

A TEORIA DE GRUPOS E O CONCEITO DE MASSA

Afonso Augusto Lopes

Orientador:

Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

agosto de 1983.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Classif.	T
Autor	L881a
V.	Ex.
Tombo BC/	5052

CM-00030558-1

Agradeço:

Ao Prof. Waldyr A. Rodrigues Jr. por ter proposto o tema do presente trabalho, pela orientação e incentivo

Aos meus Pais por tudo que fizeram por mim até este instante

À minha mulher pelo estímulo, dedicação e pela participação na impressão deste trabalho

Ao amigo Adolfo Maia Jr. pelas observações feitas.

Dedicatória

A quem devo dedicar este trabalho? A resposta a esta pergunta emana, sinceramente, com muita convicção e espontaneidade. Dedico este trabalho à memória de um homem, que considerei e ainda hoje considero um grande homem, e tenho plena certeza essa consideração há de perdurar através dos tempos. Esse homem contribuiu, pelo menos, em quase tudo da minha formação moral e intelectual. É exatamente na imagem de suas ações que encontro, ainda hoje, respostas a inúmeras questões que tenho por hábito fazer a mim mesmo.

Esse homem chamava-se Antonio Augusto, e eu em particular o chamava de Avô Antonio. Digo isto, pois embora ele não se encontre mais em nossos meios, creio atue como forma de energia, em alguma parte do Universo.

I N D Í C E

Introdução..... vi

I. Preliminares

I.1. Grupo Abstrato..... 1
I.2. Variedade Diferenciável Abstrata..... 6
I.3. Grupo de Lie..... 19
I.4. Álgebra de Lie..... 13
I.5. Grupo de Cobertura Universal de um Grupo de Lie..... 16
I.6. Operadores em Espaços de Hilbert..... 17
I.7. Representação de Grupos..... 18

II. Grupo de Galileu

II.1. Mecânica Clássica..... 22
II.2. Grupo de Galileu..... 26

III. Grupo de Galileu Quântico

III.1. Mecânica Quântica..... 35
III.2. Descrições e Transformações de Sistemas..... 37
III.3. Grupo de Galileu Quântico..... 42
III.4. Representações do Grupo Quântico..... 44
III.5. Determinação do Fator de Fase $w(g, g')$ 47
III.6. Estrutura do Grupo de Galileu Quântico..... 51

III.7.Equação de Schödinger.....	55
III.8.Regra de Superseleção.....	57
IV. <u>Grupo de Poincaré</u>	
IV.1.Relatividade.....	60
IV.2.Transformações de Lorentz.....	66
IV.3.Representações de Dimensão Finita de \mathcal{L}_{hr}	76
IV.4.Representações Unitárias Irredutíveis do Grupo de Poincaré Restrito.....	80
IV.5.Operadores Infinitesimais e Invariantes.....	84
IV.6.Representações Unitárias de $\overline{\mathcal{P}}$	86
IV.7.Contração do Grupo de Lorentz.....	89
V. <u>Grupo de Aghassi-Roman-Santilli e as Partículas Elementares</u>	
V.1.Introdução.....	94
V.2.O Grupo de Aghassi-Roman-Santilli.....	102
V.3.Grupo de Sitter e $\tilde{\mathcal{P}}_5$	115
Bibliografia.....	124

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é o estudo de algumas das principais propriedades de alguns grupos de invariância de certas teorias físicas, que de alguma forma se relacionam com o conceito físico de massa de partículas.

Nosso estudo se inicia no Cap. II com o grupo de Galileu, que é o grupo de invariância da mecânica clássica Newtoniana. Nessa teoria a massa aparece como um parâmetro-invariante que rotula as partículas e entra nas equações de movimento. A representação da álgebra de Lie do grupo de Galileu, não contém a massa. Entretanto no formalismo canônico da mecânica clássica, o grupo de Galileu é uma das possíveis transformações de contacto, e a representação da álgebra de Lie do grupo de Galileu por intermédio dos parênteses de Poisson, contém a massa do sistema. Tal fato, que não é de grande importância na mecânica clássica é todavia fundamental na mecânica quântica não relativística (onde os parênteses de Poisson são substituídos por comutadores).

Para entendermos a importância da afirmação acima estudamos no Cap. III, a extensão do grupo de Galileu à mecânica quântica não relativística. Tal envolve o conceito de representações unitárias radiais de grupos de Lie não compactos em espaços de Hilbert, que é o espaço dos possíveis estados de um dado sistema físico em mecânica quântica, e esses conceitos que são básicos para todo o trabalho são apresentados no Cap. III. Aprendemos que devido a estrutura matemática da mecânica quântica, o grupo de Galileu mecânico quântico é uma expansão do grupo de Galileu clássico definido no Cap. II no sentido que contém um novo gerador. Tal gerador, está associado ao operador de massa, e define uma regra de superseleção, que implica na conservação da massa. O espectro desse operador resulta variar no intervalo $(0, \infty)$. Estes resultados esclarecem o *porque* a massa aparece como um parâmetro nos problemas de mecânica quântica elementar, embora seja obviamente um observável.

No Cap. IV, estuda-se o grupo de Poincaré, que é por hipótese o grupo de invariância da mecânica quântica relativística (e também o grupo de isometrias de $E^{3,1}$, o espaço de Minkowski). O grupo de Poincaré permite a associação de partículas com suas representações unitárias irredutíveis, dando um significado bem definido a momento, energia, massa e spin. Nessa teoria, a massa das partículas aparece associada com $M^2 = P_\mu P^\mu$ (onde P_μ é um dos geradores da álgebra de Lie do grupo de Poincaré) que é um dos operadores de Casimir da álgebra de Lie do grupo de Poincaré. O espectro de M^2 resulta variar no intervalo $(-\infty, +\infty)$!

Nesse capítulo mostramos também em que sentido podemos obter o grupo de Galileu como um certo limite do grupo de Poincaré por intermédio do conceito de contração grupal (que é também usado no Cap. V).

No Cap. V discutimos as limitações do grupo de Poincaré como o grupo de invariância da dinâmica dos sistemas elementares. De fato, apesar deste grupo permitir dar um significado bem preciso a certas propriedades das 'partículas elementares' como mencionado acima, existem certos aspectos que são altamente insatisfatórios. Em particular mencionamos aqui que os hádrons (supostos 'partículas elementares') se agrupam em representações finitas de grupos especiais unitários (notadamente $SU(3)$) e que as partículas em uma mesma representação têm massas diferentes. O'Raifeartaigh mostrou que não existe maneira diferente da trivial (isto é, pelo produto direto) de unir o grupo de Poincaré com o grupo de simetrias internas ($SU(3)$), mas tal implica num espectro de massa que não concorda com a experiência.

Para suplantar tais dificuldades que descrevemos com algum detalhe, estudamos o grupo de Galileu relativístico, proposto por Aghassi-Roman-Santilli. Mostramos que este grupo que é uma extensão fisicamente natural do grupo de Galileu quântico, possui um operador de massa quadrático em sua álgebra de Lie com espectro discreto. De fato as partículas aparecem em torres de spin (trajetórias de Regge) o que é verificado experimentalmente.

Mostramos também que o grupo de Galileu relativístico pode ser interpretado como um certo limite — no sentido da contração — do grupo de Sitter.

Embora os resultados desse trabalho não sejam novos, ele é útil, pois esta é a primeira apresentação sistemática de que temos notícia da evolução do conceito de massa das partículas e sua relação com os diversos grupos de invariância das teorias físicas contemporâneas. Esta observação não implica contudo que o leitor deva esperar que o trabalho seja completo.

Queremos deixar explícito, que nossa preocupação foi meramente aplicar matemática a um problema de física dos mais complexos, tendo deixado de lado em muitas oportunidades as interpretações físicas possíveis do formalismo.

Dado que esse é um trabalho de física-matemática e que deve ser acessível a físicos, o rigor matemático é mantido em um nível apenas razoável em certos pontos. O Cap. I é um apêndice, reservado para definir certos conceitos matemáticos utilizados na apresentação dos demais capítulos, de maneira que o leitor com a devida sofisticação matemática pode começar a leitura no Cap. II.

As referências de cada capítulo aparecem numeradas no final do mesmo e uma listagem completa encontra-se na pag. 123.

Finalmente, os símbolos c e h que aparecem tantas vezes no que segue se referem respectivamente à velocidade da luz e a constante de Planck dividida por 2π . Em geral h é denotado por \hbar nos livros textos.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

Na apresentação deste trabalho defrontamo-nos com o seguinte problema. Os conceitos matemáticos usados não são em geral familiares a um leitor típico com formação básica em Física, e qualquer estudo rigoroso desses conceitos implica na necessidade de recorrer-se a uma vasta bibliografia. A apresentação de muitos desses conceitos nos lugares em que eles aparecem pela primeira vez não nos pareceu apropriado, pois certamente desviaria a atenção do problema principal que se estuda. Assim decidimos neste capítulo (que é um apêndice ao texto principal) apresentar uma seleção (mais ou menos arbitrária), de alguns dos ingredientes básicos da teoria de grupos de Lie, álgebra de Lie, e suas representações. Todo o material que segue é padrão e pode ser encontrado na literatura citada.

I.1. Grupo Abstrato

I.1.1. Definição de Grupo

Diz-se que uma operação $*$ sobre o conjunto G , define uma estrutura de grupo sobre G se os axiomas estiverem verificados:

- G1) existe um elemento e em G , chamado elemento neutro, tal que $x * e = e * x = x$ para todo $x \in G$;
- G2) para cada $x \in G$ existe um elemento x^{-1} em G , chamado elemento inverso, tal que $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$;
- G3) a identidade $x * (y * z) = (x * y) * z$ é satisfeita para todo $x, y, z \in G$.

Notação

Com a notação $(G, *)$ queremos dizer que o conjunto G munido da operação $*$ tem estrutura de Grupo. Quando a operação $*$ estiver implícita no contexto, ao invés de usarmos a notação acima diremos apenas que G é um grupo.

I.1.2. Definição de Grupo Abeliano

Se a operação $*$ de um grupo G satisfaz o axioma:

G4) a identidade $x * y = y * x$ é satisfeita para todo $x, y \in G$;
diremos que G é um grupo abeliano ou comutativo.

I.1.3. Definição de Subgrupo

Diz-se que (H, o) é um subgrupo de $(G, *)$ se $H \subseteq G$ e o é a restrição de $*$ ao conjunto H .

I.1.4. Teorema ([19], pág.451)

Seja $(G, *)$ um grupo e seja $H \subseteq G$. H é subgrupo de G se, e somente se, as seguintes condições estiverem verificadas:

i) $H \neq \emptyset$

ii) Se $a, b \in H$ então $a^{-1} * b \in H$

I.1.5. Definição de Subgrupo Invariante

Diz-se que um subgrupo N , de um grupo G , é um subgrupo invariante (ou subgrupo normal) de G se, a seguinte condição estiver verificada: para todo $x \in G$ $xN = Nx$.

I.1.6. Proposição ([19], pág.459)

Seja N um subgrupo invariante de um grupo G e consideremos o conjunto $G/N = \{xN \mid x \in G\}$; a operação de $*$ sobre G/N , definida por $(xN, yN) \longmapsto (xy)N$ define uma estrutura de grupo sobre o conjunto G/N

I.1.7. Definição de Grupo Fator

O Grupo $(G/N, *)$ é chamado grupo fator ou grupo quociente de (G, \cdot) pelo subgrupo normal N .

Notemos que o elemento neutro de $(G/N, *)$ é o conjunto N e que o inverso de cada elemento xN é a classe lateral $x^{-1}N$.

I.1.8. Definição de Homomorfismo de Grupos

Consideremos os grupos $(G, *)$ e (G', \cdot) e uma aplicação f do conjunto G no conjunto G' ; diz-se que f é um homomorfismo do grupo G no grupo G' se, $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$ quaisquer sejam x e y em G .

I.1.9. Definição de Isomorfismo de Grupos

Diz-se que f é um isomorfismo do grupo G no grupo G' se f for um homomorfismo bijetor de G em G' . Se existir um isomorfismo de G em G' , diremos que G e G' são isomorfos.

I.1.10. Definição de Automorfismo de Grupo

Diz-se que f é um automorfismo do grupo G se f for um isomorfismo de G em G .

I.1.11. Proposição ([19], pág.463)

O conjunto dos automorfismos de um grupo G munido da operação de composição tem a estrutura de grupo. A esse grupo chamamos grupo dos automorfismos de G .

I.1.12. Proposição ([19], pág.521)

Seja $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$ uma família não vazia de grupos multiplicativos e seja $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ o produto cartesiano dos conjuntos G_1, G_2, \dots, G_n ; se (a_1, a_2, \dots, a_n) e (b_1, b_2, \dots, b_n) são dois elementos quaisquer de G colocaremos, por definição, $(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$. O conjunto G munido dessa operação tem estrutura de grupo.

I.1.13. Definição de Grupo Produto

O grupo (G, \cdot) mencionado na proposição anterior chama-se grupo produto da família $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$

I.1.14. Definição de Produto Direto

Diz-se que um grupo multiplicativo G é o produto direto de uma família $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ de subgrupos de G se as seguintes condições estiverem verificadas:

- i) $G = H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot \dots \cdot H_n$
- ii) cada H_i é invariante em G
- iii) $H_i \cap (H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_{i-1} \cdot H_{i+1} \cdot \dots \cdot H_n) = \{e\}$
para $i = 1, 2, \dots, n$

I.1.15. Teorema ([19], pág.523)

Um grupo multiplicativo G é o produto direto de uma família $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ de subgrupos de G se, e somente se, estiverem verificadas as seguintes condições:

- i) cada elemento de H_i é permutável com qualquer elemento de H_j se $i \neq j$
- ii) cada elemento x de G pode ser representado de modo único sob a forma $x = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$, onde $a_i \in H_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

I.1.16. Teorema ([19], pág.524)

Se uma família $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ de subgrupos invariantes de G é tal que $(H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_i) \cap H_{i+1} = \{e\}$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$ então G é o produto direto da família $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$

I.1.17. Teorema ([19], pág.525)

Se um grupo G é o produto direto de uma família $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ de subgrupos de G , então G é isomorfo ao grupo produto $H = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ da família $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$

Notação

Para expressarmos o fato de que G é o produto direto de seus subgrupos H_1 e H_2 , usaremos a notação $G = H_1 \times H_2$

I.1.18. Definição de Produto Semi-Direto

Sejam K e H dois grupos, e seja $\text{Aut } K$ o grupo de automorfismos de K . Seja $\psi: H \longrightarrow \text{Aut } K$ um homomorfismo, tal que para cada $h \in H$ temos $\psi(h) \in \text{Aut } K$ que leva $k \in K$ em $\psi(h)k \in K$. O produto semi-direto de K por H é o conjunto dos pares $(k, h) \in K \times H$ munido da lei de multiplicação

$$(k_1, h_1) \cdot (k_2, h_2) = (k_1 \psi(h_1)k_2, h_1 h_2)$$

Pode-se verificar imediatamente que o produto semi-direto de K por H , é um grupo e que a identidade do grupo é (e_1, e_2) onde e_1 é a identidade de K e e_2 a identidade de H . O elemento inverso de (k, h) é $(k, h)^{-1} = (\psi(h)^{-1}k^{-1}, h^{-1})$. No que segue o produto semi-direto de K por H será denotado $K \otimes H$.

I.1.19. Definição de Grupo Simples e Semi-Simples

Diz-se que um grupo G é simples se G não possui qualquer subgrupo invariante não trivial.

G é semi-simples se não possui qualquer subgrupo invariante abeliano não trivial.

I.1.20. Definição de Extensão de Grupo

Se H é um subgrupo normal de um grupo G , e se K é um grupo isomorfo ao grupo fator G/H , diz-se que o grupo G é uma extensão de K por H .

I.1.21. Grupos Finitos e Infinitos

Um grupo que consiste de um número finito N de elementos é chamado finito de ordem N . Se o número de elementos for infinito o grupo é dito infinito enumerável ou não enumerável, dependendo do caso. Entre os grupos não enumeráveis se encontram os grupos com parâmetros contínuos e em particular os grupos de Lie, que juntamente com as

álgebras de Lie são os instrumentos fundamentais do presente trabalho. A definição destes conceitos requer primeiramente a definição de variedades diferenciáveis e campos de vetores definidos em variedades diferenciáveis. Na próxima seção se definem estes conceitos.

I.2. Variedade Diferenciável Abstrata

I.2.1. Definição de Homeomorfismo de Espaços Topológicos

Sejam X e Y espaço topológicos e f uma aplicação de X em Y . A aplicação f diz-se um homeomorfismo do espaço topológico X no espaço topológico Y se f for bijetora e contínua e f^{-1} for contínua. Caso exista um homeomorfismo do espaço topológico X no espaço topológico Y diremos que X e Y são topologicamente equivalentes ou ainda homeomorfos.

I.2.2. Definição de Espaço de Hausdorff

Um espaço topológico M diz-se um espaço de Hausdorff se, para cada $a, b \in M$ existem G e H abertos disjuntos, tais que $a \in G$ e $b \in H$.

I.2.3. Definição de Variedade Diferenciável Abstrata

Seja M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável. M diz-se uma variedade diferenciável abstrata se existir uma coleção indexada de pares $\{W_\alpha, \eta_\alpha\}_{\alpha \in I}$ onde cada W_α é um subconjunto aberto de E^n e cada $\eta_\alpha: W_\alpha \rightarrow M$ é um homeomorfismo de W_α em um subconjunto aberto U_α de M , que satisfaz as seguintes condições:

- i) Se m é um ponto de M , existe um índice α em I tal que m pertence a U_α .
- ii) Para cada par de índices α, β de I tais que $U = U_\alpha \cap U_\beta$ é não vazio, a restrição de $\eta_\beta^{-1} \circ \eta_\alpha$ a $\eta_\alpha^{-1}(U)$ é uma aplicação diferenciável de $\eta_\alpha^{-1}(U)$ em E^n .

iii) Se $\eta:W \rightarrow U$ é um homeomorfismo de um subconjunto aberto W de E^n em um subconjunto aberto U de M tal que para cada índice α para o qual $U \cap U_\alpha$ é não vazio, a restrição de $\eta^{-1} \circ \eta_\alpha$ a $\eta_\alpha^{-1}(U \cap U_\alpha)$ e a restrição de $\eta_\alpha^{-1} \circ \eta$ a $\eta^{-1}(U \cap U_\alpha)$ são aplicações diferenciáveis, existe um índice β tal que $(W, \eta) = (W_\beta, \eta_\beta)$.

O número inteiro n é chamado dimensão da variedade diferenciável M .

Os conjuntos U_α são chamados vizinhanças coordenadas de M . As aplicações $\varphi_\alpha = \eta_\alpha^{-1} : U_\alpha \rightarrow W_\alpha$ são chamadas aplicações coordenadas.

As aplicações $\eta_\beta^{-1} \circ \eta_\alpha = \psi_\alpha^\beta$ são chamadas transformações coordenadas sobre $U_\alpha \cap U_\beta$.

I.2.4. Definição de Função Real-Analítica

i) Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função a valores reais de finida sobre um subconjunto aberto U de E^n . Diremos que f é uma função real-analítica num ponto z se existir uma vizinhança de z na qual f possa ser representada pela sua expansão de Taylor nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n .

ii) Diremos que f é real-analítica em U se for real-analítica em cada ponto de U .

iii) Seja W um aberto de E^n e $f:W \rightarrow E^n$ uma função definida por $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$. A função f diz-se real-analítica se cada uma das f_i for uma função real-analítica.

I.2.5. Definição de Variedade Diferenciável Real-Analítica

Uma variedade diferenciável diz-se real-analítica se ela puder ser coberta por uma família de vizinhanças coordenadas na quais cada transformação coordenada seja uma

função real analítica

Seja f uma função definida em um subconjunto aberto U de uma variedade real analítica M . Se $m \in U$, então f diz-se real analítica em m se existir uma vizinhança coordenada V , do ponto m , e uma aplicação coordenada φ tal que $f \circ \varphi^{-1}$ é real-analítica em $\varphi(m)$.

Diremos que f é real-analítica em U se for real-analítica em cada ponto de U .

Se $\sigma: N \rightarrow M$ é uma aplicação de uma variedade real-analítica em outra, σ diz-se real-analítica se para cada função real-analítica f sobre um aberto U de M a função $f \circ \sigma$ é real-analítica em $\sigma^{-1}(U)$

I.2.6. Diferenciabilidade de Funções Definidas em Variedades

i) Seja M uma variedade diferenciável e f uma função a valores reais definida em um aberto V , de M . Consideremos ainda um ponto m de V , um vizinhança coordenada de m , U_α , e $\eta_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha$ a aplicação correspondente. Diremos que a função f é diferenciável no ponto m se $f \circ \eta_\alpha$ for diferenciável em $\eta_\alpha^{-1}(m)$.

Deve-se provar, naturalmente, que esta noção de diferenciabilidade não depende da escolha da vizinhança coordenada U_α . A prova é simples e está feita em ([03], pág.35).

ii) Se f é diferenciável em todos os pontos de V , nós diremos que f é diferenciável em V .

iii) Sejam M e M' variedades diferenciáveis e $f: V \rightarrow M'$ uma aplicação definida em um aberto de M . Diremos que f é diferenciável em um ponto m de V se para cada função g a valores reais que é diferenciável em uma vizinhança de $f(m)$ a função $g \circ f$ é diferenciável em m .

I.2.7. Definição de uma Curva Parametrizada Diferenciável em E^n

Chama-se curva parametrizada diferenciável em E^n a toda aplicação $\gamma: [-1, 1] \longrightarrow E^n$ que é contínua em $[-1, 1]$ e é diferenciável em $] -1, 1 [$.

Se $\gamma(0) = v$, diremos que a curva γ passa por v .

I.2.8. Definição de Vetores Tangentes a E^n

Denotemos por \mathcal{A} o conjunto de todas as curvas parametrizadas que passam por $v, v \in E^n$, e denotemos por \mathcal{B} o conjunto de todas as funções a valores reais diferenciáveis em alguma vizinhança de v . Se $\gamma \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{B}$ então $f \circ \gamma$ é uma função a valores reais diferenciável em alguma vizinhança do ponto $t = 0$. Podemos então definir o "produto"

$$\langle \gamma, f \rangle = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma) \right|_{t=0}$$

Em \mathcal{A} consideremos a relação de equivalência \mathcal{R} definida por:

$$(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \langle \gamma_1, f \rangle = \langle \gamma_2, f \rangle \text{ para todo } f \in \mathcal{B}$$

Cada elemento de \mathcal{A}/\mathcal{R} é chamado vetor tangente a E^n em v .

Se γ é uma curva pertencente a uma classe de equivalência α diremos também que α é o vetor tangente a γ em v .

