SEMIGRUPOS DISCRETOS EM GRUPOS DE LIE

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Osvaldo Germano do Rocio e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 09 de junho de 1995.

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requesito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em CIÊNCIAS.

À Kelly, Mathias e Guilherme.

Agradeço

- Ao Luiz San Martin pela orientação, amizade e ser uma constante fonte de apoio e incentivo.
- Ao Pedro tchê pelo companherismo e por nossas longas e proveitosas discussões.
- Ao Daniel e todo pessoal do predinho pela ótima convivência nestes anos de curso.
- Ao pessoal do IMECC-UNICAMP pela hospitalidade e por ter brindado as condições necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.
- Aos colegas do Departamento de Matemática da UEM pelos incentivos recebidos e por assumirem minhas atividades didáticas durante meu afastamento.
- À UEM e à CAPES pelo suporte financeiro
- À minha esposa Kelly e meus filhos Mathias e Guilherme pelo sacrifício, compreensão e por me esperarem sempre de braços abertos.

Resumo

Seja Γ um reticulado de um grupo de Lie solúvel G. No trabalho de tese em questão procuramos relacionar os semigrupos maximais Γ com os semigrupos maximais de interior não vazio de G. Nesse sentido, inicialmente, introduzimos conceitos que permitem a adaptação de métodos usados no estudo de semigrupos de interior não vazio de grupos topológicos ao estudo de semigrupos em grupos finitamente gerados. Posteriormente consideramos o caso em que G é um grupo de Lie nilpotente e mostramos que um semigrupo de Γ é um grupo caso não esteja contido em nenhum semigrupo próprio com pontos interiores. Depois tratamos de aspectos relacionados a cones e semigrupos e damos uma condição, em termos da posição de Γ em G, segundo a qual um semi-espaço invariante pela ação adjunta de Γ é invariante pela ação adjunta do grupo todo. Finalmente, a partir de uma análise em certos semigrupos no grupo afim da reta, mostramos que caso Γ esteja bem situado em G então os resultados obtidos para o caso em que G é nilpotente se estendem para o caso de G solúvel.

Índice

0 Introdução **i**

1 Preliminares **1**

1.1 Reticulados de grupos de Lie 1

1.2 Semigrupos e ordens 5

1.3 Semigrupos maximais e totais 8

1.4 Cones e semigrupos 10

2 Resultados algébricos **15**

2.1 Semigrupos em grupos finitamente gerados 15

2.2 Interior algébrico 17

2.3 Semigrupos arquimedianos 22

2.4 Semigrupos em grupos nilpotentes finitamente gerados 25

3 Semigrupos maximais em subgrupos discretos de grupos de Lie nilpotentes **27**

3.1 Semigrupos discretos em grupos nilpotentes 28

3.2 O caso abeliano 29

3.3 O caso $N^2 = \{0\}$ 31

3.4 O caso geral 38

4 Cones invariantes **43**

4.1 Cones associado a semigrupos 45

4.2 Cones invariantes 48

4.3 Posição geral 50

5 Semigrupos no grupo afim **58**

5.1 Aspectos geométricos 58

5.2 Semigrupos no grupo afim 62

6 Semigrupos maximais em reticulados de grupos de Lie solúveis **67**

6.1 Semigrupos discretos em grupos solúveis 68

6.2 Semigrupos em reticulados de grupos de Lie solúveis 68

6.3 Semigrupos em reticulados de grupos de Lie solúveis com nilradical abeliano. 72

6.4 Semigrupos em reticulados de grupos de Lie solúveis 79

7 Referências **88**

Introdução

Um dos problemas que tem motivado o desenvolvimento da teoria de semigrupos é o de achar condições sob as quais um subsemigrupo S de um grupo G é um subgrupo. Este problema está intimamente relacionado com o de achar os semigrupos maximais de G.

No caso de semigrupos com interior não vazio em grupos topológicos três fatos de natureza elementar; a saber:

a) o interior de um semigrupo é um ideal,

b) qualquer semigrupo de interior não vazio está contido em um semigrupo maximal de interior não vazio e

c) se o interior de um semigrupo contém o elemento identidade do grupo o mesmo coincide com o grupo (no caso conexo),

fazem parte de maneira decisiva em qualquer desenvolvimento de critérios nesta direção.

O problema de classificação de subsemigrupos maximais de interior não vazio M em grupos de Lie solúveis G foi considerado por Lawson em [7]. A classificação obtida , citada neste trabalho como Teorema 1.4.7, é dada através das semialgebras semi-espaços da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada ao grupo G , isto é, dos semi-espaços de $\mathfrak{g}$ limitados por subalgebras de codimensão 1. Um ponto chave na estratégia de Lawson para obter esta classificação é o fato que, ao considerar o quociente de G pelo maior subgrupo normal (conexo) contido em M obtém-se um grupo topologicamente isomorfo a $\mathbb{R}$ ou a Af^+, onde Af^+ denota o único grupo de Lie solúvel conexo simplesmente conexo não abeliano bidimensional, isto é, o grupo das transformações afins da reta. Além disso, através de cálculos diretos, é possível a classificação dos semigrupos maximais de interior não vazio tanto de $\mathbb{R}$ como de Af^+.

Ao se considerar o problema de subsemigrupos maximais em geral a inexistência de pontos interiores restringe substancialmente o uso de argumentos topológicos e, nesta situação, os métodos ainda estão para ser desenvolvidos. Esta tese é uma tentativa nesta direção. Vamos considerar uma classe de subsemigrupos sem pontos interiores dentro de uma classe especifica de grupos e obter resultados análogos aos obtidos para subsemigrupos de interior não vazio. Mais especificamente, consideraremos o problema de classificação de semigrupos *discretos* maximais em grupos de Lie solúveis. Nosso método de análise será uma mistura de métodos algébricos, topológicos e geométricos.

A primeira indicação dos resultados a serem obtidos já aparece no caso unidimensional. De fato: conforme o Exemplo V.5.21 de [3] os semigrupos maximais de interior não vazio do grupo aditivo dos números reais são as semi-retas limitadas por 0. Por outro lado, se S é um subconjunto discreto e fechado de $\mathbb{R}$ o qual é um semigrupo que contém elementos positivos e negativos então S é um subgrupo (discreto). Isto pode ser visto a partir do Lema V.5.5 de [3] ou diretamente como segue. Tomando $x_0 = \min\{x \in S : x > 0\}$ observamos que $-x_0 \in S$. Por outro lado, dado $x \in S$ existem $n \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{R}$ tais que $x = nx_0 + r$, com $0 \leq r < x_0$. Desde que S é semigrupo então $r \in S$ e assim $r = 0$, mostrando que $-x \in S$.

Os resultados que obteremos ao longo desta tese podem ser encarados como uma extensão, na direção de grupos de Lie solúveis, desse fato elementar. A lição que se tira daí, e que buscamos provar na situação mais geral, é que um semigrupo discreto é um grupo caso ele não esteja contido num semigrupo com interior não vazio.

Ao contrário do que o exemplo acima possa sugerir, a atribuição do termo semigrupo discreto a um subconjunto discreto S de um grupo topológico G, o qual é um semigrupo, não será conveniente para nossos propósitos. Neste sentido consideraremos que S é um *semigrupo discreto* caso seja um subsemigrupo de um subgrupo discreto de G. O uso desta terminologia merece os seguintes comentários. Relembremos que um subgrupo Γ de um grupo topológico G é dito discreto caso seja discreto como subconjunto de G, isto é, para todo $x \in \Gamma$ existe um vizinhança U_x de x tal que $U_x \cap \Gamma = \{x\}$. É bem conhecido, e fácil de provar, que estas vizinhanças podem ser tomadas de forma uniforme, isto é, da forma $U_x = xU_1$, onde U_1 é uma vizinhança da identidade. A partir disto temos que Γ é um subgrupo discreto se, e somente se existe uma vizinhança da identidade U com $U \cap \Gamma = \{1\}$. Estes fatos sugerem três possibilidades, as quais estão listadas na primeira seção do terceiro capítulo, para se definir subsemigrupos discretos. No caso de grupos topológicos nilpotentes descartamos a possibilidade de se definir subsemigrupos discretos simplesmente como subconjuntos discretos e mostramos que o fato de S estar contido em um subgrupo discreto é equivalente à existência de uma vizinhança da identidade U em G tal que se $x, y \in S$ e $xy^{-1} \in U$ então $x = y$. Para grupos não nilpotentes esta equivalência pode não valer. De fato conforme o Exemplo 5.1.1 o grupo Af^+ contém um subsemigrupo S para o qual existe uma vizinhança como acima mas o subgrupo gerado por S não é discreto. Assim, estaremos preocupados com semigrupos em subgrupos discretos e, mais especificamente, em semigrupos em reticulados dos grupos de Lie solúveis, isto é, aqueles subgrupos discretos em que o espaço homogêneo correspondente é compacto.

Um ponto chave da questão é que reticulados de grupos de Lie solúveis são grupos finitamente gerados. Esta especificidade permitiu que introduzíssemos o conceito de interior algébrico de um subconjunto (c. f. Definição 2.2.1). Os semigrupos geradores possuem interior algébrico e este satisfaz as mesmas propriedades a), b) e c) do interior topológico. Dessa forma, os métodos aplicados na obtenção de resultados sobre subsemigrupos maximais de interior não vazio, são adaptáveis a subsemigrupos discretos.

Nossa estratégia para o estudo de subsemigrupos maximais em reticulados de grupos de Lie solúveis, será a seguinte: primeiro obteremos a classificação nos grupos abelianos. Depois nos grupos de Lie nilpotentes e, posteriormente, através de sucessivos quocientes reduziremos nossa análise a subsemigrupos de Af^+, porém, não mais discretos.

A extensão dos resultados obtidos no caso nilpotente para o caso solúvel não é imediata nem geral. O problema que surge é o seguinte: ao considerar a representação adjunta de um álgebra de Lie solúvel $\mathbf{g}$ em um ideal abeliano $\mathbf{a}$ podem aparecer raízes complexas causando a existência de hiperplanos em $\mathbf{a}$ que são invariantes pela ação adjunta de reticulados mas não pelo grupo todo. Este ponto indica dificuldades adicionais do tratamento do caso discreto sobre o caso de interior não vazio. Estas dificuldades são da seguinte natureza.

Para um grupo de Lie conexo G com álgebra de Lie $\mathbf{g}$ Lawson mostrou (Teorema 9.1 de [7]) para um subsemigrupo maximal M de interior não vazio e um ideal abeliano $\mathbf{a}$ de $\mathbf{g}$ que

$$W = \{x \in \mathbf{a} : \exp(x) \in M\}$$

é um cone fechado gerador em $\mathbf{a}$ e invariante pela ação adjunta de G em $\mathbf{a}$. No caso de um subsemigrupo discreto S que gera um reticulado Γ de G temos que

$$W = \text{fecho}\{x \in \mathbf{a} : \exists\, t > 0, \exp(tx) \in S\}$$

é um cone fechado gerador em $\mathbf{a}$ o qual é invariante pela ação adjunta de Γ em $\mathbf{a}$ mas não necessariamente invariante pela ação adjunta do grupo todo, isto se G é solúvel. No primeiro caso, se W é próprio, existe um semi-espaço de $\mathbf{a}$, limitado por um ideal de $\mathbf{g}$, contendo W e isto permite a redução do problema através da passagem ao quociente pelo subgrupo normal associado a esse ideal. No caso discreto, sendo W próprio, ele também está contido em um semi-espaço de $\mathbf{a}$ mas sua fronteira, mesmo sendo invariante pela ação adjunta do reticulado, pode não ser ideal de $\mathfrak{g}$. Esta questão diferencia substancialmente o caso discreto do caso de interior não vazio e exige que se considere reticulados bem posicionados no grupo.

A seguir faremos um breve resumo dos capítulos que compõe esta tese.

No Capítulo 1 abordaremos de forma breve os principais conceitos e resultados dos quais dependem o desenvolvimento da tese. Neste sentido incluímos aí resultados básicos sobre reticulados de grupos de Lie e também resultados sobre semigrupos e suas relações com ordens. A classificação dada por Lawson para subsemigrupos maximais de interior não vazio em grupos de Lie solúveis é citada para referências.

O Capítulo 2 trata exclusivamente de resultados algébricos. Definimos aí o interior algébrico e também uma versão simétrica do mesmo para subconjuntos de um grupo em geral. Em grupos finitamente gerados mostraremos que a existência do interior algébrico de um semigrupo está condicionada ao fato do semigrupo ser gerador e que o interior algébrico satisfaz certas propriedades análogas ao interior topológico de um semigrupo de um grupo topológico. Mostraremos também que, nestes grupos, qualquer subsemigrupo gerador está contido em um subsemigrupo maximal. Na seção 2.3, o Teorema 2.3.5 estabelece um resultado similar ao Teorema 7.2 de [7] para grupos não necessariamente topológicos onde o conceito topológico de semigrupo fechado é substituído pelo conceito algébrico de semigrupo arquimediano. Na última seção, como aplicação dos resultados das duas primeiras, daremos no Corolário 2.4.2 uma condição, segundo a qual, o subsemigrupo gerado por um subconjunto de um grupo nilpotente finitamente gerado coincide com o grupo todo. Este resultado estabelece um análogo algébrico ao Corolário 8.6 de [7].

O principal resultado do Capítulo 3 é o Teorema 3.4.1 o qual estabelece que um subsemigrupo discreto S de um grupo de Lie nilpotente conexo simplesmente conexo N, o qual não está contido em nenhum semigrupo de interior não vazio, é um grupo. Uma conseqüência deste fato é que os semigrupos discretos maximais de N são as interseções dos subsemigrupos maximais de interior não vazio com o reticulado gerado pelo semigrupo. A demonstração deste Teorema é apresentada de duas formas distintas. Na primeira, a qual independe dos resultados do Capítulo 2, identificamos N com $(\mathbf{n}, *)$ onde $\mathbf{n}$ é a álgebra de Lie de N e $*$ é a multiplicação de Campbell-Hausdorff. Feito isto, usando uma caracterização de Matsushima para reticulados de grupos de Lie nilpotentes e manipulações algébricas de $*$, demonstramos primeiro o resultado para os grupos que satisfazem $\mathbf{n}^2 = [\mathbf{n}, \mathbf{n}'] = \{0\}$ e posteriormente, por indução, o caso geral. Quanto a segunda demonstração esta seguirá como aplicação dos resultados algébricos do Capítulo 2 e do fato que o índice do grupo derivado $[\Gamma, \Gamma]$ de um reticulado Γ de N ser finito em $\Gamma \cap [N, N]$.

O Capítulo 4 se divide em duas partes. Na primeira tratamos de aspectos relacionados a cones associados a semigrupos bem como da invariança dos mesmos pela ação adjunta. Na segunda tratamos da posição geral de um subgrupo Γ de um grupo de Lie G com relação a um ideal abeliano $\mathbf{a}$ da álgebra de Lie $\mathbf{g}$ associada a G. Formalmente o conceito é dado na Definição 4.3.1. Considerando o caso onde $\mathbf{g}$ é uma álgebra de Lie solúvel o restante do capítulo é dedicado a uma caracterização da posição geral em termos das raízes da representação adjunta de $\mathbf{g}$ em $\mathbf{a}$. O resultado obtido é o Teorema 4.3.4 do qual deduzimos que a não existência de raízes complexas acarreta que todo reticulado de G está na posição geral.

Conforme mencionamos anteriormente a classificação dos subsemigrupos maximais de interior não vazio em grupos de Lie solúveis depende da classificação dos mesmos em Af^+. No caso discreto, a situação não é exatamente a mesma haja visto que Af^+ não possui reticulados. Porém, para este caso, também se faz necessário uma análise dos semigrupos de Af^+ não necessariamente de interior não vazio. Isto será feito no Capítulo 5. O problema colocado aí é o de estabelecer condições sobre as quais a interseção de um subsemigrupo com o radical nilpotente N de Af^+ não esteja contido em subsemigrupo de interior não vazio de N. Condições nesse sentido são dadas no Teorema 5.2.2, o qual é obtido pela análise geométrica das classes laterais dos subgrupos a um parâmetro de Af^+.

No Capítulo 6 consideraremos o problema de estender a classificação obtida para os subsemigrupos maximais de reticulados em grupos de Lie nilpotentes a reticulados de grupos de Lie solúveis. A situação será no entanto distinta e mais envolvente haja visto que, segundo o exemplo 6.2.6, existem grupos de Lie solúveis com reticulados admitindo subsemigrupos próprios que não estão contidos em nenhum subsemigrupo de interior não vazio. O problema que surge nesse exemplo é que o reticulado não está na posição geral com relação ao radical nilpotente. No Teorema 6.3.5 estabelecemos um resultado análogo ao Teorema 3.4.1 para reticulados Γ de grupos de Lie solúveis G possuindo radical nilpotente N abeliano e segundo o qual Γ está na posição geral com relação a N. A demonstração deste resultado envolve fortemente os resultados obtidos nos Capítulos 4 e 5 bem como questões ligadas a racionalidade de um reticulado em um grupo de Lie nilpotente. A extensão deste teorema para o caso onde o radical nilpotente não é abeliano é feita no Teorema 6.4.4 e depende essencialmente da coincidência de pesos associados a representações adjuntas de quocientes da álgebra de Lie.

Capítulo 1

Preliminares

Os grupos e álgebras de Lie considerados neste trabalho serão reais de dimensão finita. Para uma álgebra de Lie $\mathbf{g}$ denotaremos os termos de sua *série derivada* por $\mathbf{g}^{(k)}$ e os termos de sua *série central descendente* por $\mathbf{g}^k$. Aqui, $\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{g} = \mathbf{g}^0$ e, para um inteiro positivo k, $\mathbf{g}^{(k)} = [\ \mathbf{g}^{(k-1)}, \mathbf{g}^{(k-1)}]$, e $\mathbf{g}^k = [\ \mathbf{g}, \mathbf{g}^{k-1}]$. Alternativamente $[\mathbf{g}\ ,\mathbf{g}]$ será também denotada por $\mathbf{g}'$. Se G é grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathbf{g}$ denotaremos os subgrupos fechados de G correspondentes a $\mathbf{g}^{(k)}$ (respectivamente $\mathbf{g}^k$) por $G^{(k)}$, (respectivamente G^k). O ideal nilpotente maximal de $\mathbf{g}$ será denominado de *radical nilpotente* e denotado por $\mathbf{n}$. O subgrupo normal nilpotente conexo, maximal de G será também denominado *radical nilpotente* e denotado por N. Também denotaremos a aplicação exponencial de G por exp.

1.1 Reticulados de grupos de Lie

Seja G um grupo topológico localmente compacto. Um subgrupo $H \subset G$ é um *reticulado* se for discreto e G/H possuir uma medida finita invariante. Se G/H for compacto, H é um subgrupo uniforme de G. Um subgrupo discreto *uniforme* é obviamente um reticulado. Em geral um reticulado não precisa ser uniforme. Contudo, se G for um grupo de Lie solúvel e conexo então o Teorema

3.1 juntamente com a Proposição 3.7 de [10] garantem que todo reticulado de G é uniforme e finitamente gerado.

Neste trabalho estaremos particularmente interessados em reticulados de grupos de Lie. Os subgrupos discretos dos grupos de Lie abelianos, conexos, simplesmente conexos, ou seja do grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ são bem conhecidos (veja, por exemplo, [15]). Na verdade são isomorfos a $\mathbb{Z}^k$, para algum inteiro k, com $1 \leq k \leq n$. Quanto aos subgrupos discretos dos grupos de Lie nilpotentes conexos simplesmente conexos, estes não diferem muito daqueles dos grupos abelianos e foram completamente caracterizados por Yozô Matsushima em [9] através do seguinte teorema onde a notação $\langle * \rangle$ é usada para denotar o subespaço vetorial gerado por $*$.

Teorema 1.1.1 *Seja N um grupo de Lie nilpotente conexo simplesmente conexo com álgebra de Lie* $\mathfrak{n}$ *e aplicação exponencial* exp*. Se $D \subset G$ é um subgrupo discreto então podemos escolher uma base $\mu = \{X_1, ...X_n\}$ de* $\mathfrak{n}$ *a qual possui as seguintes propriedades:*

i) $\langle X_{i+1}, ..., X_n \rangle$ *é um ideal de* $\langle X_i, ..., X_n \rangle$*, para* $i = 1, ..., n-1$.

ii) *Existe um inteiro m, com $1 \leq m \leq n$ tal que $\langle X_m, ..., X_n \rangle$ é uma subálgebra de* $\mathfrak{n}$ *e as constantes estruturais de $X_m, ..., X_n$ são racionais.*

iii) *Todo elemento de D pode ser escrito de maneira única como*

$$\exp(k_m X_m) \cdots \exp(k_n X_n)$$

onde os k_i's são inteiros. □

Mantendo as notações acima fixas, temos a partir do teorema 2.1 em [10] que D é um reticulado de N se, e somente se não existe subgrupo conexo próprio de N contendo D. Dessa forma se, D é um reticulado de N então, no teorema, $m = n$ e diremos que μ é uma *base de Matsushima* de $\mathfrak{g}$ adaptada ao reticulado D.

Note que no teorema D é um reticulado do subgrupo conexo $\widetilde{D}$ de N associado a subálgebra de Lie $\langle X_m, ..., X_n \rangle$ de $\mathbf{n}$. O subgrupo $\widetilde{D}$ acaba coincidindo com o *fecho de Zariski* de D em N. Note também que a existência de reticulados em grupos de Lie nilpotentes está condicionada a existência de uma base da álgebra cujas constantes estruturais são racionais. No teorema 2.12 de [10] é mostrado que esta é também uma condição suficiente para a existência de reticulados em tais grupos.

Com relação a interseções e quocientes de reticulados por subgrupos o seguinte teorema, o qual é uma condensação dos teoremas 1.13 e 2.3 encontrados em [10], será sistematicamente utilizado no transcorrer desse trabalho.

Teorema 1.1.2 *Seja N um grupo de Lie nilpotente conexo simplesmente conexo e $\Gamma \subset N$ um reticulado. Então $\Gamma \cap N^k$ (respectivamente $\Gamma \cap N^{(k)}$) são reticulados de N^k (respectivamente de $N^{(k)}$) para $k \geq 1$. Também, se π_k denota a projeção canônica de N em N/N^k então $\pi_k(\Gamma)$ é um reticulado de N/N^k.* □

Até agora mencionamos aspectos topológicos dos reticulados de grupos de Lie nilpotentes. Quanto a aspectos algébricos o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [10], traduz os conceitos que utilizaremos.

Teorema 1.1.3 *Um grupo Γ é isomorfo a um reticulado de um grupo de Lie nilpotente conexo simplesmente conexo se, e somente se*

i) *Γ é finitamente gerado*

ii) *Γ é nilpotente e*

iii) *Γ é livre de torção.* □

Conforme mencionamos acima os reticulados em grupos de Lie solúveis são, assim como no caso nilpotente, subgrupos discretos uniformes finitamente gerados. Quanto a interseções e projeções não há para o caso solúvel uma versão similar ao caso nilpotente. Entretanto, como conseqüência do Teorema 3.3 de [10] tem-se o seguinte.

Teorema 1.1.4 *Seja G um grupo de Lie solúvel conexo e N seu radical nilpotente. Então, para todo reticulado $\Gamma \subset G$, $\Gamma \cap N$ é reticulado de N.* □

O teorema acima juntamente com o Teorema 1.1.2 acarretam.

Corolário 1.1.5 *Seja G um grupo de Lie solúvel conexo e N o seu radical nilpotente. Se $\Gamma \subset G$ é reticulado então $\Gamma \cap N^k$ é um reticulado de N^k para todo inteiro positivo k.* □

Sendo N^k subgrupo normal de G temos pelo Teorema 1.13 de [10] que $N^k\Gamma$ é fechado em G. Daí, se π_k denota a projeção canonica de G em G/N^k, então $\pi_k(\Gamma)$ é subgrupo enumerável e fechado do grupo de Lie G/N^k e portanto é subgrupo discreto. Além do mais, sendo G/Γ compacto o mesmo ocorre com $(G/N^k)/(\pi_k(\Gamma))$ e daí temos que $\pi_k(\Gamma)$ é um reticulado de G/N^k. Formalmente temos.

Corolário 1.1.6 *Seja G grupo de Lie solúvel conexo e N seu radical nilpotente. Se $\Gamma \subset G$ é um reticulado então $\pi_k(\Gamma)$ é reticulado de G/N^k para todo inteiro positivo k.* □

Uma conseqüência imediata dos resultados acima é que subgrupos discretos de grupos de Lie nilpotentes são finitamente gerados. Como as componentes conexas de reticulados são pontos isolados temos a partir da proposição 3.8 de [10] que todo subgrupo de um reticulado em grupo de Lie solúvel, conexo é finitamente gerado. Para finalizar esta seção citaremos dois outros resultados, também de [10] os quais caracterizam reticulados de grupos de Lie solúveis.

