k = 1, \dots, n-1$,

(ii) $K(y_i - x_n) = K(y_{i+1} - x_1)$, para $i = 1, \dots, n-1$.

Como a partição é equidistante, temos (i) , pois

$$\begin{aligned}
y_{i+1} - x_{k+1} &= x_{i+1} + y - x_{k+1} \\
&= \frac{2\pi(i+1)}{n} + y - \frac{2\pi(k+1)}{n} \\
&= \frac{2\pi i}{n} + y - \frac{2\pi k}{n} \\
&= x_i + y - x_k \\
&= y_i - x_k
\end{aligned}$$

e, como K é 2π -periódica, temos que

$$\begin{aligned}
K(y_i - x_n) &= K(y_i - x_n + 2\pi) \\
&= K(2\pi i/n + y - 2\pi + 2\pi) \\
&= K(2\pi i/n + y) \\
&= K(2\pi(i+1)/n + y - 2\pi/n) \\
&= K(x_{i+1} + y - x_1) \\
&= K(y_{i+1} - x_1),
\end{aligned}$$

e, assim, obtemos (ii) . Logo, $\mathbf{K}$ é uma matriz circulante.

Consideremos a raiz n -ésima da unidade $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$. Vamos verificar que os autovalores de $\tilde{\mathbf{K}}$ são

$$\lambda_j = \lambda_j(y) = \sum_{l=1}^n e^{2\pi i j(l-1)/n} K(y - x_{l-1}), \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

$$\lambda_n = \lambda_n(y) = \frac{K^*(y) + \sqrt{(K^*(y))^2 + 4n}}{2},$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}(y) = \frac{K^*(y) - \sqrt{(K^*(y))^2 + 4n}}{2},$$

com autovetores associados

$$\mathbf{C}_j = (c_1^j, \dots, c_n^j, c_{n+1}^j),$$

onde

$$c_l^j = \begin{cases} e^{2\pi i j(l-1)/n}, & 1 \leq l \leq n, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ 0, & l = n+1, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ 1, & 1 \leq l \leq n, \quad j = n, n+1, \\ n/\lambda_j, & l = n+1, \quad j = n, n+1, \end{cases}$$

e

$$K^*(y) = \sum_{l=1}^n K(y - x_{l-1}).$$

Para $1 \leq j \leq n-1$, podemos escrever o vetor $\mathbf{C}_j$ na forma de uma matriz coluna

$$\mathbf{C}_j = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{C}}_j \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde $\overline{\mathbf{C}}_j$ é autovetor da matriz circulante $\mathbf{K}$ associado ao autovalor $\lambda_j = \beta_j$, como na Observação 1.1.6, quando temos $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$. Assim, para $1 \leq j \leq n-1$,

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{C}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{C}}_j \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}\overline{\mathbf{C}}_j \\ \mathbf{u}^t\overline{\mathbf{C}}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_j\overline{\mathbf{C}}_j \\ \mathbf{u}^t\overline{\mathbf{C}}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_j\overline{\mathbf{C}}_j \\ 0 \end{pmatrix},$$

pois

$$\mathbf{u}^t\overline{\mathbf{C}}_j = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2\pi i j/n} \\ \vdots \\ e^{2\pi i j(n-1)/n} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^n e^{2\pi i j(l-1)/n} = 0.$$

Logo,

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{C}_j = \begin{pmatrix} \lambda_j\overline{\mathbf{C}}_j \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{C}}_j \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_j\mathbf{C}_j.$$

Como o núcleo K é uma função periódica de período 2π , temos, para $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n K(y_i - x_j) &= \sum_{j=1}^n K\left(y - \frac{2\pi(j-i)}{n}\right) \\ &= \sum_{l=1}^n K\left(y - \frac{2\pi(l-1)}{n}\right) \\ &= \sum_{l=1}^n K(y - x_{l-1}) \\ &= K^*(y). \end{aligned}$$

Portanto, para $j = n$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{C}_n &= \begin{pmatrix} K(y_1 - x_1) & \dots & K(y_1 - x_n) & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ K(y_n - x_1) & \dots & K(y_n - x_n) & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ n/\lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^n K(y_1 - x_l) + n/\lambda_n \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^n K(y_n - x_l) + n/\lambda_n \\ n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K^*(y_1) + n/\lambda_n \\ \vdots \\ K^*(y_n) + n/\lambda_n \\ n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
K^*(y) + \frac{n}{\lambda_n} &= K^*(y) + \frac{2n}{K^*(y) + \sqrt{(K^*(y))^2 + 4n}} \\
&= \frac{(K^*(y))^2 + K^*(y)\sqrt{(K^*(y))^2 + 4n} + 2n}{K^*(y) + \sqrt{(K^*(y))^2 + 4n}} \\
&= \frac{1}{2\lambda_n} \left((K^*(y))^2 + K^*(y)\sqrt{(K^*(y))^2 + 4n} + 2n \right) \\
&= \frac{1}{4\lambda_n} \left(2(K^*(y))^2 + 2K^*(y)\sqrt{(K^*(y))^2 + 4n} + 4n \right) \\
&= \frac{1}{4\lambda_n} 4 \left(\frac{K^*(y) + \sqrt{(K^*(y))^2 + 4n}}{2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \lambda_n^2 \\
&= \lambda_n
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n \\ n \end{pmatrix} = \lambda_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ n/\lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_n \mathbf{C}_n.$$

Analogamente, mostramos que $\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{C}_{n+1} = \lambda_{n+1}\mathbf{C}_{n+1}$.

Podemos então concluir que a matriz $\tilde{\mathbf{K}}$ é diagonalizável e que seus autovalores são $\lambda_1(y), \dots, \lambda_{n+1}(y)$. Temos, por definição, que $\lambda_n(y) \neq 0$ e $\lambda_{n+1}(y) \neq 0$, para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Logo, $\tilde{\mathbf{K}}$ é não singular se, e somente se, $|\lambda_j(y)| > 0$, para todo $1 \leq j \leq n-1$. Note que

$$\begin{aligned}
\lambda_{n-j}(y) &= \sum_{l=1}^n e^{2\pi i(n-j)(l-1)/n} K(y - x_{l-1}) \\
&= \sum_{l=1}^n e^{2\pi i(l-1) - 2\pi i j(l-1)/n} K(y - x_{l-1}) \\
&= \sum_{l=1}^n e^{-2\pi i j(l-1)/n} K(y - x_{l-1}) \\
&= \bar{\lambda}_j(y).
\end{aligned}$$

Logo, $|\lambda_{n-j}(y)| = |\lambda_j(y)|$ e, portanto, $|\lambda_j(y)| > 0$, para todo $1 \leq j \leq [n/2]$ se, e somente se, $\tilde{\mathbf{K}}$ é não-singular, ou seja, o sistema $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{C}$ admite solução única. $\square$

1.2 Condições Suficientes para Existência e Unicidade

Notação 1.2.1. Dados $j, k \in \mathbb{Z}$, escreveremos $j \equiv k(n)$ se j for congruente a k módulo n , isto é, se existir $p \in \mathbb{Z}$ tal que $j = np + k$.

Para $1 \leq k \leq n$, x_k denotará o nó $2\pi k/n$.

Lema 1.2.2. Para $l \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\sum_{k=1}^n \cos(lx_k) = \begin{cases} n, & l \equiv 0(n), \\ 0, & l \not\equiv 0(n) \end{cases}$$

e

$$\sum_{k=1}^n \sin(lx_k) = 0, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Suponhamos que $l \in \mathbb{Z}$ e $l \equiv 0(n)$, isto é, existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $l = np$. Então

$$lx_k = np \frac{2\pi k}{n} = 2\pi pk$$

e, assim,

$$e^{ilx_k} = e^{i2\pi pk} = 1, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^n \cos(lx_k) + i \sum_{k=1}^n \sin(lx_k) = \sum_{k=1}^n e^{ilx_k} = n$$

e logo

$$\sum_{k=1}^n \cos(lx_k) = n$$

e

$$\sum_{k=1}^n \sin(lx_k) = 0.$$

Suponhamos, agora, que $l \in \mathbb{Z}$ e $l \not\equiv 0(n)$. Então existem $a, b \in \mathbb{Z}$, $1 \leq b \leq n-1$ tais que $l = na + b$. Temos que

$$\{lx_k : 1 \leq k \leq n\} = \left\{ 2\pi ak + \frac{2\pi bk}{n} : 1 \leq k \leq n \right\}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \{e^{ilx_k} : 1 \leq k \leq n\} &= \{e^{i2\pi ak} e^{i2\pi bk/n} : 1 \leq k \leq n\} \\ &= \{e^{i2\pi bk/n} : 1 \leq k \leq n\} \\ &= \{e^{ix_k} : 1 \leq k \leq n\} \end{aligned}$$

é o conjunto formado por todas as raízes n -ésimas da unidade. Sendo assim,

$$\sum_{k=1}^n \cos(lx_k) + i \sum_{k=1}^n \sin(lx_k) = \sum_{k=1}^n e^{ilx_k} = 0$$

e, consequentemente,

$$\sum_{k=1}^n \cos(lx_k) = \sum_{k=1}^n \sin(lx_k) = 0.$$

□

Corolário 1.2.3. Para $l, j \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\sum_{k=1}^n (\cos(jx_k))(\cos(lx_k)) = \begin{cases} n, & l+j \equiv 0(n) \text{ e } l-j \equiv 0(n), \\ n/2, & l+j \equiv 0(n) \text{ e } l-j \not\equiv 0(n), \\ n/2, & l+j \not\equiv 0(n) \text{ e } l-j \equiv 0(n), \\ 0, & \text{demais casos,} \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n (\sin(jx_k))(\sin(lx_k)) = \begin{cases} n/2, & l-j \equiv 0(n) \text{ e } l+j \not\equiv 0(n), \\ -n/2, & l+j \equiv 0(n) \text{ e } l-j \not\equiv 0(n), \\ 0, & \text{demais casos} \end{cases}$$

e

$$\sum_{k=1}^n (\cos(jx_k))(\sin(lx_k)) = 0, \quad j, l \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Para quaisquer $l, j \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\sum_{k=1}^n (\cos(jx_k))(\cos(lx_k)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\cos((l+j)x_k) + \cos((l-j)x_k)],$$

$$\sum_{k=1}^n (\sin(jx_k))(\sin(lx_k)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\cos((l-j)x_k) - \cos((l+j)x_k)]$$

e

$$\sum_{k=1}^n (\cos(jx_k))(\sin(lx_k)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\sin((l+j)x_k) + \sin((l-j)x_k)].$$

O resultado segue do Lema 1.2.2. □

Definição 1.2.4. Seja $K \in C_{2\pi}$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$\lambda_j(x) = \sum_{k=1}^n e^{ijx_k} K(x - x_k),$$

$$\rho_j(x) = \frac{2}{n} \Re(\lambda_j(x))$$

e

$$\sigma_j(x) = \frac{2}{n} \Im(\lambda_j(x)).$$

Lema 1.2.5. Sejam $p, j \in \mathbb{Z}$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$,

(a) $\rho_{np+j}(x) = \rho_j(x)$, $\sigma_{np+j}(x) = \sigma_j(x)$;

(b) $\rho_{n-j}(x) = \rho_j(x)$, $\sigma_{n-j}(x) = -\sigma_j(x)$;

(c) $\rho_{-j}(x) = \rho_j(x)$, $\sigma_{-j}(x) = -\sigma_j(x)$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}\lambda_{np+j}(x) &= \sum_{k=1}^n e^{i(np+j)x_k} K(x - x_k) = \sum_{k=1}^n e^{inpx_k} e^{ijx_k} K(x - x_k) \\ &= \sum_{k=1}^n e^{ijx_k} K(x - x_k) = \lambda_j(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{n-j}(x) &= \sum_{k=1}^n e^{i(n-j)x_k} K(x - x_k) = \sum_{k=1}^n e^{inx_k} e^{-ijx_k} K(x - x_k) \\ &= \sum_{k=1}^n e^{-ijx_k} K(x - x_k) = \sum_{k=1}^n \overline{e^{ijx_k} K(x - x_k)} = \overline{\lambda_j(x)}\end{aligned}$$

e

$$\lambda_{-j}(x) = \sum_{k=1}^n e^{-ijx_k} K(x - x_k) = \overline{\lambda_j(x)}.$$

As propriedades (a), (b) e (c) seguem das propriedades acima para $\lambda_j(x)$. $\square$

Segue como consequência do Lema 1.2.5 que basta estudar os valores de $\rho_j(x)$ e $\sigma_j(x)$ para $1 \leq j \leq [n/2]$ e $x \in \mathbb{R}$, onde $[a]$ denota a parte inteira de $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.2.6. Seja $K \in C_{2\pi}$ dada por

$$K(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos \left(lx + \frac{\beta\pi}{2} \right),$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ e $(a_l)_{l=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais tal que

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_l| < \infty.$$

Então, para $1 \leq j \leq [n/2]$,

$$\rho_j(x) = a_j \cos \left(jx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + \sum_{p=1}^{\infty} \left[a_{np+j} \cos \left((np+j)x + \frac{\beta\pi}{2} \right) + a_{np-j} \cos \left((np-j)x + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right],$$

$$\sigma_j(x) = 0, \quad \text{se } j = n/2 \in \mathbb{Z},$$

e, para $1 \leq j < n/2$,

$$\sigma_j(x) = a_j \sin \left(jx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + \sum_{p=1}^{\infty} \left[a_{np+j} \sin \left((np+j)x + \frac{\beta\pi}{2} \right) - a_{np-j} \sin \left((np-j)x + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right].$$

Demonstração. Como $\sum_{l=1}^{\infty} |a_l| < \infty$, segue que a série da expressão de $K(x)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$. Aplicando o Corolário 1.2.3, obtemos

$$\begin{aligned}\rho_j(x) &= \frac{2}{n} \sum_{l=1}^{\infty} a_l (\cos(lx)) \sum_{k=1}^n (\cos(jx_k)) (\cos(lx_k)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2}\right) \\ &\quad - \frac{2}{n} \sum_{l=1}^{\infty} a_l (\sin(lx)) \sum_{k=1}^n (\cos(jx_k)) (\cos(lx_k)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2}\right).\end{aligned}\tag{1.5}$$

Fixemos $1 \leq j \leq [n/2]$ e sejam

$$E_j = \{l \in \mathbb{Z} : l \geq 1, l + j \equiv 0(n)\} = \{np - j : p \in \mathbb{Z}, p \geq 1\}$$

e

$$F_j = \{l \in \mathbb{Z} : l \geq 1, l - j \equiv 0(n)\} = \{np + j : p \in \mathbb{Z}, p \geq 0\}.$$

Segue, novamente, do Corolário 1.2.3 que

$$\sum_{k=1}^n (\cos(jx_k)) (\cos(lx_k)) = \begin{cases} n, & l \in E_j \cap F_j, \\ n/2, & l \in E_j \triangle F_j, \\ 0, & l \in (E_j \cup F_j)^c. \end{cases}\tag{1.6}$$