Prova-se em ([03], pág.12) que ao conjunto \mathcal{A}/\mathcal{R} pode ser dada uma estrutura de espaço vetorial, ao qual chamaremos de espaço tangente e o denotaremos por $T(v)$.

I.2.9. Definição de Vetor Tangente a uma Variedade

Sejam: M uma variedade diferenciável, m um ponto de M e $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ a família indexada de todas as vizinhanças coordenadas de M que contém o ponto m e as correspondentes aplicações coordenadas.

Para cada par de índices α e β podemos introduzir a transformação coordenada $\Psi_{\alpha}^{\beta} = \varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1}$ definida em $\varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$.

Se $x_0 = \varphi_{\alpha}(m)$ e $y_0 = \varphi_{\beta}(m)$ então $y_0 = \Psi_{\alpha}^{\beta}(x_0)$ e nestas condições a aplicação diferenciável Ψ_{α}^{β} induz uma aplicação linear $\Psi_{\alpha}^{\beta*}: T(x_0) \longrightarrow T(y_0)$.

Seja $\Omega(m)$ o conjunto de todos os pares (x, α) , onde $x = \varphi(m)$ para alguma aplicação coordenada φ e α é um vetor tangente a E^n em x .

Em $\Omega(m)$ consideremos a relação de equivalência \mathcal{R} definida por:

$((x, \alpha), (x', \alpha')) \in \mathcal{R} \iff x' = \Psi(x)$ e $\alpha' = \Psi_*(\alpha)$ para alguma transformação coordenada Ψ em m .

Cada elemento de $\Omega(m)/\mathcal{R}$ é chamado vetor tangente à variedade M no ponto m .

Denotaremos a classe de equivalência que contém o par (x, α) por $\{\alpha\}$.

Em $\Omega(m)/\mathcal{R}$ definimos: $a\{\alpha\} + b\{\beta\} = \{a\alpha + b\beta\}$.

Com esta definição o conjunto $\Omega(m)/\mathcal{R}$ passa a ter estrutura de espaço vetorial, ao qual chamaremos de espaço tangente à variedade M em m , e o denotaremos por $T(m)$.

I.3. Grupo de Lie

I.3.1. Definição de Grupo de Lie

Seja X um conjunto de pontos. Assumiremos que X é uma variedade real-analítica e também que X é um grupo. Quando falarmos de X como uma variedade nós o denotaremos por M , e quando falarmos de X como grupo nós o denotaremos por G . Denotaremos o produto de dois elementos g_1 e g_2 de G por $g_1 \cdot g_2$.

Consideremos a aplicação $\mu_1: M \times M \longrightarrow M$ definida por $\mu_1(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2$ e a aplicação $\mu_2: M \longrightarrow M$ definida por $\mu_2(g) = g^{-1}$. Se cada uma das aplicações μ_1 e μ_2 for uma função real-analítica, então X munido das estruturas de grupo e de variedade diferenciável é chamado grupo de Lie.

I.3.2. Definição de Homomorfismo de Grupos de Lie

Sejam G_1 e G_2 dois grupos de Lie. Uma aplicação $\sigma: G_1 \longrightarrow G_2$ diz-se um homomorfismo de G_1 em G_2 se as seguintes condições estiverem verificadas:

- i) σ é um homomorfismo de grupos
- ii) σ é uma aplicação regular real-analítica

I.3.3. Definição de Subgrupo a um Parâmetro

Seja G um grupo de Lie. A imagem de uma aplicação $t \xrightarrow{\sigma} g(t)$ dos números reais em G , diz-se um subgrupo a um parâmetro de G se σ for um homomorfismo do grupo aditivo dos números reais no grupo G .

I.3.4. Definição de Curva Parametrizada Diferenciável

Uma aplicação diferenciável γ de um intervalo aberto de \mathbb{R} em um grupo de Lie G , diz-se uma curva parametrizada diferenciável em G .

I.3.5. Teorema ([03], pag. 126)

Seja $t \longrightarrow \gamma(t)$ um homomorfismo do grupo aditivo dos números reais num grupo de Lie G . Para cada $g \in G$, a aplicação $t \longrightarrow g \cdot \gamma(t)$ é real-analítica e portanto define uma curva parametrizada em G , a qual denotaremos por $g\gamma$. Se h é um ponto de G e $h = g_1 \gamma(t_1) = g_2 \gamma(t_2)$ onde $g_1, g_2 \in G$, então as curvas $g_1 \gamma$ e $g_2 \gamma$ tem o mesmo vetor tangente em h .

I.3.6. Definição de Campo Vetorial Invariante à Esquerda

Denotemos por $X(t)$ o vetor tangente à curva $g\gamma$ em h . De acordo com o teorema anterior o campo vetorial X está bem definido em G . Para cada $g \in G$ denotemos por σ^g a aplicação $\sigma^g: G \rightarrow G$ dada por $\sigma^g(h) = gh$, e denotemos por σ_*^g a transformação linear do espaço tangente induzida por σ^g . Então o campo vetorial X satisfaz a relação $\sigma_*^g \circ X = X \circ \sigma^g$. Qualquer campo vetorial em G que satisfaça essa relação para todo $g \in G$ diz-se um campo vetorial invariante à esquerda.

I.3.7. Teorema ([03], pág.128)

Um homomorfismo $t \mapsto \gamma(t)$ do grupo aditivo dos números reais em um grupo de Lie G determina, através da multiplicação à esquerda por elementos de G , um campo vetorial invariante à esquerda em G . Reciprocamente, cada campo vetorial invariante à esquerda em G é determinado por um homomorfismo do grupo aditivo dos números reais em G .

I.3.8. Proposição ([03], pág.143)

Sejam r e X campos vetoriais diferenciáveis em um aberto U de uma variedade diferenciável M, m um ponto de U e U_1 uma vizinhança coordenada de m .

Se $r = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ e $X = \sum_{i=1}^n b_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ onde os a_i e os b_i são funções, então:

$$[r, X] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ é um campo vetorial em } V.$$

I.3.9. Proposição ([03], pág.152)

Seja G um grupo de Lie. Se r e X são dois campos vetoriais invariante à esquerda em G , então $[r, X]$ é também um campo vetorial invariante à esquerda em G .

I.3.10. Definição de Grupo de Lie de Transformações

Seja G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Um conjunto $\{\sigma g\}$ é um grupo de Lie de transformações se a aplicação $\sigma: G \times M \rightarrow M$ que $(g, x) \mapsto \sigma(g, x)$ é diferenciável e se o conjunto de transformações $\{\sigma g: M \rightarrow M; \sigma g(x) = \sigma(g, x)\}$ juntamente com a lei de composição de aplicações, satisfaz a propriedade grupal, isto é:

$$\sigma gh = \sigma g \circ \sigma h$$

onde e é a transformação identidade.

I.3.11. Definição de Ação Efetiva e Ação Transitiva

Dizemos que G opera efetivamente em M se $\sigma g(x) = x$ para todo o $x \in M$ implica $g = e$. Dizemos que G opera transitivamente em M se para cada $x \in M$ e $y \in M$, existe $g \in G$ tal que $\sigma g(x) = y$

I.4. Álgebra de Lie

I.4.1. Definição de Álgebra de Lie Abstrata

Seja A um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo dos reais. A diz-se uma álgebra de Lie se existe uma operação em A que associa a cada par de elementos α, β de A em elemento $[\alpha, \beta]$ de A de tal forma que os seguintes axiomas estejam satisfeitos:

$$i) [a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2, \beta] = a_1 [\alpha_1, \beta] + a_2 [\alpha_2, \beta]$$

$$[\alpha, a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2] = a_1 [\alpha, \beta_1] + a_2 [\alpha, \beta_2]$$

$$a_1, a_2 \in \mathbb{R}; \quad \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2 \in A$$

$$ii) [\alpha, \alpha] = 0 \quad \forall \alpha, \alpha \in A$$

$$iii) [[\alpha, \beta], \gamma] + [[\beta, \gamma], \alpha] + [[\gamma, \alpha], \beta] = 0$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in A$$

I.4.2. Definição de Álgebra de Lie de um Grupo de Lie

Seja U o espaço vetorial de todos os campos vetoriais in-variantes à esquerda, de um grupo de Lie G . A proposi-ção I.3.9. nos diz que a aplicação que a cada par (r, X) de elementos de U associa o elemento $[r, X]$ é uma opera-ção em U . O espaço vetorial U munido dessa operação tem estrutura de uma álgebra de Lie ([03], pág.153), a qual chamaremos álgebra de Lie do grupo de Lie G .

I.4.3. Definição de Contração de Grupo de Lie e de Álgebra de Lie
(Inonu e Wigner, 1953)

Seja G um grupo de Lie arbitrário com n parâmetros a^i , ($i = 1, \dots, n$).

Seja I_i ($i = 1, \dots, n$) uma base de g , a álgebra de Lie de G . Então

$$I_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(he_i) - g(0)}{h} \tag{I}$$

onde a carta local escolhida rotula com 0 a identidade e os elementos e_i diferem de zero por um incremento uni-tário dos a_i . Os números c_{ij}^k tais que

$$[I_i, I_j] = \sum_k c_{ij}^k I_k \quad 1 \leq i, j, k \leq n \tag{II}$$

são chamados constantes de estrutura de álgebra de Lie com relação a base dada. Da identidade de Jacobi (eq (iii) em 1.4.1) segue que as constantes c_{ij}^k devem satisfazer a condição:

$$\sum_k (c_{ij}^k c_{ik}^m - c_{il}^k c_{jk}^m - c_{ij}^k c_{kl}^m) = 0 \tag{III}$$

Reciprocamente, se o sistema (c_{ij}^k) de constantes satis-faz (III) o colchete definido por (II) dá ao espaço veto-rial a estrutura de álgebra de Lie. Como as constantes de estrutura se transformam como um tensor do tipo (1,2) sob transformações não singulares da base da álgebra de

Lie, segue imediatamente que mudanças de bases não singulares não levam a novas álgebras. Vamos denotar as transformações em questão por:

$$J_j = \sum_i U^i_j I_i \quad (IV)$$

Os parâmetros grupais se transformam então como:

$$a^i = \sum_k U^i_k b^k \quad (V)$$

e os J_i podem ser obtidos de uma equação semelhante a (I) para os I_i , mas obviamente com os e_i substituídos por quantidades similares, definidas com relação aos b^k .

Uma transformação como a (IV) pode levar a uma nova álgebra (e portanto a um novo grupo) somente se a matriz U em (IV) é singular.

A operação de se obter uma nova álgebra (novo grupo) por uma transformação singular dos geradores da álgebra antiga (dos parâmetros grupais de G) é chamada a contração da álgebra g (do grupo G). Mais precisamente, suponhamos que temos uma transformação.

$$J_j = \sum_f U(\epsilon)^i_f I_i \quad (VI)$$

$$U(\epsilon = \epsilon_0)^i_j = \delta^i_j \quad (VI)$$

$$\det ||U(\epsilon = 0)|| = 0$$

isto é, para $\epsilon = \epsilon_0$ $U(1)$ é a transformação identidade, mas para $\epsilon = 0$, $U(0)$ é singular. Então as constantes de estrutura com relação a nova base são dadas por:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= C_{ij}^k(\epsilon) J_k \\ [U(\epsilon)^r_i I_r, U(\epsilon)^s_j I_s] &= C_{ij}^k(\epsilon) U(\epsilon)^t_k I_t \\ C_{ij}^k(\epsilon) &= U(\epsilon)^r_i U(\epsilon)^s_j C_{rs}^t(1) U^{-1}(\epsilon)^k_t \end{aligned} \quad (VII)$$

Quando $\epsilon \rightarrow 0$, o limite $C_{ij}^k(\epsilon)$ pode ou não existir. Quando o

limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_{ij}^k(\epsilon) = C_{ij}^k(0) = C'_{ij}^k \quad (\text{VIII})$$

existe e é bem definido, as novas constantes C'_{ij}^k caracterizam uma álgebra de Lie que pode ou não ser isomórfica a a álgebra original.

Se a nova álgebra não for isomórfica a álgebra original ela é dita uma contração da primeira.

I.4.4. Teorema (Inönü-Wigner, [14], pág.513)

Um dado grupo de Lie pode ser contraído com respeito a qualquer um dos seus subgrupos contínuos, e somente com respeito a eles. Chame S o subgrupo com relação ao qual a contração é executada. Os geradores contraídos formam um subgrupo invariante abeliano do grupo contraído. O subgrupo S com relação ao qual a contração é feita isomórfico ao grupo fator deste subgrupo invariante. Inversamente, a existência de um subgrupo invariante abeliano e a possibilidade de escolher de cada um de seus colchetes um elemento de maneira que estes formem um subgrupo S , é a condição necessária para se obter um grupo de outro por contração.

I.4.5. Definição de Operadores de Casimir de uma Álgebra de Lie

Os operadores de Casimir de uma álgebra de Lie g de um grupo de Lie G são os elementos D de $U(g)$ tais que $XD = DX$ para todo $X \in g$. $U(g)$ é a álgebra envolvente [13]

I.5. Definição de Grupo de Cobertura Universal de um Grupo de Lie ([10], pág.108)

Pode-se provar que a correspondência entre os grupos de Lie e as álgebras de Lie não é biunívoca. Muitos grupos de Lie possuem a mesma álgebra. Pode-se provar que entre os grupos de Lie que possuem a mesma álgebra existe

somente um que é simplesmente conexo^(*). Este grupo é chamado o grupo de cobertura universal.

I.6. Operadores em Espaços de Hilbert

I.6.1. Definição de Espaço de Hilbert

Um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos, munido de um produto interno, e completo em relação à norma definida por esse produto interno, diz-se um espaço de Hilbert, e o denotaremos por H .

I.6.2. Definição de Operador Linear

Um operador T , sobre H , diz-se linear se:

$$T(c_1 u + c_2 v) = c_1 T(u) + c_2 T(v); \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}; \quad u, v \in H$$

I.6.3. Definição de Operador Anti-Linear

Um operador T , sobre H , diz-se anti-linear se:

$$T(c_1 u + c_2 v) = \bar{c}_1 T(u) + \bar{c}_2 T(v); \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}; \quad u, v \in H$$

onde \bar{c}_1 e \bar{c}_2 denotam os conjugados de c_1 e c_2 , respectivamente.

I.6.4. Definição de Operador Unitário

Um operador T , sobre H , diz-se unitário se for um operador sobrejetor e preservar o produto interno, isto é, se:

$$i) \quad TH = H$$

$$ii) \quad \langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle; \quad \forall u, v \in H$$

I.6.5. Definição de Operador Regular

Um operador T , sobre H , diz-se regular se for linear ou anti-linear, e bijetor.

(*) ver ref. [28], por exemplo, para as definições topológicas

I.6.6. Definição de Operador Auto-Adjunto

Um operador T , sobre H , diz-se auto-adjunto se:

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle ; \quad \forall u, v \in H$$

I.7. Representação de Grupos

I.7.1. Definição de Representação

Um grupo de operadores lineares $T(g)$ que age em um espaço vetorial V e é homomorfo a um grupo G é dito uma representação de G em V .

No presente trabalho analisamos representações agindo em espaços de Hilbert de dimensão finita ou infinita.

I.7.2. Representações Verdadeiras e Não-Verdadeiras

Se $T(g)$ é um isomorfismo a representação é dita verdadeira, caso contrário ela é dita não-verdadeira.

Nota:

- i.) Um grupo simples pode ter apenas representações verdadeiras ;
- ii) Representações de G que não são isomórficas a G são representações verdadeiras ou isomórficas do grupo quociente G/K onde K é o Kernel do homomorfismo $G \rightarrow T(g)$.

I.7.3. Representações Mecânico-Quânticas (ou Radiais)

Além das representações ordinárias acima definidas, para as quais $\forall g, f \in G$.

$$T(g)T(f) = T(gf)$$

temos que trabalhar na Mecânica Quântica (ver cap. III) com representações "a menos de um fator de fase" e tal que

$$T(g)T(f) = w(g, f)T(g, f) \quad \text{onde} \quad |w(g, f)| = 1 ,$$

uma tal representação é dita radial

Nota:

Entretanto em todos os casos de interesse físico, podemos encontrar um grupo de cobertura G' que contém G como um subgrupo invariante e que possui a

propriedade que o grupo de operadores T é uma representação ordinária de G ([29], pág.32)

I.7.4. Representações Equivalentes e Não-Equivalentes

Qualquer grupo de ordem arbitrária pode ter representações tanto de dimensão finita, como infinita, isto é, o espaço vetorial V definido em I.7.1. pode ter dimensão finita ou infinita (em particular, V pode ser espaço de Hilbert) Dada uma transformação de similaridade

$$T'(g) = A^{-1}T(g)A \quad (\text{I})$$

podemos obter de $T(g)$ uma outra representação $T'(g)$. Entretanto, uma tal transformação pode ser interpretada como o resultado de uma mudança de base no espaço V . Como uma transformação de similaridade não muda qualquer relação algébrica entre operadores, dizemos que $T'(g)$ é equivalente a $T(g)$.

Dadas duas representações $T_1(g)$ e $T_2(g)$ de G em V se elas não estão relacionadas por (I), elas são ditas não-equivalentes.

I.7.5. Representações Redutíveis e Irredutíveis

Dadas duas representações $T_1(g)$ e $T_2(g)$ agindo respectivamente em V_1 e V_2 podemos formar uma nova representação $T(g)$ agindo em $V_1 \oplus V_2$, por

$$T(g) = T_1(g) \oplus T_2(g) ; \quad \text{ou em forma matricial}$$

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}$$

A ação de $T(g)$ em qualquer vetor^(*) $|w\rangle = |x\rangle + |y\rangle$ onde $|x\rangle \in V$ e $|y\rangle \in V$ é dada por

$$T(g)|w\rangle = T_1(g)|x\rangle + T_2(g)|y\rangle$$

Consideremos agora uma representação arbitrária $T(g)$ em V Dizemos que $T(g)$ é redutível se o espaço V contém um sub

(*) Aproveitamos a oportunidade para introduzir a notação de Dirac para vetores

espaço V_1 que é invariante sob $T(g)$, isto é,

$$T(g) |x\rangle = |y\rangle \in V_1, \forall |x\rangle \in V_1, \forall g \in G$$

Se nenhum subespaço de V com a propriedade acima existe, a representação é dita irredutível e o espaço V é dito espaço irredutível.

Uma representação redutível $T(g)$ induz no subespaço invariante V_1 uma representação "mais simples" $T_1(g)$ do grupo G definida por

$$T(g) |x\rangle = T_1(g) |x\rangle, |x\rangle \in V$$

Em uma base ortogonal conveniente em V , pode-se mostrar que as matrizes $T(g)$ tem a forma

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & R(g) \\ 0 & Q(g) \end{pmatrix}$$

I.7.6. Representações Completamente Redutíveis

Uma representação $T(g)$ é chamada completamente redutível se o complemento ortogonal do subespaço invariante V_1 é também invariante. Se $T(g)$ é completamente redutível então $R(g) = 0$ e $Q(g) = T_2(g)$ forma uma outra representação de G que age no complemento ortogonal V_2 de V_1 em V .

I.7.7. Dois Teoremas sobre Representações Redutíveis ([29], pg.34)

T.1) Todas as representações de um grupo semi-simples são completamente redutíveis;

T.2) Representações Unitárias de qualquer grupo são completamente redutíveis.

I.7.8. Representações Unitárias

Se V é um espaço de Hilbert e $T(g)$ é um operador unitário a representação é dita unitária.

No presente trabalho usamos representações de vários grupos nos espaços de Hilbert dos vetores de estado dos sistemas quânticos (ver cap.III). Os postulados gerais da Mecânica Quântica implicam que somente representações unitárias são

admissíveis no espaço dos vetores de estado (cap.III, pg.)

Teorema: Cada representação de um grupo finito ou de um grupo de Lie compacto é equivalente a uma representação unitária.

Nota:

Segue diretamente de T.2) em I.7.7. que os operadores de uma representação unitária $T(g)$ em V são ou irredutíveis ou podem ser reduzidos a uma soma direta de operadores $T(g) = t^1(g) \oplus t^2(g) \oplus \dots$ de representações irredutíveis $t^\alpha(g)$ agindo nos correspondentes subespaços invariantes $V_\alpha \subset V$. O espaço V é então a soma direta

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots$$

desses subespaços invariantes e irredutíveis. O problema de se encontrar todas as representações unitárias não equivalentes de G fica então reduzido ao problema de encontrar todas as representações unitárias irredutíveis.

I.7.9. Conjunto Vetorial Irredutível

Seja $t^\alpha(g)$ uma representação de G em V_α . Um conjunto de vetores $|w_a^\alpha\rangle$ ($a=1, \dots, n_\alpha$) mutuamente ortogonais tal que $T(g) |w_a^\alpha\rangle = t^\alpha(g) |w_a^\alpha\rangle = \sum_{a'=1}^{n_\alpha} t_{aa'}^\alpha(g) |w_{a'}^\alpha\rangle$

é dito um conjunto vetorial irredutível. Se a norma dos vetores $|w_a^\alpha\rangle$ são iguais a 1 eles formam uma base ortonormal no espaço irredutível V_α .

I.7.10. Representações de Grupos de Lie não Compactos

Nos parágrafos anteriores supusemos tacitamente que o número de representações irredutíveis não equivalentes de um grupo era finito ou numerável. Conseqüentemente rotulamos as representações unitárias não-equivalentes com índices discretos e decomparamos representações unitárias arbitrárias em somas de representações irredutíveis. Tal procedimento é absolutamente correto para grupos finitos e grupos de Lie compactos. De fato, valem os teoremas: ([30])

T.1) Qualquer grupo finito tem um número finito de representações irredutíveis, unitárias não-equivalentes;

T.2) Qualquer grupo de Lie compacto possui um número infinito enumerável de representações irredutíveis, unitárias não equivalentes, e todas elas são de dimensão finita.

No presente trabalho teremos que analisar as representações unitárias de grupos não compactos como é o caso dos grupos de Galileu (cap.III), de Poincaré (cap.IV) e do grupo de Galileu relativístico (cap.V).

Para tais grupos valem os teoremas:

T.3) Grupos de Lie não compactos possuem representações não-equivalentes a representações unitárias;

T.4) Grupos de Lie não compactos possuem uma quantidade não numerável de representações unitárias não equivalentes, e todas elas de dimensão infinita ([30]).

Nota:

Nestes casos somos forçados a introduzir representações contínuas e índices vetoriais contínuos e trocar as somas por integrais. Tal é necessário por exemplo no caso do grupo de Poincaré (cap.IV).

CAPÍTULO II

GRUPO DE GALILEU

II.1. Mecânica clássica

Objetos físicos Newtonianos ocupam volume no espaço euclidiano E^3 , e a variação da posição, de qualquer um deles, com o tempo, é feita da maneira contínua e depende das interações com os outros corpos. Como um caso limite, uma partícula Newtoniana é um objeto físico que ocupa um volume praticamente desprezível e pode ser considerada como um ponto em E^3 . A cada partícula é atribuído, digamos, um nome intrínseco, que é a sua massa.