Teorema 1.1.7 *Um reticulado em um grupo de Lie solúvel conexo simplesmente conexo é fortemente policíclico. Reciprocamente, todo grupo fortemente policíclico* *admite um subgrupo normal de índice finito que é isomorfo a um reticulado em um grupo de Lie solúvel conexo simplesmente conexo.* □

Teorema 1.1.8 *Seja G um grupo de Lie solúvel conexo simplesmente conexo e $\Gamma \subset G$ um reticulado. Então existe uma representação fiel ρ de G em $GL(n, \mathbb{R})$ tal que $\rho(\Gamma) \subset GL(n, \mathbb{Z})$.* □

Só para lembrar um grupo Γ é *fortemente policíclico* se existir uma cadeia

$$\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \cdots \supset \Gamma_k = \{1\}$$

de subgrupos tal que Γ_i é normal em Γ_{i-1} e Γ_{i-1}/Γ_i é cíclico infinito para $1 \leq i \leq k$.

1.2 Semigrupos e ordens

Nesta seção apresentaremos alguns fatos básicos da teoria algébrica de semigrupos bem como sua relação com ordens. Aqui G denotará um grupo com identidade 1.

Um subconjunto S de G é um *subsemigrupo* se $SS \subset S$ e um *submonóide* se é um subsemigrupo contendo 1. Um subconjunto não vazio I de S é um *ideal à esquerda* de S se $SI \subset I$, um *ideal à direita* se $IS \subset I$, e um *ideal* caso seja um ideal à direita e à esquerda.

Se X é um subconjunto de G escreveremos

$$\langle X \rangle = X \cup X^2 \cup X^3 \cup \cdots$$

para o subsemigrupo de G gerado por X. O subgrupo gerado por X será denotado por $G(X)$; é claro que $G(X) = \langle X \cup X^{-1} \rangle$. Diremos que X é um *subconjunto gerador*, ou simplesmente *gerador*, caso $G(X) = G$.

Para um submonóide $S \subset G$ o conjunto

$$H(S) = S \cap S^{-1}$$

é o maior subgrupo de G contido em S e é denominado *grupo das unidades de* S. Se $S \neq H(S)$ então $S - H(S)$ é um ideal maximal de S no sentido que contém todos ideais próprios de S.

Um subconjunto $A \subset G$ será chamado *invariante* ou *normal* caso $gAg^{-1} = A$ para todo $g \in G$. Dado $B \subset G$ o maior subconjunto normal de G contido em B é dado por

$$B_N = \cap\{gBg^{-1} : g \in G\}.$$

O maior subgrupo normal contido em um subsemigrupo S, denominado de *centro* de S, será denotado por $C(S)$. É fácil ver que

$$C(S) = H(S_N).$$

Um submonóide $S \subset G$ é dito *reduzido* caso $C(S) = \{1\}$. Denotando $S/C(S)$ por S_R e $G/C(S)$ por G_R é fácil ver que S_R é reduzido em G_R. Diremos que (G_R, S_R) é a *redução* do par (G, S).

Existe uma relação óbvia entre ordens e subsemigrupos de um grupo. Embora a relação seja de natureza elementar existem vários pontos de vista sobre o assunto. Neste sentido vamos abordá-lo brevemente.

Dado um subsemigrupo $S \subset G$ a relação binária $\leq_S$ em G definida por

$$x \leq_S y \Leftrightarrow yx^{-1} \in S$$

satisfaz:

i) $x \leq_S y$ e $y \leq_S z \Rightarrow x \leq_S z$ (transitividade)

ii) $x \leq_S y \Rightarrow xz \leq_S yz$ (compatibilidade à direita)

Além disso, a igualdade

$$S = \{x : 1 \leq_S x\}$$

permite recuperar S como o conjunto dos elementos positivos. Reciprocamente, dado uma relação binária em G a qual é transitiva e compatível à direita então o conjunto

$$P_{\leq} = \{x \in G : 1 \leq x\}$$

é um subsemigrupo e a relação original $\leq$ coincide com a relação $\leq_{P_{\leq}}$. Estas construções estabelecem um bijeção entre os subsemigrupos de G e as relações binárias de G que são transitivas e compatíveis à direita.

A seguinte proposição é de caráter elementar.

Proposição 1.2.1 *Seja $S \subset G$ um subsemigrupo. Então:*

i) $1 \in S \Leftrightarrow \leq_S$ *reflexiva*

ii) $\leq_S$ *é anti-simétrica* $\Leftrightarrow H(S) \subset \{1\}$

iii) $\leq_S$ *é compatível à esquerda* $\Leftrightarrow S$ *é invariante.* □

Uma relação binária $\leq$ em G é chamada *pré-ordem à direita* se for transitiva, reflexiva e compatível à direita. Se uma pré-ordem à direita for também anti-simétrica a denominaremos de *ordem parcial à direita*. Pré-ordens e ordens parciais à esquerda são definidas similarmente. Uma pré-ordem (resp. ordem parcial) em G é uma pré-ordem (resp. ordem parcial) à direita e à esquerda.

Diremos que uma ordem parcial à direita (resp. à esquerda) $\leq$ em G é *arquimediana à direita* (resp. *à esquerda*) se para quaisquer $x, y \in G$, com $1 < x$, existir um inteiro positivo n tal que $1 \leq x^n y^{-1}$ (resp. $1 \leq y^{-1} x^n$). Uma ordem parcial é dita *arquimediana* se for arquimediana à direita e à esquerda.

É bem conhecido que a existência de pré-ordens em grupos, com certas propriedades específicas, impõe restrições na estrutura do mesmo. O teorema a seguir é um resultado nesta direção e pode ser obtido como conseqüência imediata do Teorema 3.1 em [1].

Teorema 1.2.2 *Seja G um grupo munido de uma pré-ordem arquimediana à direita $\leq$ a qual satisfaz para todos $x, y, z \in G$:*

i) $x \leq y$ *e* $x \leq z \Rightarrow y \leq z$ *ou* $z \leq y$

ii) $x \leq y$ *ou* $y \leq x$ *ou existe* $w \in G$ *tal que* $x \leq w$ *e* $y \leq w$.

Então G é abeliano e totalmente ordenado. □

A terminologia *totalmente ordenado* se refere ao fato que quaisquer elementos de G são comparáveis no seguinte sentido; se $x, y \in G$ então $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Nesta terminologia de grupos ordenados precisamos ir um pouco além. Esta necessidade será exigida na Proposição 2.3.5 onde daremos uma versão do teorema 7.2 de [7] para grupos não necessariamente topológicos.

Em [11] (Teorema 1, página 47) é demonstrado o seguinte teorema, o qual complementa o teorema 1.2.2.

Teorema 1.2.3 *Seja G um grupo abeliano totalmente ordenado. Então G é arquimediano se, e somente se G é isomorfo a um subgrupo de $\mathbb{R}$.* □

1.3 Semigrupos maximais e totais

No que segue à esta seção G denotará um grupo e $S \subset G$ um subsemigrupo. O termo *próprio* será usado para dizer que S não é subgrupo.

Definição 1.3.1 *Um subsemigrupo $S \subset G$ é* total *se $G = S \cup S^{-1}$ e* maximal *se é próprio e os únicos subsemigrupos de G contendo S são S e G.*

Um dos principais objetivos de Lawson em [7] foi mostrar que subsemigrupos maximais com interior não vazio em grupos de Lie solúveis são totais. Por outro lado, conforme [16], nenhum subsemigrupo próprio de interior não vazio em grupos de Lie semi-simples conexos com centro finito pode ser total. Conseqüentemente, nestes grupos, é possível garantir a existência de subsemigrupos maximais que não são totais. Outras relações entre os conceitos acima vão aparecer a seguir.

No desenvolvimento do artigo [7], onde são classificados os subsemigrupos maximais de interior não vazio em grupos de Lie solúveis, aparecem resultados gerais que utilizaremos a fim obter outros sobre subsemigrupos não necessariamente com pontos interiores. Passemos a citá-los; as demonstrações podem ser encontradas em [7] ou [3].

O primeiro destes resultados é conhecido na literatura como "Swallowing Lemma".

Proposição 1.3.2 *Sejam S e M subsemigrupos de G com M maximal e $MS^{-1} \subset S^{-1}M$. Então ocorre uma das condições abaixo*

i) *$S \cap I \neq \emptyset$ para todo ideal (à esquerda ou à direita) I de M ou*

ii) *$S^{-1} \subset M$.* □

Em muitos casos a existência de subsemigrupos maximais pode ser deduzida a partir do Lema de Zorn. Isto não acontece com subsemigrupos totais. Como subsemigrupos maximais nem sempre são totais o seguinte resultado sempre é útil, já que se aplica em muitos casos.

Proposição 1.3.3 *Seja $M \subset G$ um subsemigrupo maximal. Se M é invariante então M é total.* □

Através do seguinte resultado elementar o qual é conhecido como "Lema da Redução"em algumas questões de subsemigrupos é possível se trabalhar na redução do mesmo.

Proposição 1.3.4 *Seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo sobrejetor de grupos e $S \subset H$ um submonóide. Então S é maximal (resp. total, resp. invariante) em H se, e somente se $\phi^{-1}(S)$ é maximal (resp. total, resp. invariante) em G.* □

Sendo (G_R, S_R) a redução do par (G, S) e ϕ o homomorfismo canônico de G em G_R temos que $S = \phi^{-1}(\phi(S))$ já que C$(S) \subset S$. Dessa forma temos.

Corolário 1.3.5 *S é maximal em G se, e somente se S_R é maximal em G_R.* □

A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em [7] ou [3].

Teorema 1.3.6 *Seja G um grupo topológico conexo localmente compacto ou localmente conexo. Se $M \subset G$ é um subsemigrupo fechado então as seguintes condições são equivalentes.*

i) M é maximal e invariante

ii) M é total e invariante

iii) M é total e $H(M) =$ C(M), isto é, $H(M)$ é normal

iv) M é maximal e G_R é topologicamente isomorfo ao grupo aditivo dos números reais. □

Para finalizar esta seção citaremos o teorema 8.3 também de [7].

Teorema 1.3.7 *Seja M um subsemigrupo maximal de um grupo nilpotente G. Então M é total, invariante e $[G, G] \subseteq H(M)$. Portanto G_R é abeliano e totalmente ordenado.* □

1.4 Cones e semigrupos

Nesta seção V denotará um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e V^* o espaço dual de todos os funcionais lineares de V em $\mathbb{R}$. Também manteremos fixo o produto interno

$$\langle\ ,\ \rangle : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dado por $\langle \alpha, v\rangle = \alpha(v)$.

Um subconjunto W de V é chamado um *cone* se satisfazer as seguintes condições:

i) $W + W \subset W$

ii) $\mathbb{R}^+ W \subset W$

iii) $\overline{W} = W$, isto é, W é fechado em V.

O subconjunto $H(W) = W \cap -W$, é o maior subespaço vetorial contido em W e é denominado de *bordo* do cone. Um cone W em V é dito *pontual* caso $H(W) = \{0\}$ e *gerador* caso $V = W - W$.

Para um subconjunto $W \subset V$ definimos um subconjunto W^* de V^* por

$$W^* = \{\alpha \in V^* : \langle \alpha, v\rangle \geq 0 \quad \text{para todo } v \in V\}$$

É claro que W^* é um cone de V^*, mesmo que W não o seja. Também, como estamos considerando V de dimensão finita, se $W \subset V$ é um cone, com as devidas identificações, é fácil mostrar que $W^{**} = W$. O cone W^* é denominado de *cone dual* de W.

A demonstração da proposição abaixo é trivial.

Proposição 1.4.1 *Seja W um cone em V. Então W é gerador se, e somente se o cone dual W^* é pontual e vice-versa.* □

Consideremos agora um grupo de Lie conexo G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$. Os termos definidos a seguir podem ser encontrados, por exemplo, em [3].

Definição 1.4.2 *Um cone $W \subset \mathbf{g}$ é chamado,* cone de Lie *se* $e^{\mathrm{ad}(X)}W = W$ *para todo* $X \in H(W)$ *e* cone invariante *se* $e^{\mathrm{ad}(X)}W = W$ *para todo* $X \in \mathbf{g}$.

Seja B uma vizinhança aberta de 0 em $\mathbf{g}$ a qual é simétrica estrelada e tal que para todo $X, Y \in B$ a série de Campbell-Hausdorff

$$X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{6}[X,[X,Y]] + \frac{1}{6}[Y,[Y,X]] + \cdots \tag{1.1}$$

converge absolutamente. Uma tal vizinhança é chamada de *vizinhança de Baker-Campbell-Hausdorff* ou brevemente *C-H vizinhança de* $\mathbf{g}$. Para todo $X, Y \in \mathbf{g}$ temos que $\exp(X * Y) = \exp(X)\exp(Y)$; na verdade isto ocorre para todo X, Y suficientemente próximo de 0.

Definição 1.4.3 *Um cone W em $\mathbf{g}$ é denominado de* semialgebra de Lie *se para alguma* C-H- *vizinhança B de 0 em $\mathbf{g}$ ocorrer*

$$(W \cap B) * (W \cap B) \subseteq W.$$

O resultado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [3], fornece uma caracterização dos semi-espaços de $\mathbf{g}$ que são semialgebras de Lie. Aqui denominados de *semialgebras semi-espaço.*

Proposição 1.4.4 *Seja W um semi-espaço em $\mathbf{g}$. Então W é uma semialgebra semi-espaço se, e somente se o hiperplano fronteira $H(W) = \partial W$ de W for uma subálgebra de Lie.* □

Estritamente ligado a proposição acima temos o seguinte teorema demonstrado por Hofmann em [5].

Teorema 1.4.5 *Seja $\mathbf{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathbf{h}$ um hiperplano que é uma subalgebra. Então um e somente um dos casos abaixo ocorre.*

i) $\mathbf{h}$ *é um ideal.*

ii) $\mathbf{h}$ *contém um ideal* $\mathbf{a}$ *de* $\mathbf{g}$ *tal que* $\mathbf{g}/\mathbf{a}$ *é isomorfa a álgebra de Lie bidimensional não abeliana e* $\mathbf{h}/\mathbf{a}$ *é uma subalgebra unidimensional que não é um ideal.*

iii) $\mathbf{h}$ *contém um ideal* $\mathbf{a}$ *de* $\mathbf{g}$ *tal que* $\mathbf{g}/\mathbf{a}$ *é isomorfa a* $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ *e* $\mathbf{h}/\mathbf{a}$ *é uma subalgebra solúvel de dimensão 2.*

A partir deste teorema verifica se que os hiperplanos subalgebras de uma álgebra de Lie nilpotente são ideais. Conseqüentemente tem-se.

Corolário 1.4.6 *Um semi-espaço* W *de uma álgebra de Lie nilpotente* $\mathbf{g}$ *é uma semialgebra semi-espaço se, e somente se* W *contém a subalgebra derivada* $[\mathbf{g},\mathbf{g}]$.

□

Um fato fundamental, que aparece de alguma forma em uma variedade de contextos onde semigrupos em grupos de Lie são considerados, é o seguinte:

Se $S \subset G$ é um subsemigrupo fechado então

$$L(S) = \{X \in \mathbf{g} : \exp(tX) \in S \quad \text{para todo} \quad t \geq 0\}$$

é um cone de Lie em $\mathbf{g}$. Os elementos deste cone são conhecidos na literatura como *objetos tangentes* do semigrupo S. Note que, se S é discreto como subconjunto de G, então $L(S)$ é vazio.

O maior subgrupo solúvel conexo de G, ou seja o seu radical solúvel será denotado por $\mathrm{rad}(G)$. O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [3] ou em [7] classifica subsemigrupos maximais com interior em grupos de Lie em termos de seus objetos tangentes.

Teorema 1.4.7 *Seja* G *um grupo de Lie conexo simplesmente conexo com* $G/\mathrm{rad}(G)$ *compacto. Então os subsemigrupos maximais de interior não vazio* M *de* G *estão em correspondência bijetora com seus objetos tangentes*

$$L(M) = \{X \in \mathbf{g} : \exp(tX) \in M \ \textit{para}\ t \geq 0\}$$

e os últimos são precisamente as semialgebras semi-espaços de $\mathbf{g}$. *Além disso,* M *é o subsemigrupo gerado por* $\exp(L(M))$. □

Uma conseqüência imediata deste teorema é que subsemigrupos maximais de interior não vazio nos grupos considerados são totais.

Para finalizar este capítulo citemos o seguinte resultado, o qual segue do teorema acima.

Corolário 1.4.8 *Seja* G *como no teorema e* Ω *um subconjunto que gera* $\mathbf{g}$ *como álgebra de Lie. Se* Ω *não está contido em nenhum semi-espaço limitado por uma subalgebra de* $\mathbf{g}$ *então o semigrupo de* G *gerado por* $\exp(\mathbb{R}^+\Omega)$ *é todo* G. □

Capítulo 2

Resultados algébricos

Neste Capítulo serão introduzidos conceitos puramente algébricos de semigrupos os quais permitirão obter para grupos em geral alguns resultados análogos a existentes para grupos topológicos. Alguns desses conceitos serão fundamentais em nossa estratégia de classificação de subsemigrupos maximais de reticulados em grupos de Lie solúveis.

2.1 Semigrupos em grupos finitamente gerados

Se S é um subsemigrupo de interior não vazio em um grupo topológico G então existe um subsemigrupo maximal de interior não vazio em G contendo S (veja, por exemplo, Proposição V.5.14. em [3]). Para grupos finitamente gerados temos um resultado similar de interesse no estudo de subsemigrupos discretos, já que reticulados de grupos de Lie solúveis são finitamente gerados.

Proposição 2.1.1 *Seja Γ um grupo finitamente gerado e $S \subset \Gamma$ um subsemigrupo próprio gerador. Então S está contido em um subsemigrupo maximal de Γ.*

Demonstração: Seja M a família de todos subsemigrupos próprios de Γ contendo S. Ordenemos M por inclusão. Seja $(T_i)_{i\in I}$ um subconjunto totalmente ordenado de M. Claramente $T = \cup_{i \in I} T_i$ é um subsemigrupo contendo S. Além disso T é um subsemigrupo próprio. De fato: se isto não ocorrer $T = \Gamma$ pois S gera Γ. Daí $T = T_i$ para algum i já que Γ é finitamente gerado. Isto contradiz o fato dos T_i's serem próprios. Portanto $T \in$M e S está contido em um subsemigrupo maximal. □

Conforme a Proposição 3.8 de [10] todo subgrupo de um reticulado de um grupo de Lie solúvel conexo é finitamente gerado. Neste caso temos.

Corolário 2.1.2 *Seja Γ um reticulado de um grupo de Lie solúvel conexo. Então todo subsemigrupo próprio $S \subset \Gamma$ está contido em um subsemigrupo maximal do subgrupo gerado por S.*

Para obter uma classe de subsemigrupos onde a segunda hipótese da Proposição seja válida o seguinte resultado, colocado em um contexto mais geral, é útil.

Proposição 2.1.3 *Seja G um grupo e $H \subset G$ um subgrupo. Seja também $S \subset G$ um subsemigrupo gerador e suponha que S é transitivo em G/H no sentido que $Sx = G/H$ para todo $x \in G/H$. Então $S \cap H$ é gerador em H.*

Demonstração: Denote por L o subsemigrupo de H gerado por $S \cap H$ e tomemos $x \in H$. Desde que S é gerador existem $x_1, \ldots, x_n$ em S tais que

$$x = x_1^{-1} x_2 x_3^{-1} \ldots x_{n-1} x_n^{-1}$$

onde x_1 ou x_n podem ser o elemento identidade de G. Queremos mostrar que $x \in L$. Para isto vamos usar indução em n. Caso $n = 1$ na expressão acima, é óbvio que $x \in L$. Por outro lado, pela transitividade de S em G/H, existe $\overline{x} \in S$ tal que $\overline{x} x_1 \in H$ ou, equivalentemente, $x_1^{-1} \overline{x}^{-1} \in H$. Reescrevendo a expressão acima como

$$x = x_1^{-1} \overline{x}^{-1} \overline{x} x_2 x_3^{-1} \ldots x_{n-1} x_n^{-1}$$

obtemos

$$(\overline{x}x_1)x = yx_3^{-1}...x_{n-1}x_n^{-1} \in H$$

com $y = \overline{x}x_2 \in S$. Por indução, o lado direito desta expressão pertence a L e portanto $(\overline{x}x_1)x \in L$. Como $\overline{x}x_1 \in L$ então $x \in L$. □

2.2 Interior algébrico

Existem alguns aspectos da teoria de subsemigrupos em grupos finitamente gerados que podem ser desenvolvidos em analogia com a teoria de subsemigrupos de interior não vazio em grupos topológicos. Isto pode ser implementado com o seguinte conceito.

Definição 2.2.1 *Seja Γ um grupo e $A \subset \Gamma$ um subconjunto. O* interior algébrico *de A é o subconjunto dos $x \in A$ para os quais $\Gamma = \langle Ax^{-1} \rangle$. Uma versão simétrica deste conceito é o* interior algébrico simétrico *o qual é definido como o subconjunto dos $x \in A$ para os quais existe um subconjunto simétrico $U \subset \Gamma$ satisfazendo $\Gamma = \langle U \rangle$ e $Ux \subset A$.*

Denotaremos o interior algébrico de A por intalg(A) e o interior algébrico simétrico por intalg$_S(A)$. Nesta definição consideramos translação à direita pelos inversos dos elementos de A. Notemos que o mesmo interior algébrico seria obtido caso considerássemos translações à esquerda. Isto devido a que $x^{-1}A = x^{-1}(Ax^{-1})x$ e um subconjunto gera um grupo se, e somente se seu conjugado também gera. A analogia do interior algébrico de um subconjunto de um grupo finitamente gerado com o interior topológico em um grupo topológico é clara. Em particular, conforme segue imediatamente da definição, mencionamos o fato que um subsemigrupo $S \subset \Gamma$ coincide com Γ caso o elemento identidade de Γ pertença a intalg(S). Isto determina um método, análogo ao existente para subsemigrupos com pontos interiores em grupos topológicos, para decidir quando um subsemigrupo é um grupo. A existência de interiores algébricos é tratada na seguinte proposição, onde temos interesse específico.

Proposição 2.2.2 *Para um subsemigrupo S de um grupo finitamente gerado Γ as seguintes condições são equivalentes.*

a) *S é gerador.*

b) $\mathrm{intalg}_{\mathbf{S}} S \neq \emptyset$.

c) $\mathrm{intalg} S \neq \emptyset$.

Demonstração: As implicações (b) $\Rightarrow$ (c) e (c) $\Rightarrow$ (a) são triviais. Assumamos que S seja gerador. Temos que S é enumerável, pois Γ é finitamente gerado. Seja

$$S = \{x_1, ..., x_n, ...\}$$

uma enumeração para S. Para um inteiro positivo n seja S_n o subsemigrupo de S gerado pelo subconjunto simétrico

$$U_n = \{x_1, ..., x_n, x_1^{-1}, ..., x_n^{-1}\}.$$

É claro que $\Gamma = \cup_{\geq 1} S_n$ e, como $\{S_n\}$ é uma cadeia ascendente de subsemigrupos e Γ é finitamente gerado, $\Gamma = S_n$ para algum n. Portanto, para este inteiro n, U_n é um conjunto gerador simétrico de Γ. A partir disso segue facilmente que

$$N = \{x_1, x_1^{-1}, x_1 x_2, (x_1 x_2)^{-1}, ..., x_1 \cdots x_n, (x_1 \cdots x_n)^{-1}\}$$

é também um subconjunto simétrico de geradores de Γ. Agora, seja

$$x = (x_1 \cdots x_n) x_1.$$

Claramente $x \in S$ e, desde que os elementos de Nx são da forma $(x_i \cdots x_x)x_1$, $i = 1, ..., n$, temos que $Nx \subset S$, mostrando que $x \in \text{intalg}_{\mathbf{S}} S$. $\square$

Assim como o interior de um subsemigrupo em um grupo topológico, os interiores algébricos são também ideais do subsemigrupo. De fato temos.

Proposição 2.2.3 *Seja S um subsemigrupo gerador de um grupo finitamente gerado Γ. Então* intalg$S$ *e* intalg$_{\mathbf{S}}S$ *são ideais de S.*

Demonstração: Sejam $x \in \text{intalg} S$ e $y \in S$. Então

$$yx(x^{-1}S) = yS \subset S$$

donde $x^{-1}S \subset (yx)^{-1}S$. Portanto,

$$\Gamma = \langle x^{-1}S \rangle \subset \langle (yx)^{-1}S \rangle \subset \Gamma$$

e assim $yx \in \text{intalg} S$. Similarmente $(Sx^{-1})xy = Sy \subset S$ implica $Sx^{-1} \subset S(xy)^{-1}$, mostrando que $xy \in \text{intalg} S$. Agora, seja $x \in \text{intalg}_{\mathbf{S}} S$ e $y \in S$. Então existe um sistema simétrico de geradores de Γ, digamos U, tal que $Ux \subset S$. Daí segue que $Uxy \subset Sy \subset S$ mostrando que $xy \in \text{intalg}_{\mathbf{S}} S$. Por outro lado $V = yUy^{-1}$ é também um sistema simétrico de geradores e, desde que, $Vyx \subset yUx$, temos $Vyx \subset yS \subset S$, e assim, yx também pertence a $\text{intalg}_{\mathbf{S}} S$. $\square$

Estas duas proposições contém os fatos sobre interiores algébricos que necessitaremos futuramente. Contudo, dentro da analogia destes interiores com os interiores topológicos, os seguintes resultados também são relevantes.