Através de uma simples verificação, podemos constatar que, se n for par, teremos $E_j \cap F_j = \emptyset$, para $1 \leq j < n/2$, e $E_{n/2} = F_{n/2}$, e se n for ímpar, teremos $E_j \cap F_j = \emptyset$, para todo $1 \leq j \leq [n/2]$. Assim,

$$\begin{aligned}\rho_j(x) &= \frac{2}{n} \left[\sum_{l \in E_j \cap F_j} a_l (\cos(lx)) n \left(\cos \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{l \in E_j \triangle F_j} a_l (\cos(lx)) \frac{n}{2} \left(\cos \frac{\beta\pi}{2}\right) \right] \\ &\quad - \frac{2}{n} \left[\sum_{l \in E_j \cap F_j} a_l (\sin(lx)) n \left(\sin \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{l \in E_j \triangle F_j} a_l (\sin(lx)) \frac{n}{2} \left(\sin \frac{\beta\pi}{2}\right) \right] \\ &= \sum_{l \in E_j} a_l (\cos(lx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{l \in F_j} a_l (\cos(lx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2}\right) \\ &\quad - \sum_{l \in E_j} a_l (\sin(lx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2}\right) - \sum_{l \in F_j} a_l (\sin(lx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{l \in E_j} a_l \left[(\cos(lx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2}\right) - (\sin(lx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2}\right) \right] \\ &\quad + \sum_{l \in F_j} a_l \left[(\cos(lx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2}\right) - (\sin(lx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2}\right) \right] \\ &= \sum_{l \in E_j} a_l \cos \left(lx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + \sum_{l \in F_j} a_l \cos \left(lx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{np-j} \cos \left((np-j)x + \frac{\beta\pi}{2} \right) + \sum_{p=0}^{\infty} a_{np+j} \cos \left((np+j)x + \frac{\beta\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_j \cos \left(jx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} \left[a_{np+j} \cos \left((np+j)x + \frac{\beta\pi}{2} \right) + a_{np-j} \cos \left((np-j)x + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Vamos, agora, demonstrar o resultado para $\sigma_j(x)$, $1 \leq j \leq [n/2]$. Aplicando o Corolário 1.2.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma_j(x) &= \frac{2}{n} \sum_{l=1}^{\infty} a_l (\sin(lx)) \sum_{k=1}^n (\sin(jx_k)) (\sin(lx_k)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \\
&+ \frac{2}{n} \sum_{l=1}^{\infty} a_l (\cos(lx)) \sum_{k=1}^n (\sin(jx_k)) (\sin(lx_k)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right). \tag{1.7}
\end{aligned}$$

Novamente pelo Corolário 1.2.3,

$$\sum_{k=1}^n (\sin(jx_k)) (\sin(lx_k)) = \begin{cases} n/2, & l \in F_j \setminus E_j, \\ -n/2, & l \in E_j \setminus F_j, \\ 0, & l \in (E_j \triangle F_j)^c. \end{cases} \tag{1.8}$$

Por (1.7) e (1.8), temos que $\sigma_j(x) = 0$, se $j = n/2 \in \mathbb{Z}$ e, para $1 \leq j < n/2$, temos

$$\begin{aligned}
\sigma_j(x) &= \frac{2}{n} \left[\sum_{l \in F_j \setminus E_j} a_l (\sin(lx)) \frac{n}{2} \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) + \sum_{l \in E_j \setminus F_j} a_l (\sin(lx)) \left(-\frac{n}{2} \right) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \right] \\
&+ \frac{2}{n} \left[\sum_{l \in F_j \setminus E_j} a_l (\cos(lx)) \frac{n}{2} \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) + \sum_{l \in E_j \setminus F_j} a_l (\cos(lx)) \left(-\frac{n}{2} \right) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \right] \\
&= - \sum_{l \in E_j} a_l (\sin(lx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) + \sum_{l \in F_j} a_l (\sin(lx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \\
&- \sum_{l \in E_j} a_l (\cos(lx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) + \sum_{l \in F_j} a_l (\cos(lx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \\
&= - \sum_{l \in E_j} a_l \left[(\cos(lx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) + (\sin(lx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \right] \\
&+ \sum_{l \in F_j} a_l \left[(\sin(lx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) + (\cos(lx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \right] \\
&= - \sum_{l \in E_j} a_l \sin \left(lx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + \sum_{l \in F_j} a_l \sin \left(lx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \\
&= - \sum_{p=1}^{\infty} a_{np-j} \sin \left((np-j)x + \frac{\beta\pi}{2} \right) + \sum_{p=0}^{\infty} a_{np+j} \sin \left((np+j)x + \frac{\beta\pi}{2} \right) \\
&= a_j \sin \left(jx + \frac{\beta\pi}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \left[a_{np+j} \operatorname{sen} \left((np+j)x + \frac{\beta\pi}{2} \right) - a_{np-j} \operatorname{sen} \left((np-j)x + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right].$$

□

Corolário 1.2.7. Seja $K \in C_{2\pi}$ dada por

$$K(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos \left(lx + \frac{\beta\pi}{2} \right),$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ e $(a_l)_{l=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais tal que e

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_l| < \infty.$$

Para $1 \leq j \leq [n/2]$, sejam

$$A_j(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} + a_{np-j}) \cos(np x) + a_j,$$

$$B_j(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} - a_{np-j}) \cos(np x) + a_j,$$

$$C_j(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (-a_{np+j} + a_{np-j}) \operatorname{sen}(np x)$$

e

$$D_j(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} + a_{np-j}) \operatorname{sen}(np x).$$

Então, para $1 \leq j \leq [n/2]$,

$$\begin{aligned} \rho_j(x) &= (A_j(x) \cos(jx) + C_j(x) \operatorname{sen}(jx)) \cos \frac{\beta\pi}{2} \\ &\quad - (B_j(x) \operatorname{sen}(jx) + D_j(x) \cos(jx)) \operatorname{sen} \frac{\beta\pi}{2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

e, para $1 \leq j < n/2$,

$$\begin{aligned} \sigma_j(x) &= (A_j(x) \operatorname{sen}(jx) - C_j(x) \cos(jx)) \cos \frac{\beta\pi}{2} \\ &\quad + (B_j(x) \cos(jx) - D_j(x) \operatorname{sen}(jx)) \operatorname{sen} \frac{\beta\pi}{2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Como consequência, temos que

$$\begin{aligned} |\lambda_j(x)|^2 &= \frac{n^2}{4} ((A_j(x))^2 + (C_j(x))^2) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{n^2}{4} ((B_j(x))^2 + (D_j(x))^2) \left(\operatorname{sen} \frac{\beta\pi}{2} \right)^2 \\ &\quad - \frac{n^2}{4} (A_j(x)D_j(x) + C_j(x)B_j(x)) \operatorname{sen}(\beta\pi). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Demonstração. Segue do Teorema 1.2.6 e das propriedades da soma de seno e cosseno que

$$\begin{aligned}
\rho_j(x) &= a_j \left((\cos(jx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) - (\sin(jx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} a_{np+j} \left((\cos(np x))(\cos(jx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) - (\sin(np x))(\sin(jx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} a_{np+j} \left(-(\sin(np x))(\cos(jx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) - (\cos(np x))(\sin(jx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} a_{np-j} \left((\cos(np x))(\cos(jx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) + (\sin(np x))(\sin(jx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} a_{np-j} \left(-(\sin(np x))(\cos(jx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) + (\cos(np x))(\sin(jx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \\
&= \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) (\cos(jx)) \left(\sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} + a_{np-j}) (\cos(np x)) + a_j \right) \\
&+ \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) (\sin(jx)) \left(\sum_{p=1}^{\infty} (-a_{np+j} + a_{np-j}) (\sin(np x)) \right) \\
&- \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) (\cos(jx)) \left(\sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} + a_{np-j}) (\sin(np x)) \right) \\
&- \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) (\sin(jx)) \left(\sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} - a_{np-j}) (\cos(np x)) + a_j \right) \\
&= \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) [A_j(x)(\cos(jx)) + C_j(x)(\sin(jx))] \\
&- \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) [B_j(x)(\sin(jx)) + D_j(x)(\cos(jx))].
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma_j(x) &= a_j \left((\sin(jx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) + (\cos(jx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} a_{np+j} \left((\cos(np x))(\cos(jx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) - (\sin(np x))(\sin(jx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} a_{np+j} \left((\cos(np x))(\sin(jx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) + (\sin(np x))(\cos(jx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \\
&- \sum_{p=1}^{\infty} a_{np-j} \left((\sin(np x))(\cos(jx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) - (\cos(np x))(\sin(jx)) \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \\
&- \sum_{p=1}^{\infty} a_{np-j} \left((\cos(np x))(\cos(jx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) + (\sin(np x))(\sin(jx)) \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \\
&= \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) (\cos(jx)) \left(\sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} - a_{np-j}) (\sin(np x)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) (\text{sen}(jx)) \left(\sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} + a_{np-j}) (\cos(np\pi)) + a_j \right) \\
& + \left(\text{sen} \frac{\beta\pi}{2} \right) (\cos(jx)) \left(\sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} - a_{np-j}) (\cos(np\pi)) + a_j \right) \\
& + \left(\text{sen} \frac{\beta\pi}{2} \right) (\text{sen}(jx)) \left(\sum_{p=1}^{\infty} (-a_{np+j} - a_{np-j}) (\text{sen}(np\pi)) \right) \\
& = \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) (A_j(x)(\text{sen}(jx)) - C_j(x)(\cos(jx))) \\
& + \left(\text{sen} \frac{\beta\pi}{2} \right) (B_j(x)(\cos(jx)) - D_j(x)(\text{sen}(jx))).
\end{aligned}$$

Agora, como consequência, obtemos

$$\begin{aligned}
|\lambda_j(x)|^2 &= (\Re(\lambda_j(x)))^2 + (\Im(\lambda_j(x)))^2 \\
&= \frac{n^2}{4} ((\rho_j(x))^2 + (\sigma_j(x))^2) \\
&= \frac{n^2}{4} \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right)^2 [(A_j(x))^2 (\cos(jx))^2 + (C_j(x))^2 (\text{sen}(jx))^2 + 2A_j(x)C_j(x)(\text{sen}(jx))(\cos(jx))] \\
&+ \frac{n^2}{4} \left(\text{sen} \frac{\beta\pi}{2} \right)^2 [(B_j(x))^2 (\text{sen}(jx))^2 + (D_j(x))^2 (\cos(jx))^2 + 2B_j(x)D_j(x)(\text{sen}(jx))(\cos(jx))] \\
&- \frac{n^2}{2} \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \left(\text{sen} \frac{\beta\pi}{2} \right) [A_j(x)D_j(x)(\cos(jx))^2 + B_j(x)C_j(x)(\text{sen}(jx))^2] \\
&- \frac{n^2}{2} \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \left(\text{sen} \frac{\beta\pi}{2} \right) [A_j(x)B_j(x)(\text{sen}(jx))(\cos(jx)) + C_j(x)D_j(x)(\text{sen}(jx))(\cos(jx))] \\
&+ \frac{n^2}{4} \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right)^2 [(A_j(x))^2 (\text{sen}(jx))^2 + (C_j(x))^2 (\cos(jx))^2 - 2A_j(x)C_j(x)(\text{sen}(jx))(\cos(jx))] \\
&+ \frac{n^2}{4} \left(\text{sen} \frac{\beta\pi}{2} \right)^2 [(B_j(x))^2 (\cos(jx))^2 + (D_j(x))^2 (\text{sen}(jx))^2 - 2B_j(x)D_j(x)(\text{sen}(jx))(\cos(jx))] \\
&+ \frac{n^2}{2} \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \left(\text{sen} \frac{\beta\pi}{2} \right) [-A_j(x)D_j(x)(\text{sen}(jx))^2 - B_j(x)C_j(x)(\cos(jx))^2] \\
&+ \frac{n^2}{2} \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \left(\text{sen} \frac{\beta\pi}{2} \right) [A_j(x)B_j(x)(\text{sen}(jx))(\cos(jx)) + C_j(x)D_j(x)(\text{sen}(jx))(\cos(jx))] \\
&= \frac{n^2}{4} \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \right)^2 [(A_j(x))^2 + (C_j(x))^2] \\
&+ \frac{n^2}{4} \left(\text{sen} \frac{\beta\pi}{2} \right)^2 [(B_j(x))^2 + (D_j(x))^2] \\
&- \frac{n^2}{4} (\text{sen} \beta\pi) [A_j(x)D_j(x) + B_j(x)C_j(x)].
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.8. Seja $K \in C_{2\pi}$ dada por

$$K(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos(lx + \beta\pi/2)$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ e $(a_l)_{l=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais tal que e

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_l| < \infty,$$

e sejam

$$A_j^{(1)} = \sum_{p=0}^{\infty} a_{np+j}, \quad A_j^{(2)} = \sum_{p=1}^{\infty} a_{np-j}.$$

Então $\lambda_j(y) \neq 0$, para todo $1 \leq j \leq [n/2]$, se uma das seguintes condições é satisfeita:

- (a) n é qualquer, β não é um inteiro ímpar, $y = 0$ e $A_j^{(1)} + A_j^{(2)} \neq 0$, para $1 \leq j \leq [n/2]$;
- (b) n é ímpar, β é um inteiro ímpar, $y = 0$ e $A_j^{(1)} - A_j^{(2)} \neq 0$, para $1 \leq j \leq [n/2]$;
- (c) n é par, β é um inteiro ímpar, $y = \pi/n$ e

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_{np+j} - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p a_{np-j} \neq 0,$$

para $1 \leq j \leq [n/2]$.

Demonstração. (a) Temos que $\beta \neq 2q - 1$, para qualquer $q \in \mathbb{Z}$. Assim, $\beta\pi/2 \neq q\pi - \pi/2$ e, portanto, $\cos \beta\pi/2 \neq 0$. Segue pelo Corolário 1.2.7, que $C_j(0) = D_j(0) = 0$ e que, para $1 \leq j \leq [n/2]$,

$$\rho_j(0) = A_j(0) \cos(\beta\pi/2) = (A_j^{(1)} + A_j^{(2)}) \cos(\beta\pi/2) \neq 0$$

e, portanto, $\lambda_j(0) \neq 0$, para $1 \leq j \leq [n/2]$.