Na formulação Lagrangeana, um dado observador descreve um sistema físico S , constituído por N partículas, através de $3N$ coordenadas que definem o espaço de configurações. Se as q_j são, por exemplo, coordenadas cartesianas, ele compara, as projeções dos vetores posição das partículas sobre os eixos X , Y e Z , com uma dada unidade de comprimento, para estabelecer os valores das coordenadas q_j . Para definir o tempo t , em que um evento ocorre, o observador O , estabelece uma correspondência entre esse evento e um sistema constituído por uma família de relógios sincronizados, supostos idealmente distribuídos no espaço. O observador define a velocidade generalizada

$$\dot{q}_j = dq_j/dt.$$

Para cada sistema, que não está sujeito a campos externos, podemos atribuir uma função L que pode ser dependente das coordenadas q_j , das velocidades \dot{q}_j e também explicitamente do tempo, de tal maneira que a evolução desse sistema é conhecida pelo observador O , e é dada pelas chamadas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q_k, \dot{q}_k, t)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L(q_k, \dot{q}_k, t)}{\partial q_j} = 0 \quad (2.1)$$

O observador O , também define como componentes do momento generalizado as quantidades.

$$p_j = \frac{\partial L(q_k, \dot{q}_k, t)}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.2)$$

Um outro observador \bar{O} , que realiza a mesma espécie de medidas sobre o sistema físico S , usa como coordenadas Lagrangeanas as coordenadas das partículas em relação a seu sistema de referência e usa como \bar{t} , o mesmo t usado por O . O observador \bar{O} estabelece a relação entre suas coordenadas Lagrangeanas \bar{q}_j e aquelas usadas por O :

$$\bar{q}_j = q_j(q_k, t) \quad (2.3)$$

As equações de movimento que $\bar{\theta}$ obtêm são dadas pelas equações de Euler-Lagrange (2.1), onde em lugar de q_j, \dot{q}_j e

$L(q_k, \dot{q}_k, t)$, teremos $\bar{q}_j, \dot{\bar{q}}_j$ e

$$\bar{L}(\bar{q}_j, \dot{\bar{q}}_j, t) = L(q_k(\bar{q}_j, t), \dot{q}_k(\bar{q}_j, \dot{\bar{q}}_j, t), t) \quad (2.4)$$

respectivamente. Para encontrar seus momentos generalizados, $\bar{\theta}$ usa \bar{L} e $\dot{\bar{q}}$ em (2.2).

Se $\bar{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = L(q_j, \dot{q}_j, t)$, ou seja, a Lagrangeana é invariante sob a transformação considerada, as equações de movimento obtidas por $\bar{\theta}$, são as mesmas que as obtidas por θ . Dizemos então, que a natureza é simétrica para a transformação considerada ligando θ e $\bar{\theta}$.

Na formulação de Hamilton, os momentos, bem como as coordenadas espaciais, são encarados como variáveis independentes, e neste caso deveremos utilizar não mais o espaço de configurações, mas sim o chamado espaço de fase, de $6N$ coordenadas.

Com a Hamiltoniana H , definida por:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad (2.5)$$

Obtemos as equações de movimento na forma canônica de Hamilton:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}; \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.6)$$

O grupo de simetrias mais geral da mecânica clássica é constituído pelas transformações canônicas do espaço de fase, ou seja por aquelas que deixam invariante a 2-forma:

$$w = \sum d\bar{q}_i \wedge d\bar{p}_i; \quad (2.7)$$

onde \wedge é o produto exterior ([28])

ou dizendo de outra forma, são aquelas que fornecem dois novos conjuntos de variáveis \bar{q}_j e \bar{p}_j relacionadas por:

$$\dot{\bar{p}}_j = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_j}; \quad \dot{\bar{q}}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_j} \quad (2.8)$$

com \bar{H} , definido por:

$$\bar{H} = \sum_j \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - \bar{L}$$

Antes de estudarmos o grupo de Galileu da mecânica clássica, que constitui um de nossos objetivos, analisaremos dois grupos mais simples, e usaremos pela primeira vez o conceito de extensão de um grupo, que nos será útil ainda por diversas vezes.

II.2. Grupo de Galileu

Chamamos grupo de rotações em três dimensões, e denotaremos por $O(3)$, ao grupo das transformações ortogonais sobre E^3 . Essas transformações sobre E^3 caracterizam-se por deixar $x^2 + y^2 + z^2$ invariante.

A matriz A de uma transformação ortogonal sobre E^3 deve satisfazer

$$A \cdot A^t = I_3, \text{ onde } A^t \text{ é a transposta da matriz } A \quad (2.9)$$

Desde que o determinante da matriz transposta é igual ao determinante da matriz, nós obtemos de (2.9)

$$(\det A)^2 = 1 \quad \text{ou ainda} \quad \det A = \pm 1.$$

As rotações que satisfazem $\det A = +1$ são chamadas rotações próprias. O conjunto das rotações próprias munido da operação de composição é um subgrupo de $O(3)$ e o denotaremos por $SO(3)$.

Para a física, as extensões mais interessantes desse grupo são: o grupo Euclidiano conexo e o grupo Galileano.

Grupo Euclidiano Conexo - é definido como o produto se mídireto dos grupos T_3^a (grupo das translações espaciais) e $SO(3)$, ou seja:

$$ISO(3) = T_3^a \otimes SO(3) \quad (2.10)$$

T_3^a é um subgrupo abeliano invariante de $ISO(3)$.

Geradores da álgebra de Lie do grupo de Lie $SO(3)$

$$\begin{aligned} J_1 &= i \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) ; \\ J_2 &= i \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right) ; \\ J_3 &= i \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) ; \end{aligned} \tag{2.11}$$

Geradores da álgebra de Lie do grupo de Lie T_3^a

$$P_1 = i \frac{\partial}{\partial x} ; \quad P_2 = i \frac{\partial}{\partial y} ; \quad P_3 = i \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.12}$$

Esses geradores, com suas propriedades de comutação específicas, definem a álgebra de Lie do grupo de Lie $ISO(3)$.

$$\begin{aligned} [P_k, P_l] &= 0 ; \\ [J_k, P_l] &= i \epsilon_{kln} P_n ; \\ [J_k, J_l] &= i \epsilon_{kln} J_n ; \quad \forall k, l, n \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde $\epsilon_{kln} = \begin{cases} 1 & \text{se } (k, l, n) \text{ é uma permutação par} \\ -1 & \text{se } (k, l, n) \text{ é uma permutação ímpar} \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$

Com os operadores de Casimir invariantes da álgebra:

$$\begin{aligned} C^1 &= \vec{P}^2 \\ C^2 &= \vec{P} \cdot \vec{J} \end{aligned} \tag{2.14}$$

O grupo Euclidiano conexo, constitui a componente identidade do grupo de simetrias da física não relativística.

Para podermos formular a dinâmica dos sistemas, há necessidade de introduzirmos uma variável cinemática adicional que é o tempo t . Com essa nova entidade, nosso espaço E^3 deve se alargar para o produto $E^3 \times E^1$, ou seja, se quisermos uma formulação dinâmica, deveremos utilizar não $ISO(3)$ mas sim o grupo de Galileu, que é um grupo de automorfismos em $E^3 \times E^1$.

Grupo de Galileu - em mecânica clássica não relativística, a teoria de um sistema, que não está sujeito a campos externos, é considerada invariante sob as transformações do grupo de Galileu, que contém as translações no espaço e tempo, as rotações próprias no espaço, e as transições a um sistema de coordenadas movendo-se uniformemente em relação a um referencial inercial. Denotaremos, daqui por diante, esse grupo por \mathcal{G}_4 .

Os 4 subgrupos que o compõem são:

$$\begin{aligned} \text{a) } T_3^a; & \text{ translações no espaço } \vec{x} = \vec{x} + \vec{a} \\ \text{b) } SO(3); & \text{ rotações próprias } \vec{x} = R\vec{x} \\ \text{c) } T_1^t; & \text{ translações no tempo } \vec{t} = t + \tau \\ \text{d) } T_3^v; & \text{ acelerações } \vec{x} = \vec{x} + \vec{v}t \end{aligned} \tag{2.15}$$

A invariância sob (a), (b) e (c), significa que não há uma origem preferida no espaço ou no tempo, e nem existem direções privilegiadas. A invariância sob (d) significa que sistemas com diferentes velocidades constantes são equivalentes.

\mathcal{G}_4 é um grupo de Lie de dez parâmetros. Indicando por $(\vec{a}, \tau, \vec{v}, R)$ o elemento geral do grupo, temos que:

$$\begin{aligned} (\vec{a}_1, 0, 0, I) (\vec{a}_2, 0, 0, I) &= (\vec{a}_2, 0, 0, I) (\vec{a}_1, 0, 0, I) = \\ &= (\vec{a}_1 + \vec{a}_2, 0, 0, I) \end{aligned} \quad (2.16a)$$

$$\begin{aligned} (0, \tau_1, 0, I) (0, \tau_2, 0, I) &= (0, \tau_2, 0, I) (0, \tau_1, 0, I) = \\ &= (0, \tau_1 + \tau_2, 0, I) \end{aligned} \quad (2.16b)$$

$$\begin{aligned} (0, 0, \vec{v}_1, I) (0, 0, \vec{v}_2, I) &= (0, 0, \vec{v}_2, I) (0, 0, \vec{v}_1, I) = \\ &= (0, 0, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, I) \end{aligned} \quad (2.16c)$$

$$(0, 0, 0, R_1) (0, 0, 0, R_2) = (0, 0, 0, R_1 R_2) \quad (2.16d)$$

$$(\vec{a}, 0, 0, I) (0, \tau, 0, I) = (0, \tau, 0, I) (\vec{a}, 0, 0, I) \quad (2.16e)$$

$$(\vec{a}, 0, 0, I) (0, 0, \vec{v}, I) = (0, 0, \vec{v}, I) (\vec{a}, 0, 0, I) \quad (2.16f)$$

$$(0, 0, 0, R) (\vec{a}, 0, 0, I) = (R\vec{a}, 0, 0, I) (0, 0, 0, R) \quad (2.16g)$$

$$\begin{aligned} (0, 0, \vec{v}, I) (0, \tau, 0, I) &= (-\tau\vec{v}, 0, 0, I) (0, \tau, 0, I) (0, 0, \vec{v}, I) = \\ &= (-\tau\vec{v}, \tau, \vec{v}, I) \end{aligned} \quad (2.16h)$$

$$(0, \tau, 0, I) (0, 0, 0, R) = (0, 0, 0, R) (0, \tau, 0, I) \quad (2.16i)$$

$$(0, 0, 0, R) (0, 0, \vec{v}, I) = (0, 0, R\vec{v}, I) (0, 0, 0, R) \quad (2.16j)$$

Usando as relações (2.16a) à (2.16j), podemos calcular o produto de duas transformações

$$(\vec{a}_1, \tau_1, \vec{v}_1, R_1) (\vec{a}_2, \tau_2, \vec{v}_2, R_2) = (\vec{a}, \tau, \vec{v}, R) \quad (2.17)$$

onde: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \tau_2 \vec{v}_1 + R_1 \vec{a}_2$

$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + R_1 \vec{v}_2$$

$$R = R_1 R_2$$

elemento inverso:

$$(\vec{a}, \tau, \vec{v}, R)^{-1} = (R^{-1}(\tau \vec{v} - \vec{a}), -\tau, -R^{-1} \vec{v}, R^{-1}) \quad (2.18)$$

o elemento unitário:

$$(0, 0, 0, I)$$

O grupo G_4 possui, então a estrutura:

$$G_4 = \{T_3^a \times T_1^\tau\} \otimes \{T_3^v \otimes SO(3)\} \quad (2.19)$$

que é bastante complexa em relação ao grupo de Lorentz ou o de Poincaré. O subgrupo invariante abeliano máximo do grupo de Galileu, é um grupo de seis parâmetros v (translações no espaço + acelerações). O grupo fator G_4/v por si próprio admite um subgrupo de um parâmetro invariante T_1^τ que é o das translações no tempo, e é somente o grupo fator $(G_4/v)/T_1^\tau$ que é um grupo simples $SO(3)$ das rotações próprias.

Sua álgebra de Lie tem a base:

H - translações no tempo;

J_k - rotações

P_k - translações no espaço;

G_k - acelerações,

com as transformações:

$$[J_k, J_\ell] = i\epsilon_{k\ell n} J_n \quad (2.20a)$$

$$[J_k, P_\ell] = i\epsilon_{k\ell n} P_n \quad (2.20b)$$

$$[J_k, G_\ell] = i\epsilon_{k\ell n} G_n \quad (2.20c)$$

$$[G_k, H] = iP_k \quad (2.20d)$$

$$[G_k, P_\ell] = 0 \quad (2.20e)$$

$$[P_k, P_\ell] = [G_k, G_\ell] = [P_k, H] = [J_k, H] = 0 \quad (2.20f)$$

Essa álgebra é então, a soma semi-direta da álgebra de rotação J e uma álgebra solúvel de 7 dimensões composta dos dois vetores comutantes P e G e um escalar H , que projeta G em P e comuta com P .

Os operadores de Casimir são idênticos aos do grupo $ISO(3)$, equação (2.14).

As transformações canônicas que deixam a forma w (eq.(2.7)) invariante também deixam o parêntese de Poisson $\{X, Y\} = \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial q_i} - \frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial Y}{\partial p_i} \right)$ invariante. Uma das propriedades mais importantes das transformações Galileanas é a de ser justamente, um caso especial das transformações canônicas.

Para os grupos desse tipo de transformações, se $f = f(p, q)$ é uma certa função regular de variáveis p e q e se σ é um parâmetro de um subgrupo de Lie simplesmente conexo de um parâmetro, então a variação dessa função, em relação a esse parâmetro é:

$$\frac{df}{d\sigma} = \{g, f\} \quad (2.21)$$

onde $g(p, q)$ é chamada de função geratriz do subgrupo de um parâmetro. As relações de transformação podem ser deduzidas através do conhecimento de $g(p, q)$.

Quando tivermos um subgrupo de Lie de transformações de contacto de n parâmetros α, β, \dots pode-se provar que as funções geratrizes para os subgrupos de um parâmetro g_α, g_β, \dots cumprem as relações:

$$\{g_\gamma, g_\beta\} = c_{\alpha\beta}^\gamma g_\gamma + \lambda_{\alpha\beta} \quad (2.22)$$

onde $c_{\alpha\beta}^\gamma$ são constantes de estrutura do grupo e $\lambda_{\alpha\beta}$ são constantes, cujo número pode ser diminuído e em certos casos completamente eliminadas, através de transformações:

$$g_\alpha \rightarrow g_\alpha + \lambda_\alpha.$$

Concluimos que sob a operação de parênteses de Poisson, as funções geratrizes g_α de um grupo de Lie de transformações de contacto formam uma representação (a menos das constantes $\lambda_{\alpha\beta}$) da álgebra de Lie desse grupo.

Podemos agora encontrar as funções geratrizes da álgebra Galileana que têm as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} P &= \sum P_i \\ H &= \sum \frac{1}{2m_i} P_i^2 \\ J &= \sum x_i \times p_i \\ G &= \sum m_i x_i - Pt \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde $p_i = m_i \frac{dx_i}{dt}$

Quando calculamos os parênteses de Poisson, para as funções geratrizes acima, obtemos a álgebra de Lie, a menos de constantes. Devido à estrutura do grupo Galileano, apenas uma constante não pode ser eliminada, especificamente, a massa total, que aparece nos parênteses:

$$\{P_k, G_\ell\} = m \cdot \delta_{k\ell} \tag{2.24}$$

Como verificamos, o gerador para a translação no espaço é o momento linear, para a translação no tempo é a Hamiltoniana, e para as rotações é o momento angular. As funções geratrizes desempenham um duplo papel, pois são ao mesmo tempo observáveis e geratrizes de transformações de grupo no sentido dos parênteses de Poisson.

Embora o grupo de Galileu seja um grupo de invariância das equações de Newton, ele não é um grupo de invariância da Hamiltoniana, ou das equações de movimento de Hamilton. Isso é compreensível uma vez que a escolha da Hamiltoniana força a escolha da direção para o eixo t em $E^3 \times E^1$ e assim destrói a invariância Galileana.

Referências: [01], [02], [09], [16], [22], [28].

CAPÍTULO III

GRUPO DE GALILEU QUÂNTICO

III.1. Mecânica Quântica

Por volta de 1865, ainda se acreditava que as Leis de Newton, bem como o formalismo Hamiltoniano, bastavam para explicar todos os fenômenos físicos. Estava também solidificado o Princípio de Semelhança de Fourier, o qual afirmava que o comportamento de dois sistemas físicos semelhantes, sendo um deles menor que o outro, era o mesmo.

Com a descoberta da estrutura atômica da matéria, verificou-se que o Princípio de Semelhança de Fourier não era mais válido, o mesmo acontecendo com a Teoria Newtoniana, que se tornou insuficiente para explicar os novos fenômenos que emergiam dessa descoberta. No início deste século surgiram a Teoria Quântica e a Teoria Relativística, que se mostraram Teorias mais amplas que a Teoria Newtoniana. Neste capítulo faremos considerações, apenas, sobre a Teoria Quântica e deixaremos o próximo capítulo para focar a união das duas teorias.

O fato de que, a emissão de radiação, por elétrons em revolução ao redor de núcleos, exibia um caráter discre

to, e não contínuo como era predito classicamente, levou alguns físicos à conclusão de que alguma mudança de veria ser feita com respeito à Hamiltoniana, para o elétron num átomo.

$$H = \frac{1}{2m} p^2 - \frac{Ze^2}{r} \quad (3.1)$$

Teorias incompletas se construíram, como a velha Teoria Quântica, que impunha condições extras, mas mantinha a Hamiltoniana clássica inalterada. Schrödinger e Heisenberg foram mais radicais e através de dois processos diferentes, optaram por interpretar H como um operador e conseqüentemente as funções x e p se converteram em operadores X e P.

A suposição arrojada de de Broglie de que partículas livres exibiam um comportamento ondulatório, ou seja, difratavam como a luz ao passarem por grades suficientemente finas, levou Schrödinger, ao comparar a equação da onda relativista com a relação clássica momento energia para uma partícula livre de massa m, a concluir que P seria o operador

$$P = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.2)$$

e postulou que essa identificação persistiria no limite

não relativístico, mesmo na presença de um potencial.

A suposição nova feita pela teoria quântica foi substituir as funções x e p que descrevia as partículas clássicas, por operadores lineares X e P atuantes num espaço de Hilbert, que satisfazem a relação:

$$[X, P] = ih \quad (3.3)$$

As equações de movimento (2.6) continuaram a ser aceitas, porém com x e p substituídos pelos operadores X e P e a Hamiltoniana $H(x, p)$, sendo recolocada por $H(X, P)$.

Outro conceito introduzido pela mecânica quântica e que não possui análogo clássico é o conceito de spin de uma partícula. As experiências feitas por Stern e Gerlach em 1924, e que consistiam em fazer uma partícula atravessar uma região de campo magnético não uniforme, levaram Pauli a postular que era necessário atribuir mais um grau de liberdade para cada partícula: aquele ligado ao seu momento angular intrínseco ou spin.

A transformação de funções em operadores e a nova relação de comutação, nos levam a questionar como um observador descreve completamente um sistema mecânico quântico.

III.2. Descrições e Transformações de Sistemas

A Teoria Quântica, exprime os possíveis resultados de um

determinada experiência, em termos de relações entre elementos de um espaço de Hilbert, H . Para cada vetor unitário Ψ_0 , $\Psi_0 \in H$, o conjunto $\left\{ \Psi: \Psi = \Psi_0 \tau \text{ onde } \tau \in \mathbb{C} \text{ e } |\tau| = 1 \right\}$ é chamado raio unitário em H . A cada estado quântico associamos um único raio unitário, e qualquer afirmação significativa em Teoria Quântica é uma afirmação sobre raios unitários.

A probabilidade de transição de um estado Ψ a um estado Φ é definida por $p(\Psi, \Phi) = |\langle \Psi, \Phi \rangle|^2$, a qual, é fácil verificar, independe da escolha dos representantes dos raios unitários, Ψ e Φ .

O espaço de Hilbert de um sistema quântico é completamente caracterizado, dando todas as relações algébricas, entre os membros de um conjunto irredutível de operadores lineares autoadjuntos, que representam observáveis físicos. Por irredutível queremos dizer uma família de operadores lineares, que comutam entre si, e tal que não exista nenhum outro operador linear comutando com todos os membros do conjunto além dos múltiplos do operador identidade.

Os únicos resultados possíveis de uma medida, de um observável, são dados pelos autovalores do operador autoadjunto associado a esse observável.

É suposto que entre todos os observáveis de um sistema, seja possível extrair um subconjunto Γ , de tal forma que o

conjunto dos operadores correspondentes seja irredutível. Esse conjunto Γ é chamado de Abeliano máximo. Dado um conjunto, arbitrariamente escolhido, de autovalores dos operadores de Γ , existe em correspondência um único raio unitário no espaço de Hilbert, que é o auto raio de todos os operadores de Γ .

Em mecânica quântica além de se considerar a correspondência biunívoca entre estados do sistema e raios do espaço de Hilbert, supõem-se que todos os operadores auto-adjuntos são observáveis. Esses dois itens implicam no princípio de superposição. A natureza, no entanto, sugere que nem todos os raios unitários do espaço de Hilbert, de certos sistemas físicos, são fisicamente realizáveis. Por exemplo, não é possível produzir um estado que seja a superposição de estados com diferentes valores da carga total Q , ou do número bariônico B .

A afirmação mais coerente com os fatos experimentais, seria dizermos que na natureza os únicos vetores fisicamente realizáveis são autovetores simultâneos de um conjunto de observáveis θ . Os operadores pertencentes a θ definem uma regra de superseleção. O espaço de Hilbert é decomposto em subespaços ortogonais, chamados subespaços coerentes, nos quais cada um dos operadores, definindo uma regra de superseleção, tem um valor definido. Os observáveis considerados são operadores auto-adjuntos

que comutam com todos os operadores de θ . Conseqüentemente o conjunto de todos os observáveis não é irredutível.

Nosso interesse principal está em estudar a teoria das transformações da mecânica quântica, ou seja, examinar as relações existentes entre as descrições dadas por diferentes observadores para o mesmo sistema físico.

Segundo Wigner-Haag, o princípio de invariância pode ser colocado na forma de três postulados:

- i) deve ser possível transladar uma descrição completa de um sistema físico, de um sistema de coordenadas para outro sistema de coordenadas equivalente.
- ii) a translação de uma descrição dinamicamente possível deve ser ainda uma descrição dinamicamente possível.
- iii) o critério da possibilidade dinâmica de descrições completas deve ser idêntico para observadores distintos.