Proposição 2.2.4 *Seja Γ um grupo finitamente gerado e $S \subset \Gamma$ um subsemigrupo. Então S é gerador se, e somente se* intalg$S$ *é gerador.*

Demonstração: É claro que S é gerador se intalg$S$ o for. Por outro, intalg$S \neq \emptyset$ se S é gerador. Seja $x \in$ intalg$S$ e tomemos $y \in S$. Temos que

$$y = (yx)x^{-1} \in (\text{intalg}S)(\text{intalg}S)^{-1}$$

já que intalg$S$ é um ideal de S. Isto mostra que S está contido no grupo $\langle(\text{intalg}S) \cup (\text{intalg}S)^{-1}\rangle$ e, portanto, intalg$S$ é também gerador. □

Esta proposição permite definir por recorrência $S^{o(n)} = \text{intalg}(S^{o(n-1)})$ onde $S^{o(0)} = S$. No caso em que S é gerador cada um destes subsemigrupos é gerador e $S^{o(n)}$ é um ideal de $S^{o(n-1)}$. A seguinte proposição melhora esta afirmação.

Proposição 2.2.5 *Se S é gerador então $S^{o(n)}$ é um ideal de S para cada $n \geq 0$.*

Demonstração: Por indução em n. Para $n = 0$ é a Proposição 2.3.3. Assumamos então que $S^{o(n)}$ seja um ideal de S e tomemos $x \in S^{o(n+1)}$, bem como $y \in S$. Sendo $S^{o(n)}$ um ideal então $yS^{o(n)}$ e $S^{o(n)}y$ estão contidos em $S^{o(n)}$. Portanto

$$y^{-1}S^{o(n)} = (yx)^{-1}yS^{o(n)} \subset (yx)^{-1}S^{o(n)}$$

e

$$S^{o(n)}x = S^{o(n)}y(xy)^{-1} \subset S^{o(n)}(xy)^{-1}.$$

Desde que $\langle x^{-1}S^{o(n)}\rangle$ e $\langle S^{o(n)}x^{-1}\rangle$ coincidem com Γ, concluímos a partir destas inclusões que

$$\Gamma = \langle S^{o(n)}(xy)^{-1}\rangle = \langle (yx)^{-1}S^{o(n)}\rangle$$

mostrando que xy e yx pertence a $S^{o(n)}$ como desejávamos. □

Os resultados acima foram estabelecidos somente para interiores algébricos. Contudo não é difícil de se obter resultados similares para os interiores algébricos simétricos. A última proposição mostra que os sucessivos interiores algébricos formam uma seqüência não crescente de ideais de S. Contrariamente aos interiores topológicos, esta seqüência pode ser estritamente decrescente. De fato, para o subsemigrupo

$$S = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$$

do grupo dos inteiros temos para cada $n \geq 0$ que

$$S^{o(n)} = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq n\}$$

Por outro lado existem semigrupos em grupos finitamente gerados que são abertos no sentido que coincidem com seus interiores algébricos. Daremos a seguir um tal exemplo.

Exemplo 2.2.6 *Tomemos $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ e coloquemos*

$$S = \{(x, y) \in \Gamma : -x + \sqrt{2}y > 0\}$$

É claro que S é um subsemigrupo gerador de Γ. Vamos mostrar que $S = \mathrm{intalg}S$. Para isto coloquemos $S_1 = S \cup \{0\}$. Conforme veremos este é um subsemigrupo maximal de Γ. Tomemos $\alpha \in S$. Então $f(\alpha) > 0$, onde f é o funcional linear dado por $f(x, y) = -x + \sqrt{2}y$. Pela irracionalidade de $\sqrt{2}$ existe $\beta \in S$ tal que $0 < f(\beta) < f(\alpha)$, ou seja, $f(\beta - \alpha) < 0$. Isto implica que $\beta - \alpha \notin S_1$. Agora, é claro que $S_1 \subset \langle S - \alpha \rangle$ e que $\beta - \alpha \in \langle S - \alpha \rangle$. Portanto, pela maximalidade de S_1, $\langle S - \alpha \rangle = \Gamma$. Assim, $\alpha \in \mathrm{intalg}S$, mostrando que $S = \mathrm{intalg}S$. □

O próximo exemplo é para mostrar que o interior algébrico simétrico pode estar contido propriamente no interior algébrico.

Exemplo 2.2.7 *No grupo $\mathbb{Z}^2$ tomemos o subsemigrupo*

$$S = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ e } | y | \leq \frac{1}{4}x\}.$$

Temos que $(1,0) \in \text{intalg}S$, *já que o subconjunto* $\{(-1,0),(3,1),(3,-1)\}$ *gera* $\mathbb{Z}^2$ *e está contido em* $S - \{(1,0)\}$. *Por outro lado, os subconjuntos simétricos de* $S - \{(1,0)\}$ *estão contidos no eixo dos* x*'s e daí* $(1,0) \notin \text{intalgs}_S S$. □

2.3 Semigrupos arquimedianos

Nesta seção precisaremos de alguns fatos relacionados com o conceito de préordens arquimedianas transposto para subsemigrupos.

Definição 2.3.1 *Um subsemigrupo próprio* S *de um grupo* G *é* arquimediano à direita (*resp.* à esquerda) *se para todo* $x \in S$ *com* $x^{-1} \notin S$ *e* $y \in G$ *existir um inteiro positivo* n *tal que* $yx^n \in S$ *(respectivamente* $x^n y \in S$*). O subsemigrupo é* arquimediano *se for arquimediano tanto à esquerda como à direita.*

No que segue o propósito é olhar para subsemigrupos maximais invariantes em grupos em geral. Vamos obter resultados similares aos obtidos por Lawson na seção 7 de [7] com a diferença que, ao invés de conceitos topológicos, faremos uso da propriedade de arquimedianidade de subsemigrupos.

Notemos inicialmente os seguintes fatos relacionados com o conceito definido. Primeiro, S é arquimediano à direita se, e somente se S^{-1} é arquimediano à esquerda. Dessa forma S é arquimediano se, e somente se S e S^{-1} são arquimedianos à direita ou à esquerda. Também é claro que S é gerador se for arquimediano à direita, ou à esquerda.

O seguinte lema relaciona subsemigrupos maximais invariantes com subsemigrupos arquimedianos.

Lema 2.3.2 *Seja* S *um subsemigrupo maximal e invariante de um grupo* G. *Então* S *é arquimediano.*

Demonstração: Sejam $x \in S - H(S)$ e $y \in G$. Então $x \notin S^{-1}$ e, desde que S maximal implica S^{-1} maximal, o subsemigrupo gerado por $S^{-1} \cup \{x\}$ é todo G.

Portanto, existem $z_1, \ldots, z_{k+1} \in S^{-1}$ e inteiros positivos $n_1, \ldots, n_k$ tais que

$$y^{-1} = z_1 x^{n_1} z_2 \cdots z_k x^{n_k} z_{k+1} \ .$$

Desde que S é invariante, $gS \subset Sg$ para todo $g \in G$, ou seja, $S^{-1}g \subset gS^{-1}$ para todo $g \in G$. Aplicando esta inclusão à equação acima é possível agrupar as potências de x à esquerda e a reescreve-las como $y^{-1} = x^n z$ onde, $n = n_1 + \cdots + n_k$ e $z \in S^{-1}$. Isto mostra que $yx^n = z^{-1} \in S$. Portanto S é arquimediano à direita. Usando um argumento similar obtemos que S é também arquimediano à esquerda. □

Uma maneira de se obter exemplos de semigrupos totais que não são maximais é retirar, de maneira conveniente, algum subconjunto da fronteira de um semigrupo maximal em um grupo topológico. De fato; esta é a única maneira de se obter tais exemplos pois, conforme a Proposição 6.1 de [7], um subsemigrupo fechado total em um grupo topológico conexo localmente gerado é maximal. Para grupos não necessariamente topológicos temos o seguinte resultado, que é uma espécie de recíproca do lema anterior.

Lema 2.3.3 *Seja G um grupo e $S \subset G$ um subsemigrupo total e arquimediano à direita. Então S é maximal.*

Demonstração: Seja $x \in G - S$ e T o subsemigrupo de G gerado por $S \cup \{x\}$. Precisamos mostrar que $T = G$. Para isto tomemos $y \in G$. Desde que S é total, $x^{-1} \in S$ e assim $x^{-1} \in S - H(S)$ já que $x \notin S$. Portanto, sendo S arquimediano à direita existe um inteiro positivo n tal que $y(x^{-1})^n \in S$, mostrando que $y \in Sx^n \subset T$. Resultado similar é obtido se S é assumido como sendo arquimediano à esquerda. □

Proposição 2.3.4 *Seja $L \subset G$ um subgrupo e $S \subset G$ um subsemigrupo maximal invariante com $S \cap L \neq L$. Então $S \cap L$ é um subsemigrupo maximal invariante de L.*

Demonstração: Como S é maximal e invariante, pela Proposição 1.3.3, S é total em G e, conseqüentemente $S \cap L$ é total em L. Daí, em vista do Lema 2.3.3, é suficiente mostrar que $S \cap L$ é arquimediano à esquerda ou à direita em L. Agora, pelo lema 2.3.2, S é arquimediano em G. Tomando $x \in S \cap L - H(S \cap L)$, $y \in L$ e observando que $x \notin S^{-1}$ temos para algum inteiro positivo n que $yx^n \in S$ e assim $yx^n \in S \cap L$. Isto mostra que $S \cap L$ é arquimediano à direita e, como é invariante, pelo lema 2.3.3, é maximal. □

Temos agora a seguinte caracterização de subsemigrupos maximais invariantes. Esta caracterização é similar a dada por Lawson no Teorema 7.2 em [7] sendo que, ao invés dos conceitos topológicos ali utilizados, aqui utilizaremos o conceito algébrico de arquimedianidade.

Teorema 2.3.5 *Seja S um subsemigrupo próprio de um grupo G. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

a) *S é maximal e invariante*

b) *S é total, invariante e arquimediano*

c) *S é total, $H(S) =$C(S) e S é arquimediano*

d) *S é maximal e $G/C(S)$ é isomorfo a um subgrupo do grupo dos números reais.*

Demonstração: O fato que (a) implica (b) segue da Proposição 1.3.3 e do Lema 2.3.2. Por outro lado a implicação de (b) com (a) segue do Lema 2.3.3. A equivalência entre (b) e (c) é óbvia já que S é invariante se, e somente se $H(S)$

é um subgrupo normal de G. A implicação de (d) com (c) é imediata e resta, portanto, mostrar que (c) implica (d). Assumamos então que (c) seja válida e consideremos a redução (G_R, S_R) de (G, S). Neste caso S_R é um subsemigrupo total e arquimediano de G_R. Colocando isto em termos da pré-ordem $\leq_{S_R}$ de G_R, induzida por S_R, o Teorema 1.2.2 garante que G_R é abeliano. Desse modo G_R é um grupo abeliano totalmente ordenado por uma ordem arquimediana. Conseqüentemente, pelo Teorema 1.2.3, é isomorfo a um subgrupo de $\mathbb{R}$. □

2.4 Semigrupos em grupos nilpotentes finitamente gerados

Se G é um grupo topológico nilpotente conexo e $A \subset G$ é um subconjunto cujo interior topológico intercepta o subgrupo comutador $[G, G]$ de G então, conforme Corolário V.5.32 de [3], o subsemigrupo de G gerado por A é todo G. Nesta seção, a partir do conceito de interior algébrico, daremos uma versão similar a este resultado para grupos que são finitamente gerados.

Proposição 2.4.1 *Seja G um grupo e $L \subset G$ um subgrupo normal nilpotente . Se $S \subset G$ é um subsemigrupo maximal e $S \cap L \neq L$ então $[L, L] \subset$C(S).*

Demonstração: Consideremos o ideal maximal $S^\sharp = S - H(S)$ de S e notemos que $[L, L] \cap S^\sharp = \emptyset$. De fato, se isto não ocorrer então $S \cap L \neq \emptyset$ e, como $S \cap L \neq L$, a Proposição 2.3.4 garante que $S \cap L$ é um subsemigrupo maximal de L e, é claro que o mesmo contém $[L, L] \cap S^\sharp$. Pelo Teorema 1.3.7 temos que $[L, L] \subset H(S \cap L) \subset S \cap L$. Vamos derivar uma contradição mostrando com isto que $H(S) = \emptyset$. Se $g \in [L, L] \cap S^\sharp$ então $g^{-1} \in [L, L] \cap (S^\sharp)^{-1} \subset S \cap L \cap (S^\sharp)^{-1} \subset S$. Como $S^\sharp$ é ideal de S então $1 = gg^{-1} \in S^\sharp$, donde $S^\sharp = S$ e portanto $H(S) = \emptyset$, uma contradição já que, sendo S maximal, $1 \in H(S)$. Agora, sendo L normal em G o mesmo ocorre com $[L, L]$ e daí, pela Proposição 1.3.2, $[L, L] \subset S$, ou seja $[L, L] \subset C(S)$. $\square$

Corolário 2.4.2 *Seja G um grupo nilpotente finitamente gerado e $A \subset G$ um subconjunto tal que* $\text{intalg}(A) \cap [G, G] \neq \emptyset$. *Então o subsemigrupo de G gerado por A é todo G.*

Demonstração: Seja S o subsemigrupo de G gerado por A. Como $\text{intalg}(A) \neq \emptyset$ o mesmo acontece com $\text{intalg}(S)$. Daí, pela Proposição 2.3.2, S é um subsemigrupo gerador de G. Dessa forma se $S \neq G$ então, pela Proposição 2.1.1, podemos supor, sem perda de generalidade que S é maximal. Com esta consideração, pela proposição acima, $[G, G] \subset C(S)$ e temos

$$\emptyset \neq \text{intag}(A) \cap [G, G] \subset \text{intalg}(S) \cap C(S)$$

Tomemos então $x \in \text{intalg}(S) \cap C(S)$. Neste caso $x^{-1} \in S$ e, como $\text{intalg}(S)$, é ideal de S (conforme Proposição 2.3.3), então $1 = xx^{-1} \in \text{intalg}(S)$ e assim, pela definição do interior algébrico, $S = G$, uma contradição. $\square$

Capítulo 3

Semigrupos maximais em subgrupos discretos de grupos de Lie nilpotentes

Em todo este capítulo N denotará um grupo de Lie nilpotente conexo simplesmente conexo e $\mathbf{n}$ denotará sua álgebra de Lie. Neste caso a aplicação exponencial $\exp : \mathbf{n} \to N$ é um difeomorfismo através do qual a estrutura de grupo em N é obtida de $\mathbf{n}$ via a multiplicação de Campbell-Hausdorff denotada por $*$ cujos primeiros termos são dados em 1.1.

Aqui, vamos classificar todos os subsemigrupos maximais de subgrupos discretos de N em termos de seus subsemigrupos maximais de interior não vazio. Primeiramente isto será feito para grupos abelianos, depois para os grupos que satisfazem $\mathbf{n}^2 = 0$ e finalmente para o caso geral. O caso não simplesmente conexo será considerado no Capítulo 6 juntamente com a mesma questão em grupos de Lie solúveis.

Se H é um subgrupo discreto de N então H é um reticulado no fecho de Zariski de H em N o qual, no caso, é o menor subgrupo conexo fechado de N contendo H. Com isto não há perda de generalidade em se trabalhar somente em reticulados de N. É isto que faremos em todo o capítulo.

3.1 Semigrupos discretos em grupos nilpotentes

Conforme mencionamos na introdução existem pelo menos três maneiras diferentes (equivalentes) de se definir subgrupos discretos em grupos topológicos. Isto sugere as seguintes três possibilidade para se definir um subsemigrupo discreto S de um grupo topológico G.

a) S está contido em um subgrupo discreto de G

b) Existe uma vizinhança U da identidade em G tal que $xy^{-1} \in U$, com $x, y \in S$ implica $x = y$

c) S é discreto em G, isto é, para cada $x \in S$ existe uma vizinhança U_x de x em G tal que $U_x \cap S = \{x\}$.

É claro que a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) e também que c) $\Rightarrow$ b) se S é grupo. No entanto, nem sempre c) $\not\Rightarrow$ b); de fato temos:

Exemplo 3.1.1 *Seja G o grupo multiplicativo dos números reais não nulos e $S \subset G$ o semigrupo dos números naturais positivos. Se U é qualquer vizinhança de 1, pela densidade dos racionais nos reais, existem $m, n \in S$, tais que $\frac{m}{n} \in U$ sem que $m = n$.*

Para grupos nilpotentes temos.

Proposição 3.1.2 *Seja G um grupo nilpotente e $S \subset G$ um subsemigrupo. Então as condições* a) *e* b) *acima são equivalentes.*

Demonstração: Basta mostrar que b) $\Rightarrow$ a). Para isto utilizamos um resultado de Ruppert (Proposição 1.5 de [14]) a qual afirma que um subsemigrupo em um grupo nilpotente é reversível. Isto significa que $\Gamma = SS^{-1}$ é um subgrupo e é claro que o mesmo contém S já que se $x \in S$ então $x = x^2x^{-1} \in SS^{-1}$. Por outro lado Γ é discreto já que se U é uma vizinhança da identidade satisfazendo b) então $U \cap \Gamma = \emptyset$. □

A Proposição acima sugere a seguinte definição.

Definição 3.1.3 *Um subsemigrupo S de um grupo topológico nilpotente G é* discreto *se uma das condições equivalentes da proposição acima forem satisfeitas.*

3.2 O caso abeliano

Vamos olhar aqui para subsemigrupos discretos em grupos de Lie abelianos conexos simplesmente conexos. Seja então $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie abeliana, Γ um subgrupo discreto de seu grupo aditivo e $S \subset \Gamma$ um subsemigrupo. Vamos assumir que Γ é uniforme, isto é, que $\mathfrak{g}/\Gamma$ é compacto. Isto pode ser feito sem perda de generalidade pois, caso contrário, a análise poderia ser feita considerando um subespaço de $\mathfrak{g}$. Por uma caracterização bem conhecida de subgrupos discretos em grupos abelianos (veja, por exemplo, Teorema 1, seção 4.1 em [15]) podemos então assumir que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ e que $\Gamma = \mathbb{Z}^n$.

Para um subconjunto não vazio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja $W(\Omega)$ o conjunto dos x em $\mathbb{R}^n$ para os quais existem $x_1, ..., x_r$ em Ω e escalares positivos $a_1, ..., a_r$ tais que

$$x = a_1x_1 + \cdots + a_rx_r$$

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ que se expressam da forma acima são denominados de *combinações cônicas* de Ω e $W(\Omega)$ é denominado de *cone convexo* gerado por Ω. Se $\mathbb{R}^+$ denota o conjunto dos números reais não negativos é claro que $W(\Omega) = W(\mathbb{R}^+\Omega)$. Sendo $\mathbb{R}^+\Omega$ conexo não é difícil provar (veja, por exemplo, $ 1-4 de [2]) que qualquer elemento de $W(\Omega)$ pode ser escrito como combinação cônica de n ou menos elementos de Ω. Juntando isto com o fato óbvio que $W(\Omega) = \mathbb{R}^n$ se, e somente se Ω não está contido em nenhum semi-espaço de $\mathbb{R}^n$ temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.1 *Um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ não está contido em nenhum semi-espaço de $\mathbb{R}^n$ se, e somente se todo elemento de $\mathbb{R}^n$ se escreve como combinação cônica de no máximo n elementos linearmente independentes de Ω.* □

Na continuidade da seção generalizaremos para $\mathbb{R}^n$ o fato já citado na introdução o qual afirma que um semigrupo discreto de $\mathbb{R}$, contendo elementos positivos e negativos, é um grupo. Antes, porém, convém mencionar que os sub-semigrupos maximais de interior não vazio de $\mathbb{R}^n$ são os seus semi-espaços (Veja, por exemplo, Corolário V.5.24 em [3]). Manteremos a primeira terminologia para manter coerência com os termos a serem usados nas próximas seções e capítulos onde consideraremos grupos não abelianos e, para estes, não há uma terminologia alternativa para seus semigrupos maximais.

Proposição 3.2.2 *Seja N um grupo de Lie abeliano conexo e simplesmente conexo. Se $S \subset N$ é um subsemigrupo discreto o qual não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio de N então S é um grupo.*

Demonstração: Conforme comentários feitos podemos supor, sem perda de generalidade, que $N = \mathbb{R}^n$ e $SS^{-1} = \mathbb{Z}^n$. Para $n = 1$ o resultado é bem conhecido e foi demonstrado na introdução. Para o caso geral vamos primeiro considerar a seguinte afirmação

$$(*) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{Z}^n - \{0\},\ \mathbb{N}^+ x \cap S \neq \{0\}$$

onde $\mathbb{N}^+$ denota o conjunto dos inteiros positivos. Para sua demonstração tomemos $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$. Pela Proposição 3.2.1 temos pela hipótese assumida que $W(S) = \mathbb{R}^n$ e que existem elementos linearmente independentes $\beta_1, ..., \beta_r$ em S e escalares positivos $a_r, ..., a_r$, com $r \leq n$ tais que $x = a_1\beta_1 + \cdots + a_r\beta_r$. Nesta igualdade os a_i's são na verdade números racionais. Para ver isso tomemos um complemento de $\{\beta_1, ..., \beta_r\}$ a uma base $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, sendo $\beta_{r+1}, ..., \beta_n$ escolhidos em $\mathbb{Z}^n$, e observe que $x^t = Ba$ onde B é a matriz cujas colunas são as coordenadas dos β_i's, x^t significa transposição e $a = (a_1, ..., a_r, 0, ...0)^t$. Sendo as entradas de B números inteiros as de B^{-1}, bem como de $a = B^{-1}x$, são números racionais. Portanto existem inteiros positivos $p, d_1, ..., d_r$ tais que $px = d_1\beta_1 + \cdots + d_r\beta_r$, mostrando que $px \in S$, como afirmado. Para concluir tomemos $x \in S$. Por $(*)$, $\mathbb{N}^+(-x) \cap S \neq (0)$ e assim $\mathbb{R}x \cap S$ é um subsemigrupo discreto do grupo $\mathbb{R}x$ o qual não está contido em nenhum subsemigrupo próprio de interior não vazio. Portanto $\mathbb{R}(-x) \cap S$ é um grupo. Isto mostra que $-x \in S$ e assim S é grupo. □

Observação: O exemplo abaixo mostra que este resultado pode não ocorrer para subsemigrupos que não são discretos no sentido da Definição 3.1.3.

Exemplo 3.2.3 *Seja S o subsemigrupo da reta real gerado por* 1 *e* $-\sqrt{2}$, *isto é,*

$$S = \{n_1 + n_2\sqrt{2} : n_1, n_2 \text{ inteiros, } n_1 > 0,\ n_2 < 0\}$$

O cone convexo gerado por S é toda a reta mas S não é grupo.

3.3 O caso $N^2 = \{0\}$

Vamos agora considerar subsemigrupos discretos em grupos de Lie nilpotentes conexos simplesmente conexos N satisfazendo $N^2 = 0$. Para isto identificamos N com sua álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ munida da multiplicação de Campbell-Hausdorff $*$ que, no caso, é dada exatamente por

$$x * y = x + y + \frac{1}{2}[x, y]$$

Seja $S \subset N$ um subsemigrupo discreto e suponhamos que S não esteja contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio. A intenção é mostrar que S é um subgrupo. A estratégia para isto será reduzir o problema ao subgrupo derivado N', o qual é isomorfo a $(\mathbf{n}', *)$, e ao grupo quociente N/N'. Sendo estes, grupos abelianos, vamos aplicar o resultado obtido na seção anterior aos subsemigrupos S/N' e $S \cap N'$. A dificuldade será mostrar que $S \cap N'$ não está contido em nenhum semi-espaço. Para isto precisaremos da racionalidade de $\mathbf{n}$ no sentido da existência de uma base satisfazendo as condições do Teorema 1.1.1. O primeiro resultado é para mostrar que S gera um reticulado..

Proposição 3.3.1 *Nas condições estabelecidas o subgrupo de N gerado por S é um reticulado.*

Demonstração: Pela definição de subsemigrupo discreto o subgrupo Γ de N gerado por S é discreto. Para concluir que Γ é reticulado basta então mostrar que não existe subgrupo conexo próprio H de N contendo Γ. Tomemos um tal H e suponhamos, por absurdo, que $H \neq N$. Neste caso existe um subgrupo normal conexo fechado K de N contendo H e de codimensão um em N. Segundo a classificação de Lawson para os subsemigrupos maximais de interior não vazio de grupos de Lie nilpotentes (Teorema 1.4.7), K é a fronteira de um subsemigrupo maximal de interior não vazio de N. Então Γ e, conseqüentemente S, estão contidos em um subsemigrupo de interior não vazio de N, contrariamente à hipótese assumida. □

Antes de prosseguir precisamos da seguinte definição técnica.