(b) Como β é ímpar, temos que $\sin(\beta\pi/2) = \pm 1$. Segue pelo Corolário 1.2.7, que $C_j(0) = D_j(0) = 0$ e que, como n é ímpar, então, para todo $1 \leq j \leq [n/2]$, temos

$$\sigma_j(0) = B_j(0) \sin(\beta\pi/2) = \pm(A_j^{(1)} - A_j^{(2)}) \neq 0.$$

(c) Como β é ímpar, temos que

$$\sin(\beta\pi/2) = \pm 1, \quad \cos(\beta\pi/2) = 0,$$

Segue do Corolário 1.2.7, que $C_j(\pi/n) = D_j(\pi/n) = 0$. Então, para $1 \leq j < n/2$,

$$|\lambda_j(\pi/n)|^2 = \frac{n^2}{4} (B_j(\pi/n))^2 = \frac{n^2}{4} \left(\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_{np+j} - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p a_{np-j} \right)^2 \neq 0.$$

Para $j = n/2$, temos

$$\cos(jy) = 0, \quad \sin(jy) = 1$$

Assim,

$$\rho_j(\pi/n) = \pm B_j(\pi/n) = \pm \left(\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_{np+j} - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p a_{np-j} \right) \neq 0.$$

Logo, $\lambda(\pi/n) \neq 0$, para $1 \leq j \leq [n/2]$. □

Observação 1.2.9. Se a sequência $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ considerada no Teorema 1.2.8 for estritamente decrescente, então as condições $A_j^{(1)} + A_j^{(2)} \neq 0$ e $A_j^{(1)} - A_j^{(2)} \neq 0$, para todo $1 \leq j \leq [n/2]$, das partes (a) e (b) são satisfeitas, pois

$$A_j^{(1)} + A_j^{(2)} \geq A_j^{(1)} - A_j^{(2)} = \sum_{p=0}^{\infty} (a_{np+j} - a_{n(p+1)-j}) > 0.$$

Observação 1.2.10. Se uma das condições do Teorema 1.2.8 for satisfeita, segue do Teorema 1.1.7 que, dada $f \in C_{2\pi}$, existe um único sk -spline interpolante $sk(f, \cdot)$ com nós $x_s = 2\pi s/n$ e pontos de interpolação $y_s = x_s + y$, $1 \leq s \leq n$.

1.3 Convergência de Algumas Séries Trigonômétricas

Teorema 1.3.1. Seja $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ uma sequência decrescente de números reais tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Então, para qualquer $0 < \delta < \pi$, as séries

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$$

convergem uniformemente em $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Demonstração. Sejam $u_k = a_k$, $v_k = \sin(kx)$, para $k \geq 0$, e sejam

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin(kx)$$

$$V_k(x) = v_0 + v_1 + \cdots + v_k = \sin x + \cdots + \sin(kx)$$

Então a Transformada de Abel (ver [16], Lema 3.1.15)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n u_k v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n - u_1 V_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) V_k + a_n V_n. \end{aligned}$$

Por [17], páginas 59-60, se $0 < |x| \leq \pi$ e $k > 1$, temos que

$$V_k(x) = -\frac{i}{2} \sum_{j=1}^k (e^{ijx} - e^{-ijx}) = \frac{\cos(x/2)}{2 \operatorname{sen}(x/2)} - \frac{\cos((k+1/2)x)}{2 \operatorname{sen}(x/2)}$$

e

$$|V_k(x)| \leq \frac{\pi}{|x|}.$$

Fixemos $0 < \delta < \pi$. Para $n, p \geq 1$ e $\delta \leq |x| \leq \pi$,

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) V_k(x) + a_{n+p} V_{n+p}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) V_k(x) - a_n V_n(x) \right| \\ &= \left| \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) V_k(x) + a_{n+p} V_{n+p}(x) - a_n V_n(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) |V_k(x)| + a_{n+p} |V_{n+p}(x)| + a_n |V_n(x)| \\ &\leq \frac{\pi}{|x|} \left(\sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) + a_{n+p} + a_n \right) \\ &\leq \frac{\pi}{\delta} \left(\sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) + a_{n+p} + a_n \right) \\ &= \frac{2\pi}{\delta} a_n. \end{aligned}$$

Temos que $\delta \leq |x| \leq \pi$ se, e somente se, $x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ e, como $S_n(x)$ é periódica de período 2π , então a estimativa acima é verdadeira para $x \in [\pi, 2\pi - \delta] \cup [\delta, \pi] = [\delta, 2\pi - \delta]$. Portanto, fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \rightarrow 0$$

uniformemente em $[\delta, 2\pi - \delta]$. Logo, (S_n) converge uniformemente em $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Consideremos, agora, $u_k = a_k$, $v_k = \cos(kx)$ e

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx),$$

$$V_k(x) = v_0 + v_1 + \cdots + v_k = 1 + \cos x + \cdots + \cos(kx).$$

Usando a Transformada de Abel, obtemos

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) V_k + a_n V_n.$$

Por [17], página 5, se $0 < |x| < \pi$ e $k \geq 1$, temos que

$$V_k(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^k \cos(jx) \right) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}((k+1/2)x)}{2 \operatorname{sen}(x/2)}$$

e

$$|V_k(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{\pi}{|x|}.$$

Para $x = \pi$, temos $|V_k(\pi)| \leq 2$. Fixemos $0 < \delta < \pi$. De forma análoga ao caso anterior, podemos mostrar que a sequência (S_n) das somas parciais converge uniformemente em $[\delta, 2\pi - \delta]$. $\square$

Definição 1.3.2. Dizemos que a sequência $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ é convexa se

$$a_k + a_{k+2} - 2a_{k+1} \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Lema 1.3.3. A sequência $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ é convexa se, e somente se, para quaisquer $k, r, j \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $r \geq 2$ e $0 \leq j \leq r$, temos

$$\frac{j}{r}a_k + \frac{r-j}{r}a_{k+r} \geq a_{k+(r-j)}. \quad (1.12)$$

Se $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ for estritamente convexa, então a desigualdade acima é estrita.

Demonstração. Suponhamos que (1.12) seja verdadeira. Para $r = 2$, (1.12) diz que

$$\frac{j}{2}a_k + \frac{2-j}{2}a_{k+2} \geq a_{k+2-j}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Tomando $j = 1$, obtemos

$$\frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}a_{k+2} \geq a_{k+1},$$

isto é, $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ é convexa.

Suponhamos, agora, que $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ seja convexa. Sejam $r = 3$ e $j = 1$. Vamos mostrar que

$$\frac{1}{3}a_k + \frac{2}{3}a_{k+3} \geq a_{k+2}, \quad k \geq 0.$$

Pela definição de convexidade, temos que

$$\frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}a_{k+2} \geq a_{k+1},$$

$$\frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{2}a_{k+3} \geq a_{k+2},$$

assim

$$a_{k+2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}a_{k+2} \right) + \frac{1}{2}a_{k+3} = \frac{1}{4}a_k + \frac{1}{4}a_{k+2} + \frac{1}{2}a_{k+3}$$

e, portanto,

$$\frac{3}{4}a_{k+2} \leq \frac{1}{4}a_k + \frac{1}{2}a_{k+3}.$$

Logo

$$a_{k+2} \leq \frac{1}{3}a_k + \frac{2}{3}a_{k+3}.$$

Da mesma forma, mostramos que

$$a_{k+1} \leq \frac{2}{3}a_k + \frac{1}{3}a_{k+3}.$$

Vamos demonstrar a propriedade (1.12) usando indução sobre r . Pela definição de sequência convexa, temos que (1.12) é verdadeira para $r = 2$ e, como vimos acima, (1.12) também é verdadeira para $r = 3$. Suponhamos que (1.12) seja verdadeira para $r - 1$, $r \geq 3$. Sejam $k, j \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ e $1 \leq j \leq r$. Como $0 \leq j - 1 \leq r - 1$, segue, pela hipótese de indução que

$$a_{k+r-j} = a_{k+((r-1)-(j-1))} \leq \frac{j-1}{r-1}a_k + \frac{r-j}{r-1}a_{k+r-1}$$

e também que

$$a_{k+r-1} \leq \frac{1}{j}a_{k+r-j} + \frac{j-1}{j}a_{k+r}.$$

Logo

$$a_{k+r-j} \leq \frac{j-1}{r-1}a_k + \frac{r-j}{r-1} \left(\frac{1}{j}a_{k+r-j} + \frac{j-1}{j}a_{k+r} \right)$$

e, assim

$$a_{k+r-j} \leq \frac{j}{r}a_k + \frac{r-j}{r}a_{k+r}.$$

□

Definição 1.3.4. Seja $(Z_k(x))_{k=0}^{\infty}$ uma sequência qualquer de funções. Definimos a soma de Cèsaro S_n^{δ} de ordem $n \in \mathbb{N}$ e índice $\delta \geq 0$ por

$$S_n^{\delta}(x) = \frac{1}{C_n^{\delta}} \sum_{k=0}^n C_{n-k}^{\delta} Z_k(x),$$

onde

$$C_k^{\delta} = \frac{\Gamma(k + \delta + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\delta + 1)}.$$

Se $\delta \in \mathbb{N}$,

$$C_k^{\delta} = \frac{(k + \delta)!}{k!\delta!}.$$

Definição 1.3.5. Seja $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ uma sequência numérica. Definimos $\Delta^0 \lambda_k = \lambda_k$, $\Delta^1 \lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k+1}$ e, assim, indutivamente,

$$\Delta^{n+1} \lambda_k = \Delta^n \lambda_k - \Delta^n \lambda_{k+1}.$$

Lema 1.3.6 (ver [16], Lema 3.1.17). Sejam $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ uma sequência numérica e $(Z_k(x))_{k=0}^{\infty}$ uma sequência de funções, e sejam $n, N \in \mathbb{N}$, $n \geq N$. Então

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k Z_k(x) = P_{n-N-1}(x) + Q_n^N(x),$$

onde

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m C_k^N S_k^N(x) \Delta^{N+1} \lambda_k,$$

$$Q_n^N(x) = \sum_{k=0}^N C_{n-k}^k S_{n-k}^k(x) \Delta^k \lambda_{n-k}.$$

Teorema 1.3.7. Seja $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ uma sequência de números reais tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ e $\Delta^m a_k \geq 0$, para todo $m = 0, 1, 2$ e $k \in \mathbb{N}$. Para $x \in \mathbb{R}$, sejam

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx),$$

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx).$$

Então as séries acima convergem uniformemente sobre $[\delta, 2\pi - \delta]$ para qualquer $0 < \delta < \pi$, $S(x) \geq 0$ para $x \in (0, 2\pi)$ e $T(x) \geq 0$ para $x \in (0, \pi)$. Se $\Delta^2 a_k > 0$, para algum k , então teremos $T(x) > 0$ para $x \in (0, \pi)$.

Demonstração. Consideremos, primeiramente, a sequência de funções

$$Z_0(x) = \frac{1}{2}, \quad Z_k(x) = \cos(kx), \quad k \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando o Lema 1.3.6 para esta sequência, para a sequência numérica $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ e para $N = 1$, obtemos

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) = \sum_{k=0}^n a_k Z_k(x) = P_{n-2}(x) + Q_n^1(x),$$

onde

$$P_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} C_k^1 S_k^1(x) \Delta^2 a_k,$$

$$Q_n^1(x) = C_n^0 S_n^0(x) \Delta^0 a_n + C_{n-1}^1 S_{n-1}^1(x) \Delta^1 a_{n-1}.$$

Temos por [17], páginas 5 e 30, que, para $0 < x < 2\pi$,

$$\begin{aligned} S_n^0(x) &= \frac{1}{C_n^0} \sum_{k=0}^n C_{n-k}^0 Z_k(x) = \sum_{k=0}^n Z_k(x) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{1}{2} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n^1(x) &= \frac{1}{C_n^1} \sum_{k=0}^n C_{n-k}^1 Z_k(x) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (n-k+1) Z_k(x) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos(kx) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2. \end{aligned}$$

Como $\Delta^2 a_k \geq 0$ e $S_k^1(x) \geq 0$ para $0 < x < 2\pi$, então, para $0 < x < 2\pi$,

$$P_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) S_k^1(x) \Delta^2 a_k \geq 0. \quad (1.13)$$

Seja $b_k = a_{k-1} - a_k$, $k \geq 1$. Então

$$\sum_{k=1}^n b_k = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) = a_0 - a_n$$

e, como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, segue que a série $\sum_k b_k$ converge e sua soma é igual a a_0 . Sabemos que a série harmônica $\sum_k 1/k$ diverge e, assim, pelo Critério de Comparação por limite, obtemos que

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k}{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} k(a_{k-1} - a_k). \quad (1.14)$$

Temos que

$$Q_n^1(x) = a_n S_n^0(x) + n(a_{n-1} - a_n) S_{n-1}(x)$$

e, como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, segue de (1.14) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x) = 0, \quad 0 < x < 2\pi. \quad (1.15)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k+1) \Delta^2 a_k &= (a_0 - 2a_1 + a_2) + 2(a_1 - 2a_2 + a_3) + \cdots + (n+1)(a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}) \\ &= a_0 - a_{n+1} - (n+1)(a_{n+1} - a_{n+2}). \end{aligned}$$

Usando (1.14), obtemos que a série $\sum_k (k+1) \Delta^2 a_k$, de termos não-negativos, converge e, consequentemente, a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \Delta^2 a_k S_k^1(x)$$

também converge, para todo $0 < x < 2\pi$, pois $|S_k^1(x)| \leq 1/(2 \sin(x/2))$. Portanto, segue de (1.13) e (1.15) que, para $0 < x < 2\pi$,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-2}(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^1(x) \geq 0.$$

Consideremos, agora, a sequência de funções $Z_k(x) = \sin(kx)$, $k \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Aplicando o Lema 1.3.6 para esta sequência, para a sequência numérica $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ e para $N = 1$, obtemos

$$\sum_{k=1}^n a_k \sin(kx) = P_{n-2}(x) + Q_n^1(x),$$

onde

$$P_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \Delta^2 a_k S_k^1(x),$$

$$Q_n(x) = a_n S_n^0(x) + n(a_{n-1} - a_n) S_{n-1}^1(x).$$

Temos por [17], páginas 59 e 60, que, para $0 < x < 2\pi$,

$$\begin{aligned} S_n^0(x) &= \frac{1}{C_n^0} \sum_{k=0}^n C_{n-k}^0 Z_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n Z_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \operatorname{sen}(kx) \\ &= \frac{\cos(x/2)}{2 \operatorname{sen}(x/2)} - \frac{\cos((n+1/2)x)}{2 \operatorname{sen}(x/2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n^1(x) &= \frac{1}{C_n^1} \sum_{k=0}^n C_{n-k}^1 Z_k(x) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (n-k+1) Z_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \operatorname{sen} kx \\ &= \frac{\cos(x/2)}{2 \operatorname{sen}(x/2)} - \frac{1}{n+1} \frac{\operatorname{sen}((n+1)x)}{(2 \operatorname{sen}(x/2))^2}. \end{aligned}$$

Da mesma forma que no caso anterior, podemos mostrar que, para cada $0 < x < 2\pi$, a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \Delta^2 a_k S_k^1(x)$$

converge e que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x) = 0.$$

Logo, para concluir a nossa demonstração, bastará mostrar que $S_n^1(x) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $0 < x < \pi$.

É imediato que, para cada $0 < x < 2\pi$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^1(x) = \frac{\cos(x/2)}{2 \operatorname{sen}(x/2)}.$$

É de fácil verificação que $S_n^1(x) > 0$ se, e somente se,

$$g(x) = (n+1) \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}((n+1)x) > 0 \tag{1.16}$$

Note que

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos((n+1)x).$$

Portanto, $0 < x < \pi$ é um ponto crítico de $g(x)$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(n+1)x = 2k\pi + x$ ou $(n+1)x = 2k\pi - x$.