Suporemos que em mecânica quântica esses três postulados são satisfeitos.

Dizemos que duas descrições de um sistema mecânico quântico são isomórficas se existir uma correspondência biunívoca T entre raios unitários que preserve a probabilidade de transição. Isto é, se existir um operador ra

dial T tal que

$$\text{Se } \phi_{\bar{o}}(t) = T\phi_o(t) \quad \text{e} \quad \Psi_{\bar{o}}(t) = T\Psi_o(t) \quad (3.4)$$

$$\text{então } |\langle \phi_{\bar{o}}(t), \Psi_{\bar{o}}(t) \rangle| = |\langle \phi_o(t), \Psi_o(t) \rangle|$$

Podemos justificar essa afirmação dizendo que a probabilidade do sistema fazer qualquer transição particular não pode mudar para diferentes observadores, porque o sistema não toma conhecimento de quem o observa.

Dizemos que um mapeamento vetorial T é compatível com o mapeamento radial T se para cada $\psi \in \Psi$, $T\psi \in T\Psi$.

Dentre os infinitos mapeamentos vetoriais compatíveis com um dado mapeamento radial, que satisfaz a equação (3.4), existe um mapeamento vetorial que é representado por um operador linear unitário, ou por um operador antilinear unitário. A linearidade ou antilinearidade do mapeamento vetorial é característica do mapeamento radial T . Contudo, o mapeamento vetorial é único, a menos de um fator de fase independente de ψ . (Wigner)

Consideremos agora um grupo de transformações $T(g)$. Para cada g fixo, $T(g)$ pode ser substituída por uma transformação unitária, linear ou anti linear. $T(g)$ é única a menos de um fator de fase $\exp i\delta(g)$. Usando a relação de grupo

$$T(g) \cdot T(g') = T(g.g') , \quad (3.5)$$

segue que

$$T(g) \cdot T(g') = T(g.g') \cdot \exp iw(g,g') , \quad (3.6)$$

onde $w(g,g')$ é um número real. Portanto qualquer grupo de transformações preservando a probabilidade (3.4) é equivalente a um conjunto de transformações unitárias, lineares ou antilineares, formando o que se chama de uma representação radial do grupo. O nome radial é justificado porque o fator e^{iw} é irrelevante para raios. O conjunto de fatores de fase $w(g,g')$ é denominado de sistema fator.

III.3. Grupo de Galileu Quântico

Vejamos agora o que acontece com o nosso grupo de Galileu clássico quando o transformamos em quântico.

As funções geratrizes clássicas devem ser substituídas pelos operadores quânticos correspondentes, da mesma forma que as funções x , p e H se transformam em operadores. Escrevendo-as novamente; temos:

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} \cdot P_i^2$$

$$J = \sum_i X_i \times P_i \quad (3.7)$$

$$P = \sum_i P_i$$

$$G = \sum_i m_i X_i - Pt$$

Incluindo a relação de Heisenberg $[X, P] = ih$, temos que:

$$[J_k, J_\ell] = i\epsilon_{k\ell n} J_n \quad (3.8a)$$

$$[J_k, P_\ell] = i\epsilon_{k\ell n} P_n \quad (3.8b)$$

$$[J_k, G_\ell] = i\epsilon_{k\ell n} G_n \quad (3.8c)$$

$$[G_k, P_\ell] = i\delta_{k\ell}^m \quad (3.8d)$$

$$[G_k, H] = iP_k \quad (3.8e)$$

$$[P_k, P_\ell] = [G_k, G_\ell] = [J_k, H] = [P_k, H] = 0 \quad (3.8f)$$

A única diferença entre essas relações e suas análogas clássicas é a (3.8d), que ocorre nas relações de parênteses de Poisson, mas não na álgebra de Lie de \mathcal{G}_4 . Como a operação de comutação é muito mais simples e direta que a operação parêntese de Poisson, a teoria dos grupos desempenha um papel central em mecânica quântica, enquanto que para a mecânica clássica desempenha apenas um papel secundário.

Os operadores de Casimir da álgebra são:

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2m} p^2 - H \quad (3.9)$$

$$\mathcal{N} = F^2 \quad (3.10)$$

$$F_k = J_k + \frac{1}{m} \epsilon_{klj} p_l G_j$$

III.4. Representações do Grupo Quântico

Com exceção do termo $\delta_{kl}m$ em (3.8d), teríamos a álgebra de Lie de \mathcal{G}_4 , porém como ele comuta com todos os g_α , não pode haver grandes diferenças entre a representação do grupo quântico sobre o espaço de Hilbert H , com a de \mathcal{G}_4 sobre H , que é uma representação unitária formada por subgrupos a um parâmetro de \mathcal{G}_4 gerados por g_α . Com o surgimento de $\delta_{kl}m$, a representação das operações de grupo no espaço de Hilbert de um sistema quantizado, não é uma representação unitária verdadeira, e sim uma representação unitária radial (ou projetiva). Os números experimentais que podem ser extraídos da teoria quântica são as probabilidades, e estes não fazem distinção entre vetores de um mesmo raio unitário. Conseqüentemente, os números experimentais não fazem distinção entre representações radiais unitárias e representações unitárias verdadeiras. Isso implica no aparecimento das representações radiais e do termo $\delta_{kl}m$, que está ligado ao fator exponencial.

Consideremos a Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} P^2 + \varphi(x) \quad (3.11)$$

para uma única partícula num potencial externo.

Se H é um operador auto-adjunto, num domínio D , sobre o qual:

- a) X e P são simétricos.
- b) $X^2 + P^2$ é auto-adjunto
- c) $[X, P] = ih$
- d) o único operador limitado que comuta com X e P é um múltiplo do operador unidade.

então pelo teorema de Stones, existe um único grupo contínuo a um parâmetro, de transformações unitárias, $U(t)$, sobre H , tal que:

$$\frac{dU(t)}{dt} = HU(t) \quad \text{sobre } D \quad (3.12)$$

As equações de movimento Newtonianas são as mesmas em mecânica clássica e quântica. Assim;

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{m} P, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \quad (3.13)$$

e ainda $[X, P] = ih$

Levando em conta essas equações, vemos que, no caso da mecânica quântica temos:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{i}{h} \cdot [H, X] ; \quad \frac{dP}{dt} = \frac{i}{h} \cdot [H, P] \text{ sobre } D \quad (3.14)$$

Se supomos que o domínio D é invariante com respeito a $U(t)$ segue que:

$$X(t) = U(t) \cdot X(0) \cdot U^{-1}(t) ; \quad P(t) = U(t) \cdot P(0) \cdot U^{-1}(t) \quad (3.15)$$

Assim $U(t)$ é o grupo de translações do tempo. Em mecânica quântica da mesma maneira que em mecânica clássica, H, P, J e G desempenham um papel duplo. São observáveis físicos e geradores do grupo de translações no tempo, translações no espaço, rotações e acelerações.

Se σ é um parâmetro:

$$\frac{dF}{d\sigma} = \frac{i}{h} [G_\sigma, F] \quad \sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_{10} \quad (3.16)$$

onde F é um observável e G_σ um dos dez operadores (3.8)

Voltando a nossa notação para os operadores unitários representando as transformações de Galileu, $U(a, \tau, v, R)$, podemos escrever para as transformações elementares quânticas:

$$U(a, 0, 0, I) = \eta_a \exp \left[\frac{i}{h} P \cdot a \right] \quad (3.17a)$$

$$U(0, \tau, 0, I) = \eta_I \exp \left[\frac{i}{h} H\tau \right] \quad (3.17b)$$

$$U(0, 0, v, I) = \eta_V \exp \left[\frac{i}{h} (mX - Pt) \cdot v \right] \quad (3.17c)$$

$$U(0, 0, 0, R) = \eta_R \exp \left[\frac{i}{h} J \cdot n\omega \right] \quad (3.17d)$$

$\eta_a, \eta_I, \eta_V, \eta_R$ são fatores de fase.

III.5. Determinação do Fator de Fase $w(g, g')$

Das equações (3.14), segue que:

$$H = -ih \frac{d}{dt} \quad (3.18)$$

Tomando o operador de Casimir (3.9) e levando em conta que

$$H = -ih \frac{d}{dt} \quad \text{e} \quad P_j = -ih \frac{\partial}{\partial x_j}$$

encontramos a equação de autovalores:

$$\frac{i}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \Delta \psi = \mathcal{B} \psi \quad (3.19)$$

ou equação de Schrödinger. Consideremos o caso de uma partícula livre e sem spin, portanto \mathcal{B} é uma constante.

O que desejamos é estudar as propriedades de invariância da equação de Schrödinger com respeito ao grupo de transformação de Galileu.

Na transformação mais geral:

$$\begin{aligned} x' &= Rx + vt + a \\ t' &= t + \tau \end{aligned} \tag{3.20}$$

No novo sistema de referência, o estado precisa ser descrito por algum vetor ou função ψ' . As previsões físicas, que extraímos das suas descrições, serão idênticas se, e somente se, a função de onda transformada, em qualquer ponto, diferir da função de onda original, no ponto transformando, por apenas um fator de fase

$$\psi'(x, t) = e^{-if(x', t')} \cdot \psi(x', t') \tag{3.21}$$

A nova função de onda precisa satisfazer a equação de Schrödinger:

$$i \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \frac{1}{2m} \Delta \psi' = \mathcal{B} \psi' \tag{3.22}$$

As transformações que ocorrem nos operadores são:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + v \cdot \nabla' \tag{3.23}$$

$$\nabla = R \nabla'$$

A equação de Schrödinger para a nova função de onda pode ser escrita como uma equação em f e em ψ :

$$\left[\frac{i}{h} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{i}{h} v \cdot \nabla' - \mathcal{B} + \frac{1}{2m} \Delta' \right] e^{-if(x', t')} \cdot \psi(x', t') = 0 \tag{3.24}$$

Expandindo:

$$\left[\frac{i}{h} \frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{v}{h} \cdot \nabla' f - \frac{1}{2m} \cdot \nabla' f \right] e^{-if} \psi - i \left[\frac{v}{h} + \right. \\ \left. - \frac{1}{m} \nabla' f \right] e^{-if} \cdot \nabla' \psi + e^{-if} \left[\frac{i}{h} \frac{\partial}{\partial t'} - \mathcal{B} + \frac{1}{2m} \nabla' \right] \psi = 0 \quad (3.25)$$

Como $\psi(x, t)$ satisfaz a equação de Schrödinger (3.19) é necessário que:

$$\nabla' f - \frac{mv}{h} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{i}{h} \frac{\partial f}{\partial t'} - \frac{1}{2m} \nabla' f + \frac{mv^2}{h^2} = 0$$

Integrando essas equações encontramos:

$$f(x', t') = \frac{m}{h} v \cdot x' - \frac{1}{2} \frac{m}{h} v^2 t' + C \quad (3.27)$$

onde C é uma constante. E em mecânica quântica, o fator de fase não pode ser eliminado. As propriedades de transformação da equação de Schrödinger se tornam:

$$\psi'(x', t') = \exp \left\{ -\frac{im}{h} \left[v \cdot x' - \frac{1}{2} v^2 t' - C' \right] \right\} \psi(x, t) \quad (3.28)$$

onde $x' = Rx + vt + a$

$t' = t + \tau$

Para determinarmos o fator de fase que surge na composição de duas transformações, usemos o seguinte procedimento:

Denotaremos por g , a transformação que opera sobre as quatro variáveis x e t , que indicamos resumidamente por X .

$$X' = gX \quad \text{ou} \quad X = g^{-1}.X' \quad (3.29)$$

Para as variáveis transformadas X' , a solução correspondente da equação de Schrödinger é como vimos:

$$\psi'(X') = e^{-if(g, X')} \cdot \psi(g^{-1}.X') \quad (3.30)$$

Denotando por Tg um operador linear que atua sobre as funções de onda, transformando-as como em (3.28), temos:

$$\psi' = Tg\psi ; \quad \psi'(X) = e^{-if(g, X)} \cdot \psi(g^{-1}.X) \quad (3.31)$$

Comparando as duas funções ψ_1 e ψ_2 , onde

$$\psi_1 = Tg Tg'\psi ; \quad \psi_2 = Tgg'\psi \quad (3.32)$$

e fazendo $\psi_3 = Tg'\psi$ teremos:

$$\psi_1(X) = e^{-if(g, X)} \cdot \psi_3(g^{-1}X) \quad (3.33)$$

$$= e^{-if(g, X) - if(g', g^{-1}X)} \cdot \psi((gg')^{-1}X)$$

$$\psi_2(X) = e^{-if(gg', X)} \cdot \psi((gg')^{-1}X) \quad (3.34)$$

Como as duas expressões (3.33 e 3.34) devem igualar-se a menos de um fator:

$$\psi_1(x) = e^{-i [f(g, x) + f(g', g^{-1}x) - f(gg', x)]} \psi_2(x) \quad (3.35)$$

Finalmente a expressão de $w(g, g')$ é

$$w(g, g') = \frac{1}{2} m (aRv' - vR'a' + \tau'vRv') \quad (3.36)$$

com as transformações:

$$g = (a, \tau, v, R) \quad e \quad g' = (a', \tau', v', R')$$

III.6. Estrutura do Grupo de Galileu Quântico

Bargman em 1954 demonstrou que as representações físicas do grupo de Galileu são obtidas das representações unitárias projetivas (radiais) de seu grupo de cobertura universal.

O grupo de cobertura universal de G_4 é obtido trocando as rotações pertencentes a $S0(3)$ pelos elementos do grupo $SU(2)$ constituído pelas matrizes 2×2 unitárias unimodulares (de determinante +1). $SU(2)$ tem as propriedades de ser um grupo de Lie de grau 1, compacto, conexo, simples e simplesmente conexo. Os geradores do grupo são:

$$\Sigma_1 = -\frac{i}{2} \sigma_x \quad ; \quad \Sigma_2 = -\frac{i}{2} \sigma_y \quad ; \quad \Sigma_3 = -\frac{i}{2} \sigma_z \quad (3.37)$$

onde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, são as matrizes de Pauli. As relações de comutação são:

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} \Sigma_k \quad (3.38)$$

com o operador de Casimir:

$$C = \sum_{i=1}^3 \sum_i^2 \quad (3.39)$$

Como a álgebra tem grau 1, as representações unitárias, irredutíveis, de dimensão finita e inequivalentes, podem ser unicamente caracterizadas, especificando o valor constante C no espaço da representação.

Para compreendermos melhor essa extensão voltemos ao operador de rotação

$$U(0, 0, 0, R) = \eta(R) \exp \left[\frac{i}{\hbar} J \cdot n \omega \right] \quad (3.40)$$

sendo $J = L + S$, que é a soma do momento angular orbital com o momento angular de spin do sistema. O operador (3.40) forma uma representação do grupo de rotações: Se o ângulo de rotação é 2π , os dois observadores coincidem, e neste caso U precisa ser um número de módulo unitário. Chamando de Y_j^m os autovetores simultâneos de $J \cdot n$ e J^2 temos:

$$U\psi = \exp \left[\frac{i}{\hbar} J \cdot n 2\pi \right] \psi = \sum_{j,m} \exp [i m 2\pi] Y_j^m (Y_j^m, \psi) \quad (3.41)$$

para o caso de spin total inteiro. Uma vez que m é inteiro $\exp(i m 2\pi) = 1$, $U(2\pi) = 1$ e é a identidade neste caso. Se o spin total é semi-inteiro, $2m$ é um nú

mero inteiro ímpar de modo que $U(2\pi)$ é -1

$$U(2\pi) = (-)^{F_I} \tag{3.42}$$

Se F é o número total de partículas com spin semi-inteiro, o operador F cujos autovalores são $(-)^F$ é chamado de operador univalência.

Devido a equação (3.42) a representação formada por $U(0, 0, 0, R)$ é bivalente no caso do número total de férmions ser ímpar.

O grupo de cobertura universal $SU(2)$ como é simplesmente conexo, tem somente representações contínuas univalentes. Como qualquer representação de $S^1(3)$ é uma representação univalente de $SU(2)$ para encontrar todas as representações (uni e bi-valentes) de $S^1(3)$ podemos procurar por todas as representações univalentes de $SU(2)$.

Finalmente podemos escrever a estrutura do grupo de Galileu mecânico quântico não relativístico, que denominaremos por \tilde{G}_4 .

$$\tilde{G}_4 = \left[T_1^\alpha \times (T_3^a \times T_1^T) \right] \otimes \left[T_3^V \otimes SU(2) \right] \tag{3.43}$$

O aparecimento de m na relação $[P_k, G_\ell] = -i\delta_{k\ell} m$ é o responsável pelo grupo de fase Abeliano unidimensional T_1^α .

As representações projetivas unitárias de \tilde{G}_4 são nomeadas por:

- a) um número arbitrário m - que é a massa
- b) um número real \mathcal{B} - energia interna

c) um número inteiro ou semi-inteiro S -spinda partícula. O último número é o índice da representação unitária de dimensão finita D^S de $SU(2)$. A representação é rotulada pelo símbolo $(m|\mathcal{G}, S)$

A realização da álgebra de $\tilde{\mathcal{G}}_4$ no espaço de Hilbert sobre $E^3 \times E^1$ é dada por:

$$J_k = -\hbar(i\epsilon_{kln} x_l \frac{\partial}{\partial x_n} - i \sum_k) \quad (3.44a)$$

$$P_k = -\hbar i \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (3.44b)$$

$$G_k = -\hbar i \frac{\partial}{\partial x_k} + m x_k \quad (3.44c)$$

$$H = -\hbar i \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.44d)$$

Aqui \sum_k denota as matrizes da representação de dimensão finita dos geradores $SU(2)$. As relações (3.44), são as relações (3.7), onde substituímos os operadores P_k e H por $-\hbar i \frac{\partial}{\partial x_k}$ e $-\hbar i \frac{\partial}{\partial t}$, respectivamente, e acrescentamos o momento angular de spin ao momento angular orbital, para obtermos o momento total.

Na realização (3.44) o operador momento angular F_k (3.10a) se torna simplesmente $F_k = -\hbar i \sum_k$, isto é, o spin

III.7. Equação de Schrödinger

Tomando o operador de Casimir (3.9), e selecionando a representação de $\tilde{\mathcal{G}}_4$ caracterizada por $\mathcal{B} = 0$

$$\frac{p^2}{2m} - H = 0 \quad (3.45)$$

encontramos a equação de Schrödinger para uma partícula livre. Esta é uma relação entre a energia e o momento da partícula elementar, válida mesmo para uma representação com $\mathcal{B} \neq 0$, pois representações com diferentes autovalores de \mathcal{B} são equivalentes. Já que \mathcal{B} pertence à álgebra de $\tilde{\mathcal{G}}_4$ podemos redefinir H de tal forma que resulte na relação (3.45).

Convém ressaltar que no caso de representações projetivas o conceito de equivalência é um pouco diferente do que no caso de representações verdadeiras. Se Tg e Tg' são duas representações projetivas do grupo \mathcal{G} , dizemos que são equivalentes, se a relação entre operadores radiais:

$$Tg' = VTgV^{-1} \quad (3.46)$$

é conservada. Para os operadores simplesmente temos:

$$Tg' = \phi(g) VTgV^{-1} \quad (3.47)$$

onde $\phi(g)$ é alguma função complexa de módulo unitário sobre o grupo. Além disso, Tg' é uma representação proje

tiva do grupo com o sistema fator $w'(g.g') = \left[\frac{\phi(g).\phi(g')}{\phi(gg')} \right]$.

$w(g, g')$ equivalente ao sistema fator $w(g.g')$ de T_g .

Correspondendo a \mathcal{B} de \tilde{G}_4 , temos o operador de Casimir $C^1 = P^2$ de $ISO(3)$ - eq (2.15). No estágio pré-dinâmico, para a representação com $C^1 = 0$, que é equivalente às com $C^1 \neq 0$, obtemos a equação $P^2 = 0$ no sistema de referência próprio.

Quando passamos para as equações de autovalores, os operadores de Casimir possuem as equações correspondentes:

$$P^2 = 0 \tag{3.48a}$$

$$\frac{P^2}{2m} - E = 0 \tag{3.48b}$$

A equação (a) caracteriza um único estado possível, e é aquele de uma partícula em repouso, enquanto a (b) caracteriza uma família de estados com uma energia arbitrária e um estado de movimento dado por P^2 e que é determinado pelo valor de E .

Voltando a equação de Schrödinger:

$$\left(\frac{1}{2m} \Delta + \frac{i}{h} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(x, t) = 0 \tag{3.49}$$

podemos resolvê-la por separação de variáveis:

$$\psi(x, t) = \Psi(x) \chi(t) \tag{3.50}$$

Sendo E a constante de separação:

$$\chi(t) = \exp \left[- \frac{i}{h} Et \right] \quad (3.51)$$

$$\left[\frac{1}{2m} \Delta + E \right] \Psi(x) = 0 \quad (3.52)$$

Olhando para as duas equações separadas, poderíamos pensar que perdemos informação física ao fazermos essa divisão, pois a última equação não é invariante sob \tilde{G}_4 e sim sob $ISO(3)$. Isso, porém, não ocorre, porque apesar dessa equação significar a realização do operador de $ISO(3)$ $C^1 = p^2 = 2mE$, a variável de separação E surge como uma variável dinâmica que é a energia e não como um nome de uma representação, como ocorreria caso tivéssemos partido simplesmente da equação $C^1 = 2mE$ em $ISO(3)$.

III.8. Regra de Superseleção

Uma decorrência importante do fato que as representações do grupo de Galileu quântico são dadas a menos de uma fase, é a ocorrência de uma regra de superseleção associada com a massa do sistema considerado. Equivalentemente podemos dizer que uma consequência do operador de massa comutar com todos os operadores, é uma regra de superseleção. Isso significa que em mecânica quântica não relativística, é impossível superpor estados descrevendo par

tículas com diferentes massas.

Consideremos, por exemplo, um vetor estado que resulta da superposição de dois vetores estado, com diferentes mas sas.