Definição 3.3.2 *Sejam, V um espaço vetorial, $U \subset V$ um subespaço e μ uma base de V. Diz-se que U é um* subespaço racional *com respeito a base μ caso admita uma base cujos elementos tenham coordenadas racionais com relação a base μ.*

Sendo o subgrupo Γ de N, gerado por S, um reticulado podemos tomar uma base de Matsushima μ de $\mathfrak{n}$ adaptada a Γ (Veja Teorema 1.1.1 e comentários subseqüentes).

Mantendo uma tal base μ fixa a demonstração do seguinte lema é imediata a partir do fato que os cochetes dos elementos de μ geram a subalgebra derivada $\mathfrak{n}'$.

Lema 3.3.3 *A subalgebra $\mathfrak{n}'$ é racional com relação a base μ.* $\square$

Seja agora $\widetilde{S} = \langle \mathbb{R}^+ S \rangle$ o subsemigrupo de N gerado $\mathbb{R}^+ S$. Segundo a terminologia adotada em [3] $\widetilde{S}$ é um *semigrupo raio* possuindo S como um conjunto de *geradores infinitesimais*. Sendo $\widetilde{S}$ conexo por caminhos o mesmo ocorre com o subgrupo $G(\widetilde{S})$ de N gerado por $\widetilde{S}$. Dessa forma, por um teorema de Yamabe (veja Teorema V.1.1 em [3]), $G(\widetilde{S})$ é um subgrupo analítico de N e daí, pela Proposição V.1.9, também de [3], a álgebra de Lie associada a $G(\widetilde{S})$ coincide com a subalgebra de $\mathfrak{n}$ gerada por S, isto é, com $\langle\langle S \rangle\rangle$. Agora, conforme estamos supondo S gera um reticulado em N e, como um reticulado em um grupo de Lie nilpotente não está contido em nenhum subgrupo fechado conexo próprio, então $\langle\langle S \rangle\rangle = \mathfrak{n}$ e, conseqüentemente, $G(\widetilde{S}) = N$. Dessa forma, pelo teorema do interior denso para semigrupos raio, (Teorema V.1.16 de [3]) $\widetilde{S}$ tem interior não vazio o qual é denso em $\widetilde{S}$. Como também estamos supondo que S não está contido em nenhum semigrupo próprio de interior não vazio de N o mesmo acontece com $\widetilde{S}$ e assim, formalmente, obtemos o seguinte:

Proposição 3.3.4 *Com as hipóteses e notações acima $\widetilde{S} = N$. Além disso, com a identificação de N com $(\mathfrak{n}, *)$ temos que*

$$\widetilde{S} = \{t_1 x_1 * \cdots * t_p x_p : t_i \geq 0,\ x_i \in S \ e \ p \ arbitrário\}$$

Demonstração: A primeira afirmação segue das considerações acima. Quanto a segunda a mesma é imediata. $\square$

Consideremos agora um funcional linear não nulo λ de $\mathfrak{n}'$. Desde que $\widetilde{S} = \mathfrak{n}$ existem $x_1, ..., x_p \in S$ e reais positivos $t_1, ..., t_p$ tais que $t_1x_1 * \cdots * t_px_p \in \mathfrak{n}'$ e $\lambda(t_1x_1 * \cdots * t_px_p) > 0$. Afirmamos que nesta inequação é possível escolher o t_i's como sendo racionais. De fato: usando a fórmula de Campbell-Hausdorff é fácil aplicar uma indução para obter explicitamente que

$$t_1x_1 * \cdots * t_px_p = \sum_i t_ix_i + \frac{1}{2}\sum_{i<j} t_it_j[x_i, x_j].$$

Desde que $[x_i, x_j] \in \mathfrak{n}'$, vemos a partir da fórmula acima que $t_1x_1 * \cdots * t_px_p \in \mathfrak{n}'$ se, e somente se $\sum_i t_ix_i \in \mathfrak{n}'$ que por sua vez é equivalente a $\sum_i tt_ix_i \in \mathfrak{n}'$ para todo $t \in \mathbb{R}$ ou ainda a $tt_1x_1 * \cdots * tt_px_p \in \mathfrak{n}'$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja agora π a projeção canônica de de $\mathfrak{n}$ em $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}'$ e tomemos $X_1, X_2, \cdots, X_k$ em $\mathfrak{n}$ de forma que $\{\pi(X_1), \pi(X_2), \cdots, \pi(X_k)\}$ seja uma base de Matsushima de $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}'$ adaptada ao reticulado $\pi(\Gamma)$ de $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}'$. Como os x_i 's estão em $S \subset \Gamma$ não é difícel de ver que suas coordenadas nesta base são números racionais. Suponhamos então que

$$\pi(x_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{ji}\pi(X_j), \text{ com } a_{ji} \in \mathbb{Q}, \quad 1 \leq i \leq p$$

Com isto temos que $t_1x_1 * \cdots * t_px_p \in \mathfrak{n}'$, se e somente se $0 = \pi(t_1x_1 * \cdots * t_px_p) = \sum_{i=1}^{p} t_i\pi(x_i) = \sum_{j=1}^{k} t_i(\sum_{i=1}^{p} t_ia_{ji})\pi(X_j)$ oque ocorre se, e somente se $\sum_{i=1}^{p} t_ia_{j_l} = 0$ para $1 \leq l \leq k$. Dessa forma $t_1x_1 * \cdots * t_px_p \in \mathfrak{n}' \iff t = (t_1, ..., t_p) \in \cap\ker(\lambda_{j_l})$, onde cada λ_{j_l} é um funcional linear de $\mathbb{R}^p$ obtido canonicamente via produto escalar com os elementos $a_{i_l} = (a_{j_1}, ..., a_{j_lp})$, $1 \leq j \leq k$, os quais possuem coordenadas racionais. Portanto

$$V = \{(t_1, ..., t_p) \in \mathbb{R}^p : t_1x_1 * \cdots * t_px_p \in \mathfrak{n}'\} \tag{3.1}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^p$ o qual possui uma base com coordenadas racionais. Pela continuidade do produto de Campbell-Hausdorff podemos então, conforme o afirmado, escolher racionais positivos $t_1, ..., t_p$ tais que $\lambda(t_1x_1 * \cdots * t_px_p) > 0$, demonstrando assim o seguinte lema.

Lema 3.3.5 *Seja S um subsemigrupo discreto de N o qual não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio. Se $\lambda : \mathbf{n}' \to \mathbb{R}$ é um funcional linear não nulo então existem $x_1, ..., x_p \in S$ e racionais positivos $t_1, ..., t_p$ tais que $t_1x_1 * \cdots * t_px_p \in \mathbf{n}'$ e $\lambda(t_1x_1 * \cdots * t_px_p) > 0$.* □

Podemos melhorar o Lema mostrando que os coeficientes $t_1, \cdots t_p$ podem ser tomados como sendo inteiros. Para isto consideremos o produto

$$(tt_1x_1) * \cdots * (tt_px_p) = \sum_i tt_ix_i + \frac{1}{2}t^2 \sum_{i<j} t_it_j[x_i, x_j]$$

onde $t \in \mathbb{R}$, sendo os t_i's e x_i's como no Lema. Conforme já mostramos este é um elemento de $\mathbf{n}'$. Aplicando λ a esta igualdade obtemos que $P(t) = \lambda((tt_1x_1) * \cdots * (tt_px_p))$ é um polinômio quadrático cujo coeficiente líder é

$$a(x, \tau) = \lambda(\sum_{i<j} t_it_j[x_i, x_j])$$

onde $x = (x_1, ..., x_p)$ e $\tau = (t_1, ..., t_p)$. Se $a(x, \tau) = 0$ então $P(t)$ é linear em t. Neste caso, tomando um inteiro positivo t tal que $tt_i \in \mathbb{N}$ para $1 \leq i \leq p$, então $(tt_1x_1) * \cdots * (tt_px_p) \in S$ e $P(t) = t\lambda(t_1x_1 * \cdots * t_px_p) > 0$, ou seja, λ assume valores positivos em $S \cap \mathbf{n}'$. Se $a(x, \tau) > 0$, $P(t) > 0$ para qualquer t suficientemente grande e isto também possibilita a conclusão acima. Finalmente, se $a(x, \tau) < 0$, tomamos o produto em ordem reversa para obter

$$(tt_px_p) * \cdots * (tt_1x_1) = \sum_i tt_ix_i - \frac{1}{2}t^2 \sum_{i<j} t_it_j[x_i, x_j]$$

Note que o produto acima é também um elemento de $\mathbf{n}'$. Aplicando λ a esta igualdade obtemos um polinômio quadrático em t com coeficiente líder $a(\overline{x},\overline{\tau}) > 0$, sendo $\overline{x} = (x_p, ..., x_1)$ e $\overline{\tau} = (t_p, ..., t_1)$. Em qualquer caso λ assume valores positivos em $S \cap \mathbf{n}'$. Desde que λ foi tomado de forma arbitrária temos a partir da Proposição 3.2.2 o seguinte resultado.

Lema 3.3.6 *Seja S um subsemigrupo discreto de N o qual não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio. Então $S \cap N'$ é um grupo.* □

Com relação ao quociente S/N', temos

Lema 3.3.7 *Nas condições do Lema acima S/N' é um grupo.*

Demonstração: Seja Γ o reticulado de N gerado por S. Pelo Teorema 1.1.2 Γ/N' é um reticulado do grupo de Lie N/N' o qual é abeliano, conexo e simplesmente conexo. Seja $\pi : N \to N/N'$ o homomorfismo canônico e V um subsemigrupo de interior não vazio de N/N'. Então $\pi^{-1}(V)$ é um subsemigrupo de interior não vazio de N e, como S não está contido em $\pi^{-1}(V)$ o mesmo acontece com S/N' em N/N' . Desde que V foi tomado de forma arbitrária, a Proposição 3.2.2 se aplica e obtemos que S/N' é um grupo. □

Finalmente temos o seguinte Lema, o qual ocorre em geral.

Lema 3.3.8 *Seja L um grupo, $S \subset L$ um subsemigrupo e $H \subset L$ um subgrupo normal. Se $S \cap H$ e S/H são grupos então S é grupo.*

Demonstração: Seja $x \in S$. Desde que S/H é grupo, existe $h \in H$ tal que $x^{-1}h \in S$. Portanto $h = x(x^{-1}h) \in S \cap H$ e daí $h^{-1} \in S$, mostrando que $x^{-1} = (x^{-1}h)h^{-1} \in S$. □

Juntando estes três Lemas obtemos o resultado desejado para grupos satisfazendo $N^2 = \{1\}$.

Proposição 3.3.9 *Seja N um grupo de Lie conexo simplesmente conexo satisfazendo $N^2 = \{1\}$. Se $S \subset N$ é um subsemigrupo o qual não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio então S é um subgrupo.* □

Retornemos agora ao Lema 3.3.6 e observemos que em sua demonstração o fato de S ser discreto aparece somente em dois pontos. A saber; no final do argumento para garantir que $S \cap N'$ é um grupo e em 3.1 para garantir que V é um subespaço racional. A abstração deste fato sugere a proposição abaixo a qual, resguardando seu próprio interesse, também contribuirá na obtenção de resultados mais gerais que os obtidos acima.

Proposição 3.3.10 *Seja $N \approx (\mathbf{n}, *)$ um grupo de Lie conexo simplesmente conexo satisfazendo $\mathbf{n}^2 = \{0\}$ e $S \subset N$ um subsemigrupo o qual não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio. Suponha, além disso, que S/N' é racional no sentido que está contido em um subespaço vetorial racional gerado por uma base de $\mathbf{n}/\mathbf{n}'$. Então $S \cap \mathbf{n}'$ não está contido em nenhum semi-espaço de $\mathbf{n}'$.*

Demonstração: A demonstração é a mesma do Lema 3.3.6, a menos da questão da racionalidade do subespaço

$$V = \{(t_1, ..., t_N) \in \mathbb{R}^p : t_1x_1 * \cdots * t_px_p \in \mathbf{n}'\}$$

que aparece em 3.1. Entretanto isto segue de uma maneira mais geral. De fato: seja $\pi : \mathbf{n} \to \mathbf{n}/\mathbf{n}'$ o homomorfismo canônico. Então

$$\pi(t_1x_1 * \cdots * t_px_p) = \pi(\sum_i t_ix_i + \sum_{i<j} t_it_j[x_i, x_j]) = \sum_i t_i\pi(x_i)$$

e $t_1x_1 * \cdots * t_px_p \in \mathbf{n}'$ se, e somente se $\sum_i t_i\pi(x_i) = 0$. Daí V é racional pois $\pi(x_1), ..., \pi(x_p)$ possuem coordenadas racionais com relação a alguma base de $\mathbf{n}/\mathbf{n}'$. O resto da demonstração é exatamente a mesma. Note que nada foi dito com respeito a $S \cap \mathfrak{n}'$ ser grupo. $\square$

3.4 O caso geral

Vamos agora aplicar indução para provar um resultado similar a Proposição 3.3.9 em grupos de Lie nilpotentes conexos simplesmente conexos em geral. Exatamente vamos provar o seguinte.

Teorema 3.4.1 *Seja N um grupo de Lie nilpotente conexo simplesmente conexo e $S \subset N$ um subsemigrupo discreto não contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio. Então S é um reticulado.*

Demonstração: Seja Γ o reticulado de N gerado por S. O que desejamos é mostrar que $S = \Gamma$. Para isto denotemos os termos da série central descendente de N por N^k e seja l o inteiro positivo tal que $N^l \neq \{1\}$ e $N^{l+1} = \{1\}$. Vamos usar indução em l. Para $l = 0$ o resultado é a Proposição 3.2.2 e para $l = 1$ é a Proposição 3.3.9. Portanto vamos assumir que $l \geq 2$.

Suponha que o resultado ocorra para grupos H satisfazendo $H^l = \{1\}$. Então ele é verdade para o grupo N/N^l. Conforme o Teorema 1.1.2 Γ/N^l é um reticulado. Por outro lado, se π é o homomorfismo canônico de N em N/N^l e S' é um subsemigrupo próprio de interior não vazio de N/N^l contendo S/N^l então $\pi^{-1}(S')$ é um subsemigrupo próprio de interior não vazio contendo S. Assim a hipótese de indução se aplica e obtemos que $S/N^l = \Gamma/N^l$. Para concluir que S é grupo basta então provar que $S \cap N^l$ é grupo.

Usando o fato que Γ/N^l é reticulado, obtemos que $(\Gamma/N^l) \cap (N/N^l)^{l-1} = (\Gamma/N^l) \cap (N^{l-1}/N^l)$ é um reticulado de N^{l-1}/N^l. Portanto, $(S \cap N^{l-1})/N^l$ é um reticulado.

Por simplicidade de notação identifiquemos N com sua álgebra de Lie $\mathfrak{n}$. Observe que $\mathfrak{n}^{l-1}$ é abeliana pois $[\mathfrak{n}^{l-1}, \mathfrak{n}^{l-1}] \subset \mathfrak{n}^{2l-1}$ e $2l - 1 \geq l + 1$ já que estamos assumindo $l \geq 2$.

Agora, tomemos $x \in S$ com $x \notin \mathbf{n}^{l-1}$ e consideremos a álgebra de Lie

$$\mathbf{h}_x = \mathbb{R}x \oplus (\mathbf{n}^{l-1}/\mathbf{n}^l) \oplus \mathbf{b}_x$$

onde $\mathbf{b}_x$ é o subespaço de $\mathbf{n}^l$ dado por $\mathbf{b}_x = ad(x)\mathbf{n}^{l-1}$. O cochete em $\mathbf{h}_x$ é abeliano nos dois últimos termos e a ação de x é dada por $ad(x)$. Claramente, $\mathbf{h}_x^2 = \{0\}$ e sua álgebra derivada é $\mathbf{h}_x' = \mathbf{b}_x$. Também, $\mathbf{h}_x$ é isomorfa a $(\mathbb{R}x \oplus \mathbf{n}^{l-1})/c$ onde c é qualquer subespaço de $\mathbf{n}^l$ complementando $\mathbf{b}_x$. Desde que $S/\mathbf{n}^l$ e $(S \cap \mathbf{n}^{l-1})/\mathbf{n}^l$ são reticulados temos que $(S \cap (\mathbb{R}x \oplus \mathbf{n}^{l-1}))/c$ não está contido em semi-espaço contendo $\mathbf{b}_x$ e daí, pelo Teorema 1.4.7, não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio de $(\mathbb{R}x \oplus \mathbf{n}^{l-1})/c$. Também, $S \cap (\mathbb{R}x \oplus \mathbf{n}^{l-1})/c$ é discreto modulo a álgebra derivada de $\mathbf{h}_x$ que é $\mathbf{b}_x$. Podemos então aplicar a Proposição 3.3.10 afim de obter que $(S \cap (\mathbb{R}x \oplus \mathbf{n}^{l-1})/c) \cap \mathbf{b}_x$ não está contido em nenhum semi-espaço de $\mathbf{b}_x$. Desde que c foi um subespaço arbitrário complementando $\mathbf{b}_x$, temos que qualquer semi-espaço contendo $S \cap \mathbf{n}^l$ necessariamente contém $\mathbf{b}_x$ em sua fronteira.

Agora, escolhemos x a partir do seguinte Lema.

Lema: O subconjunto

$$\cup\{ad(x)\mathbf{n}^{l-1} : x \in S\}$$

gera $\mathbf{n}^l$.

De fato: $\mathbf{n}^l = [\mathbf{n}, \mathbf{n}^{l-1}]$ é gerada por $[x_1, \mathbf{n}^{l-1}], ..., [x_s, \mathbf{n}^{l-1}]$ onde $\{x_1, ..., x_s\}$ é qualquer subconjunto cuja projeção em $\mathbf{n}/\mathbf{n}^{l-1}$ gera $\mathbf{n}/\mathbf{n}^{l-1}$. Desde que $S/\mathbf{n}^l$ é um reticulado podemos escolher $x_1, ..., x_s$ em S.

Este Lema e o argumento acima mostra que $S \cap \mathbf{n}^l$ não esta contido em nenhum semi-espaço e é portanto um grupo, mostrando o Teorema. $\square$

A demonstração do Teorema 3.4.1 envolveu fortemente a multiplicação de Campbell-Hausdorff, usada na demonstração da Proposição 3.3.9, e o passo de indução que aplicamos acima. Como aplicação dos resultados obtidos no Capítulo 1 apresentaremos a seguir uma demonstração alternativa a este Teorema.

Manteremos fixas todas as notações e hipóteses, isto é, N é um grupo de Lie nilpotente conexo simplesmente conexo e S é um subsemigrupo discreto de N não contido em subsemigrupos próprios com pontos interiores. Também, conforme já mencionamos, nestas condições, o subgrupo de N gerado por S, o qual denotaremos por Γ é um reticulado. Consideraremos também a projeção conônica

$$\pi : N \to N/[N,N]$$

O resultado inicial que necessitamos é o seguinte.

Lema 3.4.2 $[\Gamma,\Gamma]$ *é de índice finito em* $\Gamma \cap [N,N]$.

Demonstração: Como conseqüência do Teorema 1.1.2 temos que $[\Gamma,\Gamma]$ e $\Gamma \cap [N,N]$ são reticulados em $[N,N]$. Agora, temos a fibração conônica

$$[N,N]/[\Gamma,\Gamma] \to [N,N]/\Gamma \cap [N,N]$$

dada pelo fato de $[\Gamma,\Gamma] \subset \Gamma \cap [N,N]$. Esta fibração é um recobrimento e a fibra é isomorfa a $\Gamma \cap [N,N]/[\Gamma,\Gamma]$. Como $[N,N]/[\Gamma,\Gamma]$ é compacto temos um recobrimento finito mostrando que $[\Gamma,\Gamma]$ é de índice finito em $\Gamma \cap [N,N]$, como o afirmado. □

Com isto podemos dar uma demonstração alternativa ao Teorema 3.4.1 como segue.

Demonstração: Pelo Teorema 1.1.2 $\pi(\Gamma)$ é um reticulado no grupo abeliano conexo simplesmente conexo $N/[N,N]$. Além do mais $\pi(S)$ não está contido em subsemigrupo próprio de interior não vazio de $N/[N,N]$, caso contrário o mesmo ocorreria com S em N. Com isto a Proposição 3.2.2 garante que $\pi(S)$ é um grupo e a demonstração se concluirá se mostrarmos que $S \cap [N,N]$ é um grupo.

Pelo Teorema 1.1.3, Γ é um grupo finitamente gerado e, sendo S um subsemigrupo gerador, pela Proposição 2.3.3, intalg(S) é um ideal não vazio de S. Tomemos $x \in$ intalg(S). Como $\pi(S)$ é um grupo existe $y \in S$ tal que $xy \in [N,N]$ e portanto $xy \in$ intalg$(S) \cap [N,N]$, mostrando que $S' =$ intalg$(S) \cap [N,N]$ é um subsemigrupo não vazio de $\Gamma \cap [N,N]$. Queremos mostrar que $S = \Gamma$. Pela Proposição 2.4.2 isto será conseguido se mostrarmos que intalg$(S) \cap [\Gamma,\Gamma] \neq \emptyset$ e portanto basta mostrar que $S' \cap [\Gamma,\Gamma] \neq \emptyset$. Sendo $[\Gamma,\Gamma]$ um subgrupo normal de $[N,N] \cap \Gamma$, em vista do lema acima, $[N,N] \cap \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ é um grupo finito. Conseqüentemente, se θ é o homomorfismo canônico de $[N,N] \cap \Gamma$ em $[N,N] \cap \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ então $\theta(S')$ é um grupo e isto mostra que $S' \cap [\Gamma,\Gamma] \neq \emptyset$, concluindo a demonstração. □

Como um complemento a esta demonstração mencionamos que em geral $[\Gamma,\Gamma]$ pode estar contido contido em $\Gamma \cap [N,N]$. Isto é o que mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 3.4.3 *Seja N o grupo de Heisemberg das matrizes triangulares superiores 3×3 possuindo elementos 1 na diagonal principal. De maneira alternativa N pode ser visto como $\mathbb{R}^3$ munido do produto*

$$(x,y,z)(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z'+xy').$$

Em N

$$\Gamma = \{(2n, 2m, p) : n, m, p \text{ são inteiros}\}$$

é um reticulado e podemos facilmente verificar que qualquer comutador de elementos de Γ é da forma $(0,0,2p)$ para algum inteiro p. Por outro lado $\Gamma \cap [N,N] = \{(0,0,p) : p \text{ é inteiro}\}$ e $[\Gamma,\Gamma]$ está propriamente contido em $[N,N] \cap \Gamma$.

O Teorema 3.4.1 pode ser reenunciado a partir da seguinte forma conveniente.

Corolário 3.4.4 *Com as hipóteses e notações acima, S é um grupo se, e somente se $S/[N,N]$ é um grupo.*

Demonstração: Se S é grupo claramente $S/[N,N]$ também o é. Reciprocamente, se $S/[N,N]$ é grupo então a demonstração acima mostra que $\mathrm{intalg}(S)$ intercepta o subgrupo derivado $[\Gamma,\Gamma]$ e portanto $S=\Gamma$ é um grupo. $\square$

O que garante a equivalência entre os enunciados do Teorema 3.4.1 e o corolário acima é o Teorema 1.4.7 juntamente com a caracterização de semialgebras semi-espaços em álgebras de Lie nilpotentes, dada no Corolário 1.4.6.

Capítulo 4

Cones invariantes

Com o propósito de fixar notações e terminologias a serem usadas tomemos um grupo de Lie G com álgebra de Lie $\mathbf{g}$ e aplicação exponencial $\exp : \mathbf{g} \to G$. Para cada $g \in G$ o automorfismo interno $I_g : G \to G$ definido por $h \to ghg^{-1}$, induz um automorfismo $Ad(g) : \mathbf{g} \to \mathbf{g}$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{g} & \xrightarrow{Ad(g)} & \mathbf{g} \\ \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{I_g} & G \end{array}$$

Então $\exp(Ad(g)(X)) = g\exp(X)g^{-1}$. Também relembremos a propriedade básica que se $ad(X) : \mathbf{g} \to \mathbf{g}$ é definida por $Y \to [X, Y]$ então

$$Ad(\exp(X)) = e^{ad(X)}(= 1 + ad(X) + \frac{1}{2}(ad(X))^2 + \cdots).$$

Daí segue que o subgrupo gerado pela imagem de um ideal é normal e que uma subalgebra de $\mathbf{g}$ é invariante sob todos $Ad(g)$ se, e somente se é um ideal.