Seja l o maior inteiro tal que $l < n/2$ e sejam $x_j = 2j\pi/n$, $j = 1, 2, \dots, l$. Seja, agora, r o maior inteiro tal que $r < (n+2)/2$ e sejam $\bar{x}_k = 2k\pi/(n+2)$, $k = 1, 2, \dots, r$. Então os pontos x_j e $\bar{x}_k$ são todos os pontos críticos de $g(x)$ dentro do intervalo $(0, \pi)$. Temos que

$$\begin{aligned} g(x_j) &= (n+1) \sin x_j - \sin((n+1)x_j) \\ &= (n+1) \sin x_j - \sin(2j\pi + x_j) \\ &= n \sin x_j \\ &> 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(\bar{x}_k) &= (n+1) \sin \bar{x}_k - \sin((n+1)\bar{x}_k) \\ &= (n+1) \sin \bar{x}_k - \sin(2k\pi - \bar{x}_k) \\ &= (n+2) \sin \bar{x}_k \\ &> 0. \end{aligned}$$

Como $g(0) = g(\pi) = 0$ e g é positiva em todos os seus pontos críticos dentro do intervalo $(0, \pi)$, então devemos ter $g(x) > 0$, para todo $x \in (0, \pi)$. Desta forma, podemos concluir que $T(x) \geq 0$, para todo $0 < x < \pi$.

É fácil ver que, se $\Delta^2 a_k > 0$, para algum k , então teremos $T(x) > 0$, para $0 < x < \pi$.

A convergência uniforme das séries segue como consequência do Teorema 1.3.1. $\square$

Teorema 1.3.8. (ver [15], página 158) Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções de classe C^1 no intervalo $[a, b]$. Suponhamos que a série $\sum_n f_n(c)$ converge para um certo $c \in [a, b]$ e que a série das derivadas $\sum_n f'_n$ converge uniformemente em $[a, b]$. Então a série $\sum_n f_n$ converge uniformemente para uma função de classe C^1 e, para todo $x \in (a, b)$,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Teorema 1.3.9. (ver [15], página 158) Consideremos uma sequência de funções $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ definidas no intervalo $[a, b]$ e uma série $\sum_n a_n$ convergente de números reais $a_n \geq 0$, $n \geq 1$. Se $|f_n(x)| \leq a_n$, para todo $n \geq 1$ e $x \in [a, b]$, então as séries $\sum_n |f_n(x)|$ e $\sum_n f_n(x)$ convergem uniformemente em $[a, b]$.

Teorema 1.3.10. Seja $a_k = \alpha_k/k$, $k \geq 1$, onde $\Delta^m \alpha_k > 0$, para $m = 0, 1, 2, 3$, $k \geq 1$, e suponhamos que $\sum_k \alpha_k/k < \infty$. Então, para cada $1 \leq j \leq [n/2]$:

(a) $A_j(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(b) $B_j(x) > 0$, se $x \neq 2k\pi/n$ ou $j \neq n/2$, e $B_{n/2}(2k\pi/n) = 0$, se $k \in \mathbb{Z}$ e n é par;

(c) $C_j(x) > 0$, se $x \in (0, \pi/n)$, $C_j(x) < 0$, se $x \in (\pi/n, 2\pi/n)$, e $C_j(k\pi/n) = 0$, para $k \in \mathbb{Z}$;

(d) $D_j(x) > 0$, se $x \in (0, \pi/n)$, $D_j(x) < 0$, se $x \in (\pi/n, 2\pi/n)$, e $D_j(k\pi/n) = 0$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Como $a_k > 0$, para todo k e $\sum_k a_k < \infty$, segue pelo Teorema 1.3.9 que as séries de $A_j(x)$, $B_j(x)$, $C_j(x)$ e $D_j(x)$ convergem uniformemente em $\mathbb{R}$. Também podemos concluir facilmente que estas funções são periódicas de período $2\pi/n$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir, como consequência da hipótese $\Delta^m \alpha_k > 0$, para $m = 0, 1, 2, 3$ e para todo $k \geq 1$, que existe uma função $\alpha(t)$ de classe C^3 , definida para $t \geq 1$ e satisfazendo $\alpha(k) = \alpha_k$, para $k \geq 1$ e $\alpha(t) > 0$, $\alpha'(t) < 0$, $\alpha''(t) > 0$ e $\alpha'''(t) < 0$, para $t > 1$.

(a) A função $A_j(x)$ é definida por

$$A_j(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} + a_{np-j}) \cos(np x) + a_j,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Consideremos a série das derivadas de $A_j(x)$:

$$-\sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} + a_{np-j})(np) \sin(np x) = -\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{np+j}}{np+j} + \frac{a_{np-j}}{np-j} \right) (np) \sin(np x)$$

e, para cada $p \in \mathbb{N}$, seja

$$c_p = \left(\frac{\alpha_{np+j}}{np+j} + \frac{\alpha_{np-j}}{np-j} \right) np.$$

Vamos demonstrar que a sequência $(c_p)_{p=1}^{\infty}$ é decrescente e convexa. Consideremos a função $\mu(t)$ definida para $t \geq j+1$ por

$$\mu(t) = \left(\frac{\alpha(t+j)}{t+j} + \frac{\alpha(t-j)}{t-j} \right) t.$$

Como $\alpha(t) > 0$, $\alpha'(t) < 0$ e $\alpha''(t) > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \mu'(t) &= \frac{t\alpha'(t+j)}{t+j} + \frac{j\alpha(t+j)}{(t+j)^2} + \frac{t\alpha'(t-j)}{t-j} - \frac{j\alpha(t-j)}{(t-j)^2} \\ &< \frac{t\alpha'(t+j)}{t+j} + \frac{t\alpha'(t-j)}{t-j} + j\alpha(t-j) \left(\frac{1}{(t+j)^2} - \frac{1}{(t-j)^2} \right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mu''(t) &= \frac{t\alpha''(t+j)}{t+j} + \frac{t\alpha''(t-j)}{t-j} + \frac{2j\alpha'(t+j)}{(t+j)^2} \\ &\quad - \frac{2j\alpha'(t-j)}{(t-j)^2} - \frac{2j\alpha(t+j)}{(t+j)^3} + \frac{2j\alpha(t-j)}{(t-j)^3} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\mu(t)$ é positiva, estritamente decrescente, estritamente convexa e, assim, $\Delta^m c_p > 0$, para $m = 0, 1, 2$ e $p \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{p \rightarrow \infty} c_p = 0$, aplicando o Teorema 1.3.7, podemos concluir que a série $\sum_p c_p \sin(py)$ converge uniformemente em $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, para todo $0 < \varepsilon < \pi$, para uma função T e $T(y) > 0$, para $0 < y < \pi$. Logo, pelo Teorema 1.3.8, e como T é ímpar, temos,

$$A'_j(x) = -T(nx), \quad 0 < x < 2\pi/n,$$

$$A'_j(x) < 0, \quad 0 < x < \pi/n,$$

$$A'_j(x) > 0, \quad \pi/n < x < 2\pi/n.$$

Então o valor mínimo da função $A_j(x)$ no intervalo $(0, 2\pi/n)$ ocorre no ponto $x = \pi/n$. Mas $A_j(x)$ é periódica de período $2\pi/n$ e, assim, podemos concluir que

$$A_j(x) \geq A_j(\pi/n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Temos que

$$A_j(\pi/n) = a_j + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p (a_{np+j} + a_{np-j}).$$

Tomamos

$$a_k^j = a_{2kn+j} - a_{(2k+1)n-j} - a_{(2k+1)n+j} + a_{(2k+2)n-j}$$

e podemos mostrar facilmente que

$$A_j(\pi/n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^j.$$

Como a sequência (a_k) é estritamente convexa, segue pelo Lema 1.3.3 que

$$\frac{n}{2(n-j)} a_{2kn+j} + \frac{n-2j}{2(n-j)} a_{(2k+2)n-j} > a_{(2k+1)n-j}$$

e

$$\frac{n-2j}{2(n-j)} a_{2kn+j} + \frac{n}{2(n-j)} a_{(2k+2)n-j} > a_{(2k+1)n+j}$$

Das desigualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned} a_{(2k+1)n-j} + a_{(2k-1)n+j} &< \frac{n}{2(n-j)} a_{2kn+j} + \frac{n-2j}{2(n-j)} a_{(2k+2)n-j} \\ &+ \frac{n-2j}{2(n-j)} a_{2kn+j} + \frac{n}{2(n-j)} a_{(2k+2)n-j} \\ &= a_{2kn+j} + a_{(2k+2)n-j} \end{aligned}$$

e, assim, $a_k^j > 0$, para todo $k \geq 1$. Logo, podemos concluir que $A_j(\pi/n) > 0$.

(b) A função $B_j(x)$ é definida por

$$B_j(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} - a_{np-j}) \cos(np x) + a_j,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, e a série de derivadas de $B_j(x)$ é dada por

$$\sum_{p=1}^{\infty} (a_{np-j} - a_{np+j})(np) \sin(np x) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{np-j}}{\alpha_{np-j}} - \frac{\alpha_{np+j}}{\alpha_{np+j}} \right) (np) \sin(np x).$$

Para cada $p \in \mathbb{N}$, seja

$$d_p = \left(\frac{\alpha_{np-j}}{\alpha_{np-j}} - \frac{\alpha_{np+j}}{\alpha_{np+j}} \right) np.$$

A sequência $(d_p)_{p=1}^{\infty}$ é positiva. Vamos mostrar que ela é também decrescente e convexa. Consideremos a função $\gamma(t)$ definida, para $t \geq j+1$, por

$$\gamma(t) = \left(\frac{\alpha(t-j)}{t-j} - \frac{\alpha(t+j)}{t+j} \right) t.$$

Temos que $\gamma(np) = d_p$. Como $\alpha(t) > 0$, $\alpha'(t) < 0$, $\alpha''(t) > 0$ e $\alpha'''(t) < 0$, segue que

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= t \frac{\alpha'(t-j)}{t-j} - t \frac{\alpha'(t+j)}{t+j} \\ &\quad - j \frac{\alpha(t-j)}{(t-j)^2} - j \frac{\alpha(t+j)}{(t+j)^2} \\ &< t \alpha'(t-j) \left(\frac{1}{t-j} - \frac{1}{t+j} \right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= t \left(\frac{\alpha''(t-j)}{t-j} - \frac{\alpha''(t+j)}{t+j} \right) \\ &\quad - 2j \left(\frac{\alpha'(t-j)}{(t-j)^2} + \frac{\alpha'(t+j)}{(t+j)^2} \right) \\ &\quad + 2j \left(\frac{\alpha(t-j)}{(t-j)^3} + \frac{\alpha(t+j)}{(t+j)^3} \right) \\ &> t \alpha''(t+j) \left(\frac{1}{t-j} - \frac{1}{t+j} \right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\gamma(t)$ é positiva, estritamente decrescente e estritamente convexa e, assim, $\Delta^m d_p > 0$, para $m = 0, 1, 2$ e $p \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{p \rightarrow \infty} d_p = 0$, aplicando o Teorema 1.3.7, podemos concluir que a série $\sum_p d_p \sin(py)$ converge uniformemente em $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, para todo $0 < \varepsilon < \pi$, para uma função U tal que $U(y) > 0$ para todo $0 < y < \pi$. Logo, pelo Teorema 1.3.8 e, como U é ímpar, temos

$$B'_j(x) = U(nx), \quad 0 < x < 2\pi/n,$$

$$B'_j(x) > 0, \quad 0 < x < \pi/n,$$

$$B'_j(x) < 0, \quad \pi/n < x < 2\pi/n.$$

Então, o valor máximo da função $B_j(x)$ ocorre no ponto $x = \pi/n$ e o valor mínimo no ponto $x = 0$. Como $B_j(x)$ é periódica de período $2\pi/n$, segue que $B_j(x) > B_j(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$. Temos que

$$B_j(0) = \sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} - a_{np-j}) + a_j = \sum_{p=0}^{\infty} (a_{np+j} - a_{n(p+1)-j}) \geq 0.$$

A desigualdade acima será estrita se $1 \leq j < \pi/2$ e teremos $B_j(0) = 0$ se n for par e $j = n/2$. Se n for par, $j = n/2$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $B_{n/2}(2k\pi/n) = 0$ e se $j \neq n/2$, então $B_j(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) A função $C_j(x)$ é definida por

$$C_j(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (-a_{np+j} + a_{np-j}) \sin(np x) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(-\frac{\alpha_{np+j}}{np+j} + \frac{\alpha_{np-j}}{np-j} \right) \sin(np x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Para cada $p \in \mathbb{N}$, seja

$$e_p = -\frac{\alpha_{np+j}}{np+j} + \frac{\alpha_{np-j}}{np-j}$$

e, para cada $t \geq 1$, seja

$$\nu(t) = -\frac{\alpha(t+j)}{t+j} + \frac{\alpha(t-j)}{t-j}.$$

Temos que $\nu(np) = e_p$. Como $\alpha(t) > 0$, $\alpha'(t) < 0$, $\alpha''(t) > 0$ e $\alpha'''(t) < 0$, segue que

$$\begin{aligned} \nu'(t) &= -\frac{\alpha'(t+j)}{t+j} + \frac{\alpha'(t-j)}{t-j} + \frac{\alpha(t+j)}{(t+j)^2} - \frac{\alpha(t-j)}{(t-j)^2} \\ &< \alpha'(t+j) \left(-\frac{1}{t+j} + \frac{1}{t-j} \right) + \alpha(t+j) \left(\frac{1}{(t+j)^2} + \frac{1}{(t-j)^2} \right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nu''(t) &= -\frac{\alpha''(t+j)}{t+j} + \frac{\alpha''(t-j)}{t-j} + 2\frac{\alpha'(t+j)}{(t+j)^2} - 2\frac{\alpha'(t-j)}{(t-j)^2} - 2\frac{\alpha(t+j)}{(t+j)^3} + 2\frac{\alpha(t-j)}{(t-j)^3} \\ &> \alpha''(t-j) \left(-\frac{1}{t+j} + \frac{1}{t-j} \right) + 2\alpha'(t-j) \left(\frac{1}{(t+j)^2} - \frac{1}{(t-j)^2} \right) \\ &\quad + 2\alpha(t-j) \left(-\frac{1}{(t+j)^3} + \frac{1}{(t-j)^3} \right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\nu(t)$ é positiva, estritamente decrescente e estritamente convexa e, assim, $\Delta^m e_p > 0$, para $m = 0, 1, 2$ e $p \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{p \rightarrow \infty} e_p = 0$, aplicando o Teorema 1.3.7, podemos concluir que a série $\sum_p e_p \sin(py)$ converge uniformemente em $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, para todo $0 < \varepsilon < \pi$, para uma função V tal que $V(y) > 0$, para todo $0 < y < \pi$. Logo, pelo Teorema 1.3.8, e como V é ímpar, temos

$$C_j(x) = V(nx), \quad 0 < x < 2\pi/n,$$

$$C_j(x) > 0, \quad 0 < x < \pi/n,$$

$$C_j(x) < 0, \quad \pi/n < x < 2\pi/n.$$

Segue trivialmente pela definição de $C_j(x)$ que $C_j(k\pi/n) = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