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \tag{3.53}$$

Vejamos como esse sistema se comporta sob a transformação que é a composição de outras quatro: uma translação espacial a; uma transformação de velocidade v; a translação inversa -a e a transformação de velocidade inversa -v. Dentro do grupo sabemos que elas comutam, assim a compo sição:

$$(0, 0, -v, I) (-a, 0, 0, I) (0, 0, v, I) (a, 0, 0, I) = (0, 0, 0, I) \tag{3.54}$$

é a transformação identidade

O operador $U(g)$ correspondente a essa transformação, preci sa ser um múltiplo da identidade e por (3.36)

$$U(g) = \exp \left[\frac{i}{h} m v \cdot a \right] \tag{3.55}$$

onde m é a massa total do sistema físico. Aplicando es se operador ao sistema (3.53), obtemos:

$$U(g)\psi = \exp \left[\frac{i}{h} m_1 v \cdot a \right] \psi_1 + \exp \left[\frac{i}{h} m_2 v \cdot a \right] \psi_2 \tag{3.56}$$

O princípio de superposição não pode ter qualquer significado para ψ_1 e ψ_2 se $m_1 \neq m_2$, uma vez que isso significaria que uma transformação identidade poderia afetar a norma de qualquer um de seus estados compostos. Mas, como nenhuma experiência pode ser realizada com resultados dependentes da fase relativa de dois vetores pertencentes a diferentes subespaços coerentes, concluímos que há uma regra de superseleção com respeito à massa para partículas quânticas não relativísticas. Isso impede a existência de estados com um espectro de massa, e portanto de partículas instáveis em mecânica quântica não relativística. Essa regra de superseleção é conhecida como regra de superseleção de Bargmann.

Referências: [01], [09], [11], [15], [16], [24], [25], [26].

CAPÍTULO IV

Grupo de Poincaré

IV.1. Relatividade

Como vimos nas seções anteriores, as leis da mecânica não relativística não são alteradas quando vamos de um sistema de referência a um outro que tenha um movimento translacional retilíneo uniforme relativo ao primeiro. Além disso, em mecânica não relativística, é suposto que o tempo t deve ser tomado igual para todos os sistemas de coordenadas.

Um sistema de coordenadas diz-se inercial, se o movimento de corpos, em relação a ele, é retilíneo e uniforme na ausência de forças externas. Uma outra maneira de formular a invariância das leis da mecânica sob as transformações de Galileu, é dizermos que em mecânica clássica, todos os sistemas inerciais são equivalentes. Essa afirmação é conhecida como o Princípio de Galileu.

Estudamos as leis de transformações de sistemas de coordenadas em mecânica clássica e quântica, e conseguimos encaixá-las dentro de uma estrutura de grupo - Grupo Galileano. Vimos sua álgebra de Lie e as alterações que se processam quando se passa do caso clássico para o quântico.

A pergunta natural que surge agora, refere-se a eletrodinâmica. Serão as equações de Maxwell também invariantes sob as transformações Galileanas? Verifiquemos.

Consideremos um observador O em um sistema fixo de coordenadas, isto é, um sistema em repouso em relação a um sistema privilegiado, o éter luminífero. Sua descrição do campo eletromagnético é feita por meio do campo vetorial elétrico $\vec{E}(x)$ e do campo vetorial magnético $\vec{H}(x)$, satisfazendo as equações de Maxwell

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}(x) &= \rho(x) \\ \operatorname{div} \vec{H}(x) &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H}(x) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(x)}{\partial t} &= \frac{1}{c} \rho(x) \vec{U}(x) \\ \operatorname{rot} \vec{E}(x) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}(x)}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $x = (\vec{x}, t)$ é a posição e o tempo atribuído por O ao evento, $\rho(x)$ é a densidade de carga e $\vec{U}(x)$ sua velocidade com respeito a O , no ponto x .

Se tivermos um outro observador O' se movendo com velocidade uniforme \vec{v} com respeito a O , então de acordo com a mecânica clássica, as leis de transformação ligando os dois sistemas de coordenadas são dadas pelas transformações de Galileu

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \vec{x} - \vec{v}t \\ t' &= t\end{aligned}\tag{4.2}$$

com os operadores:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x'_i} \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{v} \cdot \nabla\end{aligned}\tag{4.3}$$

Verifica-se experimentalmente que para baixas velocidades \vec{v} as leis de transformação dos campos se tornam:

$$\begin{aligned}\vec{E}'(x') &= \vec{E}(x) + \frac{1}{c} \cdot \vec{v} \times \vec{H}(x) \\ \vec{H}'(x') &= \vec{H}(x) - \frac{1}{c} \cdot \vec{v} \times \vec{E}(x)\end{aligned}\tag{4.4}$$

$$\rho'(x') = \rho(x)$$

$$\vec{u}'(x') = \vec{u}(x) - \vec{v}$$

Os campos $\vec{E}'(x')$ e $\vec{H}'(x')$ obtidos por θ' são:

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{E}'(x') &= \rho'(x') - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{H}'(x') \\ \text{div } \vec{H}'(x') &= \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{E}'(x') \\ \text{rot } \vec{H}'(x') &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}'(x')}{\partial t'} = \frac{1}{c} \rho'(x') \vec{u}'(x') - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \frac{\partial \vec{H}'(x')}{\partial t'}\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$\text{rot } \vec{E}'(x') + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}'(x')}{\partial t'} = - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \frac{\partial \vec{E}'(x')}{\partial t'}$$

As expressões acima foram obtidas das equações (4.1) exprimindo as quantidades que aí aparecem em termos das quantidades linha de acordo com as equações (4.3) e (4.4). Os termos de ordem v^2/c^2 foram desprezados.

Verificamos então que as equações obtidas por θ' não são as mesmas que as obtidas por θ . Elas diferem por termos proporcionais a \vec{v} , ou seja, efeitos eletromagnéticos não seriam os mesmos se observados de diferentes sistemas movendo-se com uma velocidade constante um em relação ao outro. Segue-se que em mecânica clássica seria possível revelar o estado de movimento relativo ao éter por meio de experiências eletrodinâmicas.

Experiências fundamentais concentraram-se em três pontos:

- a) tentaram localizar um sistema inercial preferencial para as leis da eletrodinâmica, como era o objetivo das experiências de Michelson-Morley;
- b) tentaram observar desvios da mecânica clássica;
- c) tentaram obter desvios das leis da eletrodinâmica clássica.

Os resultados mostraram que as equações de Maxwell são vãlidas para todos os sistemas de coordenadas em movimento uniforme um relativo ao outro, mas as leis da mecânica na

forma Newtoniana precisavam ser modificadas.

Em 1905, com base nos fatos experimentais que se conheciam até então, Einstein propôs os postulados da Relatividade Restrita.

- 1 - As leis da eletrodinâmica e as leis da mecânica são as mesmas em todos os sistemas inerciais.
- 2 - É impossível imaginar uma experiência que defina um estado de movimento absoluto, ou determinar para qualquer fenômeno físico um sistema inercial preferencial, tendo propriedades especiais.

Se procurarmos as transformações de coordenadas entre dois sistemas S e S' , com eixos paralelos, tal que S' se move com velocidade v , em relação a S , que deixam as equações de Maxwell inalteradas em sua forma, veremos que elas são:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - x.v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(4.6)

Essas transformações são conhecidas como transformações de Lorentz. É fácil mostrar algebricamente que se a transformação de Lorentz é válida então,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \quad (4.7)$$

As equações de transformação Galileana não satisfazem as equações (4.7). Para dois eventos $(x_1, y_1, z_1; t_1)$ e (x_2, y_2, z_2, t_2) temos:

$$(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

$$(t'_1 - t'_2) = (t_1 - t_2)$$

mostrando que na física pré-relativística o intervalo espacial e o intervalo temporal entre dois eventos são independentemente invariantes.

Em relatividade especial é o intervalo espaço-tempo combinado,

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2$$

que é invariante. Em termos do intervalo diferencial entre dois eventos, a quantidade:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (4.8)$$

é invariante sob uma transformação de Lorentz.

IV.2. Transformações de Lorentz

A teoria da relatividade rejeita a suposição clássica de que o tempo é o mesmo em todos os sistemas de coordenadas e daí a cada sistema inercial associamos as coordenadas x, y, z e o tempo próprio t . Usaremos a notação x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) sendo $x^0 = ct$, $x^1 = x$; $x^2 = y$; $x^3 = z$, as coordenadas de um evento no espaço de quatro dimensões de Minkowski. Usaremos para simplificar $c = \hbar = 1$, e também a convenção da soma. A distância entre dois eventos no espaço-tempo é dada por:

$$(x - y)^2 = (x - y)^\mu (x - y)_\mu = (x^0 - y^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 \quad (4.9)$$

As transformações enunciadas acima, ou seja, as transformações que deixam invariante a distância entre dois eventos:

$$(\bar{x} - \bar{y})_\mu (\bar{x} - \bar{y})^\mu = (x - y)_\mu (x - y)^\mu \quad (4.10)$$

com x^μ e \bar{x}^μ sendo os conjuntos de coordenadas dadas ao mesmo ponto no espaço de Minkowski por dois observadores O e \bar{O} que podem ser transladados no espaço-tempo, girados no espaço ou se movendo com velocidade uniforme, um em relação ao outro, com alguns dos eixos possivelmente opostamente orientados, são as chamadas transformações de Lorentz. Esta definição generaliza aquela dada no item 4.1.

Indicaremos por $\{a, \Lambda\}$ a transformação de Lorentz:

$$x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (4.11)$$

Os parâmetros a^μ e Λ^μ_ν são reais e devido a equação (4.10) eles satisfazem:

$$\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\rho_\nu = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\rho_\nu = g^\mu_\nu \quad (4.12)$$

Demonstraremos que as transformações de Lorentz constituem um grupo. Para tanto elas devem satisfazer as quatro propriedades:

a) lei de composição - O produto de duas transformações de Lorentz é novamente uma transformação de Lorentz, com a lei de composição

$$\{a_2, \Lambda_2\} \{a_1, \Lambda_1\} = \{a_2 + \Lambda_2 a_1, \Lambda_2 \Lambda_1\} \quad (4.13)$$

b) elemento unitário ou identidade

$$\{0, I\}$$

c) associatividade - segue da lei de composição

d) elemento inverso, de (4.12)

$$(\Lambda^{-1})^\nu_\mu = \Lambda^\mu_\nu \quad (4.14)$$

e a inversa da transformação de Lorentz é:

$$\{-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1}\} \quad (4.15)$$

Como as quatro propriedades que definem um grupo estão satisfeitas pelas transformações de Lorentz inhomogêneas, estas constituem um grupo, que é chamado de Grupo de Lorentz inhomogêneo ou grupo de Poincaré - \mathcal{L}

O grupo \mathcal{L} possui dois subgrupos interessantes: o grupo Abeliano \mathcal{J} das translações puras no espaço-tempo $\{a, I\}$ e o grupo de Lorentz homogêneo - $\mathcal{L}_h: \{0, \Lambda\}$

Qualquer transformação de Lorentz $\{a, \Lambda\}$ pode ser escrita de uma única maneira como o produto de uma transformação homogênea $\{0, \Lambda\}$ seguida por uma translação pura $\{a, I\}$:

$$\{a, \Lambda\} = \{a, I\}\{0, \Lambda\} \quad (4.16)$$

de maneira que $\mathcal{L} = \mathcal{J} \circledast \mathcal{L}_h$ pois as translações puras não comutam com as transformações de \mathcal{L}_h .

O grupo \mathcal{L} é homomórfico com \mathcal{L}_h , e esse homomorfismo é realizado pelo mapeamento:

$$\{a, \Lambda\} \rightarrow \{0, \Lambda\} \quad (4.17)$$

sendo o Kernel do homomorfismo, o subgrupo invariante \mathcal{J} . Por outro lado, \mathcal{L}_h não é um subgrupo invariante de \mathcal{L} .

Estudemos com alguma minúcia o grupo de Lorentz homogêneo.

Este é um grupo de Lie de seis parâmetros. A equação (4.12) pode ser escrita como:

$$\Lambda_{\mu}^{\tau} g_{\tau\rho} \Lambda_{\nu}^{\rho} = g_{\mu\nu} \tag{4.18}$$

de onde tiramos:

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \tag{4.19}$$

Da equação (4.19) teremos:

$$\det \Lambda = \pm 1 \tag{4.20}$$

As transformações que possuem $\det \Lambda = -1$ são por exemplo as inversões do espaço I_S , e a inversão do tempo I_T .

Para $\mu = \nu = 0$ (4.12) nos diz que:

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 > 1 \tag{4.21}$$

de maneira que $\Lambda^0_0 \geq 1$ ou $\Lambda^0_0 \leq -1$. A transformação I_T é um exemplo das que possuem $\Lambda^0_0 \leq -1$.

Concluimos então que o \mathcal{L}_h não é conexo. O grupo é constituído das quatro partes:

I	det $\Lambda = +1$	$\Lambda^0_0 \geq 1$
II	det $\Lambda = -1$	$\Lambda^0_0 \geq 1$
III	det $\Lambda = -1$	$\Lambda^0_0 \leq -1$
IV	det $\Lambda = +1$	$\Lambda^0_0 \leq -1$

(4.22)

Não podemos ir de um pedaço para outro mudando simplesmente os parâmetros da transformação. O primeiro pedaço é um grupo chamado de grupo de Lorentz homogêneo res

trito L_{hr} . Existe um homomorfismo $L_h \xrightarrow{\varphi} V$, onde V tem como elementos I, I_s, I_t e I_{st} . O Kernel do homomorfismo é o grupo de Lorentz homogêneo restrito que é portanto um subgrupo invariante de L_h . V por outro lado não é invariante em L_h . Portanto L_h não é o produto direto de L_{hr} e V . Contudo todas as representações irredutíveis de L_h são conhecidas, uma vez que tenhamos construído todas as representações irredutíveis de V e L_{hr} .

V é um grupo Abelian, isso significa que todas suas representações são unidimensionais:

	Elementos do Grupo			
	I	I_s	I_t	I_{st}
Representações Irredutíveis				
T_0	1	1	1	1
T_1	1	1	-1	-1
T_2	1	-1	1	-1
T_3	1	-1	-1	1

Grupo de Lorentz Restrito: Possui como um subgrupo o grupo de rotações no espaço Euclídiano E . O grupo contém também as chamadas transformações de Lorentz es

peciais - transição a um observador movendo-se com velocidade uniforme. Tomemos como um exemplo a transformação de Lorentz ao longo do eixo z. A Λ correspondente é:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

com $a^2 = 1 + b^2$; $a > b > 0$

Se colocamos $a = \cosh u$, $b = \sinh u$, a velocidade v é dada por $v = \tanh u = b/a$ (vide eq (4.6) com $v_x = v_y = 0$ e $v_z = v$). Isso significa que a e b podem assumir valores arbitrariamente grandes e que o grupo \mathcal{L}_{hr} não é compacto, pois os elementos do grupo não são limitados. Contudo \mathcal{L}_{hr} é localmente compacto.

O grupo \mathcal{L}_{hr} é duplamente conexo. Que \mathcal{L}_{hr} não é mais do que duplamente conexo pode ser verificado comprovando que qualquer curva fechada no domínio do grupo \mathcal{L}_{hr} pode ser continuamente deformada numa curva fechada do grupo de rotação tri-dimensional $SO(3)$.

O grupo de cobertura universal de \mathcal{L}_{hr} é o grupo $SL(2, C)$ de matrizes (2x2) complexas unimodulares. Duas matrizes de $SL(2, C)$ são mapeadas em cada elemento de \mathcal{L}_{hr} e elas diferem apenas em sinal.

O grupo $SL(2, C)$ é simplesmente conexo.

Estudemos a álgebra de Lie de \mathcal{L}_{hr} , ou de $SL(2, C)$ que é o mesmo.

Uma transformação infinitesimal de \mathcal{L}_{hr} pode ser escrita como:

$$\bar{x}^\mu = (g^\mu_\nu + \epsilon^\mu_\nu) x^\nu = \Lambda^\mu_\nu(\epsilon) x^\nu \quad (4.25)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$. Os geradores infinitesimais são determinados escrevendo:

$$\Lambda^\mu_\nu(\epsilon) = g^\mu_\nu + \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma} (M^{\rho\sigma})^\mu_\nu \quad (4.26)$$

com $M^{\rho\sigma} = -M^{\sigma\rho}$ e de (4.25) e (4.26)

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma} (M^{\rho\sigma})^\mu_\nu = \epsilon^\mu_\nu \quad (4.27)$$

que são escritas como:

$$M^{10} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{20} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{30} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad M^{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os geradores infinitesimais satisfazem:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\tau}] = g^{\mu\tau} M^{\nu\rho} + g^{\nu\rho} M^{\mu\tau} - g^{\mu\rho} M^{\nu\tau} - g^{\nu\tau} M^{\mu\rho} \quad (4.29)$$

e definindo os operadores:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= (M^{23}, M^{31}, M^{12}) \\ \vec{N} &= (M^{01}, M^{02}, M^{03}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

as relações de comutação são:

$$\begin{aligned} [M_i, M_j] &= \sum_k \epsilon_{ijk} M_k \\ [N_i, N_j] &= -\sum_k \epsilon_{ijk} M_k \\ [M_i, N_j] &= \sum_k \epsilon_{ijk} N_k \end{aligned} \quad (4.31)$$

Os operadores de Casimir são:

$$\begin{aligned} M^2 - N^2 &= \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \\ -\vec{M} \cdot \vec{N} &= \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\tau} M_{\mu\nu} M_{\rho\tau} \end{aligned} \quad (4.32)$$

e fazendo uma mudança de base:

$$J_\ell = \frac{1}{2} i (M_\ell - i N_\ell) \quad ; \quad K_\ell = \frac{1}{2} i (M_\ell + i N_\ell) \quad (4.33)$$

(4.31) se torna:

$$[J_i, J_j] = \sum_k i \epsilon_{ijk} J_k$$

$$[K_i, K_j] = \sum_k i \epsilon_{ijk} K_k \quad (4.34)$$

$$[J_i, K_j] = 0$$

com os operadores de casimir: $J^2 = \sum_i J_i^2$ e $K^2 = \sum_i K_i^2$

As propriedades principais de \mathcal{L}_{hr} podem ser sintetizadas como:

- 1 - É um grupo de Lie de ordem 6 semi-simples, conexo e não compacto, mas localmente compacto
- 2 - É duplamente conexo, e seu grupo de cobertura universal é $SL(2, C)$.

Para os grupos não compactos não existe uma maneira geral de se construir todas as suas representações. Mas para o caso de \mathcal{L}_{hr} podemos determiná-las conforme veremos adiante.

Retornando ao nosso grupo de Poincaré, e levando em conta o que vimos para o grupo de Lorentz homogêneo, podemos dizer que ele é não conexo, mas consiste de quatro pedaços.

O grupo de Lorentz homogêneo restrito é composto por transformações que quando operam sobre vetores tipo tempo no passado ($x_\mu x^\mu > 0$ e $x^0 < 0$) e no futuro ($x_\mu x^\mu > 0$ e $x^0 > 0$) os deixam invariantes.

Iremos enumerar agora as propriedades do grupo de Poincaré restrito $\mathcal{P} = \mathcal{J} \otimes \mathcal{L}_{hr}$

1 - Possui um subgrupo abeliano invariante que é o grupo das translações puras - \mathcal{J} - o que significa que \mathcal{P} é não semi-simples.

2 - \mathcal{P} é duplamente conexo.

3 - O grupo de cobertura universal de $\mathcal{P} - \bar{\mathcal{P}}$ - é o grupo cujo elemento geral é $\{a, \alpha\}$ onde a é um quadri-vetor correspondendo à uma translação pura e α é uma matriz 2×2 , do grupo $SL(2, C)$ das matrizes complexas unimodulares.

A lei de multiplicação para o grupo $\bar{\mathcal{P}}$ é:

$$\{a_1, \alpha_1\} \{a_2, \alpha_2\} = \{a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \alpha_2\}$$

onde Λ_1 é a matriz de \mathcal{L}_{hr} que é a imagem da matriz $\alpha_1 \in SL(2, C)$.

4 - \mathcal{P} é localmente compacto, mas não compacto.

Da última propriedade decorre que suas representações unitárias podem ser definidas somente sobre espaços de Hilbert de dimensões infinitas. Contudo ele tem repre

representações de dimensão finita mas não unitárias.

IV.3. Representações de Dimensão Finita de \mathcal{L}_{hr}

Como \mathcal{L}_{hr} é não compacto todas as suas representações unitárias são de dimensão infinita. Contudo, ele tem representações não unitárias de dimensão finita. Veremos este último tipo de representações inicialmente. Na próxima seção estudaremos as representações unitárias de dimensão infinita do grupo de Poincaré e portanto de \mathcal{L}_{hr} .

Como o grupo é semi simples então todas as representações redutíveis podem ser completamente reduzidas.

O grupo de cobertura universal de \mathcal{L}_{hr} é $SL(2, \mathbb{C})$, assim, podemos construir todas as representações de dimensão finita deste grupo e verificar quais das representações são verdadeiras e quais são representações bivalentes de \mathcal{L}_{hr} .

O grupo $SL(2, \mathbb{C})$ tem duas representações fundamentais inequivalentes.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ad - bc = 1 \quad (4.35)$$

e

$$\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \text{ são números complexos} \quad (4.36)$$

O Kernel do homomorfismo de $SL(2, C)$ em \mathcal{L}_{hr} é dado pelos dois elementos I e $-I$ e portanto, as duas representações dão duas representações bidimensionais, bivalentes e inequivalentes de \mathcal{L}_{hr} .

Os vetores dos espaços vetoriais lineares que transportam essas duas representações são chamadas de espinores elementares com ponto e sem ponto.

Um espinor sem ponto X é um objeto que sob uma transformação de \mathcal{L}_{hr} , se transforma como:

$$X' = \begin{pmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot X \quad (4.37)$$

com $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, C)$ correspondente à transformação de Lorentz considerada

Os espinores \dot{X} (com ponto) se transformam como:

$$\dot{X}' = \begin{pmatrix} \dot{\mu}_1' \\ \dot{\mu}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\mu}_1 \\ \dot{\mu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} \cdot \dot{X} \quad (4.38)$$

Quanto às transformações infinitesimais, a ambiguidade na escolha do elemento de $SL(2, C)$ correspondendo a um elemento de \mathcal{L}_{hr} desaparece, uma vez que dos dois elementos de $SL(2, C)$ obtidos na correspondência, somente um está próximo da identidade. A representação (4.37) corresponde as seguintes representações bidimensionais da álgebra de Lie de \mathcal{L}_{hr} :

$$M_j^{(1/2, 0)} = -\frac{1}{2} i\tau_j; \quad N_j^{(1/2, 0)} = \frac{1}{2} \tau_j \quad (4.39)$$

$$M_j^{(0, 1/2)} = -\frac{1}{2} i\tau_j; \quad N_j^{(0, 1/2)} = -\frac{1}{2} \tau_j \quad (4.40)$$

e a (4.38), onde as τ_j são as matrizes de Pauli.

Como não há nenhuma matriz que transforma (4.39) em (4.40) vemos que as duas representações não são equivalentes.

Começando das representações bidimensionais (4.35) e (4.36) transportada pelos spinores $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \dot{\mu}_1 \\ \dot{\mu}_2 \end{pmatrix}$ elementares podemos gerar todas as representações de dimensão finita.