Tendo por base a relação histórica entre grupos e álgebras de Lie, em vários contextos, há uma tentativa em se associar a subsemigrupos de grupos de Lie objetos na álgebra que permitam a partir de propriedades algébricas conclusões sobre sua estrutura. O mais notável e conhecido objeto associado a um subsemigrupo fechado $S \subset G$ com pontos interiores é o cone de Lie

$$L(S) = \{x \in \mathbf{g} : \exp(tx) \in S \text{ para todo } t \geq 0\}$$

já mencionado no Capítulo inicial.

Com o propósito de classificar subsemigrupos maximais de interior não vazio em grupos de Lie Lawson, em [7], considerou um tal subsemigrupo M um ideal abeliano I de $\mathbf{g}$ e introduziu o conjunto

$$W = \{X \in I : \exp(X) \in M\} \tag{4.1}$$

mostrando que o mesmo é cone gerador em I, isto é, $W - W = I$ e também que é invariante pela ação adjunta de G e em I, isto é, $e^{ad(X)}W \subset W \quad \forall X \in \mathbf{g}$.

A invariança de W tem um papel fundamental na classificação dada por Lawson a subsemigrupos maximais com interior em grupos de Lie solúveis. Isto se deve essencialmente ao seguinte fato; caso W seja próprio ele está contido em um semi-espaço de I limitado por um ideal de $\mathbf{g}$.

Neste capítulo vamos considerar G como sendo um grupo de Lie solúvel conexo simplesmente conexo. O radical nilpotente de $\mathbf{g}$ será denotado por $\mathbf{n}$ e o subgrupo conexo fechado de G associado a $\mathbf{n}$ será denotado por N. Os resultados do capítulo serão obtidos com a suposição que $\mathbf{n}$ é abeliano. Posteriormente veremos que esta suposição não interfere no caso geral.

Dentro do programa deste trabalho que é a classificação de subsemigrupos maximais em reticulados de G, vamos introduzir na primeira seção um cone associado a um subsemigrupo de um subgrupo finitamente gerado de G (como os reticulados). No caso de subsemigrupos de interior não vazio o cone introduzido por Lawson sempre é invariante pela ação adjunta de G. No nosso caso, em geral, isto nem sempre ocorrerá e portanto teremos dificuldades adicionais. Na verdade obteremos um cone invariante pela ação adjunta do reticulado e um dos problemas será obter condições para que o mesmo também seja invariante pela ação de todo o grupo. A condição que estabeleceremos fará referência aos pesos da representação adjunta de G em $\mathbf{n}$.

4.1 Cones associado a semigrupos

Consideremos um ideal abeliano $\mathbf{a}$ da álgebra de Lie $\mathbf{g}$ que contém a álgebra derivada $\mathbf{g}'$ e seja A o subgrupo conexo de G cuja álgebra de Lie é $\mathbf{a}$. Para um subsemigrupo S do grupo de Lie G definimos

$$W = \text{fecho}\{x \in \mathbf{a} : \ \exp(tx) \in S \text{ para algum } t > 0\} \tag{4.2}$$

onde o fecho é referente a topologia euclideana de $\mathbf{g}$. Com relação a W o primeiro resultado que temos é o seguinte

Proposição 4.1.1 *Suponha que $\Gamma \subset G$ seja um subgrupo finitamente gerado e que $\Gamma \cap A$ não esteja contido em subgrupo conexo próprio de A. Se $S \subset \Gamma$ é um subsemigrupo gerador tal que S/A é um grupo então W é um cone fechado e gerador em $\mathbf{a}$.*

Demonstração: Para $x, x' \in W$ existem seqüências x_n, x'_n em $\mathbf{a}$ e t_n, s_n em $\mathbb{Q}^+$ tais que $\exp(x_n)$ e $\exp(x')$ estão em S e $t_n x_n$ (resp. $s_n x'_n$) converge para x (resp. x'). Suponhamos que $t_n = \frac{p_n}{q_n}$ e que $s_n = \frac{v_n}{u_n}$ onde p_n, q_n, v_n, u_n são inteiros positivos. Como S é semigrupo e $\mathbf{a}$ é ideal abeliano temos que $\exp(u_n p_n x_n + q_n v_n x'_n) \in S$ e $u_n p_n x_n + q_n v_n x'_n \in \mathbf{a}$. Dessa forma $\frac{1}{q_n u_n}(u_n p_n x_n + q_n v_n x'_n) = t_n x_n + s_n x'_n \in W$ para todo n e, sendo W fechado, temos que $x + x' \in W$. Isto mostra que $W + W \subset W$. Como, evidentemente, $\mathbb{R}^+ W \subset W$ segue que W é um cone fechado. Para verificar que W é gerador observemos inicialmente que S é transitivo em $\Gamma/\Gamma \cap A$. De fato: se denotarmos as classes de equivalência módulo

A dos elementos $\alpha \in G$ por $\overline{\alpha}$ e denotarmos o elemento neutro de G/A por $\overline{1}$ basta mostrar que para $\alpha \in \Gamma$ existe $a \in S$ tal que $a.\overline{1} = \overline{\alpha}$, ou seja, $\alpha a^{-1} \in \Gamma \cap A$. Sendo S gerador em Γ e G/A abeliano, já que $\mathbf{g}' \subset \mathbf{a}$, temos que $\Gamma/A = (S/A)(S/A)^{-1} = (SS^{-1})/A$. Tomemos então $x, y \in S$ e coloquemos $\alpha = xy^{-1}$. Como S/A é grupo existem z e w em S tais que $xz, y^{-1}w^{-1} \in A$. Daí, $xzy^{-1}w^{-1} \in \Gamma \cap A$ e portanto $\overline{1} = \overline{xzy^{-1}w^{-1}} = \overline{\alpha}.\overline{z}.\overline{w}^{-1}$. Agora, existe $u \in S$ tal que $zu \in A$ e portanto $\overline{u}^{-1} = \overline{z}$. Dessa forma $a = wu \in S$ e $\overline{1} = \overline{\alpha a}^{-1}$. Isto mostra que $a\overline{1} = \overline{\alpha}$ e a transitividade segue-se. Pela Proposição 2.1.3 temos então que $S \cap A$ é gerador em $A \cap \Gamma$. Daí e da hipótese sobre $\Gamma \cap A$ concluímos que W não está contido em nenhum subespaço próprio de $\mathbf{a}$ mostrando que é gerador. .

. □

A demonstração de que o cone W, citado em 4.1, é invariante pela ação adjunta do grupo exige fortemente a existência de pontos interiores no semigrupo. Com relação ao cone introduzido em 4.2, quando S é subsemigrupo de um grupo finitamente gerado, ainda temos certa invariança, a qual é obtida via o conceito de interior algébrico. Porém, a inexistência de pontos interiores resultará num resultado mais fraco. Precisamente, temos.

Teorema 4.1.2 *Seja $\Gamma \subset G$ um subgrupo finitamente gerado e $S \subset \Gamma$ um subsemigrupo gerador tal que S/A seja um grupo. Então W é invariante pela ação adjunta de Γ em* $\mathbf{a}$.

Demonstração: Como S é gerador intalg(S) e intalg$_\mathbf{S}(S)$ são ideais não vazios de S e também interceptam A não trivialmente já que S/A é grupo. Também W é gerado por intalg$(S)\cap A$. De fato, se x, $y \in \mathbf{a}$ são tais que $\exp(x) \in$ intalg(S) e $\exp(y) \in S$ então $\exp(x + ny) \in$ intalg(S) para todo inteiro positivo e o raio definido por $x + ny$ se aproxima do raio definido por y quando $n \to \infty$.

Portanto, para mostrar a invariança de W é suficiente mostrar que $\mathrm{Ad}(g)x \in W$ para todo $g \in \Gamma$ e apenas para x tal que $\exp(x) \in$ intalg$(S)\cap A$. Sendo assim, tomemos $x, y \in \mathbf{a}$ tais que $\exp(x) \in \text{intalg}(S) \cap A$ e $h = \exp(y) \in \text{intalg}_{\mathbf{S}}(S) \cap A$. Desde que $\mathbf{a}$ é abeliano $\exp(-x)S$ gera Γ segue que $\exp(-y)\exp(n_0 x)$ pertence a S para algum inteiro n_0. Daí, sendo S semigrupo, efetuando o produto $\exp(-y)\exp(n_0 x)\exp(kx)$ obtemos que $\exp(-y+(n_0+k)x) \in S$ para todo inteiro positivo k. Portanto existe $z_n \in W$ com $\exp(z_n) \in S$ tal que

$$nx = y + z_n$$

para todo $n \geq n_0$. Sendo h um elemento de $\text{intalg}_{\mathbf{S}}(S)$ existe um sistema de geradores simétrico U de Γ tal que $Uh \subset S$. Para $g \in U$, temos

$$\begin{aligned} \exp(Ad(g)(nx) + y) &= g\exp(nx)g^{-1}h \\ &= g\exp(y + z_n)g^{-1}h \\ &= gh\exp(z_n)g^{-1}h \\ &\in (Uh)S(Uh) \\ &\subset S \ . \end{aligned}$$

Portanto $Ad(g)(nx) + y \in W$ para inteiros n suficientemente grandes. Como W é cone fechado, multiplicando este último termo por $\frac{1}{n}$ e fazendo $n \to \infty$ obtemos que o raio definido por $Ad(g)x$ está contido em W e isto mostra que $Ad(g)x \in W$ para todo $g \in U$. Desde que U é gerador em Γ segue que W é Γ-invariante, conforme o afirmado. □

Nos dois resultados acima não usamos o fato de G ser solúvel nem de Γ ser reticulado. Quando isto acontece temos a seguinte versão, a qual será utilizada futuramente.

Corolário 4.1.3 *Seja Γ um reticulado de G e $S \subset \Gamma$ um subsemigrupo não contido em nenhum subsemigrupo próprio de interior não vazio de G. Então $W = \{x \in \mathbf{n} : \exp(tx) \in S$ para algum $t > 0\}$ é um cone gerador em $\mathbf{n}$ invariante* *pela ação adjunta de* Γ *em* $\mathbf{n}$.

Demonstração: Sendo G um grupo de Lie solúvel Γ é finitamente gerado. Além do mais, conforme veremos no Corolário 6.2.2, S/N é grupo. Por outro lado o Teorema 1.1.2 garante que $\Gamma \cap N$ é um reticulado de N e assim não está contido em nenhum subgrupo conexo próprio de N. $\square$

4.2 Cones invariantes

Continuando com as notações e hipóteses da seção anterior a primeira observação que fazemos é que G age em $\mathbf{a}$ como grupo abeliano. De fato; denote por Δ a ação adjunta de G em $\mathbf{a}$, isto é, se $g \in G$ então $\Delta(g)$ é o automorfismo de $\mathbf{a}$ obtido por diferenciação do automorfismo interno $h \to ghg^{-1}$ de A. Como estamos supondo $\mathbf{a}$ abeliano então A está contido no núcleo de Δ e assim a representação se fatora através do quociente G/A definindo uma representação de G/A em $\mathbf{a}$ a qual também denotaremos por Δ.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & gl(\mathbf{a}) \\
G/A \arrow[ur, "\Delta"] &
\end{tikzcd}$$

Claramente $\Delta(G) = \Delta(G/A)$ e estes são grupos abelianos já que estamos supondo $\mathbf{g}' \subset \mathbf{a}$. Em particular $\Delta(\Gamma)$ é um subgrupo abeliano do grupo das transformações lineares de $\mathbf{a}$ em $\mathbf{a}$. Agora, é um resultado clássico(veja, por exemplo Teorema III.3.1 em [3]) que qualquer grupo abeliano de transformações lineares é um *grupo de Frobenius-Perron*. Isto significa o seguinte: se S é qualquer subsemigrupo abeliano do grupo dos endomorfismos de um espaço vetorial V de dimensão finita e se W é um cone em V invariante por S com $W \neq H(W)$ (isto é, W não é espaço vetorial), então existe $w \in W$, não nulo, tal que $Sw \subset \mathbb{R}^+ w$.

Na situação considerada isto significa o seguinte: se $W \subset \mathbf{a}$ é um cone gerador invariante por $\Delta(\Gamma)$ e $W \neq H(W)$ então existe $w \in W$ não nulo tal que $\Delta(g)w \in \mathbb{R}^+ w$ para todo $g \in \Gamma$.

Considere agora a representação dual Δ^* de G em $\mathbf{a}^*$, dada por, $\Delta^*(g)(\lambda) = \lambda \circ \Delta(g^{-1})$ sendo $g \in G$ e $\lambda \in \mathbf{a}^*$. Fazendo uma análise para Δ^* similar a feita para Δ obtemos que $\Delta^*(\Gamma)$ é também um grupo abeliano e, como estamos considerando W invariante por $\Delta(\Gamma)$, o *cone dual* W^* de W dado por

$$W^* = \{\lambda \in \mathbf{a}^* : \lambda(X) \geq 0 \text{ para todo } X \in W\}$$

é invariante por $\Delta^*(\Gamma)$. Também, o fato de W ser gerador em $\mathbf{a}$ implica que W^* é um cone pontual, implicando $H(W^*) \neq W^*$. Portanto, existe em W^* um raio que é invariante por $\Delta^*(g)$ para todo $g \in \Gamma$. Isto significa que existe $\lambda \in \mathbf{a}^*$ que é um autovetor comum para todos $\Delta^*(g), g \in \Gamma$. Com isto podemos ver que o semi-espaço $\{x \in \mathbf{a} : \lambda(x) \geq 0\}$ de $\mathbf{a}$ definido por λ é invariante por $\Delta(\Gamma)$. De fato: se $g \in \Gamma$ então $\Delta^*(g)(\lambda) = k_0\lambda$ para algum $k_0 \geq 0$ e daí $\Delta^*(g)(\lambda)(x) \geq 0$ sempre que $\lambda(x) \geq 0$. Agora, é claro que W está contido em um dos semi-espaços de $\mathbf{a}$ definido por λ já que $\lambda \in W^*$. Portanto mostramos o seguinte resultado.

Proposição 4.2.1 *Com as notações e hipóteses acima suponha que W é um cone próprio e gerador em $\mathbf{a}$ o qual é invariante pela ação adjunta de um subgrupo $\Gamma \subset G$. Então W está contido em um semi-espaço de $\mathbf{a}$ invariante pela ação adjunta de Γ em $\mathbf{a}$.* □

Mesmo que Γ seja um reticulado de G um semi-espaço de $\mathbf{a}$ invariante por Γ pode não ser invariante por todo G. Isto é o que mostra o exemplo que daremos em 6.2.6. A próxima seção será dedicada à esta questão.

4.3 Posição geral

Seja G um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathbf{g}$ e $\mathbf{a}$ um ideal abeliano de $\mathbf{g}$ contendo a álgebra derivada $\mathbf{g}'$. Seja A o subgrupo conexo de G associado a $\mathbf{a}$ e consideremos, como na seção anterior, a representação Δ de G/A em $\mathbf{a}$ obtida pela fatoração da representação adjunta de G em $\mathbf{a}$ através de A. Denominaremos Δ simplesmente de representação adjunta de G em $\mathbf{a}$. Nesta situação temos a seguinte definição.

Definição 4.3.1 *Um subgrupo $\Gamma \subset G$ está na* posição geral *com relação a* $\mathbf{a}$ *caso todo semi-espaço de* $\mathbf{a}$, *invariante pela ação adjunta de* Γ, *seja invariante pela ação adjunta de todo* G.

Note que, se $\Gamma \subset G$ está na posição geral, então o bordo de todo semi-espaço de $\mathbf{a}$ invariante sob Γ é um ideal de $\mathbf{g}$.

No que segue vamos caracterizar a posição geral de reticulados em grupos de Lie solúveis em termos dos pesos da representação adjunta de $\mathbf{g}$ em $\mathbf{a}$. Antes desta discussão precisamos do seguinte lema de álgebra linear.

Lema 4.3.2 *Seja A um operador linear de um espaço vetorial real de dimensão finita U e denote por $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ seus autovalores reais e por $a_1 \pm ib_1, \ldots, a_k \pm ib_k$ seus autovalores complexos. Seja também t um número real com $t \neq \frac{l\pi}{b_j}$ para qualquer inteiro l e $j = 1, \ldots, k$. Então $u \in U$ é um auto vetor para* $\exp(tA)$ *se, e somente se é um auto vetor de A e portanto de* $\exp(sA)$ *para todo $s \in \mathbb{R}$. Se $u \in U$ é um auto vetor de* $\exp A$ *associado a um auto valor real então é também um auto vetor de* $\exp(sA)$ *para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Para $t \in \mathbb{R}$ fixo, considere a forma canônica de Jordan real do operador A e também de $\exp(tA)$. Se A_{λ_i} é um bloco elementar de Jordan associado ao autovalor real λ_i, isto é, se

$$A_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

então, via exponenciação obtemos que

$$\begin{pmatrix} e^{t\lambda_i} & & * \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_i} \end{pmatrix}$$

onde todas as entradas de $*$ são não nulas, possui diagonal coincidindo com a diagonal de um bloco elementar de Jordan de $\exp(tA)$, e vice-versa. Daí se vê que os autovetores de $\exp(tA)$ associados a autovalores reais são também autovetores de A. Considere agora um elemento da diagonal principal de um bloco elementar de Jordan de A associado a um autovalor complexo $a_i + b_i$. Um tal elemento é dado por

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$$

e exponenciando obtemos que

$$e^{ta} \begin{pmatrix} \cos(tb_i) & \operatorname{sen}(tb_i) \\ -\operatorname{sen}(tb_i) & \cos(tb_i) \end{pmatrix}$$

é um elemento na diagonal principal de um bloco elementar de Jordan de $\exp(tA)$. Assim, se $u \in U$ é um autovetor de $\exp(tA)$ para qualquer $t \neq \frac{l\pi}{b_i}$, sendo l inteiro e $1 \leq i \leq k$, então u é associado a autovalor real e, conseqüentemente, é autovetor de A é daí de $\exp(sA)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Pelos argumentos acima e o fato elementar que um autovetor de A é autovetor de $\exp(tA)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ segue a última afirmação do enunciado. $\square$

Consideremos agora a representação adjunta de $\mathbf{g}$ em $\mathbf{a}$ a qual denotaremos por ρ. Como estamos supondo $\mathbf{a}$ abeliano temos que ρ induz uma representação de $\mathbf{g}/\mathbf{a}$ em $\mathbf{a}$ a qual também denotaremos por ρ. A relação entre ρ e a representação adjunta Δ de G em $\mathbf{a}$ fatorada através do grupo abeliano G/A é dada através do seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{g}/\mathbf{a} & \xrightarrow{\rho} & gl(\mathbf{a}) \\ \Big\downarrow \exp & & \Big\downarrow \exp \\ G/A & \xrightarrow{\Delta} & GL(\mathbf{a}) \end{array}$$

Daí, é claro que $\Delta(\exp(X)) = e^{\rho(X)}$ para $X \in \mathbf{g}/\mathbf{a}$.

A complexificação de ρ se decompõe em subespaços pesos complexos que realificados fornecem uma decomposição de $\mathbf{a}$ em subespaços pesos. Sejam

$$a_1 + ib_1, \ldots, a_k + ib_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$$

os pesos da complexificação de ρ. Aqui λ_j, $j = 1, \ldots, s$ denotam os pesos reais e $a_j + ib_j$ os pesos complexos sendo os a_j e os b_j funcionais lineares reais de $\mathbf{g}/\mathbf{a}$. Como $\mathbf{g}/\mathbf{a}$ é abeliano o Teorema de Engel estabelece o seguinte: dentro de um espaço peso associado a um peso real ρ se escreve como matrizes triangulares superiores enquanto em um espaço peso associado a um peso complexo $a_j + ib_j$ como

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} a_j(X) & b_j(X) & & & * \\ -b_j(X) & a_j(X) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_j(X) & b_j(X) \\ & & & -b_j(X) & a_j(X) \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

Tomemos agora a representação dual ρ^* de $\mathbf{g}/\mathbf{a}$ em $\mathbf{a}^*$ bem como a representação dual Δ^* de G/A em $\mathbf{a}^*$. Por um método similar ao que estamos utilizando obtemos que os pesos das representações ρ e ρ^* coincidem e temos para $X \in \mathbf{g}/\mathbf{a}$ e $\mu \in \mathbf{a}^*$ que $\Delta^*(\exp(X))(\mu) = \mu \circ e^{-\rho(X)}$

Definimos a partir das partes imaginárias dos pesos os seguintes subgrupos fechados.

$$L_j = \{X \in \mathbf{g}/\mathbf{a} : b_j(X) = 2n\pi \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}\} \tag{4.4}$$

Com estes fatos em mente temos

Lema 4.3.3 *Seja Γ a subgrupo de G tal que $\Gamma/A \not\subset L_j$ para $1 \leq j \leq k$ e assuma que Γ/A seja um retículado de G/A. Para $\mu \in \mathbf{a}^*$ definimos*

$$H_\mu = \{g \in G/A : \mu \text{ é um auto vetor positivo para } \Delta^*(g)\}$$

(*onde entendemos por* auto vetor positivo *um auto vetor associado a um auto valor positivo*). *Se $\Gamma/A \subset H_\mu$ então $H_\mu = G/A$*

Demonstração: Temos que H_μ é um subgrupo fechado pois é uma isotropia da ação esférica de G/A no espaço projetivo de $\mathbf{a}^*$. Portanto é um subgrupo de Lie. Para ver que ele coincide com G/A primeiro notamos o seguinte. Se $X \in \mathbf{g}/\mathbf{a}$ e $X \notin L_j$ então μ não pertence ao subespaço peso P_j associado ao peso complexo $a_j + ib_j$. De fato, se isto acontecer, então μ é autovetor da restrição de Δ a P_j. Agora, restrito a P_j, temos que $\rho(X)$ é dado como em 4.3. Dessa forma

$$\Delta(\exp(X) = e^{a_j(X)} \begin{pmatrix} \cos(b_j(X)) & \operatorname{sen}(b_j(X)) & & & * \\ -\operatorname{sen}(b_j(X)) & \cos(b_j(X)) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos(b_j(X)) & \operatorname{sen}(b_j(X)) \\ & & & -\operatorname{sen}(b_j(X)) & \cos(b_j(X)) \end{pmatrix}.$$

Daí, sendo a matriz de $\Delta^*(\exp(X))$ restrito a P_j, a transposta da matriz acima e sendo μ autovetor real associado a autovalor positivo temos que $b_j(X) = 2l\pi$ para algum $l \in \mathbb{Z}$, ou seja, $X \in L_j$. Como isto vale para $1 \leq j \leq k$ e $\Gamma/A \subset H_\mu$ então μ é auto vetor associado a autovalores reais de $\Delta^*(\exp(X))$ para todo $g = \exp(X) \in \Gamma/A$ já que Γ/A não está contido em nenhum dos L_j's. Considerando $t \in \mathbb{R}$, fixo, temos então que μ é auto vetor $e^{\Delta^*(t\exp(X))}$ associado a autovalores reais. Pelo Lema 4.3.2 μ é então auto vetor de $e^{s\Delta^*(t\exp(X))}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e novamente pelo Lema μ é autovetor de $\Delta^*(t\exp(X))$. Como t é arbitrário e $\mathbf{g}/\mathbf{a}$ é abeliana temos então que $\exp(tX) \in H_\mu$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Identificando $\mathbf{g}/\mathbf{a}$ com G/A isto mostra que o cone convexo de $\mathbf{g}/\mathbf{a}$ gerado por Γ/A está contido em H_μ. Mas, por hipótese, Γ/A é reticulado de G/A e isto garante que o menor subgrupo conexo de G/A contendo Γ/A coincide com G/A. Portanto $H_\mu = G/A$, conforme afirmamos. □

A partir deste Lema obteremos uma condição necessária e suficiente para que um subgrupo de G esteja na posição geral com relação a $\mathbf{a}$.

Teorema 4.3.4 *Seja Γ um subgrupo de G tal que Γ/A seja um reticulado. Então Γ está na posição geral com relação a $\mathbf{a}$ se, e somente se Γ/A não está contido em nenhum dos subgrupos L_j.*

Demonstração: Tomemos $\mu \in \mathbf{a}^*$ não nulo e consideremos o semi-espaço $T = \{X \in \mathbf{a} : \mu(X) \geq 0\}$. Nossa primeira observação é a seguinte: se $g \in G$ então T é invariante por $\Delta(g)$ se, e somente se μ é autovetor positivo de $\Delta^*(g)$. Para ver isso observe que; se $\Delta^*(g)(\mu) = \mu \circ \Delta(g^{-1}) = a\mu$ para algum $a \in \mathbb{R}^+$ não nulo, então $\Delta(g^{-1})$ e portanto $\Delta(g)$ deixam T invariante. Reciprocamente, se $\Delta(g)$ deixa T invariante, então μ e $\mu \circ \Delta(g^{-1})$ possuem o mesmo núcleo mostrando que um é múltiplo do outro e, é claro que o multiplo é positivo. Suponhamos agora que T seja Γ-invariante. Neste caso μ é auto vetor positivo de $\Delta^*(g)$ para todo $g \in \Gamma$, ou seja, $\Gamma/A \subset H_\mu$. Portanto, pelo lema acima, $G = H_\mu$ mostrando que μ

é autovetor positivo de $\Delta^*(g)$ para todo $g \in G$. Conseqüentemente T é invariante sob $\Delta(g)$ para todo $g \in G$ e, em particular, $\{X \in \mathbf{a} : \mu(X) = 0\}$ é um ideal de $\mathbf{g}$.