(d) A função $D_j(x)$ é definida por

$$D_j(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (a_{np+j} + a_{np-j}) \operatorname{sen}(pnx) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{np+j}}{np+j} + \frac{\alpha_{np-j}}{np-j} \right) \operatorname{sen}(pnx)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Para cada $p \in \mathbb{N}$ e $t \geq j+1$, sejam

$$f_p = \frac{\alpha_{np+j}}{np+j} + \frac{\alpha_{np-j}}{np-j}$$

e

$$\xi(t) = \frac{\alpha(t+j)}{t+j} + \frac{\alpha(t-j)}{t-j}.$$

Temos que $\xi(np) = f_p$. Como $\alpha(t) > 0$, $\alpha'(t) < 0$ e $\alpha''(t) > 0$, segue que

$$\xi'(t) = \frac{\alpha'(t+j)}{t+j} + \frac{\alpha'(t-j)}{t-j} - \frac{\alpha(t+j)}{(t+j)^2} - \frac{\alpha(t-j)}{(t-j)^2} < 0$$

e

$$\xi''(t) = \frac{\alpha''(t+j)}{t+j} + \frac{\alpha''(t-j)}{t-j} - 2\frac{\alpha'(t+j)}{(t+j)^2} - 2\frac{\alpha'(t-j)}{(t-j)^2} + 2\frac{\alpha(t+j)}{(t+j)^3} + 2\frac{\alpha(t-j)}{(t-j)^3} > 0.$$

Portanto, $\xi(t)$ é positiva, estritamente decrescente e estritamente convexa e, assim, $\Delta^m f_p > 0$, para $m = 0, 1, 2$ e $p \in \mathbb{N}$. A conclusão é obtida de modo análogo à demonstração de (c). $\square$

Teorema 1.3.11. Seja $K \in C_{2\pi}$ dada por

$$K(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos\left(lx - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ e $(a_l)_{l=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais tal que e

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_l| < \infty.$$

Suponhamos que $a_k = \alpha_k/k$ e $\Delta^m \alpha_k > 0$, para $k \geq 1$ e $m = 0, 1, 2, 3$. Então $\lambda_j(y) \neq 0$, para todo $1 \leq j \leq [n/2]$, se uma das seguintes condições é satisfeita:

(a) n é par, β não é um inteiro par e $y = \pi/n$;

(b) n é ímpar, β é um real qualquer e $y = \pi/n$;

(c) n é qualquer, $4l \leq \beta \leq 4l+1$ ou $4l+2 \leq \beta \leq 4l+3$, para algum $l \in \mathbb{Z}$ e $y \in (0, \pi/n)$;

(d) n é qualquer, $4l+1 \leq \beta \leq 4l+2$ ou $4l+3 \leq \beta \leq 4l+4$, para algum $l \in \mathbb{Z}$ e $y \in (\pi/n, 2\pi/n)$;

(e) n é ímpar, β é inteiro e y é real qualquer;

(f) n é par, β é inteiro ímpar e $y \in (0, \pi/n]$;

(g) n é par, β é inteiro par e $y \in [0, \pi/n)$.

Demonstração. (a) Temos que $\sin(\beta\pi/2) \neq 0$ e segue pelo Corolário 1.2.7 e Teorema 1.3.10 que

$$A_j(\pi/n) > 0, \quad B_j(\pi/n) > 0, \quad C_j(\pi/n) = D_j(\pi/n) = 0,$$

para $1 \leq j \leq [n/2]$, e que

$$|\lambda_j(\pi/n)|^2 = \frac{n^2}{4} [(A_j(\pi/n))^2 (\cos(\beta\pi/2))^2 + (B_j(\pi/n))^2 (\sin(\beta\pi/2))^2] > 0,$$

para $1 \leq j < n/2$, e

$$\rho_{n/2}(\pi/n) = B_{n/2}(\pi/n) \sin(\beta\pi/2) \neq 0.$$

(b) Como n é ímpar, então, para todo $1 \leq j \leq [n/2]$,

$$|\lambda_j(\pi/n)|^2 = \frac{n^2}{4} [(A_j(\pi/n))^2 (\cos(\beta\pi/2))^2 + (B_j(\pi/n))^2 (\sin(\beta\pi/2))^2] > 0,$$

pois $A_j(\pi/n) > 0$ e $B_j(\pi/n) > 0$, pelo Teorema 1.3.10.

(c) Temos que $A_j(y) > 0$, $B_j(y) > 0$, $C_j(y) > 0$ e $D_j(y) > 0$, pelo Teorema 1.3.10 e, como $0 < jy < \pi/2$, temos que $\cos(jy) > 0$ e $\sin(jy) > 0$. Se $4l \leq \beta \leq 4l + 1$, então $\sin(\beta\pi/2) \geq 0$, $\cos(\beta\pi/2) \geq 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \rho_j(y) &= (A_j(y) \cos(jy) + C_j(y) \sin(jy)) \cos(\beta\pi/2) \\ &\quad + (B_j(y) \sin(jy) + D_j(y) \cos(jy)) \sin(\beta\pi/2) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Se $4l + 2 \leq \beta \leq 4l + 3$, então $\sin(\beta\pi/2) \leq 0$, $\cos(\beta\pi/2) \leq 0$ e, portanto, $\rho_j(y) < 0$.

(d) Temos que $A_j(y) > 0$, $B_j(y) > 0$, $C_j(y) < 0$ e $D_j(y) < 0$, pelo Teorema 1.3.10, e $\sin(\beta\pi) \leq 0$. Então, para $1 \leq j < n/2$

$$\begin{aligned} |\lambda_j(y)|^2 &= \frac{n^2}{4} ((A_j(y))^2 + (C_j(y))^2) (\cos(\beta\pi/2))^2 \\ &\quad + \frac{n^2}{4} ((B_j(y))^2 + (D_j(y))^2) (\sin(\beta\pi/2))^2 \\ &\quad + \frac{n^2}{4} (A_j(y)D_j(y) + C_j(y)B_j(y)) \sin(\beta\pi) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Para $j = n/2$ e $\pi/n < y < 2\pi/n$, temos que $\pi/2 < jy < \pi$ e, assim, $\cos(jy) \leq 0$, $\sin(jy) \geq 0$. Logo, se $4l+1 \leq \beta \leq 4l+2$, então $\sin(\beta\pi/2) \geq 0$, $\cos(\beta\pi/2) \leq 0$, $\sin(\beta\pi) = 0$,

e, portanto,

$$\begin{aligned}\rho_{n/2}(y) &= (A_j(y) \cos(jy) + C_j(y) \sin(jy)) \cos(\beta\pi/2) \\ &+ (B_j(y) \sin(jy) + D_j(y) \cos(jy)) \sin(\beta\pi/2) \\ &> 0.\end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos mostrar que, se $4l + 3 \leq \beta \leq 4l + 4$, então $\rho_{n/2}(y) < 0$.

(e) Como n é ímpar e $\beta \in \mathbb{Z}$, temos que $\sin(\beta\pi) = 0$ e, para $1 \leq j \leq [n/2]$,

$$\begin{aligned}|\lambda_j(y)|^2 &= \frac{n^2}{4}(A_j^2(y) + C_j^2(y)) \cos^2(\beta\pi/2) \\ &+ \frac{n^2}{4}(B_j^2(y) + D_j^2(y)) \sin^2(\beta\pi/2) \\ &> 0.\end{aligned}$$

(f) Temos que $\sin(\beta\pi) = 0$ e, assim, da mesma forma que foi feito em (e), obtemos $|\lambda_j(y)| > 0$, para $1 \leq j < n/2$. Como β é ímpar, temos $\sin(\beta\pi/2) = \pm 1$, $\cos(\beta\pi/2) = 0$ e, como $0 < jy \leq \pi/2$, para $j = n/2$, temos $\sin(jy) > 0$ e $\cos(jy) \geq 0$. Sabemos, pelo Teorema 1.3.10, que $B_j(y) > 0$ e $D_j(y) \geq 0$, para $0 < y \leq \pi/n$ e, assim, para $j = n/2$,

$$\rho_j(y) = (B_j(y) \sin(jy) + D_j(y) \cos(jy)) \sin(\beta\pi/2) \neq 0.$$

(g) Da mesma forma que nos itens (e) e (f), mostramos que $|\lambda_j(y)| > 0$, para $1 \leq j < n/2$. Suponhamos, agora, $j = n/2$. Temos que $\sin(\beta\pi/2) = 0$, $\cos(\beta\pi/2) = \pm 1$ e, como $0 \leq jy < \pi/2$, para $j = n/2$, então $\cos(jy) > 0$ e $\sin(jy) \geq 0$. Como $A_j(y) > 0$ e $C_j(y) \geq 0$, pelo Teorema 1.3.10, para $0 \leq y < \pi/n$, para $j = n/2$, temos

$$\rho_j(y) = (A_j(y) \cos(jy) + C_j(y) \sin(jy)) \cos(\beta\pi/2) \neq 0.$$

□

Observação 1.3.12. Se uma das condições do Teorema 1.3.11 for satisfeita, segue do Teorema 1.1.7 que, dada $f \in C_{2\pi}$, existe um único sk -spline interpolante $sk(f, \cdot)$ com nós $x_s = 2\pi s/n$ e pontos de interpolação $y_s = x_s + y$, $1 \leq s \leq n$.

Observação 1.3.13. O polinômio de Bernoulli de grau $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, é definido, para $0 \leq t \leq 1$, por

$$\begin{aligned}B_n(t) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k t^{n-k} \\ &= \sum_{l=0}^n \frac{1}{l+1} \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} (t+k)^n,\end{aligned}$$

onde B_k são os números de Bernoulli.

Fixado um inteiro positivo r , consideremos, agora, a função $\overline{B}_{2r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica de período 2π , definida, para $0 \leq x \leq 2\pi$ por

$$\overline{B}_{2r}(x) = B_{2r}\left(\frac{x}{2\pi}\right).$$

A série de Fourier da função $\overline{B}_{2r}(x)$ é dada por

$$\overline{B}_{2r}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{r-1}[(2r)!]}{(2\pi)^{2r}} k^{-2r} \cos(kx).$$

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $x_k = 2\pi k/n$, para $1 \leq k \leq n$ e c_k constantes reais, para $1 \leq k \leq n+1$ tal que $\sum_{k=1}^n c_k = 0$. Então a função

$$s(x) = c_{n+1} + \sum_{k=1}^n c_k \overline{B}_{2r}(x - x_k)$$

é um spline polinomial de grau $2r$.

Se tomarmos $K(x) = \overline{B}_{2r}(x)$, segue, pelo desenvolvimento em série de Fourier da função $\overline{B}_{2r}(x)$ que o núcleo $K(x)$ é do tipo considerado no Teorema 1.2.8 e satisfaz a condição (a) deste teorema para $y = 0$ e $\beta = 0$. Sendo assim, garantimos a existência e unicidade de sk -splines interpolantes para qualquer $f \in C_{2\pi}$.

A existência e unicidade de splines polinomiais de grau par foi demonstrada por M. Golomb em [2]. O spline polinomial $s(x)$ dado acima é um sk -spline e, assim, podemos afirmar que o Teorema 1.1.7, juntamente com o Teorema 1.2.8, generaliza o resultado de M. Golomb.

Em [2], M. Golomb estudou a aproximação de funções suaves finitamente diferenciáveis nas normas de L_2 e L_∞ por splines polinomiais. Um resultado geral deste tipo para sk -splines é o Teorema 2.2.10. O resultado do Teorema 3.2.4 foi demonstrado por M. Golomb para funções $f \in K * U_1$, $2r$ -diferenciáveis, $r \in \mathbb{N}$.

O estudo análogo ao feito por M. Golomb, para splines polinomiais de grau ímpar, foi realizado por A. Zhensykbaev em [18].

Capítulo 2

Convergência de sk -Splines em L_q

Na primeira seção deste capítulo, definimos sk -spline cardinal e estudamos algumas de suas propriedades. Na segunda seção, estudamos o resultado principal deste capítulo, o qual fornece uma ordem de aproximação para funções pertencentes à classe de convolução $K * U_p$, onde U_p é a bola unitária do espaço L_p , por sk -splines no espaço L_q , onde $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. As principais referências para estas seções são [11] e [13].

2.1 sk -Spline Cardinal

Observação 2.1.1. Neste capítulo, dado um inteiro positivo n , consideramos a partição

$$\Delta_n = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} = 2\pi\},$$

onde $x_k = k\pi/n$, $0 \leq k \leq 2n$.

Consideramos fixado um núcleo $K \in C_{2\pi}$ da forma

$$K(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos(lx),$$

onde $(a_l)_{l=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais tal que

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_l| < \infty.$$

Um sk -spline $sk(x)$ sobre a partição Δ_n e com nós x_k é uma função da forma

$$sk(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{2n} c_k K(x - x_k), \quad \sum_{k=1}^{2n} c_k = 0. \quad (2.1)$$

Neste capítulo, vamos supor sempre que $\rho_j(0) \neq 0$, para $1 \leq j \leq n$, e, portanto, para todo $1 \leq j \leq 2n$, pelo Lema 1.2.5(b). Como $\rho_j(0) = A_j(0) = A_j^{(1)} + A_j^{(2)} \neq 0$, para $1 \leq j \leq n$,

então segue pelo Teorema 1.2.8(a) e pelo Teorema 1.1.7 que, para cada $f \in C_{2\pi}$, existe um único sk -spline interpolante de f com nós e pontos de interpolação x_k . Esse sk -spline único será denotado por $sk(f, \Delta_n)(x)$.

Definição 2.1.2. Suponhamos que $\rho_j(0) \neq 0$, para $1 \leq j \leq n$. O sk -spline cardinal $\tilde{sk}$ sobre a partição Δ_n é definido como sendo a única função da forma (2.1) que satisfaz

$$\tilde{sk}(x_k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k = 1, 2, \dots, 2n-1. \end{cases}$$

A existência e unicidade do sk -spline cardinal segue como consequência do Teorema 1.1.7.