Para tanto consideramos dois números arbitrários e inteiros ou semi-inteiros $2j$ e $2j'$ e definimos o espaço linear dos monômios de grau $2(j + j')$

$$P_{kk'} = \mu_1^{2j-k} \dot{\mu}_1^{2j'-k'} \mu_2^k \dot{\mu}_2^{k'} \quad (4.41)$$

onde k e k' são inteiros e $0 < k < 2j$, $0 < k' < 2j'$

Há $(2j + 1)(2j' + 1)$ monômios deste tipo para $2j$ e $2j'$ fixos e o espaço vetorial considerado tem $(2j + 1)(2j' + 1)$ dimensões. Os monômios $P'_{kk'}$, obtidos de (4.41) com μ' e $\dot{\mu}'$ dados por (4.37) e (4.38) podem ser escritos como:

$$P'_{kk'} = \sum_{\ell\ell'} D_{kk', \ell\ell'} P_{\ell\ell'} \quad (4.42)$$

As matrizes $D_{kk', \ell\ell'}$ ou $D(j, j')$ dão uma representação

de $(2j+1) \cdot (2j'+1)$ dimensões de $SL(2, C)$. Os elementos do espaço de representação correspondentes são chamados spinores de ordem $2(j+j')$ pertencendo ao espaço de Minkowski.

Pode-se mostrar que as representações $D(j, j')$ são irreduzíveis e que todas as representações irreduzíveis de dimensão finita de $SL(2, C)$ ocorrem nas séries $D(j, j')$. Para $j = \frac{1}{2}$, $j' = 0$ ou $j = 0$, $j' = \frac{1}{2}$ temos a representação complexo conjugada e a auto representação (4.37) e (4.38).

Todas as representações para as quais $j+j'$ é um inteiro são representações verdadeiras de \mathcal{L}_{hr} , enquanto aquelas para as quais $j+j'$ é semi-inteiro são representações bivalentes.

Outro procedimento para determinar as matrizes $D(j, j')$ é tomarmos os operadores de Casimir J^2 e K^2 , mais as relações de comutação (4.34) e construirmos uma representação irreduzível de dimensão finita determinada pelos $(2j+1) \cdot (2j'+1)$ vetores base $|j, m; j', m'\rangle$ onde j e j' são inteiros ou semi inteiros e $-j < m < j$; $-j' < m' < j'$. Em termos desses vetores os operadores \vec{J} e \vec{K} têm a seguinte representação:

$$J_{\pm} |j, m; j', m'\rangle = (J_1 \pm iJ_2) |j, m; j', m'\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= [(j \pm m)(j \pm m + 1)]^{1/2} |j, m \pm 1; j', m'\rangle \\
J_3 |j, m; j', m'\rangle &= m |j, m; j', m'\rangle \quad (4.43) \\
K_{\pm} |j, m; j', m'\rangle &= (K_1 \pm iK_2) |j, m; j', m'\rangle \\
&= [(j' \pm m')(j' \pm m' + 1)]^{1/2} |j, m; j', m' \pm 1\rangle \\
K_3 |j, m; j', m'\rangle &= m' |j, m; j', m'\rangle
\end{aligned}$$

Dessas equações, podemos obter a representação $\mathcal{D}(jj)(\Lambda)$ correspondente à qualquer transformação de Lorentz.

IV.4. Representações Unitárias Irredutíveis do Grupo de Poincaré Restrito

Estamos interessados em todas as representações unitárias do grupo de transformações sob as quais a teoria é invariante. Dessas representações encontramos todas as formas dos operadores unitários $U(g)$ para os possíveis sistemas físicos. Pode ocorrer que mesmo que um operador satisfaça as leis de composição correta com os outros operadores representando os elementos do grupo, seu efeito sobre os estados do sistema possa ser tal que não podemos supor que ele represente a transformação do grupo ao qual ele está associado. Assim, depois de obtermos as representações, deveremos examinar para quais delas existem sis

temas físicos correspondentes.

A afirmação de que os resultados de uma medida são dadas em termos de probabilidades, e que essas quantidades são invariantes quando passamos de um sistema de coordenadas a outro, se aplica tanto à mecânica quântica não relativística como também à teoria quântica relativística.

Usando o Teorema de Wigner discutido no capítulo 3 pág. 41, segue que a condição:

$$|\langle T(g)f, T(g)h \rangle| = |\langle f, h \rangle| \quad (4.44)$$

onde T é uma transformação de \mathcal{G} e f e h são vetores do espaço de Hilbert e $g \in \mathcal{G}$, implica que o grupo de invariância pode ser representado sobre H por um conjunto de operadores unitários ou anti-unitários $U(g)$ formando uma representação radial do grupo.

$$U(g) \cdot U(g') = e^{i\omega(g, g')} \cdot U(g, g') \quad (4.45)$$

Se o grupo é contínuo, conforme $g \rightarrow 1$ na topologia do grupo, a continuidade física exige que:

$$\begin{aligned} T(g) \cdot f &\rightarrow e^{i\alpha} \cdot f \\ U(g) \cdot f &\rightarrow e^{i\gamma(g, f)} \cdot f \end{aligned} \quad (4.46)$$

isto é, a continuidade física exige que $U(g)$ seja ra

dial contínua.

Para grupos de Lie conexos, pode-se mostrar que uma representação radial contínua, é equivalente a uma representação unitária contínua verdadeira do grupo de cobertura do próprio grupo ou de alguma extensão central contínua do mesmo.

Qualquer representação unitária, contínua, decompõe-se unicamente numa soma direta e/ou numa integral direta de representações unitárias contínuas (RIUC).

Assim, embora o grupo \mathcal{P} não seja nem semi-simples, nem compacto, todas as suas representações unitárias podem ser decompostas na soma direta das componentes irredutíveis, de maneira que devemos considerar no que segue somente as RIUC de \mathcal{P} . A interpretação física das RIUC é que elas podem ser relacionadas com sistemas elementares e particular elementares.

Especifiquemos os dois termos: sistema elementar e particular elementar.

Um sistema é dito elementar (em Teoria Quântica Relativística) se o conjunto de todos os seus vetores de estado forma um espaço de Hilbert invariante que carrega uma RIUC do grupo \mathcal{P} . Como veremos mais avante cada RIUC é caracterizada por dois invariantes, a massa e o spin, sendo portanto estas as características básicas de um sistema elementar. Assim, um elétron, um próton, deuteron

ou qualquer núcleo estável no estado fundamental são exemplos de sistemas elementares. Por outro lado, dois nucleons em um estado arbitrário não definem um sistema elementar, pois os valores de sua massa total e spin não permanecem fixos.

Qualquer sistema elementar será denominado partícula.

Observe que o conceito de um sistema elementar ou partícula não é idêntico ao conceito mais intuitivo de partícula elementar. Antes de mais nada é necessário deixar claro que as partículas elementares que são objetos de estudo da teoria quântica relativística diferem em alguns aspectos fundamentais das partículas Newtonianas de finidas no Capítulo II como ficará claro com a discussão que segue.

Rigorosamente falando, uma partícula elementar deve ser um sistema elementar. Ainda mais deve ser possível de alguma maneira desprezarmos sua estrutura interna, isto é, o fato que ela pode ser a união de outras partículas. A primeira condição é clara, mas a segunda é ambígua. De fato, a possibilidade de se atribuir uma estrutura a uma dada partícula depende explicitamente da existência ou não de uma teoria dinâmica desta estrutura. Na prática, supõe-se que a segunda condição é mais fundamental que a primeira, pois admitimos a existência de partículas elementares instáveis que não possuem massa bem definida, e portanto não definimos um sistema elementar como

acima definido. Contudo, se $\Delta m/m$ para uma partícula elementar instável é pequeno, o que fisicamente significa que sua vida média é longa em relação ao tempo característico das interações fortes (10^{-24} seg), podemos interpretar uma partícula elementar instável como sendo aproximadamente um sistema elementar.

O grupo de Poincaré restrito, é um grupo de Lie não compacto, mas localmente compacto. Portanto, suas representações unitárias podem ser definidas somente sobre espaços de Hilbert de dimensões infinitas, o que corresponde aos infinitos estados linearmente independentes de um sistema elementar distinguidos pelo momento e energia ou posições no espaço-tempo.

Do que dissemos acima, podemos determinar somente as representações radiais unitárias irredutíveis de $\tilde{\mathcal{P}}$ - o grupo de cobertura universal de \mathcal{P} . Dado que a cada elemento $\{a, \Lambda\}$ de \mathcal{P} corresponde dois elementos de seu grupo de cobertura universal, isto é, $\{a, \pm\alpha\}$, sendo $\pm\alpha$ as matrizes de $SL(2, C)$ que são mapeadas em Λ , o elemento $\{a, \alpha\}$ se é representado pelo operador unitário $U(a, \alpha)$, o elemento $\{a, \alpha^{-}\}$ é representado ou por $U(a, \alpha)$ ou por $-U(a, \alpha)$. Portanto, qualquer representação que consideremos é uma representação a menos de um sinal

$$U(a_1, \Lambda_1) \cdot U(a_2, \Lambda_2) = \pm U(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2) \quad (4.47)$$

IV.5. Operadores Infinitesimais e Invariantes

Uma transformação infinitesimal $\{a, \alpha\}$ de $\tilde{\mathcal{P}}$ pode ser convenientemente parametrizada por meio dos parâmetros a^μ e $\epsilon^{\mu\nu}$ da transformação de Lorentz correspondente a ela

$$\bar{x}^\mu = (g^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu}) x^\nu + a^\mu \quad (4.48)$$

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu} \quad \text{da eq. (4.12)} \quad (4.49)$$

e o operador unitário $(a, I+\epsilon)$ representado esta trans-

formação de $\bar{\rho}$ é então expressa como:

$$U(a, I + \epsilon) = I + i a_{\mu} P^{\mu} - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \quad (4.50)$$

com P^{μ} e $J^{\mu\nu}$ auto-adjuntos e $J^{\nu\mu} = -J^{\mu\nu}$.

Esses operadores infinitesimais correspondem à quantidades fisicamente observáveis. A interpretação física que podemos dar a eles é a seguinte:

P^0 : é interpretado como o operador energia total (Hamiltoniana) e P^1, P^2, P^3 como as componentes ao longo dos eixos x, y e z do momento linear total do sistema físico.

J^{12} - componente z do momento angular total do sistema;

J^{23} - componente x e J^{31} - componente y .

J^{01}, J^{02}, J^{03} - representam transformações de Lorentz especiais infinitesimais ao longo dos eixos x, y, z respectivamente e formam o trivetor \vec{K} chamado o momento centroidal.

As relações de comutação entre essas quantidades são:

$$[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0 \quad (4.51)$$

$$[J^{\mu\nu}, P^{\lambda}] = i(g^{\nu\lambda} P^{\mu} - g^{\mu\lambda} P^{\nu}) \quad (4.52)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\tau}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\tau} - g^{\mu\rho} J^{\nu\tau} + g^{\mu\tau} J^{\nu\rho} - g^{\nu\tau} J^{\mu\rho})$$

onde $g^{00} = -g^{\lambda\lambda} = 1$ $g^{\mu\nu} = 0$ $\mu \neq \nu, \lambda = 1, 2, 3$

É útil introduzir o operador:

$$w_{\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} J^{\nu\rho} P^{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} P^{\nu} J^{\rho\tau} \quad (4.53)$$

$$w^0 = \vec{J} \cdot \vec{P} ; \quad \vec{w} = -\vec{J} P^0 - \vec{K} \times \vec{P} \quad (4.54)$$

Substituindo em (4.51), obtemos as propriedades de w_{μ} .

$$\begin{aligned} w_{\mu} P^{\mu} &= 0 \\ [P^{\mu}, w^{\tau}] &= 0 \\ [J^{\mu\nu}, w^{\tau}] &= i(g^{\nu\tau} w^{\mu} - g^{\mu\tau} w^{\nu}) \\ [w^{\mu}, w^{\nu}] &= -i\epsilon^{\mu\nu\rho\tau} w^{\rho} P^{\tau} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Os operadores de Casimir do grupo são os dois invariantes:

$$P^2 = P_{\mu} P^{\mu} \quad (4.56)$$

$$w^2 = w_{\mu} w^{\mu} = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu} P^2 - J_{\mu\nu} P^{\rho\nu} P^{\mu} P_{\rho} \quad (4.57)$$

IV.6. Construção das Representações Unitárias de $\overline{\mathcal{P}}$

É útil introduzirmos um conjunto completo de vetores no espaço de representação. Como os operadores hermitianos P^{μ} comutam entre eles podemos portanto escolher como um conjunto completo o conjunto de autovetores simultâneos de todos os P^{μ} :

$$P^{\mu} \psi(p, \zeta) = p^{\mu} \psi(p, \zeta) \quad (4.57)$$

onde ζ denota os demais rótulos que são necessários para remover completamente a degenerescência dos autovetores de todos os P^μ .

O operador deslocamento $U(a, I)$ pode ser obtido por exponenciação:

$$U(a, I) = \exp (ia_\mu P^\mu) \quad (4.58)$$

que atuam sobre as funções $\psi(p, \zeta)$ da maneira:

$$U(a, I)\psi(p, \zeta) = \exp (ia_\mu P^\mu)\psi(p, \zeta) \quad (4.59)$$

Assim os vetores $\psi(p, \zeta)$, para p fixo, transportam uma representação unitária do grupo de translação. Se o espaço de representação para o grupo \hat{P} contém o vetor $\psi(p, \zeta)$ ele contém também todos os vetores $\psi(\Lambda p, \zeta)$, com p fixo.

Como:

$$P^\mu U(0, \alpha)\psi(p, \zeta) = \Lambda^\mu_\nu P^\nu U(0, \alpha)\psi(p, \zeta) \quad (4.60)$$

o vetor $U(0, \alpha)\psi(p, \zeta)$ que deve pertencer ao espaço de representação é um autovetor do operador P^μ , pertencendo ao autovalor $(\Lambda p)^\mu$. Podemos escrevê-lo como:

$$U(0, \alpha)\psi(p, \zeta) = \sum_{\eta} \psi(\Lambda p, \eta) \cdot C_{\eta\zeta}(\alpha, p) \quad (4.61)$$

Para construirmos uma representação irredutível devemos nos prender aqueles p 's que são obtidos um do outro por transformações de Lorentz próprias.

P^2 é um operador de Casimir do grupo, então todos os vetores do tipo $\varphi(\Lambda\bar{p}, \zeta)$ são autovetores de P^2 pertencendo ao autovalor \bar{p}^2 . Os valores possíveis de p^2 dão assim uma primeira classificação das representações irredutíveis, e para o \mathcal{L}_{hr} , o sinal de p^0 também é um outro invariante.

Podemos então distinguir quatro classes diferentes de representações irredutíveis:

$$\begin{aligned}
 1 - & \begin{cases} (m+) & : & p^2 = m^2 > 0 & p^0 > 0 \\ (m-) & : & p^2 = m^2 < 0 & p^0 < 0 \end{cases} \\
 2 - & \begin{cases} (0+) & : & p^2 = 0 & p^0 > 0 \\ (0-) & & p^2 = 0 & p^0 < 0 \end{cases} \quad (4.62) \\
 3 - & (\tau) \quad p^2 = -\tau^2 < 0 \\
 4 - & (0) \quad p^2 = 0 \quad p^H = 0
 \end{aligned}$$

As representações correspondendo à classe 1 descrevem as propriedades de transformação de sistemas elementares com massa de repouso finita, sendo que (m+) descrevem partículas com energia positiva e (m-) com energia negativa. As da classe 2 descrevem o comportamento de partículas com massa de repouso nula, e energia positiva (0+) ou energia negativa (0-). As representações da classe (τ) não possuem significado físico pois descrevem partícu

las com massa de repouso puramente imaginárias. As representações (0_0) caracterizam sistemas elementares cujas funções de onda são deixadas invariantes para todas as translações do espaço-tempo. A única representação irredutível desta classe que possui significado físico é dada pela identidade num espaço de Hilbert unidimensional. Ela dá a lei de transformação no vácuo.

IV.7. Contração do Grupo de Lorentz

A mecânica clássica é um caso limite da mecânica relativística. Assim o grupo da primeira precisa ser em algum sentido um caso limite do grupo mecânico relativístico, e as representações do primeiro precisam ser casos limites das representações do último.

Chamamos a operação de obtenção de um novo grupo por uma transformação singular dos elementos infinitesimais do grupo antigo, uma contração do último. A matriz transformação singular será um caso limite de uma matriz não singular. A última dependerá linearmente de um parâmetro ϵ que tenderá a zero.

$$u^i_{\nu} = u^i_{\nu} + \epsilon w^i_{\nu} \quad (4.63)$$

Para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ o determinante de (4.63) é diferente de zero, e se anula para $\epsilon = 0$. Transformamos primeira mente (4.63) em uma forma normal por uma transformação independente de ϵ e tal que

$$u = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad w = \begin{vmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.64)$$

onde o número de linhas e colunas na matriz identidade em u , e em v é r .

Os operadores infinitesimais se transformam como:

$$J_{1\nu} = I_{1\nu} + \varepsilon \sum_{\mu=1}^r v_{\mu\nu} I_{1\mu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, r)$$

$$J_{2\nu} = \varepsilon I_{2\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-r) \quad (4.65)$$

e as transformações correspondentes dos parâmetros do grupo são:

$$a_{1\nu} = b_{1\nu} + \varepsilon \sum_{\mu=1}^r v_{\nu\mu} b_{1\mu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, r)$$

$$a_{2\nu} = \varepsilon b_{2\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-r) \quad (4.66)$$

A transformação dos elementos infinitesimais, também nu da as constantes de estrutura de:

$$[I_{\alpha\nu}, I_{\beta\mu}] = \sum_{k=1}^r C_{\alpha\nu, \beta\mu}^{1k} I_{1k} + \sum_{k=1}^{n-r} C_{\alpha\nu, \beta\mu}^{2k} I_{2k} \quad (4.67)$$

onde α e β podem tomar os valores 1 e 2, para:

$\alpha, \beta = 1$, em:

$$[J_{1\nu}, J_{1\mu}] = \sum_k C_{1\nu, 1\mu}^{1k} J_{1k} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_k C_{1\nu, 1\mu}^{2k} J_{2k} + \dots \quad (4.68)$$

Se o comutador de $J_{1\nu}$ e $J_{1\mu}$ devem convergir quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a uma combinação linear de J , as constantes de estrutura precisam satisfazer:

$$C_{1\nu, 1\mu}^{2k} = 0 \quad (4.69)$$

e $I_{1\nu}$ precisa varrer um subgrupo. Se isso acontece, as constantes de estrutura convergirão a valores definidos

$$C_{\alpha\nu, \beta\mu}^{\gamma k} \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} c_{1\nu, 1\mu}^{1k} &= C_{1\nu, 1\mu}^{1k} & c_{1\nu, 1\mu}^{2k} &= C_{1\nu, 1\mu}^{2k} = 0 \\ c_{1\nu, 2\mu}^{1k} &= 0 & c_{1\nu, 2\mu}^{2k} &= C_{1\nu, 2\mu}^{2k} \\ c_{2\nu, 2\mu}^{1k} &= 0 & c_{2\nu, 2\mu}^{2k} &= 0 \end{aligned} \quad (4.70)$$

A operação acima é uma contração do grupo com relação aos elementos infinitesimais $I_{1\nu}$.

Cada grupo de Lie pode ser contraído com respeito a qualquer de seus subgrupos contínuos e somente com respeito a eles.

O subgrupo com respeito ao qual a contração é feita será chamado de S . Os elementos infinitesimais formam um subgrupo abeliano do grupo contraído. O subgrupo S com respeito ao qual a contração foi realizada é isomórfico ao grupo fator deste subgrupo invariante. Inversamente, a existência de um subgrupo invariante abeliano e a possibilidade de escolher de cada um de seus subgrupos um elemento de maneira que forme um subgrupo S é uma condi

ção necessária para a possibilidade de obter o grupo de um outro grupo por contração.

O subgrupo S permanece inalterado.

Para fazermos a contração dos grupos de Lorentz, seguimos o procedimento acima.

Considerando, primeiro o grupo de Lorentz inhomogêneo com uma dimensão tipo espaço, e uma tipo tempo. Ele é descrito pelas transformações:

$$\begin{aligned} x' &= x \cosh \lambda + t \sinh \lambda + a_x \\ t' &= x \sinh \lambda + t \cosh \lambda + a_t \end{aligned} \quad (4.71)$$

Desejamos contraí-las com respeito ao subgrupo de deslocamentos no tempo $t' = t + a_t$. Os elementos infinitesimais são: deslocamentos no tempo I_1 , deslocamento no espaço I_{2x} e rotação no espaço tempo $I_{2\lambda}$, e as relações de comutação:

$$[I_1, I_{2x}] = 0 ; \quad [I_1, I_{2\lambda}] = -I_{2x} ; \quad [I_{2x}, I_{2\lambda}] = -I_1 \quad (4.72)$$

Por (4.70) as relações do grupo contraído são:

$$[J_1, J_{2x}] = 0 ; \quad [J_1, J_{2\lambda}] = -J_{2x} ; \quad [J_{2x}, J_{2\lambda}] = 0 \quad (4.73)$$

As rotações no espaço-tempo, juntamente com os deslocamentos no espaço formam um subgrupo comutativo invariante.

As matrizes:

$$\begin{bmatrix} \cosh \lambda & \sinh \lambda & a_x \\ \sinh \lambda & \cosh \lambda & a_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

formam uma representação não unitária do grupo de transformações (4.71). Para fazer a contração colocamos $a_t = b_t$, $\lambda = \epsilon v$, $a_x = \epsilon b_x$ ou $\lambda = v/c$, e $a_x = b_x/c$ e fazemos $\epsilon \rightarrow 0$ ou $c \rightarrow \infty$. Multiplicamos a primeira linha por c , a primeira coluna com $1/c$. Se $c \rightarrow \infty$ na matriz obtida, obtemos as transformações do grupo contraído:

$$\begin{aligned}x' &= x + vt + b_x \\t' &= t + bt\end{aligned}\tag{4.75}$$

que é o grupo de Galileu com uma dimensão espacial. As transformações $x' = x + vt + b_x$, $t' = t$ formam o subgrupo comutativo invariante.

A mesma contração pode ser realizada para um grupo de Lorentz inhomogêneo com um número arbitrário de dimensões espaciais. A única diferença é que o subgrupo S , com respeito ao qual a contração é realizada, contém os deslocamentos no tempo e também todas as rotações puramente espaciais, isto é, todas as transformações que deixam t invariante. O subgrupo invariante do grupo contraído consiste de todos os deslocamentos espaciais e transformações de Galileu $x'_i = x_i + v_i t + b_i$, $t' = t$.

Com respeito às contrações das representações do grupo de Poincaré, dizemos que é possível contraí-las somente às representações projetivas do grupo de Galileu.

Referências: [01], [04], [05], [06], [07], [09], [10], [12],
[13], [14], [17], [18], [21], [27].