Para mostrar a recíproca vamos admitir que $\Gamma/A \subset L_j$ para algum j e mostrar que Γ não está na posição geral. Podemos supor sem perda de generalidade que $\Gamma/A \subset L_1$ e também que o corpo é algebricamente fechado. Neste caso, se P_j denota o subespaço peso associado ao peso complexo $a_j + ib_j$ e Q_i denota o subespaço peso associado ao peso real λ_i, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq i \leq s$ então

$$\mathbf{a} = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k \oplus Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_s$$

e cada subespaço peso é $G-$invariante. Seja $\{v_1^1, v_2^1, ..., v_{k_1}^1\}$ uma base de P_1 segundo a qual a restrição de ρ a P_1 se escreve como

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} a_1(X) & b_1(X) & & & * \\ -b_1(X) & a_1(X) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_1(X) & b_1(X) \\ & & & -b_1(X) & a_1(X) \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Seja T_1 o semi-espaço de P_1 dado por $T_1 = \mathbb{R}v_1^1 + \mathbb{R}v_2^1 + ...\mathbb{R}^+ v_{k_1}^1$ e tomemos

$$T = T_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_k \oplus Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_s.$$

É claro que V é um semi-espaço de $\mathbf{a}$. Para concluir a demonstração vamos mostrar que T_1 é Γ- invariante mas não é G-invariante. Como estamos supondo $\Gamma/A \subset L_1$, se $X \in \Gamma/A$ então $b_j(X) = 2n\pi$ para algum inteiro n e daí $\Delta(X) = e^{\rho(x)}$ é uma matriz triangular superior com um's na diagonal deixando portanto T_1 invariante. Tomando agora $X \in G/A$ tal que $X \notin L_1$ então, restrito a P_1, $\Delta(X)$ é uma matriz de ordem $k_1 \times k_1$ a qual possui na posição $(k_1 \times k_1 - 1)$ o elemento não nulo $b = e^{a_1(X)} sen(b_1(x))$. Daí podemos ver que $\Delta(X)$ não deixa T_1 invariante. $\square$

No caso de só existirem pesos reais o teorema acima se resume no seguinte.

Corolário 4.3.5 *Suponha que os pesos da representação adjunta de* $\mathbf{g}$ *em* $\mathbf{a}$, *fatorada através de* $\mathbf{g}/\mathbf{a}$, *sejam todos reais. Se* Γ *é um subgrupo de* G *tal que* Γ/A *é um reticulado de* G/A *então* Γ *está na posição geral com relação a* $\mathbf{a}$.

Demonstração: É suficiente observar a não existência dos subgrupos L_j no caso considerado. □

Quando tomamos $\mathbf{a}$ como sendo o radical nilpotente de $\mathbf{g}$ temos.

Corolário 4.3.6 *Seja* G *um grupo de Lie solúvel conexo simplesmente conexo com álgebra de Lie* $\mathbf{g}$. *Suponha que o radical nilpotente* $\mathbf{n}$ *de* $\mathbf{g}$ *seja abeliano e tomemos os subgrupos* L_j *de* $\mathbf{g}/\mathbf{n}$ *associados aos pesos complexos da representação adjunta de* $\mathbf{g}$ *em* $\mathbf{n}$ *fatorada através de* $\mathbf{g}/\mathbf{n}$. *Se* Γ *é um reticulado de* G *então* Γ *está na posição geral com relação a* $\mathbf{n}$ *se, e somente se* Γ/N *não está contido em nenhum dos subgrupos* L_j.

Demonstração: Sendo N o radical nilpotente de G, então Γ/N é um reticulado de G/N (conforme Corolário 1.1.6). Assim recaímos nas condições do teorema. □

Para o caso de grupos não simplesmente conexos temos.

Proposição 4.3.7 *Seja* G *um grupo de Lie solúvel conexo com álgebra de Lie* $\mathbf{g}$ *e*

$$\pi : \widetilde{G} \to G$$

recobrimento universal de G. *Se* Γ *é um reticulado de* G *na posição geral com relação ao radical nilpotente* $\mathbf{n}$ *de* $\mathbf{g}$ *então* $\widetilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma)$ *é reticulado na posição geral.*

Demonstração: Sendo $\ker(\pi)$ um subgrupo discreto de $\widetilde{G}$ é claro que $\widetilde{\Gamma}$ é um subgrupo discreto de $\widetilde{G}$. Por outro lado $\widetilde{G}/\widetilde{\Gamma} \approx (\widetilde{G}/\ker(\pi))/(\widetilde{\Gamma}/\ker(\pi)) \approx G/\Gamma$ o qual é compacto. Dessa forma $\widetilde{\Gamma}$ é reticulado de $\widetilde{G}$. Identifiquemos as álgebras de Lie de G e $\widetilde{G}$ e tomemos um semi-espaço T de $\mathbf{n}$ invariante pela ação adjunta de $\widetilde{\Gamma}$ em $\mathbf{n}$. Se $d\pi$ denota a diferencial de π então $d\pi$ é um isomorfismo de $\mathbf{g}$ e para $y \in \widetilde{G}$ temos que

$$Ad(\pi(y)) \circ d\pi = d\pi \circ Ad(y)$$

Tomemos $x \in \Gamma$ e seja $y \in \widetilde{\Gamma}$ tal que $\pi(y) = x$. Então

$$Ad(x)(d\pi(T)) = d\pi(Ad(y)T) \subset d\pi(T)$$

o que mostra que $d\pi(T)$ é um semi-espaço de $\mathbf{n}$ invariante pela ação adjunta de Γ em $\mathbf{n}$. Como Γ está na posição geral então $d\pi(T)$ é um semi-espaço de $\mathbf{n}$ invariante pela ação adjunta de G. $\square$

Capítulo 5

Semigrupos no grupo afim

Em nossa análise de semigrupos em reticulados de grupos de Lie solúveis será preciso considerar primeiro semigrupos no grupo de Lie bidimensional não abeliano. O propósito deste Capítulo é apresentar resultados relevantes sobre estes semigrupos.

5.1 Aspectos geométricos

Conforme é bem conhecido o único grupo de Lie conexo simplesmente conexo bidimensional não abeliano é a componente conexa da identidade do grupo afim da reta. Vamos denotá-lo por Af^+ e sua álgebra de Lie, que é a única álgebra de Lie não abeliana bidimensional, denotaremos por **af**. Explicitamente, Af^+ é $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ com o produto dado pela composição de aplicações afim da reta, isto é,

$$(p,x)(q,y) = (pq, py + x) \qquad p,q > 0; x,y \in \mathbb{R} \ .$$

Por outro lado, **af** é $\mathbb{R}^2$ com o cochete dado por

$$[(a,b),(a',b')] = (0, ab' - a'b) \ .$$

A reta vertical $p = 1$ é o único subgrupo normal não trivial de Af^+. Sendo abeliano este subgrupo é na verdade o radical nilpotente de Af^+, o qual denotaremos por N.

Segundo o Teorema 2.12 em [10] um grupo de Lie nilpotente possui reticulado se, e somente se sua álgebra admite uma base com constantes estruturais racionais. Para grupos de Lie solúveis não temos um resultado similar, haja visto que **af** possui uma base com constantes estruturais inteiras mas Af^+ não possui reticulados. De fato; isto pode ser visto como segue: se $\Gamma \subset Af^+$ é um reticulado então, pelo Teorema 1.1.4, $\Gamma \cap N$ é um reticulado de N e, sendo $N \approx \mathbb{R}$, este é um subgrupo cíclico de $\mathbb{R}$. Tomemos então um elemento $(1, x_0)$ em Af^+ tal que $\Gamma \cap N = \mathbb{Z}(1, x_0)$. Sendo N normal em Af^+ o mesmo ocorre com $\Gamma \cap N$ em Γ. Daí, se $(p, x) \in \Gamma$ então

$$(p, x)(1, x_0)(p, x)^{-1} = (1, px_0) \in \Gamma \cap N$$

e

$$(p, x)^{-1}(1, x_0)(p, x) = (1, p^{-1}x_0) \in \Gamma \cap N$$

implicando que $p = 1$. Conseqüentemente $\Gamma \subset N$ e Af^+/Γ não é compacto, contradizendo o fato de todo reticulado de um grupo de Lie solúvel ser uniforme.

Antecipando a definição de semigrupo discreto em grupos de Lie solúveis esclarecemos que a mesma não será similar a Definição 3.1.3 dada no caso de grupos nilpotentes. De fato, o próximo exemplo mostra que um semigrupo em Af^+ pode satisfazer a condição b) da Proposição 3.1.2 sem no entanto satisfazer a condição a) da mesma.

Exemplo 5.1.1 *Seja $S = \{(2^k, n) : k, n$ são inteiros não negativos$\}$. Conforme é facilmente verificável S é um subsemigrupo de Af^+. Tomemos a vizinhança da identidade em Af^+ dada por $U = \{(p, x) \in Af^+ : \frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$ e* *sejam* $(2^k, n), (2^s, m) \in S$ *tais que*

$$(2^k, n)(2^s, m)^{-1} = (2^{k-s}, n - m2^{k-s}) \in U.$$

Então $\frac{1}{2} < 2^{k-s} < \frac{3}{2}$ *e* $-\frac{1}{2} < n - m2^{k-s} < \frac{3}{2}$. *Sendo* k, s, m *e* n *inteiros não negativos extraímos da primeira desigualdade que* $k = s$ *que substituída na segunda fornece* $-\frac{1}{2} < n - m < \frac{1}{2}$ *e desta última resulta* $n = m$. *Isto mostra que* S *satisfaz a condição* b) *da Proposição 3.1.2. No entanto* S *não está contido em nenhum subgrupo discreto de* Af^+. *De fato; o subgrupo* Γ *de* Af^+ *gerado por* S *não é discreto. Para ver isto tomemos elementos* $a = (2^{k_1}, 0)$, $b = (2^k, m)$ *e* $c = (2^{k_2}, n)$ *em* S. *Então*

$$d = c^{-1}ba^{-1} = (2^{k-k_1-k_2}, \frac{m-n}{2^{k_2}}) = (p, x) \in \Gamma$$

e se tomarmos uma vizinhança V *da identidade em* Af^+ *a qual é suficientemente pequena vemos que, se* $d \in V$ *então* $p = 1$. *Por outro lado, sendo os elementos* a, b *e* c *arbitrários dado* $\epsilon > 0$ *vemos que é possível escolher os elementos de forma a obter* $(1, x) \in \Gamma$ *com* $x \neq 0$ *e* $-\epsilon < x < \epsilon$. *Isto mostra que* Γ *não é discreto e conseqüentemente* S *não satisfaz a condição* a) *da Proposição 3.1.2.*

Analisaremos agora a as translações à esquerda e à direita dos subgrupos a um parâmetro em Af^+

Conforme pode ser facilmente verificado a aplicação exponencial de Af^+ é dada por

$$\exp t(a, b) = (e^{ta}, \frac{b}{a}(e^{ta} - 1))$$

se $a \neq 0$ e $\exp(0, t) = (1, t)$. Desde que $\exp t(a, b)$, $a \neq 0$ está na reta com equação

$$v = \frac{b}{a}u - \frac{b}{a}$$

a qual passa por $(1, 0)$ e tem inclinação b/a, segue que os grupos a um parâmetro de Af^+ são as retas de Af^+ que contém o elemento identidade $(1, 0)$. Estas retas são determinadas pelas suas inclinações e se uma reta não vertical tem inclinação m então sua equação é $v = mu - m$. Conforme dissemos anteriormente a reta vertical que passa por $(1, 0)$ é o radical nilpotente N de Af^+.

A estrutura do produto em Af^+ torna-se nítida pela análise da geometria das classes laterais à direita e à esquerda dos subgrupos a um parâmetro : As classes laterais à direita ou à esquerda de N são retas verticais em Af^+. Com relação aos outros subgrupos temos que

$$(u, mu - m)(p, x) = (pu, (x + m)u - m)$$

mostrando que as classes laterais à direita do subgrupo é dado pela reta de inclinação $(x + m)/p$ que contém (p, x). Esta inclinação é menor que m no caso de $x < mp - m$, isto é, caso (p, x) esteja abaixo do grupo a um parâmetro. De uma maneira simétrica as classes laterais à esquerda por elementos acima do subgrupo são semi-retas com inclinação maior que a inclinação do subgrupo e portanto os pontos da mesmas se distanciam do subgrupo quando a primeira coordenada tende a $+\infty$.

Por outro lado as classes laterais à esquerda são dadas por

$$(p, x)(u, mu - m) = (pu, pmu - pm)$$

e portanto são paralelas ao subgrupo.

Estes cálculos simples também mostram que uma translação à esquerda transforma um reta não vertical em uma reta paralela enquanto uma translação à direita muda a inclinação das referidas retas.

As considerações geométricas aqui desenvolvidas serão utilizadas na seção a seguir.

5.2 Semigrupos no grupo afim

Conforme a Proposição 6.5 de [7] os subsemigrupos maximais de interior não vazio de Af^+ são as uniões dos subgrupos conexos unidimensionais de Af^+ com um de seus complementos, isto é, são semi-espaços de Af^+ tendo por fronteira retas passando pelo elemento identidade $(1,0)$. Via esta classificação Lawson obteve uma classificação dos subsemigrupos maximais de interior não vazio em grupos de Lie solúveis tomando a redução do grupo. Mais precisamente se G é um grupo de Lie solúvel conexo e M é um subsemigrupo maximal de interior não vazio de G então o Teorema 11.1 em [7] estabelece que a redução (G_R, M_R) de (G, M) é topologicamente isomorfa a $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ ou a (Af^+, Af^{++}), onde Af^{++} é o semi-espaço superior de Af^+.

Assim como no caso de semigrupos com interior a determinação de condições para que um subsemigrupo $S \subset Af^+$ intercepte as duas semi-retas de N serão fundamentais na classificação que daremos para subsemigrupos maximais de reticulados em grupos de Lie solúveis. Com este objetivo em mente nosso primeiro resultado é o seguinte.

Lema 5.2.1 *Seja $S \subset Af^+$ um subsemigrupo e assuma que*

a) *S intercepta os dois semi-espaços limitados por N*

b) *O fecho topológico $\overline{S}$ de S não intercepta a semi-reta inferior de N, isto é, se $(1, x) \in \overline{S}$ então $x \geq 0$.*

Defina

$$m^+(S) = \inf\{\frac{x}{p-1} : (p, x) \in S \text{ and } p > 1\}$$

e

$$m^-(S) = \sup\{\frac{x}{p-1} : (p, x) \in S \text{ and } p < 1\} .$$

Então $m^-(S) \leq m^+(S)$. Em particular estas igualdades são bem definidas.

Demonstração: Podemos também definir $m^+(S)$ e $m^-(S)$ da seguinte maneira

$$m^+(S) = \inf\{m : (p, pm - m) \in S \text{ para algum } p > 1) \text{ e}$$

$$m^-(S) = \sup\{m : (p, mp - p) \in S \text{ para algum p} < 1\}$$

Tomando $(p, mp - m)$ e $(q, nq - n)$ em S com $0 < p < 1 < q$ é então suficiente mostrar que $m \leq n$. Sejam j e k inteiros positivos. Então

$$(p, mp - m)^j (q, nq - n)^k = (p^j q^k, n(p^j q^k - 1) + (n - m)(1 - p^j))$$

pertence a S. Agora, pelo Lema 6.4 de [7], dado $\epsilon > 0$ é possível escolher j e k tais que $|p^j q^k - 1| < \epsilon$ e $p^j < \epsilon$. Isto mostra que $(1, n - m) \in \overline{S}$ e assim, pela hipótese (b), $m \leq n$, mostrando o lema □

Geometricamente, $m^+(S)$ é a maior inclinação das retas que passam pela identidade cujos semi-planos superiores contém a parte de S situada à direita de N. Como $m^-(S)$ possui uma interpretação simétrica o lema acima implica que um semigrupo satisfazendo as hipóteses a) e b) do mesmo está contido em um subsemigrupo de interior não vazio de Af^+.

Podemos agora provar o principal resultado do capítulo, o qual será crucial na análise de subsemigrupos em grupos solúveis em geral.

Teorema 5.2.2 *Seja $S \subset Af^+$ um subsemigrupo satisfazendo*

a) *S/N é grupo, e*

b) *S não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio.*

Então S intercepta as duas semi-retas de N, isto é, existem $x, y > 0$ tais que $(1, x)$ e $(1, -y)$ pertencem a S.

Demonstração: Sendo o grupo Af^+/N isomorfo ao grupo aditivo dos números reais podemos descrever o grupo S/N como

$$S/N = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ with } (e^\alpha, x) \in S\} .$$

Para $\alpha \in S/N$ não nulo seja G_α o subgrupo de $\mathbb{R}^+$ gerado por e^α, isto é,

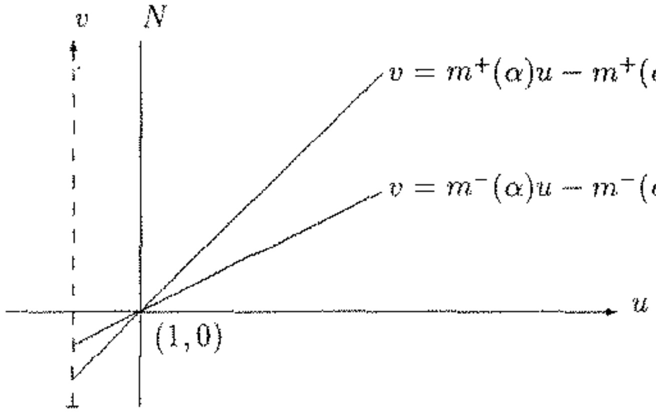
$$G_\alpha = \{e^{n\alpha} : n \in \mathbb{Z}\}$$

e seja também Af_α o subgrupo de Af^+ que se projeta em G_α , ou seja

$$Af_\alpha = \{(e^{n\alpha}, x) : x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\} .$$

Por fim seja $S_\alpha = S \cap Af_\alpha$ o subsemigrupo de S que se projeta no mesmo grupo.

Vamos mostrar que, para algum α, S_α intercepta a semi-reta inferior de N. Suponhamos o contrário. Neste caso, desde que S_α se projeta em um subgrupo discreto de $\mathbb{R}$, e S/N é grupo é claro que ele satisfaz as hipóteses do lema anterior. Portanto $m^\pm(S_\alpha)$ são bem definidos e se tem que $m^-(\alpha) \leq m^+(\alpha)$, onde $m^+(\alpha) = m^+(S_a)$ e $m^-(\alpha) = m^-(S_a)$. Geometricamente isto significa que a parte de S situada à direita de N se encontra acima da reta $v = m^+(\alpha)u - m^+(\alpha)$ e que a parte de S situada à esquerda de N se encontra acima da reta $v = m^-(\alpha)u - m^-(\alpha)$.



Fixemos $\alpha \in S/N$, com $\alpha > 0$. Como S não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio existe então $\beta \in S/N$, com $\beta > 0$, tal que $m^+(\beta) < m^+(\alpha)$ ou $m^-(\beta) > m^+(\alpha)$.

Analisemos inicialmente o primeiro caso, ou seja, quando $m^+(\beta) < m^+(\alpha)$. Neste caso existem $x_1 \in \mathbb{R}$ e inteiro positivo n_1 e tais que o elemento $(e^{n_1\beta}, x_1)$ pertence a S_β e está situado abaixo da reta $v = m^+(\alpha)u - m^+(\alpha)$. Com isto

$$x_1 < e^{n_1\beta}m^+(\alpha) - m^+(\alpha).$$

Sendo n_2 um inteiro positivo e $y \in \mathbb{R}$ tais que $(e^{n_2\alpha}, y) \in S_\alpha$, tomemos $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tais que $\exp(a,b) = (e^{n_2\alpha}, y)$. Neste caso a inclinação do grupo a um parâmetro que passa por $(e^{n_2\alpha}, y)$ é $\frac{b}{a}$. Pela definição de $m^+(\alpha)$, dado $\epsilon > 0$ é possível escolher n_2 e y de forma que

$$\frac{b}{a} < m^+(\alpha) + \epsilon.$$

Em particular é possível fazer essa escolha de maneira tal que

$$\frac{b}{a} < m^+(\alpha) + (e^{n_1\beta}m^+(\alpha) - m^+(\alpha) - x_1)$$

ou seja,

$$e^{-n_1\beta}(\frac{b}{a} + x_1) < m^+(\alpha).$$

Agora, $e^{-n_1\beta}(\frac{b}{a} + x_1)$ é exatamente a inclinação da translação à direita do grupo a um parâmetro $\exp(t(a,b))$ pelo ponto $(e^{n_1\beta}, x_1)$. Dessa forma, para qualquer inteiro positivo n os pontos $(e^{n_2\alpha}, y)^n(e^{n_1\beta}, x_1)$ ficam em uma reta cuja inclinação é menor que $m^+(\alpha)$.

Sendo S/N um grupo é fácil ver que S_β/N é também grupo. Então, existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $(e^{-n_1\beta}, z) \in S_\beta$. Como translação à esquerda não altera a inclinação dos grupos a um parâmetro temos então que os elementos

$$(e^{-n_1\beta}, z)(e^{n_2\alpha}, y)^n(e^{n_1\beta}, x_1) = (e^{nn_2\alpha}, f(n))$$

estão em S_α para todo $n > 0$ e ficam em uma reta de inclinação menor que $m^+(\alpha)$. Como $e^{nn_2\alpha} \to \infty$ quando $n \to \infty$ existem então pontos de S_α abaixo da reta $v = m^+(\alpha)u - m^+(\alpha)$ e à direita de N. Isto contraria a definição de $m^+(\alpha)$.

Por argumentos análogos aos utilizados acima concluímos também a impossibilidade do caso em que $m^-(\beta) > m^+(\alpha)$. Assim S intercepta a parte inferior de N. Para mostrar que S intercepta a parte superior de N basta aplicar o argumento acima ao subsemigrupo $\phi(S)$ onde ϕ é o automorfismo de Af^+ dado por $\phi(p, x) = (p, -x)$. $\square$

Capítulo 6

Semigrupos maximais em reticulados de grupos de Lie solúveis

Neste capítulo G denotará um grupo de Lie solúvel conexo simplesmente conexo e Γ um reticulado de G. Denotaremos a álgebra de Lie de G por $\mathbf{g}$ e $\mathbf{n}$ será o radical nilpotente de $\mathbf{g}$. Também usaremos a notação N para o subgrupo conexo de G associado a $\mathbf{n}$ e exp para a aplicação exponencial de G.

Nosso propósito final é mostrar que um subsemigrupo $S \subset \Gamma$ que não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio de G é um grupo. A maneira pela qual olharemos o problema será a quebra de S em seu quociente S/N e em sua interseção $S \cap N$ com o radical nilpotente. O ponto chave da questão é o fato de N ser um subgrupo nilpotente, normal de G que contém o subgrupo derivado $[G, G]$ e de estar bem situado com respeito a Γ no sentido em que $\Gamma \cap N$ e Γ/N são reticulados de N e G/N respectivamente.

6.1 Semigrupos discretos em grupos solúveis

Na primeira seção do Capítulo 3 discutimos a definição de subsemigrupos discretos em grupos topológicos nilpotentes. Lá, de três possibilidades iniciais, descartamos uma e mostramos que as outras duas eram equivalentes. Isto motivou a Definição 3.1.3. Posteriormente, no Capítulo 4, mostramos que em Af^+ existe um subsemigrupo S para o qual exibimos uma vizinhança da identidade U satisfazendo a propriedade b) da Proposição 3.1.2, isto é, $xy^{-1} \in U$, com $x, y \in S$, implica $x = y$ mas S não está contido em nenhum subgrupo discreto de Af^+, ou seja, não satisfaz a condição a) equivalente a b) na mesma Proposição. Isto sugere a seguinte definição para subsemigrupos discretos em grupos de Lie solúveis.

Definição 6.1.1 *Seja G um grupo de Lie solúvel e $S \subset G$ um subsemigrupo. Dizemos que S é* discreto *se existir um subgrupo discreto de G contendo S.*

A Proposição abaixo é trivial.

Proposição 6.1.2 *Um subsemigrupo S de um grupo de Lie solúvel G é discreto se, e somente se o subgrupo de G gerado por S é discreto.* □

Para os resultados a serem obtidos aqui, o Capítulo sobre cones invariantes será crucial. Neste sentido, para garantir a existência do interior algébrico necessitaremos que S gere um subgrupo finitamente gerado. Devido a isto não vamos trabalhar simplesmente com subsemigrupos discretos mas sim com subsemigrupos de reticulados de G.