Lema 2.1.3. O sk -spline cardinal $\tilde{sk}$ pode ser escrito, para todo $x \in \mathbb{R}$, na forma

$$\tilde{sk}(x) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{\rho_j(x)}{\rho_j(0)}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.2.6 temos, para $0 \leq l \leq 2n-1$, que

$$\begin{aligned} \rho_j(x_l) &= a_j \cos(jx_l) + \sum_{p=1}^{\infty} [a_{2np+j} \cos((2np+j)x_l) + a_{2np-j} \cos((2np-j)x_l)] \\ &= a_j \cos(jx_l) \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} a_{2np+j} [(\cos(2npx_l))(\cos(jx_l)) - (\sin(2npx_l))(\sin(jx_l))] \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} a_{2np-j} [(\cos(2npx_l))(\cos(jx_l)) + (\sin(2npx_l))(\sin(jx_l))] \\ &= (\cos(jx_l)) [a_j + \sum_{p=1}^{\infty} (a_{2np+j} + a_{2np-j})] \\ &= (\cos(jx_l)) \rho_j(0). \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 1.2.2, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{\rho_j(x_l)}{\rho_j(0)} &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n-1} \cos(jx_l) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \cos(jx_l) \\ &= \begin{cases} 1, & l = 0, \\ 0, & l = 1, 2, \dots, 2n-1, \end{cases} \\ &= \tilde{sk}(x_l). \end{aligned}$$

Segue pela definição de $\rho_j(x)$ que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{\rho_j(x)}{\rho_j(0)} &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{1}{\rho_j(0)} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{2n} (\cos(jx_k)) K(x - x_k) \right) \\
&= \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{j=1}^{2n-1} \frac{\cos(jx_k)}{\rho_j(0)} \right) K(x - x_k) \\
&= \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{2n} c_k K(x - x_k),
\end{aligned}$$

e, pelo Lema 1.2.2

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} c_k &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{j=1}^{2n-1} \frac{\cos(jx_k)}{\rho_j(0)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{1}{\rho_j(0)n^2} \left(\sum_{k=1}^{2n} \cos(jx_k) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{1}{\rho_j(0)n^2} \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo temos por (2.1) que a função

$$g(x) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{\rho_j(x)}{\rho_j(0)}$$

é um sk -spline. Como vimos que $g(x_l) = \tilde{sk}(x_l)$, para $0 \leq l \leq 2n - 1$, segue por unicidade (ver Teorema 1.1.7) que $g(x) = \tilde{sk}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Lema 2.1.4. Seja $f \in C_{2\pi}$. Então o sk -spline interpolante de f com nós e pontos de interpolação x_k , $1 \leq k \leq 2n$, pode ser escrito na forma

$$sk(f, \Delta_n)(x) = \sum_{j=1}^{2n} f(x_j) \tilde{sk}(x - x_j).$$

Demonstração. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \sum_{j=1}^{2n} f(x_j) \tilde{sk}(x - x_j).$$

Pela definição de $\tilde{sk}$, temos que $\tilde{sk}(x_k - x_j) = 1$, se $j = k$, e $\tilde{sk}(x_k - x_j) = 0$, se $j \neq k$. Portanto,

$$g(x_k) = \sum_{j=1}^{2n} f(x_j) \tilde{sk}(x_k - x_j) = f(x_k), \quad 1 \leq k \leq 2n.$$

Sejam c_k , $0 \leq k \leq 2n$, os coeficientes do sk -spline $\tilde{sk}$ obtidos na demonstração do Lema 2.1.3. Temos que

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{j=1}^{2n} f(x_j) \left(\frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{2n} c_k K(x - x_k) \right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} f(x_j) + \sum_{k=1}^{2n} \left(\sum_{j=1}^{2n} c_k f(x_j) \right) K(x - x_k) \\ &= d_0 + \sum_{k=1}^{2n} d_k K(x - x_k) \end{aligned}$$

e, como $\sum_{k=1}^{2n} c_k = 0$,

$$\sum_{k=1}^{2n} d_k = \sum_{j=1}^{2n} f(x_j) \sum_{k=1}^{2n} c_k = 0.$$

Portanto, $g(x)$ é um sk -spline e $g(x_k) = f(x_k)$, para $0 \leq k \leq 2n$. Pela unicidade do sk -spline interpolante de f , segue que $sk(f, \Delta_n)(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Observação 2.1.5. Segue pela existência e unicidade dos sk -splines interpolantes na Observação 2.1.1 que a dimensão do espaço vetorial dos sk -splines com nós x_k , $1 \leq k \leq 2n$, é $2n$. O Lema 2.1.4 diz que o conjunto $\{\tilde{sk}(x - x_k)\}_{k=1}^{2n}$ é uma base desse espaço vetorial.

2.2 Convergência de sk -Splines

Lema 2.2.1. Para $0 \leq j \leq 2n - 1$ e $l \in \mathbb{Z}$, temos

$$\rho_l(x - x_j) = \rho_l(x) \cos(lx_j) + \sigma_l(x) \sin(lx_j).$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.2.6,

$$\begin{aligned} \rho_l(x - x_j) &= a_l \cos(lx - lx_j) \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} [a_{2np+l} \cos((2np+l)(x - x_j)) + a_{2np-l} \cos((2np-l)(x - x_j))] \\ &= a_l (\cos(lx)) (\cos(lx_j)) + a_l (\sin(lx)) (\sin(lx_j)) \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} [a_{2np+l} (\cos((2np+l)x)) (\cos((2np+l)x_j)) + (\sin((2np+l)x)) (\sin((2np+l)x_j))] \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} [a_{2np-l} (\cos((2np-l)x)) (\cos((2np-l)x_j)) + (\sin((2np-l)x)) (\sin((2np-l)x_j))]. \end{aligned}$$

Usando as fórmulas do cosseno e do seno da soma e observando que $\cos(2npx_j) = 1$ e $\sin(2npx_j) = 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}\rho_l(x - x_j) &= (\cos(lx_j)) \left[a_l \cos(lx) + \sum_{p=1}^{\infty} (a_{2np+l} \cos((2np+l)x) + a_{2np-l} \cos((2np-l)x)) \right] \\ &+ (\sin(lx_j)) \left[a_l \sin(lx) + \sum_{p=1}^{\infty} (a_{2np+l} \sin((2np+l)x) - a_{2np-l} \sin((2np-l)x)) \right] \\ &= \rho_l(x) \cos(lx_j) + \sigma_l(x) \sin(lx_j).\end{aligned}$$

□

Lema 2.2.2. Para todo $l \in \mathbb{Z}$, $l \not\equiv 0(2n)$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^{2n} e^{ilx_j} \tilde{s}k(x - x_j) = \frac{\lambda_l(x)}{\rho_l(0)}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar o resultado, primeiramente, para a parte real. Suponhamos $l \in \mathbb{Z}$, $l \not\equiv 0(2n)$. Usando o Lema 2.2.1, o Lema 1.2.2 e o Corolário 1.2.3, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2n} (\cos(lx_j)) \tilde{s}k(x - x_j) &= \sum_{j=1}^{2n} (\cos(lx_j)) \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\rho_k(x - x_j)}{\rho_k(0)} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} \cos(lx_j) \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{\rho_k(0)} \left(\rho_k(x) \sum_{j=1}^{2n} (\cos(lx_j)) (\cos(kx_j)) \right) \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{\rho_k(0)} \left(\sigma_k(x) \sum_{j=1}^{2n} (\cos(lx_j)) (\sin(kx_j)) \right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\rho_k(x)}{\rho_k(0)} \sum_{j=1}^{2n} (\cos(lx_j)) (\cos(kx_j)).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Suponhamos $1 \leq l \leq n$. Como $1 \leq k \leq 2n - 1$, temos que $l - k \equiv 0(2n) \Leftrightarrow k = l$ e $l + k \equiv 0(2n) \Leftrightarrow k = 2n - l$. Assim,

$$l + k \equiv 0(2n) \text{ e } l - k \equiv 0(2n) \Leftrightarrow k = l = n$$

e, portanto, pelo Corolário 1.2.3 e (2.2)

$$\sum_{j=1}^{2n} (\cos(lx_j)) \tilde{s}k(x - x_j) = \frac{\rho_l(x)}{\rho_l(0)}.$$

Por outro lado,

$$l + k \equiv 0(2n) \text{ ou } l - k \equiv 0(2n) \Leftrightarrow l \neq n \text{ e } k = l \text{ ou } k = 2n - l.$$

Logo, segue do Corolário 1.2.3, do Lema 1.2.5 e de (2.2) que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2n} (\cos(lx_j)) \tilde{s}k(x - x_j) &= \frac{1}{2n} \left(n \frac{\rho_l(x)}{\rho_l(0)} + n \frac{\rho_{2n-l}(x)}{\rho_{2n-l}(0)} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(2n \frac{\rho_l(x)}{\rho_l(0)} \right) \\ &= \frac{\rho_l(x)}{\rho_l(0)}. \end{aligned}$$

Suponhamos $1 \leq l \leq 2n - 1$. Se $n < l \leq 2n - 1$, tomamos $q = 2n - l$, $p = 1$ e temos $l = 2np - q$. Se $1 \leq l \leq n$, tomamos $q = l$, $p = 0$ e temos $l = 2np + q$. Assim, pelo Lema 1.2.5, temos

$$\rho_l(x) = \rho_{2n-q}(x) = \rho_{-q}(x) = \rho_q(x)$$

ou

$$\rho_l(x) = \rho_{2n+q}(x) = \rho_q(x).$$

Como $1 \leq q \leq n$, segue pela primeira parte da demonstração que

$$\sum_{j=1}^{2n} e^{ilx_j} \tilde{s}k(x - x_j) = \sum_{j=1}^{2n} e^{iqx_j} \tilde{s}k(x - x_j) = \frac{\rho_q(x)}{\rho_q(0)} = \frac{\rho_l(x)}{\rho_l(0)}.$$

Suponhamos agora $l \in \mathbb{Z}$ tal que $l \not\equiv 0(2n)$. Então existe um único $p \in \mathbb{Z}$ tal que $2n(p - 1) < l < 2np$ e, assim, $1 \leq 2np - l \leq 2n - 1$. Tomamos $q = 2np - l$ e temos que $l = 2np - q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, $1 \leq q \leq 2n - 1$. Pelo Lema 1.2.5, temos que

$$\rho_l(x) = \rho_{2np-q}(x) = \rho_{-q}(x) = \rho_q(x).$$

Então, como $1 \leq q \leq 2n - 1$, segue pelo que já foi demonstrado e de forma análoga ao caso anterior, que o resultado deste lema é verdadeiro para a parte real.

Passemos, agora, à demonstração da parte imaginária do resultado. Se $0 \leq l \leq n$, então, usando o Lema 2.2.1, o Lema 1.2.2 e o Corolário 1.2.3, temos que

$$\sum_{j=1}^{2n} (\sin(lx_j)) \tilde{s}k(x - x_j) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\sigma_k(x)}{\rho_k(0)} \sum_{j=1}^{2n} (\sin(lx_j)) (\sin(kx_j)). \quad (2.3)$$

De forma análoga ao caso real, usando o Corolário 1.2.3 e (2.3), obtemos, para $1 \leq l \leq n$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2n} (\sin(lx_j)) \tilde{s}k(x - x_j) &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_l(x)}{\rho_l(0)} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_{2n-l}(x)}{\rho_{2n-l}(0)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_l(x)}{\rho_l(0)} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_l(x)}{\rho_l(0)} \\ &= \frac{\sigma_l(x)}{\rho_l(0)}. \end{aligned}$$

A generalização da igualdade acima para $l \in \mathbb{Z}$ é obtida de forma análoga ao caso real. $\square$

Definição 2.2.3. Seja $l \in \mathbb{Z}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$\Theta_{n,l}(x) = e^{ilx} - \sum_{j=1}^{2n} e^{ilx_j} \tilde{s}k(x - x_j).$$

Lema 2.2.4. Seja $K \in C_{2\pi}$ um núcleo como na Observação 2.1.1, tal que $a_l > a_{l+1} > 0$, para todo $l \in \mathbb{Z}$. Suponhamos que, para $1 \leq |l| \leq n-1$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{2mn-l} \leq C a_{2n-l},$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, onde a constante C independe de n e l . Então,

$$|\Theta_{n,l}(x)| \leq \begin{cases} 8 \frac{C a_{2n-|l|}}{a_{|l|}}, & 1 \leq |l| \leq n-1, \\ 4, & |l| \geq n. \end{cases}$$

Demonstração. Vamos demonstrar o resultado, primeiramente, para a parte real. Seja

$$\mu_{n,l}(x) = \cos(lx) - \sum_{j=1}^{2n} (\cos(lx_j)) \tilde{s}k(x - x_j)$$

a parte real de $\Theta_{n,l}$. Usando o Lema 2.2.2 e, em seguida, o Teorema 1.2.6, temos

$$\mu_{n,l}(x) = \cos(lx) - \frac{\rho_l(x)}{\rho_l(0)} = \cos(lx) - \frac{s(x) + a_{|l|} \cos(lx)}{s(0) + a_{|l|}},$$

onde

$$s(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_{2mn-l} \cos((2mn-l)x) + a_{2mn+l} \cos((2mn+l)x)).$$

Assim, usando a hipótese, obtemos

$$\begin{aligned} |\mu_{n,l}(x)| &= \left| \frac{s(0) \cos(lx) + a_{|l|} \cos(lx) - s(x) - a_{|l|} \cos(lx)}{s(0) + a_{|l|}} \right| \\ &\leq \left| \frac{s(0) \cos(lx)}{s(0) + a_{|l|}} \right| + \left| \frac{s(x)}{s(0) + a_{|l|}} \right| \\ &\leq \left| \frac{s(0)}{s(0) + a_{|l|}} \right| + \left| \frac{s(x)}{s(0) + a_{|l|}} \right| \\ &\leq 2, \end{aligned}$$

para todo $l \in \mathbb{Z}$, pois $a_{|l|} > 0$ e $s(x) \leq s(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para o caso $1 \leq |l| \leq n-1$, temos ainda

$$\begin{aligned} |\mu_{n,l}(x)| &\leq \left| \frac{s(0)}{s(0) + a_{|l|}} \right| + \left| \frac{s(x)}{s(0) + a_{|l|}} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{s(0)}{s(0) + a_{|l|}} \right| \\ &\leq 2 \frac{s(0)}{a_{|l|}}. \end{aligned}$$

Note que

$$s(0) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_{2mn-l} + a_{2mn+l}) \leq 2 \sum_{m=1}^{\infty} a_{2mn-|l|},$$

pois $(a_l)_{l=1}^{\infty}$ é decrescente. Assim,

$$|\mu_{n,l}(x)| \leq 2 \frac{s(0)}{a_{|l|}} \leq 4 \frac{\sum_{m=1}^{\infty} a_{2mn-|l|}}{a_{|l|}} \leq 4 \frac{Ca_{2n-|l|}}{a_{|l|}}.$$

Logo,

$$|\mu_{n,l}(x)| \leq \begin{cases} 4 \frac{Ca_{2n-|l|}}{a_{|l|}}, & 1 \leq |l| \leq n-1, \\ 2, & |l| \geq n. \end{cases}$$

Passemos, agora, à demonstração da parte imaginária do resultado. Seja

$$\phi_{n,l}(x) = \operatorname{sen}(lx) - \sum_{j=1}^{2n} (\operatorname{sen}(lx_j)) \tilde{s}k(x - x_j)$$

a parte imaginária de $\Theta_{n,l}(x)$. Usando o Lema 2.2.2, obtemos

$$\phi_{n,l}(x) = \operatorname{sen}(lx) - \frac{\sigma_l(x)}{\rho_l(0)} = \frac{\rho_l(0) \operatorname{sen}(lx) - \sigma_l(x)}{\rho_l(0)}.$$

Agora, pelo Teorema 1.2.6, temos que $|\sigma_l(x)| \leq \rho_l(0)$, para todo $l \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$, e, assim

$$\begin{aligned} |\phi_{n,l}(x)| &\leq \frac{|\rho_l(0) \operatorname{sen}(lx)| + |\sigma_l(x)|}{\rho_l(0)} \\ &\leq 2 \frac{\rho_l(0)}{\rho_l(0)} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Seja $t(x) = \sigma_l(x) - a_l \operatorname{sen}(lx)$. Pelo Teorema 1.2.6, temos que $|t(x)| \leq s(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim

$$\begin{aligned} |\phi_{n,l}(x)| &= \frac{|a_l \operatorname{sen}(lx) + s(0) \operatorname{sen}(lx) - a_l \operatorname{sen}(lx) - t(x)|}{a_l + s(0)} \\ &\leq \frac{s(0) + |t(x)|}{a_l + s(0)} \\ &\leq 2 \frac{s(0)}{a_l}. \end{aligned}$$