CAPÍTULO V

O GRUPO DE AGHASSI-ROMAN-SANTILI E AS PARTÍCULAS ELEMENTARES

V.1. Introdução

Até recentemente, a teoria dos grupos desempenhou um papel de segundo plano em teorias físicas. Contudo, na manipulação de certos problemas, especialmente em física de partículas de alta energia, a teoria dos grupos tem se deslocado para uma posição central, e seu uso torna-se cada vez mais indispensável.

Ainda não há uma estrutura lógica que unifique a física das partículas elementares. Devemos concordar no entanto, que, caso se consiga construir tal estrutura, as idéias de simetria prevalecerão, e os estudos das mesmas associados com experiências, provavelmente nos conduzirão à uma teoria correta.

Neste capítulo, veremos algumas das idéias envolvendo teoria dos grupos que buscam essa coesão da física das partículas elementares.

Até 1950, cerca de 30 partículas sub-atômicas eram conhecidas. Elas foram divididas em quatro categorias: o fóton, os léptons (elétrons, muons, neutrinos) e antiléptons.

tons, os mésons (píons, kaons), os bárions (nucleon N , e os híperons Λ , Σ , Ξ) e antibárions. Os mésons k e os híperons foram chamados de partículas estranhas, devido a seus comportamentos diferentes na produção e no decaimento. Elas são produzidas em grande número, e exibem uma estabilidade marcante, vivendo um tempo muito longo (10^{-8} - 10^{-10} seg), comparado com o tempo de produção (10^{-23} seg). Essa diferença de tempo constitui um paradoxo, pois teoricamente, se considerarmos que existe um único mecanismo responsável pela produção e decaimento, deveríamos esperar tempos da mesma ordem de grandeza.

Existe uma propriedade comum de todas as produções e decaimentos de partículas, estranhas ou não: o número bariônico (B), definido como a diferença entre o número de bárions e o de antibárions presentes a um certo instante de tempo é uma quantidade conservada. Uma vez que os únicos estados fisicamente realizáveis na natureza, são autoeigenvalores do número bariônico, além de ser um número quântico conservado e aditivo, B define também uma regra de seleção.

O nucleon se arranja em multipletos de mesmo spin, paridade, e aproximadamente a mesma massa. Dizemos que a interação entre núcleons satisfaz o princípio de independência de carga, ou que as forças são invariantes sob as transformações do grupo de rotação no espaço de spin iso-

tópico e os multipletos correspondem às representações irredutíveis de $SU(2)$. Acreditamos que as ligeiras diferenças em massa entre membros do mesmo multiplete isospin são quase exclusivamente devidas às interações eletromagnéticas.

A associação de partículas com as representações do grupo de Poincaré, dá um significado precisamente definido ao momento, energia, massa e spin. Vemos assim, que muitas idéias cinemáticas associadas com a física podem ser relacionadas com propriedades algébricas do grupo de Poincaré. Por outro lado números quânticos internos tais como I , I_3 , B , S , de isospin e hipercarga, são conservados para interações fortes, e as leis de conservação não discretas são relacionadas com grupos de simetria contínuos (caso de $SU(2)$).

Para barions, a sequência J^P (spin-paridade), I , I_3 , Y , de números quânticos define pelo menos um bárion. Isso quer dizer que precisa haver uma ligação estreita entre estatísticas internas (dadas por I , I_3 , Y) e estatísticas externas (J^P): o bárion que é um férmion com respeito às estatísticas externas é provavelmente também um "férmion" com respeito a seu formalismo interno.

Vários autores tem recentemente investigado uma possível conexão, tentando localizar relações entre spin externo $-J-$ e a massa quadrática da partícula $-P^2-$ por um lado,

e números quânticos internos por outro lado. Matematicamente, essa busca se resume na procura de um grupo que contenha o grupo de Poincaré e um possível grupo de simetria interna, e que os conecte de uma maneira não trivial.

Para resolver o problema do paradoxo das partículas estranhas é introduzido um novo número quântico para interações fortes, pois somente estas têm a propriedade de dar origem à produção de partículas estranhas. Dos esquemas propostos para introduzir esse novo número quântico aquele que foi melhor sucedido na aproximação de fatos experimentais e na previsão da existência de novas partículas foi um proposto independentemente por Gell-Mann e Nishijima (1955). O esquema de classificação é baseado na extensão da noção de independência de carga ou simetria $SU(2)$, às partículas estranhas e suas interações fortes.

Fatos experimentais conhecidos, indicaram que da mesma forma que nucleons e pions, as novas partículas descobertas fossem arranjadas em multipletos de isospin de dado spin isotópico. A um conjunto de $2I+1$ partículas com aproximadamente a mesma massa e o mesmo spin, paridade e número bariônico, o valor I para o spin isotópico é determinado. A degenerescência em massa para um dado multipletto é suposto ser destruída por interações eletromagnéticas que quebram a simetria. Multipletos de carga com o

mesmo número bariônico podem ser convenientemente rotulados por um novo número quântico Y , chamado hipercarga ou pela estranheza $S = Y - B$.

Diferentes multipletos com o mesmo B e J^P possuem ligeiras diferenças em massas. Isso nos leva a questionar se da mesma forma que a separação da massa em um dado multiplete de carga é acompanhada por interações eletromagnéticas que violam independência de carga, se a diferença em massa entre diferentes multipletos é provocada por uma interação que viola alguma simetria. Essas interações são chamadas de meio-forte. Uma nova simetria deve então ser buscada, sendo a sua quebra produzida pela interação eletromagnética e pela meio-forte. Como num supermultiplete Y e I_3 são números quânticos compatíveis escolhemos para o grupo de simetria geral um dentre os grupos de Lie compactos de ordem 2. Em 1961 Gell-Mann e Ne'eman acharam conveniente adotar como grupo de simetria o grupo $SU(3)$ das matrizes 3×3 unitárias unimodulares. Entre suas representações irredutíveis encontramos uma de oito dimensões na qual o octeto bariônico pode ser associado. Os quatro multipletos de carga mais conhecidos da família do bárion com oito partículas ao todo são separadas por diferenças de massa que são da ordem de 10% de suas massas e 10 vezes maior que aquelas separando membros em cada multiplete. O sucesso do esquema foi comprovado pe

la descoberta dos méson η com estranheza zero e pelas partículas Ω com estranheza -3 .

A suposição da invariância das interações fortes sob $SU(3)$ implica em degenerescência em massa das partículas pertencendo a um dado supermultiplete. Para ter a decomposição em massa observada experimentalmente, somos forçados a adicionar uma perturbação forte $-SU(3)$ à Lagrangeana do sistema. Gell-Mann com inspiração na teoria de perturbações postulou que o operador de massa seria um tensor que se transformaria como a oitava componente da representação de oito dimensões de $SU(3)$ sob a ação de $SU(3)$ sobre esses tensores. Certas constantes livres são obtidas na fórmula para o operador. Essas constantes podem ser combinadas com parte dos dados, e a fórmula é então usada para prever o resto dos dados.

Seguindo a idéia de Gell-Mann na fórmula da massa, um aspecto em comum de todos os esquemas montados para explicar a decomposição da massa, é tentar ligar objetos físicos tais como momentos magnéticos e massas a operadores que se transformam de uma maneira apropriada sob um grupo mais extenso. As críticas que poderíamos fazer à fórmula de massa de Gell-Mann ou outras obtidas em grupos compactos, é que seu formalismo não explica a conexão entre o operador de Casimir P^2 do grupo de Poincaré com a decomposição de massa. Outra falha que poderíamos

apontar é que o método usado para obtê-las contém um processo misterioso de quebra de simetria que é justificado apenas pelo seu sucesso a posteriori.

Uma das alternativas que parece ser mais natural seria postular que massa está sempre associada com o operador de Casimir relevante e não como na teoria de Gell-Mann e para fazer isso poderíamos tentar colocar o grupo de Poincaré e o grupo de simetria interno juntos de alguma forma mais interessante do que meramente pelo produto direto. Os trabalhos mais expressivos nesse sentido foram primeiramente o de McGlinn (1964) e foi colocado em sua forma definitiva por Michel (1964), e depois o trabalho de O'Rai feartaigh discutindo as possibilidades de se obter massas discretas situando o grupo de Poincaré num grupo mais amplo. O'Rai feartaigh pesquisou se o grupo de Poincaré fosse colocado como um subgrupo de outro grupo de Lie se seria possível encontrar para esse grupo uma representação unitária irredutível na qual o operador de massa tivesse um autovalor discreto. Ele mostrou que se isso fosse feito encontraríamos somente um autovalor, isto é, nenhuma decomposição com massas discretas é possível com um grupo de dimensão finita que possua \mathcal{P} como um subgrupo. Por outro lado, Flato e Sternheimer encontraram que qualquer extensão da álgebra de Lie do grupo de Poincaré por uma álgebra de Lie semisimples é equivalente a uma álge

Bc/5052

bra trivial, dada pela soma direta das duas álgebras, o que implica em comutatividade do operador de massa com todos os geradores do grupo de simetria interna e portanto o espectro de massa não é discreto.

A falta de um operador de massa que proporcione um espectro discreto, e que portanto concorde com a realidade da existência de partículas com massas bem definidas, é um aspecto insatisfatório da atual dinâmica quântica relativística.

Outro aspecto que nos desagradava é a ausência de um operador posição relativístico X_μ , que tenha um papel análogo à X_μ da relação mecânico quântica não relativística que satisfaz a relação de Heisenberg $[P_\lambda, X_k] = -i\delta_{\lambda k}$ na álgebra de Lie dinâmica.

Matematicamente situaríamos nossa insatisfação no fato que o grupo de Poincaré não contém o grupo \tilde{G}_4 como um subgrupo como esperaríamos caso ele fosse uma ampliação da base dinâmica. Em vez disso \mathcal{P} contém como subgrupo o grupo cinemático não relativístico $ISO(3)$ que é um subgrupo do grupo de Poincaré restrito (grupo dinâmico).

Apesar de que \mathcal{P} e \tilde{G}_4 estarem relacionadas por contração, isto pode ser interpretado dizendo-se que a dinâmica não relativística é um caso limite da dinâmica relativística.

Contudo, a noção inversa de contração, isto é, a expansão falha, pois a expansão de \tilde{G}_4 não é única.

Baseados nesses ítems Aghassi-Roman-Santilli tentaram e construíram, um novo grupo dinâmico ampliado, para a mecânica quântica relativística. Os resultados mais importantes dessa construção são:

- a) é introduzido um operador posição espaço-tempo relativístico.
- b) é introduzido um comprimento universal que comuta com todos os geradores e portanto é obtida uma regra de superseleção: sistemas com diferentes comprimentos fundamentais são incoerentes.
- c) é encontrado um operador evolução com respeito ao tempo próprio.
- d) ocorre uma emergência de torres de estados com spins crescentes.

Examinemos com mais detalhes esse novo grupo.

V.2.0 Grupo de Aghassi-Roman-Santilli

Os passos seguidos para a construção desse grupo é análoga à transição de $ISO(3)$ a \tilde{G}_4 como discutimos nos capítulos II e III.

Aqui o grupo equivalente a $ISO(3)$ é o grupo de Poincaré definido no espaço $E^{3,1}$. Ele é o grupo de isometrias, com as transformações de Lorentz

$$X^\mu \rightarrow \Lambda_{\nu}^{\mu} X^\nu \quad (\Lambda_{\mu}^{\nu} \Lambda_{\nu}^{\rho} = g_{\mu}^{\rho}) \quad (5.1)$$

e as translações:

$$X^\mu \rightarrow X^\mu + a^\mu \quad (5.2)$$

Não consideraremos contudo, a parte conexa do grupo de Galileu como o grupo de invariância dinâmico. Da mesma maneira que introduzimos a variável adicional cinemática l em mecânica não relativística (2.2), introduzimos aqui, uma nova variável cinemática u , o que implica em mudarmos o nosso espaço de $E^{3,1}$ para o espaço ampliado $E^{3,1} \times E^1$. Este será o espaço suporte de um novo grupo.

As transformações deste grupo consistem:

$$\begin{aligned} \text{a) } X^\mu &\rightarrow \Lambda_{\nu}^{\mu} X^\nu & (\Lambda_{\mu}^{\nu} \Lambda_{\nu}^{\rho} = g_{\mu}^{\rho}) & \text{ transf. Lorentz} \\ \text{b) } X^\mu &\rightarrow X^\mu + a^\mu & & \text{ translações} \\ \text{c) } X^\mu &\rightarrow X^\mu + b^\mu u & & \text{ R.G. boost} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\text{d) } u \rightarrow u + \tau \quad \text{translações de } u \quad (5.4)$$

Tomamos u com as dimensões de comprimento, e os parâmetros b^μ são adimensionais, τ é um parâmetro real com a dimensão de comprimento.

As transformações (5.1) -- (5.4) formam um grupo de quinze parâmetros sobre o espaço $E^{3,1} \times E^1$.

Um elemento arbitrário será simbolizado por $g \equiv (\tau, a, b, \Lambda)$

a) lei de composição:

$$\begin{aligned} & (\tau_2, a_2, b_2, \Lambda_2) (\tau_1, a_1, b_1, \Lambda_1) = \\ & = (\tau_2 + \tau_1, a_2 + \Lambda_2 a_1 + \tau_1 b_2, b_2 + \Lambda_2 b_1, \Lambda_2 \Lambda_1) \end{aligned} \quad (5.5)$$

b) elemento unitário: $(0, 0, 0, 1)$

c) elemento inverso:

$$g^{-1} = (-\tau, -\Lambda^{-1}(a - \tau b), -\Lambda^{-1}b, \Lambda^{-1}) \quad (5.6)$$

A estrutura do grupo G_5 — que é a componente conexa da
quele definido por (5.1) — (5.4) é:

$$G_5 = \left\{ T_4^a \times T_1^\tau \right\} \otimes \left\{ T_4^b \otimes S0_0(3,1) \right\} \quad (5.7)$$

onde T_4^a é o grupo de translação espaço-tempo; T_1^τ é o grupo de translação u ; T_4^b é o grupo de Galileu relativístico (R.G.) e $S0_0(3,1)$ é o grupo de Lorentz restrito.

Chamando os geradores de $S0_0(3,1)$, T_4^a , T_4^b e T_1^τ por $J_{\mu\nu}$, P_μ , Q_μ e S respectivamente, encontramos a álgebra de Lie

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\tau}] = i (g_{\nu\rho} J_{\mu\tau} - g_{\mu\rho} J_{\nu\tau} - g_{\mu\tau} J_{\rho\nu} + g_{\nu\tau} J_{\rho\mu}) \quad (5.8a)$$

$$[P_\mu, J_{\rho\tau}] = i (g_{\mu\rho} P_\tau - g_{\mu\tau} P_\rho) \quad (5.8b)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = [Q_\mu, Q_\nu] = [J_{\mu\nu}, S] = [P_\mu, S] = 0 \quad (5.8c)$$

$$[P_\mu, Q_\nu] = 0 \quad (5.8d)$$

$$[J_{\mu\nu}, Q_\rho] = i (g_{\nu\rho} Q_\mu - g_{\mu\rho} Q_\nu) \tag{5.8e}$$

$$[S, Q_\mu] = iP_\mu \tag{5.8f}$$

Os operadores de Casimir são:

$$I = P_\mu P^\mu \tag{5.9a}$$

$$I = W_\mu W^\mu \tag{5.9b}$$

onde usamos a notação:

$$W_\mu = \epsilon_{\mu\rho\tau\nu} J^{\rho\tau} P^\nu \tag{5.10}$$

Nosso grupo G_5 contém o grupo de Poincaré como um subgrupo. Lembremos que $ISO_0(3)$ também é um subgrupo de G_4, G_4 por sua vez é um subgrupo de G_5 .

A álgebra de Lie (5.8 a — f) informa que $T_4^a \times T_1^\tau \times T_4^b$ é um subgrupo invariante. Da eq(5.7) vemos que ocorre o isomorfismo:

$$SO_0(3,1) \cong G_5 / T_4^a \times T_1^\tau \times T_4^b \tag{5.11}$$

O grupo G_5 é uma extensão do grupo de Lorentz restrito, da mesma forma que G_4 é uma extensão de $S0(3)$. Contudo G_5 não é uma extensão do grupo de Poincaré $ISO_0(3,1)$. Como o grupo de Poincaré é uma extensão do grupo de Lorentz restrito, G_5 também é uma extensão de $S0_0(3,1)$. Assim G_5 e $ISO_0(3,1)$ são extensões de $S0_0(3,1)$.

Postulado dinâmico:- As leis da dinâmica são invariantes sob \tilde{G}_5 .

Para uso em mecânica quântica, devemos fazer uma extensão a mais. Como as representações no espaço de Hilbert devem ser a menos de uma fase (vide seção III.2), os geradores são determinados a menos de constantes aditivas. Através de redefinições e pelo uso da identidade de Jacobi (2.8), todas essas constantes podem ser eliminadas com exceção de uma delas, que aparece no comutador de $[P_\mu, Q_\mu]$. A álgebra do grupo quântico relativístico é:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\tau}] = i(g_{\nu\rho}J_{\mu\tau} - g_{\mu\rho}J_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}J_{\rho\nu} + g_{\nu\tau}J_{\rho\mu}) \quad (5.12a)$$

$$[P_\mu, J_{\rho\tau}] = i(g_{\mu\rho}P_\tau - g_{\mu\tau}P_\rho) \quad (5.12b)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = [Q_\mu, Q_\nu] = [J_{\mu\nu}, S] = [P_\mu, S] = 0 \quad (5.12c)$$

$$[P_\mu, Q_\nu] = -i g_{\mu\nu} \ell^{-1} \quad (5.12d)$$

$$[J_{\mu\nu}, Q_\rho] = i(g_{\nu\rho}Q_\mu - g_{\mu\rho}Q_\nu) \quad (5.12e)$$

$$[S, Q_\mu] = iP_\mu \quad (5.12f)$$

Mais uma vez a analogia se faz presente quando comparamos a álgebra (5.12) deste grupo com o de \tilde{G}_4 . Lá aparecia o fator $\delta_{k\ell m}$ no comutador de $[P_\mu, G_\nu]$ que não estava presente na álgebra de G_4 , aqui é o fator $-i g_{\mu\nu} \ell^{-1}$ que provoca a diferença da álgebra de \tilde{G}_5 com a de G_5 .

onde usamos:

$$T_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} - \ell M_{\mu\nu} \quad (5.20)$$

$$M_{\mu\nu} = P_\mu Q_\nu - P_\nu Q_\mu \quad (5.21)$$

As consequências físicas do grupo de invariância \tilde{G}_5 são:

- a) Da equação (5.12c), podemos tirar a sugestão de definir o operador de posição espaço-tempo relativístico.

$$X_\mu = -\ell Q_\mu \quad (5.22)$$

Outros reforços para a associação (5.22) vem da relação de Heisemberg como também por (5.12c) onde teremos então $[X_\mu, X_\nu] = 0$ e por (5.12e) que diz que X_μ se comporta como um quadrivector sob transformação de Lorentz.

- b) O aparecimento de ℓ nos leva a introduzir um comprimento fundamental, e como ℓ comuta com todos os operadores, deveremos ter uma regra de superseleção: sistemas com diferentes comprimentos fundamentais são incoerentes e não se comunicam. Em \tilde{G}_4 temos uma regra de superseleção com respeito à massa.

- c) Queremos agora encontrar o significado de S . Isto é conseguido observando que da representação do operador de Casimir (5.17) com $D' = 0$ temos:

$$P_\mu P^\mu + 2\ell^{-1} S = 0 \quad (5.23)$$

ou $m_0^2 = -2\ell^{-1} S \quad (5.24)$

A constante ℓ tem a dimensão de comprimento.

A álgebra (5.12) é a de um grupo que é uma extensão central do grupo de cobertura de $\tilde{G}_{\mathfrak{g}}$ por um grupo fator. Chamando esse grupo por $\tilde{\tilde{G}}_{\mathfrak{g}}$.

$$\tilde{\tilde{G}}_{\mathfrak{g}} = \left\{ T^\theta \times (T^a \times T^\tau) \right\} \otimes \left\{ T^b \times SL(2, \mathbb{C}) \right\} \quad (5.13)$$

T^θ é o grupo de fase Abeliano unidimensional ligado com o aparecimento de ℓ^{-1} . Chamando um elemento $g \in \tilde{\tilde{G}}_{\mathfrak{g}}$ por $g = (\exp(i\theta); \tau, a, b, \Lambda)$ e para o sistema fator usamos a forma:

$$W(g_1, g_2) = \exp \ i\ell^{-1} f(\tau_1, a_1, b_1, \Lambda_1, \tau_2, a_2, b_2, \Lambda_2) \quad (5.14)$$

a lei de composição pode ser escrita.

$$\begin{aligned} \text{a) } & (\exp(i\theta_2), \tau_2, a_2, b_2, \Lambda_2) (\exp(i\theta_1), \tau_1, a_1, b_1, \Lambda_1) = \\ & = (\exp(i(\theta_2 + \theta_1 + \ell^{-1}f)); \tau_2 + \tau_1, a_2 + \Lambda_2 a_1 + \tau_1 b_2 + b_2 + \Lambda_2 b_1; \Lambda_2 \Lambda_1) \end{aligned} \quad (5.15)$$

b) elemento unitário: $(1; 0, 0, 0, 1)$

c) elemento inverso:

$$g^{-1} = (\exp(-\theta - \ell^{-1}f); -\tau, -\Lambda^{-1}(a - \tau b), -\Lambda^{-1}b, \Lambda^{-1}) \quad (5.16)$$

Os operadores de Casimir de $\tilde{\tilde{G}}_{\mathfrak{g}}$ são:

$$D = P_\mu P^\mu + 2 \ell^{-1} S \quad (5.17)$$

$$J = \frac{1}{2} T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \quad (5.18)$$

$$K = \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} T^{\mu\nu} T^{\rho\tau} \quad (5.19)$$

Chamamos de M^2 o operador de massa quadrática relativístico. Para os casos em que $\mathcal{D}' \neq 0$, a relação (5.24) continua sendo válida, uma vez que S ocorre somente dentro dos comutadores e portanto podemos redefiní-lo como $S - \mathcal{D}'$.

Por outro lado, das eq.(5.12f) e (5.22) obtemos:

$$i[S, X_\mu] = \ell P_\mu \quad (5.25)$$

que nos sugere definir o operador quadrivelocidade X_μ por:

$$V_\mu = \frac{i}{\ell m} [S, X_\mu] \quad (5.26)$$

onde m é o autovalor de massa. Sabemos que a quadrivelocidade é a derivada da posição com respeito ao tempo próprio, conseqüentemente $\ell^{-1} m^{-1} S$ pode ser definido como o operador evolução com respeito ao tempo próprio*.