6.2 Semigrupos em reticulados de grupos de Lie solúveis

Nesta seção desenvolveremos questões preliminares a serem utilizadas nas seções subseqüentes. Salvo menção contrária manteremos fixas as hipóteses e notações da introdução do Capítulo.

O primeiro resultado estabelece condições para que a projeção de um subsemigrupo de G em G/N seja um reticulado. Este resultado pode ser obtido para subgrupos mais gerais que N.

Proposição 6.2.1 *Seja H um subgrupo conexo fechado de G tal que $H \cap \Gamma$ seja um reticulado de H e $[G, G] \subset H$. Considere a projeção canônica $\pi : G \to G/H$ e $S \subset \Gamma$ um subsemigrupo gerador. Se S não está contido em nenhum subsemigrupo próprio de interior não vazio de G então $\pi(S) = \pi(\Gamma)$ é um reticulado de G/H.*

Demonstração: Desde que $H \cap \Gamma$ é um reticulado de H, pelo Teorema 1.13 de [10], temos que $H\Gamma$ é fechado em G e conseqüentemente $\pi(\Gamma)$ é fechado no grupo de Lie conexo abeliano G/H. Agora, como Γ é discreto $\pi(\Gamma)$ é enumerável e assim é subgrupo discreto de G/H. Sendo G/Γ compacto o mesmo ocorre com $\pi(G)/\pi(H)$. Assim $\pi(\Gamma)$ é um reticulado de G/H.

Agora, seja S' um subsemigrupo de interior não vazio em G/H contendo $\pi(S)$. Então $\pi^{-1}(S')$ é um subsemigrupo de interior não vazio de G contendo S. Pela hipótese sobre S isto acarreta que $\pi^{-1}(S') = G$ e assim S' é um subgrupo de G/H com pontos interiores. Pela conexidade de G/H concluímos que $S' = G/H$. Isto mostra que $\pi(S)$ é um subsemigrupo gerador do reticulado Γ/H o qual não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio de G/H. Sendo G/H grupo abeliano a Proposição 3.2.2 garante que $\pi(S) = \pi(\Gamma)$ e isto conclui a demonstração. $\square$

Tomando H como sendo o radical nilpotente de G temos.

Corolário 6.2.2 *Seja S um semigrupo gerador de um reticulado em G o qual não está contido em nenhum subsemigrupo próprio de interior não vazio. Se π denota a projeção canônica de G em G/N então $\pi(S)$ é um reticulado.*

Demonstração: Evidente já que, pelo Teorema 1.1.4, a interseção de um reticulado de G com N é um reticulado. $\square$

Se, além das hipóteses da proposição, $S \subset G$ for um subsemigrupo para o qual $S \cap H$ é um grupo então o Lema 3.3.8 garante que S é um grupo. Para futuras referências estabeleceremos isto formalmente.

Corolário 6.2.3 *Nas mesmas condições da proposição S é um grupo se, e somente se $S \cap H$ é um grupo.* □

A próxima conseqüência da proposição acima mostra que há uma diferença fundamental entre o caso nilpotente e o caso solúvel.

Corolário 6.2.4 *Mantendo as notações e hipóteses da proposição 6.2.1 temos que $I \cap H \neq \emptyset$ para todo ideal à direita ou à esquerda I de S. Em particular os ideais* $\mathrm{intalg}(S)$ *e* $\mathrm{intalg}_{\mathrm{S}}(S)$ *interceptam H.*

Demonstração: Seja I um ideal à direita de S e tomemos $x \in I$. Pela proposição S/H é um grupo. Portanto, existe $y \in S$ tal que $xy \in H$. Desde que I é ideal à direita, segue que $xy \in I \cap H$. Para ideais à esquerda a prova é a mesma. □

Note que todos os corolários acima continuam válidos tomando H como sendo N. Neste caso, no entanto, podemos enfraquecer as hipóteses já que $\Gamma \cap N$ sempre é reticulado de N. Esta versão será a mais utilizada por nós.

O resultado a seguir aponta nossa linha de ação a fim de obter para subsemigrupos de grupos de Lie solúveis resultados similares aos obtidos para os grupos de Lie nilpotentes.

Corolário 6.2.5 *Seja S um subsemigrupo gerador de Γ e suponha que S não está contido em nenhum subsemigrupo próprio de interior não vazio. Se $S \cap N$ não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio de N então S é um grupo.*

Demonstração: Temos que S/N é um grupo. Com este fato não é difícil mostrar que S é transitivo no grupo abeliano $\Gamma/(\Gamma \cap N)$ e, conseqüentemente, pela Proposição 2.1.3, $S \cap N$ é um subsemigrupo gerador do reticulado $\Gamma \cap N$ de N. Como $S \cap N$ não está contido em subsemigrupo de interior não vazio então o Teorema 3.4.1 garante que $S \cap N$ é um grupo. Com isso o Lema 3.3.8 garante que S é grupo. □

Somente a hipótese de S não estar contido em subsemigrupo próprio de interior não vazio não garante que o mesmo acontece para o subsemigrupo $S \cap N$ em N, isto é, a segunda hipótese no corolário acima não pode ser retirada. Isto é o que mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 6.2.6 *Considere em $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ a estrutura de grupo dada pelo seguinte produto*

$$(t, u)(s, v) = (t + s, e^{tA}v + u),$$

onde A é a matriz real 2×2 dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

G é um grupo de Lie cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é o produto semi-direto de $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^2$ com representação dada pelos múltiplos da matriz A. Explicitamente $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ com cochete dado por

$$[(t, u), (s, v)] = (0, A(tv - su)).$$

Obviamente $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie solúvel não nilpotente cujo radical nilpotente é $\mathfrak{n} = \{0\} \times \mathbb{R}^2$. Com cálculos simples pode se mostrar que $\mathfrak{n}$ não contém ideais unidimensionais de $\mathfrak{g}$ e daí, pelo Teorema 1.4.4 concluímos que $\mathfrak{n}$ é a única subalgebra de codimensão um de $\mathfrak{g}$. Seja

$$\Gamma = 2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$$

Γ é um subgrupo abeliano discreto de G e sendo G/Γ homeomorfo a $S^1 \times T^2$, que é compacto, Γ é na verdade um reticulado de G.

Conforme a caracterização de Lawson para subsemigrupos maximais de interior não vazio de grupos de Lie solúveis os únicos subsemigrupos maximais de interior não vazio de G são

$$M^{\pm} = \{(\pm t, u) \in G : t \geq 0\}$$

Seja

$$S = \{(t, x, y) \in \Gamma : x \geq 0\}$$

É claro que S é um semigrupo próprio de G o qual gera Γ e não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio de G.

Ressaltamos que a Definição 4.3.1, onde introduzimos o conceito de posição geral de um reticulado, foi motivada por esse exemplo.

6.3 Semigrupos em reticulados de grupos de Lie solúveis com nilradical abeliano.

No exemplo dado acima a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{n}$ não possui pesos reais. No entanto, sendo sua complexificação dada por

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} ti & 0 \\ 0 & -ti \end{pmatrix}$$

temos que $\pm ib(t)$, onde $b(t) = t$ e $i = \sqrt{-1}$, são os únicos pesos desta representação. Dessa forma temos um único subgrupo, a saber, $L = \{t \in \mathbb{R} : b(t) = n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ para verificar a posição geral do reticulado Γ (Definição 4.3.1). Ora, $\Gamma/N \approx 2\pi\mathbb{Z} = L$ mostrando que Γ não está na posição geral.

Este exemplo mostra uma situação típica onde o resultado desejado não ocorre. O ponto chave da questão é o aparecimento de raízes complexas na representação adjunta de $\mathbf{g}$ causando a existência de subespaços em $\mathbf{n}$ que são invariantes pela ação adjunta de Γ mas não de todo o grupo G.

Vamos agora assumir que G é um grupo de Lie solúvel conexo simplesmente conexo com radical nilpotente N abeliano e que Γ é um reticulado em G o qual se encontra na posição geral. Nosso objetivo é mostrar que, com estas hipóteses, a situação ocorrida no exemplo 6.2.6 não se verificará, ou seja, um subsemigrupo gerador $S \subset \Gamma$ que não está contido em nenhum semigrupo com pontos interiores é um grupo. Para isto vamos assumir o contrário e obter uma contradição.

Com as hipóteses acima, derivamos do Corolário 6.2.5, que S é grupo se, e somente se $S \cap N$ não está contido em um subsemigrupo de interior não vazio de N. Colocando a questão em termos do cone

$$W = \text{fecho}\{x \in \mathbf{n} : \exists\, t > 0 \text{ com } \exp(tx) \in S \cap N\}$$

introduzido em 4.2 e observando que estamos supondo $\mathbf{n}$ abeliano temos que S é grupo se, e somente se $W = \mathbf{n}$. Portanto, assumir que S não é grupo é equivalente a assumir que W é um cone próprio de $\mathbf{n}$.

Vamos então assumir que W é próprio e conseguir uma contradição.

Pelo Corolário 4.1.3 W é um cone gerador invariante pela ação adjunta de Γ em $\mathbf{n}$. Sendo próprio, pela Proposição 4.2.1, derivamos que W está contido em um semi-espaço de $\mathbf{n}$ invariante pela ação adjunta de Γ em $\mathbf{n}$. Como estamos assumindo Γ na posição geral um tal semi-espaço é invariante pela ação adjunta do grupo e, conseqüentemente, se $\mathbf{h}$ denota o hiperplano que delimita um tal semi-espaço, $\mathbf{h}$ é um ideal de $\mathbf{g}$.

Resumidamente, as hipóteses acima e a suposição que S não é grupo, acarretam a existência de um hiperplano $\mathbf{h}$ de $\mathbf{n}$ o qual é um ideal de $\mathbf{g}$ e tal que W está contido em um dos semi-espaços de $\mathbf{n}$ limitado por $\mathbf{h}$.

Seja H o subgrupo normal conexo de G cuja álgebra de Lie é $\mathbf{h}$ e considere a projeção canônica

$$\theta : G \to G/H.$$

A hipótese que S não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio implica que o mesmo acontece com o subsemigrupo $\pi(S)$ em G/H.

Agora, existem três possibilidades exclusivas para G/H, a saber:

A) G/H é abeliano.

B) G/H é nilpotente não abeliano.

C) G/H é solúvel não nilpotente.

Vamos mostrar que estes três casos conduzem a uma contradição. Primeiramente temos.

Lema 6.3.1 *O caso* (A) *conduz a uma contradição.*

Demonstração: Desde que G/H é abeliano e G é simplesmente conexo, $G/H \approx \mathbb{R}^k$ para algum inteiro positivo k. Também, desde que $\mathbf{h}$ é hiperplano de $\mathbf{n}$, N/H torna-se um subespaço unidimensional de G/H. Agora, o fato de $\theta(S)$ não estar contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio implica que seu fecho convexo coincide com G/H e assim qualquer raio de G/H pode ser arbitrariamente aproximado por elementos de $\theta(S)$. Em particular isso acontece para as duas semi-retas definidas pelo subgrupo unidimensional N/H de G/H. Sendo no entanto Γ/N um reticulado de $G/N \approx \frac{G/H}{N/H}$ o mesmo é, em particular, um subgrupo discreto. Daí, existem elementos de $\theta(N \cap S)$ arbitrariamente próximos das duas semi-retas definidas por N/H e isto mostra a existência de pontos de S nos dois semi-espaços de $\mathbf{n}$ delimitados por $\mathbf{h}$, contradizendo a suposição feita sobre W. $\square$

Lema 6.3.2 *O caso* (B) *também conduz a uma contradição.*

Demonstração: Temos que a álgebra derivada $(\mathbf{g}/\mathbf{h})'$ está contida em $\mathbf{n}/\mathbf{h}$. Contudo, como $\mathbf{n}/\mathbf{h}$ é unidimensional e $\mathbf{g}/\mathbf{h}$ é não abeliana a igualdade $(\mathbf{g}/\mathbf{h})' =$

$\mathbf{n}/\mathbf{h}$ ocorre. Por outro lado, $(\mathbf{g}/\mathbf{h})^2 = [\mathbf{g}/\mathbf{h}, (\mathbf{g}/\mathbf{h})'] = 0$, caso contrário $\mathbf{g}/\mathbf{h}$ não seria nilpotente. Além disso, $\frac{S}{N} \approx \frac{S/H}{N/H}$ é um reticulado no grupo abeliano G/N mostrando que S/N é racional no sentido da Proposição 3.3.10. Dessa forma $\theta(S) \cap N/H$ não está contido em nenhum semi-espaço de N/H mostrando que $S \cap N$ intercepta os dois semi-espaços de $\mathbf{n}$ delimitados por $\mathbf{h}$ e isto contraria a suposição feita sobre W. □

O caso (C), sem dúvida, é o mais envolvente. Em sua análise será necessário o seguinte fato sobre álgebras de Lie possuindo álgebra derivada unidimensional.

Lema 6.3.3 *Seja* $\mathbf{p}$ *uma álgebra de Lie não nilpotente tal que dim* $\mathbf{p}' = 1$. *Então existe um único ideal abeliano* $\mathbf{k} \subset \mathbf{p}$ *de codimensão dois tal que* $\mathbf{p}/\mathbf{k}$ *é não abeliana . Além disso,* $\mathbf{k}$ *está contido no radical nilpotente* $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ *de* $\mathbf{p}$ *e* $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ *é abeliano de codimensão um.*

Demonstração: Denotemos a representação adjunta de $\mathbf{p}$ em $\mathbf{p}'$ por ρ. Desde que dim $\mathrm{p}' = 1$, temos que kerρ possui codimensão zero ou um. Se for zero então $[X, \mathbf{p}'] = 0$ para todo $X \in \mathbf{p}$ implicando $\mathbf{p}$ ser nilpotente contrariamente a hipótese assumida. Portanto kerρ é um ideal de codimensão um em $\mathbf{p}$ o qual contém a álgebra derivada $\mathbf{p}'$. Tomemos uma base

$$\{X, Y_1, ..., Y_k, Z\}$$

de $\mathbf{p}$ tal que $X \notin \ker \rho$, $Z \in \mathbf{p}'$ e $\{Y_1, ..., Y_k, Z\}$ é base de $\ker \rho$. Como $[X, Z] \neq 0$ pode-se escolher X de forma que $[X, Z] = Z$. As constantes estruturais desta base são então dadas da seguinte forma

$$[X, Z] = Z \quad [Y_i, Z] = 0 \quad [X, Y_i] = a_i Z \quad [Y_i, Y_j] = b_{ij} Z$$

Afirmamos que $b_{ij} = 0$. Para ver isso usamos a identidade de Jacobi afim de obter

$$\begin{aligned} b_{ij}Z &= [X, b_{ij}Z] \\ &= [X, [Y_i, Y_j]] \\ &= [[X, Y_i], Y_j] + [Y_i, [X, Y_j]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $Z \neq 0$ então $b_{ij} = 0$. Dessa forma $\ker \rho$ é um ideal abeliano de $\mathbf{p}$ possuindo codimensão igual a 1. Como conseqüência tem-se que $\mathbf{p}$ é o produto semi direto de $\mathbb{R}$ por $\ker \rho$ com representação dada pela adjunta de X.

Considere agora a restrição de $ad(X)$ a $\ker \rho$. A imagem dessa transformação linear é unidimensional, implicando que seu núcleo tem codimensão um em $\ker \rho$. Denotando esse núcleo por $\mathbf{k}$ temos então que $\mathbf{k}$ é um ideal de $\mathbf{p}$ já que $\ker \rho$ é abeliano e $[X, \mathbf{k}] = 0$. Mais ainda, como $[X, Z] \neq 0$ então $\ker \rho = \mathbf{p}' \oplus \mathbf{k}$ de onde se vê que $\mathbf{p}/\mathbf{k}$ é não abeliana de dimensão dois. Quanto a $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ ser de codimensão um segue do fato de o mesmo coincidir com $\ker \rho$ e quanto a unicidade de $\mathbf{k}$ esta segue pela sua construção na demonstração. □

Uma simples conseqüência do lema acima, que necessitaremos, é a seguinte.

Corolário 6.3.4 *Seja* $\mathbf{p}$ *uma álgebra de Lie como acima e* $\overline{\mathbf{h}} \subset \mathbf{n}(\mathbf{p})$ *um ideal de codimensão dois em* $\mathbf{p}$. *Então* $\mathbf{p}' \subset \overline{\mathbf{h}}$ *ou* $\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{k}$ *onde* $\mathbf{k}$ *é o ideal do lema anterior.*

Demonstração: Se $\mathbf{p}' \not\subset \overline{\mathbf{h}}$ então $\mathbf{p}/\overline{\mathbf{h}}$ é a álgebra bidimensional não abeliana. Pela unicidade de $\mathbf{k}$ no lema segue que $\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{k}$. □

Retornemos agora ao caso (C). Temos que a álgebra derivada de $\mathbf{g}/\mathbf{h}$ coincide com $\mathbf{n}/\mathbf{h}$ já que $\mathbf{g}/\mathbf{h}$ é não abeliana. Em particular $\dim(\mathbf{g}/\mathbf{h})' = 1$. Denotemos o radical nilpotente de $\mathbf{g}/\mathbf{h}$ por $\mathbf{m}$ e consideremos a projeção canônica

$$\pi : \mathbf{g}/\mathbf{h} \to (\mathbf{g}/\mathbf{h})/(\mathbf{g}/\mathbf{h})' \approx \mathbf{g}/\mathbf{n}$$

Identificando a álgebra $(\mathbf{g}/\mathbf{h})/(\mathbf{g}/\mathbf{h})'$ com o grupo $(G/H)/[G/H, G/H]$ obtemos que a projeção de Γ define um reticulado $\widetilde{\Gamma}$ em $(\mathbf{g}/\mathbf{h})/(\mathbf{g}/\mathbf{h})'$. Com estas notações seja V o subespaço de $\mathbf{g}/\mathbf{n}$ gerado por $\pi(\mathbf{m}) \cap \widetilde{\mathbf{\Gamma}}$ e coloquemos $\mathbf{q} = \pi^{-1}(V)$. Sendo $\mathbf{g}/\mathbf{h}$ solúvel temos $(\mathbf{g}/\mathbf{h})' \subset \mathbf{m}$ e daí é claro que $\mathbf{q} \subset \mathbf{m}$. Pelo lema 6.3.3 $\mathbf{m}$ é abeliano e, em particular, $\mathbf{q}$ é também abeliano. Também $\mathbf{q}$ é ideal de $\mathbf{g}/\mathbf{h}$ pois $(\mathbf{g}/\mathbf{h})' \subset \mathbf{q}$.

Agora, seja Q o subgrupo conexo de G/H associado a $\mathbf{q}$. Por construção este é o menor subgrupo conexo do radical nilpotente M de G/H que contém $\theta(S) \cap M$. Isto pode ser visto a partir do fato que $\pi(\theta(S)) = \widetilde{\Gamma}$. Tomemos o cone $\overline{W}$ em $\mathbf{q}$ gerado por $\theta(S) \cap Q$, como em 4.2, isto é, $\overline{W} = \text{fecho}\{x \in \mathbf{q} : \exists\ t > 0$ com $\exp(tx) \in \theta(S) \cap Q\}$. Pelo Teorema 4.1.2 $\overline{W}$ é invariante pela ação adjunta de $\theta(\Gamma)$ em $\mathbf{q}$.

Temos duas possibilidades

1. $\overline{W} = \mathbf{q}$. Neste caso, como no caso (A), para qualquer raio r em $\mathbf{q}$ existe um elemento de $\theta(S) \cap Q$ arbitrariamente próximo de r. Aplicando isto aos dois raios da reta $\mathbf{n}/\mathbf{h}$ e retornando a G isto significa que os dois lados de H em N podem ser aproximados por elementos de S. Mas, sendo Γ/N discreto isto implica que $S \cap N$ intercepta os dois lados de H em N contradizendo a suposição feita sobre W ser próprio.

2. $\overline{W}$ é um cone próprio de $\mathbf{q}$. Observe que os pesos da representação adjunta de $\mathbf{g}/\mathbf{h}$ em $\mathbf{q}$ são reais já que $(\mathbf{g}/\mathbf{h})'$ é unidimensional. Como conseqüência, pelo Corolário 4.3.5, $\theta(\Gamma)$ está na posição geral com relação a $\mathbf{q}$ e portanto $\overline{W}$ está contido em um semi-espaço de $\mathbf{q}$ limitado por um ideal $\overline{\mathbf{h}}$ de $\mathbf{g}/\mathbf{h}$. Tomemos agora $X \notin \mathbf{m}$ e formemos a subalgebra $\mathbf{p}$ gerada por X e $\mathbf{q}$. Temos que $\mathbf{p}$ é solúvel não nilpotente pois se $ad(X)$ restrita a $\mathbf{q}$ for nilpotente o mesmo ocorre com $ad(X)$ em $\mathbf{g}$. obviamente $\mathbf{q}$ é o radical nilpotente de $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$ é unidimensional. Nestas condições o Lema 6.3.2 garante a existência de um único ideal $\mathbf{k}$ de $\mathbf{p}$ contido em $\mathbf{q}$ tal que $\mathbf{p}/\mathbf{k} \approx Af^+$. Ainda

mais, sendo $\overline{\mathbf{h}}$ um ideal de codimensão um em $\mathbf{q}$ o Corolário 6.3.4 garante que $(\mathbf{g}/\mathbf{h})' = \mathbf{p}' \subset \overline{\mathbf{h}}$ ou $\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{k}$. Analisemos estas duas possibilidades separadamente.

(a) $(\mathbf{g}/\mathbf{h})' = \mathbf{p}' \subset \overline{\mathbf{h}}$. Esta possibilidade pode ser excluída já que, módulo o grupo derivado de G/H, $\theta(S)$ é um grupo assim como o é S módulo o grupo derivado de G. Portanto existem pontos de $\overline{W}$ em ambos os lados de qualquer hiperplano $\mathbf{q}$ que contém $(\mathbf{g}/\mathbf{h})'$.

(b) $\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{k}$. Neste caso seja $\mathbf{k}_1 \subset \mathbf{m}$ o ideal de $\mathbf{g}/\mathbf{h}$ mencionado no lema. Temos pela unicidade que $\mathbf{k}_1 \cap \mathbf{q} = \mathbf{k}$. Seja $K_1 \subset G/H$ o subgrupo conexo associado a $\mathbf{k}_1$. Como $\mathbf{k}_1$ é de codimensão dois e $(\mathbf{g}/\mathbf{h})/\mathbf{k}_1$ é não abeliana temos que $(G/H)/K_1$ é isomorfa a Af^+. Portanto, se colocarmos $S' = \theta(S)/K_1$, então S' é um subsemigrupo de Af^+ o qual não está contido em nenhum subsemigrupo próprio de interior não vazio. Também, módulo o grupo derivado de Af^+, S' é um grupo pois módulo $[G/H, G/H]$ o subsemigrupo $\theta(S)$ é um grupo. Portanto, S' satisfaz as condições do Teorema 5.2.2 mostrando que ele intercepta as duas semi-retas do grupo derivado de Af^+. Isto significa que $\theta(S)$ não está contido em semi-espaço de G/H limitado por K_1 e isto implica, pela construção de $\mathbf{q}$, que $\theta(S) \cap Q$ não está contido em um semi-espaço de Q limitado por K. Portanto esta possibilidade para $\overline{\mathbf{h}}$ também deve ser excluída.

Estes casos mostram que a possibilidade (C) também conduz a um contradição. Portanto as três possibilidades (A), (B) e (C) não podem ocorrer e temos assim o principal resultado desta seção.

Teorema 6.3.5 *Seja G um grupo de Lie solúvel conexo simplesmente conexo com radical nilpotente N abeliano. Suponha que $\Gamma \subset G$ seja um reticulado na posição geral com relação a N e que $S \subset \Gamma$ é um subsemigrupo gerador o qual* *não está contido em nenhum subsemigrupo próprio de interior não vazio. Então* $S = \Gamma$. □

6.4 Semigrupos em reticulados de grupos de Lie solúveis

Nesta seção vamos mostrar como reduzir a análise de semigrupos em grupos solúveis em geral para aqueles com radical nilpotente abelianos. Isto vai requerer os seguintes três lemas.