Portanto, pelas contas do caso real, podemos concluir que

$$|\phi_{n,l}(x)| \leq 4 \frac{Ca_{2n-|l|}}{a_{|l|}}.$$

Juntando as contas das partes real e imaginária de $\Theta_{n,l}(x)$, obtemos o resultado desejado. $\square$

Lema 2.2.5. Seja $(a_l)_{l=1}^{\infty}$ como no Lema 2.2.4. Para $p \geq 1$,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^p |\Theta_{n,l}(x)|^p \leq 4 \cdot 8^p \sum_{l \geq n} a_l^p.$$

Demonstração. Lembremos que a_l está definida para $l \in \mathbb{Z}$ e $a_0 = 0$, $a_l = a_{-l}$. Usando o Lema 2.2.4, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^p |\Theta_{n,l}(x)|^p &= \sum_{0 < |l| < n} a_l^p |\Theta_{n,l}(x)|^p + \sum_{|l| \geq n} a_l^p |\Theta_{n,l}(x)|^p \\
&\leq \sum_{0 < |l| < n} a_l^p \left(8 \frac{C a_{2n-|l|}}{a_{|l|}} \right)^p + \sum_{|l| \geq n} a_l^p 4^p \\
&\leq 8^p \left(\sum_{0 < |l| < n} a_l^p \frac{a_{2n-|l|}^p}{a_{|l|}^p} + \sum_{|l| \geq n} a_l^p \right) \\
&= 8^p \left(\sum_{0 < |l| < n} a_{2n-|l|}^p + \sum_{|l| \geq n} a_l^p \right) \\
&\leq 8^p \left(\sum_{n < |l| < 2n} a_l^p + \sum_{|l| \geq n} a_l^p \right) \\
&\leq 2 \cdot 8^p \sum_{|l| \geq n} a_l^p \\
&= 4 \cdot 8^p \sum_{l \geq n} a_l^p.
\end{aligned}$$

□

Notação 2.2.6. Seja $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. Denotaremos por $L_p = L_p([0, 2\pi])$ o espaço vetorial de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódicas de período 2π , mensuráveis e tais que

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \inf \{C : |f(x)| \leq C, \text{ para q.t.p. } x \in [0, 2\pi]\} < \infty.$$

Se $f, g \in L_p$ e $f = g$ q.t.p., consideramos f e g como um mesmo elemento de L_p . Consideramos L_p sempre munido da norma $\|\cdot\|_p$.

Denotaremos por U_p a bola unitária de L_p , isto é,

$$U_p = \{f \in L_p : \|f\|_p \leq 1\}.$$

Dado um núcleo $K \in C_{2\pi}$ e $f \in L_p$, denotaremos por $K * f$ o produto de convolução de K por f , isto é,

$$K * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x-y) f(y) dy.$$

Denotamos

$$K * U_p = \{K * \phi : \phi \in U_p\}.$$

Observação 2.2.7. Seja $f \in L_1$. A série de Fourier de f é a série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k(f) e^{ikx},$$

onde

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iky} dy.$$

Seja $f \in L_p$, $1 \leq p \leq 2$, sejam b_k , $k \in \mathbb{Z}$, os coeficientes de Fourier de f e seja p' tal que $1/p + 1/p' = 1$. Então a desigualdade de Hausdorff-Young [ver [4], pág. 99] diz que

$$\|f\|_{p'} \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^p \right)^{1/p}.$$

Observação 2.2.8. Seja $1 \leq p \leq \infty$ e seja p' tal que $1/p + 1/p' = 1$. Então, para $g \in L_{p'}$ (ver [1], pág. 180) temos que

$$\|g\|_{p'} = \sup \left\{ \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx \right| : f \in U_p \right\}.$$

Consideremos uma aplicação linear $T : L_p \rightarrow L_q$ limitada, isto é, existe uma constante positiva C , tal que, para todo $f \in L_p$,

$$\|T(f)\|_q \leq C \|f\|_p.$$

Denotemos

$$\|T\|_{p,q} = \sup \{ \|T(f)\|_q : f \in U_p \} < \infty.$$

Sejam p', q' tais que $1/p' + 1/p = 1$ e $1/q + 1/q' = 1$ e suponhamos que

$$\int_0^{2\pi} T(g)(x) f(x) dx = \int_0^{2\pi} g(x) T(f)(x) dx$$

para toda $g \in L_p$ e $f \in L_{q'}$. Então

$$\begin{aligned} \|T\|_{q',p'} &= \sup \{ \|T(f)\|_{p'} : f \in U_{q'} \} \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} T(f)(x) g(x) dx \right| : g \in U_p, f \in U_{q'} \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x) T(g)(x) dx \right| : f \in U_{q'}, g \in U_p \right\} \\ &= \sup \{ \|T(g)\|_q : g \in U_p \} \\ &= \|T\|_{p,q}. \end{aligned}$$

Portanto, T está bem definida como um operador de $L_{q'}$ em $L_{p'}$ e temos que $\|T\|_{q',p'} = \|T\|_{p,q}$.

Teorema 2.2.9 (Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, [1], pág. 200)). Sejam $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ e para $0 < t < 1$ sejam p_t e q_t dados por

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Suponhamos que T seja uma aplicação linear de $L_{p_0} + L_{p_1}$ em $L_{q_0} + L_{q_1}$ tal que

$$\|T(f)\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}, \quad f \in L_{p_0},$$

$$\|T(f)\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}, \quad f \in L_{p_1}.$$

Então, para cada $0 < t < 1$,

$$\|T(f)\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}, \quad f \in L_{p_t}.$$

Teorema 2.2.10. Seja $K \in C_{2\pi}$ dada por

$$K(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos(lx),$$

onde $(a_l)_{l=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais tal que

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_l| < \infty.$$

Suponhamos que $a_l > a_{l+1} > 0$, para todo $l \in \mathbb{N}$, e que, para $1 \leq l \leq n-1$, temos

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{2ns-l} \leq C a_{2n-l},$$

onde C é uma constante que independe de l e n . Então, para $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, com $p^{-1} - q^{-1} \geq 2^{-1}$,

$$\sup_{f \in K * U_p} \|f - sk(f, \Delta_n)\|_q \leq \left(\sum_{l \geq n} a_l^{qp(q-p)^{-1}} \right)^{p^{-1}-q^{-1}}.$$

Demonstração. Seja $f = K * \phi \in K * U_p$, $\phi \in U_p$. Temos que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x-y) \phi(y) dy,$$

e, pelo Lema 2.1.4,

$$\begin{aligned} sk(f, \Delta_n)(x) &= \sum_{j=1}^{2n} f(x_j) \tilde{sk}(x - x_j) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{2n} K(x_j - y) \tilde{sk}(x - x_j) \phi(y) dy. \end{aligned}$$

Seja p' tal que $1/p + 1/p' = 1$. Usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
|f(x) - sk(f, \Delta_n)(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x-y)\phi(y)dy - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{2n} K(x_j-y)\tilde{sk}(x-x_j)\phi(y)dy \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[K(x-y) - \sum_{j=1}^{2n} K(x_j-y)\tilde{sk}(x-x_j) \right] \phi(y)dy \right| \\
&\leq \|\phi\|_p \left\| K(x-\cdot) - \sum_{j=1}^{2n} K(x_j-\cdot)\tilde{sk}(x-x_j) \right\|_{p'} \\
&\leq \left\| K(x-\cdot) - \sum_{j=1}^{2n} K(x_j-\cdot)\tilde{sk}(x-x_j) \right\|_{p'}. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Como $1 \leq p \leq 2$, então segue pela desigualdade de Hausdorff-Young que

$$\left\| K(x-\cdot) - \sum_{j=1}^{2n} K(x_j-\cdot)\tilde{sk}(x-x_j) \right\|_{p'} \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^p \right)^{1/p},$$

onde

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[K(x-y) - \sum_{j=1}^{2n} K(x_j-y)\tilde{sk}(x-x_j) \right] e^{iky} dy.$$

Lembrando que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ily} dy = \begin{cases} 1, & l = 0, \\ 0, & l \neq 0, \end{cases}$$

temos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x-y)e^{iky} dy = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_l}{2} \left(\frac{e^{ilx}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)y} dy + \frac{e^{-ilx}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k+l)y} dy \right) = a_k e^{ikx}$$

e que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{2n} K(x_j-y)\tilde{sk}(x-x_j) \right) e^{iky} dy &= \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x_j-y)e^{iky} dy \right) \tilde{sk}(x-x_j) \\
&= a_k e^{ikx_j} \tilde{sk}(x-x_j).
\end{aligned}$$

Portanto

$$b_k = a_k \left(e^{ikx} - \sum_{j=1}^{2n} e^{ikx_j} \tilde{sk}(x-x_j) \right) = a_k \Theta_{n,k}(x),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Assim, usando o Lema 2.2.5, temos

$$\begin{aligned}
\left\| K(x-\cdot) - \sum_{j=1}^{2n} K(x_j-\cdot)\tilde{sk}(x-x_j) \right\|_{p'} &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^p |\Theta_{n,k}(x)|^p \right)^{1/p} \\
&\leq 8 \cdot 4^{1/p} \left(\sum_{k \geq n} a_k^p \right)^{1/p}. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Para $\phi \in L_p$, definimos

$$T(\phi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[K(x-y) - \sum_{j=1}^{2n} K(x_j-y) \tilde{s}k(x-x_j) \right] \phi(y) dy.$$

Pelas desigualdades (2.4) e (2.5), temos que

$$\|T\|_{p,\infty} \leq 8 \cdot 4^{1/p} \left(\sum_{l \geq n} a_l^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, para toda $\phi \in L_p$ e $\psi \in L_1$, temos que

$$\int_0^{2\pi} T(\phi)(x) \psi(x) dx = \int_0^{2\pi} \phi(x) T(\psi)(x) dx$$

e, assim, pela Observação 2.2.8, temos que T é um operador limitado de L_1 em $L_{p'}$ e, além disso,

$$\|T\|_{1,p'} = \|T\|_{p,\infty} \leq 8 \cdot 4^{1/p} \left(\sum_{l \geq n} a_l^p \right)^{1/p}.$$

Aplicando o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin (Teorema 2.2.9) para $p_0 = 1$, $p_1 = p$, $q_0 = p'$, $q_1 = \infty$, temos, para $0 < t < 1$, que

$$\frac{1}{p_t} = 1 - t + \frac{t}{p} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{p'},$$

e que

$$\|T\|_{p_t, q_t} \leq 8 \cdot 4^{1/p} \left(\sum_{l \geq n} a_l^p \right)^{1/p}.$$

Note que $p_t^{-1} - q_t^{-1} = p^{-1} \geq 2^{-1}$. Assim, tomando $r = p_t$ e $s = q_t$, se $1 \leq r \leq 2 \leq s \leq \infty$ e $r^{-1} - s^{-1} \geq 2^{-1}$, então T é limitado de L_r em L_s e

$$\|T\|_{r,s} \leq C_{r,s} \left(\sum_{l \geq n} a_l^{rs/(s-r)} \right)^{r^{-1}-s^{-1}}.$$

□

Capítulo 3

Aplicações

Nas primeira e segunda seções deste capítulo estudamos, respectivamente, a aproximação de funções infinitamente diferenciáveis e funções finitamente diferenciáveis por sk -splines. Ambas são aplicações do Teorema 2.2.10. A existência e unicidade de sk -splines interpolantes para essas funções é garantida pelos Teoremas 1.1.7 e 1.2.8(a).

3.1 Aproximação de Funções Infinitamente Diferenciáveis por sk -Splines

Definição 3.1.1. Consideremos um núcleo $K \in C_{2\pi}$ e sejam $p, q \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Suponhamos que $K * U_p \subset L_q$ (ver Notação 2.2.6). Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, o número

$$e_n(K * U_p, L_q) = \sup_{f \in K * U_p} \|f - sk(f, \Delta_n)\|_q.$$

Observação 3.1.2. Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Então, para qualquer $f \in L_p$, temos que $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ e, assim, $U_q \subset U_p$. Como consequência, temos que:

(a) se $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ e $K * U_{p_1} \subset L_q$, então

$$e_n(K * U_{p_2}, L_q) \leq e_n(K * U_{p_1}, L_q);$$

(b) se $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$ e $K * U_p \subset L_{q_2}$, então

$$e_n(K * U_p, L_{q_1}) \leq e_n(K * U_p, L_{q_2}).$$

Observação 3.1.3. Seja $K \in C_{2\pi}$ dada por

$$K(x) = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\alpha l^r} \cos(lx),$$

onde α, r são constantes reais tais que $\alpha > 0$ e $r \geq 1$. Então $K * U_1 \subset L_\infty$. De fato, seja $f = K * \phi \in K * U_1$, $\phi \in L_1$, $\|\phi\|_1 \leq 1$. Como $r \geq 1$, temos que $e^{-\alpha l^r} \leq e^{-\alpha l}$ e, assim

$$\begin{aligned}
|K * \phi(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K(x-y)| |\phi(y)| dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\left| \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\alpha l^r} \cos(l(x-y)) \right| |\phi(y)| \right) dy \\
&\leq \left(\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\alpha l^r} \right) \|\phi\|_1 \\
&\leq \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\alpha l} \\
&\leq \frac{1}{1 - e^{-\alpha}} < \infty.
\end{aligned}$$

Logo

$$\|K * \phi\|_\infty \leq \frac{1}{1 - e^{-\alpha}},$$

ou seja, $K * \phi \in L_\infty$.

Observação 3.1.4. Seja $m \in \mathbb{N}$ e $f \in C_{2\pi}^{(m)}$, isto é, $f \in C_{2\pi}$ e possui derivadas contínuas até a ordem m . Como a m -ésima derivada $f^{(m)}$ de f é contínua, então $f^{(m)} \in L_p$, para $1 \leq p \leq \infty$. Se $1 < p < \infty$, então a série de Fourier de $f^{(m)}$ converge em L_p para $f^{(m)}$ (ver [17]) e

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (ik)^m b_k(f) e^{ikx}.$$

Seja $K(x)$ o núcleo considerado na Observação 3.1.3. Podemos escrever este núcleo na forma

$$K(x) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{-\alpha|k|^r} e^{ikx}.$$

Seja $\phi \in L_1$ e seja $m \in \mathbb{N}$. A série de Fourier de $K * \phi$ converge para $K * \phi$ na norma de L_p , $1 < p < \infty$, pois $K * \phi \in L_\infty \subset L_p$ e temos que

$$K * \phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{-\alpha|k|^r} b_k(\phi) e^{ikx}.$$

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} k^m < \infty,$$

segue que a série de Fourier da m -ésima derivada de $K * \phi$ converge uniformemente e temos, pelo Teorema 1.3.8 que

$$(K * \phi)^{(m)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{-\alpha|k|^r} (ik)^m b_k(\phi) e^{ikx}.$$

Portanto, a derivada $(K * \phi)^{(m)}$ existe, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, isto é, $K * \phi \in C_{2\pi}^{(\infty)}$.