Generalizando:

$$\frac{d\Omega}{dU} = i[S, \Omega] \quad (5.27)$$

para qualquer operador Ω que é uma função de X_μ e P_μ . A forma integrada de (5.27):

$$\Omega(U) = \exp(iSU) \Omega(0) \exp(-iSU) \quad (5.28)$$

dã o desenvolvimento intrínseco de Ω e seu valor ini

*Tal implica na identificação de U com o tempo próprio na linha de universo de cada partícula. Entretanto tal identificação não segue do formalismo e foi ao nosso ver usado por Roman-Aghassi-Santilli por simples preconceito. Parece mais intuitivo identificar U com o tempo cosmológico dos astrônomos, mas nas insistiremos nesse argumento, nesse trabalho que está mais preocupado com o formalismo matemático.

cial $\Omega(0)$ a um instante arbitrário u .

Como vimos, o operador S desempenha um duplo papel, pois define o operador de massa quadrática H_1^2 e também age como um operador de evolução com respeito ao tempo próprio. Lembremos o papel análogo que a Hamiltoniana exibe em \tilde{G}_4 .

d) De (5.20) e (5.21), concluímos que:

$$k_{\mu\nu} = -\ell M_{\mu\nu} = P_\mu X_\nu - P_\nu X_\mu \quad (5.29)$$

pode ser encarado como o parceiro interno de $J_{\mu\nu}$. Os comutadores de $k_{\mu\nu}$ com P_μ, Q_μ, S e $J_{\mu\nu}$ são os mesmos como aqueles correspondentes à $J_{\mu\nu}$ e também $[k_{\mu\nu}, k_{\mu\nu}]$ tem a mesma estrutura que $[J_{\mu\nu}, J_{\rho\tau}]$. Também:

$$k_{ik} = P_i X_k - P_k X_i \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (5.30)$$

pode ser interpretado como o spin interno.

e) Uma realização explícita da álgebra de Lie (5.12) de \tilde{G}_5 no espaço de Hilbert $H (E^{3,1} \times E^1)$ construída sobre o espaço $E^{3,1} \times E^1$ é:

$$J_{\mu\nu} = i(X_\mu \partial_\nu - X_\nu \partial_\mu) + i \sum_{\mu\nu} \quad (5.31a)$$

$$L_\nu = i \partial_\nu \quad (5.31b)$$

$$G_\nu = i(H \partial_\nu - \ell^{-1} X_\nu) \quad (5.31c)$$

$$S = i \partial_u \quad (5.31d)$$

A matriz $i \sum_{\mu\nu}$ é chamada de parte de spin intrínseca de $J_{\mu\nu}$. Para (5.31) representar uma realização Hermi-
tiana, é necessário interpretar $\sum_{\mu\nu}$ como as matrizes de dimensão infinita associadas com as representações unitárias irredutíveis de $SL(2,C)$.

De (5.31c) vemos que a realização do operador posição X_μ pode ser escrita como:

$$X_\mu = x_\mu - \ell U P_\mu \tag{5.32}$$

Quando $U = 0$, isto é, no início do movimento o operador posição coincide com a variável x_μ . O desenvolvimento dinâmico produz um espalhamento da posição por uma região caracterizada por um comprimento fundamental ℓ , ou seja, a posição não é mais local.

f) Os operadores J e K (5.18) e (5.19) são os operadores de Casimir de uma álgebra $SL(2,C)$. Portanto, as representações unitárias irredutíveis desses operadores são

$$J' = a_0^2 + a_1^2 - 1 \quad k' = 2ia_0 a_1 \tag{5.33}$$

onde $a_0 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ $a_1 =$ imaginário puro arbitrário (5.34a)

nas representações pertencendo às séries principais e

$$a_0 = 0 \quad a_1 = \text{real arbitrário} \quad 0 < a_1 < 1 \tag{5.34b}$$

nas séries suplementares.

Os operadores de Casimir sugerem que as representações unitárias irredutíveis projetivas sejam denominadas por

- a) um número real arbitrário ℓ ,
- b) um número real arbitrário \mathcal{D} ,
- c) dois números quânticos a_0 e a_1 .

e a representação será simbolizada por $(\ell | \mathcal{D}, a_0, a_1)$.

Para explorar o significado físico dos números quânticos é necessário construir explicitamente as representações unitárias irredutíveis projetivas de $\tilde{\mathcal{G}}_5$. Estas são:

$$\begin{aligned}
 U(\exp(i\theta); \tau, a, b, \Lambda) |p_\mu, \Omega, \xi, \eta\rangle &= \\
 &= \exp[i(\Omega\tau + p_\mu a^\mu + \beta\theta)] \times [D^{a_0 a_1}(G)]_{\xi, \eta, \xi', \eta'} |p'_\mu, \Omega', \xi', \eta'\rangle
 \end{aligned}
 \tag{5.35}$$

onde p_μ e Ω são os autovalores de P_μ e S respectivamente, ξ e η nomeiam as componentes do espaço de representação de $SL(2, C)$. Nas representações unitárias irredutíveis de $SL(2, C)$, os rótulos ξ e η tomam os valores discretos:

$$\xi = a_0, a_0 + 1, a_0 + 2, \dots; \quad \eta = -\xi, -\xi + 1, \dots, \xi - 1, \xi
 \tag{5.36}$$

e p'_μ e Ω' são:

$$p'_\mu = \Lambda^{-1} (p_\mu - \ell^{-1} b_\mu); \quad \Omega' = \Omega + pb - \frac{1}{2} \ell^{-1} b^2
 \tag{5.37}$$

e $D^{a_0 a_1}(G)$ é uma matriz de dimensão infinita pertencen

do alguma representação irredutível de $SL(2, C)$, representando o elemento do grupo G .

Na representação $(\ell | \mathbb{D}, a_0, a_1)$ os significados dos números são:

- a) ℓ : comprimento universal
- b) \mathbb{D} : não possui significado e pode ser tomado como nulo, pois representações com diferentes \mathbb{D} são equivalentes.
- c) a_0 : é interpretado como spin eq. (5.29) e (5.31a). A equação (5.36) mostra que as representações descrevem não um único valor de spin, mas para cada representação $(\ell | \mathbb{D}, a_0, a_1)$, temos uma torre de estados de spin infinita, começando do mínimo $S = a_0$ até infinito. A cada valor $S = a_0 + n$, temos uma degenerescência de $(2S + 1)$.
- d) a_1 : não leva em si, uma interpretação simples, mas devemos dizer que ambos a_0 e a_1 selecionam uma torre infinita.

g) A realização de (5.17) em termos dos operadores infinitesimais é:

$$(\square - 2\ell^{-1} i \partial_u) \psi(x; u) = 0 \tag{5.38}$$

Esta equação é invariante sob \tilde{G}_5 . Por separação de variáveis:

$$\psi(x; u) = \psi(x) \cdot X(u) \tag{5.39}$$

obtemos

$$X(u) = \exp\left(i \frac{1}{2} \ell m^2 u\right) \quad e \quad (5.40)$$

$$(\square + m^2) \psi(x) = 0 \quad (5.41)$$

A equação (5.41) é a equação de Klein-Gordon, com a diferença que aqui m^2 aparece como uma constante de separação. A invariância sob \tilde{G}_5 é perdida, e agora temos invariância somente sob Poincaré. Porém a interpretação de (5.41) mudou, pois se na dinâmica quântica relativística essa equação significa um único estado, aqui, temos uma equação de autovalores que descreve uma família de estados com todos os valores permitidos para m^2 , isto é, com todas as massas possíveis. E novamente temos uma situação análoga à equação de Schrödinger estudada na seção (3.6).

As soluções de (5.41) são as ondas planas

$$\psi(x) = (2W_k)^{-1/2} \exp[i(W_k x_0 - k \cdot x)] \quad (5.42)$$

$$W_k = (k^2 + m^2)^{1/2}$$

Para um sistema invariante sob \tilde{G}_5 com um potencial $V(x^2)$, isto é, dependente somente de x^2 ;

$$[\square + V(x^2) + m^2] \psi(x) = 0 \quad (5.43)$$

nos dá um espectro de massa não trivial. Uma aproximação mais realística ao problema do espectro de massa seria combinar o grupo de simetria externa \tilde{G}_5 com algum grupo de

simetria interna como $SU(3)$ (da forma como esboçamos no início deste capítulo) e investigar a estrutura resultante em relação ao operador de massa. Como dissemos, \tilde{G}_5 não é uma extensão do grupo de Poincaré, de modo que o teorema de Flato-Sternheimer, nem o de O'Raifeartaigh, se aplicam, quando \tilde{G}_5 é estendido por simetrias internas.

V.3. Grupo de Sitter e \tilde{G}_5

O espaço de definição de \tilde{G}_5 , explicitamente $E^{3,1} \times E^1$ não é ligado com nenhuma métrica. Podemos questionar se existe algum espaço métrico com um grupo de movimentos que, por um procedimento limite bem definido de como resultante G_5 . Mostramos na seção (4.11) que o grupo de Galileu quântico emerge como a contração do grupo de cobertura da componente conexa do de Poincaré. Devemos assim, procurar por um grupo tal, que fazendo sua contração obteremos o grupo \tilde{G}_5 . A busca tem seu fim no grupo de Sitter inhomogêneo $ISO(3,2)$. O grupo mecânico quântico relativístico \tilde{G}_5 é o limite contraído do grupo de cobertura da componente conexa do grupo de Sitter inhomogêneo.

As vantagens de se estudar o grupo $ISO(3,2)$ é que estamos mais familiarizados com grupos de isometrias do que com a estrutura mais complicada de \tilde{G}_5 e também a representação de quantidades pertencendo a \tilde{G}_5 em termos dos limites das quantidades que pertencem a $ISO(3,2)$ ilumina a natureza de

importantes entidades físicas, tais como a operador de mas sa S e operadores Q_μ .

O grupo $ISO(3,2)$ é definido no espaço $E^{3,1} \times E^1$ com uma métrica, ou seja no espaço $E^{3,2}$. Chamando um ponto de $E^{3,2}$ por x^a , de maneira que para $a = 0, 1, 2, 3$, temos nossas coordenadas anteriores e:

$$x^4 = u \tag{5.44}$$

A métrica é definida pelo elemento de linha:

$$d\rho^2 = g_{ab} dx^a dx^b \tag{5.45}$$

onde:

$$\begin{aligned} g_{ab} &= 0 & a \neq b \\ g_{00} &= +1 \\ g_{11} &= g_{22} = g_{33} = -1 \\ g_{44} &= +k^2 \end{aligned} \tag{5.46}$$

g^{ab} é definido por:

$$g^{ac} g_{cb} = \delta_b^a + g_{44} = \frac{1}{k^2} \tag{5.47}$$

O grupo de isometrias de $E^{3,2}$ é o grupo de Sitter inhomôgêneo $ISO(3,2)$.

As transformações deste grupo são definidas por:

$$x^a + x'^a = \Omega_b^a x^b + B^a \tag{5.48}$$

onde B^a é um vetor de 5 dimensões constante.

A álgebra possui 15 geradores $J_{ab} = -J_{ba}$ e P_a .

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(g_{bc}J_{ac} - g_{ac}J_{bc} - g_{ad}J_{cb} + g_{bd}J_{ca}) \quad (5.49)$$

$$[P_a, J_{bc}] = i(g_{ab}P_c - g_{ac}P_b) \quad (5.50)$$

$$[P_a, P_b] = 0 \quad (5.51)$$

Escrevendo de uma outra forma:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\tau}] = i(g_{\nu\rho}J_{\mu\tau} - g_{\mu\rho}J_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}J_{\rho\nu} + g_{\nu\tau}J_{\rho\mu}) \quad (5.52a)$$

$$[P_\mu, J_{\rho\tau}] = i(g_{\mu\rho}P_\tau - g_{\mu\tau}P_\rho) \quad (5.52b)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (5.52c)$$

$$[J_{\mu\nu}, P_4] = 0 \quad (5.52d)$$

$$[P_\mu, P_4] = 0 \quad (5.52e)$$

$$[J_{4\mu}, J_{4\nu}] = ik^2 J_{\mu\nu} \quad (5.52f)$$

$$[P_\mu, J_{4\mu}] = -ig_{\mu\nu} P_\nu \quad (5.52g)$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{4\rho}] = i(g_{\nu\rho}J_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}J_{\nu\rho}) \quad (5.52h)$$

$$[P_4, J_{4\mu}] = ik^2 P_\mu \quad (5.52i)$$

Os operadores de Casimir de $ISO(3,2)$ são:

$$I_2 = P_a P^a = P_\mu P^\mu + P_4 P^4 \quad (5.53a)$$

$$I_4 = \frac{1}{2} W_{ab} W^{ab} = \frac{1}{2k^2} W_{\mu} W^{\mu} + \frac{1}{2} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \quad (5.53b)$$

$$I_3 = \frac{1}{4} W_{ab} J^{ab} = \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} (J_{\mu\nu} J_{\rho\tau} P_4 + k^2 J_{\mu\nu} M_{\sigma\tau} + k^2 M_{\mu\nu} J_{\sigma\tau}) \quad (5.53c)$$

com

$$W_{ab} = \epsilon_{abcde} J^{cd} P^e \quad (5.54)$$

$$W_{\mu} = \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} J^{\nu\sigma} P^{\tau} \quad (5.55)$$

$$H^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} (J_{\sigma\tau} \frac{P_4}{k^2} + M_{\sigma\tau}) \quad (5.56)$$

Para fazermos a contração da álgebra de $ISO(3,2)$ com respeito à álgebra de Poincaré $ISO(3,1)$ devemos fazer $J_{\mu\nu}$ e P_{ν} irem para zero relativamente a $J_{4\mu}$ e P_4 (ver seção (IV.7) sobre contração). Antes disso redefinimos os últimos operadores:

$$P_4 = \frac{k^2}{\ell} + S \quad (5.57)$$

$$J_{4\mu} = k^2 Q_{\mu} \quad (5.58)$$

Fazemos agora $k^2 \rightarrow \infty$, e as equações (5.52) demonstra que a contração da álgebra $ISO(3,2)$ dá como resultante a álgebra \mathfrak{g}_5 .

Quanto aos operadores de Casimir, das equações (5.57) e (5.58) temos:

$$P_4 P^4 = g_{44} P_4 P_4 = \frac{k^2}{\ell^2} + \frac{2S}{\ell} + \frac{S^2}{k^2} \quad (5.59)$$

$$I_2' = I_2 - \frac{k^2}{\ell^2} = P_a P^a - \frac{k}{\ell} \quad (5.60)$$

e sob contração:

$$I_2' \rightarrow \mathcal{D} \quad (5.61)$$

$$H^{\mu\nu} \rightarrow \ell^{-1} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} T_{\sigma\tau} \quad (5.62)$$

Assim redefinindo I_4 como:

$$I_4' = \ell^2 I_4 \quad (5.63)$$

obtemos depois da contração:

$$I_4' \rightarrow \mathcal{J} \quad (5.64)$$

E para fazermos a contração de I , redefinimos primeira mente:

$$I_3' = \ell I_3 / k^2 \quad (5.65)$$

e sob contração

$$I_3' \rightarrow k \quad (5.66)$$

Comprovamos assim, que o grupo $\tilde{\mathcal{G}}_5$ pode ser obtido por contração da cobertura da componente conexa do grupo de Sitter inhomogêneo $ISO(3,2)$, da mesma forma como $\tilde{\mathcal{G}}_4$ é obtido por contração do grupo de cobertura da componente conexa

do grupo de Poincaré.

De nossos cálculos, como visto na equação (5.59), nosso operador S é essencialmente a parte finita do operador de translação P_4 do universo de de Sitter, e vemos então que há fundamento em se considerar S como um operador evolução.

Se definirmos o tempo próprio τ em $E^{3,2}$ colocando:

$$d\rho = k d\tau \tag{5.67}$$

temos:

$$d\tau^2 = (1/k^2) dx_\mu dx^\mu + (dx^4)^2 \tag{5.68}$$

de tal maneira que depois da contração $k^2 \rightarrow \infty$ obtemos:

$$d\tau + dx^4 = du \tag{5.69}$$

Esta foi a razão de Aghassi-Roman-Santilli terem identificado u com o tempo próprio da teoria da relatividade.

Os autores do grupo \tilde{G}_5 discutem também as aplicações físicas interessantes que poderão advir do uso desse novo grupo.

Os aspectos atrativos do grupo \tilde{G}_5 são a presença de um operador espaço-tempo relativístico, de um operador evolução covariante e de um operador de massa quadrática em sua álgebra de Lie.

Outro aspecto interessante é a ocorrência de estados de spin de torres infinitas, que surgem devido à substituição das representações unitárias irredutíveis de \mathcal{P} pelas de $\tilde{\mathcal{G}}_5$. Cada uma dessas representações projetivas descreve uma partícula com dado spin mínimo S e suas recorrências com spins $S+1, S+2, \dots$. Um possível uso dessas representações seria utilizá-las na descrição de famílias de hádrons, levando em conta os resultados experimentais que evidencia as recorrências de hádrons com spin crescente. O uso dessas representações para descrever famílias de hádrons seria semelhante às investigações baseadas sobre equações de onda, de infinitas componentes invariantes por Lorentz.

A associação do espectro de massa com os níveis de uma torre infinita parece promissor. Das equações de onda associadas com uma dada torre, isto é, associada com funções de onda pertencendo à uma dada representação unitária irredutível projetiva de $\tilde{\mathcal{G}}_5$, poderíamos extrair um espectro de massa. Isso poderia ter sido feito de maneira análoga à extração do espectro de massa das equações de Majorana.

Quanto ao parâmetro l^{-1} , vimos que ele dá origem a uma regra de superseleção. Assim, somos tentados a associar todas as torres de um único bárion (com spin mínimo $S=1/2$) com um valor fixo de l^{-1} , e um sistema consistindo de n torres de bárion seria caracterizado por ηl^{-1} . Ao valor

$\ell^{-1} = 0$, somos levados a associar partículas. Para $\ell^{-1} = 0$ as representações de \tilde{G}_5 degeneram nas representações de Poincaré, como pode ser visto ao se comparar as duas álgebras, portanto partículas com $\ell^{-1} = 0$ não pertencem a torres.

Vimos de (5.2e) que o aparecimento de ℓ^{-1} pode estar ligado a algum caráter não local da teoria de \tilde{G}_5 .

Referências: [01], [02], [08], [18], [20], [21], [22], [23].

BIBLIOGRAFIA

- [01] AGHASSI, J.J. - ROMAN, P. - and SANTILLI, R.M.
New Dynamical Group for the Relativistic Quantum Mechanics of Elementary Particles
Physical Review D. vol.1 n° 10 pág.2753 (1970)
- [02] AGHASSI, J.J. - ROMAN, P. - and SANTILLI, R.M.
Relation of the Inhomogeneous de Sitter Group to the Quantum Mechanics of Elementary Particles
Journal of Mathematical Physics - vol.11 n° 08 pág.2297
- [03] AUSLANDER, L. - MACKENZIE, R.E.
Introduction to Differentiable Manifolds
Dover Publications, Inc., New York (1963)
- [04] BACRY, H.
Lectures on Group Theory and Particle Theory
Gordon and Breach Science Publishers (1977)
- [05] BARGMANN, V.
On Unitary Ray Representation of Continuous Groups
Annals of Mathematics, vol.59, n° 1 (1954)
- [06] CHEVALLEY, C.
Theory of Lie Groups
Princeton University Press - United States of America (1940)
- [07] DIRAC, P.A.M.
Forms of Relativistic Dynamics
Reviews of Modern Physics - 21, 3, 392 (1949)

- [08] FLATO, M. - and STERNHEIMER, D.
On the Connection between External and Internal Symmetries of Strongly Interacting Particles
Journal of Mathematical Physics, 7, 11, 1932 (1966)
- [09] FONDA, L. - and GHIRARDI, G.C.
Symmetry Principles in Quantum Physics
Marcel Dekker - Inc., New York (1970)
- [10] GILMORE, R.
Lie Groups, Lie Algebras and some of their Applications
J. Wiley (1974)
- [11] HAMMERMESH, M.
Galilean Invariance and the Schrödinger Equation
Annals of Physics, 9, pág. 518
- [12] HAMMERMESH, M.
Group Theory and Its Application to Physical Problems
Addison-Wesley, Reading, Mass (1962)
- [13] HERMANN, R.
Lie Group for Physicists
The Benjamin Cummings Publishing Company, Inc., Advanced Book Program (1966)
- [14] INONU, E. - and WIGNER, E.P.
On the Contraction of Groups and their Representations
Proc. Natl. Acad. U. S., 39, pág. 510 (1953)
- [15] INONU, E. - and WIGNER, E.P.
Representation of the Galilei Group
Il Nuovo Cimento, vol. IX, 8, pág. 705

- [16] JEAN-MARC LEVY-LEBLOND
Galilei Group and Nonrelativistic Quantum Mechanics
Journal of Mathematical Physics, 4, 6, 776 (1963)
- [17] MEIJER, P.H.E. - BAUER, E.
Group Theory the Application to Quantum Mechanics
North-Holland Publishing Company - Amsterdam (1962)
- [18] MILLER, W. Jr.
Symmetry Group and their Applications
Academic Press - New York (1972)
- [19] MONTEIRO, J.
Elementos de Álgebra
Livros Técnicos e Científicos - Rio de Janeiro (1974)
- [20] NEWTON, T.D. - and WIGNER, E.P.
Localized States for Elementary Systems
Reviews of Modern Physics, 21, 3, 400 (1949)
- [21] O'RAIFEARTAIGH, L.
Lorentz Invariance and Internal Symmetry
Physical Review, vol. 139, nº 4B, 1052 (1965)
- [22] O'RAIFEARTAIGH, L.
Unitary Representations of Lie Group in Quantum Mechanics
Lecture Notes in Physics, 6, Springer-Verlag, (1970)
- [23] ROMAN, P. - and KOH, C.
A Sharpening of O'Raifeartaigh Theorem
Il Nuovo Cimento, 39, 3, 1015, (1965)

- [24] VOISIN, J.
On Some Unitary Representations of the Galilei Group I.
Irreducible Representations
Journal of Mathematical Physics, vol.6, 10, 1519, (1965)
- [25] WEYL, H.
The Theory of Groups and Quantum Mechanics
Dover Publications, Inc. (1955)
- [26] WIGNER, E. P.
Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra
Academic Press, New York and London (1959)
- [27] WIGNER, E. P.
Relativistic Invariance in Quantum Mechanics
Il Nuovo Cimento, vol. III, 3, 518 (1956)
- [28] YVONNE CHOQUET-BRUHAT - CÉCILE DEWITT-MORETTE -
MARGARET DILLARD-BLEICK
Analysis, Manifolds and Physics
- [29] WERLE, J.
Relativistic theory of reactions
Noth-Holland Publishing Company, Amsterdam (1966)
- [30] MACKEY, G. W.
The theory of unitary group representation
The University of Chicago Press, Chicago and London

BC

doaca
10/8/83