Lema 6.4.1 *Sejam* G *um grupo de Lie solúvel conexo com radical nilpotente* N *não abeliano e* π *o homomorfismo canônico de* G *em* $G/[N,N]$*. Se* Γ *é um reticulado de* G *e* $S \subset \Gamma$ *é um subsemigrupo gerador tal que* $\pi(S)$ *é grupo então* $S \cap N$ *é grupo.*

Demonstração: Como $[N,N] \subset N$ temos que $\pi(S \cap N) = \pi(S) \cap \pi(N)$ é subgrupo de $G/[N,N]$. Além disso note que a restrição de π a N coincide com a projeção canônica de N sobre $N/[N,N]$. Neste caso o Corolário 3.4.4 garante o afirmado. □

Lema 6.4.2 *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie solúvel real com radical nilpotente* $\mathfrak{n}$*. Seja* $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{n}$ *um ideal abeliano contendo a álgebra derivada* $\mathfrak{g}'$ *e denote por* ρ *a representação adjunta da álgebra de Lie abeliana* $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ *em* $\mathfrak{s}$ *induzida pela representação adjunta de* $\mathfrak{g}$ *em* $\mathfrak{s}$*. Seja* $\mathfrak{n}'$ *a álgebra derivada de* $\mathfrak{n}$ *e denote por* ρ' *a representação de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ *em* $\mathfrak{s}/\mathfrak{n}'$ *induzida por* ρ*. Então os pesos não nulos de (a complexificação de)* ρ *e* ρ' *coincidem.*

Demonstração: Através da complexificação das representações podemos trabalhar no corpo dos números complexos. Sejam $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ os pesos de ρ e denote por $\mathbf{s}_{\lambda_j}$ os correspondentes subespaços pesos. É suficiente mostrar que $\mathbf{s}_{\lambda j}$ não está contido em $\mathbf{n}'$ se λ_j é um peso não nulo. Para isto fixamos j tal que $\lambda_j \neq 0$ e usamos o Teorema de Engel para obter uma base $\{Y_1, \ldots Y_s\}$ de $\mathbf{s}_{\lambda_j}$ tal que, com respeito a ela, a restrição de $\rho(X)$ a $\mathbf{s}_{\lambda_j}$ é escrita como

$$\begin{pmatrix} \lambda_j(X) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_j(X) \end{pmatrix}$$

Afirmamos que $\mathbf{n}' \cap \mathbf{s}_{\lambda_j}$ está contido no subespaço V de $\mathbf{s}_{\lambda_j}$ gerado por $\{Y_1, \ldots, Y_{s-1}\}$. Supondo que a afirmação é falsa existe $Y \in \mathbf{n}' \cap \mathbf{s}_{\lambda_j}$ tal que $Y \not\equiv 0 \operatorname{mod} V$. Podemos assumir que $Y = Y_s \operatorname{mod} V$. Tomemos $X \in \mathbf{g}$ tal que sua projeção $\overline{X} \in \mathbf{g}/\mathbf{s}$ satisfaça $\lambda_j(\overline{X}) \neq 0$. Então, módulo V, $[X, Y]$ é igual a $\lambda(X)Y_s$. Por outro lado, Y é uma soma do tipo

$$Y = \sum_k [Z_k, W_k]$$

com $Z_j, W_j \in \mathbf{n}$. Tomando o cochete com X e aplicando a identidade de Jacobi obtemos

$$[X, Y] = \sum([[X, Z_k], W_k] + [Z_k, [X, W_k]])$$

mostrando que $[X, Y]$ pertence a $[\mathbf{n}, \mathbf{g}']$ que por sua vez está contido em $[\mathbf{n}, \mathbf{s}]$. Assim basta verificar que $[\mathbf{n}, \mathbf{s}]$ não tem componentes na direção de Y_s. Para ver isto tomemos uma base $\{Y_1^j, \ldots, Y_{k_j}^j\}$ para $\mathbf{s}_{\lambda_j}$, $1 \leq j \leq p$. Dessa forma, se $W \in \mathbf{s}$ então

$$W = \sum_{i,j} a_{ij} Y_i^j$$

Seja $Z \in \mathbf{n}$. Então

$$[Z, W] = \sum_{i,j} a_{ij} [Z, Y_i^j]$$

Agora, $ad(Z)$ é nilpotente e daí $\lambda_j(Z) = 0$. Dessa forma, restrito ao subespaço peso $\mathbf{s}_{\lambda_j}$ temos que

$$\rho(Z) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

não possui componente na direção de $Y^j_{k_j}$ para $1 \leq j \leq p$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Seja agora $\mathbf{g}$ uma álgebra de Lie solúvel com radical nilpotente não abeliano $\mathbf{n}$ e coloquemos $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}/\mathbf{n}'$, $\mathbf{s}_1 = \mathbf{n}/\mathbf{n}'$. Temos que $\mathbf{s}_1$ é um ideal abeliano de $\mathbf{g}_1$ o qual contém a álgebra derivada $\mathbf{g}_1'$. Também, como $\mathbf{s}_1$ é abeliana a representação adjunta de $\mathbf{g}_1$ em $\mathbf{s}_1$ se fatora através da álgebra abeliana $\mathbf{g}_1/\mathbf{s}_1 \approx \mathbf{g}/\mathbf{n}$. Denote por ρ_1 esta representação. Seja $\mathbf{n}_1$ o radical nilpotente de $\mathbf{g}_1$. Se $\mathbf{n}_1$ não for abeliano denote por ρ_1' a representação de $\mathbf{g}_1/\mathbf{s}_1$ em $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1/\mathbf{n}_1'$ induzida por ρ_1. Pelo lema acima os pesos de ρ_1 e de ρ_1' coincidem. Além disso, ρ_1' coincide com a representação ρ_2 obtida através da representação adjunta de $\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_1/\mathbf{n}_1'$ em $\mathbf{s}_2$ fatorada através de $\mathbf{g}_2/\mathbf{s}_2 \approx \mathbf{g}/\mathbf{n}$. Por continuidade deste processo obtemos álgebras $\mathbf{g}_i$ com radicais nilpotentes $\mathbf{n}_i$ e ideais abelianos $\mathbf{s}_i$ contendo $\mathbf{g}_i'$ tais que $\mathbf{g}_i/\mathbf{s}_i \approx \mathbf{g}/\mathbf{n}$ e com os pesos não nulos da representação ρ_i de $\mathbf{g}_i/\mathbf{s}_i$ em $\mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{s}_i/\mathbf{n}_i'$ induzida pela representação adjunta de $\mathbf{g}_i$ em $\mathbf{n}_i$, coincidindo com os pesos não nulos da representação ρ induzida pela representação adjunta de $\mathbf{g}_1$ em $\mathbf{n}/\mathbf{n}'$ fatorada através de $\mathbf{g}_1/\mathbf{s}_1 \approx \mathbf{g}/\mathbf{n}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{g}_i \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d] & gl(\mathbf{s}_i) \\ \frac{\mathbf{g}_i}{\mathbf{s}_i} \arrow[ur, "\rho_i"] \arrow[r, "\rho_i'"] & gl(\frac{\mathbf{s}_i}{[\mathbf{n}_i,\mathbf{n}_i]}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{g}_{i+1} \arrow[r, "\rho_{i+1}"] \arrow[d] & gl(\mathbf{s}_{i+1}) \\ \frac{\mathbf{g}_{i+1}}{\mathbf{s}_{i+1}} \arrow[ur, "\rho_{i+1}"] \arrow[r, "\rho_{i+1}'"] & gl(\frac{\mathbf{s}_{i+1}}{[\mathbf{n}_{i+1},\mathbf{n}_{i+1}]}) \end{tikzcd}$$

$$\rho_i' \equiv \rho_{i+1}$$

Convencionando que $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}$ e que $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}$ teremos pela finitude da dimensão da álgebra, que para algum inteiro positivo k, $\mathbf{n}_{k-1}$ é não abeliano e $\mathbf{n}_k$ é abeliano. Também, pela construção efetuada, não é difícil verificar a existência de ideais $\mathbf{j}_i$ em $\mathbf{g}$ tais que $\mathbf{g}_i \approx \mathbf{g}/\mathbf{j}_i$. Para estes ideais temos que $\mathbf{s}_i = \mathbf{n}/\mathbf{j}_i$ e também que as seguintes inclusões são verdadeiras

$$\mathbf{n}' \subset \mathbf{j}_1 \subset \mathbf{j}_2 \subset \mathbf{j}_3 \subset \cdots \mathbf{j}_k \subset \mathbf{g}' \subset \mathbf{n}$$

Assim, obtemos o seguinte lema.

Lema 6.4.3 *Seja* $\mathbf{g}$ *uma álgebra de Lie solúvel com radical nilpotente* $\mathbf{n}$. *Se* $\mathbf{n}$ *é não abeliano então existe um ideal* $\mathbf{j}$ *de* $\mathbf{g}$ *contido em* $\mathbf{g}'$, *e portanto em* $\mathbf{n}$, *tal que o radical nilpotente* $\mathbf{m}$ *de* $\mathbf{g}/\mathbf{j}$ *é abeliano. Para este ideal temos que* $\mathbf{g}/\mathbf{j} \approx \mathbf{g}_i/\mathbf{n}_i'$ *onde* $\mathbf{g}_i$ *é definido indutivamente por* $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}$ *e* $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_{i-1}/\mathbf{n}_{i-1}'$ *onde* $\mathbf{n}_i$ *denota o radical nilpotente de* $\mathbf{g}_i$.

Seja ρ_1 [*respectivamente* θ] *a representação de* $\mathbf{g}/\mathbf{n} \approx (\mathbf{g}/\mathbf{n}')/\mathbf{n}/\mathbf{n}') \approx (\mathbf{g}/\mathbf{j})/(\mathbf{n}/\mathbf{j})$ *em* $\mathbf{n}/\mathbf{n}'$ [*respectivamente* $\mathbf{n}/\mathbf{j}$] *induzida pela representação adjunta de* $\mathbf{g}/\mathbf{n}'$ *em* $\mathbf{n}/\mathbf{n}'$ [*respectivamente* $\mathbf{g}/\mathbf{j}$ *em* $\mathbf{n}/\mathbf{j}$]. *Então os pesos não nulos de* ρ_1 *e* θ *coincidem.*□

Para homogeneidade de notação note que o ideal $\mathbf{j}$ do lema acima é o ideal $\mathbf{j}_k$ de $\mathbf{g}$ tal que o radical nilpotente $\mathbf{n}_k$ de $\mathbf{g}_k \approx \mathbf{g}/\mathbf{j}_k$ é abeliano.

Continuando com as hipóteses e notações assumidas denotemos por φ a representação da álgebra abeliana $\mathbf{g}_k/\mathbf{n}_k$ em $\mathbf{n}_k$ obtida pela fatoração da representação adjunta de $\mathbf{g}_k$ em $\mathbf{n}_k$. Temos que $\mathbf{s}_k \subset \mathbf{n}_k$ e provavelmente a inclusão é própria. Para o próximo teorema precisamos explorar certa relação entre os pesos não nulos das representações θ e φ. Se $X \in \mathbf{g}_k/\mathbf{n}_k$ e $Y \in \mathbf{n}_k$ é autovetor de $\varphi(X)$ podemos ver que $Y \in \mathbf{s}_k$. Por outro lado, se $X \in \mathbf{n}_k$ então $\theta(X)$ é nulo como endomorfismo de $\mathbf{s}_k$, já que $\mathbf{n}_k$ é abeliano. Isto mostra que os pesos não nulos φ são dados por restrições de pesos não nulos de θ e estes, por sua vez, são extensões naturais de pesos não nulos de φ.

Com o lema e as observações acima é possível estender o Teorema 6.3.5 para grupos solúveis em geral. Primeiro note o seguinte: se $\Gamma \subset G$ é um reticulado em um grupo de Lie solúvel conexo simplesmente conexo G e J é o subgrupo normal conexo de G cuja álgebra é o ideal $\mathbf{j}$ do lema anterior então Γ/J é um reticulado em G/J. Isto acontece devido a $\mathbf{g}/\mathbf{j}$ ter sido construido por sucessivos quocientes da álgebra derivada do radical nilpotente e, conforme já mencionamos, se Γ é um reticulado de G então $\Gamma/[N,N]$ é um reticulado em $G/[N,N]$.

Teorema 6.4.4 *Seja G um grupo de Lie solúvel conexo simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathbf{g}$. Denote por $\mathbf{n}$ o radical nilpotente de $\mathbf{g}$ e por N o grupo conexo associado a $\mathbf{n}$. Seja $\Gamma \subset G$ um reticulado e assuma que $\Gamma/[N,N]$ está na posição geral com relação a $\mathbf{n}/[\mathbf{n},\mathbf{n}]$. Seja $S \subset \Gamma$ um subsemigrupo gerador o qual não está contido em nenhum subsemigrupo próprio de interior não vazio de G. Então $S = \Gamma$.*

Demonstração: Seja $\mathbf{j}$ o ideal de $\mathbf{g}$ dado pelo lema acima e J o correspondente subgrupo normal. Temos que S/J não está contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio de G/J caso contrário S estaria contido em um tal subsemigrupo em G. Inicialmente vamos mostrar que $S/J = \Gamma/J$. Como o radical nilpotente de $\mathbf{g}/\mathbf{j}$ é abeliano isto é conseqüência do Teorema 6.3.5 se mostrarmos que Γ/J está na posição geral com relação a representação φ. Pelo lema acima e o Teorema 4.3.4 vemos que Γ/J está na posição geral com relação a representação θ. Pela relação descrita entre os pesos não nulos de θ e φ segue então que Γ/J está na posição geral com relação a φ confirmando a igualdade $S/J = \Gamma/J$.

Visto sobre a construção original o grupo G/J é obtido via a seguinte cadeia de homomorfismos canônicos

$$G_0 \to \frac{G_0}{[N_0,N_0]} \to \frac{G_1}{[N_1,N_1]} \to \cdots \to \frac{G_{k-1}}{[N_{k-1},N_{k-1}]} = \frac{G}{J}$$

onde $G_0 = G$ e $G_i = G_{i-1}/[N_{i-1}, N_{i-1}]$ para $1 \leq i \leq k-1$ sendo N_j o radical nilpotente de G_j para $0 \leq j \leq k-1$. Com isto, via uma regressão na cadeia acima, vamos obter que $S = \Gamma$. Para isto denotemos o homomorfismo canônico de G_i em G_{i+1} por π_i e coloquemos $S_{j+1} = \xi_j(S)$ onde $\xi_j = \pi_j \circ \pi_{j-1} \circ \cdots \pi_0$ para $0 \leq j \leq k-1$. Conforme já mostramos $S_k = \xi_{k-1}(S) = \pi_{k-1}(\xi_{k-2}(S))$ é um grupo. Pelo lema 6.4.1 isto implica que $\xi_{k-2}(S) \cap N_{k-1}$ é um grupo. Como $N_{k-2}/[N_{k-2}, N_{k-2}] \subset N_{k-1}$ isto implica que $\xi_{k-2}(S) \cap N_{k-2}/[N_{k-2}, N_{k-2}] = \pi_{k-2}(\xi_{k-3}(S) \cap N_{k-2})$ e daí, pelo corolário 3.4.4, $\xi_{k-3}(S) \cap N_{k-2}$ é um grupo. Continuando com este processo obteremos que $\pi_0(S) \cap N_1$ é grupo e daí o mesmo acontece com $S \cap N$. Finalmente, pelo Corolário 6.2.3, concluímos que S é grupo mostrando que $S = \Gamma$. □

Se Γ é um reticulado de um grupo de Lie solúvel conexo então Γ é um grupo finitamente gerado. Dessa forma, pela Proposição 2.1.1, todo semigrupo gerador de Γ está contido em um subsemigrupo maximal. Via os resultados já obtidos podemos dar uma classificação dos subsemigrupos maximais de Γ em termos dos subsemigrupos maximais de interior não vazio de G e, conseqüentemente, a partir das semialgebras semi-espaços da álgebra de Lie. Especificamente temos

Proposição 6.4.5 *Seja G um grupo de Lie solúvel conexo e $\Gamma \subset G$ um reticulado tal que $\Gamma/[N,N]$ está na posição geral em $N/[N,N]$. Então os subsemigrupos maximais de Γ são da forma $\Gamma \cap \widetilde{S}$ onde $\widetilde{S}$ é um subsemigrupo maximal de interior não vazio de G.*

Demonstração: Seja $S \subset \Gamma$ um subsemigrupo gerador o qual não é grupo. Pelo Teorema 6.4.4 S está contido em um subsemigrupo próprio de interior não vazio de G e portanto em um subsemigrupo maximal desta classe. Isto mostra que os únicos candidatos a subsemigrupos maximais de Γ são da forma $\overline{S} \cap \Gamma$ onde $\overline{S}$ é subsemigrupo maximal de interior não vazio de G. Estes subsemigrupos são na verdade maximais. De fato, o único subsemigrupo de interior não vazio de G que contém $\overline{S} \cap \Gamma$ é o próprio $\overline{S}$. Isto é uma conseqüência do Teorema 1.4.7. □

Embora não tenhamos mencionado é claro que há uma versão similar desse teorema para grupos de Lie nilpotentes sem, no entanto, haver a preocupação quanto a posição geral.

Finalmente temos que as afirmações dos 3.4.1 e 6.4.4 também ocorrem para grupos não necessariamente simplesmente conexos.

Para o caso nilpotente temos

Teorema 6.4.6 *Seja G um grupo de Lie nilpotente conexo e $\Gamma \subset G$ um reticulado. Suponha que $S \subset \Gamma$ seja um subsemigrupo gerador não contido em nenhum subsemigrupo de interior não vazio. Então S é um reticulado.*

Demonstração: Podemos supor sem perda de generalidade que $1 \in S$. Seja

$$\pi : \widetilde{G} \to G$$

recobrimento universal de G e tomemos $\widetilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma)$. Podemos ver que $\widetilde{\Gamma}$ é um reticulado de $\widetilde{G}$ e que $\widetilde{S} = \pi^{-1}(S)$ é um subsemigrupo gerador de $\widetilde{\Gamma}$. Tomemos agora um subsemigrupo $\overline{S}$ de interior não vazio em $\widetilde{G}$ tal que $\widetilde{S} \subset \overline{S} \subset \widetilde{G}$. Então $S \subset \pi(\overline{S}) \subset G$ e $\pi(\overline{S})$ é um subsemigrupo de interior não vazio. Se $\pi(\overline{S}) = G$ afirmamos que $\overline{S} = \widetilde{G}$; de fato: seja $z \in \widetilde{G}$ e tomemos $y \in \overline{S}$ tal que $\pi(y) = \pi(z)$. Neste caso $\pi(zy^{-1}) = 1 \in S$ e daí $zy^{-1} = x \in \widetilde{S} \subset \overline{S}$. Portanto $z = xy \in \overline{S}$ mostrando o que afirmamos. Conclusão, se $\overline{S}$ é próprio, o mesmo acontece com $\pi(\overline{S})$ e assim a hipótese sobre S garante que $\widetilde{S}$ não está contido em subsemigrupo próprio de interior não vazio. Aplicando o Teorema 3.4.1 temos $\widetilde{S} = \widetilde{\Gamma}$ e daí $S = \Gamma$. □

A versão não simplesmente conexa para o Teorema 6.4.4 é a seguinte.

Teorema 6.4.7 *Seja G um grupo de Lie solúvel conexo com álgebra de Lie $\mathbf{g}$. Seja $\mathbf{n}$ o radical nilpotente de $\mathbf{g}$ e N o subgrupo conexo normal de G associado a $\mathbf{n}$. Seja $\Gamma \subset G$ um reticulado e assuma que $\Gamma/[N,N]$ está na posição geral com relação a representação adjunta de $G/[N,N]$ em $\mathbf{n}/[\mathbf{n},\mathbf{n}]$ fatorada através de G/N. Se $S \subset \Gamma$ é um subsemigrupo não contido em subsemigrupos próprios de interior não vazio então $S = \Gamma$.*

Demonstração: Assim como na demonstração da versão nilpotente tomemos um recobrimento universal $\pi : \widetilde{G} \to G$ de G. Se $\widetilde{N}$ denota o radical nilpotente de $\widetilde{G}$ então $\widetilde{G}/[\widetilde{N},\widetilde{N}]$ é recobrimento universal de $G/[N,N]$ e pelos argumentos usados na demonstração do teorema anterior $\widetilde{\Gamma}/[\widetilde{N},\widetilde{N}]$ um reticulado de $\widetilde{G}/[\widetilde{N},\widetilde{N}]$. Pela Proposição 4.3.7 $\widetilde{\Gamma}/[\widetilde{N},\widetilde{N}]$ está na posição geral em $\widetilde{G}/[\widetilde{N},\widetilde{N}]$. O resto da demonstração segue exatamente os mesmos passos usados para obter a versão nilpotente com a única ressalva que, ao invés do Teorema 3.4.1, aqui utilizamos o Teorema 6.4.4. □

Por fim mostraremos como obter uma família de exemplos onde a conclusão do Teorema 6.3.5 não se aplica sem a hipótese da posição geral do reticulado. Para isto tomamos um grupo de Lie solúvel conexo G com álgebra de Lie $\mathbf{g}$ possuindo radical nilpotente $\mathbf{n}$ abeliano. Vamos também assumir que $\mathbf{g}/\mathbf{n}$ se realiza como subalgebra de $\mathbf{g}$. Com isto $\mathbf{g}$ é o produto semi-direto entre as álgebras abelianas $\mathbf{g}/\mathbf{n}$ e $\mathbf{n}$ onde $\mathbf{g}/\mathbf{n}$ denota uma subalgebra de $\mathbf{g}$ isomorfa a $\mathbf{g}/\mathbf{n}$ e a representação é dada via a fatoração da representação adjunta de $\mathbf{g}$ em $\mathbf{n}$ fatorada através de $\mathbf{g}/\mathbf{n}$. Assumindo que G possui um reticulado Γ que não está na posição geral com relação a $\mathbf{n}$ e adotando as notações introduzidas na demonstração da segunda parte do Teorema 4.3.4, com $\mathbf{a} = \mathbf{n}$, introduzimos

$$S = \Gamma \cap (\mathbf{g}/\mathbf{n} \times T).$$

Fazemos as seguintes afirmações:

a) S é um semigrupo próprio gerador de Γ

b) S não está contido em semigrupo próprio com interior

as quais seguem quase que imediatamente a partir da identificação de Γ com $\Gamma/\mathbf{n} \times (\Gamma \cap \mathbf{n})$. De fato: a verificação de que S é semigrupo segue imediatamente das considerações feitas na demonstração do Teorema 4.3.4. Que S é gerador segue do fato de $\Gamma \cap \mathbf{n}$ ser um reticulado do grupo aditivo correspondente a $\mathbf{n}$ e que é próprio do fato de T ser um semi-espaço de $\mathbf{n}$. Quanto a afirmação b) notemos inicialmente que existe um único semi-espaço de $\mathbf{g}$ contendo S a saber, o semi-espaço $W = \mathbf{g}/\mathbf{n} \times T$. A partir do fato já demonstrado em 4.3.4 que a fronteira de T não é um ideal de $\mathbf{g}$ segue que a fronteira de W não é uma subalgebra de $\mathbf{g}$, ou seja, W não é semialgebra semi-espaço de $\mathbf{g}$. A partir disso e da classificação dos semigrupos maximais de interior não vazio em grupos de Lie solúveis (Teorema 1.4.7) segue-se o afirmado em b).

Referências

[1] Adeleke, S. A., M. A. Dummet and P. M. Newmann : *On a question of Frege's about right ordered groups.* Bull. London Math. Soc. **19** (1987) 513-521.

[2] Fleming, W. H.: Functions of several variables. Addison-Wesley, 1966.

[3] Hilgert. J., K. H. Hofmann an J. D. Lawson: Lie groups, convex cones, and semigroups. Claredon Press, Oxford 1989.

[4] Hilgert, J. e K. H. Neeb : Lie semigroups and their applications. Lecture Notes in Mathematics. Vol. **1552**, Springer-Verlag 1993.

[5] Hofmann, K. : *Lie algebras with subalgebras of codimension one.* Illinois J. Math. **9** (1965) 636-643.

[6] Jacobson, N.: Lie algebras, Interscience Publishers, New York, London, 1962.

[7] Lawson, J. : *Maximal subsemigroups of Lie groups that are total.* Proc. Edinburgh Math. Soc. vol. **30** (1987) 479-501.

[8] Malcev, A. : *On a class of homogeneous spaces.* AMS Translation, **39** (1951) 276-307.

[9] Matsushima, Y. : *On the discrete subgroups and homogeneous spaces of nilpotent Lie groups.* Nagoya Math. J. vol **2** (1951) 365-416.

[10] Raghunathan, M. S. : Discrete subgroups of Lie groups. Springer-Verlag, 1972.

[11] Ribemboim, P. : Théorie des groupes ordonnés. Monografias de Matemática. Universidade Nacional del Sur. Bahia Blanca 1963.

[12] Rocio, O. G. and L. A. B. San Martin : *Discrete semigroups in nilpotent Lie groups.* A aparecer em Semigroup Forum.

[13] Rocio, O. G. and L. A. B. San Martin : *Semigroups in lattice of solvable Lie groups.* Relatório de Pesquisa IMECC - UNICAMP, **63** (1994). Submetido.

[14] Ruppert, W. A. F. : *On open subsemigroups of connected groups.* Semigroup Forum, **39** (1989) 347-362.

[15] Samuel, P. : Théorie algébrique des nombres. Hermann, Paris 1967.

[16] San Martin, L. A. B. : *Nonreversibility of subsemigroups of semi-simple Lie groups.* Semigroup Forum, **44** (1992) 376-387.

[17] Varadarajan, V. S. : Lie groups, Lie algebras and their representations. Prentice Hall Inc. 1974.

[18] Warner, F. : Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Scott, Foresman and Company. Glenview, Illinois 1971.