Observação 3.1.5. Seja $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 1$, e sejam $l, n \in \mathbb{N}$ tais que $l \geq n$. Então temos que

$$(l - n)^r \leq l^r - n^r. \quad (3.1)$$

De fato, fixemos n e r e consideremos a função

$$f(x) = (x - n)^r - x^r + n^r, \quad x \geq n.$$

Derivando $f(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= r(x - n)^{r-1} - rx^{r-1} \\ &= r[(x - n)^{r-1} - x^{r-1}] \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

pois $r - 1 \geq 0$. Logo, a função f é decrescente, ou seja, para $x \geq n$, temos $f(x) \leq f(n) = 0$. Portanto, $(x - n)^r \leq x^r - n^r$, para todo $x \geq n$.

Teorema 3.1.6. Seja $K \in C_{2\pi}$ dada por

$$\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\alpha l^r} \cos(lx),$$

onde α e r são constantes reais tais que $\alpha > 0$ e $r \geq 1$. Então, para quaisquer $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, com $p^{-1} - q^{-1} \geq 2^{-1}$, e $n \geq 1$, temos que

$$e_n(K * U_p, L_q) \leq C_\alpha e^{-\alpha n^r},$$

onde C_α é uma constante positiva que depende somente de α .

Demonstração. Seja $a_l = e^{-\alpha l^r}$. Usando a soma da série geométrica e a Observação 3.1.5, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} a_{2ns-l} &= \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\alpha(2ns-l)^r} \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(2ns-l)^r}}{e^{\alpha(2n-l)^r}} e^{\alpha(2n-l)^r} \\ &= e^{-\alpha(2n-l)^r} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\alpha[(2ns-l)^r - (2n-l)^r]} \\ &\leq e^{-\alpha(2n-l)^r} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\alpha[2n(s-1)]^r} \\ &= e^{-\alpha(2n-l)^r} \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\alpha(2ns)^r} \\ &\leq e^{-\alpha(2n-l)^r} \sum_{s=0}^{\infty} (e^{-2n\alpha})^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\alpha(2n-l)r} \frac{1}{1 - e^{-2n\alpha}} \\
&\leq \frac{1}{1 - e^{-2\alpha}} e^{-\alpha(2n-l)r} \\
&= \frac{1}{1 - e^{-2\alpha}} a_{2n-l}.
\end{aligned}$$

Sejam $p = 1$, $q = \infty$ e $s = p^{-1} - q^{-1} = 1$. Então, aplicando o Teorema 2.2.10 e usando a Observação 3.1.5, obtemos

$$\begin{aligned}
e_n(K * U_1, L_\infty) &\leq \left(\sum_{l \geq n} (a_l)^{s^{-1}} \right)^s \\
&= \sum_{l \geq n} a_l \\
&= \sum_{l \geq n} e^{-\alpha l^r} \\
&= \sum_{l \geq n} \frac{e^{-\alpha l^r}}{e^{\alpha n^r}} e^{\alpha n^r} \\
&= e^{-\alpha n^r} \sum_{l \geq n} e^{-\alpha(l^r - n^r)} \\
&\leq e^{-\alpha n^r} \sum_{l \geq n} e^{-\alpha(l-n)^r} \\
&= e^{-\alpha n^r} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\alpha l^r} \\
&\leq e^{-\alpha n^r} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\alpha l} \\
&= e^{-\alpha n^r} \frac{1}{1 - e^{-\alpha}} \\
&= C_\alpha e^{-\alpha n^r} \\
&= C_\alpha a_n.
\end{aligned}$$

O resultado do teorema segue pela Observação 3.1.2. □

3.2 Aproximação de Funções Finitamente Diferenciáveis por sk -Splines

Observação 3.2.1. Seja $K \in C_{2\pi}$ dada por

$$K(x) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-r} \cos(lx),$$

onde r é uma constante real tal que $r > 1$. Então $K * U_1 \subset L_\infty$. De fato, seja $f = K * \phi \in K * U_1$, $\phi \in L_1$, $\|\phi\|_1 \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
|K * \phi(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K(x-y)| |\phi(y)| dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\left| \sum_{l=1}^{\infty} l^{-r} \cos(l(x-y)) \right| |\phi(y)| \right) dy \\
&\leq \left(\sum_{l=1}^{\infty} l^{-r} \right) \|\phi\|_1 \\
&\leq \sum_{l=1}^{\infty} l^{-r}.
\end{aligned}$$

Temos que a série numérica $\sum_{l=1}^{\infty} l^{-r}$ converge pelo Critério da Integral e que

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{\infty} l^{-r} &\leq 1 + \int_1^{\infty} x^{-r} dx \\
&= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r-1} \left(1 - \frac{1}{n^{r-1}} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{r-1} \\
&= \frac{r}{r-1}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\|K * \phi\|_\infty \leq \frac{r}{r-1},$$

ou seja, $K * \phi \in L_\infty$.

Definição 3.2.2. Sejam $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, e $1 \leq p \leq \infty$ e seja $K(x)$ o núcleo considerado na Observação 3.2.1. O espaço de Sobolev W_p^r é definido como sendo o espaço vetorial

$$W_p^r = \{K * \phi \in L_p : \phi \in L_p\}$$

com a norma

$$\|K * \phi\|_{W_p^r} = \|K * \phi\|_p + \|\phi\|_p.$$

Observação 3.2.3. Sejam r um inteiro positivo par e $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Temos que

$$K(x) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k|^{-r} e^{ikx}.$$

Denotemos

$$\overline{W}_p^r = \{f \in L_p : f^{(r)} \in L_p\}.$$

Seja $f \in W_p^r$, isto é, $f = K * \phi \in L_p$, com $\phi \in L_p$. Temos que

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k|^{-r} b_k(\phi) e^{ikx},$$

onde a convergência da série acima ocorre em L_p , pois $f = K * \phi \in L_p$ (ver [17]). Temos que

$$\begin{aligned} f^{(r)}(x) &\sim \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k|^{-r} (ik)^r b_k(\phi) e^{ikx} \\ &\sim \frac{(i)^r}{2} (\phi(x) - b_0(\phi)). \end{aligned}$$

Como $\phi \in L_p$, então a série de Fourier de ϕ converge para ϕ em L_p e, assim, a série de Fourier de $f^{(r)}$ também converge para $f^{(r)}$ em L_p . Portanto, $f \in \overline{W}_p^r$.

Suponhamos $f \in \overline{W}_p^r$ e tomemos $\phi = f^{(r)} \in L_p$. Como $\phi \in L_p$, temos

$$\phi(x) = f^{(r)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (ik)^r b_k(f) e^{ikx}$$

e

$$\begin{aligned} K * \phi(x) &\sim \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k|^{-r} (ik)^r b_k(f) e^{ikx} \\ &\sim \frac{(i)^r}{2} (f(x) - b_0(f)). \end{aligned}$$

A função f pertence a L_p , assim, a série de Fourier de f converge em L_p para f e, consequentemente, a série de Fourier de $K * \phi$ converge para $K * \phi$ em L_p . Portanto, $K * \phi \in L_p$, isto é, $f \in W_p^r$.

Concluimos, então, que $W_p^r = \overline{W}_p^r$.

Teorema 3.2.4. Seja $K \in C_{2\pi}$ dada por

$$K(x) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-r} \cos(lx),$$

onde r é uma constante real tal que $r > 1$. Então, para quaisquer $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, com $p^{-1} - q^{-1} \geq 2^{-1}$, e $n \geq 1$, temos que

$$e_n(K * U_p, L_q) \leq C_r n^{-r+1/p}.$$

onde C_r é uma constante positiva que depende somente de r .

Demonstração. Seja $a_l = l^{-r}$. É claro que a sequência $(a_l)_{l=1}^{\infty}$ é positiva e estritamente

decrecente. Além disso, para $1 \leq l \leq n-1$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{\infty} a_{2ns-l} &= \sum_{s=1}^{\infty} (2ns-l)^{-r} \\
&= (2n-l)^{-r} + \sum_{s=2}^{\infty} (2ns-l)^{-r} \\
&\leq (2n-l)^{-r} + \int_1^{\infty} (2nx-l)^{-r} dx \\
&= (2n-l)^{-r} + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^m (2nx-l)^{-r} dx \\
&= (2n-l)^{-r} + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{2n-l}^{2mn-l} \frac{u^{-r}}{2n} du \\
&= (2n-l)^{-r} + \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n(-r+1)} u^{-r+1} \Big|_{u=2n-l}^{u=2mn-l} \right) \\
&= (2n-l)^{-r} + \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n(-r+1)} ((2mn-l)^{-r+1} - (2n-l)^{-r+1}) \right) \\
&= (2n-l)^{-r} + \frac{1}{2n(r-1)} (2n-l)^{-r+1} \\
&= (2n-l)^{-r} \left(1 + \frac{2n-l}{2n(r-1)} \right) \\
&\leq \left(1 + \frac{2}{2(r-1)} \right) a_{2n-l} \\
&= \frac{r}{r-1} a_{2n-l}.
\end{aligned}$$

Sejam $p = 1$, $q = \infty$ e $s = p^{-1} - q^{-1} = 1$. Então, aplicando o Teorema 2.2.10, para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
e_n(K * U_1, L_{\infty}) &\leq \left(\sum_{l \geq n} (a_l)^{s-1} \right)^s \\
&= \sum_{l \geq n} a_l \\
&= \sum_{l \geq n} l^{-r} \\
&\leq \int_{n-1}^{\infty} x^{-r} dx \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{n-1}^m x^{-r} dx \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{-r+1} x^{-r+1} \Big|_{x=n-1}^{x=m} \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{-r+1} (m^{-r+1} - (n-1)^{-r+1}) \right) \\
&= \frac{1}{r-1} (n-1)^{-r+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r-1} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{-r+1} n^{-r+1} \\
&\leq \frac{2^r}{r-1} n^{-r+1}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Analogamente para $p = 2$, $q = \infty$ e $s = p^{-1} - q^{-1} = 1/2$, temos

$$\begin{aligned}
e_n(K * U_2, L_\infty) &= \left(\sum_{l \geq n} l^{-2r} \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\frac{2^r}{2r-1} n^{-2r+1} \right)^{1/2} \\
&= \frac{2^r}{(2r-1)^{1/2}} n^{-r+1/2}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Para $\phi \in L_1$, definimos $T(\phi) = K * \phi - sk(K * \phi, \Delta_n)$. Pela desigualdade (3.2), T é um operador limitado de L_1 em L_∞ e

$$\|T\|_{1,\infty} \leq C_r n^{-r+1}.$$

Pela desigualdade (3.3), temos que T é um operador limitado de L_2 em L_∞ e

$$\|T\|_{2,\infty} \leq D_r n^{-r+1/2}.$$

Aplicando o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin (Teorema 2.2.9) para $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $q_0 = \infty$, $q_1 = \infty$, temos, para $0 < t < 1$, que

$$p_t = \frac{2}{2-t} \quad \text{e} \quad q_t = \infty$$

e que

$$\begin{aligned}
\|T\|_{p_t,\infty} &\leq (C_r n^{-r+1})^{1-t} (D_r n^{-r+1/2})^t \\
&= \overline{C}_{r,t} n^{(-r+1)(1-t) + (-r+1/2)t} \\
&= \overline{C}_{r,t} n^{-r+(2-t)/2} \\
&= \overline{C}_{r,t} n^{-r+1/p_t}.
\end{aligned}$$

Note que $1 \leq p_t \leq 2$. Assim, tomando $p = p_t$, temos

$$e_n(K * U_p, L_\infty) \leq \overline{C}_{r,p} n^{-r+1/p}.$$

O resultado do teorema segue da Observação 3.1.2. □

Índice Remissivo

- aplicação linear limitada, 43
- coeficientes de Fourier, 43
- desigualdade de Hausdorff-Young, 43
- espaço L_p , 42
 - norma, 42
- espaço de Sobolev, 51
- matriz circulante, 4
 - autovalor, 4
 - autovetor, 4
- nós, 3
- núcleo, 4
- números de Bernoulli, 32
- operador linear limitado
 - norma, 43
- partição, 3
- polinômio de Bernoulli, 32
- pontos de interpolação, 4
- produto de convolução, 42
- série de Fourier, 43
- sequência convexa, 20
- sk-spline, 3
- sk-spline cardinal, 35
- sk-spline interpolante, 4
- soma de Cèsaro, 21
- spline polinomial, 33
- Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, 44

Referências Bibliográficas

- [1] Folland, G. B., *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, 2ª edição, John Wiley & Sons, 1999.
- [2] Golomb, M., Approximation by periodic spline interpolants on uniform meshes, *J. Approximation Theory* **1**(1) (1968), 26–65.
- [3] Gomes, S. M., Kushpel, A. K., Levesley, J., Ragozin, D. L., Interpolation on the torus using sk-splines with number-theoretic knots, *J. Approx. Theory* **98**(1) (1999), 56–71.
- [4] Katznelson, Y., *An Introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley & Sons, 1968.
- [5] Kushpel, A. K., Extremal properties of splines and diameters of classes of periodic functions in the space $C_{2\pi}$, *Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Preprint* 1984, no. **84.25**, 41 páginas.
- [6] Kushpel, A. K., sk -Splines and sharp estimates for widths of functional classes in the space $C_{2\pi}$, *Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Preprint* 1985, no. **85.51**, 47 páginas.
- [7] Kushpel, A. K., Sharp estimates for the widths of convolution classes, *Math. USSR-Izv.* **33**(3) (1989), 631–649.
- [8] Kushpel, A. K., Estimates for widths of convolution classes in the spaces C and L , *Ukrainian Math. J.* **41**(8) (1990), 919–924.
- [9] Kushpel, A. K., Convergence of sk-splines in L_q – I, *Int. J. Pure Appl. Math.* **45**(1) (2008), 87–101.
- [10] Kushpel, A. K., Convergence of sk-splines in L_q – II, *Int. J. Pure Appl. Math.* **45**(1) (2008), 103–119.
- [11] Kushpel, A. K., Levesley, J., Generalised sk-spline interpolation on compact abelian groups, *J. Approx. Theory* **97**(2) (1999), 311–333.
- [12] Kushpel, A. K., Levesley, J., Light, W. A., Approximation of smooth functions by sk-splines, in: *Advanced topics in multivariate approximation* (Montecatine Terme, Italia, 1995), 155–180, Ser. Approx. Decompos., 8, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.

- [13] Kushpel, A. K., *sk-Splines: Theory and Applications*. Preprint de livro.
- [14] Lara, T., Circulant matrices, *Divulg. Mat.* **9**(1) (2001), 85–102.
- [15] Lima, E. L., *Análise Real - Funções de uma variável*, Volume 1, 8ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [16] Oliveira, F. M., *Análise Harmônica na Esfera Unitária d-Dimensional Real*, Dissertação de Mestrado, IMECC, Unicamp, Campinas, 2005.
- [17] Torchinsky, A., *Real-variable methods in harmonic analysis*, Academic Press, 1986.
- [18] Zhensykbaev, A. A., Approximation of periodic functions on a uniform partition, *Mat. Zametki*, **13** (1973), 807–816.